

BİR RADİKAL HALKANIN
ADJOİNT GRUBU VE LİE HALKASI
ÜZERİNE ÇALIŞMALAR

ON THE ASSOCIATED LİE RİNG
AND
THE ADJOİNT GROUP OF A RADICAL RİNG

Zülâl KABALAK

Hacettepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

BİR RADİKAL HALKANIN ADJOİNT GRUBU VE LİE HALKASI ÜZERİNE ÇALIŞMALAR

Zülâl KABALAK

ÖZ

R bir halka olsun. Eğer R halkasının Jacobson radikali kendisine eşit ise, diğer bir deyişle R halkası, her $a, b \in R$ için $aob = a + b + ab$ işlemi ile bir grup formunda ise R halkasına radikal halka denir. Bu grup R halkasının adjoint grubu olarak adlandırılır. Lie halka, çarpma işlemi olarak $[a, b]$ alındığında aşağıdaki iki özelliği sağlayan birleşmeli olmayan ve birimsiz bir halka olarak tanımlanır.

$$(i) [a, a] = 0 \quad (\text{anti-commutativity})$$

$$(ii) [[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0 \quad (\text{Jacobi identity})$$

Bir Lie halkanın I ve J idealleri göz önüne alındığında, $\{[a, b] \mid a \in I, b \in J\}$ kümesi tarafından üretilen toplamsal alt grubunun, aynı zamanda Lie halkanın bir ideali olduğu, Jacobi identity özelliğinden yararlanarak kolayca görülür.

S.A. Jennings "Radical Rings with Nilpotent Associated Groups" başlıklı makalesinde, bir radikal halkanın, Lie halkasının nilpotent olması için gerek ve yeter koşulun adjoint grubunun nilpotent olması gerektiğini kanıtlamıştır. S.A. Jennings bu iki yapının nilpotentlik sınıflarının aynı olduğu savını ortaya atmış ve bunu, karakteristiği sıfır olan nilpotent cebirler için kanıtlamıştır. Bu savın radikal halkalar için kanıtı X. Du tarafından yapılmıştır.

Bu çalışmada S.A. Jennings'in "Radical Rings with Nilpotent Associated Groups", X. Du'nun "The Centers of Radical Rings", B. Amberg ve Y.P. Sysak'ın "Radical Rings with Soluble Adjoint Groups" adlı makalelerini inceledik. Üçüncü bölümde, S.A. Jennings ve X. Du'nun çalışmalarının detaylı ve açık kanıtlarını verdik. Çalışmamızın son bölümünde, B. Amberg ve Y.P. Sysak'ın, her radikal halkanın bazı koşullar altında Lie-çözülebilir olduğunda $G(R)$ adjoint grubunun çözülebilir olduğunu gösterdikleri makalelerini inceledik.

Anahtar Kelimeler: Radikal halka, adjoint grup, Lie halka.

Danışman: Doç. Dr. Feride KUZUCUOĞLU, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

ON THE ASSOCIATED LIE RING AND THE ADJOINT GROUP OF A RADICAL RING

Zülâl KABALAK

ABSTRACT

A ring R is called radical ring if it coincides with its Jacobson radical, which means that R forms a group under the operation $aob = a + b + ab$ for all a and b in R . This group is called the adjoint group of R . A Lie ring is a nonassociative ring without identity, whose multiplication which is usually denoted by brackets $[a, b]$ satisfies the following axioms:

- (i) $[a, a] = 0$ (anti-commutativity)
- (ii) $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ (Jacobi identity)

From the Jacobi identity it is not difficult to deduce that if I and J are the ideals of a Lie ring, then the additive subgroup generated by the set of commutators $\{[a, b] \mid a \in I, b \in J\}$ is also an ideal of the Lie ring.

It was shown by S.A. Jennings in his article whose name is "Radical Rings with Nilpotent Associated Groups" that the associated Lie ring of a radical is nilpotent if and only if its adjoint group is nilpotent. He conjectured that the nilpotent classes of them are the same in this case, and he could prove this for nilpotent algebras of characteristic 0. The conjecture is proved by X.Du.

In this thesis, we study the papers of S.A. Jennings, X. Du, B. Amberg and Y.P. Sysak entitled respectively "Radical Rings with Nilpotent Associated Groups", "The Centers of a Radical Ring" and "Radical Rings with Soluble Adjoint Groups". In chapter three, we offer a clarified and detailed proofs of the works of S.A. Jennings and X. Du. In the last chapter of our thesis, we studied the paper of B. Amberg and Y.P. Sysak which it is proved that adjoint group $G(R)$ of a radical ring R which is Lie-soluble and satisfies some conditions must be soluble.

Key Words: Radical ring, adjoint group, Lie ring.

Advisor: Associate Prof. Dr. Feride KUZUCUOĞLU, Hacettepe University, Faculty of Science, Department of Mathematics.

TEŞEKKÜR

Fikirleriyle, önerileriyle ve eleştirileriyle bana yol gösteren değerli hocam Sayın Doç. Dr. Feride KUZUCUOĞLU'na ayırdığı zaman, verdiği emek, gösterdiği sabır ve anlayış için,

Prof. Dr. Adnan TERCAN'a ve Doç. Dr. Gülin ERCAN'a tezin son metninin oluşturulmasındaki katkıları için,

Hiçbir desteğini esirgemeyen canım annem ve canım babama yirmialtı yıldır yaptıkları bütün fedakarlıklar için,

Bilgileriyle ve tecrübeleriyle her an yanımda olup bana güven veren sevgili ağabeyim ve sevgili ablama verdikleri destek ve manevi katkıları için,

Tezin yazımı ve hazırlanmasında emeği geçen isimlerini sayamadığım herkese yardımları için,

sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZ	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
1 GİRİŞ	1
2 ÖN BİLGİLER	5
3 $G(R)$ VE $\Lambda(R)$ 'NİN NİLPOTENTLİĞİ	19
3.1 $G(R)$ ve $\Lambda(R)$ 'nin Nilpotentliğinin Karşılaştırılması	19
3.1.1 $G(R)$ ve $\Lambda(R)$ 'nin komutatörleri	19
3.1.2 $G(R)$ nilpotent iken $\Lambda(R)$ 'nin nilpotentliği	24
3.1.3 $\Lambda(R)$ nilpotent iken $G(R)$ 'nin nilpotentliği	30
3.2 $G(R)$ ve $\Lambda(R)$ 'nin Nilpotentlik Sınıflarının Eşitliği	33
3.2.1 Karakteristiği sıfır olan nilpotent cebirler	33
3.2.2 Radikal halkalar	35
4 ADJOİNT GRUBU ÇÖZÜLEBİLİR OLAN RADİKAL HALKALAR	50
4.1 Asal Radikal Halkalar	50
4.2 Kuvvetli Lie-Hyperabelian Halkalar	57
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	69

SİMGELER VE KISALTMALAR

o	: Adjoint çarpımı
$[,]$	: Lie çarpımı
$Ann(M)$	: M modülünün sıfırlayıcısı
$l(S)$	: R halkasının bir S alt kümesinin sol sıfırlayıcısı
$r(S)$	: R halkasının bir S alt kümesinin sağ sıfırlayıcısı
$G(R)$	: R radikal halkasının adjoint grubu
$\Lambda(R)$	: R radikal halkasının Lie halkası
$J(R)$	: R halkasının Jacobson radikali
$G(R)_n$	: $G(R)$ adjoint grubunun aşağı merkez serisinin n . alt grubu
$\Lambda(R)^n$	: $\Lambda(R)$ Lie halkasının aşağı merkez serisinin n . terimi
Z_n	: R radikal halkasının yukarı merkez serisinin n . terimi
Y_n	: $G(R)$ adjoint grubunun yukarı merkez serisinin n . alt grubu
$\delta_n(\Lambda(R))$	: $\Lambda(R)$ Lie halkasının çözülebilirlik serisinin n . terimi
$\lambda_n(G(R))$	: $G(R)$ adjoint grubunun çözülebilirlik serisinin n . terimi
$Z(K)$	: K halkasının merkezi
μ_n	: R radikal halkasının $1 + R$ çarpım grubunun n . komutatör alt grubu
ν_n	: R radikal halkasının Lie halka olarak n . komutatör ideali
■	: Kanıt sonu

1 GİRİŞ

R herhangi bir halka olsun. R üzerinde aşağıdaki gibi yeni bir işlem tanımlayalım.

Her $x, y \in R$ için

$$xoy = x + y + xy$$

olsun. Bu durumda, (R, o) birim elemanı halkanın sıfır elemanı olan bir yarı-gruptur. Bu yarı-grubun tersinir elemanlarından oluşan grup, R halkasının adjoint grubu olarak adlandırılır ve $G(R)$ ile gösterilir. Eğer R halkası "o" işlemine göre bir grup oluyorsa ya da buna denk olarak R 'nin Jacobson radikali $J(R)$, R halkasına eşitse R 'ye Jacobson anlamında *radikal halka* denir. Böyle halkaların birim elemana sahip olamayacağı açıktır. Biz, birimsiz bir halkanın birimli bir halka içine gömülebileceğini biliyoruz. Eğer R radikal halkası birimli bir R_1 halkası içine gömülürse, R 'nin adjoint grubu $G(R)$ 'nin, R_1 'in bilinen çarpma işlemine göre tersinir elemanlarından oluşan grubun alt grubu olan $1 + R$ ile eş yapılı olduğu kolayca gösterilebilir. Radikal halkaların alt halkalarının radikal olması gerekmez (Bkz. Örnek 2.23). Fakat; sağ, sol, iki-yanlı idealleri ve homomorfik görüntüleri daima radikaldir.

Her elemanı nilpotent olan halkaya *nil halka* denir. Her nil halkanın radikal halka olduğu açıktır. Eğer R halkasından alınan herhangi n tane elemanın çarpımı sıfırsa R 'ye *nilpotent halka*, bu n 'lerin en küçüğüne de R 'nin *nilpotentlik sınıfı* denir.

$$\{\text{Nilpotent halkalar}\} \subset \{\text{Nil halkalar}\} \subset \{\text{Radikal halkalar}\}$$

R nilpotent bir halka ise $G(R)$ nilpotent bir gruptur (Bkz. Teorem 2.33).

Eğer herhangi bir L halkası (birleşmeli olması gerekmez) aşağıdaki iki koşulu sağlarsa L 'ye bir *Lie halka* denir. Her $a, b, c \in L$ için

$$(i) \quad a^2 = 0 \quad (\text{anti-commutativity})$$

$$(ii) \quad (ab)c + (bc)a + (ca)b = 0 \quad (\text{Jacobi identity})$$

Birleşmeli bir R halkasının $[x, y] = xy - yx$ işlemi ile bir Lie halka olduğu kolaylıkla görülebilir.

V ve W , R halkasının herhangi iki toplamsal alt grubu ise $v \in V$ ve $w \in W$ olmak üzere bütün $[v, w]$ Lie komutatörleri ile üretilen R halkasının toplamsal alt grubunu $[V, W]$ ile göstereceğiz. Eğer $[V, R] \subseteq V$ ise V 'ye R halkasının bir Lie ideali diyeceğiz.

$a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ R halkasının elemanları olmak üzere $[a_1, \dots, a_{n+1}]$ Lie komutatörleri, $[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1$ ve her $n \geq 2$ için $[a_1, \dots, a_{n+1}] = [[a_1, \dots, a_n], a_{n+1}]$ ile tanımlanır. Eğer her $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in R$ için $[a_1, a_2, \dots, a_{n+1}] = 0$ oluyorsa R halkasına nilpotentlik sınıfı en fazla n olan *Lie-nilpotent halka* denir.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümünü, ikinci bölüm çalışma için gerekli ön bilgileri içermektedir. Üçüncü bölümde ise S.A. Jennings [2]'in ve X.Du [7]'nin makaleleri ayrı ayrı ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, herhangi bir R radikal halkasının adjoint grubu nilpotenttir ancak ve ancak R Lie-nilpotent halkadır teoremi ayrıntılı olarak kanıtlanmıştır. Ayrıca S.A. Jennings bu makalede, R radikal halkasının adjoint grubu $G(R)$ 'nin nilpotentlik sınıfı ile R 'nin Lie halkası $\Lambda(R)$ 'nin nilpotentlik sınıflarının aynı olacağı savını ortaya atmıştır. Kendisi bunun karakteristiği sıfır olan nilpotent cebirler için doğru olduğunu göstermiş fakat, genel durumda radikal halkalar için kanıtlanamamıştır. Daha sonra 1984 yılında H.Laue [6] radikal halkanın n . merkezinin, adjoint grubun n . merkezine karşılık geldiği savını ortaya atmıştır ve bunu $n = 2$ için ispat etmiştir. 1992 yılında X.Du [7], S.A. Jennings ve H. Laue'nun savlarını kanıtlayarak, bir radikal halkanın adjoint grubunun nilpotentlik sınıfı ile Lie halkasının nilpotentlik sınıfının aynı olduğunu göstermiştir. X. Du' nun bu makalesi üçüncü bölümün ikinci kısmında ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bir R Lie halkasının çözülebilirlik serisi $\delta_0(R) = R$ olmak üzere her $n \geq 0$ için

$$\delta_{n+1}(R) = [\delta_n(R), \delta_n(R)]$$

olarak tanımlanır. Eğer bir m tam sayısı için $\delta_m(R) = (0)$ ise R halkasına, uzunluğu en fazla m olan *Lie-çözülebilir halka* denir. Lie komutatör yerine grup komutatör alındığında, $G(R)$ adjoint grubunun çözülebilirlik serisi elde edilir.

Bir R halkası aşağıdaki iki koşulu sağlarsa, R halkasına bir *sağ (sol) Goldie halka* denir.

- (i) R 'nin sıfırdan farklı sağ (sol) ideallerinin sağ (sol) sıfırlayıcılarının boştan farklı her alt kümesinin bir maksimal elemanı vardır.
- (ii) R sağ (sol) ideallerinin hiçbir sonsuz direkt toplamını içermez.

Bir halka hem sol hem de sağ Goldie halka ise, bu halkaya *Goldie halka* denir.

Bu çalışmanın dördüncü ve son bölümünde temel olarak aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Teorem 4.1.7: R , adjoint grubu çözülebilir olan asal radikal bir halka olsun. Bu takdirde R Goldie halkadır.

Teorem 4.2.9: R bir radikal halka olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanırsa $G(R)$ adjoint grubu en fazla n uzunluğunda çözülebilir gruptur.

- (1) R , n 'ye bağlı bir l pozitif tam sayısı için en fazla l uzunluğunda Lie-çözülebilirdir.
- (2) R halkasının ideallerinin n 'ye bağlı bir m pozitif tam sayısı için

$$(0) = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_m = R$$

olacak şekilde m uzunluğunda bir zinciri vardır. Burada, her $1 \leq i \leq m$ için I_i/I_{i-1} faktörleri R/I_{i-1} 'in değişmeli idealleri tarafından üretilir.

Radikal halkaların adjoint grupları ile toplamsal grupları arasındaki ilişkiler, Lie halkalarıyla adjoint gruplar arasındaki ilişkileri ortaya koyan problemler üzerine çalışmalar devam etmektedir. Aşağıdaki problemler bu konuyla ilgili şimdiye kadar çözülememiş problemlerdir.

Problem 1: Adjoint grubunun bütün normal alt gruplarının sınıfı ile bütün Lie ideallerinin sınıfının aynı olduğu radikal halkalar karakterize edilebilir mi?

Problem 2: Bir radikal halkanın adjoint grubunun yapısı hakkında neler söylenebilir?

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, radikal halka teorisinde yer alan ve daha sonraki bölümlerde gerekli olan temel tanımlardan ve ilgili teoremlerden bahsedilecektir.

Tanım 2.1 : R bir halka ve M bir sağ R -modül olsun.

$$\text{Ann}(M) = \{x \in R \mid Mx = 0\}$$

kümesine M modülünün sıfırlayıcısı (*annihilator*) denir.

Önteorem 2.2 : R bir halka ve M bir sağ R -modül olsun. $\text{Ann}(M)$, R halkasının bir idealidir.

İspat: ([4], Lemma 1.1.1). ■

Tanım 2.3 : M bir sağ R -modül olsun. $MR \neq (0)$ ve eğer M 'nin (0) ve kendisinden başka alt modülü yoksa, M 'ye indirgenemez (*irreducible*) R -modül denir.

Önteorem 2.4 : M indirgenemez bir sağ R -modül olsun. O zaman; P sağ ideali, R 'nin bir maksimal sağ ideali olmak üzere M modülü R/P 'ye izomorftur. Üstelik, her $x \in R$ için $x - ax \in P$ olacak şekilde bir $a \in R$ vardır.

İspat: ([4], Lemma 1.1.3). ■

Tanım 2.5 : R herhangi bir birleşmeli halka olsun. R 'nin bütün indirgenemez R -modüllerini sıfırlayan, R 'nin elemanlarının kümesine R halkasının *Jacobson Radikali* denir ve $J(R)$ ile gösterilir.

Dikkat edilirse, $J(R) = \cap \text{Ann}(M)$; burada M , bütün indirgenemez R -modüllere karşılık gelir. Önteorem 2.2'den her M için $\text{Ann}(M)$, R 'nin iki-yanlı bir ideali olduğundan $\cap \text{Ann}(M) = J(R)$ de R 'nin iki-yanlı bir idealidir.

$J(R)$ bütün sağ R -modüller bakımından tanımlandığından $J(R)$ 'ye R 'nin sağ radikali demek uygun olur. Benzer şekilde, sol radikal tanımlanabilir.

Tanım 2.6 : R bir halka ve P , R 'nin bir sağ ideali olsun. Eğer her $x \in R$ için $x - ax \in P$ olacak şekilde bir $a \in R$ varsa P 'ye *regülerdir* denir.

Eğer R birim elemana sahipse (sol-iki yanlı) R 'nin bütün idealleri regülerdir.

Tanım 2.7 : R bir halka ve P , R 'nin bir sağ ideali olsun.

$$(P : R) = \{x \in R \mid Rx \subset P\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.8 : R bir halka olsun. P , R 'nin bütün maksimal regüler sağ ideallerini göstermek üzere $J(R) = \cap(P : R)$ dir. Ayrıca, $(P : R)$, R 'nin P içindeki en büyük iki-yanlı idealdir.

İspat: ([4], Theorem 1.2.1). ■

Önteorem 2.9 : R bir halka ve P , R 'nin sağ ideali olsun. P , R 'nin regüler olan bir maksimal ideali içinde kapsanır.

İspat: ([4], Lemma 1.2.1). ■

Teorem 2.10 : R bir halka olsun. P , R 'nin bütün maksimal regüler sağ idealleri olmak üzere $J(R) = \cap P$ dir.

İspat: Teorem 2.8'den $J(R) = \cap(P : R)$ ve $(P : R) \subset P$ olduğundan $J(R) \subset \cap P$ elde edilir.

$T = \cap P$ diyelim. $x \in T$ için $K = \{xy + yx \mid y \in R\}$ kümesini tanımlayalım. Şimdi $K = R$ olduğunu göstereceğiz. $K \neq R$ olduğunu kabul edelim. $a = -x$ alınırsa R 'nin her y elemanı için $y - ay = y + xy \in K$ olup K , R 'nin regüler bir sağ idealidir. Önteorem 2.9' dan K , bir P_0 maksimal regüler sağ ideali içinde kapsanır. $x \in T = \cap P$ ve dolayısıyla $x \in P_0$ olup R 'nin her y elemanı için $xy \in P_0$ bulunur. Bu durumda $y \in P_0$ olur ki, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla,

$$R = \{xy + y \mid y \in R\}$$

dir. Özel olarak, bazı $w \in R$ için $-x = w + xw$ olur. Bu eşitlik düzenlenirse aşağıdaki ifade elde edilir.

Her $x \in T$ için $x + w + xw = 0$ olacak şekilde bir $w \in R$ vardır.

Şimdi $T \subset J(R)$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Tersini kabul edelim. O zaman, en az bir M indirgenemez sağ R -modül için $MT \neq (0)$ dır. Bu durumda $mT \neq (0)$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. mT , M 'nin sıfırdan farklı bir alt modülü olduğundan $mT = M$ olmalıdır. Bu takdirde, $mt = -m$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır. $t \in T$ için $t + s + ts = 0$ olacak şekilde R 'nin bir s elemanının varlığını gördük. Böylece,

$$0 = m(t + s + ts) = mt + ms + mts = -m + ms - ms = -m$$

olur ki, bu $m \neq 0$ olması ile çelişir. Yani $T \subset J(R)$ elde edilir. ■

Teorem 2.10'un ispatında $J(R)$ 'nin her x elemanı için $x + y + xy = 0$ olacak şekilde bir $y \in R$ 'nin varlığını gördük.

Tanım 2.11 : R bir halka olsun. Bir $a \in R$ için $a + a' + aa' = 0$ olacak şekilde bir $a' \in R$ varsa a 'ya *sağ-quasi-regüler eleman* denir. a' elemanına da a 'nın bir *sağ-quasi-tersi* denir.

Tanım 2.12 : R bir halka ve P , R 'nin bir sağ ideali olsun. P 'nin her elemanı sağ-quasi-regüler ise P 'ye *sağ-quasi-regüler ideal* denir.

Teorem 2.13 : R bir halka olsun. $J(R)$, R 'nin bir sağ-quasi-regüler idealidir. Üstelik, R 'nin bütün sağ-quasi-regüler idealleri $J(R)$ içinde kapsanır. Diğer bir deyişle; $J(R)$, R 'nin tek maksimal sağ-quasi-regüler idealidir.

İspat: Teorem 2.10'un direkt sonucu olarak elde edilir. ■

Teorem 2.14 : R bir halka ve $a \in R$ hem sol hem de sağ-quasi-regüler eleman olsun. O zaman a 'nın sağ ve sol-quasi-regüler-tersleri aynıdır.

İspat: $a \in R$ sağ-quasi-regüler olduğundan $a + b + ab = 0$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır. Benzer şekilde, $a \in R$ sol-quasi-regüler olduğundan $a + c + ca = 0$ olacak şekilde bir $c \in R$ vardır. Burada, ilk eşitliğin her iki tarafı c ile soldan, ikinci eşitliğin her iki tarafı b ile sağdan çarpılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$ca + cb + cab = 0 \quad \text{ve} \quad ab + cb + cab = 0$$

Buradan $ab = ca$ olup, $a + b + ab = a + c + ca = 0$ olduğu da kullanılarak $b = c$ elde edilir. ■

Teorem 2.15 : R bir halka olsun. $J(R)$, R 'nin sol-quasi-regüler idealidir.

İspat: a , $J(R)$ 'nin herhangi bir elemanı olsun. O zaman, Teorem 2.13'den a sağ-quasi-regülerdir. Bu durumda $a + a' + aa' = 0$ olacak şekilde bir $a' \in R$ vardır. $a' = -a - aa'$ olup, $J(R)$ bir ideal olduğundan $a' \in J(R)$ elde edilir. Benzer şekilde, bir $a'' \in J(R)$ için $a' + a'' + a'a'' = 0$ dır. Böylece; a' , a'' gibi bir sağ-quasi-terse sahiptir. Teorem 2.14'den $a'' = a$ elde edilir. Böylece $a + a' + a'a = 0$ olup, a sol-quasi-regülerdir. $J(R)$ 'nin her elemanı sol-quasi-regüler olduğundan, $J(R)$ sol- quasi-regüler idealdir. ■

Bu teorem, sağ ve sol radikalın farklı olması endişelerini ortadan kaldırır. Yani, bir halkanın maksimal regüler sağ ideallerinin kesişimi, maksimal regüler sol ideallerinin kesişimine eşittir.

Tanım 2.16 : R bir halka olsun. R üzerinde her $x, y \in R$ için aşağıdaki şekilde yeni bir işlem tanımlayalım.

$$xoy = x + y + xy$$

Her halka bu işleme göre bir yarı-gruptur. Dikkat edilirse, R 'nin sıfır elemanı " o " işleminin etkisiz elemanıdır. R halkasının Jacobson radikali göz önüne alındığında, Teorem 2.10'un sonucu olarak, her $x \in J(R)$ için $x + x' + xx' = 0 = x + x' + x'x$ olacak şekilde bir $x' \in J(R)$ var olduğundan $(J(R), o)$ bir gruptur.

Tanım 2.17 : R bir halka olsun. Eğer her $x \in R$ için

$$(2.17.1) \quad xox' = x + x' + xx' = 0$$

olacak şekilde bir $x' \in R$ varsa bu halkaya (Jacobson anlamında) *radikal halka* denir. Diğer bir ifadeyle, Jacobson radikali kendisine eşit olan halkaya *radikal halka* denir.

Tanım 2.18 : R bir halka olsun. m pozitif bir tam sayı olmak üzere, $a \in R$ için $a^m = 0$ ise a 'ya *nilpotent eleman* denir. Her elemanı nilpotent olan halkaya da *nil halka* denir.

Tanım 2.19 : R bir halka olsun. R 'den alınan herhangi n tane elemanın çarpımı sıfır ise R halkasına *nilpotent halka* denir. Bu koşulu sağlayan en küçük n sayısına da R halkasının *nilpotentlik sınıfı* denir.

Her nilpotent halkanın bir nil halka olduğu açıktır. Fakat, her nil halka nilpotent halka değildir. Bunu aşağıdaki örnekle görebiliriz.

Örnek 2.20 : p bir asal sayı olmak üzere

$$R = \sum_{n \geq 1} \mathbb{Z}_{p^n} = \{(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m}, \overline{0}, \overline{0}, \dots) \mid \overline{a_i} \in \mathbb{Z}_{p^i} \ ; \ i = 1, 2, \dots, m\}$$

olsun. Bu durumda R 'nin birimli ve değişmeli bir halka olduğu açıktır. $\overline{p^n} = \overline{p}^n = 0$ olduğundan $\overline{p}$ elemanı $\mathbb{Z}_{p^n}$ içinde nilpotent bir elemandır. Böylece, herhangi bir $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{p^n}$ için $\overline{p} \overline{a} = \overline{p\overline{a}}$ nilpotent bir elemandır.

$I = \{(\overline{pa_1}, \overline{pa_2}, \dots, \overline{pa_m}, \overline{0}, \overline{0}, \dots) \mid n \in \mathbb{N}; \overline{a_i} \in \mathbb{Z}_{p^i}; i = 1, 2, \dots, m\}$ alalım. I , R 'nin bir idealidir. Yukarıda yapılan açıklama dikkate alınır, I 'nin her elemanı nilpotenttir. Dolayısıyla, I nil idealdir.

Şimdi I 'nin nilpotent olmadığını gösterelim. I 'nin nilpotent olduğunu kabul edelim. O zaman, $I^m = (0)$ olacak şekilde bir m pozitif tamsayısı vardır.

$$a = (\underbrace{\overline{p}, \overline{p}, \dots, \overline{p}}_{(m+1) \text{ tane}}, \overline{0}, \overline{0}, \dots) \in I$$

alalım. Bu durumda,

$$a^m = (\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0}, \underbrace{\bar{p}^m}_{(m+1). \text{ eleman}}, \bar{0}, \dots)$$

olup, $\bar{p}^m$ elemanı $\mathbb{Z}_{p^{m+1}}$ içinde sıfır olmadığından $a^m \neq 0$ elde edilir. Yani, $0 \neq a^m \in I^m = (0)$ bulunur. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı, I nilpotent değildir.

Teorem 2.21 : Her nil halka bir radikal halkadır.

İspat: R bir nil halka olsun. O zaman, her $a \in R$ için $a^m = 0$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

$$b = -a + a^2 - a^3 + \dots + (-1)^{m-1} a^{m-1}$$

elemanı göz önüne alındığında $a + b + ab = 0$ olup, Tanım 2.17'den dolayı R bir radikal halkadır. ■

Her nilpotent halka bir nil halka olduğundan Teorem 2.21 ile her nilpotent halka da bir radikal halkadır sonucuna ulaşılır. Fakat, aşağıdaki örnek Teorem 2.21'in tersinin doğru olmadığını gösterir. Yani, nil olmayan radikal halkalar vardır.

Örnek 2.22 : $W = \{\frac{2x}{2y+1} \mid x, y \in \mathbb{Z}; (2x, 2y+1) = 1\}$ halkasını göz önüne alalım. W 'nin herhangi bir $a = \frac{2x}{2y+1}$ elemanı için $a' = -\frac{2x}{2(x+y)+1} \in W$ olur. Üstelik, $a + a' + aa' = 0$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, W bir radikal halkadır. Fakat, W 'nin sıfırdan farklı hiçbir elemanı nilpotent olmadığından W bir nil halka değildir.

Örnek 2.23 : Örnek 2.22'de tanımlanan W radikal halkasını göz önüne alalım. $2\mathbb{Z}$, W 'nin bir alt halkasıdır. $4\mathbb{Z}$, $2\mathbb{Z}$ içinde maksimal ideal olduğundan $2\mathbb{Z}$ radikal halka değildir. Bu örnek, bir radikal halkanın her alt halkasının radikal olması gerekmediğini gösterir.

Tanım 2.24 : R bir radikal halka olsun. R halkası "o" işlemine göre bir grup formundadır. Bu gruba R halkasının *adjoint grubu* diyeceğiz ve $G(R)$ ile göstereceğiz.

Burada, R 'nin sıfır elemanı $G(R)$ adjoint grubunun birim elemanıdır. x' elemanı "o" işlemine göre x elemanının tersidir.

Tanım 2.25 : (Bkz. [5] Lie Halka) Eğer herhangi bir L halkası (birleşmeli olması gerekmez) aşağıdaki iki koşulu sağlarsa L 'ye bir *Lie halka* denir.

- (i) $a^2 = 0$ (anti-commutativity)
- (ii) $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ (Jacobi identity)

Tanım 2.26 : R herhangi bir birleşmeli halka olsun. Her $x, y \in R$ için

$$[x, y] = xy - yx \quad (\text{Lie-çarpımı})$$

biçiminde tanımlanır.

Birleşmeli bir R halkasının $[x, y] = xy - yx$ işlemi ile bir Lie halka olduğu kolaylıkla görülebilir. Özel olarak, R radikal halka ise bu halkaya bağlı Lie halkayı $\Lambda(R)$ ile göstereceğiz.

Önteorem 2.27 : R herhangi bir halka olsun. Her $x, y \in R$ için $[x, y] = xy - yx$ biçiminde tanımlı Lie-çarpımı aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

Her $a, b, c \in R$ için

- (i) $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$
- (ii) $[a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$

İspat:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad [ab, c] &= abc - cab = abc - cab \mp acb \\
 &= (abc - acb) + (acb - cab) \\
 &= a(bc - cb) + (ac - ca)b \\
 &= a[b, c] + [a, c]b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad [a, bc] &= abc - bca = abc - bca \mp bac \\
 &= (abc - bac) + (bac - bca) \\
 &= (ab - ba)c + b(ac - ca) \\
 &= [a, b]c + b[a, c]. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Tanım 2.28 : Her $r_1, \dots, r_{n+1} \in R$ için $[r_1, \dots, r_{n+1}]$ biçimindeki Lie-çarpımı her $n \geq 2$ için tümevarımla

$$[r_1, \dots, r_{n+1}] = [[r_1, \dots, r_n], r_{n+1}]$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.29 : R bir halka ve V, W kümeleri R halkasının herhangi iki toplamsal alt grubu olsun. R 'nin $[V, W]$ ile gösterilen toplamsal alt grubu, $v \in V$ ve $w \in W$ olmak üzere bütün $[v, w]$ Lie komutatörleri ile üretilir. Eğer $[V, R] \subseteq V$ ise V 'ye R 'nin bir *Lie ideali* denir.

Tanım 2.30 : R bir halka olsun. Her $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in R$ için

$$[a_1, a_2, \dots, a_{n+1}] = 0$$

oluyorsa R halkasına nilpotentlik sınıfı en fazla n olan *Lie-nilpotent halka* denir.

Tanım 2.31 : $(L, +, \cdot)$ bir Lie halka olsun. L 'nin merkezi

$$Z(L) = \{x \in L \mid \text{her } a \in L \text{ için } ax = 0\}$$

biçimindedir (Bkz. [6], s. 5-6).

Tanım 2.32 : G bir grup ve G 'nin normal alt gruplarının

$$(1) = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$$

biçiminde bir serisi olsun. Eğer $0 \leq i \leq n-1$ için $G_{i+1}/G_i \subseteq Z(G/G_i)$ ise G 'ye *nilpotent grup* denir.

Teorem 2.33 : R nilpotent bir halka ise $G(R)$ adjoint grubu nilpotent gruptur.

İspat: ([10], Teorem 2.18). ■

Teorem 2.34 : Birimsiz herhangi bir halka birimli bir halka içine gömülebilir.

İspat: R herhangi bir birimsiz halka olsun. $S = \{(a, i) \mid a \in R, i \in \mathbb{Z}\}$ kümesini göz önüne alalım. S kümesi üzerindeki toplama ve çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$(a, i) + (b, j) = (a + b, i + j)$$

$$(a, i) \cdot (b, j) = (ab + ib + ja, ij)$$

S 'nin bu işlemlere göre bir halka olduğu kolayca gösterilebilir. Burada dikkat edilirse, $(0, 1)$ elemanı S 'nin birimidir. $S' = \{(a, 0) \mid a \in R\}$ kümesi R ile eş yapılı ve S 'nin bir alt halkasıdır. ■

Yukarıdaki teoremden $J(R) = J(S)$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Tanım 2.35 : R bir radikal halka olsun. R halkasının n . merkezi Z_n , $Z_0 = (0)$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$Z_n = \{a \in R \mid [a, x] \in Z_{n-1}; \text{ her } x \in R \text{ için}\}$$

biçiminde tanımlanır.

Benzer şekilde, $G(R)$ adjoint grubunun n . merkezi Y_n , $Y_0 = (0)$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$Y_n = \{a \in R \mid a'ox'aox \in Y_{n-1}; \text{ her } x \in R \text{ için}\}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.36 : R bir halka ve S , R 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

$$l(S) = \{x \in R \mid xS = (0)\}$$

kümesine S 'nin *sol sıfırlayıcısı* denir.

Benzer şekilde $r(S)$ sağ sıfırlayıcısı tanımlanır.

Tanım 2.37 : R bir Lie halka olsun. R 'nin çözülebilirlik serisi, $\delta_0(R) = R$ olmak üzere her $n \geq 0$ için

$$\delta_{n+1}(R) = [\delta_n(R), \delta_n(R)]$$

olarak tanımlanır. Eğer $\delta_m(R) = (0)$ olacak şekilde bir m doğal sayısı varsa R halkasına, en fazla m uzunluğunda *Lie-çözülebilir halka* denir.

Tanım 2.38 R bir radikal halka olsun. $G(R)$ adjoint grubunun çözülebilirlik serisi, $\lambda_0(G(R)) = G(R)$ olmak üzere her $n \geq 0$ için

$$\lambda_{n+1}(G(R)) = (\lambda_n(G(R)), \lambda_n(G(R)))$$

biçiminde tanımlanır. Eğer bir $m \in \mathbb{N}$ için $\lambda_m(G(R)) = (0)$ oluyorsa, $G(R)$ adjoint grubu en fazla m uzunluğunda *çözülebilirdir* denir.

Tanım 2.39 : R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab = 0$ ($ba = 0$) olacak şekilde sıfırdan farklı bir $b \in R$ varsa, a elemanına *sol (sağ) sıfır bölen* denir. a hem sol sıfır bölen hem de sağ sıfır bölen ise a 'ya *sıfır bölen* denir.

Tanım 2.40 : R bir halka olsun. Eğer $a, b \in R$ için $aRb = (0)$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R 'ye *asal halka (prime ring)* denir.

Önteorem 2.41 : R bir halka olsun. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (i) R asal halkadır.
- (ii) R 'nin sıfırdan farklı sağ ideallerinin sağ sıfırlayıcıları (0) 'dır.
- (iii) R 'nin sıfırdan farklı sol ideallerinin sol sıfırlayıcıları (0) 'dır.
- (iv) A ve B , R 'nin iki ideali olmak üzere $AB = (0)$ olduğunda $A = (0)$ veya $B = (0)$ 'dır.

İspat: ([4], Lemma 2.1.1). ■

Tanım 2.42 : R bir halka olsun. Eğer R halkası aşağıdaki iki koşulu sağlarsa, R halkasına bir *sağ Goldie halka* denir.

- (1) R 'nin sıfırdan farklı sağ ideallerinin sağ sıfırlayıcılarının boştan farklı her alt kümesinin bir maksimal elemanı vardır.
- (2) R , sağ ideallerinin hiçbir sonsuz direkt toplamını içermez.

Benzer şekilde, sol Goldie halka tanımlanır. Bir halka hem sol hem de sağ Goldie halka ise, bu halkaya *Goldie halka* denir.

Tanım 2.43 : R bir halka olsun. Eğer R aşağıdaki iki koşulu sağlarsa, R 'ye *basit halka* denir.

- (1) R 'nin (0) 'dan başka öz ideali yoktur.
- (2) $R^2 \neq (0)$ 'dır.

Tanım 2.44 : R bir halka olsun. Eğer R 'nin sağ ideallerinin boştan farklı her kümesi bir minimal eleman içerirse, R 'ye *Artinian halka* denir.

Tanım 2.45 : A birimli bir halka ve R , A 'nın bir alt halkası olsun. Eğer;

- (1) R 'nin sıfır bölen olmayan bütün elemanları A 'da tersinir ise,
 - (2) A 'nın her x elemanı; a , A 'da tersinir olmak üzere $a, b \in R$ için $x = a^{-1}b$ biçiminde yazılabiliyorsa,
- R 'ye *sol sıralı (left order)* denir.

Teorem 2.46 (Goldie's Theorem On Prime Rings): R bir halka olsun. R halkasının asal Goldie halka olması için gerek ve yeter koşul R halkasının bir basit Artinian halka içindeki bir sol sıralı halkaya izomorf olmasıdır.

İspat: ([3], s. 268). ■

Teorem 2.47 (Wedderburn-Artin): R bir basit Artinian halka olsun. O zaman R , bir D bölümlü halkası üzerindeki bütün $n \times n$ matrislerin halkası $M_n(D)$ 'ye izomorftur. Bu koşulu sağlayan n tektir. Tersine, herhangi bir D bölümlü halkası için $M_n(D)$ bir basit Artinian halkadır.

İspat: ([4], Theorem 2.1.6). ■

Teorem 2.48 (Faith and Utumi): R , D bölümlü halkası üzerindeki n boyutlu bir V vektör uzayının doğrusal dönüşümlerinin bir halkası olsun. S de, R 'de bir sol sıralı (left order) halka olsun. Bu takdirde, R halkası $\{e_{ij} \mid i = j = 1, \dots, n\}$ matrislerinin bir kümesini içerir öyle ki R içindeki e_{ij} lerin D merkezleyeni

$$S \supseteq S_{ijn} = \sum_{i,j} S_{ij}e_{ij}$$

olacak şekilde bir S_{ij} sol sıralı halkayı içerir.

İspat: ([3], s. 272). ■

Teorem 2.49 : R herhangi bir radikal halka olsun. R 'nin adjoint grubunun her sonlu alt grubu nilpotent ise adjoint grup faktörleri değişmeli olan bir seriye sahiptir.

İspat: (Bkz. [8], Theorem A). ■

Tanım 2.50 : R bir halka olsun. Eğer R 'nin ideallerinin

$$(0) = R_0 \subseteq R_1 \subseteq \cdots \subseteq R_\alpha \subseteq R_{\alpha+1} \cdots \subseteq R_\gamma = R$$

ve her α ardıl ordinali için $R_{\alpha+1}/R_\alpha$ faktörleri değişmeli olacak şekilde bir artan serisi varsa, R 'ye *kuvvetli Lie-hyperabelian halka* denir.

Tanım 2.51 : R bir halka ve I , R 'nin bir ideali olsun. Eğer $I^2 = (0)$ ise I 'ya bir *null ideal* denir.

Önteorem 2.52 : G bir grup ve $a, b, c \in G$ olsun. $(a, b) = a^{-1}b^{-1}ab$ biçiminde tanımlı grup komutatör aşağıdaki eşitlikleri sağlar. Burada $a^b = b^{-1}ab$ anlamındadır.

- (a) $ab = ba(a, b)$ ve $a^b = a(a, b)$
- (b) $(a, b)^{-1} = (b, a)$
- (c) $(ab, c) = (a, c)^b(b, c) = (a, c)(a, c, b)(b, c)$
- (d) $(a, bc) = (a, c)(a, b)^c = (a, c)(a, b)(a, b, c)$

İspat:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad ba(a, b) &= baa^{-1}b^{-1}ab \\ &= b(aa^{-1})b^{-1}ab \\ &= bb^{-1}ab = ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(a, b) &= aa^{-1}b^{-1}ab \\ &= b^{-1}ab = a^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad (a, b)^{-1} &= (a^{-1}b^{-1}ab)^{-1} \\ &= b^{-1}a^{-1}ba = (b, a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad (ab, c) &= (ab)^{-1}c^{-1}(ab)c \\ &= b^{-1}a^{-1}c^{-1}abc \\ &= b^{-1}a^{-1}c^{-1}\underline{acbb^{-1}c^{-1}bc} \\ &= b^{-1}(a^{-1}c^{-1}ac)b(b^{-1}c^{-1}bc) \\ &= b^{-1}(a, c)b(b, c) \\ &= (a, c)^b(b, c) \\ &= (a, c)(a, c, b)(b, c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad (a, bc) &= (bc, a)^{-1} = ((b, a)^c(c, a))^{-1} \\ &= (a, c)(a, b)^c \\ &= (a, c)(a, b)(a, b, c). \blacksquare \end{aligned}$$

Tanım 2.53 : R bir halka olsun. Her α ordinali için R_α ideali aşağıdaki gibi tanımlanır:

(i) $R_0 = (0)$ dir.

(ii) α ordinalinden küçük olan bütün γ ordinalleri için R_γ idealleri tanımlı olsun.

1. Durum: $\alpha = \gamma + 1$ olacak şekilde bir ardıl ordinalse R_α , R 'nin R/R_γ 'nin bütün nilpotent ideallerinin toplamı R_α/R_γ olacak şekildeki idealidir.

2. Durum: α bir limit ordinalse

$$R_\alpha = \sum_{\gamma < \alpha} R_\gamma$$

biçimindedir.

Böylece R halkasının ideallerinin

$$(0) = R_0 \subseteq \dots R_{\alpha-1} \subseteq R_\alpha \subseteq \dots$$

biçiminde bir serisi elde edilir. Burada öyle bir β ordinali vardır ki $R_\beta = R_{\beta+1}$ dir. R_β idealine R halkasının *alt nil radikali* denir.

Teorem 2.54 : R bir halka olsun. R 'nin alt nil radikali R 'nin bütün asal ideal-
lerinin arakesitidir.

İspat: ([3], Theorem 1, s. 196). ■

Teorem 2.55 : R bir halka olsun. Eğer R halkasının (0) 'dan başka nilpotent
ideali yoksa, R asal halkaların alt direkt toplamıdır.

İspat: ([3], Theorem 2, s. 196). ■

3 $G(R)$ VE $\Lambda(R)$ 'NİN NİLPOTENTLİĞİ

Bu bölümde R radikal halka (Jacobson anlamında) olduğunda R 'nin adjoint grubu $G(R)$ ile Lie halkası $\Lambda(R)$ arasındaki yakın ilişki incelenecektir. İlk olarak, $G(R)$ adjoint grubunun nilpotent olması için gerek ve yeter koşulun $\Lambda(R)$ Lie halkasının nilpotent olması gerektiği gerçeği gösterilecek; daha sonra, $G(R)$ 'nin nilpotentlik sınıfı ile $\Lambda(R)$ 'nin nilpotentlik sınıfının aynı olduğu ispatlanacaktır.

3.1 $G(R)$ ve $\Lambda(R)$ 'nin Nilpotentliğinin Karşılaştırılması

Bu kısımda öncelikle, $G(R)$ ve $\Lambda(R)$ 'nin komutatörleri arasındaki ilişki incelenecek; daha sonra, $G(R)$ nilpotent olduğunda $\Lambda(R)$ 'nin de nilpotent olduğu gösterilecek ve son olarak, $\Lambda(R)$ nilpotent olduğunda $G(R)$ 'nin de nilpotent olduğu sonucuna ulaşılabilecektir. Burada, grup komutatörü $(.)$ ile, Lie halka komutatörü $[.]$ ile gösterilecektir.

3.1.1 $G(R)$ ve $\Lambda(R)$ 'nin komutatörleri

R herhangi bir radikal halka olsun. Tanım 2.17 dikkate alındığında radikal halkanın birim elemana sahip olamayacağı görülür. Aksi taktirde, $(-1)'$ elemanın varlığı ile (2.17.1) eşitliği kullanılarak $-1 = 0$ elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Ayrıca, R halkası birimli olduğunda daima maksimal ideale sahip olacağından $J(R) = R$ olamaz. Fakat, R radikal halkası birimli bir halka içine gömülebilir (Bkz. Teorem 2.34). $G(R)$ içindeki adjoint çarpım yerine bilinen çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$x, y \in R$ için $X = 1 + x$, $Y = 1 + y$ olmak üzere

$$XY = (1 + x)(1 + y) = 1 + x + y + xy = 1 + xoy$$

olsun. Buradan yola çıkarak, eğer $X^{-1} = 1 + x'$ olacak şekilde seçilirse,

$$XX^{-1} = 1 + xox' = 1$$

olup, X^{-1} elemanı X 'in tersidir. Diğer bir deyişle $1 + R$ kümesi, $1 + x$ formundaki elemanların çarpım grubudur. Her $x \in R$ için $x \mapsto 1 + x$ dönüşümü $G(R)$ adjoint

grubu ile $1 + R$ çarpım grubu arasında bir izomorfizma tanımlar. Böylece $G(R)$ adjoint grubu $1 + x$ formundaki elemanların çarpım grubu olarak düşünülebilir. Bundan sonra, R halkasının elemanları küçük harflerle, $G(R)$ adjoint grubunun elemanları da büyük harflerle gösterilecektir. Yani, $a \in R$ ise $1 + a \in G(R)$ biçiminde gösterilecektir. Dikkat edilirse, $X + y$, Xy , yX , $X - Y$, v.b. formundaki ifadeler ya $G(R)$ 'de ya da R 'de tanımlıdır. Fakat, $X + Y$ tanımsızdır.

$$X + y = (1 + x) + y = 1 + (x + y) \in G(R)$$

$$Xy = (1 + x)y = y + xy \in R$$

$$yX = y(1 + x) = y + yx \in R$$

$$X - Y = (1 + x) - (1 + y) = x - y \in R$$

$X + Y = (1 + x) + (1 + y) = 2 + x + y$ olup ne $G(R)$ adjoint grubunun, ne de R halkasının bir elemanı değildir.

$X = 1 + x$ ve $x, y, z \in R$ olmak üzere $y + yx = yX = z$ olsun. Bu durumda, $y = zX^{-1} = z + zx'$ bulunur. Özel olarak,

$$Xy = 0 \iff y = 0$$

(A)

$$yX = 0 \iff y = 0$$

elde edilir.

$X = 1 + x$, $Y = 1 + y$ olmak üzere $G(R)$ adjoint grubunun $(X, Y) = X^{-1}Y^{-1}XY$ komutatörünü göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} X^{-1}Y^{-1}XY &= X^{-1}Y^{-1}XY \mp 1 \\ &= 1 + X^{-1}Y^{-1}XY - X^{-1}Y^{-1}YX \\ &= 1 + X^{-1}Y^{-1}(XY - YX) \end{aligned}$$

Burada, $X = 1 + x$, $Y = 1 + y$ yerleştirildiğinde $XY - YX = [x, y]$ olduğu dikkate alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$(B) \quad (X, Y) = 1 + X^{-1}Y^{-1}[x, y]$$

$(X, Y) = Z = 1 + z$ denirse (B) kullanılarak,

$$(C) \quad [x, y] = YXz = z + yx + xz + yxz$$

bulunur.

(B) ve (C) eşitlikleri $G(R)$ ve $\Lambda(R)$ 'nin komutatörleri arasındaki ilişkiyi ortaya koyar.

$G(R)$ adjoint grubunun aşağı merkez serisinin $G(R)_i$ ile gösterilen i . alt grubu, $G(R)_0 = G(R)$ olmak üzere her $i \geq 1$ için

$$G(R)_i = (G(R)_{i-1}, G(R))$$

ile tanımlanır. Benzer şekilde; $\Lambda(R)$ Lie halkasının aşağı merkez serisinin $\Lambda(R)^p$ ile gösterilen p . terimi, $\Lambda(R)^0 = \Lambda(R)$ olmak üzere her $p \geq 1$ için

$$\Lambda(R)^p = [\Lambda(R)^{p-1}, \Lambda(R)]$$

ile tanımlanır. Burada Γ ve Δ , $\Lambda(R)$ 'nin iki ideali olmak üzere $[\Gamma, \Delta]$, $\Lambda(R)$ Lie halkasının, $c \in \Gamma$ ve $d \in \Delta$ için $[c, d]$ formundaki bütün elemanlar tarafından üretilen idealidir. Eğer $G(R)$ adjoint grubunun aşağı merkez serisi

$$G(R) = G(R)_0 \supset G(R)_1 \supset \cdots \supset G(R)_{c-1} \supset G(R)_c = (1)$$

biçiminde ise $G(R)$, nilpotentlik sınıfı c olan nilpotent bir gruptur. Benzer şekilde $\Lambda(R)$ Lie halkasının aşağı merkez serisi

$$\Lambda(R) = \Lambda(R)^0 \supset \Lambda(R)^1 \supset \cdots \supset \Lambda(R)^{\alpha-1} \supset \Lambda(R)^\alpha = (0)$$

biçiminde ise $\Lambda(R)$, nilpotentlik sınıfı α olan Lie-nilpotent halkadır.

Önteorem 3.1.1.1 : $G(R)$, $\Lambda(R)$ ve R 'nin merkezleri aynı elemanlardan oluşur.

İspat: c , R radikal halkasının merkezinde bir eleman olsun. Bu takdirde, her $x \in R$ için $cx = xc$ dir. $C = 1 + c$, $X = 1 + x$ olmak üzere

$$CX = 1 + c + x + cx = 1 + x + c + xc = XC$$

olup, $1+c$, $G(R)$ 'nin merkezindedir. $\Lambda(R)$ Lie halkasının merkezinin (Bkz. Tanım 2.31), $\{a \in \Lambda(R) \mid \text{her } x \in \Lambda(R) \text{ için } [a, x] = 0\}$ biçiminde olduğu dikkate alınırsa $[c, x] = cx - xc = 0$ olup, c , $\Lambda(R)$ 'nin merkezindedir.

Tersine, B , $G(R)$ adjoint grubunun merkezinde bir eleman olsun. O zaman, her $X \in G(R)$ için $BX = XB$ olur. Buradan, $B = 1 + b$, $X = 1 + x$ olmak üzere $1 + b + x + bx = 1 + x + b + xb$ olup, $bx = xb$ elde edilir. Benzer şekilde, a , $\Lambda(R)$ 'nin merkezinde bir eleman olsun. O zaman, her $x \in R$ için $[a, x] = 0$ olup, buradan $ax = xa$ elde edilir. Böylece, a elemanı R 'nin merkezindedir. Sonuç olarak,

$$Z(R) = Z(\Lambda(R)) = Z(G(R))$$

dir. ■

Önteorem 3.1.1.2 : Eğer $G(R)$ adjoint grubu nilpotentlik sınıfı c olan nilpotent bir grup ise $H_{c-1} = 1 + h_{c-1} \in G(R)_{c-1}$ olduğunda $h_{c-1} \in Z(R)$ dir. Özel olarak; $H_{c-2} = 1 + h_{c-2} \in G(R)_{c-2}$ için $H_{c-2}^{-1}X^{-1}[h_{c-2}, x] \in Z(R)$ olur.

İspat: $G(R)$ 'nin nilpotentlik sınıfı c olduğundan $(G(R)_{c-1}, G(R)) = (1)$ olur. Bu durumda, $H_{c-1} = 1 + h_{c-1} \in G(R)_{c-1}$ ve her $X = 1 + x \in G(R)$ için $(H_{c-1}, X) = 1$ dir. (B) eşitliği kullanılırsa $1 + H_{c-1}^{-1}X^{-1}[h_{c-1}, x] = 1$ olur. Bu eşitlik daha basit formda $H_{c-1}^{-1}X^{-1}[h_{c-1}, x] = 0$ biçiminde yazıldığında (A) yardımıyla $[h_{c-1}, x] = 0$, dolayısıyla $h_{c-1}x = xh_{c-1}$ elde edilir. Böylece, $h_{c-1} \in Z(R)$ dir. Diğer bir ifadeyle; $G(R)$ adjoint grubu nilpotentlik sınıfı c olan nilpotent bir grup ise $G(R)_{c-1} \subset Z(R)$ dir.

Özel olarak; $H_{c-2} = 1 + h_{c-2} \in G(R)_{c-2}$ ve her $X = 1 + x \in G(R)$ için $(G(R)_{c-2}, G(R)) = G(R)_{c-1}$ olduğundan $(H_{c-2}, X) \in G(R)_{c-1}$ dir. Böylece, (B) yardımıyla $(H_{c-2}, X) = 1 + H_{c-2}^{-1}X^{-1}[h_{c-2}, x] = 1 + h_{c-1}$ olup, kanıtın ilk bölümünden $H_{c-2}^{-1}X^{-1}[h_{c-2}, x] \in Z(R)$ elde edilir. ■

Önteorem 3.1.1.3 : Her $a, x, y, z \in R$ için

$$[X[y, z], a] = X[y, z, a] + [x, a][y, z]$$

dir. Özel olarak; $ax = xa$ ise $[X[y, z], a] = X[y, z, a]$ biçimindedir.

İspat: Önteorem 2.27 kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$[X[y, z], a] = X[y, z, a] + [X, a][y, z] = X[y, z, a] + [x, a][y, z]$$

Özel olarak, $ax = xa$ ise $[x, a] = 0$ olup, yukarıdaki eşitlikten $[X[y, z], a] = X[y, z, a]$ elde edilir. ■

Bir R radikal halkasının her x elemanı için $x + x' + xx' = 0$ olduğu kullanılarak, $a \in R$ için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} a(x + x' + xx') &= (x + x' + xx')a = 0 \\ \implies ax + ax' + axx' &= xa + x'a + xx'a \\ \implies (ax - xa) + axx' &= -(ax' - x'a) + xx'a \\ \implies [a, x] + axx' - xax' &= -[a, x'] + xx'a - xax' \\ \implies [a, x] + (ax - xa)x' &= -[a, x'] - x(ax' - x'a) \\ \implies [a, x] + [a, x]x' &= -[a, x'] - x[a, x'] \\ \implies [a, x](1 + x') &= -(1 + x)[a, x'] \\ \implies [a, x]X^{-1} &= -X[a, x'] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte, $X = Y^{-1}$ alınırsa $-[a, y']Y = Y^{-1}[a, y]$ bulunur. Böylece;

$$[a, x]X^{-1} = -X[a, x']$$

(D)

$$X^{-1}[a, x] = -[a, x']X$$

eşitlikleri elde edilir.

3.1.2 $G(R)$ nilpotent iken $\Lambda(R)$ 'nin nilpotentliği

Teorem 3.1.2.1 : $G(R)$ adjoint grubu nilpotent ise $\Lambda(R)$ Lie halkası da nilpotenttir.

İspat: Eğer $G(R)$ adjoint grubu değişmeli ise Önteorem 3.1.1.1'den dolayı $\Lambda(R)$ değişmelidir. Dolayısıyla, $\Lambda(R)^1 = (0)$ olup, $\Lambda(R)$ nilpotenttir. Bu takdirde, Teorem $G(R)$ 'nin nilpotentlik sınıfı 1 olduğunda doğrudur.

$G(R)$ adjoint grubunun nilpotentlik sınıfının $c > 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman; $G(R)$,

$$G(R) = G(R)_0 \supset G(R)_1 \supset \cdots \supset G(R)_{c-1} \supset G(R)_c = (1)$$

biçiminde bir aşağı merkez serisine sahiptir. $H_{c-2} = 1 + h_{c-2} \in G(R)$ olsun. Önteorem 3.1.1.2'den dolayı her $X = 1 + x \in G(R)$ için $H_{c-2}^{-1}X^{-1}[h_{c-2}, x] \in Z(R)$ olur. Böylece, her $y \in R$ için,

$$(1) \quad [H_{c-2}^{-1}X^{-1}[h_{c-2}, x], y] = 0$$

elde edilir. Özel olarak; $XH_{c-2} = 1 + x + h_{c-2} + xh_{c-2}$ elemanı $H_{c-2}^{-1}X^{-1}$ elemanı ile değişmeli olup, Önteorem 3.1.1.3'den

$$[H_{c-2}^{-1}X^{-1}[h_{c-2}, x], x + h_{c-2} + xh_{c-2}] = H_{c-2}^{-1}X^{-1}[h_{c-2}, x, x + h_{c-2} + xh_{c-2}] = 0$$

olur. Buradan, 3.1.1.(A) yardımıyla,

$$(2) \quad [h_{c-2}, x, x + h_{c-2} + xh_{c-2}] = 0$$

bulunur.

a , R 'nin herhangi bir elemanı olmak üzere (2) ifadesinde $x = a + h'_{c-2}$ alınır,

$$(3) \quad [h_{c-2}, a + h'_{c-2}, a + h'_{c-2} + h_{c-2} + ah_{c-2} + h'_{c-2}h_{c-2}] = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte, (2.17.1) dikkate alınır $[h_{c-2}, a + h'_{c-2}, a + ah_{c-2}] = 0$ olup, Lie komutatörün lineerlik özelliği ile $[[h_{c-2}, a] + [h_{c-2}, h'_{c-2}], a + ah_{c-2}] = 0$ yazılabilir. Teorem 2.15'den dolayı $[h'_{c-2}, h_{c-2}] = 0$ olduğundan,

$$(4) \quad [h_{c-2}, a, a + ah_{c-2}] = 0$$

elde edilir. (2)'de x yerine a alındığında,

$$(5) \quad [h_{c-2}, a, a + h_{c-2} + ah_{c-2}] = 0$$

olup, (5) eşitliğinden (4) eşitliği taraf tarafa çıkartılırsa,

$$(6) \quad [h_{c-2}, a, h_{c-2}] = 0$$

elde edilir. (4) ifadesi $[h_{c-2}, a, aH_{c-2}] = 0$ biçiminde yazılıp, Önteorem 2.27 uygulandığında $[h_{c-2}, a, a]H_{c-2} + a[h_{c-2}, a, h_{c-2}] = 0$ eşitliğine ulaşılır. (6) ve 3.1.1.(A) yardımıyla,

$$(7) \quad [h_{c-2}, a, a] = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte, $y, z \in R$ olmak üzere a yerine $y + z$ alınırsa,

$$[h_{c-2}, y + z, y + z] = 0$$

olur. Lie komutatörün lineerlik özelliği ile

$$[h_{c-2}, y, y] + [h_{c-2}, y, z] + [h_{c-2}, z, y] + [h_{c-2}, z, z] = 0$$

yazılabilir. Burada (7) dikkate alındığında,

$$(8) \quad [h_{c-2}, y, z] + [h_{c-2}, z, y] = 0$$

eşitliğine ulaşılır. (8) eşitliğinde $u, v \in R$ için $y = uv$ ve $z = v$ yazılırsa

$$[h_{c-2}, uv, v] + [h_{c-2}, v, uv] = 0$$

olup, Önteorem 2.27'den,

$$[[h_{c-2}, u]v + u[h_{c-2}, v], v] + [h_{c-2}, v, u]v + u[h_{c-2}, v, v] = 0$$

$$[h_{c-2}, u][v, v] + [h_{c-2}, u, v]v + u[h_{c-2}, v, v] + [u, v][h_{c-2}, v] + [h_{c-2}, v, u]v + u[h_{c-2}, v, v] = 0$$

olur. Buradan, (7) ve (8) yardımıyla,

$$(9) \quad [u, v][h_{c-2}, v] = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde, (8) eşitliğinde $y = vu$ ve $z = v$ alınırsa

$$[h_{c-2}, vu, v] + [h_{c-2}, v, vu] = 0$$

olup, Önteorem 2.27'den,

$$[[h_{c-2}, v]u + v[h_{c-2}, u], v] + [h_{c-2}, v, v]u + v[h_{c-2}, v, u] = 0$$

$$[h_{c-2}, v][u, v] + [h_{c-2}, v, v]u + v[h_{c-2}, u, v] + [v, v][h_{c-2}, u] + [h_{c-2}, v, v]u + v[h_{c-2}, v, u] = 0$$

olur. Buradan, (7) ve (8) kullanılarak,

$$(10) \quad [h_{c-2}, v][u, v] = 0$$

elde edilir. (8) ifadesinde $y = h_{c-2}u$ ve $z = v$ alındığında,

$$[h_{c-2}, h_{c-2}u, v] + [h_{c-2}, v, h_{c-2}u] = 0$$

olur. Bu eşitlikte, Önteorem 2.27 kullanılarak,

$$[[h_{c-2}, h_{c-2}]u + h_{c-2}[h_{c-2}, u], v] + [h_{c-2}, v, h_{c-2}]u + h_{c-2}[h_{c-2}, v, u] = 0$$

$$h_{c-2}[h_{c-2}, u, v] + [h_{c-2}, v][h_{c-2}, u] + [h_{c-2}, v, h_{c-2}]u + h_{c-2}[h_{c-2}, v, u] = 0$$

olduğu görülür. (6)'dan $h_{c-2}[h_{c-2}, u, v] + [h_{c-2}, v][h_{c-2}, u] + h_{c-2}[h_{c-2}, v, u] = 0$ olup, (8) yardımıyla,

$$(11) \quad [h_{c-2}, v][h_{c-2}, u] = 0$$

elde edilir.

(1) ifadesine Önteorem 3.1.1.3 ve Önteorem 2.27 uygulanarak,

$$(12) \quad H_{c-2}^{-1}X^{-1}[h_{c-2}, x, y] + H_{c-2}^{-1}[x', y][h_{c-2}, x] + [h'_{c-2}, y]X^{-1}[h_{c-2}, x] = 0$$

elde edilir.

(7)'den $[h_{c-2}, x, X] = 0$ olduğundan $H_{c-2}^{-1}[x', y]([h_{c-2}, x]X - X[h_{c-2}, x]) = 0$ elde edilir. Bu eşitlik $H_{c-2}^{-1}[x', y][h_{c-2}, x]X = H_{c-2}^{-1}[x', y]X[h_{c-2}, x]$ biçiminde yazılırsa, Tanım 2.25'de bahsedilen anti-commutativity ile $[x', y] = -[y, x']$ olup, 3.1.1.3.(D)'den dolayı $[x', y]X = X^{-1}[x, y]$, dolayısıyla eşitliğin sağ tarafı $0 = H_{c-2}^{-1}X^{-1}[y, x][h_{c-2}, x]$ olur. Bu durumda, (9)'dan

$$0 = H_{c-2}^{-1}X^{-1}[y, x][h_{c-2}, x] = H_{c-2}^{-1}[x', y][h_{c-2}, x]X$$

olup, 3.1.1.(A) yardımıyla $H_{c-2}^{-1}[x', y][h_{c-2}, x] = 0$ bulunur. Böylece, (12) eşitliğinin ikinci terimi sıfırdır.

Benzer şekilde, Önteorem 2.27 kullanılarak, (6) ve (7) yardımıyla aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$\begin{aligned}
[h_{c-2}, x, XH_{c-2}] &= [h_{c-2}, x, 1 + x + h_{c-2} + xh_{c-2}] \\
&= [h_{c-2}, x, 1] + [h_{c-2}, x, x] + [h_{c-2}, x, h_{c-2}] + [h_{c-2}, x, xh_{c-2}] \\
&= [h_{c-2}, x, xh_{c-2}] \\
&= [h_{c-2}, x, x]h_{c-2} + x[h_{c-2}, x, h_{c-2}] = 0
\end{aligned}$$

Böylece, $[h_{c-2}, x]XH_{c-2} = XH_{c-2}[h_{c-2}, x]$ elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı soldan $[h'_{c-2}, y]X^{-1}$ ile çarpılırsa, 3.1.1.3.(D) ve (11) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned}
[h'_{c-2}, y]X^{-1}[h_{c-2}, x]XH_{c-2} &= [h'_{c-2}, y]H_{c-2}[h_{c-2}, x] \\
&= -H_{c-2}^{-1}[h_{c-2}, y][h_{c-2}, x] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Burada, 3.1.1.(A)'dan dolayı $[h'_{c-2}, y]X^{-1}[h_{c-2}, x] = 0$ olup, (12) eşitliğinin soldan üçüncü terimi de sıfır bulunur. Böylece, (12)'den $H_{c-2}^{-1}X^{-1}[h_{c-2}, x, y] = 0$ olup, 3.1.1.(A) yardımıyla

$$(13) \quad [h_{c-2}, x, y] = 0$$

elde edilir.

Tanım 2.25'de belirtilen Jacobi identity ile,

$$[[h_{c-2}, u], v] + [[u, v], h_{c-2}] + [[v, h_{c-2}], u] = 0$$

eşitliği vardır. Bu eşitlik anti-commutativity kullanılarak düzenlenirse,

$$[h_{c-2}, u, v] - [h_{c-2}, [u, v]] - [h_{c-2}, v, u] = 0$$

biçiminde yazılabilir. (13) kullanılarak

$$[h_{c-2}, [u, v]] = 0$$

elde edilir. (13) ifadesinde, $x = x[u, v]$ ve $y = w$ alınıp, bulunan bu son eşitlik ve Önteorem 2.27 dikkate alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
&[h_{c-2}, x[u, v], w] = 0 \\
\implies &[[h_{c-2}, x][u, v] + x[h_{c-2}, [u, v]], w] = 0
\end{aligned}$$

$$\implies [[h_{c-2}, x][u, v], w] = 0$$

$$\implies [h_{c-2}, x][u, v, w] + [h_{c-2}, x, w][u, v] = 0$$

olup, (13)'den

$$(14) \quad [h_{c-2}, x][u, v, w] = 0$$

elde edilir.

$1 + h_{c-2} \in G(R)_{c-2}$ olmak üzere, R 'nin $[h_{c-2}, x]$ elemanları ile üretilen S idealini göz önüne alalım. S idealinin elemanları $u, x \in R$ için $[h_{c-2}, x]$ ve $u[h_{c-2}, x]$ formundaki elemanların bir toplamı olarak yazılabilir. Çünkü,

$$S = \{r[h_{c-2}, x] + [h_{c-2}, x]s + n[h_{c-2}, x] + \sum_i r_i[h_{c-2}, x]s_i \mid r, s, r_i, s_i \in R; n \in \mathbb{Z}\}$$

olup, (13)'den dolayı her $x, y \in R$ için $[h_{c-2}, x, y] = 0$ olduğundan

$$[h_{c-2}, x]y = y[h_{c-2}, x]$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$S = \{u[h_{c-2}, x] + n[h_{c-2}, x] \mid u \in R; n \in \mathbb{Z}\}$$

biçimindedir.

$\overline{R} = R/S$ bölüm halkası olsun. Her $\bar{r} = r + S \in \overline{R}$ için $\bar{r}' = r' + S$ olacak şekilde seçilirse (2.17.1) eşitliği sağlanır. Böylece, radikal bir halkanın homomorfik görüntüsü $\overline{R}$ 'nin de radikal halka olduğu görülür.

$f : R \mapsto \overline{R}, r \mapsto \bar{r} = r + S$ doğal epimorfizmasını göz önüne alalım. $G(\overline{R})$, $G(R)$ 'nin homomorfik görüntüsüdür. $G(R)_{c-1}$ alt grubunun her elemanı, $H_{c-2} = 1 + h_{c-2} \in G(R)_{c-2}$ ve her $X = 1 + x \in G(R)$ için 3.1.1.(B) kullanılarak $1 + h_{c-1} = [H_{c-2}, X] = 1 + H_{c-2}^{-1}X^{-1}[h_{c-2}, x]$ formundadır. Böylece, her $1 + z \in G(R)_{c-1}$ için $z \in S$ olup $G(\overline{R})$ 'nin nilpotentlik sınıfı c 'den küçüktür.

Kabul edelim ki, Teorem 3.1.2.1'in ifadesi, adjoint grubunun nilpotentlik sınıfı c 'den küçük olan halkalar için doğru olsun. O zaman, $\Lambda(\overline{R})$ nilpotentlik sınıfı

$\bar{\alpha}$ olan bir Lie-nilpotent halkadır. Böylece, yukarıda tanımlanan, $f : R \mapsto \bar{R}$ dönüşümü ile $\Lambda(R) \mapsto \Lambda(\bar{R})$ olduğundan her $c_0, c_1, \dots, c_{\bar{\alpha}} \in \Lambda(R)$ için $[c_0, c_1, \dots, c_{\bar{\alpha}}] \in S = 0_{\bar{R}}$ dir. Diğer taraftan, S idealinin her elemanı $[h_{c-2}, x]$ ve $u[h_{c-2}, x]$ formundaki elemanların bir toplamı biçiminde olduğundan her $s \in S$ için $s = n[h_{c-2}, x] + u[h_{c-2}, x]$ ($u \in R, n \in \mathbb{Z}$) biçiminde olup, (13) ve (14) dikkate alınarak, Önteorem 2.27 yardımıyla,

$$\begin{aligned} [s, v, w] &= n[h_{c-2}, x, v, w] + [u[h_{c-2}, x], v, w] \\ &= [u[h_{c-2}, x, v] + [u, v][h_{c-2}, x], w] \\ &= [u, v][h_{c-2}, x, w] + [u, v, w][h_{c-2}, x] \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\Lambda(R)$ içindeki her $c_0, c_1, \dots, c_{\bar{\alpha}+2}$ elemanı için $[c_0, c_1, \dots, c_{\bar{\alpha}+2}] = 0$ olup, $\Lambda(R)$ nilpotentlik sınıfı en fazla $\alpha = \bar{\alpha} + 2$ olan Lie-nilpotent halkadır. ■

3.1.3 $\Lambda(R)$ nilpotent iken $G(R)$ 'nin nilpotentliği

Bu alt bölümde, bir R radikal halkasının $\Lambda(R)$ Lie halkası nilpotent olduğuunda, $G(R)$ adjoint grubunun da nilpotent olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.1.3.1 : $\Lambda(R)$ Lie halkası nilpotent ise $G(R)$ adjoint grubu da nilpotenttir.

İspat: $\Lambda(R)$ Lie halkasının nilpotentlik sınıfı α olsun. Eğer $\alpha = 1$ ise $\Lambda(R)^1 = (0)$ dir. Bu durumda, her $c, d \in \Lambda(R)$ için $[c, d] = 0$ olup, $\Lambda(R)$ değişmelidir. Önteorem 3.1.1.1'den $G(R)$ değişmelidir. Böylece, $G(R)_1 = (1)$ olup, $G(R)$ nilpotentlik sınıfı 1 olan nilpotent bir gruptur.

$\alpha > 1$ olsun. $c_{\alpha-2} \in \Lambda(R)^{\alpha-2}$ olmak üzere her $x, y \in \Lambda(R)$ için $[c_{\alpha-2}, x] \in \Lambda(R)^{\alpha-1}$ ve $[c_{\alpha-2}, x, y] = 0$ dir. Jacobi identity özelliği ile $[[c_{\alpha-2}, x], y] + [[x, y], c_{\alpha-2}] + [[y, c_{\alpha-2}], x] = 0$ olup, anti-commutativity özelliği ile $[[y, c_{\alpha-2}], x] = -[c_{\alpha-2}, y, x]$ olduğu dikkate alınrsa $[c_{\alpha-2}, [x, y]] = 0$ elde edilir. Bu sonuç ve özel olarak $[c_{\alpha-2}, x[u, v], y] = 0$ olduğu kullanılarak, Önteorem 2.27 yardımıyla aşığıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} 0 &= [c_{\alpha-2}, x[u, v], y] = [[c_{\alpha-2}, x][u, v] + x[c_{\alpha-2}, [u, v]], y] \\ &= [[c_{\alpha-2}, x][u, v], y] \\ &= [c_{\alpha-2}, x][u, v, y] + [c_{\alpha-2}, x, y][u, v] \\ &= [c_{\alpha-2}, x][u, v, y] \end{aligned}$$

$$(1) \quad [c_{\alpha-2}, x][u, v, y] = 0$$

Benzer şekilde, $[c_{\alpha-2}, xy, x] = 0$ eşitliği kullanılarak, Önteorem 2.27 ile aşığıdaki (2) eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} 0 &= [c_{\alpha-2}, xy, x] = [[c_{\alpha-2}, x]y + x[c_{\alpha-2}, y], x] \\ &= [c_{\alpha-2}, x][y, x] + [c_{\alpha-2}, x, x]y + x[c_{\alpha-2}, y, x] + [x, x][c_{\alpha-2}, y] \\ &= [c_{\alpha-2}, x][y, x] \end{aligned}$$

$$(2) \quad [c_{\alpha-2}, x][y, x] = 0$$

$c_{\alpha-2} \in \Lambda(R)^{\alpha-2}$ olmak üzere, R 'nin bütün $[c_{\alpha-2}, x]$ elemanları ile üretilen T idealini göz önüne alalım. T idealinin her elemanı $[c_{\alpha-2}, x]$ ve $u[c_{\alpha-2}, x]$ ($u \in R$) formundaki elemanların bir toplamı olarak yazılabilir. R/T bölüm halkası radikal bir halkadır. $\varphi : R \longrightarrow R/T$ doğal epimorfizması ile $\Lambda(R)$, $\Lambda(R/T)$ 'ye homomorftur. Dikkat edilirse, $\Lambda(R)^{\alpha-1}$ idealinin her elemanı T 'ye aittir. Böylece, $\Lambda(R/T)$ Lie halkasının nilpotentlik sınıfı α 'dan küçüktür.

Teorem 3.1.3.1'in nilpotentlik sınıfı α 'dan küçük olan Lie halkalar için doğru olduğunu kabul edelim. O zaman, $G(R/T)$ adjoint grubu nilpotentlik sınıfı $\bar{\epsilon}$ olan bir nilpotent gruptur. Bu durumda, $1 + h_{\bar{\epsilon}} \in G(R)_{\bar{\epsilon}}$ için $h_{\bar{\epsilon}} \in T$ 'dir. Şimdi $G(R)_{\bar{\epsilon}+2} = (1)$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için her $g \in T$ ve her $u, v \in R$ için $U = 1 + u$, $V = 1 + v$ olmak üzere $(G, U, V) = (1)$ olduğunu elde etmeliyiz. Burada, $(G, U) = 1 + w$ denirse 3.1.1.(B)'den $w = G^{-1}U^{-1}[g, u]$ biçimindedir. Böylece, $(G, U, V) = (W, V) = 1 + W^{-1}V^{-1}[w, v]$ olup, her $v \in R$ için $[w, v] = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Önteorem 2.27 kullanılarak,

$$\begin{aligned} [w, v] &= [G^{-1}U^{-1}[g, u], v] \\ &= G^{-1}U^{-1}[g, u, v] + [G^{-1}U^{-1}, v][g, u] \\ &= G^{-1}U^{-1}[g, u, v] + (G^{-1}[U^{-1}, v] + [g', v]U^{-1})[g, u] \\ &= G^{-1}U^{-1}[g, u, v] + G^{-1}[u', v][g, u] + [g', v]U^{-1}[g, u] \end{aligned} \quad (\star)$$

elde edilir. Bu son eşitliğin, her bir teriminin sıfır olduğunu gösterirsek $[w, v] = 0$ olacağından kanıt biter.

$g \in T$ olduğundan $y[c_{\alpha-2}, x]$ ve $[c_{\alpha-2}, x]$ formundaki elemanların bir toplamı olarak yazılır. $[c_{\alpha-2}, x, u] = 0$ olduğundan g elemanı $y[c_{\alpha-2}, x]$ formunda düşünülebilir. Diğer bir ifadeyle, $[g, u] = [y[c_{\alpha-2}, x], u]$ alınabilir. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} [y[c_{\alpha-2}, x], u] &= y[c_{\alpha-2}, x, u] + [y, u][c_{\alpha-2}, x] \\ &= [y, u][c_{\alpha-2}, x] \end{aligned}$$

olup, Önteorem 2.27 ve (1) kullanılarak,

$$\begin{aligned} [y[c_{\alpha-2}, x], u, v] &= [[y, u][c_{\alpha-2}, x], v] \\ &= [y, u, v][c_{\alpha-2}, x] + [y, u][c_{\alpha-2}, x, v] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$(3) \quad [g, u, v] = 0$$

olup, $(\star)$ eşitliğinin soldan birinci terimi sıfırdır.

Benzer şekilde, Önteorem 2.27 ve (1) yardımıyla aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\begin{aligned} [u', v][y, u][c_{\alpha-2}, x] &= ([u', v][y, u])[c_{\alpha-2}, x] = ([u', v][y, u] \mp u'[y, u, v])[c_{\alpha-2}, x] \\ &= (u'[y, u, v] + [u', v][y, u] - u'[y, u, v])[c_{\alpha-2}, x] \\ &= ([u'[y, u], v] - u'[y, u, v])[c_{\alpha-2}, x] \\ &= ([u'[y, u] + [u', u']y, v] - u'[y, u, v])[c_{\alpha-2}, x] \\ &= ([u'y, u, v] - u'[y, u, v])[c_{\alpha-2}, x] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Böylece, $[u', v][y[c_{\alpha-2}, x], u] = 0$ olur ki, bu da $(\star)$ ifadesinin ikinci teriminin sıfır olduğunu gösterir.

Son olarak, (3) ve Önteorem 2.27 kullanılarak doğruluğu gösterilecek olan aşağıdaki eşitlik ile $(\star)$ ifadesinin üçüncü terimi de sıfır bulunur.

$$\begin{aligned} [g', v]U^{-1}[g, u] &= [g', v][g, u]U^{-1} = -[g', v][u, g]U^{-1} \\ &= -([g', v][u, g] \mp g'[u, g, v])U^{-1} \\ &= -(g'[u, g, v] + [g', v][u, g] - g'[u, g, v])U^{-1} \\ &= -([g'[u, g], v] - g'[u, g, v])U^{-1} \\ &= -([g'[u, g] + [g', g]u, v] - g'[u, g, v])U^{-1} \\ &= (g'[u, g, v] - [g'u, g, v])U^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Böylece her $v \in R$ için $[w, v] = 0$ olup, kanıt tamamlanmış olur. Dolayısıyla, $G(R)$ adjoint grubu nilpotentlik sınıfı en fazla $c = \bar{c} + 2$ olan nilpotent bir gruptur. ■

3.2 $G(R)$ ve $\Lambda(R)$ 'nin Nilpotentlik Sınıflarının Eşitliği

Bölüm 3.1'de bir radikal halkanın adjoint grubu $G(R)$ nilpotent olduğunda $\Lambda(R)$ Lie halkasının nilpotent olduğunu ve karşıt olarak $\Lambda(R)$ Lie halkası nilpotent olduğunda $G(R)$ adjoint grubunun nilpotent olduğu gösterildi. Lie halka ve adjoint grup arasındaki bu yakın ilişkiden sonra nilpotentlik sınıflarının aynı olup olmadığı sorusu ortaya çıkar. Bu bölümde, bu sorunun cevabı araştırılacaktır. Öncelikle, karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerindeki nilpotent cebirler için bu nilpotentlik sınıflarının eşit olduğu gösterilecek; daha sonra, genel olarak bir radikal halka için nilpotentlik sınıflarının eşitliği kanıtlanacaktır.

3.2.1 Karakteristiği sıfır olan nilpotent cebirler

Bu alt bölümde, karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerindeki nilpotent cebirlerin Lie cebirinin nilpotentlik sınıfının, adjoint grubunun nilpotentlik sınıfına eşit olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.2.1.1 : Eğer A karakteristiği sıfır olan bir cisim üzerinde bir nil-cebir ise, o zaman $\Lambda(A)$ Lie cebirinin nilpotentlik sınıfı $G(A)$ adjoint grubunun nilpotentlik sınıfına eşittir.

İspat: A , karakteristiği sıfır olan bir F cismi üzerinde bir nil-cebir olsun. O zaman, her $x \in A$ için $x^\nu = 0$ olacak şekilde x 'e bağlı bir $\nu \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Böyle bir A cebiri $x' = -x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{\nu-1}x^{\nu-1}$ elemanı ile bir radikal cebirdir (Bkz. Teorem 2.21). F cisminin karakteristiği sıfır olduğundan, $\xi^\nu = 0$ olduğu da dikkate alındığında,

$$\exp(\xi) = 1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \cdots + \frac{\xi^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

ifadesi tanımlı olur. Her $X = 1 + x \in G(A)$ için $X = 1 + x = \exp(\xi)$ eşlemesi yapılırsa, "exp" fonksiyonunun tersi olan logaritma fonksiyonu ile

$$\xi = \log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^\nu \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)}$$

biçimindedir.

$\Lambda(A)$ Lie cebirinin nilpotentlik sınıfı α olsun. O zaman, $X = 1 + x$, $Y = 1 + y$ için *Hausdorff-Campbell Formülü* ([1], formula 26) yardımıyla

$$(X, Y) = X^{-1}Y^{-1}XY = \exp([\xi, \eta] + \sum c_i)$$

eşitliği vardır. Burada, $\eta = \log(1 + y)$ ve $\sum c_i$, derecesi 2'den büyük olan ξ ve η elemanlarının c_i komutatörlerinin bir toplamıdır. $\Lambda(A)$ 'nın nilpotentlik sınıfı sonlu olduğundan $\sum c_i$ toplamı sonludur. Daha genel olarak, $\xi_1 = \log X_1, \dots, \xi_n = \log X_n$ ve $\sum d_j$, derecesi n 'den büyük olan d_j komutatörlerinin bir sonlu toplamı olmak üzere

$$(X_1, \dots, X_n) = \exp([\xi_1, \dots, \xi_n] + \sum d_j)$$

eşitliği yazılabilir. Özel olarak, $\Lambda(A)^\alpha = (0)$ olduğundan $\alpha - 1$ 'den büyük dereceli bütün komutatörler sıfır olup,

$$(X_1, \dots, X_{\alpha-1}) = \exp[\xi_1, \dots, \xi_{\alpha-1}]$$

elde edilir. Eğer $c_{\alpha-1} = [\xi_1, \dots, \xi_{\alpha-1}] \neq 0$ ise $\exp(c_{\alpha-1}) \neq 1$ dir. Aksi takdirde, $c_{\alpha-1}^\nu = 0$ ve $c_{\alpha-1}^{\nu-1} \neq 0$ olmak üzere

$$c_{\alpha-1} + \frac{c_{\alpha-1}^2}{2!} + \dots + \frac{c_{\alpha-1}^{\nu-1}}{(\nu-1)!} = 0$$

olurdu. Bu eşitliğin her iki tarafı $c_{\alpha-1}^{\nu-2}$ ile çarpılırsa $c_{\alpha-1}^{\nu-1} = 0$ elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Bundan dolayı, $\Lambda(A)^{\alpha-1} \neq (0)$ olduğunda $G(A)_{\alpha-1} \neq (1)$ olur. $c_{\alpha-1} \in \Lambda(A)^{\alpha-1}$ olduğundan her $x \in A$ için $[c_{\alpha-1}, x] = 0$ olup, $c_{\alpha-1}$ ve dolayısıyla

$$c_{\alpha-1} + \frac{c_{\alpha-1}^2}{2!} + \dots + \frac{c_{\alpha-1}^{\nu-1}}{(\nu-1)!} = 0$$

$\Lambda(A)$ 'nın merkezindedir. Böylece, Önteorem 3.1.1.1'den dolayı $\exp(c_{\alpha-1})$, $G(A)$ 'nın merkezindedir. Bundan dolayı, $G(A)_\alpha = (1)$ olur.

Sonuç olarak, $G(A)_\alpha = (1)$ ve $G(A)_{\alpha-1} \neq (1)$ olduğundan $G(A)$ adjoint grubunun nilpotentlik sınıfı α 'dır. ■

3.2.2 Radikal halkalar için eşitliği

Bu alt bölümde, R radikal halkasının adjoint grubunun ve Lie halkasının yukarı merkez serileri tanımlanacak; daha sonra, bu iki serinin aynı sıradaki elemanlarının eşit olduğu gösterilerek, adjoint grubun nilpotentlik sınıfı ile Lie halkasının nilpotentlik sınıfının eşit olduğu sonucu elde edilecektir.

Tanım 3.2.2.1 : R radikal halkasının n . merkezi Z_n ve adjoint grubunun n . merkezi Y_n aşağıdaki gibi tanımlanır.

$Z_0 = (0)$ olmak üzere her $n \geq 1$ için,

$$Z_n = \{a \in R \mid [a, x] \in Z_{n-1}; \text{ her } x \in R \text{ için}\}$$

ve

$Y_0 = (0)$ olmak üzere her $n \geq 1$ için,

$$Y_n = \{a \in R \mid a'ox'oa ox \in Y_{n-1}; \text{ her } x \in R \text{ için}\}$$

Teorem 3.2.2.2 : R bir radikal halka olsun. O zaman, her $n \in \mathbb{N}$ için $Z_n = Y_n$ dir.

Teoremin kanıtı aşağıdaki önteoremler yardımıyla yapılacaktır.

Önteorem 3.2.2.3 : R bir radikal halka olsun. Her $a \in Z_n$ ve $[x, y] = 0$ olacak şekilde her $x, y \in R$ için $y[a, x] \in Z_{n-1}$ ve $(1 + y)[a, x] \in Z_{n-1}$ dir.

İspat: İspatı tümevarımla yapalım.

$n = 1$ için teoremin doğru olduğu açıktır.

$n > 1$ olsun. her $z \in Z_{n-1}$ ve $[x, y] = 0$ şartını sağlayan her $x, y \in R$ için $y[z, x] \in Z_{n-2}$ olduğunu kabul edelim.

$a \in Z_n$ ve $[x, y] = 0$ olmak üzere $x, y \in R$ ve $b \in R$ olsun. Önteorem 2.27 yardımıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$[a, bx, y] = [[a, b]x + b[a, x], y]$$

$$\begin{aligned}
&= [a, b][x, y][a, b, y]x + b[a, x, y] + [b, y][a, x] \\
&= [a, b, y]x + b[a, x, y] + [b, y][a, x]
\end{aligned}$$

Burada, $x[a, b, y] + [a, b, y, x] = [a, b, y]x$ olduğu kullanılarak, yukarıdaki eşitlikten, $[a, bx, y] = x[a, b, y] + [a, b, y, x] + b[a, x, y] + [b, y][a, x]$ elde edilir. Bu eşitliğin son iki terimi aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$\begin{aligned}
b[a, x, y] + [b, y][a, x] &= b[a, x]y - by[a, x] + by[a, x] - yb[a, x] \\
&= b[a, x]y - by[a, x] + by[a, x] - yb[a, x] \mp [a, x]by \mp by[a, x] \mp y[a, x]b \\
&= -(y[a, x]b - by[a, x]) + ([a, x]by - by[a, x]) - ([a, x]by - b[a, x]y - y[a, x]b + yb[a, x]) \\
&= -[y[a, x], b] + [a, x, by] - [a, x, b, y]
\end{aligned}$$

Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa,

$$[a, bx, y] = x[a, b, y] + [a, b, y, x] - [y[a, x], b] + [a, x, by] - [a, x, b, y]$$

bulunur. Burada, tümevarım hipotezi ve Z_n 'lerin tanımı ile eşitliğin $[y[a, x], b]$ dışındaki her teriminin Z_{n-2} 'nin bir elemanı olduğu görülür. Bu durumda, $[y[a, x], b] \in Z_{n-2}$, dolayısıyla $y[a, x] \in Z_{n-1}$ elde edilir. Bundan yararlanarak, $(1 + y)[a, x] = [a, x] + y[a, x] \in Z_{n-1}$ olur. ■

Önteorem 3.2.2.4 : R bir radikal halka olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için Z_n , R 'nin bir radikal alt halkasıdır. Üstelik, her $x \in R$ için $(1 + x)Z_n(1 + x') \subset Z_n$ dir.

İspat: Kanıtta yardımcı olacak olan, doğruluğu kolaylıkla gösterilebilen yarı-Jacobi-identity aşağıdaki gibi ifade edilir

Her $a, b, c \in R$ için $[ab, c] + [bc, a] + [ca, b] = 0$ dir.

U , R 'nin toplamsal bir alt grubu ve $Z = \{z \in R \mid [z, r] \in U; \text{ her } r \in R \text{ için}\}$ olsun. Göstereceğiz ki; Z , R 'nin bir alt halkasıdır. Bunun için her $z_1, z_2 \in Z$ için $z_1 - z_2, z_1 z_2 \in Z$ olduğunu gösterelim.

$z_1, z_2 \in Z$ ise her $r \in R$ için $[z_1, r], [z_2, r] \in U$ olup, $[z_1 - z_2, r] \in U$, böylece $z_1 - z_2 \in Z$ bulunur. Yarı-Jacobi-identity ve anti-commutativity ile $[z_1 z_2, r] = [z_1, z_2 r] + [z_2, r z_1] \in U$ olup, $z_1 z_2 \in Z$ bulunur. Böylece, Z , R 'nin bir alt halkasıdır. Özel olarak, U yerine Z_{n-1} alınırsa Z kümesinin tanımı Z_n 'in

tanımı ile çakışır. Dolayısıyla, Z_n , R 'nin bir alt halkasıdır.

Şimdi Z_n 'lerin radikal olduğunu gösterelim.

R radikal halka olduğundan her $a \in Z_n$ için $a' \in R$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a \in Z_n$ iken $a' \in Z_n$ olduğunu kanıtlayalım. Bunun için, öncelikle aşağıdaki iki eşitliğin doğruluğunu gösterelim.

$$(1) \quad \text{Her } a, b \in R \text{ için } [a', b] = [b, a] + [b, a]a' + a'[b, a] + a'[b, a]a'$$

$$(2) \quad \text{Her } a \in Z_n \text{ için } s, r \in R \text{ ve } [a, s] = 0 \text{ ise } [a, r]s \in Z_{n-1}$$

dir.

R radikal halka olduğundan her $a \in R$ için $a' \in R$ ve $a + a' + aa' = 0 = a + a' + a'a$ olup, buradan yararlanarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} & (a + a' + a'a)b - b(a + a' + aa') - a'b(a + a' + aa') + (a + a' + a'a)ba' = 0 \\ \implies & ab + a'b + a'ab - ba - ba' - baa' - a'ba - a'ba' - a'baa' + aba' + a'ba' + a'aba' = 0 \\ \implies & (a'b - ba') - (ba - ab) - (ba - ab)a' - a'(ba - ab) - a'(ba - ab)a' = 0 \\ \implies & [a', b] = [b, a] + [b, a]a' + a'[b, a] + a'[b, a]a' \end{aligned}$$

olup (1) eşitliği elde edilir.

Her $a \in Z_n$, $[a, s] = 0$ olmak üzere $r, s \in R$ olsun. Önteorem 2.27 yardımıyla, $[a, r]s = [a, r]s + r[a, s] = [a, rs] \in Z_{n-1}$ olup (2) ifadesinin doğruluğunu gösterir.

Şimdi, $a \in Z_n$ olsun. O zaman $a' \in R$ vardır. Her $r \in R$ için (1) eşitliği ile $[a', r] = [r, a] + [r, a]a' + a'[r, a] + a'[r, a]a'$ elde edilir. Burada dikkat edilirse, Z_n 'lerin tanımından $a \in Z_n$ iken $-[a, r] = [r, a] \in Z_{n-1}$, (2)'den $[r, a]a' \in Z_{n-1}$ ve Önteorem 3.2.2.3'den $a'[r, a] \in Z_{n-1}$ dir. Ayrıca, $a'[r, a]a' = a'[r, a]a' \mp [r, a]a'a' = [r, a, a']a' + [r, a](a')^2$ olup, (2) ve Önteorem 3.2.2.3'den $a'[r, a]a' \in Z_{n-1}$ dir. Böylece, $[a', r] \in Z_{n-1}$ elde edilir. Bundan dolayı $a' \in Z_n$ dir. Yani, her $n \in \mathbb{N}$ için Z_n radikal alt halkadır.

Şimdi her $x \in R$ için $(1+x)Z_n(1+x') \subset Z_n$ olduğunu gösterelim.

$a \in Z_n$ ve $x \in R$ olsun.

$$\begin{aligned}
(1+x)a(1+x') &= a + xa + ax' + xax' \\
&= a + xa + a(-x - xx') + xax' \\
&= a + xa - ax - axx' + xax' \\
&= a - (ax - xa) - (ax - xa)x' \\
&= a - [a, x] - [a, x]x'
\end{aligned}$$

olup, Önteorem 3.2.2.3'den $(1+x)Z_n(1+x') \subset Z_n$ olduğu görülür. ■

Önteorem 3.2.2.5 : R bir radikal halka olsun. O zaman, her $n \in \mathbb{N}$ için $Z_n \subseteq Y_n$ dir.

İspat: n üzerinden tümevarım yapalım. $n = 1$ ise verilen ifade Önteorem 3.1.1.3'den açıktır.

$n > 1$ olsun. $Z_{n-1} \subseteq Y_{n-1}$ olduğunu kabul edelim. 3.1.1.(B) ifadesinden $a, x \in R$ için $A = 1 + a$, $X = 1 + x$ olmak üzere $a'ox'oa ox = A^{-1}X^{-1}[a, x]$ eşitliği vardır.

$a \in Z_n$, $x, y \in R$ olsun. Yukarıdaki eşitlik ve Önteorem 2.27'den yararlanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
[a'ox'oa ox, y] &= [A^{-1}X^{-1}[a, x], y] \\
&= A^{-1}X^{-1}[a, x, y] + [A^{-1}X^{-1}, y][a, x] \\
&= A^{-1}X^{-1}[a, x, y] + A^{-1}[X^{-1}, y][a, x] + [A^{-1}, y]X^{-1}[a, x] \\
&= A^{-1}X^{-1}[a, x]y - A^{-1}X^{-1}y[a, x] + A^{-1}X^{-1}y[a, x] - A^{-1}yX^{-1}[a, x] \\
&\quad + A^{-1}yX^{-1}[a, x] - yA^{-1}X^{-1}[a, x] \\
&= A^{-1}X^{-1}[a, x]y - A^{-1}yX^{-1}[a, x] + A^{-1}yX^{-1}[a, x] - yA^{-1}X^{-1}[a, x] \\
&\quad \mp [a, x]A^{-1}yX^{-1} \mp yX^{-1}[a, x]A^{-1} \mp X^{-1}[a, x]A^{-1}y \\
&= -([a, x]A^{-1}yX^{-1} - A^{-1}yX^{-1}[a, x]) \\
&\quad + ([a, x]A^{-1}yX^{-1} - yX^{-1}[a, x]A^{-1}) \\
&\quad + (X^{-1}[a, x]A^{-1}y - A^{-1}yX^{-1}[a, x])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(X^{-1}[a, x]A^{-1}y - yX^{-1}[a, x]A^{-1} - A^{-1}X^{-1}[a, x]y + yA^{-1}X^{-1}[a, x]) \\
& = -[a, x, A^{-1}yX^{-1}] + [[a, x]A^{-1}, yX^{-1}] + [X^{-1}[a, x], A^{-1}y] \\
& \quad - [X^{-1}[a, x]A^{-1}, y] + [A^{-1}X^{-1}[a, x], y] \\
& = -[a, x, A^{-1}yX^{-1}] + [a, xA^{-1}, yX^{-1}] + [X^{-1}[a, x], A^{-1}y] \\
& \quad + [X^{-1}[a, x], a', y]
\end{aligned}$$

$a \in Z_n$ için $[x, x'] = 0$ olduğundan Önteorem 3.2.2.3'den $X^{-1}[a, x] \in Z_{n-1}$ olduğu ve Z_n 'lerin tanımı dikkate alınır, yukarıdaki eşitliğin her bir terimi Z_{n-2} 'nin bir elemanıdır. Dolayısıyla, $[a'ox'oaax, y] \in Z_{n-2}$ dir. Böylece, $a'ox'oaax \in Z_{n-1}$ dir. Tümevarım hipotezinden $a'ox'oaax \in Y_{n-1}$ olup, Y_n 'lerin tanımından $a \in Y_n$ bulunur. Sonuç olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için $Z_n \subseteq Y_n$ elde edilir. ■

Önteorem 3.2.2.6 : R bir radikal halka olsun. Eğer $Y_{n-1} \subseteq Z_{n-1}$ ise $2Y_n \subseteq Z_n$ dir.

İspat: $a \in Y_n$ olsun. $2a \in Z_n$ olduğunu göstermek yeterlidir. Her $x \in R$ için $X^{-1}A^{-1}[a, x] = (a'ox'oaax)' \in Y_{n-1} \subseteq Z_{n-1}$ olduğundan,

$$(1) \quad X^{-1}A^{-1}[a, x] \in Z_{n-1}$$

dir. $y \in R$ için Önteorem 3.2.2.3 yardımıyla

$$yX[X^{-1}A^{-1}[a, x], yX] \in Z_{n-2}$$

$$YX[X^{-1}A^{-1}[a, x], YX] \in Z_{n-2}$$

elde edilir. Bu ifadeler Önteorem 2.27 yardımıyla düzenlenerek, aşağıdaki (2) ve (3) ifadeleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
yX[X^{-1}A^{-1}[a, x], yX] & = yXX^{-1}[A^{-1}[a, x], yX] + yX[X^{-1}, yX]A^{-1}[a, x] \\
& = y[A, A^{-1}x, yX] + (yXX^{-1}yX - yXyXX^{-1})A^{-1}[a, x] \\
& = y[A, A^{-1}x, yX] + (yyX - yXy)A^{-1}[a, x] \\
& = y[A, A^{-1}x, yX] + [y, yX]A^{-1}[a, x] \\
& = [y[A, A^{-1}x], yX]
\end{aligned}$$

$$(2) \quad yX[X^{-1}A^{-1}[a, x], yX] = [y[A, A^{-1}x], yX] \in Z_{n-2}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $YX[X^{-1}A^{-1}[a, x], YX] \in Z_{n-2}$ ifadesinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
YX[X^{-1}A^{-1}[a, x], YX] &= YXX^{-1}[A^{-1}[a, x], YX] + YX[X^{-1}, YX]A^{-1}[a, x] \\
&= Y[A, A^{-1}x, YX] + (YXX^{-1}YX - YXYXX^{-1})A^{-1}[a, x] \\
&= Y[A, A^{-1}x, YX] + (YYX - YXY)A^{-1}[a, x] \\
&= Y[A, A^{-1}x, YX] + [Y, YX]A^{-1}[a, x] \\
&= [Y[A, A^{-1}x], YX]
\end{aligned}$$

$$(3) \quad YX[X^{-1}A^{-1}[a, x], YX] = [Y[A, A^{-1}x], YX] \in Z_{n-2}$$

bulunur. Bu ifadede $Y = 1 + y$ yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
[(1+y)[A, A^{-1}x], (1+y)X] &= [(1+y)[A, A^{-1}x], X] + [(1+y)[A, A^{-1}x], yX] \\
&= [(1+y)[A, A^{-1}x], x] + [A, A^{-1}x, yX] + [y[A, A^{-1}x], yX] \in Z_{n-2}
\end{aligned}$$

olup, (2) yardımıyla,

$$(4) \quad [(1+y)[A, A^{-1}x], x] + [A, A^{-1}x, yX] \in Z_{n-2}$$

elde edilir. Burada, $y = 0$ alınır

$$(5) \quad [A, A^{-1}x, x] \in Z_{n-2}$$

bulunur. (4) ifadesinin birinci terimine dikkat edilirse,

$$[(1+y)[A, A^{-1}x], x] = [A, A^{-1}x, x] + [y[A, A^{-1}x], x]$$

olup, bu sonuç (4) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$(6) \quad [A, A^{-1}x, yX] + [y[A, A^{-1}x], x] \in Z_{n-2}$$

olduğu görülür. (6) ifadesinde x yerine $-x$ alınır,

$$(7) \quad -[A, A^{-1}x, y - yx] + [y[A, A^{-1}x], x] \in Z_{n-2}$$

elde edilir. (6) ifadesinden (7) ifadesi çıkartılırsa, Lie komutatörün lineerliği ile $2[A, A^{-1}x, y] \in Z_{n-2}$ elde edilir. Böylece,

$$2[A, A^{-1}x, y] = 2[a, (1+a')x, y] = [2a, (1+a')x, y] \in Z_{n-2}$$

olup, buradan, $[2a, (1+a')x] \in Z_{n-1}$ bulunur. R radikal halka olduğundan x yerine her $z \in R$ için $(1+a)z$ alınır,

$$[2a, (1+a')(1+a)z] = [2a, z] \in Z_{n-1}$$

olup, buradan,

$$2a \in Z_n$$

elde edilir. Bu da kanıtı tamamlar. ■

Önteorem 3.2.2.7 : R bir radikal halka olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$Z_n = \{a \in R \mid (1 + x')[a, x] \in Z_{n-1}; \text{ her } x \in R \text{ için}\}$$

biçimindedir.

İspat:

$$A_n = \{a \in R \mid (1 + x')[a, x] \in Z_{n-1}; \text{ her } x \in R \text{ için}\}$$

olsun. $a \in Z_n$ alalım. Önteorem 3.2.2.3'den dolayı her $x \in R$ için $(1 + x')[a, x] \in Z_{n-1}$ dir. Burada, A_n 'lerin tanımını dikkate alınırsa $a \in A_n$ olduğu görülür. Dolayısıyla, her $n \in \mathbb{N}$ için $Z_n \subseteq A_n$ dir.

n üzerinden tümevarımla $A_n \subseteq Z_n$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} (1 + x')[a, x] &= ax - xa + x'ax - x'xa \\ &= ax + (-x - x'x)a + x'ax \\ &= ax + x'a + x'ax - a + x + x' + x'x \\ &= -a + x' + a + x'a + x + xx' + ax + x'ax \\ &= -a + x'oa + x + (x'oa)x \\ &= -a + x'oaax \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$a \in A_1$ alalım. Yukarıdaki eşitlikten $(1 + x')[a, x] = -a + x'oaax = 0$ olur. Bu eşitlik düzenlenirse $a = x'oaax$ olup, buradan $aox = xoa$ elde edilir. Böylece, $a \in Z_1$ dir. Yani, $A_1 \subseteq Z_1$ olur.

$n > 1$ ve $A_{n-1} \subseteq Z_{n-1}$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $a \in A_n$ için $a \in Z_n$ olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned}
[2a, x, y] &= [a, x, 2y] \mp [y[a, x], 2y] \\
&= [a, x, 2y] + [y[a, x], 2y] - [y[a, x], 2y] \\
&= [(1 + y)[a, x], 2y] - [y[a, x], 2y]
\end{aligned}$$

Bu eşitlikte, 2 yerine $((1 + x) + (1 - x))$ yazılırsa, $Y = 1 + y$, $X = 1 + x$, $X_1 = 1 - x$ olmak üzere, Öntelem 2.27 ve Lie komutatörün lineerlik özelliği kullanılarak ve $XX^{-1} = 1 = X^{-1}X$ (Bkz. Bölüm 3.1.1) olduğu da dikkate alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
[2a, x, y] &= [Y[a, x], Y((1 + x) + (1 - x))] - [y[a, x], y((1 + x) + (1 - x))] \\
&= [[Y[a, x], YX] + [Y[a, x], YX_1] - [y[a, x], yX] - [y[a, x], yX_1]] \\
&= [YXX^{-1}[a, x], YX] + [YX_1X_1^{-1}[a, x], YX_1] - [yXX^{-1}[a, x], yX] \\
&\quad - [yX_1X_1^{-1}[a, x], yX_1] \\
&= YX[X^{-1}[a, x], yox] - YX_1[X_1^{-1}[a, -x], yo(-x)] - yX[X^{-1}[a, x], yX] \\
&\quad + yX_1[X_1^{-1}[a, x], yX]
\end{aligned}$$

elde edilir. A_n 'lerin tanımından $X^{-1}[a, x] \in Z_{n-1}$ olup, Öntelem 3.2.2.3 yardımıyla görülür ki, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki her terim Z_{n-2} 'nin bir elemanıdır. Dolayısıyla, $[2a, x, y] \in Z_{n-2}$ dir. Z_n 'lerin tanımı dikkate alındığında,

$$(1) \quad 2a \in Z_n$$

elde edilir.

Öntelem 3.2.2.3'den $[a, x, x] = (1 + x)[(1 + x')[a, x], x] \in Z_{n-2}$ olup, burada x yerine $x + y$ alınarak, Lie komutatörün lineerlik özelliği kullanıldığında aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$[a, x + y, x + y] = [a, x, x] + [a, x, x] + [a, x, y] + [a, y, x] + [a, y, y] \in Z_{n-2}$$

Buradan, her $x, y \in R$ için $[a, x, y] + [a, y, x] \in Z_{n-2}$ bulunur. Özel olarak, y yerine $y(1 + x')$ alınırsa,

$$(2) \quad [a, x, y(1 + x')] + [a, y(1 + x'), x] \in Z_{n-2}$$

olur.

$$\begin{aligned}
[(1 + x')[a, x], y] &= [X^{-1}[a, X], y] = [X^{-1}(aX - Xa), y] \\
&= [X^{-1}aX - a, y] = X^{-1}aXy - ay - yX^{-1}aX + ya \\
&= X^{-1}aXy - ay - yX^{-1}aX + ya \mp X^{-1}ayX \mp X^{-1}yaX
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mp X^{-1}yX^{-1}aXX \mp ay \\
& = (X^{-1}ayX - X^{-1}yaX - ay + ya) \\
& \quad + (X^{-1}aXy - ay - X^{-1}yX^{-1}aXX + X^{-1}yaX) \\
& \quad - (X^{-1}ayX - X^{-1}yX^{-1}aXX - ay + yX^{-1}aX) \\
& = (X^{-1}ayX - X^{-1}yaX - X^{-1}Xay + X^{-1}Xya) \\
& \quad + (X^{-1}aXyX^{-1}X - X^{-1}XayX^{-1}X - X^{-1}yX^{-1}aXX + X^{-1}yX^{-1}XaX) \\
& \quad - (X^{-1}ayX^{-1}XX - X^{-1}yX^{-1}aXX - X^{-1}XayX^{-1}X + X^{-1}XyX^{-1}aX) \\
& = X^{-1}[(ay - ya), X] + X^{-1}[(aX - Xa), yX^{-1}]X \\
& \quad - X^{-1}[(ayX^{-1} - yX^{-1}a), X]X \\
& = X^{-1}[a, y, X] + X^{-1}[a, X, yX^{-1}]X - X^{-1}[a, yX^{-1}, X]X \\
& = X^{-1}[a, y, X] + X^{-1}[a, X, yX^{-1}]X - X^{-1}[a, yX^{-1}, X]X \\
& \quad \mp X^{-1}[a, yX^{-1}, X] \\
& = X^{-1}[a, y, x] + X^{-1}([a, x, yX^{-1}] + [a, yX^{-1}, X])X \\
& \quad - X^{-1}[2a, yX^{-1}, x]X
\end{aligned}$$

Bulunan bu eşitlikte, dikkat edilirse (2)'den dolayı $[a, x, yX^{-1}] + [a, yX^{-1}, X]$, Z_{n-2} 'nin bir elemanıdır. Önteorem 3.2.2.4'den dolayı ortadaki terim Z_{n-2} 'nin bir elemanıdır. (1)'den dolayı $2a \in Z_{n-2}$ olup, benzer şekilde soldan üçüncü terim Z_{n-2} 'nin bir elemanıdır. Eşitliğin sol tarafı da Z_{n-2} 'nin bir elemanı olduğundan $X^{-1}[a, y, x] \in Z_{n-2}$ elde edilir. Bu durumda, A_n 'lerin tanımından $[a, y] \in A_{n-1}$ olur. Tümevarım hipotezinden $[a, y] \in Z_{n-1}$ olup, $a \in Z_n$ dir. Böylece, $A_n \subseteq Z_n$ dir. ■

Önteorem 3.2.2.8 : R bir radikal halka olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $Y_n \subseteq Z_n$ dir.

İspat: n üzerinden tümevarım yapalım.

$Y_1 = Z_1$ olduğundan $n = 1$ için açıktır.

Kabul edelim ki, $n > 1$ ve $Y_{n-1} \subseteq Z_{n-1}$ olsun. $a \in Y_n$ alalım. $a \in Z_n$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Her $x \in R$ için Önteorem 3.2.2.6.(1)'den $X^{-1}A^{-1}[a, x] \in Z_{n-1}$ dir. Bu ifade ve Önteorem 3.2.2.3 dikkate alınrsa,

$$(\star) \quad [a, x, aox] = AX[X^{-1}A^{-1}[a, x], aox] \in Z_{n-2}$$

elde edilir.

Şimdi,

$$[a, x, a] = [a, x, aox] - [a, x + a', ao(x + a')]$$

$$[a, x, a'] = -[a, (1 + a')x(1 + a'), a]$$

eşitliklerinin doğruluğunu gösterelim.

Lie komutatörün lineerlik özelliği ve $a + a' + aa' = 0$ olduğundan yararlanarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} [a, x, a] &= [a, x, a] \mp [a, x, x + ax] - [a, a', x + ax] \\ &= [a, x, a + x + ax] - [a, x, x + ax] - [a, a', x + ax] \\ &= [a, x, aox] - [a, x + a', x + ax + a + a' + aa'] \\ &= [a, x, aox] - [a, x + a', ao(x + a')] \end{aligned}$$

Benzer şekilde, $A = 1 + a$ olmak üzere $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$ (Bkz. Bölüm 3.1.1) olduğu kullanılarak aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\begin{aligned} [a, x, a'] &= [A, x, A^{-1}] = [Ax - xA, A^{-1}] = Ax A^{-1} - x A A^{-1} - A^{-1}A + A^{-1}x A \\ &= Ax A^{-1} - x A^{-1}A - A A^{-1}x + A^{-1}x A \\ &= A(x A^{-1} - A^{-1}x) - (x A^{-1} - A^{-1}x)A \\ &= -[x A^{-1} - A^{-1}x, A] \\ &= -[A A^{-1}x A^{-1} - A^{-1}x A^{-1}A, A] \\ &= -[A, A^{-1}x A^{-1}, A] \\ &= -[a, (1 + a')x(1 + a'), a] \end{aligned}$$

($\star$) ifadesi göz önüne alındığında, yukarıda gösterilen eşitliklerden,

$$(1) \quad [a, x, a] \in Z_{n-2} \text{ ve } [a, x, a'] \in Z_{n-2}$$

elde edilir.

Önteorem 2.27 kullanılarak aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\begin{aligned}
X^{-1}[a, x, x] &= X^{-1}[a, x, x] \mp X^{-1}A^{-1}[a, x, A]X \\
&= (X^{-1}A^{-1}[a, x, A]X + X^{-1}[a, x, x]) - X^{-1}A^{-1}[a, x, A]X \\
&= X^{-1}A^{-1}[a, x, AX] - X^{-1}[A^{-1}[a, x], A]X \\
&= X^{-1}A^{-1}[a, x, AX] + [X^{-1}A^{-1}, AX][a, x] - X^{-1}[A^{-1}[a, x], A]X \\
&= [X^{-1}A^{-1}[a, x], AX] - X^{-1}[A^{-1}[a, x], a]X \\
&= [X^{-1}A^{-1}[a, x], AX] - X^{-1}[a, A^{-1}x, a]X
\end{aligned}$$

olup, Önteorem 3.2.2.6.(1)'den $X^{-1}A^{-1}[a, x] \in Z_{n-1}$ dir. Böylece, yukarıdaki eşitliğin ilk terimi Z_{n-2} 'nin bir elemanıdır. (1) ifadesinden $[a, A^{-1}x, a] \in Z_{n-2}$ ve Önteorem 3.2.2.4'den $X^{-1}[a, A^{-1}x, a]X \in Z_{n-2}$ olur. Böylece, eşitliğin sol tarafı da Z_{n-2} 'nin bir elemanıdır. Yani, $X^{-1}[a, x, x] \in Z_{n-2}$ elde edilir.

$[a, x, x, x] = X[X^{-1}[a, x, x], x]$ olup, Önteorem 3.2.2.3 ve son bulunan kıyaslamadan $[a, x, x, x] \in Z_{n-3}$ bulunur.

Lie komutatörün lineerlik özelliği yardımıyla kolaylıkla gösterilebilen aşağıdaki,

$$[a, x, x, a'] = [a, x + a', x + a', x + a'] - [a, x, x, x] - [a, x, a', a] - [a, x, a', x]$$

eşitliğe dikkat edilirse, (1) ve yukarıdaki karşılaştırmadan,

$$(2) \quad [a, x, x, a'] \in Z_{n-3}$$

elde edilir.

R 'nin x, a', z elemanları için Jacobi identity (Bkz. Tanım 2.25) uygulanırsa, anti-commutativity (Bkz. Tanım 2.25) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&[a', x, z] + [x, z, a'] + [z, a', x] = 0 \\
\implies [z, [a', x]] &= [z, a', x] - [z, x, a']
\end{aligned}$$

bulunur. Burada, z yerine $[a, x]$ yazılırsa, $[[a, x], [a', x]] = [[a, x], a', x] - [[a, x], x, a']$ olup, (1) ve (2)'den dolayı,

$$(3) \quad [[a, x], [a', x]] \in Z_{n-3}$$

elde edilir.

Önteorem 3.2.2.6.(6) ifadesinde x yerine $x + a'$ alınırsa, $A = 1 + a$, $A^{-1} = 1 + a'$ olmak üzere,

$$[A, A^{-1}(x + a'), y + y(x + a')] + [y[A, A^{-1}(x + a')], x + a'] \in Z_{n-2}$$

biçimindedir. Burada, $[A, A^{-1}a'] = [A, A^{-1}]a' + A^{-1}[A, a'] = 0$ olduğu dikkate alındığında, Lie komutatörün lineerliği yardımıyla,

$$[A, A^{-1}x, y + y(x + a')] + [y[A, A^{-1}x], x + a'] \in Z_{n-2}$$

bulunur. Önteorem 3.2.2.6.(6) ifadesi bu son ifadeden çıkartılırsa,

$$[A, A^{-1}x, ya'] + [y[A, A^{-1}x], a'] \in Z_{n-2}$$

elde edilir. R bir radikal halka olduğundan, bu ifadede x yerine Ax alınırsa,

$$(4) \quad [A, x, ya'] + [y[A, x], a'] \in Z_{n-2}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} [y[A, x], a'] &= [y[a, x], a'] = y[a, x]a' - a'y[a, x] \mp [a, x]a'y \\ &= y[a, xa'] - [a, xa']y + [a, x]a'y - a'y[a, x] \\ &= -([a, xa']y - y[a, xa']) + ([a, x]a'y - a'y[a, x]) \\ &= -[a, xa', y] + [a, x, a'y] \end{aligned}$$

olup, bu eşitlik (4) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$[a, x, ya'] + [a, x, a'y] - [a, xa', y] \in Z_{n-2}$$

elde edilir. Bu ifadede Lie komutatörün lineerlik özelliği kullanılarak aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\begin{aligned} [a, x, ya'] + [a, x, a'y] - [a, xa', y] &= [a, x, ya'] + [a, x, a'y] - [a, xa', y] \mp [a, x, ya'] \\ &= [a, x, a'y - ya'] + [2a, x, ya'] - [a, xa', y] \\ &= [[a, x], [a', y]] + [2a, x, ya'] - [a, xa', y] \in Z_{n-2} \end{aligned}$$

Burada, $y = x$ alınarak, (3) ve Önteorem 3.2.2.6 yardımıyla,

$$(5) \quad [a, xa', x] \in Z_{n-2}$$

bulunur.

$A^{-1}X^{-1}[a, x] = a'ox'oaax \in Y_{n-1}$ ve tümevarım hipotezinden $Y_{n-1} \subseteq Z_{n-1}$ olup, Önteorem 3.2.2.4'den $AZ_{n-1}A^{-1} \subseteq Z_{n-1}$ olduğu kullanılarak,

$$(6) \quad X^{-1}[a, x]A^{-1} \in AZ_{n-1}A^{-1} \subseteq Z_{n-1}$$

bulunur.

Önteorem 2.27 yardımıyla gerekli düzenlemeler yapıp, sonra da Önteorem 3.2.2.3 ve (6) kullanıldığında,

$$\begin{aligned} [a, xA^{-1}, x] &= [[a, x]A^{-1}, x] = [XX^{-1}[a, x]A^{-1}, x] \\ &= X[X^{-1}[a, x]A^{-1}, x] \in Z_{n-2} \end{aligned}$$

olup,

$$(7) \quad [a, xA^{-1}, x] \in Z_{n-2}$$

bulunur.

$[a, x, x] = [a, xA^{-1}, x] - [a, xa', x]$ olduğu kullanılarak (5) ve (7)'den yararlanarak,

$$(8) \quad [a, x, x] \in Z_{n-2}$$

elde edilir. Bu ifadede x yerine $x + y$ alınırsa, Lie komutatörün lineerliği ile,

$$\begin{aligned} [a, x + y, x + y] &= [a, x, x + y] + [a, y, x + y] \\ &= [a, x, x] + [a, x, y] + [a, y, x] + [a, y, y] \end{aligned}$$

olup, (8)'den yararlanarak,

$$(9) \quad [a, x, y] + [a, y, x] \in Z_{n-2}$$

elde edilir. Özel olarak, bu ifadede y yerine $A^{-1}y$ alınırsa,

$$(10) \quad [a, x, A^{-1}y] + [a, A^{-1}y, x] \in Z_{n-2}$$

olur.

Önteorem 3.2.2.6.(5) ifadesinde x yerine $x + y$ alınırsa, Lie komutatörün lineerlik özelliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} [A, A^{-1}(x + y), x + y] &= [a, A^{-1}x, x + y] + [a, A^{-1}y, x + y] \\ &= [a, A^{-1}x, x] + [a, A^{-1}x, y] + [a, A^{-1}y, x] + [a, A^{-1}y, y] \end{aligned}$$

olup, Önteorem 3.2.2.6.(5)'den

$$(11) \quad [a, A^{-1}x, y] + [a, A^{-1}y, x] \in Z_{n-2}$$

elde edilir. Bu ifadeden (10) ifadesi çıkartılırsa,

$$(12) \quad [a, A^{-1}x, y] - [a, x, A^{-1}y] \in Z_{n-2}$$

bulunur.

Önteorem 2.27 kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir. Burada, kolaylık olması bakımından, $[a, x] = z$ ile gösterilecektir.

$$\begin{aligned} [A^{-1}X^{-1}[a, x], y] &= [A^{-1}X^{-1}z, y] = A^{-1}[X^{-1}z, y] + [A^{-1}, y]X^{-1}z \\ &= A^{-1}[X^{-1}z, y] + [A^{-1}, y]X^{-1}z \mp yX^{-1}zA^{-1} \mp zA^{-1}yX^{-1} \\ &\quad \mp [X^{-1}z, A^{-1}]y \mp [A^{-1}z, yX^{-1}] \\ &= ([X^{-1}z, A^{-1}]y + A^{-1}[X^{-1}z, y]) + [A^{-1}z, yX^{-1}] \\ &\quad - (zA^{-1}yX^{-1} - A^{-1}yX^{-1}z) \\ &\quad - ([X^{-1}z, A^{-1}]y + yA^{-1}X^{-1}z - yX^{-1}zA^{-1}) \\ &\quad + (zA^{-1}yX^{-1} - yX^{-1}zA^{-1} - [A^{-1}z, yX^{-1}]) \\ &= [X^{-1}z, A^{-1}y] + [A^{-1}z, yX^{-1}] - [z, A^{-1}yX^{-1}] - [X^{-1}z, A^{-1}, y] \\ &\quad + [z, A^{-1}, yX^{-1}] \end{aligned}$$

Burada, $A^{-1}[a, x] = [a, A^{-1}x]$ olduğu da dikkate alınarak, z yerine $[a, x]$ yazıldığında,

$$\begin{aligned} [A^{-1}X^{-1}[a, x], y] &= [X^{-1}[a, x], A^{-1}y] + [a, A^{-1}x, yX^{-1}] - [a, x, A^{-1}yX^{-1}] \\ &\quad - [X^{-1}[a, x], A^{-1}, y] + [a, x, A^{-1}, yX^{-1}] \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, $[X^{-1}[a, x], A^{-1}y] \in Z_{n-2}$ olduğunu göstermek istiyoruz.

Önteorem 3.2.2.6.(1)'den $A^{-1}X^{-1}[a, x] \in Z_{n-1}$ olup, $[A^{-1}X^{-1}[a, x], y] \in Z_{n-2}$ dir. (12) ifadesinde y yerine yX^{-1} alınırsa $[a, A^{-1}x, yX^{-1}] - [a, x, A^{-1}yX^{-1}] \in Z_{n-2}$ olur. $[X^{-1}[a, x], A^{-1}, y] = [A[A^{-1}X^{-1}[a, x], A^{-1}], y]$ olduğu dikkate alındığında, Önteorem 3.2.2.3'den $[X^{-1}[a, x], A^{-1}, y] \in Z_{n-2}$ elde edilir. (1) ifadesi ve Z_n 'lerin tanımı dikkate alındığında $[a, x, A^{-1}, yX^{-1}] \in Z_{n-2}$ bulunur. Yukarıda doğruluğu gösterilen eşitliğin, $[X^{-1}[a, x], A^{-1}y]$ dışındaki bütün terimleri Z_{n-2} 'nin bir elemanı olduğundan $[X^{-1}[a, x], A^{-1}y] \in Z_{n-2}$ elde edilir. Bu son ifadede, y yerine

Ay alındığında, her $y \in R$ için $[X^{-1}[a, x], y] \in Z_{n-2}$ bulunur. Böylece, Z_n 'lerin tanımından $X^{-1}[a, x] \in Z_{n-1}$ olur. Önteorem 3.2.2.7'den dolayı $a \in Z_n$ elde edilir. Dolayısıyla, her $n \in \mathbb{N}$ için $Y_n \subseteq Z_n$ dir. ■

İspat (Teorem 3.2.2.2): Önteorem 3.2.2.5 ve Önteorem 3.2.2.8'den dolayı her $n \in \mathbb{N}$ için $Y_n = Z_n$ dir. ■

Sonuç 3.2.2.9 : Bir radikal halkanın Lie halkasının nilpotentlik sınıfının n olması için gerek ve yeter koşul adjoint grubunun nilpotentlik sınıfının n olmasıdır.

4 ADJOINT GRUBU ÇÖZÜLEBİLİR OLAN RADİKAL HALKALAR

Bu bölümde, bir radikal halkanın adjoint grubu ve Lie halkasının çözülebilirlikleri arasındaki ilişki incelenecektir. İlk olarak, adjoint grubu çözülebilir olan asal radikal halkaların Goldie halka olduğu gösterilecek; daha sonra, her radikal halkanın bazı koşullar altında Lie-çözülebilir olduğunda, $G(R)$ adjoint grubunun çözülebilir olduğu kanıtlanacaktır.

4.1 Asal Radikal Halkalar

Tanım 4.1.1 : R bir Lie halka olsun. R 'nin çözülebilirlik serisi, $\delta_0(R) = R$ olmak üzere her $n \geq 0$ için

$$\delta_{n+1}(R) = [\delta_n(R), \delta_n(R)]$$

olarak tanımlanır. Eğer $\delta_m(R) = (0)$ olacak şekilde bir m doğal sayısı varsa R halkasına, en fazla m uzunluğunda *Lie-çözülebilir halka* denir.

Tanım 4.1.2 : R bir radikal halka olsun. $G(R)$ adjoint grubunun çözülebilirlik serisi, $\lambda_0(G(R)) = G(R)$ olmak üzere her $n \geq 0$ için

$$\lambda_{n+1}(G(R)) = (\lambda_n(G(R)), \lambda_n(G(R)))$$

biçiminde tanımlanır. Eğer bir $m \in \mathbb{N}$ için $\lambda_m(G(R)) = (0)$ oluyorsa, $G(R)$ adjoint grubu en fazla m uzunluğunda *çözülebilirdir* denir.

Önteorem 4.1.3 : R bir radikal halka ve A , $G(R)$ adjoint grubunun değişmeli normal alt grubu olsun. Eğer A , R 'nin hiçbir sıfır bölenini içermiyorsa A , R 'nin merkezindedir.

İspat: $\hat{A}$, R 'nin A 'yı içeren en küçük radikal alt halkası olsun. R 'nin bir r elemanının $\hat{A}$ 'nın merkezinde olması için gerek ve yeter koşulun $[r, A] = (0)$ olduğu ve $G(\hat{A})$ 'nin $G(R)$ 'nin değişmeli normal alt grubu olduğu açıktır.

A 'nın, R 'nin merkezinde olmadığını kabul edelim. O zaman, en az bir $r \in R$ için $[r, A] \neq (0)$ dır. $a, b \in A$ alalım.

$$\begin{aligned} c &= b(1+r, 1+a) = b(1+r')(1+a')(1+r)(1+a) = b(1+r'oa'oroa) \\ &= b + b(r'oa'oroa) \end{aligned}$$

olup, $\hat{A}$, A tarafından üretilen radikal halka olduğundan $a' \in \hat{A}$ ve $G(\hat{A})$, $G(R)$ 'nin değişmeli normal alt grubu olduğundan $r'oa'or \in \hat{A}$ elde edilir. Bu durumda, $r'oa'oroa \in \hat{A}$ ve dolayısıyla, $\hat{A}$ 'nın bir halka olduğu dikkate alındığında

$$c = b + b(r'oa'oroa) \in \hat{A}$$

bulunur. $G(\hat{A})$, $G(R)$ 'nin değişmeli normal alt grubu olduğundan, her $b \in A$ için Önteorem 3.1.1.1'den dolayı $(r'oa'or)b = b(r'oa'or)$ olur. Burada,

$$\begin{aligned} b + (r'oa'or)b &= b + b(r'oa'or) \\ \implies (1 + r'oa'or)b &= b(1 + r'oa'or) \\ \implies (1 + r)^{-1}(1 + a)^{-1}(1 + r)b &= b(1 + r)^{-1}(1 + a)^{-1}(1 + r) \end{aligned}$$

olup, bu eşitliğin her iki tarafı $(1 + r)$ ile soldan, $(1 + a)$ ile sağdan çarpılırsa,

$$\begin{aligned} (1 + a)^{-1}(1 + r)b(1 + a) &= (1 + r)b(1 + r)^{-1}(1 + a)^{-1}(1 + r)(1 + a) \\ \implies 1 + (1 + a)^{-1}(1 + r)b(1 + a) &= 1 + (1 + r)b(1 + r)^{-1}(1 + a)^{-1}(1 + r)(1 + a) \\ \implies (1 + a)^{-1}(1 + (1 + r)b)(1 + a) &= 1 + (1 + r)b(1 + r, 1 + a) \\ \implies (1 + a)^{-1}(1 + (1 + r)b)(1 + a) &= 1 + (1 + r)c \\ \implies (1 + (1 + r)b)^{-1}(1 + a)^{-1}(1 + (1 + r)b)(1 + a) &= (1 + (1 + r)b)^{-1}(1 + (1 + r)c) \\ \implies (1 + (1 + r)b, 1 + a) &= (1 + (1 + r)b)^{-1}(1 + (1 + r)c) \end{aligned}$$

elde edilir.

$1 + A$, $1 + R$ çarpım grubunun (Bkz. Bölüm 3.1.1) normal alt grubu olduğundan, yukarıda elde edilen son eşitliğin sol tarafına dikkat edilirse,

$$(\star) \quad (1 + (1 + r)b, 1 + a) = (1 + (1 + r)b)^{-1}(1 + (1 + r)c) \in 1 + A$$

olduğu görülür. Böylece, $(1 + (1 + r)c) = (1 + (1 + r)b)(1 + d)$ olacak şekilde bir $d \in A$ vardır. Bu eşitlik düzenlenirse, $d = (1 + r)(c - b - bd) \in (1 + r)\hat{A}$ olup, $d \in (1 + r)\hat{A} \cap A$ elde edilir.

Eğer $(1+r)\hat{A} \cap A = (0)$ ise, o zaman $d = 0$ olup, A , R 'nin hiçbir sıfır bölenini (Bkz. Tanım 2.39) içermediğinden $b = c$ olur. Böylece, $(\star)$ eşitliğinden

$$(1 + (1+r)b, 1+a) = 1$$

bulunur. Buradan, 3.1.1.(A)-(B), Önteorem 2.27 ve A 'nın değişmeli olduğu kullanılarak

$$0 = [(1+r)b, a] = [rb, a] = [r, a]b + r[b, a] = [r, a]b$$

elde edilir. Her $b \in A$ için $[r, a]b = 0$ olduğundan $[r, a]A = 0$ dir. A , R 'nin hiçbir sıfır bölenini içermediğinden her $a \in A$ için $[r, a] = 0$ olur. Bu takdirde, $[r, A] = (0)$ elde edilir ki, bu ilk kabulümüz ile çelişir. Yani, $(1+r)\hat{A} \cap A \neq (0)$ dir. Bu durumda, en az bir $\hat{a} \in \hat{A}$ ve $a \in A$ için $(1+r)\hat{a} = a \neq 0$ dir. Buradan, $\hat{a} = (1+r)^{-1}a \neq 0$ olup, $\hat{A} \cap (1+r)A \neq (0)$ dir. Dolayısıyla, $0 \neq b \in A$ için $(1+r)b \in \hat{A}$ dir. Böylece, $\hat{A}$ 'nın değişmeli olduğu kullanılarak, Önteorem 2.27 yardımıyla,

$$0 = [(1+r)b, A] = [(1+r), A]b$$

elde edilir. b elemanı sıfırdan farklı olduğundan ve hipotezden R 'nin sıfır bölene olmadığından $[(1+r), A] = 0$ dir. Dolayısıyla, $[r, A] = 0$ olup kabulümüzle çelişir. Bundan dolayı, A , R 'nin merkezindedir. ■

Tanım 4.1.4 : R bir halka olsun. Eğer $a, b \in R$ için $aRb = (0)$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R 'ye *asal halka* (*prime ring*) denir.

Tanım 4.1.5 : R bir halka olsun. Eğer R halkası aşağıdaki iki koşulu sağlarsa, R halkasına bir *sağ Goldie halka* denir.

- (1) R 'nin sıfırdan farklı sağ ideallerinin sağ sıfırlayıcılarının boştan farklı her alt kümesinin bir maksimal elemanı vardır.
- (2) R , sağ ideallerinin hiçbir sonsuz direkt toplamını içermez.

Benzer şekilde, sol Goldie halka tanımlanır. Bir halka hem sol hem de sağ Goldie halka ise, bu halkaya *Goldie halka* denir.

Teorem 4.1.6 : R , $G(R)$ adjoint grubu çözülebilir olan bir asal radikal halka olsun. O zaman, R bir Goldie halkadır.

İspat: R halkasının sağ Goldie halka olduğunu göstermek için, sağ ideallerinin hiçbir sonsuz direkt toplamını içermediğini ve sağ sıfırlayıcılarının boştan farklı her kümesinin bir maksimal elemanı olduğunu kanıtlamak yeterlidir.

S , R 'nin bir sağ ideali ve K , S 'nin sol sıfırlayıcısı olsun. Burada, $K = \{x \in S \mid xS = (0)\}$ olduğu dikkate alınrsa, K , S 'nin bir idealidir ve $K^2 = (0)$ dır.

Öncelikle, S , R 'nin sıfırdan farklı $P_1, \dots, P_{2^m}$ sağ ideallerinin bir direkt toplamı olduğunda, $G(S)$ adjoint grubunun Tanım 4.1.2'deki gibi elde edilen çözülebilirlik serisinin m . komutatör alt grubunun K içinde olmadığını gösterelim.

Tersini kabul edelim. S , bu koşula uyan en küçük $m \in \mathbb{N}$ için aksine bir örnek olsun. Yani, $n < m$ olduğunda R 'nin sıfırdan farklı 2^n tane idealinin direkt toplamının n . komutatör alt grubu K içinde olmasın. Eğer $m = 0$ ise $S \subseteq K$ olup $S = K$ elde edilir. Böylece, $RSRS = (0)$ olup, $S \neq (0)$ ve R asal halka olduğundan bir çelişkidir. Bundan dolayı $m \geq 1$ olmalıdır.

$$P = P_1 + \dots + P_{2^{m-1}} \text{ ve } Q = P_{2^{m-1}+1} + \dots + P_{2^m}$$

olarak seçilirse P ve Q , R 'nin sıfırdan farklı sağ idealleridir. A ve B sırasıyla, $G(P)$ ve $G(Q)$ adjoint gruplarının $(m-1)$. komutatör alt grupları olsun. S 'nin seçiminden $AP \neq (0) \neq BQ$ dur. Kabulden $\lambda_m(G(S)) \subseteq K$ olup,

$$\lambda_m(G(S)) = (\lambda_{m-1}(G(S)), \lambda_{m-1}(G(S))) \subseteq K$$

elde edilir. Böylece,

$$\text{Her } a, b \in \lambda_{m-1}(G(S)) \text{ için } (a, b) = a'ob'oaob \in K$$

$$\implies a'ob'oaob \equiv 0 \pmod{K}$$

$$\implies aob \equiv boa \pmod{K}$$

olup, $\lambda_{m-1}(G(S))$ modölo K 'ya göre değişmelidir. Burada, $A \subseteq \lambda_{m-1}(G(S))$ ve $B \subseteq \lambda_{m-1}(G(S))$ olduğu ve Önteorem 3.1.1.1 dikkate alınrsa $[A, B] \subseteq K$ elde edilir. Dolayısıyla $AB + K = BA + K$ dır. $S = P + Q$ ve $P \cap Q = (0)$ olduğundan $K = (K \cap P) + (K \cap Q)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, $A \subset P$ ve P, R 'nin bir sağ ideali olduğundan $AB \subseteq P$ ve benzer şekilde $BA \subseteq Q$ elde edilir. Bu durumda, $AB + K \subseteq P + K$ ve $BA + K \subseteq Q + K$ olup, $P \cap Q = (0)$ ve $AB + K = BA + K$ olduğu kullanılarak $AB \subseteq K$ elde edilir. Dolayısıyla, K, S 'nin bir ideali olduğundan $(1 + P)AB \subseteq K$ olduğu görölür. Diğer taraftan, $[A, P] \subseteq A$ olduğundan $(1 + P)A = A(1 + P)$ olup, yukarıdaki ifadelerden yararlanılarak,

$$(1 + P)AB = A(1 + P)B = AB + APB \subseteq K$$

ve $APB \subseteq K$ elde edilir. Buradan, $APBS \subseteq KS = (0)$ olup $APBS = (0)$ bulunur. R asal halka ve $BS \supseteq BQ \neq (0)$ olduğundan $AP = (0)$ bulunur. Bu ise S 'nin seçimi ile çelişir. Bundan dolayı, kabul yanlıştır.

Dolayısıyla, $G(S)$ adjoint grubu en azından $m + 1$ uzunluğunda çözülebilirdir. Bu sonuç, $G(R)$ adjoint grubu en fazla n uzunluğunda çözülebilir olduğunda, R 'nin sıfırdan farklı sağ ideallerinin her direkt toplamının 2^n den daha az sayıdaki sağ ideallerin direkt toplamı olduğunu gösterir. Aksi takdirde, R 'nin sıfırdan farklı 2^n tane sağ ideallerinin bir direkt toplamının en azından $n + 1$ uzunluğunda çözülebilir olması gerekir ki, bu durum $G(R)$ adjoint grubunun en fazla n uzunluğunda çözülebilir olması ile çelişir.

Şimdi, R 'nin sağ sıfırlayıcılarının artan bir zincirinin en fazla $2^n + 1$ adımda sabitlendiğini gösterelim.

Aksini kabul edelim. Bu takdirde, R 'nin sağ sıfırlayıcılarının,

$$(0) \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_{2^n} \subset R$$

olacak şekilde bir artan zinciri vardır. Bu durumda, $K_i = \{r \in R \mid L_i r = (0)\}$ olacak şekildeki L_i sol ideallerinin,

$$R \supset L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_{2^n} \supset (0)$$

biçiminde bir azalan zinciri vardır. Burada dikkat edilirse, her $1 \leq i \leq j \leq 2^n$ için $L_i K_{i+1} \neq (0)$, $L_j K_i = (0)$ ve $(K_i L_i \dots K_j L_j)^2 = (0)$ dir.

Şimdi $1 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq 2^n$ olmak üzere $x \in K_i L_i, \dots, K_j L_j$ ve $y \in K_k L_k, \dots, K_l L_l$ alalım.

$$\begin{aligned} (1+x, 1+y) &= (1+x')(1+y')(1+x)(1+y) \\ &= 1 + xy + (x+x'+x'x) + (y+y'+y'y) + x'(y+y'+y'y) \\ &\quad + x'xy + y'x + y'xy + x'y'x + x'y'xy \end{aligned}$$

olup, bu son eşitlikte R 'nin radikalliği, $yx, y'x \in K_k L_k K_l L_l = (0)$ ve $xx' \in (K_i L_i)^2$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$(\star) \quad (1+x, 1+y) = 1 + xy$$

elde edilir.

Her i için $x_i \in K_i L_i$ olsun. $\mu_n(x_1, \dots, x_{2^n})$ elemanı, $\mu_0(x_1) = 1 + x_1$ olmak üzere her $n \geq 0$ için

$$\mu_{n+1}(x_1, \dots, x_{2^{n+1}}) = (\mu_n(x_1, \dots, x_{2^n}), \mu_n(x_{2^n+1}, \dots, x_{2^{n+1}}))$$

biçiminde tanımlansın. $(\star)$ eşitliği yardımıyla,

$$\mu_n(x_1, \dots, x_{2^n}) = 1 + x_1 x_2 \dots x_{2^n}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

$G(R)$ adjoint grubu en fazla n uzunluğunda çözülebilir olduğundan her $x_i \in K_i L_i$ için $\mu_n(x_1, \dots, x_{2^n}) = 1$ olup $x_1 \dots x_{2^n} = 0$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$K_1 L_1 K_2 L_2 \dots K_{2^n} L_{2^n} = (0)$$

dır. R asal halka olduğundan Önteorem 2.41'den dolayı R 'nin sıfırdan farklı sağ (sol) ideallerinin sağ (sol) sıfırlayıcıları (0) dır. $K_1 \neq (0)$ ve R 'nin sağ ideali olduğundan, $L_1 K_2 L_2 \dots K_{2^n} L_{2^n} = (0)$ elde edilir. Benzer şekilde L_{2^n} , R 'nin sıfırdan farklı bir sol ideali olduğundan $L_1 K_2 L_2 \dots K_{2^n} = (0)$ bulunur. Burada dikkat edilirse, $L_i K_{i+1} \neq (0)$ olup $L_i K_j$, R 'nin bir idealidir. R asal halka olduğundan bir $i \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ için $L_i K_{i+1} = (0)$ olur ki, bu bir çelişkidir. Bundan dolayı kabulümüz yanlıştır. Böylece, R 'nin sağ sıfırlayıcılarının artan bir zinciri en fazla $2^n + 1$ adımda sabitlenir.

Aynı sonuçların, R 'nin sıfırdan farklı sol ideallerinin direkt toplamı ve sol sıfırlayıcılarının zincirleri için de sağlandığı açıktır. Bu da kanıtı tamamlar. ■

4.2 Kuvvetli Lie-Hyperabelian Halkalar

Tanım 4.2.1 : R bir halka olsun. Eğer R 'nin ideallerinin

$$(0) = R_0 \subseteq R_1 \subseteq \cdots \subseteq R_\alpha \subseteq R_{\alpha+1} \cdots \subseteq R_\gamma = R$$

artan bir serisi varsa ve her α ardıl ordinali için $R_{\alpha+1}/R_\alpha$ faktörleri değişmeli ise R 'ye *kuvvetli Lie-hyperabelian halka* denir.

Önteorem 4.2.2 : R kuvvetli Lie-hyperabelian bir halka, $x_1, y_1, y_2, \dots$ ve $z_1, z_2, \dots$ R 'nin elemanlarının iki dizisi olsun. Eğer her $i \geq 1$ tam sayısı için

$$x_{i+1} = [y_{2i-1}x_iy_{2i}, z_{2i-1}x_iz_{2i}]$$

ise, bir $m \geq 1$ tam sayısı için $x_m = 0$ dır.

İspat: Tersini kabul edelim. O zaman, $x_1, y_1, y_2, \dots$ ve $z_1, z_2, \dots$ R 'nin elemanlarının iki dizisi olmak üzere her $i \geq 1$ için $x_{i+1} = [y_{2i-1}x_iy_{2i}, z_{2i-1}x_iz_{2i}] \neq 0$ dır. Genelliği bozmadan R halkasının, bu dizilerin bütün elemanları tarafından üretildiğini varsayalım. Bu durumda, R sayılabilir. R Lie-hyperabelian olduğundan faktörleri değişmeli olacak şekilde

$$(0) = R_0 \subseteq R_1 \subseteq \cdots \subseteq R_\alpha \subseteq R_{\alpha+1} \cdots \subseteq R_\gamma = R$$

biçiminde ideallerin artan bir serisi vardır. Her bir x_i elemanı için $x_i \in R_{\alpha_i+1} \setminus R_{\alpha_i}$ olacak şekilde bir α_i ordinali vardır. $R_{\alpha_i+1}/R_{\alpha_i}$ faktörü değişmeli olduğundan,

$$x_{i+1} = [y_{2i-1}x_iy_{2i}, z_{2i-1}x_iz_{2i}] \in [R_{\alpha_i+1}, R_{\alpha_i+1}] \subseteq R_{\alpha_i}$$

elde edilir. Böylece $\alpha_{i+1} < \alpha_i$ olur. Dolayısıyla, $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$ ardıl ordinallerinin azalan sonsuz bir zinciri elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak, en az bir $m \geq 1$ için $x_m = 0$ dır. ■

Tanım 4.2.3 : R bir halka ve I , R 'nin bir ideali olsun. Eğer $I^2 = (0)$ ise I 'ya bir *null ideal* denir.

Önteorem 4.2.4 : R bir halka ve A, R 'nin değışmeli bir ideali olsun.

(1) $A[A, R] = (0)$ ve $A^2 \subseteq Z(R)$ dir.

(2) $B \subseteq [A, R]$ ve C tarafından üretilen ideal bir null ideal olmak üzere B ve C , R nin toplamsal alt grupları olsun. O zaman, $(1 + B, 1 + C) = 1 + [B, C]$ dir.

(3) R bir radikal halka ise, $(1 + A, 1 + R) = 1 + [A, R]$ dir.

İspat:

(1) $a, c \in A$ ve $r \in R$ olsun. A, R 'nin değışmeli ideali olduğundan,

$$(*) \quad (ar)c = c(ar) = a(cr) = c(ra) = r(ac)$$

eşitlikleri vardır. Bu eşitlikten yararlanılarak, $a[c, r] = a(cr) - a(rc) = 0$ bulunur.

Dolayısıyla, $A[A, R] = (0)$ dır. Benzer şekilde $(*)$ eşitliğine dikkat edilirse, her $r \in R$ ve $a, c \in A$ için $(ac)r = r(ac)$ olup, $ac \in Z(R)$ dir. Böylece, $A^2 \subseteq Z(R)$ bulunur.

(2) A, R 'nin bir ideali olduğundan $[A, R] \subseteq A$ dır. Buradan, (1) kullanılarak $[A, R]^2 \subseteq A[A, R] = (0)$ olup,

$$(a) \quad [A, R]^2 = (0)$$

elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla $[B, C]^2 \subseteq [A, R]^2 = (0)$ olup,

$$(b) \quad [B, C]^2 = (0)$$

bulunur. Hipotezden $B \subseteq [A, R]$ olduğu kullanarak, (a) yardımıyla

$$B[B, C] \subseteq [A, R][B, C] \subseteq [A, R]^2 = (0)$$

olup,

$$(c) \quad B[B, C] = (0)$$

olur. Yine, hipotezden $\langle C \rangle = I$ bir null ideal olduğundan

$$C[B, C] \subseteq I[B, C] = I(BC - CB) \subseteq I^2 = (0)$$

olup,

$$(d) \quad C[B, C] = (0)$$

elde edilir. Son olarak, (b),(c) ve (d) yardımıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$(e) \quad [B, C]^2 = (0) = (B + C)[B, C]$$

$C^2 \subseteq I^2 = (0)$ olduğundan I nilpotent halkadır. Bu durumda, Teorem 2.21'den dolayı I radikal halkadır. Böylece, her $c \in C$ için $c' \in I$ vardır. Benzer şekilde,

$$B \subseteq [A, R] \implies B^2 \subseteq [A, R]B \subseteq [A, R]^2 = (0)$$

olup, $\langle B \rangle$ nilpotent halka olup radikal halkadır. Her $b \in B$ için $b' \in \langle B \rangle$ vardır.

Şimdi $b \in B$ ve $c \in C$ alalım. 3.1.1.(A) yardımıyla ve gerekli düzenlemeler yapılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} (1 + b, 1 + c) &= 1 + (1 + b')(1 + c')[b, c] \\ &= 1 + (1 + b' + c' + b'c')[b, c] \\ &= 1 + (1 + (b' + c') + b'c' \mp c'b')[b, c] \\ &= 1 + [b, c] + (b' + c')[b, c] + [b', c'][b, c] + c'b'[b, c] \end{aligned}$$

Bu son eşitliğe dikkat edilirse, (e)'den dolayı $(b' + c')[b, c] = 0$ ve $[b', c'][b, c] = 0$, (c)'den $c'b'[b, c] = 0$ olup, $(1 + b, 1 + c) = 1 + [b, c]$ elde edilir. Böylece, $(1 + B, 1 + C) = 1 + [B, C]$ olup (2) kanıtlanır.

(3) R bir radikal halka olsun. $a \in A$ ve $b \in R$ alalım.

$$(1 + a, 1 + r) = 1 + (1 + a)^{-1}(1 + r)^{-1}[a, r]$$

olup, (*)'dan her $a, c \in A$ ve her $r \in R$ için $arc = rac$ olduğu kullanılırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$(1 + a, 1 + r) = 1 + (1 + r)^{-1}(1 + a)^{-1}[a, r]$$

Burada, (1) ile $a'[a, r] = 0$ olduğu kullanılarak, A 'nın bir ideal olduğundan ve Önteorem 2.27'den yararlanarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} (1 + a, 1 + r) &= 1 + (1 + r)^{-1}(1 + a)^{-1}[a, r] \\ &= 1 + (1 + r)^{-1}([a, r] + a'[a, r]) \\ &= 1 + (1 + r)^{-1}[a, r] \\ &= 1 + [(1 + r)^{-1}a, r] \in 1 + [A, R] \end{aligned}$$

Böylece,

$$(**) \quad (1 + A, 1 + R) \subseteq 1 + [A, R]$$

elde edilir.

Tersine $1 + [A, R] \subseteq (1 + A, 1 + R)$ olduğunu gösterelim.

$a \in A$ ve $r \in R$ için $b = (1 + r)a$ denirse, A, R 'nin bir ideali olduğundan $b \in A$ olur. Önteorem 2.27'den yararlanarak, (1)'den $b'[b, r] = 0$ olduğu dikkate alındığında, (*) eşitliği yardımıyla aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} [a, r] &= [(1 + r)^{-1}b, r] = (1 + r)^{-1}[b, r] \\ &= (1 + r)^{-1}([b, r] + b'[b, r]) \\ &= (1 + r)^{-1}(1 + b)^{-1}[b, r] \\ &= (1 + b)^{-1}(1 + r)^{-1}[b, r] \end{aligned}$$

Böylece, $1 + [a, r] = 1 + (1 + b)^{-1}(1 + r)^{-1}[b, r] = (1 + b, 1 + r)$ olup,

$$(***) \quad 1 + [A, R] \subseteq (1 + A, 1 + R)$$

bulunur.

(**) ve (***)'dan $(1 + A, 1 + R) = 1 + [A, R]$ elde edilir. ■

Tanım 4.2.5 : $B, B_1, B_2, \dots$ dizisi R radikal halkasının ideallerinin sonsuz bir dizisi olsun. $1 + R$ çarpım grubunun komutatör alt gruplarının dizisi μ_n ve Lie halka olarak Lie komutatör ideallerinin dizisi ν_n aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\mu_0(1 + B) = 1 + B$ olmak üzere her $k \geq 0$ için

$$\mu_{k+1}(1 + B_1, \dots, 1 + B_{2^{k+1}}) = (\mu_k(1 + B_1, \dots, 1 + B_{2^k}), \mu_k(1 + B_{2^k+1}, \dots, 1 + B_{2^{k+1}}))$$

ve benzer şekilde, $\nu_0(B) = B$ olmak üzere her $k \geq 0$ için

$$\nu_{k+1}(B_1, \dots, B_{2^{k+1}}) = [\nu_k(B_1, \dots, B_{2^k}), \nu_k(B_{2^k+1}, \dots, B_{2^{k+1}})]$$

Önteorem 4.2.6 : R bir radikal halka ve $B, B_1, B_2, \dots$ R 'nin değişmeli ideallerinin bir dizisi olsun. O zaman her $k \geq 0$ tam sayısı için

$$\mu_k(1 + B_1, \dots, 1 + B_{2^k}) = 1 + \nu_k(B_1, \dots, B_{2^k})$$

dır.

İspat: k üzerinden tümevarım ile kanıtlayalım.

$k = 0$ için $\mu_0(1 + B_1) = 1 + B_1 = 1 + \nu_0(B_1)$ olduğundan doğrudur.

$k-1$ için $\mu_{k-1}(1+B_1, \dots, 1+B_{2^{k-1}}) = 1 + \nu_{k-1}(B_1, \dots, B_{2^{k-1}})$ olsun. Bu durumda, μ_k 'ların tanımı göz önüne alındığında, Önteorem 4.2.4.(3) ve ν_k 'ların tanımından,

$$\begin{aligned} \mu_k(1+B_1, \dots, 1+B_{2^k}) &= (\mu_{k-1}(1+B_1, \dots, 1+B_{2^{k-1}}), \mu_{k-1}(1+B_{2^{k-1}+1}, \dots, 1+B_{2^k})) \\ &= (1 + \nu_{k-1}(B_1, \dots, B_{2^{k-1}}), 1 + \nu_{k-1}(B_{2^{k-1}+1}, \dots, B_{2^k})) \\ &= 1 + [\nu_{k-1}(B_1, \dots, B_{2^{k-1}}), \nu_{k-1}(B_{2^{k-1}+1}, \dots, B_{2^k})] \\ &= 1 + \nu_k(B_1, \dots, B_{2^k}) \end{aligned}$$

olup, kanıt tamamlanır. ■

Önteorem 4.2.7 : R bir radikal halka ve $G(R)$ adjoint grubu en fazla n uzunluğunda çözülebilir olsun. Eğer R kendisinin değişmeli idealleri tarafından üretilirse, en fazla n uzunluğunda Lie-çözülebilir bir halka olur.

İspat: Teorem 4.1.7'nin kanıtında, adjoint grubu en fazla n uzunluğunda çözülebilir olan radikal halkaların $2^n - 1$ 'den daha fazla sayıdaki ideallerinin direkt toplamını öz olarak kapsamayacağı gösterildi. Dolayısıyla, $m \geq 2^n$ olmak üzere R halkasının $A_1, \dots, A_m$ değişmeli idealleri için

$$R = A_1 + \dots + A_m$$

biçiminde yazılabilir.

Şimdi, k üzerine tümevarımla her $k \geq 1$ tamsayısı için,

$$\delta_k(R) = \sum_{1 \leq i_1 \leq m} \dots \sum_{1 \leq i_{2^k} \leq m} \nu_k(A_{i_1}, \dots, A_{i_{2^k}})$$

olduğunu gösterelim.

Lie komutatörün lineerliğinden yararlanılarak elde edilen aşağıdaki eşitlik, $k = 1$ için yukarıdaki ifadenin doğruluğunu gösterir.

$$\delta_1(R) = [R, R] = [A_1 + \cdots + A_m, A_1 + \cdots + A_m]$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 \leq m} \sum_{1 \leq i_2 \leq m} [A_{i_1}, A_{i_2}] = \sum_{1 \leq i_1 \leq m} \sum_{1 \leq i_2 \leq m} \nu_1(A_{i_1}, A_{i_2})$$

$k - 1$ için verilen eşitlik doğru olsun. Yani,

$$\delta_{k-1}(R) = \sum_{1 \leq i_1 \leq m} \cdots \sum_{1 \leq i_{2^{k-1}} \leq m} \nu_{k-1}(A_{i_1}, \dots, A_{i_{2^{k-1}}})$$

olsun. δ_k 'ların tanımı yardımıyla, tümevarım hipotezini kullanarak aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$\delta_k(R) = [\delta_{k-1}(R), \delta_{k-1}(R)]$$

$$= \left[\sum_{1 \leq i_1 \leq m} \cdots \sum_{1 \leq i_{2^{k-1}} \leq m} \nu_{k-1}(A_{i_1}, \dots, A_{i_{2^{k-1}}}), \sum_{1 \leq j_1 \leq m} \cdots \sum_{1 \leq j_{2^{k-1}} \leq m} \nu_{k-1}(A_{j_1}, \dots, A_{j_{2^{k-1}}}) \right]$$

Bulunan son eşitlik, $m^{2^{k-1}}$ tane idealin toplamı ile $m^{2^{k-1}}$ tane idealin toplamının Lie komutatörü olduğundan ve Lie komutatörün lineerliğinden, sonuçta $m^{2^{k-1}} \cdot m^{2^{k-1}} = m^{2 \cdot 2^{k-1}} = m^{2^k}$ tane terimin toplamı elde edilir. Yani,

$$\begin{aligned} \delta_k(R) &= \sum_{1 \leq i_1 \leq m} \cdots \sum_{1 \leq i_{2^k} \leq m} [\nu_{k-1}(A_{i_1}, \dots, A_{i_{2^{k-1}}}), \nu_{k-1}(A_{i_{2^{k-1}+1}}, \dots, A_{i_{2^k}})] \\ &= \sum_{1 \leq i_1 \leq m} \cdots \sum_{1 \leq i_{2^k} \leq m} \nu_k(A_{i_1}, \dots, A_{i_{2^k}}) \end{aligned}$$

olup, verilen eşitlik kanıtlanmış olur.

Her $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ için A_i idealleri R halkasının değişmeli idealleri olduğundan, $(1 + A_i)$ 'ler $1 + R$ çarpım grubunun değişmeli normal alt gruplarına karşılık gelir. Dolayısıyla, $1 + R$ çarpım grubu $1 + A_1, \dots, 1 + A_m$ değişmeli normal alt grupları tarafından üretilir. Yani,

$$1 + R = (1 + A_1) \dots (1 + A_m)$$

biçiminde yazılabilir.

k üzerine tümevarımla her $k \geq 1$ tamsayısı için,

$$\lambda_k(1 + R) = \prod_{1 \leq i_1 \leq m} \cdots \prod_{1 \leq i_{2k} \leq m} \mu_k(1 + A_{i_1}, \dots, 1 + A_{i_{2k}})$$

olduğunu gösterelim.

Önteorem 2.52.(c)'den ve $(1 + A_i)$ 'lerin $1 + R$ 'nin normal alt grupları olmasından yararlanılarak elde edilen aşağıdaki eşitlik, $k = 1$ için yukarıdaki ifadenin doğruluğunu gösterir.

$$\lambda_1(1 + R) = (1 + R, 1 + R) = ((1 + A_1) \dots (1 + A_m), (1 + A_1) \dots (1 + A_m))$$

$$= \prod_{1 \leq i_1 \leq m} \prod_{1 \leq i_2 \leq m} \mu_1(1 + A_{i_1}, 1 + A_{i_2})$$

$k - 1$ için verilen eşitlik doğru olsun. Yani,

$$\lambda_{k-1}(1 + R) = \prod_{1 \leq i_1 \leq m} \cdots \prod_{1 \leq i_{2k-1} \leq m} \mu_{k-1}(1 + A_{i_1}, \dots, 1 + A_{i_{2k-1}})$$

olsun. Yukarıdaki ispata benzer şekilde, λ_k 'ların tanımını yardımıyla, tümevarım hipotezini kullanarak aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\lambda_k(1 + R) = (\lambda_{k-1}(1 + R), \lambda_{k-1}(1 + R))$$

$$\lambda_k(1 + R) = \prod_{1 \leq i_1 \leq m} \cdots \prod_{1 \leq i_{2k} \leq m} \mu_k(1 + A_{i_1}, \dots, 1 + A_{i_{2k}})$$

elde edilir. Böylece istenen eşitliğin doğruluğu gösterilmiş olur.

A_i 'lerin R halkasının değişmeli idealleri olduğu dikkate alındığında Önteorem 4.2.6'dan her $k \geq 0$ tam sayısı için

$$\mu_k(1 + A_{i_1}, \dots, 1 + A_{i_{2k}}) = 1 + \nu_k(A_{i_1}, \dots, A_{i_{2k}})$$

olup, buradan

$$\lambda_k(1 + R) = \prod_{1 \leq i_1 \leq m} \cdots \prod_{1 \leq i_{2k} \leq m} (1 + \nu_k(A_{i_1}, \dots, A_{i_{2k}}))$$

elde edilir. Böylece, bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\lambda_k(1+R) = (1)$ olması için gerek ve yeter koşulun $\delta_k(R) = (0)$ olması gerektiği görülür.

R halkasının adjoint grubu en fazla n uzunluğunda çözülebilir olduğundan, $G(R)$ adjoint grubuna izomorf olan $1+R$ çarpım grubu da (Bkz. Bölüm 3.1.1) en fazla n uzunluğunda çözülebilir gruptur. Dolayısıyla, $\lambda_n(1+R) = (1)$ olup $\delta_n(R) = (0)$ dır. Böylece, R en fazla n uzunluğunda Lie-çözülebilirdir. ■

Önteorem 4.2.8 : R bir radikal halka ve $G(R)$ adjoint grubu en fazla n uzunluğunda çözülebilir olsun. $x_1, y_1, y_2, \dots$ ve $z_1, z_2, \dots$ R halkasının elemanlarının iki sonsuz dizisi ve her $i \geq 1$ tam sayısı için

$$x_{i+1} = [y_{2i-1}x_iy_{2i}, z_{2i-1}x_iz_{2i}]$$

olsun. Eğer R halkasının yukarıdaki koşulu sağlayan dizilerinin herhangi bir seçimi için $x_{m+1} = 0$ olacak şekilde bir $m \geq 1$ tam sayısı varsa, R en fazla mn uzunluğunda Lie-çözülebilirdir ve R 'nin ideallerinin

$$(0) = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \dots \subseteq I_i \subseteq I_{i+1} \subseteq \dots \subseteq I_m = R$$

biçiminde bir sonlu zinciri vardır. Burada, $0 \leq i \leq m-1$ için I_{i+1}/I_i faktör halkası R/I_i 'nin değişmeli idealleri tarafından üretilir.

İspat: R halkası verilen koşulları sağlasın. $I_0 = (0)$ ve I_1 , R halkasının bütün değişmeli ideallerinin toplamı olsun. O zaman, I_1 değişmeli idealler tarafından üretilen radikal halka olduğundan Önteorem 4.2.7'den I_1 en fazla n uzunluğunda Lie-çözülebilirdir.

$$\mathfrak{R} = \{m + r \mid m \in \mathbb{Z}; r \in R\}$$

biçiminde tanımlı $\mathfrak{R}$ kümesi dikkate alınırsa $(\mathfrak{R}, +, \cdot)$ bir halkadır.

$\mathfrak{R}x_m\mathfrak{R}$, R halkasının x_m tarafından üretilen idealidir. Üstelik hipotezden, her $y_{2m-1}, y_{2m}, z_{2m-1}, z_{2m} \in R$ için

$$0 = x_{m+1} = [y_{2m-1}x_my_{2m}, z_{2m-1}x_mz_{2m}]$$

olduğundan $\mathfrak{R}x_m\mathfrak{R}$, R 'nin değişmeli bir ideali olur. I_1 , R 'nin bütün değişmeli ideallerinin toplamı olduğundan $\mathfrak{R}x_m\mathfrak{R} \subseteq I_1$ dir. Dolayısıyla, $x_m \in I_1$ elde edilir.

R halkasının en fazla mn uzunluğunda Lie-çözülebilir olduğunu ve önteoremin ifadesinde bahsedilen zincirin varlığını m üzerine tümevarımla kanıtlayalım.

$m = 1$ için $R = I_1$ olduğundan açıktır.

$m - 1$ için önteorem doğru olsun. O zaman, R/I_1 bölüm halkası en fazla $(m - 1)n$ uzunluğunda Lie-çözülebilirdir ve R/I_1 'in $\bar{I}_i = I_{i+1}/I_1$ ideallerinin

$$I_1 = \bar{I}_0 \subseteq \bar{I}_1 \subseteq \cdots \subseteq \bar{I}_i \subseteq \bar{I}_{i+1} \subseteq \cdots \bar{I}_{m-1} = R/I_1 = \bar{R}$$

biçiminde bir zinciri vardır. Burada, $\bar{I}_{i+1}/\bar{I}_i$, $\bar{R}/\bar{I}_i$ 'nin değişmeli idealleri tarafından üretilir. 3.İzomorfizma teoreminden her $i \geq 0$ için

$$\bar{I}_{i+1}/\bar{I}_i = \frac{I_{i+2}/I_1}{I_{i+1}/I_1} \cong I_{i+2}/I_{i+1}$$

olup, $\bar{I}_{i+1}/\bar{I}_i$ 'ler $\bar{R}/\bar{I}_i$ 'nin değişmeli idealleri tarafından üretildiğinden I_{i+2}/I_{i+1} 'ler de R/I_{i+1} 'in değişmeli idealleri tarafından üretilir. Böylece,

$$(0) = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_i \subseteq I_{i+1} \subseteq \cdots \subseteq I_m = R$$

Önteoremde belirtilen şartları sağlayan, R 'nin ideallerinin bir zinciridir.

R 'nin en fazla mn uzunluğunda Lie-çözülebilir olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.

I_1 en fazla n uzunluğunda Lie-çözülebilir olduğundan,

$$(0) = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n = I_1$$

biçiminde bir çözülebilirlik serisine sahiptir. Benzer şekilde, R/I_1 en fazla $(m - 1)n$ uzunluğunda Lie-çözülebilir olduğundan,

$$I_1 = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq B_{(m-1)n} = R/I_1$$

biçiminde bir çözülebilirlik serisine sahiptir. Burada, her $i \geq 0$ için $B_i = A_{i+n}/I_1$ olacak şekilde R 'nin I_1 'i içeren A_{i+n} idealleri elde edilir. Dolayısıyla, R halkasının

$$(0) = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n = I_1 \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq A_{(m-1)n+n} = A_{mn} = R$$

biçiminde bir Lie-çözülebilirlik serisi vardır. Böylece, R halkası en fazla mn uzunluğunda Lie-çözülebilirdir. ■

Teorem 4.2.9 : R bir radikal halka olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanırsa $G(R)$ adjoint grubu en fazla n uzunluğunda çözülebilir gruptur.

- (1) R , n 'ye bağlı l uzunluğunda Lie-çözülebilir bir halkadır.
- (2) R halkasının ideallerinin n 'ye bağlı bir m için

$$(0) = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_m = R$$

olacak şekilde m uzunluğunda bir zinciri vardır. Burada, her $1 \leq i \leq m$ için I_i/I_{i-1} faktörleri R/I_{i-1} 'in değişmeli idealleri tarafından üretilir.

İspat: R , (1) ve (2) koşullarını sağlayan bir radikal halka olsun. Radikal halkanın her ideali ve her homomorfik görüntüsü radikal halka olduğundan, her $0 \leq i \leq m-1$ için I_{i+1}/I_i faktörleri radikal halkadır. Önteorem 4.2.7'den dolayı $0 \leq i \leq m-1$ için her $G(I_{i+1}/I_i)$ adjoint grubu en fazla l uzunluğunda çözülebilirdir. Diğer taraftan, her $i \geq 0$ için I_i 'ler R halkasının idealleri olduğundan $G(I_i)$ adjoint grupları $G(R)$ 'nin normal alt gruplarına karşılık gelir. Dolayısıyla, $G(R)$ adjoint grubunun $G(I_i)$ 'lerden oluşan sonlu bir serisi elde edilir. Burada, her $0 \leq i \leq m-1$ için $G(I_{i+1})/G(I_i)$ faktör grupları $G(I_{i+1}/I_i)$ gruplarına izomorf olduğundan $G(R)$ adjoint grubu en fazla ml uzunluğunda çözülebilir gruptur. ■

KAYNAKLAR

- [1] Hausdorff F., "Die Symbolische Exponentialformel in der Gruppentheori", Sitz.der Sächsischen Akad. Wiss., Vol.58, (1906), 19-48
- [2] Jennings S.A., "Radical Rings with Nilpotent Associated Groups", Trans. of the Royal Society of Canada, Vol.49(3), (1955), 31-38
- [3] Jacobson N., "Structure of Rings", American Math. Society, Coll. Pub., Vol.37, (1964)
- [4] Herstein I.N., "Noncommutative Rings", The Carus Mathematical Monographs, Vol.15, (1968)
- [5] Kaplansky I., "Lie Algebras and Locally Compact Groups", The University of Chicago Press, Chicago and London, (1971)
- [6] Laue H., "On The Associated Lie Ring and the Adjoint Group of a Radical Ring", Canad. Math. Bull., Vol.27(2), (1984), 215-222
- [7] Du X., "The Centers of a Radical Ring", Canad. Math. Bull., Vol.35(2), (1992), 174-179
- [8] Amberg B. et al., "Subgroups of the Adjoint Group of a Radical Ring", Canad. J. Math., Vol.50(1), (1998), 3-15
- [9] Amberg B. and Sysak Ya.P., "Radical Rings with Soluble Adjoint Groups", J. Algebra, Vol.247, (2002), 692-702

[10] Özeren S.Z., "Bazı Radikal Matris Halkaları Üzerine", Hacettepe Üniversitesi
Yüksek Lisans Tezi, (2003)

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zülâl KABALAK

Doğum yeri : Ankara

Doğum Yılı : 1979

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise : 1993-1996 Yenimahalle Mustafa Kemal Lisesi, ANKARA

Lisans : 1996-2000 Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi
Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi
Matematik Öğretmenliği, ANKARA

Yabancı Dil: İngilizce

İş Tecrübesi

2001-2004 : Yaprakbayırı İlköğretim Okulu
Matematik Öğretmeni, Haymana/ANKARA

2004-Halen : Doğan Çağlar Ortopedik Engelliler Meslek Lisesi
Matematik Öğretmeni, Altındağ/ANKARA