

**MAXWELL DENKLEMLERİ VE DIRAC
DENKLEMİNİN OKTONYONİK TEMSİLİ**

Tülay TOLAN

Doktora Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Şubat – 2006

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Tülay TOLAN'ın “**Maxwell Denklemleri ve Dirac Denkleminin Oktonyonik Temsili**” başlıklı **Fizik** Anabilim Dalındaki, Doktora tezi.....tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ	
Üye (2.Tez Danışmanı)	: Yard. Doç. Dr. Murat TANIŞLI	
Üye	: Prof. Dr. Mustafa ŞENYEL	
Üye	: Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK	
Üye	: Prof. M. Selami KILIÇKAYA	

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET**Doktora Tezi****MAXWELL DENKLEMLERİ VE DIRAC DENKLEMİNİN OKTONYONİK
TEMSİLİ****Tülay TOLAN****Anadolu Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı****Danışman: Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ
Yard. Doç. Dr. Murat Tanışlı
2006, 51 sayfa**

Bu tezde reel, kompleks ve split oktonyon cebri ve matris temsilleri verildikten sonra eşit bileşene sahip kompleks kuaterniyon ve oktonyon cebirleri karşılaştırılmıştır. Ardından diferansiyel operatör, alan, potansiyel ve kaynak oktonyonu tanımlanarak bunlara bağlı olarak genel oktonyonik alan, potansiyel ve kaynaktan bağımsız alanlar için dalga denklemi oktonyon cebrinde yazılmıştır. Elektromanyetik teoride oktonyon cebrinin uygulaması olan bu işlemler yapılırken baz elemanların çarpımı için ilk bölümde verilen Cayley-Dickson ve modül 7 metodlarının her ikisi de kullanılmıştır. Son olarak oktonyon cebrinin kuantum mekaniğe uygulanması ile ilgili olarak Klein-Gordon ve Dirac denklemlerinin oktonyonik formda gösterimlerine yer verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler: Oktonyon Cebri, Alan Denklemleri, Maxwell Denklemleri,
Klein-Gordon Denklemi, Dirac Denklemi**

ABSTRACT**PhD Thesis****OCTONIONIC REPRESENTATION OF MAXWELL EQUATIONS AND
DIRAC EQUATION****Tülay TOLAN****Anadolu University
Graduate School of Sciences
Physics Program****Supervisor: Prof. Kudret ÖZDAŞ
Assist. Prof. Dr. Murat TANIŞLI
2006, 51 pages**

In this thesis; firstly the real, complex, and split octonion algebra, and their matrix representations are given. Next, the complex quaternions with equal components are compared with octonions. Then, the differential operator, field, potential, and source octonions are defined, and for general octonionic field equation, potential equation and source independent fields which depend on the former, the wave equation is written in octonion algebra. In these procedures, which are applications of octonion algebra to electromagnetic theory, both of the Cayley-Dickson and the modul 7 methods given in the first part of the thesis are used for the product of basis elements. Lastly, as an application of octonion algebra to quantum mechanics, Klein-Gordon and Dirac equations are shown in the octonionic form.

Keywords: Octonion Algebra, Field Equations, Maxwell Equations, Klein-Gordon Equation, Dirac Equation

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamdaki yardımları ve katkıları için tez danışmanlarım

Prof. Dr. Kudret ÖZDAŞ ve *Yard. Doç. Dr. Murat TANIŞLI*' ya,

çalışmalarım süresince önerileri için

Prof. Dr. Mustafa ŞENYEL ve *Prof. Dr. Yalçın KÜÇÜK*' e,

ayrıca, manevi desteklerinden dolayı

aileme,

Teşekkür ederim.

Tülay TOLAN

Şubat 2006

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR... ..	iii
İÇİNDEKİLER... ..	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ... ..	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
 1. GİRİŞ.....	 1
 2. OKTONYON CEBRİ.....	 3
2.1. Reel Oktonyon Cebri.....	3
2.1.1. Toplama ve Çıkarma.....	3
2.1.2. Çarpma.....	4
2.1.2.1. Cayley-Dickson Yöntemi.....	4
2.1.2.2. Modül 7 Yöntemi.....	6
2.1.2.3. Alternatif Yöntem.....	7
2.1.3. İki Oktonyonun Skaler Çarpımı.....	9
2.1.4. İki Oktonyonun Vektörel Çarpımı.....	9
2.1.5. Eşlenik.....	9
2.1.6. Norm.....	9
2.1.7. Ters Eleman.....	10
2.1.8. Özellikler.....	10
2.2. Kompleks Oktonyon Cebri.....	11
2.2.1. Toplama ve Çıkarma.....	11
2.2.2. Çarpma.....	12
2.2.3. Eşlenik.....	12
2.2.4. Norm.....	12
2.2.5. Hermitik Eşlenik.....	12
2.3. Split Oktonyon.....	13

2.4. Oktonyonların Matris Temsilleri.....	14
3. OKTONYON-KOMPLEKS KUATERNİON CEBİRLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI.....	18
4. ELEKTROMANYETİK TEORİDE OKTONYONİK GÖSTERİMLER.....	21
4.1. Alan Denklemlerinin Oktonyon Temsilleri.....	21
4.2. Oktonyonik Maxwell Denklemleri.....	34
5. KUANTUM MEKANİĞİNDE OKTONYONİK GÖSTERİMLER.....	40
5.1. Klein-Gordon Denkleminin Oktonyon Temsili.....	40
5.2. Dirac Denkleminin Oktonyon Temsili.....	43
6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA.....	45
KAYNAKLAR.....	47

ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1. Oktonyonların baz elemanlarının Cayley – Dickson yöntemine göre çarpım diyagramı.....	5
2.2. Oktonyonların baz elemanlarının modül 7' ye uygun çarpım diyagramı.....	7
2.3. Oktonyonların baz elemanlarının alternatif yönteme göre çarpım diyagramı	8

ÇİZELGELER DİZİNİ

2.1. Oktonyonların baz elemanlarının Cayley–Dickson yöntemine göre çarpımı	4
2.2. Oktonyonların baz elemanlarının modül 7' ye göre çarpımları.....	6
2.3. Oktonyon baz elemanlarının alternatif yöntemine göre çarpımı.....	7
2.4. Split oktonyonların baz elemanlarının çarpımı	14

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{R}$	: Reel sayılar cebri
$\mathcal{H}$	: Kuaterniyon cebri
$\mathcal{O}$	: Oktonyon cebri
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	: Oktonyon
$\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0$	: Oktonyonun reel kısmı
$\vec{\mathcal{A}}, \vec{\mathcal{B}}$	: Oktonyonun imajiner kısmı
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	: Kompleks Oktonyon
P, Q	: Kompleks Oktonyon (modül 7 yöntemi ile yapılan işlemler için)
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	: Split Oktonyon
$\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{B}$	: Kompleks kuaterniyon
$\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$	: Kompleks kuaterniyonun reel kısmı
$\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}$	: Kompleks kuaterniyonun imajiner kısmı
$\mathbf{A}', \mathbf{A}''$	: Kuaterniyon
A, B, a, b	: Reel sayı
$\vec{A}, \vec{B}, \vec{x}$	: Vektör
$\mathbb{A}, \mathbb{B}$	: Kompleks sayı
$\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbf{A}}$	: Eşlenik
$\mathcal{A}^*, \mathbf{A}^*$	: Kompleks eşlenik
$\mathcal{A}^\dagger, \mathbf{A}^\dagger$	: Hermitik eşlenik
e_i	: Baz eleman
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	: Birim vektör
σ_k	: Pauli-spin matrisleri
Q, E	: Matris
I	: Birim matris
$\vec{\nabla}$	: Vektörel notasyonda Nabla

∇	: Kuaterniyon olarak Nabla
$\square$	: Oktonyonik Nabla (Cayley-Dickson yöntemi ile yapılan işlemler için)
$\boxtimes$	: Kompleks kuaterniyon olarak Nabla
$\boxdot$	: Oktonyonik Nabla (modül 7 yöntemi ile yapılan işlemler için)
ϵ_{ijk}	: Levi-Civita sembolü
δ_{ij}	: Kronecker delta
c	: Işık hızı
u_i	: Split oktonyonların baz elemanları
$\bar{u}$	: Split oktonyonda baz elemanın eşleniği
u^*	: Split oktonyonda baz elemanın kompleks eşleniği
$\hat{p}$	: Momentum işlemcisi
$\boxminus$	: D' Alambert işlemcisi
$\hbar$	: Planck sabiti/ 2π
Ψ	: Dalga fonksiyonu
Ψ	: Kompleks kuaterniyon formunda Dalga fonksiyonu
$\wp$	: Oktonyon formunda Dalga fonksiyonu

1. GİRİŞ

8-boyutlu, değişme ve birleşme özelliklerinin her ikisine de sahip olmayan oktonyon cebri, Hamilton' un kuaterniyonları keşfinden iki ay sonra 1843' te J. T. Graves tarafından keşfedilmiştir. Graves' in makalesini o sırada yayınlamamış olmasından dolayı oktonyonlar 1845' te Cayley tarafından da tekrar bulunmuştur. Bu yüzden oktonyonlar, Cayley sayıları olarak da bilinirler. Oktonyon cebri, Clifford cebrinde Cl_3 ' e karşılık gelmektedir. Ayar simetri grubunun G_2 , F_4 , E_6 , E_8 ' in yer aldığı istisnai grupların hepsi oktonyon cebri ile ilişkilidir. Oktonyon cebrinin otomorfizm grubu G_2 ' dir, diğer tüm istisnai grupların içinde bir alt grup olarak yer almaktadır.

Oktonyon cebrinin uygulama alanları başlıca şunlardır: Kuantum mekaniği [1,2-3], Kuantum Hall Olayı [4], Dalga denklemi formülasyonu [5,6-7,8-9,10-11,12], Sicim ve M-Teorileri [13,14-15], Alan Teorisi [16,17-18], Parçacık fiziğinde iç simetriler [19], Clifford cebri temsilleri [20,21] vd.

Maxwell denklemlerinin fizikteki öneminden dolayı farklı yollarla yazılımları da her zaman değerlidir. Maxwell denklemlerinin oktonyon çalışmalarından biri Feynman türetimleri yardımı ile yapılmıştır [22]. Diğer bir çalışma ise Gamba [23] tarafından verilmiştir. Gamba tarafından yapılan çalışmada nabla tanımlanırken alışılmış x, y, z, t koordinatları, diğer X, Y, Z, T koordinatlarına dönüştürülerek yazılmıştır. Dördüncü bölümde yapılan çalışmada ise, Maxwell benzeri alan denklemleri oktonyon cebri özellikleri kullanılarak tanımlanmıştır. Buradaki nabla yine uzay-zamanı içermektedir. Genelleştirilmiş alan denkleminde genelden özele doğru hareketle fotonun kütlesinin sıfır olamayabileceğinden yola çıkılmıştır. Daha sonra fotonun kütlesiz olduğu durum ele alınmıştır. Alan ve kaynak ifadelerinde değişiklik yapılarak manyetik tek kutup ve boşluk için Maxwell denklemleri temsillerine de yer verilmiştir. Ayrıca potansiyel denklemi de oktonyon formunda yazılmıştır. Bu işlemler yapılırken çıkan sonuçları değerlendirmek amacıyla iki farklı baz çarpımı kullanılmıştır.

Bu tezde, ilk olarak reel, kompleks, split oktonyon cebri, özellikleri ve matris temsillerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde aynı sayıda bileşene sahip kompleks kuaterniyon ve oktonyon cebri karşılaştırılmıştır. Dördüncü bölümde

daha önce vektör, kuaterniyon ve Clifford cebri gibi farklı cebirlerde yapılmış olan elektromanyetik teori uygulamalarından bazıları tarafımızdan oktonyon cebrinde yeniden formüle edilmiştir. Beşinci bölümde ise kuantum mekaniğinde oktonyonların Klein-Gordon ve Dirac denklemine uygulamalarına yer verilmiştir. Son bölüm ise tezde yer alan diğer bölümlerin özetlenerek tartışıldığı sonuç bölümüdür.

2. OKTONYON CEBRİ

2.1. Reel Oktonyon Cebri

Değişme özelliği (komütatif) olmayan ve birleşme özelliği (asosiyatif) olmayan reel oktonyonlar alternatif, normlu bir bölüm cebri oluştururlar. Bir reel $\mathcal{A}$ oktonyonu; e_μ ' ler ($\mu = 0, 1, \dots, 7$) baz elemanlar ve a_μ ' ler reel sayılar olmak üzere aşağıdaki şekilde gösterilir [24]:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 + a_7 e_7 \\ &= \sum_{\mu=0}^7 a_\mu e_\mu\end{aligned}\quad (2.1)$$

Bir oktonyonu skaler ve imajiner kısımlarının toplamı olarak da göstermek mümkündür [25]:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \vec{\mathcal{A}} \quad (2.2)$$

Burada, $\mathcal{A}_0 = \text{Re}(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)$ ve $\vec{\mathcal{A}} = \text{Im}(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$ sırasıyla,

oktonyonun skaler ve imajiner kısımlarıdır.

Ayrıca oktonyonlar, diyagonal elemanları skaler, diğer elemanları 3-boyutlu vektör olan 2×2 ' lik matrisler ile de temsil edilebilir. Bu, Zorn matris temsidir ve aşağıdaki gibi gösterilir [26]:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & \vec{x} \\ \vec{y} & b \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

2.1.1. Toplama ve Çıkarma

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{O}$ ve $a_0, a_1, \dots, a_7 \in \mathcal{R}$ olmak üzere $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ gibi iki oktonyonun toplama ve çıkarma işlemi,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \mp \mathcal{B} &= (a_0 \mp b_0) e_0 + (a_1 \mp b_1) e_1 + \dots + (a_7 \mp b_7) e_7 \\ &= \sum_{\mu=0}^7 (a_\mu \mp b_\mu) e_\mu\end{aligned}\quad (2.4)$$

olarak tanımlanır.

2.1.2. Çarpma

İki oktonyonun çarpımı işlemine geçmeden önce, baz elemanların çarpımlarını ele almak gerekir. Oktonyon baz elemanlarının çarpımları için birçok kural tanımlıdır. Burada, bunlardan en sık kullanılan üç farklı çarpım kuralı tanımlanacaktır:

2.1.2.1. Cayley–Dickson Yöntemi

Bu yönteme göre oktonyonların baz elemanlar olan e_μ ' ler için çarpım kuralları ($i, j, k = 1, 2, 3$) olmak üzere;

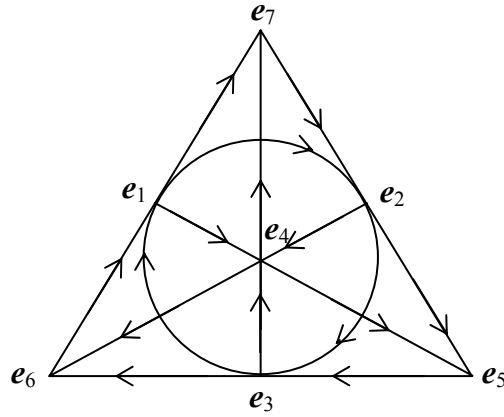
$$\begin{aligned}
 -e_4 e_i &= e_i e_4 = \hat{e}_i, & e_4 \hat{e}_i &= -\hat{e}_i e_4 = e_i, & e_4 e_4 &= -e_0 \\
 e_i e_j &= -\delta_{ij} e_0 + \epsilon_{ijk} e_k \\
 \hat{e}_i \hat{e}_j &= -\delta_{ij} e_0 - \epsilon_{ijk} e_k \\
 -\hat{e}_j e_i &= e_i \hat{e}_j = -\delta_{ij} e_4 - \epsilon_{ijk} \hat{e}_k
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

şeklindedir. Burada, $\hat{e}_k \equiv e_{4+k}$ ' dir ($k = 1, 2, 3$).

Baz elemanların çarpımı, kolaylık olması açısından Çizelge 2.1' deki gibi gösterilebilir veya Şekil 2.1' deki diyagramla tanımlanabilir [26,27].

Çizelge 2.1. Oktonyonların baz elemanlarının Cayley–Dickson yöntemine göre çarpımı (İki baz elemanını çarparken birinci eleman I. sütundan, ikinci eleman I. satırdan alınacaktır).

$\begin{smallmatrix} \text{I} \\ \text{II} \end{smallmatrix}$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1



Şekil 2.1. Oktonyonların baz elemanlarının Cayley–Dickson yöntemine göre çarpım diyagramı

Oktonyonların matris temsiliinde,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Pauli-spin matrisleri ve

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

birim matris olmak üzere oktonyonlar için baz elemanları aşağıdaki gibi 4x4 matrisler ile temsil edilebilir:

$$\begin{aligned} e_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & e_k &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \\ e_4 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} & \hat{e}_k &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Oktonyonlar asosiyatif olmadığından alışılmış çarpım kurallarına sahip matrisler ile temsil edilemezler. Zorn' un çarpım kurallarının genelleştirilmesi ve uyarlanmasıyla, oktonyonlar için geliştirilen, özel çarpım kuralları içeren matrisler ile temsil edilirler. Zorn matrisleri için çarpım kuralları,

$$\begin{pmatrix} a & \vec{x} \\ \vec{y} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & \vec{u} \\ \vec{v} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + \vec{x} \cdot \vec{v} & a\vec{u} + d\vec{x} - \vec{y} \times \vec{v} \\ c\vec{y} + b\vec{v} + \vec{x} \times \vec{u} & \vec{y} \cdot \vec{u} + bd \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

olarak verilmektedir. Bu çarpım kurallarından yararlanılarak oktonyonların bazıları için üstte verilen ifadelerin modifiye edilmiş çarpımı $\circ$ ile gösterilir,

$$\begin{pmatrix} a & X \\ Y & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c & U \\ V & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + \frac{1}{2}Tr(XV) & aU + dX + \frac{i}{2}[Y, V] \\ cY + bV - \frac{i}{2}[X, U] & YV + \frac{1}{2}Tr(YU) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

burada $[X, Y] = XY - YX$, bu da X ve Y nin komütatörüdür. Ayrıca, $X = \vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ ve $Y = \vec{y} \cdot \vec{\sigma}$ olup X ve Y nin izi sıfırdır, $Tr X = Tr Y = 0$.

2.1.2.2. Modül 7 Yöntemi

Bu yöntemle göre ise baz elemanların çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

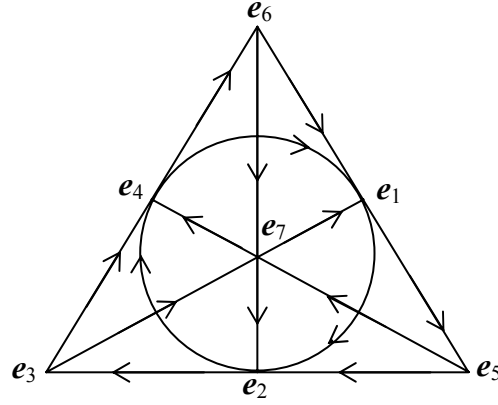
$$\begin{aligned} e_0^2 &= 1, \quad e_\mu^2 = -1, \quad e_\mu e_0 = e_0 e_\mu = e_\mu \quad (e_\mu = 1, 2, \dots, 7) \\ e_i e_j &= -e_j e_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7; \quad i \neq j) \\ e_i e_j &= e_k \Rightarrow e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1} \\ e_i e_j &= e_k \Rightarrow e_{2i} e_{2j} = e_{2k} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Baz elemanlarının çarpımı ayrıca Çizelge 2.2 ile gösterilmiştir [28]:

Çizelge 2.2. Oktonyonların baz elemanlarının modül 7'ye göre çarpımları

$\begin{smallmatrix} \text{II} \\ \text{I} \end{smallmatrix}$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Bu çarpımlar Şekil 2.2'deki diyagramla da aşağıdaki gibi gösterilebilir:



Şekil 2.2. Oktonyonların baz elemanlarının modül 7'ye uygun çarpım diyagramı

2.1.2.3. Alternatif Yöntem

Bu yöntemle baz elemanları için yeni çarpım kuralları aşağıdaki gibi düzenlenmektedir:

$$\begin{aligned} e_0 = 1, \quad e_\mu e_0 = e_0 e_\mu = e_\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots, 7) \\ e_i e_j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} e_k \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, 7) \end{aligned} \quad (2.12)$$

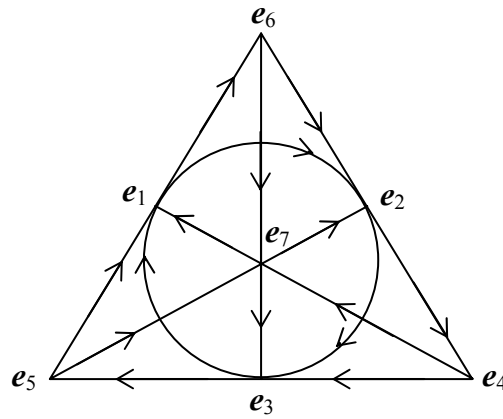
Burada e_0 , çarpım için birim eleman, diğer e_μ ' ler ise oktonyonların imajiner baz elemanlarıdır. ϵ_{ijk} antisimetriktir ve aşağıdaki kombinasyonlara sahip olmaktadır 1' e eşit, bunların tek permutasyonlarında -1' e eşit, çift permutasyonlarında yine +1' e eşit olmaktadır.

$$\epsilon_{ijk} = (165), (257), (312), (471), (543), (624), (736)$$

Bazların bu yöntemle göre çarpımları için bir düzenleme Çizelge 2.3 ve Şekil 2.3'deki diyagramla verilebilir [29]:

Çizelge 2.3. Oktonyonların baz elemanlarının alternatif yöntemle göre çarpımı

$\begin{smallmatrix} \text{I} \\ \text{II} \end{smallmatrix}$	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_0	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_6$
e_4	e_4	$-e_7$	$-e_6$	e_5	-1	$-e_3$	e_2	e_1
e_5	e_5	e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_3	-1	$-e_1$	e_2
e_6	e_6	$-e_5$	e_4	$-e_7$	$-e_2$	e_1	-1	e_3
e_7	e_7	e_4	e_5	e_6	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	-1



Şekil 2.3. Oktonyonların baz elemanlarının alternatif yöntemle göre çarpım diyagramı

Yukarıda baz elemanların çarpımı için tanıtılan yöntemlere göre; $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ gibi iki oktonyonun çarpımı,

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}_0\mathcal{B}_0 + \mathcal{A}_0\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{A}}\mathcal{B}_0 - \vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{A}} \times \vec{\mathcal{B}} \quad (2.13)$$

olarak yazılabilir [21].

Ayrıca, bir oktonyonun, iki kuaterniyonun toplamı olarak gösterildiği durumda da çarpma işlemi tanımlanmıştır. Bilindiği gibi kuaterniyon cebri, reel sayılar üzerinden 4-boyutlu, çarpma işlemine göre komütatif olmayan, asosiyatif, normlu bir bölüm cebridir.

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{O}$ ve $\mathbf{A}', \mathbf{A}'', \mathbf{B}', \mathbf{B}'' \in \mathcal{Q}$ olmak üzere,

$$\mathcal{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}''e_4, \quad \mathcal{B} = \mathbf{B}' + \mathbf{B}''e_4 \quad (2.14)$$

dir. Burada $\mathbf{A}', \mathbf{A}'', \mathbf{B}', \mathbf{B}''$ kuaterniyonları,

$$\mathbf{A}' = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, \quad \mathbf{A}'' = a_4e_0 + a_5e_1 + a_6e_2 + a_7e_3$$

$$\mathbf{B}' = b_0e_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3, \quad \mathbf{B}'' = b_4e_0 + b_5e_1 + b_6e_2 + b_7e_3$$

olarak yazıldığında $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ oktonyonunun çarpımı,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{B} &= (\mathbf{A}' + \mathbf{A}''e_4)(\mathbf{B}' + \mathbf{B}''e_4) \\ &= (\mathbf{A}'\mathbf{B}' - \overline{\mathbf{B}''}\mathbf{A}'') + (\mathbf{B}''\mathbf{A}' + \mathbf{A}''\overline{\mathbf{B}'})e_4 \end{aligned} \quad (2.15)$$

olarak verilmektedir [30]. Buradaki çarpma işlemi Cayley–Dickson metodu ile yapılmıştır. $\overline{\mathbf{B}'}$, $\overline{\mathbf{B}''}$ ile gösterilen ifadeler sırasıyla, daha sonra tanımlanacak olan, $\mathbf{B}'$ ve $\mathbf{B}''$ kuaterniyonlarının eşleniğidir.

2.1.3. İki Oktonyonun Skaler Çarpımı

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iki oktonyon olmak üzere, bu iki oktonyonun skaler çarpımı,

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \frac{1}{2}(\overline{\mathcal{A}}\mathcal{B} + \mathcal{B}\overline{\mathcal{A}}) = \frac{1}{2}(\overline{\mathcal{A}}\mathcal{B} + \overline{\mathcal{B}}\mathcal{A}) \quad (2.16)$$

olarak tanımlanır [29]. $\vec{\mathcal{A}}$ ve $\vec{\mathcal{B}}$ oktonyonları sadece imajiner bileşene sahip ise, skaler çarpım aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{\mathcal{B}} = -\frac{1}{2}(\vec{\mathcal{A}}\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{B}}\vec{\mathcal{A}}) = -\frac{1}{2}\left[\vec{\mathcal{A}}\vec{\mathcal{B}} + \left(\overline{\vec{\mathcal{A}}\vec{\mathcal{B}}}\right)\right] \quad (2.17)$$

2.1.4. İki Oktonyonun Vektörel Çarpımı

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iki oktonyon olmak üzere, vektörel çarpım

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = -\frac{1}{2}(\overline{\mathcal{A}}\mathcal{B} - \overline{\mathcal{B}}\mathcal{A}) \quad (2.18)$$

eşitliği ile verilmektedir [31]. Eğer $\vec{\mathcal{A}}$ ve $\vec{\mathcal{B}}$ oktonyonları sadece imajiner bileşene sahip ise,

$$\vec{\mathcal{A}} \times \vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(\vec{\mathcal{A}}\vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{B}}\vec{\mathcal{A}}) = \frac{1}{2}\left[\vec{\mathcal{A}}\vec{\mathcal{B}} - \left(\overline{\vec{\mathcal{A}}\vec{\mathcal{B}}}\right)\right] \quad (2.19)$$

olarak yazılmaktadır [21].

2.1.5. Eşlenik

$\mathcal{A}$ gibi bir oktonyonun $\overline{\mathcal{A}}$ şeklinde gösterilen eşleniği,

$$\overline{\mathcal{A}} = a_0 \mathbf{e}_0 - \sum_{\mu=1}^7 a_\mu \mathbf{e}_\mu = \mathcal{A}_0 - \vec{\mathcal{A}} \quad (2.20)$$

dir. Yani; bir oktonyonun eşleniği, imajiner kısmının işaret değiştirmesiyle elde edilir ve aşağıda tanımlanan özelliklere sahiptir [26,30-32]:

$$\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}, \quad \overline{\mathcal{A} + \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{B}}, \quad \overline{\mathcal{A}\mathcal{B}} = \overline{\mathcal{B}}\overline{\mathcal{A}} \quad (2.21)$$

2.1.6. Norm

Bir oktonyonun $N(\mathcal{A})$ ile gösterilen normu ile bir reel sayı elde edilmektedir. Bir oktonyonun normu kendisi ile eşleniğinin çarpımı olarak,

$$N(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}\mathcal{A} = \sum_{\mu=0}^7 a_\mu^2 \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{O}$ olmak üzere iki oktonyonun çarpımının normu, bu oktonyonların ayrı ayrı normlarının çarpımına eşittir [33]:

$$N(\mathcal{A}\mathcal{B}) = N(\mathcal{A}) N(\mathcal{B}) \quad (2.23)$$

2.1.7. Ters Eleman

Sıfırdan farklı $\mathcal{A}$ oktonyonunun tersi, oktonyonun eşleniğinin normuna bölümüne eşittir ve

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{\bar{\mathcal{A}}}{N(\mathcal{A})} \quad (2.24)$$

dir [28,34].

2.1.8. Özellikler

1. Oktonyonlar değişme özelliğine sahip değildir ve komutatör ise aşağıdaki gibidir:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$$

2. Birleşme özelliğine de sahip olmayan oktonyonlardaki çarpım için asosiyatör ise,

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}] = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} - \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C})$$

olarak verilmektedir [35,36].

3. Alternatif cebirler arasında yer alır;

$$(\mathcal{A}^2\mathcal{B}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}\mathcal{B}) \text{ ve } (\mathcal{B}\mathcal{A})\mathcal{A} = (\mathcal{B}\mathcal{A}^2)$$

Dolayısıyla, burada asosiyatör sıfıra eşittir [26,37].

4. Diğer bir özellik de cebirin fleksible olmasıdır [26,38]:

$$(\mathcal{A}^2\mathcal{B})\mathcal{A} = \mathcal{A}^2(\mathcal{B}\mathcal{A})$$

5. Aşağıdaki gibi Moufang özdeşliklerini sağlarlar (39,40):

$$(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\mathcal{A}\mathcal{C}))$$

$$\mathcal{C}(\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}) = ((\mathcal{C}\mathcal{A})\mathcal{B})\mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C})\mathcal{A} = (\mathcal{A}\mathcal{B})(\mathcal{C}\mathcal{A})$$

6. Eşit iki oktonyonun vektörel çarpımı sıfıra eşittir:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} = -\frac{1}{2}(\bar{\mathcal{A}}\mathcal{A} - \mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}) = 0$$

7. Üç oktonyonun vektörel çarpımı aşağıdaki gibidir [31]:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C} = \frac{1}{2} [\mathcal{A}(\overline{\mathcal{B}}\mathcal{C}) - \mathcal{C}(\overline{\mathcal{B}}\mathcal{A})]$$

2.2. Kompleks Oktonyon Cebri

Bir kompleks oktonyon, reel bir oktonyonda reel bileşenin kompleks sayı ile yer değiştirmesi sonucunda elde edilir [26,41]. Kompleks oktonyon cebri, normlu olabilir, fakat bölüm cebri oluşturmaz. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ oktonyonları,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4 + a_5 \mathbf{e}_5 + a_6 \mathbf{e}_6 + a_7 \mathbf{e}_7 \\ \mathcal{B} &= b_0 \mathbf{e}_0 + b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 + b_4 \mathbf{e}_4 + b_5 \mathbf{e}_5 + b_6 \mathbf{e}_6 + b_7 \mathbf{e}_7\end{aligned}\quad (2.25)$$

olmak üzere, bir kompleks oktonyon aşağıdaki şekilde kurulur:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4 + a_5 \mathbf{e}_5 + a_6 \mathbf{e}_6 + a_7 \mathbf{e}_7 \\ &\quad + i(b_0 \mathbf{e}_0 + b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 + b_4 \mathbf{e}_4 + b_5 \mathbf{e}_5 + b_6 \mathbf{e}_6 + b_7 \mathbf{e}_7) \\ &= (a_0 + ib_0) \mathbf{e}_0 + (a_1 + ib_1) \mathbf{e}_1 + \dots + (a_7 + ib_7) \mathbf{e}_7\end{aligned}\quad (2.26)$$

Burada,

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_0 &= (a_0 + ib_0), \quad \mathbb{A}_1 = (a_1 + ib_1), \quad \mathbb{A}_2 = (a_2 + ib_2), \quad \mathbb{A}_3 = (a_3 + ib_3), \\ \mathbb{A}_4 &= (a_4 + ib_4), \quad \mathbb{A}_5 = (a_5 + ib_5), \quad \mathbb{A}_6 = (a_6 + ib_6), \quad \mathbb{A}_7 = (a_7 + ib_7)\end{aligned}\quad (2.27)$$

olarak gösterilebilir ve kompleks oktonyon bu bileşenler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathbb{A}_0 \mathbf{e}_0 + \mathbb{A}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbb{A}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbb{A}_3 \mathbf{e}_3 + \mathbb{A}_4 \mathbf{e}_4 + \mathbb{A}_5 \mathbf{e}_5 + \mathbb{A}_6 \mathbf{e}_6 + \mathbb{A}_7 \mathbf{e}_7 \\ &= \sum_{\mu=0}^7 \mathbb{A}_\mu \mathbf{e}_\mu\end{aligned}\quad (2.28)$$

elde edilir. Burada $\mathbb{A}_\mu \in \mathcal{C}$ dır.

Zorn matrisi ile $\mathcal{A}$ kompleks oktonyonu,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & X \\ Y & b \end{pmatrix}\quad (2.29)$$

ile temsil edilir. Burada $X = \vec{x} \cdot \vec{\sigma}$, $Y = \vec{y} \cdot \vec{\sigma}$ ve $a = \mathbb{A}_0 + i\mathbb{A}_4$, $b = \mathbb{A}_0 - i\mathbb{A}_4$,

$x_k = -\mathbb{A}_k + i\mathbb{A}_{4+k}$, $y_k = \mathbb{A}_k + i\mathbb{A}_{4+k}$ ($k = 1, 2, 3$) şeklindedir.

2.2.1. Toplama ve Çıkarma

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{O}$ olmak üzere toplama ve çıkarma işlemi,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \mp \mathcal{B} &= (\mathbb{A}_0 \mp \mathbb{B}_0) \mathbf{e}_0 + (\mathbb{A}_1 \mp \mathbb{B}_1) \mathbf{e}_1 + \dots + (\mathbb{A}_7 \mp \mathbb{B}_7) \mathbf{e}_7 \\ &= \sum_{\mu=0}^7 (\mathbb{A}_\mu \mp \mathbb{B}_\mu) \mathbf{e}_\mu\end{aligned}\quad (2.30)$$

olarak tanımlanır.

2.2.2. Çarpma

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &= \mathbb{A}_0 \mathbf{e}_0, \quad \vec{\mathcal{A}} = \sum_{j=1}^7 \mathbb{A}_j \mathbf{e}_j \text{ olmak üzere iki kompleks oktonyonun çarpımı,} \\ \mathcal{A}\mathcal{B} &= \mathcal{A}_0\mathcal{B}_0 + \mathcal{A}_0\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{A}}\mathcal{B}_0 - \vec{\mathcal{A}} \cdot \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{A}} \times \vec{\mathcal{B}}\end{aligned}\quad (2.31)$$

şeklindedir.

2.2.3. Eşlenik

Bir kompleks oktonyonun $\vec{\mathcal{A}}$ ile gösterilen eşleniği,

$$\vec{\mathcal{A}} = \mathbb{A}_0 \mathbf{e}_0 - \sum_{j=1}^7 \mathbb{A}_j \mathbf{e}_j, \quad \mathbb{A} \in \mathbb{C} \quad (2.32)$$

olarak tanımlanır. Bu eşlenik tanımı Zorn matrisleri ile,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{b} & -X \\ -Y & \mathbb{a} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

gösterilebilir.

2.2.4. Norm

Bir kompleks oktonyonun normu, kendisi ile eşleniğinin çarpımı olarak tanımlanır [42]:

$$N(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{A}}\mathcal{A} = \sum_{\mu=0}^7 \mathcal{A}_\mu^2 \quad (2.34)$$

2.2.5. Hermitik Eşlenik

Burada, ilk olarak baz elemanların Hermitik eşleniği tanımlanmalıdır:

$$\mathbf{e}_0^\dagger = \mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}_j^\dagger = -\mathbf{e}_j, \quad (j = 1, 2, \dots, 7) \quad (2.35)$$

Burada baz elemanların normu, hermitik eşlenik kullanımıyla,

$$N_\mu = \mathbf{e}_\mu^\dagger \mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\mu^\dagger = \mathbf{e}_0 = 1 \quad (\mu = 0, 1, \dots, 7) \quad (2.36)$$

olarak tanımlanabilir.

Bir kompleks oktonyonun hermitik eşleniği, yukarıda bazlar için tanımlanan hermitik eşlenik ifadeleri de kullanılarak

$$\mathcal{A}^\dagger = \sum_{\mu=0}^7 \overline{\mathbb{A}}_\mu \mathbf{e}_\mu^\dagger = \overline{\mathbb{A}}_0 \mathbf{e}_0 - \sum_{j=1}^7 \overline{\mathbb{A}}_j \mathbf{e}_j \quad (2.37)$$

şeklinde verilir. Hermitik eşlenik, $\mathcal{A}$ kompleks oktonyonu için Zorn matris temsili aşağıdaki gibidir [26]:

$$\mathcal{A}^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}} & Y^\dagger \\ X^\dagger & \bar{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

2.3. Split Oktonyon Cebri

Kompleks sayılar cismi üzerinden Cayley cebri split cebir olarak adlandırılır. Buradan yola çıkarak, bir $\mathcal{A}$ split oktonyonunu yazmak istersek,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathbf{a}\mathbf{u}_0^* + \mathbf{b}\mathbf{u}_0 + x_i \mathbf{u}_i^* + y_i \mathbf{u}_i \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\vec{x} \\ \vec{y} & \mathbf{b} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

olur. Burada, $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0^*, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i^*$ split oktonyonun baz elemanlarıdır. Kompleks cisim üzerinden yeni bazlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_4) & \mathbf{u}_1^* &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_4) \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 + i\mathbf{e}_5) & \mathbf{u}_2^* &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 - i\mathbf{e}_5) \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_3 + i\mathbf{e}_6) & \mathbf{u}_3^* &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_3 - i\mathbf{e}_6) \\ \mathbf{u}_0 &= \frac{1}{2}(1 + i\mathbf{e}_7) & \mathbf{u}_0^* &= \frac{1}{2}(1 - i\mathbf{e}_7) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Pauli-spin matrislerinden yararlanılarak yukarıdaki baz elemanları için matris temsili ($i = 1, 2, 3$);

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_0^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{e}_i & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_i^* = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{e}_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

olarak verilmektedir [29,43]. Baz elemanları için çarpım kuralları ise,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j &= \epsilon_{ijk} \mathbf{u}_k^* & \mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_j^* &= \epsilon_{ijk} \mathbf{u}_k & \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j^* &= -\delta_{ij} \mathbf{u}_0 \\
\mathbf{u}_i \mathbf{u}_0 &= 0 & \mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_0 &= \mathbf{u}_i^* & \mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_j &= -\delta_{ij} \mathbf{u}_0^* \\
\mathbf{u}_i \mathbf{u}_0^* &= \mathbf{u}_i & \mathbf{u}_i^* \mathbf{u}_0^* &= 0 & \mathbf{u}_0^* \mathbf{u}_i^* &= \mathbf{u}_i^* \\
\mathbf{u}_0^2 &= \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_i^2 &= \mathbf{u}_0^* & \mathbf{u}_0 \mathbf{u}_0^* &= \mathbf{u}_0^* \mathbf{u}_0 = 0
\end{aligned} \tag{2.42}$$

şeklinde. Buradaki, çarpımları Çizelge 2.4 ile de göstermek mümkündür [43]:

Çizelge 2.4. Split oktonyonların baz elemanlarının çarpımı

$\begin{smallmatrix} \text{II} \\ \text{I} \end{smallmatrix}$	$\mathbf{u}_0^*$	$\mathbf{u}_1^*$	$\mathbf{u}_2^*$	$\mathbf{u}_3^*$	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$
$\mathbf{u}_0^*$	$\mathbf{u}_0^*$	$\mathbf{u}_1^*$	$\mathbf{u}_2^*$	$\mathbf{u}_3^*$	0	0	0	0
$\mathbf{u}_1^*$	0	0	$\mathbf{u}_3$	$-\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_1^*$	$-\mathbf{u}_0^*$	0	0
$\mathbf{u}_2^*$	0	$-\mathbf{u}_3$	0	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2^*$	0	$-\mathbf{u}_0^*$	0
$\mathbf{u}_3^*$	0	$\mathbf{u}_2$	$-\mathbf{u}_1$	0	$\mathbf{u}_3^*$	0	0	$-\mathbf{u}_0^*$
$\mathbf{u}_0$	0	0	0	0	$\mathbf{u}_0$	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_3$
$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_1$	$-\mathbf{u}_0$	0	0	0	0	$\mathbf{u}_3^*$	$-\mathbf{u}_2^*$
$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{u}_2$	0	$-\mathbf{u}_0$	0	0	$-\mathbf{u}_3^*$	0	$\mathbf{u}_1^*$
$\mathbf{u}_3$	$\mathbf{u}_3$	0	0	$-\mathbf{u}_0$	0	$\mathbf{u}_2^*$	$-\mathbf{u}_1^*$	0

Bir split oktonyonun eşleniği,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{A}} &= a\mathbf{u}_0^* + b\mathbf{u}_0 - x_i \mathbf{u}_1^* + y_i \mathbf{u}_i \\
&= \begin{pmatrix} b & \vec{x} \\ -\vec{y} & a \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

dir [44].

Split oktonyon $\mathcal{A}$ için norm ise,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{A}}\mathcal{A} = (ab + \vec{x} \cdot \vec{y})I \tag{2.44}$$

olarak tanımlanmıştır. Buradaki I , birim matristir.

Split oktonyonlarda işlemler Zorn matrisleri ile yapılmaktadır. Çarpma işlemi için Eşitlik (2.8)'de verilen çarpım kurallarından yararlanılmaktadır.

2.4. Oktonyonların Matris Temsilleri

Oktonyon cebri asosiyatif olmadığından, alışılmış çarpım kuralları içeren matrisler tarafından temsil edilemezler. Oktonyonlar ve diğer asosiyatif olmayan cebirler için özel çarpım kuralları içeren, özel matris temsilleri geliştirilmiştir.

Önceki bölümlerde Zorn matris temsilleri ve bu matrisler için çarpım kuralları verilmiştir. Reel oktonyonlar için, temsillerden biri Tian tarafından verilmiştir:

$E_8 = [1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_7]$ oktonyon baz elemanlarını içeren sekiz elemanlı satır matris olmak üzere $E_8^T E_8$ matrislerinin çarpımı,

$$E_8^T E_8 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_7 \\ \mathbf{e}_1 & -1 & \mathbf{e}_3 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_5 & -\mathbf{e}_4 & -\mathbf{e}_7 & \mathbf{e}_6 \\ \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 & -1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_7 & -\mathbf{e}_4 & -\mathbf{e}_5 \\ \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_1 & -1 & \mathbf{e}_7 & -\mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_5 & -\mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_4 & -\mathbf{e}_5 & -\mathbf{e}_6 & -\mathbf{e}_7 & -1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_4 & -\mathbf{e}_7 & \mathbf{e}_6 & -\mathbf{e}_1 & -1 & -\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_7 & \mathbf{e}_4 & -\mathbf{e}_5 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & -1 & -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_7 & -\mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_4 & -\mathbf{e}_3 & -\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

oktonyon baz elemanları için Çizelge 2.1' de verilen çarpımları vermektedir. Reel kuaterniyon cebri için matris temsillerinden biri aşağıdaki gibidir:

$$\phi(\mathbf{A}') = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Diğer matris temsili ise,

$$\Gamma(\mathbf{A}') = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

olarak verilmektedir. Burada $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{R}$ ' dir.

$w(\mathcal{A})$ 8x8 matrisi $\mathcal{R}$ üzerinden $\mathcal{A}$ oktonyonunun sol matris gösterimi olarak adlandırılır,

$$w(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \phi(\mathbf{A}') & -\Gamma(\mathbf{A}'')K_4 \\ \phi(\mathbf{A}'')K_4 & \Gamma(\mathbf{A}') \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

olarak verilir. Burada K_4 , diyagonal elemanları $(1, -1, -1, -1)$ olan 4x4 matristir.

$\phi(\mathbf{A}'')$ ve $\Gamma(\mathbf{A}'')$ matrisleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\phi(\mathbf{A}'') = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_4 & -\mathbf{a}_5 & -\mathbf{a}_6 & -\mathbf{a}_7 \\ \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_4 & -\mathbf{a}_7 & \mathbf{a}_6 \\ \mathbf{a}_6 & \mathbf{a}_7 & \mathbf{a}_4 & -\mathbf{a}_5 \\ \mathbf{a}_7 & -\mathbf{a}_6 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$\Gamma(\mathbf{A}'') = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_4 & -\mathbf{a}_5 & -\mathbf{a}_6 & -\mathbf{a}_7 \\ \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_7 & -\mathbf{a}_6 \\ \mathbf{a}_6 & -\mathbf{a}_7 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \\ \mathbf{a}_7 & \mathbf{a}_6 & -\mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Eşitlik (2.47)' deki sol matris gösterimi bileşenler cinsinden yazılacak olursa;

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{A}'')K_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_4 & -\mathbf{a}_5 & -\mathbf{a}_6 & -\mathbf{a}_7 \\ \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_7 & -\mathbf{a}_6 \\ \mathbf{a}_6 & -\mathbf{a}_7 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \\ \mathbf{a}_7 & \mathbf{a}_6 & -\mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 & \mathbf{a}_7 \\ \mathbf{a}_5 & -\mathbf{a}_4 & -\mathbf{a}_7 & \mathbf{a}_6 \\ \mathbf{a}_6 & \mathbf{a}_7 & -\mathbf{a}_4 & -\mathbf{a}_5 \\ \mathbf{a}_7 & -\mathbf{a}_6 & \mathbf{a}_5 & -\mathbf{a}_4 \end{bmatrix} \\ \phi(\mathbf{A}'')K_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_4 & -\mathbf{a}_5 & -\mathbf{a}_6 & -\mathbf{a}_7 \\ \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_4 & -\mathbf{a}_7 & \mathbf{a}_6 \\ \mathbf{a}_6 & \mathbf{a}_7 & \mathbf{a}_4 & -\mathbf{a}_5 \\ \mathbf{a}_7 & -\mathbf{a}_6 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 & \mathbf{a}_6 & \mathbf{a}_7 \\ \mathbf{a}_5 & -\mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_7 & -\mathbf{a}_6 \\ \mathbf{a}_6 & -\mathbf{a}_7 & -\mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \\ \mathbf{a}_7 & \mathbf{a}_6 & -\mathbf{a}_5 & -\mathbf{a}_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$w(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 & -a_5 & a_4 & a_7 & -a_6 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 & -a_6 & -a_7 & a_4 & a_5 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & -a_7 & a_6 & -a_5 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_5 & -a_4 & a_7 & -a_6 & a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_6 & -a_7 & -a_4 & a_5 & a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_7 & a_6 & -a_5 & -a_4 & a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

şeklini almaktadır.

Benzer şekilde $\nu(\mathcal{A})$, 8x8 matrisi, $\mathcal{R}$ üzerinden $\mathcal{A}$ oktonyonunun sağ matris gösterimi olarak adlandırılır ve

$$\nu(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \Gamma(\mathbf{A}') & -\phi(\overline{\mathbf{A}'}) \\ \phi(\mathbf{A}'') & \Gamma(\overline{\mathbf{A}'}) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

bileşenler cinsinden aşağıdaki gibi gösterilir [30]:

$$\nu(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 & a_5 & -a_4 & -a_7 & a_6 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 & a_6 & a_7 & -a_4 & -a_5 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & a_7 & -a_6 & a_5 & -a_4 \\ a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_5 & a_4 & -a_7 & a_6 & -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_6 & a_7 & a_4 & -a_5 & -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_7 & -a_6 & a_5 & a_4 & -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

3. OKTONYON–KOMPLEKS KUATERNİYON CEBİRLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Önceki bölümlerde, oktonyon çeşitleri ve cebirleri hakkında temel tanımlar yapılmıştır. Bu bölümlerde ise Clifford cebirlerinden biri olan kuaterniyonlar ile oktonyonlar arasındaki karşılaştırmalar ele alınacaktır.

A. Gösterim

Kompleks kuaterniyonlar, önceki bölümde kısaca bahsedildiği gibi kuaterniyonlarda reel sayıların kompleks sayılar ile yer değiştirmesi sonucunda elde edilir.

Kompleks kuaterniyon,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + i(a_4 \mathbf{e}_0 + a_5 \mathbf{e}_1 + a_6 \mathbf{e}_2 + a_7 \mathbf{e}_3) \\ &= (a_0 + ia_4) \mathbf{e}_0 + (a_1 + ia_5) \mathbf{e}_1 + (a_2 + ia_6) \mathbf{e}_2 + (a_3 + ia_7) \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbb{A}_0 \mathbf{e}_0 + \mathbb{A}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbb{A}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbb{A}_3 \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

olarak tanımlanır, burada $i^2 = -1$ dir [45,46].

Oktonyon ise,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + (a_4 \mathbf{e}_0 + a_5 \mathbf{e}_1 + a_6 \mathbf{e}_2 + a_7 \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_4 \\ &= a_0 \mathbf{e}_0 + a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4 + a_5 \mathbf{e}_5 + a_6 \mathbf{e}_6 + a_7 \mathbf{e}_7\end{aligned}$$

şeklindedir ve $\mathbf{e}_4^2 = -1$ dir [26].

Görüldüğü gibi 8-boyutta iki farklı cebire sahip olan kompleks kuaterniyon ve oktonyonlar farklı bazlara da sahiptirler.

Kompleks kuaterniyon $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ olmak üzere dört baz elemana sahiptir.

Oktonyonda ise sekiz baz eleman vardır. Bunlar $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7$ dir.

B. Eşlenik

Kompleks kuaterniyon için üç eşlenik tanımlıdır:

▪ $\overline{\mathbf{A}}$ ile temsil edilen eşlenik,

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbb{A}_0 \mathbf{e}_0 - \mathbb{A}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbb{A}_2 \mathbf{e}_2 - \mathbb{A}_3 \mathbf{e}_3$$

dir, burada imajiner bazların önündeki işaret negatif olmuştur [47].

▪ $\mathbf{A}^*$ ile gösterilen kompleks eşlenikte ise, kompleks sayıların eşleniği alınır [48].

$$\mathbf{A}^* = \mathbb{A}_0^* \mathbf{e}_0 + \mathbb{A}_1^* \mathbf{e}_0 + \mathbb{A}_2^* \mathbf{e}_0 + \mathbb{A}_3^* \mathbf{e}_0 = \mathbb{A}_0^* \mathbf{e}_0 + \vec{\mathbb{A}}^*$$

▪ Hermitik eşlenik ise,

$$\mathbf{A}^\dagger = (-a_0 + ia_4) + (a_1 - ia_5) + (a_2 - ia_6) + (a_3 - ia_7)$$

şeklindedir [45].

Oktonyon reel bileşenlerden oluştuğu için eşlenik,

$$\bar{\mathcal{A}} = a_0 \mathbf{e}_0 - \sum_{\mu=1}^7 a_\mu \mathbf{e}_\mu = \mathcal{A}_0 - \vec{\mathcal{A}}$$

olarak verilmektedir ve tek bir eşlenik tanımlanmaktadır.

C. Temel İşlemler

Toplama, çıkarma, çarpma, skaler çarpım, vektörel çarpım, ters eleman, norm aynı şekilde bulunur. Fakat çarpma işlemleri gerçekleştirilirken bazların çarpımı kuaterniyon ve oktonyonlar için farklılık göstermektedir.

D. Özellikler

♦ *Kompleks kuaterniyon* dört kompleks bileşen içerir, dört kompleks boyutlu ya da sekiz reel boyutlu ve sekiz bileşenlidir.

Oktonyon ise sekiz reel bileşen içerir, sekiz boyutludur.

♦ Hem *kompleks kuaterniyon*, hem de *oktonyon cebri* çarpma işlemi için değişme özelliğine sahip değildir.

♦ *Kompleks kuaterniyon* çarpma işlemi için birleşme özelliğine sahip iken,

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

oktonyon cebri birleşme özelliğine sahip değildir:

$$\mathcal{A}(\mathcal{BC}) \neq (\mathcal{AB})\mathcal{C}$$

E. Matris Temsilleri

Kompleks kuaterniyon için matris temsili [45]:

$$Q = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 & -a_5 & a_4 & -a_7 & a_6 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 & -a_6 & a_7 & a_4 & -a_5 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & -a_7 & -a_6 & a_5 & a_4 \\ -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_5 & -a_4 & a_7 & -a_6 & -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_6 & -a_7 & -a_4 & a_5 & -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_7 & a_6 & -a_5 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

olarak verilirken, *oktonyon için verilen matris temsili*; iki şekilde tanımlanır [30]. Sol matris gösterimi;

$$w(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 & -a_5 & a_4 & a_7 & -a_6 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 & -a_6 & -a_7 & a_4 & a_5 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & -a_7 & a_6 & -a_5 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_5 & -a_4 & a_7 & -a_6 & a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_6 & -a_7 & -a_4 & a_5 & a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_7 & a_6 & -a_5 & -a_4 & a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

ve sağ matris gösterimi ise,

$$\nu(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 & a_5 & -a_4 & -a_7 & a_6 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 & a_6 & a_7 & -a_4 & -a_5 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & a_7 & -a_6 & a_5 & -a_4 \\ a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_5 & a_4 & -a_7 & a_6 & -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_6 & a_7 & a_4 & -a_5 & -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_7 & -a_6 & a_5 & a_4 & -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradaki sağ ve sol matris gösterimleri, oktonyon cebirinin birleşme özelliğine sahip olmamasından kaynaklanmaktadır.

4. ELEKTROMANYETİK TEORİDE OKTONYONİK GÖSTERİMLER

Bu bölümde; vektör ve kuaterniyon cebirinde daha önceden tanımlanmış ve iyi bilinen vektörel türev alma işlemi olan nabla ilk defa tarafımızdan oktonyon cebirinde baz çarpımlarının farklı tanımlandığı Cayley-Dickson ve modül 7' ye göre ele alınmıştır. Daha sonra nabla yardımıyla, farklı baz çarpımları metodlarını da kullanarak, oktonyon cebirinde; alan, kaynak ve potansiyel tanımlamalarından sonra genel oktonyonik alan, potansiyel denklemi, kaynaktan bağımsız alanlar için dalga denklemi ve hem manyetik tek kutup, hem de boşluk için Maxwell denklemleri yeniden formüle edilmiştir.

Baz elemanların çarpımları için farklı iki metod kullanılsa bile sonuç olarak kullandığımız cebirde yapılan işlemler sonucunda iyi bilinen ve fizikteki kullanıldığı şekliyle; genel oktonyonik alan, potansiyel denklemi, kaynaktan bağımsız alanlar için dalga denklemi ve Maxwell denklemleri tekrar elde edilmiştir. Bu cebirle bu denklemlerin yazılımını gerçekleştirmek; gösterim açısından kolay, kullanışlı ve tüm denklemleri bir arada tanımlama imkanı sağlamaktadır. Yani, oktonyon cebirinde yazılmış olan denklemler daha önce vektör, kuaterniyon, Clifford cebri gibi farklı cebirlerle yapılan işlemlere, yüksek boyutlu bir uzayda alternatif bir yaklaşım imkanı vermektedir.

4.1. Alan Denklemlerinin Oktonyon Temsilleri

Parçacıklar arasındaki elektromanyetik kuvvetlerin tüm özellikleri, elektrik ve manyetik alanların sağladığı denklemlerden çıkarılabilir. Bunlar vektör alanlarıdır. Bilindiği gibi vektör, hem büyüklüğü hem de yönü olan bir niceliktir, 3-boyutlu uzayda tanımlamak için üç sayıya gereksinim vardır. Alan ise, bu sayıların uzayda ve zamanda değişik değerler alabilmesi demektir [49].

Bu bölümde diferansiyel işlemci; alan, kaynak ve potansiyel ifadeleri oktonyonlar ile tanımlanıp, sırasıyla oktonyonik alan, potansiyel oktonyon ve kaynaktan bağımsız alanlar için dalga denklemi oktonyon formunda elde edilmiştir. Bu işlemler, baz elemanların çarpımı için hem Cayley–Dickson yöntemi ve hem de modül 7 yöntemi kullanılarak yapılmıştır [50].

$\square$; oktonyonik diferansiyel işlemciyi aşağıdaki gibi tanımlayacak olursak,

$$\square = \mathbf{e}_0 \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_5 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_6 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_7 \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.1)$$

ve oktonyonik diferansiyel işlemcinin eşleniği ise

$$\overline{\square} = \mathbf{e}_0 \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_5 \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{e}_6 \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{e}_7 \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.2)$$

olmak üzere, Cayley–Dickson yöntemi ile, $\square \overline{\square}$ çarpımı;

$$\begin{aligned} \square \overline{\square} &= \left(\mathbf{e}_0 \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_5 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_6 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_7 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\mathbf{e}_0 \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_5 \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{e}_6 \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{e}_7 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \square \overline{\square} &= \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

olur. Burada Δ ;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.4)$$

olarak tanımlanır. Alan oktonyonu ise

$$\Phi = -i\Phi_4' \mathbf{e}_0 + i\Phi_1' \mathbf{e}_1 + i\Phi_2' \mathbf{e}_2 + i\Phi_3' \mathbf{e}_3 + \Phi_4 \mathbf{e}_4 + \Phi_1 \mathbf{e}_5 + \Phi_2 \mathbf{e}_6 + \Phi_3 \mathbf{e}_7 \quad (4.5)$$

şeklindedir. Sırasıyla kaynak oktonyonu

$$\mathcal{J} = \frac{4\pi}{c} \left(-c\rho \mathbf{e}_0 + J_x' \mathbf{e}_1 + J_y' \mathbf{e}_2 + J_z' \mathbf{e}_3 + ic\rho' \mathbf{e}_4 - iJ_x \mathbf{e}_5 - iJ_y \mathbf{e}_6 - iJ_z \mathbf{e}_7 \right) \quad (4.6)$$

ve potansiyel oktonyon:

$$\mathcal{P} = -\varphi_2 \mathbf{e}_0 + A_x \mathbf{e}_1 + A_y \mathbf{e}_2 + A_z \mathbf{e}_3 + i\varphi_1 \mathbf{e}_4 - iA_x' \mathbf{e}_5 - iA_y' \mathbf{e}_6 - iA_z' \mathbf{e}_7 \quad (4.7)$$

olarak seçilerek, genel oktonyonik alan için

$$\square \Phi - k_0^2 \mathcal{P} = \mathcal{J} \quad (4.8)$$

ifadesi tanımlanır. Eşitlik (4.8)'in solunda yer alan ifadesi için,

$$\begin{aligned} \square \Phi &= \left(\mathbf{e}_0 \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_5 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_6 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_7 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &\quad \left(-i\Phi_4' \mathbf{e}_0 + i\Phi_1' \mathbf{e}_1 + i\Phi_2' \mathbf{e}_2 + i\Phi_3' \mathbf{e}_3 + \Phi_4 \mathbf{e}_4 + \Phi_1 \mathbf{e}_5 + \Phi_2 \mathbf{e}_6 + \Phi_3 \mathbf{e}_7 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Box \Phi = & \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_4'}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_2'}{\partial t} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_3'}{\partial t} \mathbf{e}_3 \\
& + \frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_4'}{\partial t} \mathbf{e}_4 + \frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t} \mathbf{e}_5 + \frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_2'}{\partial t} \mathbf{e}_6 + \frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_3'}{\partial t} \mathbf{e}_7 \\
& - i \frac{\partial \Phi_4'}{\partial x} \mathbf{e}_5 + i \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_1) + i \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_2) + i \frac{\partial \Phi_3'}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_3) \\
& + \frac{\partial \Phi_4'}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_4) + \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_5) + \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_6) + \frac{\partial \Phi_3'}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_7) \\
& - i \frac{\partial \Phi_4'}{\partial y} \mathbf{e}_6 + i \frac{\partial \Phi_1'}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_1) + i \frac{\partial \Phi_2'}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_2) + i \frac{\partial \Phi_3'}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_3) \\
& + \frac{\partial \Phi_4'}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_4) + \frac{\partial \Phi_1'}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_5) + \frac{\partial \Phi_2'}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_6) + \frac{\partial \Phi_3'}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_7) \\
& - i \frac{\partial \Phi_4'}{\partial z} \mathbf{e}_7 + i \frac{\partial \Phi_1'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_1) + i \frac{\partial \Phi_2'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_2) + i \frac{\partial \Phi_3'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_3) \\
& + \frac{\partial \Phi_4'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_4) + \frac{\partial \Phi_1'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_5) + \frac{\partial \Phi_2'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_6) + \frac{\partial \Phi_3'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Box \Phi = & \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_4'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2'}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3'}{\partial z} \\
& + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4'}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_3'}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 \\
& + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_2'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_3'}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_4'}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_2 \\
& + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_3'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1'}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_4'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_3 \\
& + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_4'}{\partial t} + i \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi_2'}{\partial y} + i \frac{\partial \Phi_3'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_4 \\
& + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t} - i \frac{\partial \Phi_4'}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi_3'}{\partial y} + i \frac{\partial \Phi_2'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_5 \\
& + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_2'}{\partial t} + i \frac{\partial \Phi_3'}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi_4'}{\partial y} - i \frac{\partial \Phi_1'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_6 \\
& + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_3'}{\partial t} - i \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi_1'}{\partial y} - i \frac{\partial \Phi_4'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_7
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 -k_0^2 \mathbf{P} &= -k_0^2 \left(\begin{array}{l} -\varphi_2 \mathbf{e}_0 + A_x \mathbf{e}_1 + A_y \mathbf{e}_2 + A_z \mathbf{e}_3 \\ +i\varphi_1 \mathbf{e}_4 -iA_x' \mathbf{e}_5 -iA_y' \mathbf{e}_6 -iA_z' \mathbf{e}_7 \end{array} \right) \\
 &= k_0^2 \varphi_2 \mathbf{e}_0 - k_0^2 A_x \mathbf{e}_1 - k_0^2 A_y \mathbf{e}_2 - k_0^2 A_z \mathbf{e}_3 \\
 &\quad -ik_0^2 \varphi_1 \mathbf{e}_4 + ik_0^2 A_x' \mathbf{e}_5 + ik_0^2 A_y' \mathbf{e}_6 + ik_0^2 A_z' \mathbf{e}_7
 \end{aligned}$$

olmak üzere yukarıda elde edilen ifadeler Eşitlik (4.8)' e göre, Eşitlik (4.6)' ya eşitlendiğinde, alan denklemleri bileşenler bazında;

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_4'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - k_0^2 \varphi_2 = 4\pi\rho \quad (4.9.a)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} - k_0^2 A_x = \frac{4\pi}{c} J_x' \quad (4.9.b)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_2'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - k_0^2 A_y = \frac{4\pi}{c} J_y' \quad (4.9.c)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_3'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - k_0^2 A_z = \frac{4\pi}{c} J_z' \quad (4.9.d)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_4'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2'}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3'}{\partial z} - k_0^2 \varphi_1 = 4\pi\rho' \quad (4.9.e)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2'}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_3'}{\partial y} + k_0^2 A_x' = -\frac{4\pi}{c} J_x \quad (4.9.f)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_2'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4'}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3'}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1'}{\partial z} + k_0^2 A_y' = -\frac{4\pi}{c} J_y \quad (4.9.g)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_3'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4'}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1'}{\partial y} + k_0^2 A_z' = -\frac{4\pi}{c} J_z \quad (4.9.h)$$

olarak yazılabilir. k_0' ın sıfır olduğu durumda ise Eşitlik (4.8),

$$\square \Phi = \mathcal{J} \quad (4.10)$$

şeklini alır. k_0' ın sıfır olmadığı genişletilmiş Maxwell denklemleri, fotonun kütesinin sıfır olmadığı durumda geçerlidir. Fotonun kütleli veya kütesiz olduğu, bu probleme ilişkin büyük deneysel çabalara rağmen, şimdiye kadar tanımsal olarak kararlaştırılamamıştır. Fotonun kütesinin tam olarak sıfır veya ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu muhtemel gözükmektedir. Fotonun kütesiz

olduğu deneysel olarak bulununcaya kadar genişletilmiş Maxwell denklemleri yalnızca teorik çalışma olarak kalacaktır [51]. Bileşenler bazında Eşitlik (4.10)'un gösterimi ise aşağıda verilmiştir:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_4'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (4.11.a)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} J_x' \quad (4.11.b)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_2'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} J_y' \quad (4.11.c)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_3'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} J_z' \quad (4.11.d)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_4'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2'}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3'}{\partial z} = 4\pi\rho' \quad (4.11.e)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2'}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_3'}{\partial y} = -\frac{4\pi}{c} J_x \quad (4.11.f)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_2'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4'}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3'}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1'}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} J_y \quad (4.11.g)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_3'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4'}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1'}{\partial y} = -\frac{4\pi}{c} J_z \quad (4.11.h)$$

Oktonyonik potansiyel için eşitliğimiz ise,

$$\bar{\square} \mathcal{P} = \Phi \quad (4.12)$$

şeklindedir. Daha açık bir ifadeyle bileşenler cinsinden $\bar{\square} \mathcal{P}$ ifadesi,

$$\begin{aligned} \bar{\square} \mathcal{P} = & \left(\mathbf{e}_0 \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_5 \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{e}_6 \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{e}_7 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ & \left(-\varphi_2 \mathbf{e}_0 + A_x \mathbf{e}_1 + A_y \mathbf{e}_2 + A_z \mathbf{e}_3 + i\varphi_1 \mathbf{e}_4 - iA_x' \mathbf{e}_5 - iA_y' \mathbf{e}_6 - iA_z' \mathbf{e}_7 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\square} \boldsymbol{\varphi} = & -\frac{i}{c} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{i}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \mathbf{e}_1 + \frac{i}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \mathbf{e}_2 + \frac{i}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \mathbf{e}_3 \\
& -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \mathbf{e}_4 + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x'}{\partial t} \mathbf{e}_5 + \frac{1}{c} \frac{\partial A_y'}{\partial t} \mathbf{e}_6 + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z'}{\partial t} \mathbf{e}_7 \\
& + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \mathbf{e}_5 - \frac{\partial A_x}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_1) - \frac{\partial A_y}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_2) - \frac{\partial A_z}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_3) \\
& - i \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_4) + i \frac{\partial A_x'}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_5) + i \frac{\partial A_y'}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_6) + i \frac{\partial A_z'}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_7) \\
& + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \mathbf{e}_6 - \frac{\partial A_x}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_1) - \frac{\partial A_y}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_2) - \frac{\partial A_z}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_3) \\
& - i \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_4) + i \frac{\partial A_x'}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_5) + i \frac{\partial A_y'}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_6) + i \frac{\partial A_z'}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_7) \\
& + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \mathbf{e}_7 - \frac{\partial A_x}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_1) - \frac{\partial A_y}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_2) - \frac{\partial A_z}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_3) \\
& - i \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_4) + i \frac{\partial A_x'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_5) + i \frac{\partial A_y'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_6) + i \frac{\partial A_z'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_7)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\overline{\square} \boldsymbol{\varphi} = & -\frac{i}{c} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - i \frac{\partial A_x'}{\partial x} - i \frac{\partial A_y'}{\partial y} - i \frac{\partial A_z'}{\partial z} \\
& + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + i \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - i \frac{\partial A_z'}{\partial y} + i \frac{\partial A_y'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 \\
& + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} + i \frac{\partial A_z'}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - i \frac{\partial A_x'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_2 \\
& + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - i \frac{\partial A_y'}{\partial x} + i \frac{\partial A_x'}{\partial y} + i \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \mathbf{e}_3 \\
& + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \mathbf{e}_4 \\
& + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A_x'}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_5 \\
& + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A_y'}{\partial t} - \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_6 \\
& + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A_z'}{\partial t} + \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \mathbf{e}_7
\end{aligned}$$

olacaktır. Bu ifadeler Eşitlik (4.5) ile karşılıklı olarak eşitlendiğinde, bileşenler bazında potansiyel denklemleri;

$$\frac{\partial A_x'}{\partial x} + \frac{\partial A_y'}{\partial y} + \frac{\partial A_z'}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \Phi_4' \quad (4.13.a)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial A_z'}{\partial y} + \frac{\partial A_y'}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = \Phi_1' \quad (4.13.b)$$

$$\frac{\partial A_z'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial A_x'}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} = \Phi_2' \quad (4.13.c)$$

$$-\frac{\partial A_y'}{\partial x} + \frac{\partial A_x'}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = \Phi_3' \quad (4.13.d)$$

$$-\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \Phi_4 \quad (4.13.e)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x'}{\partial t} = \Phi_1 \quad (4.13.f)$$

$$-\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_y'}{\partial t} = \Phi_2 \quad (4.13.g)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z'}{\partial t} = \Phi_3 \quad (4.13.h)$$

olarak elde edilmektedir. Kaynaktan bağımsız alan için, dalga denklemleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$(\square\square)\Phi - k_0^2 \Phi = 0 \quad (4.14)$$

Burada yapılacak olan ise yukarıda tanımlanan işlemleri modül 7' ye göre yeniden yapmaktır. Oktonyonik diferansiyel işlemciyi ve eşleniğini modül 7' ye göre yazacak olursak;

$$\square = e_0 \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + e_2 \frac{\partial}{\partial x} + e_3 \frac{\partial}{\partial y} + e_7 \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.15)$$

Oktonyonik diferansiyel işlemcinin eşleniği,

$$\overline{\square} = e_0 \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} - e_2 \frac{\partial}{\partial x} - e_3 \frac{\partial}{\partial y} - e_7 \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.16)$$

olmak üzere $\square \square$ çarpımı aşağıda da görüleceği gibi yine Eşitlik (4.3)' ün sonucuna, Δ ise Eşitlik (4.4)' e eşittir.

Oktonyonik diferansiyel işlemci ile eşleniğinin çarpımı,

$$\square \square = \left(\mathbf{e}_0 \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_7 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\mathbf{e}_0 \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{e}_7 \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\square \square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

olarak elde edilir. Alan oktonyonu, kaynak oktonyonu ve potansiyel oktonyon sırasıyla,

$$\mathcal{F} = i\Phi_4' \mathbf{e}_0 + i\Phi_1' \mathbf{e}_1 + \Phi_1 \mathbf{e}_2 + \Phi_2 \mathbf{e}_3 + \Phi_4 \mathbf{e}_4 + i\Phi_3' \mathbf{e}_5 + i\Phi_2' \mathbf{e}_6 + \Phi_3 \mathbf{e}_7 \quad (4.17)$$

$$J = \frac{4\pi}{c} \left(c\rho \mathbf{e}_0 + J_x' \mathbf{e}_1 - iJ_x \mathbf{e}_2 - iJ_y \mathbf{e}_3 + ic\rho' \mathbf{e}_4 + J_z' \mathbf{e}_5 + J_y' \mathbf{e}_6 - iJ_z \mathbf{e}_7 \right) \quad (4.18)$$

$$P = \varphi_2 \mathbf{e}_0 + A_x \mathbf{e}_1 - iA_x' \mathbf{e}_2 - iA_y' \mathbf{e}_3 + i\varphi_1 \mathbf{e}_4 + A_z \mathbf{e}_5 + A_y \mathbf{e}_6 - iA_z' \mathbf{e}_7 \quad (4.19)$$

şeklinde düzenlenecek olursa modül 7' ye göre genel oktonyonik alan

$$\square \mathcal{F} - k_0^2 P = J \quad (4.20)$$

ifadesi ile tanımlanır. Eşitlik (4.20) bileşenler cinsinden,

$$\square \mathcal{F} = \left(\mathbf{e}_0 \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{e}_7 \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\left(i\Phi_4' \mathbf{e}_0 + i\Phi_1' \mathbf{e}_1 + \Phi_1 \mathbf{e}_2 + \Phi_2 \mathbf{e}_3 + \Phi_4 \mathbf{e}_4 + i\Phi_3' \mathbf{e}_5 + i\Phi_2' \mathbf{e}_6 + \Phi_3 \mathbf{e}_7 \right)$$

$$\begin{aligned}
\overline{\square} \mathcal{F} = & -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_4'}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t} \mathbf{e}_1 + \frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \mathbf{e}_2 + \frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \mathbf{e}_3 \\
& + \frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_4}{\partial t} \mathbf{e}_4 - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_3'}{\partial t} \mathbf{e}_5 - \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_2'}{\partial t} \mathbf{e}_6 + \frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} \mathbf{e}_7 \\
& - i \frac{\partial \Phi_4'}{\partial x} \mathbf{e}_2 - i \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) \\
& - \frac{\partial \Phi_4}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_4) - i \frac{\partial \Phi_3'}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_5) - i \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_6) - \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_7) \\
& - i \frac{\partial \Phi_4'}{\partial y} \mathbf{e}_3 - i \frac{\partial \Phi_1'}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \\
& - \frac{\partial \Phi_4}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_4) - i \frac{\partial \Phi_3'}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_5) - i \frac{\partial \Phi_2'}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_6) - \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_7) \\
& - i \frac{\partial \Phi_4'}{\partial z} \mathbf{e}_7 - i \frac{\partial \Phi_1'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_1) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_2) - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_3) \\
& - \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_4) - i \frac{\partial \Phi_3'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_5) - i \frac{\partial \Phi_2'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_6) - \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\square} \mathcal{F} = & -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_4'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \\
& + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_4}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 \\
& + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - i \frac{\partial \Phi_4'}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi_3'}{\partial y} + i \frac{\partial \Phi_2'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_2 \\
& + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + i \frac{\partial \Phi_3'}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi_4'}{\partial y} - i \frac{\partial \Phi_1'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_3 \\
& + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_4}{\partial t} + i \frac{\partial \Phi_1'}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi_2'}{\partial y} + i \frac{\partial \Phi_3'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_4 \\
& + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_3'}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} \right) \mathbf{e}_5 \\
& + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_2'}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_4}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) \mathbf{e}_6 \\
& + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} - i \frac{\partial \Phi_2'}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi_1'}{\partial y} - i \frac{\partial \Phi_4'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_7
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
-k_0^2 P &= -k_0^2 \left(\varphi_2 \mathbf{e}_0 + A_x \mathbf{e}_1 - i A_x' \mathbf{e}_2 - i A_y' \mathbf{e}_3 \right. \\
&\quad \left. + i \varphi_1 \mathbf{e}_4 + A_z \mathbf{e}_5 + A_y \mathbf{e}_6 - i A_z' \mathbf{e}_7 \right) \\
&= -k_0^2 \varphi_2 \mathbf{e}_0 - k_0^2 A_x \mathbf{e}_1 + i k_0^2 A_x' \mathbf{e}_2 + i k_0^2 A_y' \mathbf{e}_3 \\
&\quad - i k_0^2 \varphi_1 \mathbf{e}_4 - k_0^2 A_z \mathbf{e}_5 - k_0^2 A_y \mathbf{e}_6 + i k_0^2 A_z' \mathbf{e}_7
\end{aligned}$$

olmak üzere yukarıdaki ifadeler Eşitlik (4.20)' ye göre, Eşitlik (4.18)' e eşitlendiğinde, alan denklemleri bileşenler bazında yine Eşitlik (4.9.a-h)' a eşittir. k_0 sıfır alındığında ise eşitliğimiz

$$\overline{\square} \mathfrak{F} = J \quad (4.21)$$

şeklini alır. Buradan da elde edilen sonuçlar Eşitlik (4.11.a-h) ile aynıdır. Yine aynı yolla, oktonyonik potansiyel denklemi

$$\square P = \mathfrak{F} \quad (4.22)$$

olarak verilir. Eşitlik (4.22)' ye göre $\square P$ ifadesi,

$$\begin{aligned}
\square P &= \left(\mathbf{e}_0 \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_7 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
&\quad \left(\varphi_2 \mathbf{e}_0 + A_x \mathbf{e}_1 - i A_x' \mathbf{e}_2 - i A_y' \mathbf{e}_3 + i \varphi_1 \mathbf{e}_4 + A_z \mathbf{e}_5 + A_y \mathbf{e}_6 - i A_z' \mathbf{e}_7 \right) \\
\square P &= \frac{i}{c} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{i}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{c} \frac{\partial A_x'}{\partial t} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{c} \frac{\partial A_y'}{\partial t} \mathbf{e}_3 \\
&\quad - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \mathbf{e}_4 + \frac{i}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \mathbf{e}_5 + \frac{i}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \mathbf{e}_6 + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z'}{\partial t} \mathbf{e}_7 \\
&\quad + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial A_x}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) - i \frac{\partial A_x'}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) - i \frac{\partial A_y'}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) \\
&\quad + i \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_4) + \frac{\partial A_z}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_5) + \frac{\partial A_y}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_6) - i \frac{\partial A_z'}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_7) \\
&\quad + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \mathbf{e}_3 + \frac{\partial A_x}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) - i \frac{\partial A_x'}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) - i \frac{\partial A_y'}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \\
&\quad + i \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_4) + \frac{\partial A_z}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_5) + \frac{\partial A_y}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_6) - i \frac{\partial A_z'}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_7) \\
&\quad + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \mathbf{e}_7 + \frac{\partial A_x}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_1) - i \frac{\partial A_x'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_2) - i \frac{\partial A_y'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_3) \\
&\quad + i \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_4) + \frac{\partial A_z}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_5) + \frac{\partial A_y}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_6) - i \frac{\partial A_z'}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_7)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \square P = & \frac{i}{c} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + i \frac{\partial A_x'}{\partial x} + i \frac{\partial A_y'}{\partial y} + i \frac{\partial A_z'}{\partial z} \\
 & + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + i \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - i \frac{\partial A_z'}{\partial y} + i \frac{\partial A_y'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 \\
 & + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A_x'}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_2 \\
 & + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A_y'}{\partial t} - \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_3 \\
 & + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \mathbf{e}_4 \\
 & + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} - i \frac{\partial A_y'}{\partial x} + i \frac{\partial A_x'}{\partial y} + i \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) \mathbf{e}_5 \\
 & + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} + i \frac{\partial A_z'}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - i \frac{\partial A_x'}{\partial z} \right) \mathbf{e}_6 \\
 & + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A_z'}{\partial t} + \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) \mathbf{e}_7
 \end{aligned}$$

olarak bileşenler cinsinden açık yazılır ve bu ifadeler Eşitlik (4.17)' ye karşılıklı eşitlendiğinde, bileşenler bazında potansiyel denklemi yine Eşitlik (4.13.a-h) olarak elde edilir. Böylece kaynaktan bağımsız alan için dalga denklemi ise

$$(\square \square) \mathcal{P} - k_0^2 \mathcal{P} = 0 \quad (4.23)$$

olacaktır.

Eşitlik (4.8) ve Eşitlik (4.20)' deki genel oktonyonik alan denklemlerinin vektörel formdaki temsilleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 \frac{i}{c} \frac{\partial \Psi_4}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Psi} - k_0^2 P_4 &= 4\pi J_4 \\
 \frac{i}{c} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Psi_4 - \vec{\nabla} \times \vec{\Psi} - k_0^2 \vec{P} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J}
 \end{aligned}$$

Burada,

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\Psi} = \hat{i}\Psi_1 + \hat{j}\Psi_2 + \hat{k}\Psi_3,$$

$$\Psi_1 = \Phi_1 + i\Phi_1', \Psi_2 = \Phi_2 + i\Phi_2', \Psi_3 = \Phi_3 + i\Phi_3', \Psi_4 = \Phi_4 + i\Phi_4'$$

$$\vec{P} = \mathbb{P}_1\hat{i} + \mathbb{P}_2\hat{j} + \mathbb{P}_3\hat{k}$$

$$\mathbb{P}_1 = (A_x - iA_x'), \mathbb{P}_2 = (A_y - iA_y'), \mathbb{P}_3 = (A_z - iA_z'), \mathbb{P}_4 = i(\varphi_1 - i\varphi_2)$$

$$\vec{J} = \mathbb{J}_1\hat{i} + \mathbb{J}_2\hat{j} + \mathbb{J}_3\hat{k}$$

$$\mathbb{J}_1 = J_x' - iJ_x, \mathbb{J}_2 = J_y' - iJ_y, \mathbb{J}_3 = J_z' - iJ_z, \mathbb{J}_4 = 4\pi(\rho + i\rho')$$

olarak verilmiştir.

Potansiyel ifadesini oktonyon formunda veren Eşitlik (4.12) ve Eşitlik (4.22)' nin vektörel formu ise,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}_1 + \frac{\partial \vec{A}_2}{c \partial t} + \nabla \varphi_2 = \vec{\Phi}$$

$$-\vec{\nabla} \times \vec{A}_2 + \frac{\partial \vec{A}_1}{c \partial t} + \nabla \varphi_1 = \vec{\Phi}'$$

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \Phi_4$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_2 + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \Phi_4'$$

şeklinde dir. $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{\Phi}, \vec{\Phi}'$ ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\vec{A}_1 = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{A}_2 = A_x'\hat{i} + A_y'\hat{j} + A_z'\hat{k}$$

$$\vec{\Phi} = \Phi_1\hat{i} + \Phi_2\hat{j} + \Phi_3\hat{k}$$

$$\vec{\Phi}' = \Phi_1'\hat{i} + \Phi_2'\hat{j} + \Phi_3'\hat{k}$$

Alan denklemlerinin kompleks kuaterniyon temsilleri ise aşağıda verilmiştir:

Kompleks kuaterniyonik diferansiyel işlemci,

$$\boxtimes = \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.24)$$

olarak tanımlanır. Kompleks kuaterniyonik işlemcinin eşleniği ise

$$\overline{\boxtimes} = \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.25)$$

olmak üzere $\boxtimes \overline{\boxtimes}$,

$$\begin{aligned} \boxtimes \overline{\boxtimes} &= \left(\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\boxtimes \overline{\boxtimes} = \mathbf{\Delta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

şeklindedir. Burada

$$\mathbf{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

dir. Alan kuaterniyonu,

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{e}_1 \Psi_1 + \mathbf{e}_2 \Psi_2 + \mathbf{e}_3 \Psi_3 + \Psi_4 \quad (4.27)$$

$$\Psi_1 = \Phi_1 + i\Phi_1', \Psi_2 = \Phi_2 + i\Phi_2', \Psi_3 = \Phi_3 + i\Phi_3', \Psi_4 = \Phi_4 + i\Phi_4'$$

ve kaynak kuaterniyonu,

$$\mathbf{J} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{e}_1 \mathbb{J}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbb{J}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbb{J}_3) + \mathbb{J}_4 \quad (4.28)$$

$$\mathbb{J}_1 = \mathbf{J}_x' - i\mathbf{J}_x, \mathbb{J}_2 = \mathbf{J}_y' - i\mathbf{J}_y, \mathbb{J}_3 = \mathbf{J}_z' - i\mathbf{J}_z, \mathbb{J}_4 = 4\pi(\rho + i\rho')$$

dir [51,52]. Potansiyel oktonyon ise,

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}_1 \mathbb{P}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbb{P}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbb{P}_3 + \mathbb{P}_4 \quad (4.29)$$

$$\mathbb{P}_1 = \mathbf{A}_x - i\mathbf{A}_x', \mathbb{P}_2 = \mathbf{A}_y - i\mathbf{A}_y', \mathbb{P}_3 = \mathbf{A}_z - i\mathbf{A}_z', \mathbb{P}_4 = i\varphi_1 + \varphi_2$$

ifadeleri ile tanımlanır. Genel oktonyonik alan,

$$\overline{\boxtimes} \mathbf{\Phi} - k_0^2 \mathbf{P} = \mathbf{J} \quad (4.30)$$

olarak yazılabilir ve k_0 ' ın sıfır olduğu durumda ise yukarıdaki eşitlik,

$$\overline{\boxtimes} \mathbf{\Phi} = \mathbf{J} \quad (4.31)$$

şeklini alır. Kuaterniyonik potansiyel ise,

$$\boxtimes \mathbf{P} = \mathbf{\Phi} \quad (4.32)$$

olarak yazılmaktadır. Kaynaktan bağımsız dalga denklemi,

$$\boxed{\times} \boxed{\times} \Phi - k_0^2 \Phi = \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \Phi \right) = 0 \quad (4.33)$$

olarak elde edilmektedir [53].

4.2. Oktanyonik Maxwell Denklemleri

Burada yapılacak işlem ise gerekli bileşenlerin değiştirilerek, sırasıyla, manyetik tek kutup için Maxwell denklemleri ve boşluk için Maxwell denklemlerinin oktanyonik gösterimlerinin yeni bir formda tanımlanmasıdır. Vektörel formda manyetik tek kutup için Maxwell denklemleri;

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}' \quad (4.34.a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (4.34.b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 4\pi\rho' \quad (4.34.c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (4.34.d)$$

şeklindedir. Burada, $\vec{E}$ elektrik alan vektörü, $\vec{B}$ manyetik alan vektörü, $\vec{J}$ akım yoğunluğu, $\vec{J}'$ tek kutupta akım yoğunluğunu temsil etmektedir.

$$\vec{E} = E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{J} = J_x \hat{i} + J_y \hat{j} + J_z \hat{k}$$

$$\vec{J}' = J'_x \hat{i} + J'_y \hat{j} + J'_z \hat{k}$$

olmak üzere manyetik tek kutup için Maxwell denklemlerinin bileşen formunda açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (4.35.a)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{4\pi}{c} J'_x \quad (4.35.b)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} J'_y \quad (4.35.c)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{4\pi}{c} J_z' \quad (4.35.d)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 4\pi\rho' \quad (4.35.e)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} J_x \quad (4.35.f)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} J_y \quad (4.35.g)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} J_z \quad (4.35.h)$$

Manyetik tek kutbun varlığı günümüz koşullarında teorik bir çalışmadır, henüz gözlenememiştir. Buna rağmen, manyetik tek kutbun mevcut olup olmadığı hala bilinmemektedir, fakat bu teorik olasılığın keşfi önemini korumaktadır.

Normal bir mıknatısın aksine, manyetik tek kutup bir parçacıktır ve bir manyetik kuzey kutbu olduğu halde güney kutbu yoktur ya da bunun tersi söz konusudur. Bu konu ile ilgili bazı çalışmalar şunlardır:

1931' de Dirac, manyetik tek kutup parçacıklarının bulunabileceğini öne sürmüştür. Bir elektronun temel yükü ile olası bir manyetik kutbun temel manyetik yükünün çarpımı Planck sabitinin daima tam sayı katı olması gerektiğini kanıtlamıştır. Bu, manyetik tek kutuplar için model yapılmak istendiğinde uygun değildir.

Hoofit, tek kutupların noktasal olmayıp, uzayda belirli bir yer işgal eden nesneler olduğunu ileri sürmüş, kütleleri dahil bütün özelliklerini hesaplamıştır.

$$\Phi_4 = \Phi_4' = k_0 = 0$$

$$\Phi_1' = B_x, \Phi_2' = B_y, \Phi_3' = B_z, \Phi_1 = E_x, \Phi_2 = E_y, \Phi_3 = E_z$$

kabulleri yapılarak, Cayley-Dickson yöntemine göre tek kutup için Maxwell denklemleri oktonyonik formda aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$\square \mathcal{F} = \mathcal{J} \quad (4.36)$$

Burada,

$$\mathcal{F} = iB_x \mathbf{e}_1 + iB_y \mathbf{e}_2 + iB_z \mathbf{e}_3 + E_x \mathbf{e}_5 + E_y \mathbf{e}_6 + E_z \mathbf{e}_7 \quad (4.37)$$

olmak üzere Eşitlik (4.1) ve Eşitlik (4.6) yardımıyla yapılan işlemlerin sonucunda,

$$\square \mathbf{F} = \left(\mathbf{e}_0 \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_5 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_6 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_7 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ (i\mathbf{B}_x \mathbf{e}_1 + i\mathbf{B}_y \mathbf{e}_2 + i\mathbf{B}_z \mathbf{e}_3 + \mathbf{E}_x \mathbf{e}_5 + \mathbf{E}_y \mathbf{e}_6 + \mathbf{E}_z \mathbf{e}_7)$$

ve

$$\square \mathbf{F} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial t} \mathbf{e}_3 \\ + \frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} \mathbf{e}_5 + \frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} \mathbf{e}_6 + \frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t} \mathbf{e}_7 \\ + i \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_1) + i \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_2) + i \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_3) \\ + \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_5) + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_6) + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} (\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_7) \\ + i \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_1) + i \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_2) + i \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_3) \\ + \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_5) + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_6) + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} (\mathbf{e}_6 \mathbf{e}_7) \\ + i \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_1) + i \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_2) + i \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_3) \\ + \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_5) + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_6) + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_7) \\ \square \mathbf{F} = -\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 \\ + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_2 + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3 \\ + \left(i \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} + i \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y} + i \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z} \right) \mathbf{e}_4 + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} - i \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial y} + i \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_5 \\ + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} + i \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial x} - i \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_6 + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t} - i \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial x} + i \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_7$$

bulunur. Yukarıdaki ifadeler Eşitlik (4.6)' ya eşitlendiğinde, Eşitlik (4.35.a-h) ile verilen manyetik tek kutup için bileşen formları elde edilir.

Aynı işlem modül 7 yöntemi ile yapılmak istenirse;

$$\square \mathbf{F} = \mathbf{J} \quad (4.38)$$

olarak yazılmalıdır. Burada

$$\mathbf{F} = i\mathbf{B}_x \mathbf{e}_1 + \mathbf{E}_x \mathbf{e}_2 + \mathbf{E}_y \mathbf{e}_3 + i\mathbf{B}_z \mathbf{e}_5 + i\mathbf{B}_y \mathbf{e}_6 + \mathbf{E}_z \mathbf{e}_7 \quad (4.39)$$

olarak tanımlanmaktadır. $\overline{\square}F$, bileşenler cinsinden

$$\begin{aligned}\overline{\square}F &= \left(\mathbf{e}_0 \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{e}_7 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &\quad (i\mathbf{B}_x \mathbf{e}_1 + \mathbf{E}_x \mathbf{e}_2 + \mathbf{E}_y \mathbf{e}_3 + i\mathbf{B}_z \mathbf{e}_5 + i\mathbf{B}_y \mathbf{e}_6 + \mathbf{E}_z \mathbf{e}_7) \\ \overline{\square}F &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t} \mathbf{e}_1 + \frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} \mathbf{e}_2 + \frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} \mathbf{e}_3 \\ &\quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial t} \mathbf{e}_5 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t} \mathbf{e}_6 + \frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t} \mathbf{e}_7 \\ &\quad -i \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1) - \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) \\ &\quad -i \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_5) - i \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_6) - \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_7) \\ &\quad -i \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1) - \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2) - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3) \\ &\quad -i \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_5) - i \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_6) - \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_7) \\ &\quad -i \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_1) - \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_2) - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_3) \\ &\quad -i \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_5) - i \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_6) - \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} (\mathbf{e}_7 \mathbf{e}_7)\end{aligned}$$

dir ve baz elemanlarının çarpımları sonucu

$$\begin{aligned}\overline{\square}F &= \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} - i \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial y} + i \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} + i \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial x} - i \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_3 \\ &\quad + \left(i \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} + i \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y} + i \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z} \right) \mathbf{e}_4 + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_5 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_6 + \left(\frac{i}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t} - i \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial x} + i \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_7\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitlik (4.16), Eşitlik (4.18), Eşitlik (4.38), Eşitlik (4.39) ile yapılan işlemler sonucunda manyetik tek kutup için Maxwell denklemleri yine Eşitlik (4.35.a-h) bileşen formları elde edilmiş olur.

Vektörel formda boşluk için yazılmış Maxwell denklemleri ise

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.40.a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \quad (4.40.b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.40.c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (4.40.d)$$

şeklindedir [54].

Yukarıdaki dört denklemin bileşenlerin yardımıyla açık ifadesi:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (4.41.a)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y} = 0 \quad (4.41.b)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 \quad (4.41.c)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (4.41.d)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (4.41.e)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} J_x \quad (4.41.f)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} J_y \quad (4.41.g)$$

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} J_z \quad (4.41.h)$$

şeklindedir. Burada,

$$\Phi_4 = \Phi_4' = \rho' = J_x' = J_y' = J_z' = k_0 = 0$$

$$\Phi_1' = B_x, \Phi_2' = B_y, \Phi_3' = B_z, \Phi_1 = E_x, \Phi_2 = E_y, \Phi_3 = E_z$$

olacak şekilde boşluktaki Maxwell denklemleri,

$$\mathcal{J} = \frac{4\pi}{c} (-c\rho e_0 - iJ_x e_5 - iJ_y e_6 - iJ_z e_7) \quad (4.42)$$

olmak üzere Cayley-Dickson yöntemine göre, Eşitlik (4.1), Eşitlik (4.36) ve Eşitlik (4.37) kullanılarak elde edilmektedir. Aynı işlemler modül 7' ye göre ise Eşitlik (4.16) ve Eşitlik (4.39) göz önüne alınarak ve

$$J = \frac{4\pi}{c} (c\rho \mathbf{e}_0 + -iJ_x \mathbf{e}_2 - iJ_y \mathbf{e}_3 - iJ_z \mathbf{e}_7) \quad (4.43)$$

olmak üzere Eşitlik (4.38)'deki tanım yardımıyla yazılabilir.

Maxwell denklemleri kompleks kuaterniyon formunda yazılmak istenirse manyetik tek kutup için,

$$\Phi_4 = \Phi_4' = k_0 = 0,$$

$$\Phi_1 = -E_x, \quad \Phi_2 = -E_y, \quad \Phi_3 = -E_z, \quad \Phi_1' = -B_x, \quad \Phi_2' = -B_y, \quad \Phi_3' = -B_z$$

alınmalıdır. Böylece (4.27)'deki Φ ifadesi,

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_1(-E_x - iB_x) + \mathbf{e}_2(-E_y - iB_y) + \mathbf{e}_3(-E_z - iB_z) \quad (4.44)$$

şeklini alır. Eşitlik (4.25), Eşitlik (4.44) ile Eşitlik (4.28)'de $\mathbf{J}$ yerine $-\mathbf{J}$ yazılarak ve

$$\overline{\boxtimes} \mathbf{F} = \mathbf{J} \quad (4.45)$$

eşitliği yardımıyla manyetik tek kutup için Maxwell denklemleri kompleks kuaterniyon formunda elde edilir.

Boşluk için Maxwell denklemleri,

$$\Phi_4 = \Phi_4' = k_0 = \rho' = J_x' = J_y' = J_z' = 0,$$

$$\Phi_1 = -E_x, \quad \Phi_2 = -E_y, \quad \Phi_3 = -E_z, \quad \Phi_1' = -B_x, \quad \Phi_2' = -B_y, \quad \Phi_3' = -B_z$$

yazılarak elde edilir. Bu durumda,

$$\mathbf{J} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{e}_1 iJ_x + \mathbf{e}_2 iJ_y + \mathbf{e}_3 iJ_z) - 4\pi\rho \quad (4.46)$$

olacaktır. Eşitlik (4.45)'deki tanım kullanılarak, Eşitlik (4.25), Eşitlik (4.44) ve Eşitlik (4.46) yardımıyla kompleks kuaterniyon formunda boşluk için Maxwell denklemleri elde edilir.

5. KUANTUM MEKANİĞİNDE OKTONYONİK GÖSTERİMLER

5.1. Klein-Gordon Denkleminin Oktonyon Temsili

Klein-Gordon denklemi (Klein-Fock ya da Klein-Gordon-Fock denklemi) Schrödinger denkleminin rölativistik versiyonudur [55,56].

Serbest parçacık için Schrödinger denklemi

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} \Psi = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi \quad (5.1)$$

dir, burada $\hat{p}$ momentum işlemcisidir [57,58].

Enerji için özel rölativite özdeşliği,

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (5.2)$$

şeklindedir. Buradan

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \quad (5.3)$$

dir. $\hbar = c = 1$ alındığında Eşitlik (5.2),

$$E^2 = m^2 + p^2 \quad (5.4)$$

şeklini alır. Enerji ve momentum işlemcileri,

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \hat{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \quad (5.5)$$

Eşitlik (5.4)' de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} i^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= (-i\vec{\nabla})^2 + m^2 \\ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= -\nabla^2 + m^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

şeklini alır [59,60]. Bunun Ψ dalga fonksiyonuna uygulanması

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = (-\nabla^2 + m^2) \Psi \quad (5.7)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right] \Psi = 0 \quad (5.8)$$

ya da

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - m^2 \right] \Psi = 0 \quad (5.9)$$

sonucunu verir. $\Box$, D' Alambert işlemcisi

$$\Box = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \quad (5.10)$$

olmak üzere Eşitlik (5.9),

$$(\Box - m^2)\Psi = 0 \quad (5.11)$$

şeklini alır ve bu eşitlik Klein-Gordon denklemi olarak adlandırılmaktadır [16].

Klein-Gordon denkleminin oktonyon temsiliinde Cayley-Dickson yönteminden yararlanılmaktadır. Bu yöntemde oktonyonlar, kuaterniyonların katlanması (doubling) ile elde edilmektedir. Cayley-Dickson çarpımı daha önce Eşitlik (2.15) ile verilmiştir.

Klein-Gordon işlemcisi, iki oktonyon işlemcisinin çarpımı olarak,

$$\Box - m^2 = \left(\frac{d}{d\mathbf{X}} + im\mathbf{e}_4 \right) \left(\frac{d}{d\mathbf{X}} - im\mathbf{e}_4 \right) \quad (5.12)$$

olarak yazılabilir. m , temel parçacığın kütlesidir. Burada, aşağıda verilen kuaterniyon işlemcilerinden yararlanılmıştır:

$$\frac{d}{d\mathbf{X}} = -i \frac{\partial}{\partial X_0} - \nabla, \quad (5.13.a)$$

$$\frac{d}{d\mathbf{X}} = -i \frac{\partial}{\partial X_0} + \nabla \quad (5.13.b)$$

Spini 0, 1/2, 1 olan parçacıklar için birinci mertebeden rölativistik dalga denklemi oktonyon cebrinde,

$$\left(\frac{d}{d\mathbf{X}} + im\mathbf{e}_4 \right) (\Psi_1 + \Psi_2)\mathbf{e}_4 = 0 \quad (5.14)$$

olarak yazılır. Burada Ψ_1 ve Ψ_2 kompleks kuaterniyondur.

Kuaterniyon notasyonunda Lorentz dönüşümleri aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{S}\mathbf{A}'\mathbf{S}^* \quad (5.15.a)$$

$$\mathbf{B}'' = \mathbf{S}\mathbf{A}''\mathbf{S}^* \quad (5.15.b)$$

Burada $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$, $\mathbf{B}'$, $\mathbf{B}''$ Minkowski uzayında 4-vektörü temsil eden kompleks kuaterniyonlardır ve

$$\overline{\mathbf{A}'}^* = -\mathbf{A}' \quad (5.16.a)$$

$$\mathbf{A}''^* = -\mathbf{A}'' \quad (5.16.b)$$

koşullarını sağlarlar. $\mathbf{A}'$, $\overline{\mathbf{A}'}$ ve $\mathbf{A}''$, $\overline{\mathbf{A}''}$,

$$\mathbf{A}' \overline{\mathbf{A}'} = \mathbf{B}' \overline{\mathbf{B}'} \quad (5.17.a)$$

$$\mathbf{A}'' \overline{\mathbf{A}''} = \mathbf{B}'' \overline{\mathbf{B}''} \quad (5.17.b)$$

dönüşümleri altında invaryanttır. $\mathbf{S}$, kompleks kuaterniyon formunda dönüşüm matrisi olup

$$\mathbf{S} \overline{\mathbf{S}} = I \quad (5.18)$$

koşulunu sağlar.

Spinor uzayında Lorentz gruplarının dönüşüm örnekleri

$$\boldsymbol{\psi}'_1 = \mathbf{S} \boldsymbol{\psi}_1 \quad (5.19.a)$$

$$\boldsymbol{\psi}'_2 = \mathbf{S} \boldsymbol{\psi}_2 \quad (5.19.b)$$

$$\boldsymbol{\psi}'_1{}^* = \overline{\boldsymbol{\psi}_1}^* \mathbf{S}^* \quad (5.19.c)$$

$$\boldsymbol{\psi}'_2{}^* = \overline{\boldsymbol{\psi}_2}^* \mathbf{S}^* \quad (5.19.d)$$

olarak tanımlanır.

Kuaterniyon formunda iki rölativistik invaryant spinor denklem sistemi, Eşitlik (5.14)'deki oktonyon formundaki denklemden yazılır:

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}_1}{dX} = im\boldsymbol{\psi}_2^* \quad (5.20.a)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}_2}{dX} = -im\boldsymbol{\psi}_1^* \quad (5.20.b)$$

$$\mathbf{a.} \quad \boldsymbol{\psi}_2 \rightarrow \overline{\boldsymbol{\psi}_2}^*$$

Eğer $\boldsymbol{\psi}_2 = -\mathbf{e}_3 \boldsymbol{\psi}_1^*$ ise Eşitlik (5.20.a-b)' den kuaterniyon cebri açısından Dirac denkleminin diğer olası formu elde edilmektedir.

b. Spini 0 ve 1 olan parçacıklar için kuaterniyon formundaki Eşitlik (5.20.a-b)' de aşağıdaki ifadeler kullanılır:

$$\sigma = 0 \text{ için } \boldsymbol{\psi}_2 \rightarrow -\varphi, \quad \boldsymbol{\psi}_1 = \varphi' = \frac{1}{i\mu} \frac{d\varphi}{dx}$$

Burada $\varphi = \varphi(x)$ skaler alan, μ ise skaler alanın kütesidir.

c. $\sigma = 1$ için $\Psi_1 \rightarrow \frac{F}{i\kappa}$, $\Psi_2 \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$ olup burada κ , vektör alanın

kütlesidir. $\mathbf{A} = i\mathbf{A}_0 + \bar{\mathbf{A}}$ 4-vektör potansiyel, $\mathbf{F} = -(\mathbf{dA/dX})$ ise $\mathbf{F} + \bar{\mathbf{F}} = 0$ koşuluna uyan kompleks kuaterniyondur ve bunlar Lorentz dönüşüm özelliklerini sağlarlar [42]:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{S}^* \bar{\mathbf{F}} \mathbf{S}^*, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{S} \mathbf{A} \bar{\mathbf{S}}^* \quad (5.21)$$

5.2. Dirac Denkleminin Oktonyon Temsili

Dirac denklemi 1928' de Paul Dirac tarafından formüle edilmiş olan rölativistik kuantum mekaniksel dalga denklemdir. Özel rölativite teorisi ile kuantum mekaniğini bağdaştıran bu denklem elektron gibi spini 1/2 olan elementer parçacıkların tanımlanmasını sağlar. Dirac denkleminin en önemli niteliklerinden birincisi elektron spinini kendiliğinden içeriyor olmasıdır. İkincisi ise anti-parçacıkların varlığını gerektirmesidir. Eğer Ψ bir elektrona karşı geliyor denirse Dirac denklemi elektronla aynı kütleye sahip fakat zıt elektrik yüklü bir parçacığı da aynı anda tarif etmektedir. Dirac denklemi yazıldığı sırada varlığı bilinmeyen böyle bir parçacık ilk kez 1932' de gözlenmiş ve pozitron olarak adlandırılmıştır.

Dirac, momentumda lineer olarak rölativistik bir dalga denklemi elde etmek için Eşitlik (5.2)' de verilen rölativistik enerji ifadesinin karekökünü işlemci anlamında almaya çalışmıştır. Eğer $\alpha_1 cp^1 + \alpha_2 cp^2 + \alpha_3 cp^3 + \beta mc^2$ gibi bir lineer işlemci tanımlar ve bunun karesinin E^2 ' ye eşit çıkmasını isterse, $\bar{\alpha}$ ve β olarak gösterilen niceliklerin aşağıdaki bağıntıları sağlaması gerektiği Dirac tarafından bulunmuştur [61]:

$$\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1 = \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 = \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1$$

Momentum uzayında serbest elektron için Dirac denklemi,

$$\mathbf{P}\Psi = (p_0 - \vec{p} \cdot \bar{\alpha} - m\beta)\Psi = \begin{pmatrix} p_0 - m & -\vec{p} \cdot \bar{\sigma} \\ -\vec{p} \cdot \bar{\sigma} & p_0 + m \end{pmatrix} \Psi = 0 \quad (5.22)$$

olup bu denklem oktonyon formunda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mathcal{P}\boldsymbol{\Psi} = (p_0 + i\vec{p} \cdot \hat{\mathbf{e}} + im\mathbf{e}_4)\boldsymbol{\Psi} = 0 \quad (5.23)$$

Ayrıca,

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} = -i\hat{\mathbf{e}}_k \quad (5.24.a)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\mathbf{e}_4 \quad (5.24.b)$$

dir.

$\mathcal{P}$ oktonyonu hermitiktir ($\mathcal{P} = \mathcal{P}^\dagger$) ve normu sıfırdır.

$$\mathcal{P}\bar{\mathcal{P}} = N(\mathcal{P}) = p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 = 0 \quad (5.25)$$

Oktonyonik Dirac denkleminin Eşitlik (5.23)' deki $\boldsymbol{\Psi}$ çözümü $\mathbf{p}$ ' nin eşleniği ile verilir:

$$\boldsymbol{\Psi} = \bar{\mathcal{P}} = p_0 - i\vec{p} \cdot \hat{\mathbf{e}} - im\mathbf{e}_4 \Leftrightarrow \boldsymbol{\Psi} \Rightarrow \bar{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} p_0 - m & \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & p_0 - m \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

$\boldsymbol{\Psi}$ ' nin birinci ve ikinci sütunu $u^1(\mathbf{p})$ ve $u^2(\mathbf{p})$ pozitif enerji çözümünü verir, m ile $-m$ yer değiştirdiğinde ise üçüncü ve dördüncü sütunlar negatif enerji çözümünü vermektedir:

$$\begin{aligned} (p_0 - \vec{p} \cdot \vec{\alpha} - m\beta)u^i(\mathbf{p}) &= 0 \\ (p_0 - \vec{p} \cdot \vec{\alpha} + m\beta)v^i(\mathbf{p}) &= 0 \end{aligned} \quad i = 1, 2 \quad (5.27)$$

Buradan fiziksel ve normalize edilmiş çözümler aşağıdaki gibi verilir;

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_p &= \langle u^1 | u^2 | v^1 | v^2 | \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m(p_0 + m)}} \begin{pmatrix} p_0 + m & \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & p_0 + m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{p_0 + m - i\vec{p} \cdot \hat{\mathbf{e}}}{\sqrt{2m(p_0 + m)}} \end{aligned} \quad (5.28)$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{u}^i(\mathbf{p})u^j &\equiv u^{i\dagger}(\mathbf{p})\beta u^j(\mathbf{p}) = \delta_{ij} \\ \bar{v}^i(\mathbf{p})v^j &\equiv v^{i\dagger}(\mathbf{p})\beta v^j(\mathbf{p}) = -\delta_{ij} \end{aligned} \quad i = 1, 2 \quad (5.29)$$

sağlanır [26].

6. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Oktonyonlar, 8-boyutlu ve sekiz bileşene sahip bölüm cebridir. Dual kuaterniyonlar ve kompleks kuaterniyonlar ile bileşen açısından benzerlik gösteriyor ise de, oktonyon cebrinde değişme özelliğinin yanısıra birleşme özelliği de bulunmamaktadır. Kompleks kuaterniyon ve dual kuaterniyonlar belirli koşullar altında 4-boyutlu sayının sekiz bileşenli bir formda yazılımıdır. Kompleks oktonyonlar ise, kompleks kuaterniyonlarda olduğu gibi reel bileşenlerin kompleks sayı ile yer değiştirmesi sonucunda elde edilir ve yine sekiz boyuta sahiptir. Bileşen sayısı sedenionlarda olduğu gibi onaltıdır.

Oktonyon cebrinin elektromanyetik teoriye uygulanması ile ilgili işlemlerde iki farklı baz elemanı çarpımı kullanılmıştır. Bilindiği gibi oktonyonların tanımlı birçok farklı baz elemanı çarpımı vardır. Uzay-zaman işlemcisi nabla tanımlandıktan sonra, alan, kaynak ve potansiyel oktonyonları tanımlanmış, sırasıyla genel oktonyonik alan, potansiyel ve kaynaktan bağımsız alanlar için dalga denklemi elde edilmiştir. Daha sonra alan ve kaynak oktonyonlarında gerekli bileşenlerin değiştirilmesiyle manyetik tek kutup ve boşluk için Maxwell denklemleri yine oktonyon formunda yazılmıştır. Bu işlemler ile Maxwell benzeri alan denklemleri sekiz boyutlu bir cebir kullanılarak tekrar formüle edilmiştir.

Genel alan denklemi olarak verilen eşitlik, k_0 ' ın sıfır olmadığı genişletilmiş Maxwell denklemi, fotonun kütesinin sıfır olmadığı durumda geçerlidir. Fotonun durgun kütesinin sıfıra yaklaştığı söylenir, ama aynı zamanda foton hiçbir zaman durgun olmamaktadır. Durgun kütesi sıfıra yaklaşan parçacıklar gibi foton da ışık hızıyla hareket etmektedir. Foton açısından kütle, kinetik enerji olarak değerlendirilmektedir. Fotonun kütleli ve kütesiz olduğu şimdiye kadar deneysel olarak kararlaştırılamamıştır. Ancak kütesinin tam olarak sıfır ya da ihmal edilebilecek kadar küçük olduğu muhtemel gözükmektedir.

Manyetik tek kutbun varlığı da günümüz koşullarında halen bilinmemektedir. Parçacık için oluşturulan modellerde, manyetik tek kutup teorisi de yer almaktadır. 't Hooft-Polyakov tek kutbu' nun en yakın çözüm olduğu ve ortaya çıkma olasılığından bahsedilmektedir.

Vektör notasyonu kullanılarak iki denklem ile yazılan genel alan denklemi, dört denklem ile yazılan potansiyel denklemi ve yine dört denklem ile yazılan hem manyetik tek kutup, hem de boşluk için Maxwell denklemleri kompleks kuaterniyonlarda olduğu gibi oktonyon cebri ile de tek bir denklem ile ifade edilebilmektedir. Bu gösterim açısından kolay, kullanışlı ve tüm denklemleri bir arada tanımlama imkanı sağlamaktadır. Ayrıca baz elemanlarının çarpımlarının her iki yöntemle de farklı olması; diferansiyel işlemci, alan, potansiyel ve kaynak için tanımlanan ifadelerde değişikliğe yol açmaktadır. Baz elemanların çarpımı için hangi yöntem alınırsa alınsın, elde edilen denklemler vektörel, kuaterniyonik, kompleks kuaterniyonik formdaki eşitliklerle aynı formdadır.

Oktonyon cebrinin kuantum mekaniği temsillerinde ilk olarak spini 0, $\frac{1}{2}$ ve 1 olan parçacıklar için birinci mertebeden rölativistik dalga denkleminin formüle edilmesine yer verilmiştir. Birinci mertebeden rölativistik dalga denklemi Cayley-Dickson yöntemi ile kompleks kuaterniyonların katlanması ve Klein-Gordon denklemini çarpanlara ayrılması ile temsil edilmektedir [42]. Daha sonra bugün de büyük önem taşıyan Dirac denkleminin oktonyon temsiline yer verilmiştir [26].

Oktonyon cebri yüksek boyut içerdiğinden daha çok yüksek enerji fiziği uygulamalarında yer bulmaktadır. Birleşme özelliğinin olmamasından dolayı ikiden fazla oktonyonun çarpımında sıra önem kazanmaktadır. Kuaterniyonlarda olduğu gibi tanımlı matris temsili de yoktur, Zorn matris temsillerinden yararlanılmaktadır, bu da yine birleşme özelliğinin olmamasından kaynaklanmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] BENKART, G. ve PEREZ-IZQUIERDO, J.M., *A quantum octonion algebra*, Transactions of The American Mathematical Society, **352**, 935-968 (1999).
- [2] BREMNER, M., *Quantum octonions*, Communications in Algebra, **27**, 2809-2831 (1999).
- [3] LEO, S.D. ve ROTELLI, P., *Translations between quaternions and complex quantum mechanics*, Progress of Theoretical Physics, **92**, 917-926 (1997).
- [4] BERNEVIG, B.A., HU J., TOUMBAS N. ve ZHANG S.C., *Eight-dimensional quantum Hall effect and octonions*, Physical Review Letters, **91**, 236803 (2003).
- [5] LEO, S.D. ve ABDEL-KHALEK, K., *Octonionic Dirac equation*, Progress of Theoretical Physics, **96**, 833-845 (1996).
- [6] LEO, S.D. ve ABDEL-KHALEK, K., *Octonionic quantum mechanics and complex geometry*, **96**, 823-831 (1996).
- [7] http://arxiv.org/PS_cache/hep-th/pdf/0505/0505101.pdf
- [8] MARQUES, S., *The Dirac equation in a non-Riemannian Manifold. I. An analysis using the complex algebra*, Journal of Mathematical Physics, **29**, 2127-2131 (1988).
- [9] MARQUES-BONHAM, S., *The Dirac equation in a non-Riemannian manifold III: An analysis using the algebra of quaternions and octonions*, Journal of Mathematical Physics, **32**, 1383-1394 (1991).
- [10] MARQUES-BONHAM, S., *The Dirac equation in a non-Riemannian manifold: II. An analysis using an internal local n-dimensional space of Yang-Mills type*, Journal of Mathematical Physics, **31**, 1478-1482 (1990).
- [11] DAVIES, A.J. ve JOSHI, G.C., *A bimodular representation of ten-dimensional fermions*, Journal of Mathematical Physics, **27**, 3036-3039 (1986).

- [12] EDMONDS, J.D., *Nature's unnatural numbers: an octonion-based extension of the Dirac/Clifford algebra and Dirac/Maxwell equations*, Physics Essays, **5**, 56-60 (1992).
- [13] LUKIERSKI, J. ve TOPPAN, F., *Generalized space-time supersymmetries, division algebras and octonionic M-theory*, Physics Letters B, **539**, 266-276 (2002).
- [14] LUKIERSKI, J. ve TOPPAN, F., *Octonionic M-theory and D=11 generalized conformal and superconformal algebras*, Physics Letters B, **567**, 125-132 (2003).
- [15] LUKIERSKI, J. ve TOPPAN, F., *The symmetry algebras of Euclidean M-theory*, Physics Letters B, **584**, 315-322 (2004).
- [16] ADLER, L.A., *Quaternionic quantum mechanics and quantum fields*, Oxford University Press, New York, USA (1995).
- [17] KURDGLAIDZE, D.F., *Classical theory of the octonian field*, Russian Physics Journal, **29**, 1001-1005 (1986).
- [18] KURDGLAIDZE, D.F., *Fundamentals of nonassociative classical field theory*, Soviet Physics Journal, **29**, 883-887 (1986).
- [19] GÜRSEY, F., *On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics*, World Scientific, Singapore (1996).
- [20] OKUBO, S., *Introduction to octonion and other non-associative algebras in physics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1995).
- [21] LOUNESTO, P., *Clifford algebras and spinors*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1997).
- [22] SILAGADZE, Z.K., *Feynman's derivation of Maxwell equations and extra dimensions*, Annales de la Fondation Louis de Broglie, **27**, 241-255 (2002).
- [23] GAMBA, A., *Maxwell's equations in octonion form*, Il Nuovo Cimento A, **111**, 293-299, (1998).
- [24] ÖZDAŞ, K., *Bölüm cebirleri ve bunların fiziksel uygulamaları*, Anadolu Üniversitesi Yayınları, Eskişehir (1995).
- [25] <http://en.wikipedia.org/wiki/Octonion>

- [26] DABOUL, J. ve DELBOURGO, R., *Matrix representation of octonions and generalizations*, Journal of Mathematical Physics, **40**, 4134-4150 (1999).
- [27] <http://www.geocities.com/zerodivisor/orepresentation.html>
- [28] BAEZ, J.C., *The octonions*, Bulletin American Mathematical Society, **39**, 145-205 (2002).
- [29] http://arxiv.org/PS_cache/hep-th/pdf/0302/0302079.pdf
- [30] TIAN, Y., *Matrix representations of octonions and their applications*, Advances in Applied Clifford Algebras, **10**, 61-90 (2000).
- [31] <http://www.math.hmc.edu/seniorthesis/archives/2000/ysong/ysong-2000-thesis.pdf>
- [32] CONWAY, H.C. ve SMITH, A.S., *On quaternions and octonions: Their geometry, arithmetic, and symmetry*, A K Peters, Natick, USA (2003).
- [33] ABLAMOWICZ, R., LOUNESTO, P. ve PARRA, J.M., *Clifford Algebras with numeric and symbolic computations*, Birkhaerger, Boston, USA (1996).
- [34] DICKSON, G.M., *Division algebras: octonions, quaternions, complex numbers, and the algebraic designs of physics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands (1994).
- [35] IMAEDA, K. ve IMAEDA, M., *Sedenions: algebra and analysis*, Applied Mathematics and Computation, **115**, 77-88 (2000).
- [36] LEO, S.D. ve ABDEL-KHALEK, K., *Toward an octonionic world*, International Journal of Theoretical Physics, **37**, 1945-1985 (1998).
- [37] LOHMUS, J., PAAL, E. ve SORGSEPP, L., *About nonassociativity in mathematics and physics*, Acta Applicandae Mathematicae, **50**, 3-31 (1998).
- [38] BENKART, G.M., BRITTEN, D.J. ve OSBORN, J.M., *Real flexible division algebras*, Canadian Journal of Mathematics, **34**, 550-588 (1982).
- [39] SCRAY, J. ve MANOGUE, C.A., *Octonionic representations of Clifford Algebras and triality*, Foundations of Physics, **26**, 17-70 (1996).

- [40] SPRINGER, T.A. ve VELDKAMPF, F.D., *Octonions, Jordan algebras and exceptional groups*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, (2000).
- [41] <http://www.innerx.net/personal/tsmith/NDalg.html>
- [42] BOGOUSH, A.A. ve KUROCHKIN, Y.A., *Cayley-Dickson procedure, relativistic wave equations and supersymmetric oscillators*, Acta Applicandae Mathematicae, **50**, 121-129 (1998).
- [43] BISHT, P.S. ve NEGI, O.P.S., *Split octonion electrodynamics*, Indian Journal of Pure&Applied Physics, **31**, 292-296 (1993).
- [44] BISHT, P.S. ve NEGI, O.P.S., *Unified split octonions fields of dyons and gravito-dyons*, Indian Journal of Pure&Applied Physics, **32**, 183-185 (1994).
- [45] NEGI O.P.S., BISHT S. ve BISHT P.S., *Revisiting quaternion formulation and electromagnetism*, Il Nuovo Cimento B, **113**, 1449-1467 (1998).
- [46] <http://www.info.global-scaling-verein.de/Documents/QuaternionsInElectrodynamicsEN01.PDF>
- [47] <http://www.rhfweb.com/scalarwaveElectrodynamicsWithTheScalarField03.pdf>
- [48] http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0004/0004005.pdf
- [49] HOFFT, G. (Çeviri: Mehmet Koca, Nazife Özdeş Koca), *Maddenin son yapıtaşları*, Tübitak, Ankara (1996).
- [50] TOLAN, T., ÖZDAŞ, K. ve TANIŞLI, M., *Octonionic formulation of the classical electromagnetic field*, 23rd International Physics Congress, Muğla, Türkiye, 382-387 (2005).
- [51] MAJERNIK, V., *Quaternionic formulation of the classical fields*, Advances in Applied Clifford Algebras, **9**, 119-130 (1999).
- [52] MAJERNIK, V. ve NAGY, M., *Quaternionic form of Maxwell's equations with sources*, Lettere Al Nuovo Cimento, **16**, 265-268 (1976).
- [53] MAJERNIK, V., *A Cosmological constant interpreted as the field energy of a quaternionic field*, General Relativity and Gravitation, **35**, 1833-1839 (2003).

- [54] DERELİ, T. ve VERÇİN, A., *Kuantum mekaniği 2*, ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş., Ankara (2000).
- [55] http://en.wikipedia.org/wiki/Klein-Gordon_Equation
- [56] http://encyclopedia.laborlawtalk.com/Klein-Gordon_equation
- [57] KARAOĞLU, B., *Kuantum mekaniğine giriş*, Bilgi Tek Yayıncılık, İstanbul (1994).
- [58] DERELİ, T. ve VERÇİN, A. *Kuantum mekaniği 1*, ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş., Ankara (1998).
- [59] BJORKEN, J.D. ve DRELL, S.D., *Relativistic quantum mechanics*, McGraw-Hill Book Company, USA, (1964).
- [60] LIBOFF, R.L., *Introductory quantum mechanics*, Addison Wesley Longman, USA (1998).
- [61] DERELİ, T., *Soyut cebirler ve fizikte simetri yasaları*, Bilim ve Teknik Dergisi, Tübitak, Ankara (1992).