T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HELMHOLTZ DENKLEMİ VE ONBİR KOORDİNAT SİSTEMİNDE ÇÖZÜMÜ

OĞUZ BAĞRAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DANIŞMAN

YRD. DOÇ. DR. CENGİZ DANE

Edirne 2007

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HELMHOLTZ DENKLEMİ VE ONBİR KOORDİNAT SİSTEMİNDE ÇÖZÜMÜ

OĞUZ BAĞRAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Bu Tez / / 2007 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından Kabul Edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Cengiz DANE **Prof. Dr. Hasan AKBAŞ**
(Danışman) **(Üye)**

Prof. Dr. Hülya İŞCAN
(Üye)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET … …………...…………………………………………………………i

SUMMARY …………………………………………………………...….ii

ÖNSÖZ …………………………………………………………………..……iii

I. BÖLÜM

1.1 Giriş**………………………………………………………...1**

1.2. Eğrisel Koordinatlar**……………………………………..2**

1.3. Ortagonal Koordinat Sistemleri**……………….……………..7**

1.4. Gradyent, Diverjans, Rotasyonel ve Laplasyenin Ortagonal Eğrisel Koordinatlardaki İfadeleri**………………9**

II. BÖLÜM

2.1. Kartezyen koordinatlar**……………………………………..12**

2. 2. Dairesel Silindirik Koordinatlar**……………………………15**

2.3 Eliptik Silindirik Koordinatlar**…………………………...18**

2.4. Parabolik Silindirik Koordinatlar**…………………………..22**

2.5 Küresel Koordinatlar**………………………………………..25**

2.6 Prolate Küresel Koordinatlar**………………………………..28**

2.7 Oblate Küresel Koordinatlar**……………………………...32**

2.8. Parabolik Koordinatlar**……………………………………....36**

2.9. Konikal Koordinatlar**………………………………….....40**

2.10. Elipsoidal Koordinatlar**……………………………………..45**

2.11. Parabolidial Koordinatlar**…………………………………...63**

III. BÖLÜM

3.1. Helmholtz Denklemi**……………………………………….56**

3.2. Basit Ayrıştırma ve Stackel Matris**……………………...63**

IV. BÖLÜM

Helmholtz Diferansiyel Denkleminin

4.1. Kartezyen koordinatlarda çözümü……………………………...**63**

4.2. Dairesel Silindirik Koordinatlarda çözümü………………**67**

4.3. Eliptik Silindirik Koordinatlarda çözümü…………….…..**72**

4.4. Parabolik Silindirik Koordinatlarda çözümü……..………**76**

4.5. Küresel Koordinatlarda çözümü……………………………..**80**

4.6. Prolate Küresel Koordinatlarda çözümü………………….**83**

4.7. Oblate Küresel Koordinatlarda çözümü.....………………**85**

4.8. Parabolik Koordinatlarda çözümü…………………..…....**87**

4.9. Konikal Koordinatlarda çözümü…………….……........**89**

4.10. Elipsoidal Koordinatlarda çözümü……………….….. …**92**

4.11. Paraboloidal Koordinatlarda çözümü……………….….…**95**

TARTIŞMA…………………………………………………………..….97

SİMGELER DİZİNİ………………………………………………….98

KAYNAKLAR………………………………………………………...99

ÖZGEÇMİŞ………………………………………………………..102

ÖZET

Doğadaki olayları açıklamak için en etkin ve sistematik yol Diferansiyel Denklem dilini kullanmaktır. Fizik, Kimya, Biyoloji, Astroloji, Mühendislik, Ekonomi ve diğer pek çok Uygulamalı Bilimler, Diferansiyel Denklemlerin önemli uygulama alanlarıdır. Bunun dışında, matematiğin kendi içinde de diferansiyel denklemlerin önemli bir yeri vardır.

Diferansiyel Denklemler ve koordinat sistemleri birbirleri ile yakından ilişkilidirler. Özellikle denklemlerin çözümlerinin bulunması denklemlerin koordinat sistemlerinde uygun ifade edilmelerine bağlıdır.

Çalışmanın I. Bölümünde Eğrisel Koordinatlar ve Ortogonal Koordinat Sistemleri hakkında genel kavramlar ile Gradyent, Diverjans, Rotasyonel ve Laplasyen ifadeleri verilmiştir.

II. Bölümde Özel Ortogonal Koordinat Sistemleri tanıtılarak özellikleri irdelenmiştir.

III. Bölümde Helmholtz Denklemi tanıtılmış, Stackel Matris ve Helmholtz Denkleminin Basit Ayrıştırması irdelenmiştir.

IV. Bölümde Helmholtz Denkleminin Özel Koordinat Sistemlerinde Çözümü verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Eğrisel Koordinatlar, Helmholtz Denklemi, Ayrıştırma.

SUMMARY

In order to explain the events in the nature, the most effective and systematic way is to use the language of Differential Equation. Physics, Chemistry, Biology, Astrnomy, Engineering, Economics and many other practical Applied Sciences are the important fields for application of Differential Equation. A part from these, differential equation have an important place in mathematics itself.

Differential Equations and coordinate systems are closely related to each other. Especialy, finding the solutions of equations depens on the appropriate expression of the equations in coordinate systems.

In the first chapter of this study, the general concepts about Curvilinear Coordinates ant Orthogonal Coordinate Sysstems are given and the terms Gradient, Divergence, Rotational and Laplacian are determined.

In the second chapter, Special Orthogonal Coordinate Systems are given and their characteristics are studied.

In the third chapter, Helmholtz Equations is given and the Basic Separation of Helmholtz Equations and Stackel Matrix are studied.

In the fourth chapter, The Solution of the Helmholtz Equation in Special Coordinate Systems are given.

Key words: Curvilinear Coordinates, Helmholtz Equation, Separation.

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca her türlü yardımlarını esirgemeyen ve çalışmamın ortaya çıkmasında emeği geçen hocam Yrd. Doç. Dr. Cengiz DANE’ye teşekkürlerimi sunarım.

Hem yardımları hem de manevi desteğiyle yanımda olan başta Prof. Dr. Hülya İŞCAN olmak üzere tüm Matematik Bölümüne şükranlarımı sunarım.

En başından beri beni destekleyen ve daima yanımda olan sevgili eşime ve aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

I.BÖLÜM

1.1 GİRİŞ

Matematik doğayı anlama ve anlatmada çok yararlı bir dildir. Örneğin bugün insanların gözlerinin ve saçlarının rengi gibi somut özelliklerinin incelenmesi, gök cisimlerinin hareketlerinden atom altı parçacıklarının hareketlerinin açıklaması gibi olaylar ve kavramlar matematik dili ile ifade edilirler. Doğa ile matematik arasındaki ilişkiyi açıklamak doğadaki düzenin bilinmesi ve bu düzenin nasıl çalıştığının anlaşılması veya doğa sisteminin matematiksel olarak modellenmesi açısından önemlidir.

Matematiksel model söz konusu olduğunda genellikle diferansiyel denklem veya diferansiyel denklem sistemleri ile karşılaşırız. Matematiksel modellerle formüle edilen ve diferansiyel denklemlere dönüştürülebilen olayların analizi genellikle bu diferansiyel denklemlerin çözümü olan fonksiyonların incelenmesi ile yapılır.

Diferansiyel denklemlerin matematiksel ifadeleri denklemlerin karakterize edildiği koordinat sistemleri ile yakından ilgilidir. Bir denklem bir koordinat sisteminde uzun ve karmaşık matematik ifadelerle belirtildiği halde, uygun bir koordinat sisteminde aynı denklem daha özlü bir biçimde ifade edilebilir ve çözümleri tam olarak elde edilir. Fizik, Mühendislik ve Uygulamalı Bilimlerde sıkça karşılaştığımız denklemlerden Laplace, Poisson, Difizyon ve Dalga Denklemleri gibi denklemler benzer karaktere sahip denklemlerdir. Bu denklemler Helmholtz Denklemi olarak bilinen ve çözümlerini inceleyebildiğimiz bir özel denkleme dönüştürülebilen denklemlerdir.

$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$ Helmholtz Denkleminin çeşitli koordinat sistemlerinde yapılan çözümleri, yukarıda belirtilen denklemlerin çözümlerinin bulunması ve bu çözümlerin analizi açısından önemlidir.

Bu çalışmada on bir koordinat sistemi incelenmiş ve bu sistemlerde Helmholtz Diferansiyel Denkleminin ayrıştırması yapılarak çözümleri bulunmuştur.

KOORDİNAT SİSTEMLERİ

1.2.Eğrisel Koordinatlar

(x,y,z) Bir noktanın koordinatları olmak üzere,

$f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z),\ f_3(x,y,z)$ verilmiş bölgede x,y,z nin sürekli fonksiyonları olsun.

$$u^1 = f_1(x,y,z), \qquad u^2 = f_2(x,y,z), \qquad u^3 = f_3(x,y,z) \tag{1.2.1}$$

denklemleri de x,y,z ye göre çözülerek

$$x = g_1(u^1,u^2,u^3), \qquad y = g_2(u^1,u^2,u^3), \qquad z = g_3(u^1,u^2,u^3) \tag{1.2.2}$$

yazılabilsin. Ayrıca g_1,g_2,g_3 fonksiyonları da u^1,u^2,u^3 ün fonksiyonları olsun. O zaman bölge içindeki koordinatları (x,y,z) olan her P noktasına bir (u^1,u^2,u^3) değer takımı karşılık gelir. Bu u^1,u^2,u^3 fonksiyonlarına P noktasının eğrisel koordinatları, $(1.2.1)$ ve $(1.2.2)$ denklemlerine koordinat dönüşümü denklemleri denir.

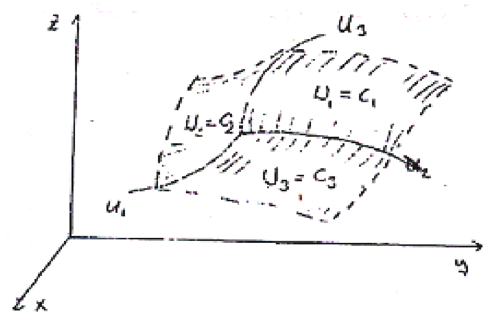
Her (x,y,z) değer takımına tek bir (u^1,u^2,u^3) değer takımı veya her (u^1,u^2,u^3) değer takımına tek bir (x,y,z) değer takımı karşı gelmesi için u^1,u^2,u^3 ü x,y,z nin sürekli ve türevi alınabilen fonksiyonları, x,y,z yi de u^1,u^2,u^3 ün sürekli ve türevi alınabilen fonksiyonları olarak kabul ediyoruz. Bununla beraber birçok hallerde bu koşulların sağlanmadığı özel noktalar da bulunur.

Her P noktasından koordinat yüzeyleri denilen

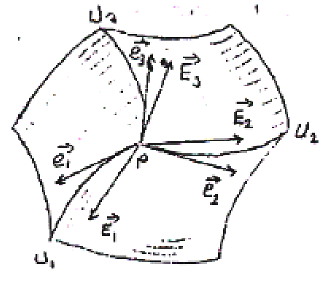
$$u^1 = c_1, \qquad u^2 = c_2 \qquad u^3 = c_3 \tag{1.2.3}$$

yüzeyleri geçer. Burada c_1,c_2,c_3 birer sabiti göstermektedir. Bu üç yüzey ikişer ikişer koordinat eğrileri denilen üç eğri boyunca kesişirler. Şekil $(1.2.1)$ ve Şekil $(1.2.2)$

Her koordinat yüzeyi üzerinde bir koordinat sabit, diğer ikisi değişkendir. Örneğin $u^1 = c_1$ yüzeyi üzerinde her yerde u^1, sabit c_1 değerine eşit olduğu halde u^2 ile u^3 noktadan noktaya değişik değerler alır. Bir yüzey sabit olan koordinatın adı ile adlandırılır.



Şekil $(1.2.1)$



Şekil $(1.2.2)$

Başlangıç noktasını değişken $P(x, y, z)$ noktasına birleştiren $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ yer vektörü $(1.2.2)$ bağıntıları yardımı ile u^1, u^2, u^3 değişkenlerinin fonksiyonu olarak

$$\vec{r} = \vec{r}\left(u^1, u^2, u^3\right) \qquad (1.2.4)$$

şeklinde yazılır. $\vec{r}$ fonksiyonun u^1 e göre kısmi türevi, u^2 ve u^3 sabit tutularak, yani P noktası u^1 eğrisi üzerinde değiştirilerek elde edilir. $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}$, u^1 eğrisine P noktasında teğet olan bir vektördür. Buna göre u^1 in P noktasındaki teğeti doğrultusundaki birim vektörü $\vec{e}_1$ ile gösterilirse,

$$\vec{e}_1 = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}\right|} \qquad (1.2.5)$$

olur. Eğer

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}\right| = h_1 \qquad (1.2.6)$$

ile gösterilirse

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} = h_1 \vec{e}_1 \qquad (1.2.7)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\vec{e}_2$ ile $\vec{e}_3$ sırası ile u^1 ve u^3 eğrilerinin P noktasındaki teğetleri yönündeki birim vektörleri gösterirse

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}\right| = h_2 \qquad \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^3}\right| = h_3 \tag{1.2.8}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} = h_2 \vec{e}_2 \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^3} = h_3 \vec{e}_3 \tag{1.2.10}$$

şeklinde yazılır. h_1, h_2, h_3 büyükleri metrik katsayılar olarak adlandırılır. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birim vektörlerinin yönleri sırası ile artan u^1, u^2, u^3 yönlerindedir. Sekil(1.2)

$\vec{\nabla} u^1$, P noktasında $u^1 = c_1$ yüzeyinin normali doğrultusunda bir vektördür. $u^1 = c_1$ yüzeyi normali doğrultusundaki birim vektörünü $\vec{E}_1$ ile gösterirsek,

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{\nabla} u_1}{\left|\vec{\nabla} u_1\right|} \tag{1.2.11}$$

yazılabilir. Benzer şekilde $u^2 = c_2$ ve $u^3 = c_3$ yüzeylerinin normalleri doğrultusundaki birim vektörleri $\vec{E}_2$ ve $\vec{E}_3$ ile gösterilirse

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{\nabla} u^2}{\left|\vec{\nabla} u^2\right|} \quad \text{ve} \quad \vec{E}_3 = \frac{\vec{\nabla} u^3}{\left|\vec{\nabla} u^3\right|} \tag{1.2.12}$$

yazılır. Gerek $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ birim vektörlerinin, gerekse $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ birim vektörlerinin yönleri bu vektör takımları bir sağ el vektör sistemi meydana getirecek şekilde seçilir.

Eğrisel sistemin her keyfi P noktasında, u^1, u^2, u^3 koordinat eğrilerinin teğetleri yönünde olan $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ diğeri $u^1 = c_1$, $u^2 = c_2$ $u^3 = c_3$ koordinat yüzeylerinin normalleri yönünde olan $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ gibi iki sağ el birim vektör takımı vardır. Genel olarak $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ile $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ vektör takımları birbirinden farklıdır. Ancak eğrisel koordinat sistemi ortogonal olursa bu iki vektör takımı özdeş olur.

Her keyfi $\vec{A}$ vektörü a_1, a_2, a_3 veya A_1, A_2, A_3 bileşenleri olmak üzere

$$\vec{A} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \tag{1.2.13}$$

$$\vec{A} = A_1\vec{E}_1 + A_2\vec{E}_2 + A_3\vec{E}_3 \qquad (1.2.14)$$

şeklinde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ veya $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ baz vektörleri cinsinden yazılabilir.

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ve $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ vektör takımları ayrı ayrı üç boyutlu uzayın genel olarak birbirinden farklı iki bazını oluştururlar.

Keyfi bir $\vec{A}$ vektörünü genel olarak büyüklükleri birim olmayan

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \qquad (1.2.15)$$

veya

$$\vec{\nabla}.u^1, \vec{\nabla}.u^2, \vec{\nabla}.u^3 \qquad (1.2.16)$$

baz vektörleri cinsinden yazmak mümkündür. $(1.2.15)$ ve $(1.2.16)$ baz vektörlerine üniter baz vektörleri denir. Bu baz vektörleri cinsinden $\vec{A}$ vektörü

$$\vec{A} = c_1\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} + c_2\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} + c_3\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^3} = c_1\overline{\alpha_1} + c_2\overline{\alpha_2} + c_3\overline{\alpha_3} \qquad (1.2.17)$$

$$\vec{A} = C_1\vec{\nabla}.u^1 + C_2\vec{\nabla}.u^2 + C_3\vec{\nabla}.u^3 = C_1\overline{\beta_1} + C_2\overline{\beta_2} + C_3\overline{\beta_3} \qquad (1.2.18)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\overline{\alpha_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \qquad \overline{\alpha_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} \qquad \overline{\alpha_3}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^3} \qquad (1.2.19)$$

$$\overline{\beta_1} = \vec{\nabla}.u^1, \qquad \overline{\beta_2} = \vec{\nabla}.u^2, \qquad \overline{\beta_3} = \vec{\nabla}.u^3 \qquad (1.2.20)$$

dır. C_1, C_2, C_3 bileşenlerine $\vec{A}$ vektörünün kovaryant, c_1, c_2, c_3 bileşenlerine de $\vec{A}$ vektörünün kontravaryant bileşenleri denir.

Kartezyen koordinatlarda yay uzunluğunun denklemini;

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (1.2.21)$$

şeklinde ifade edilir. Eğrisel koordinatlarda $d\vec{r}$ için diferansiyel tanımından,

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1}du^1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^3}du^3 = \alpha_1.du^1 + \alpha_2.du^2 + \alpha_3.du^3 \qquad (1.2.22)$$

elde edilir. $d\vec{r}$ nin bu değerini $(1.2.22)$ de yerine yazılırsa;

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} g_{ij} du^i du^j \qquad (1.2.23)$$

elde edilir. Burada

$$g_{ij} = \vec{\alpha}_i . \vec{\alpha}_j \qquad (1.2.24)$$

dir. g_{ij} ye metrik katsayıları denir. $g_{ij} = g_{ji}$ dir. Yani g_{ij} simetriktir. $(1.2.24)$ bağıntısı, temel kuadratik form veya metrik form olarak adlandırılır.

Eğer i ile j nin farklı değerleri çin g_{ij} =0 ise o zaman koordinat sistemi ortogonaldir. Ortogonal koordinat sistemleri için,

$$g_{ii} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 = h_i^2 \qquad (1.2.25)$$

dir. Burada i=1,2,3 değerleri için ayrı ayrı üç denklem elde edilir. Bu bağıntı h_1, h_2, h_3 metrik katsayılarının hesaplanmasında kullanılır.

1.3. Ortogonal Koordinat Sistemleri

1.4.

Eğer koordinat eğrileri her $P(x,y,z)$ noktasında bibirine dik ise u^1,u^2,u^3 eğrisel koordinatları ortogonaldir denir.

$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ $(1.2.5)$ de tanımlanan birim vektörler ve s_1,s_2,s_3; u^1,u^2,u^3 ün pozitif yönünde koordinat eğrileri boyunca ölçülen yay uzunluklarını göstermek üzere

$$ds^2 = ds_1{}^2 + ds_2{}^2 + ds_3{}^2 \tag{1.3.1}$$

şeklinde yazılır. Bu ifade h_1,h_2,h_3 metrik katsayıları cinsinden

$$ds^2 = h_1{}^2\left(du^1\right)^2 + h_2{}^2\left(du^2\right)^2 + h_3{}^2\left(du^3\right)^2 \tag{1.3.2}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca dik koordinat sistemleri için,

$$\begin{aligned} J &= \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^1}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^2}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^3}\right) \\ &= \frac{\partial\vec{r}}{\partial u^1}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^2}\,x\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^3}\right) \\ &= h_1\vec{e}_1.\left(h_2\vec{e}_2\ x\ h_3\vec{e}_3\right) \qquad (1.3.3) \\ &= h_1h_2h_3.\vec{e}_1\left(\vec{e}_2 x\vec{e}_3\right) \\ &= h_1h_2h_3 \end{aligned}$$

dir.

$\left(\nabla.u_1,\nabla.u_2,\nabla.u_3\right)$ vektör takımı $\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^1},\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^2},\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^3}\right)$ vektör takımı ile ters sistemler olduğundan ortogonal koordinat sistemleri için

$$\vec{\nabla}u^1 = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^2}\,x\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^3}\right) = \frac{1}{h_1h_2h_3} = \frac{\vec{e_1}}{h_1} \tag{1.3.4}$$

$$\vec{\nabla}u^2 = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^3}\,x\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^1}\right) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[h_3\vec{e_3}\ x\ h_1\vec{e_1}\right] = \frac{\vec{e_2}}{h_2} \tag{1.3.5}$$

$$\vec{\nabla}u_3 = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^1}\,x\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[h_1\vec{e_1}\ x\ h_2\vec{e_2}\right] = \frac{\vec{e_3}}{h_3} \tag{1.3.6}$$

dır.

Bu bağıntılar kullanılarak $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektörleri için,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_1} &= h_2 h_3 \overrightarrow{\nabla}.u^2 \text{ x } u^3 \\
\overrightarrow{e_2} &= h_3 h_1 \overrightarrow{\nabla}.u^3 \text{ x } u^1 \\
\overrightarrow{e_3} &= h_1 h_2 \overrightarrow{\nabla}.u^1 \text{ x } u^2
\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

bağıntıları bulunur.

1.4. Gradyent, Diverjans, Rotasyonel Laplasyen'in Ortogonal Eğrisel Koordinatlardaki İfadeleri

Bir f skaler fonksiyonun Gradyenti bir vektördür. Gradyent vektörünün $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ bazındaki bileşenleri f_1, f_2, f_3 ise

$$\vec{\nabla}.f = f_1\vec{e}_1 + f_2\vec{e}_2 + f_3\vec{e}_3 \qquad (1.4.1)$$

şeklinde ifade edilir.

f_1, f_2, f_3 bileşenleri nin eğrisel koordinatlar cinsinden ifadesi $\vec{r}$; u^1, u^2, u^3 ün fonksiyonu olmak üzere

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}du^1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_2}du^2 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_3}du^3 = h_1\vec{e_1}du^1 + h_2\vec{e_2}du^2 + h_3\vec{e_3}du^3 \qquad (1.4.2)$$

dır. Ayrıca

$$df = \vec{\nabla}f.d\vec{r} \qquad (1.4.3)$$

bağıntısından $(1.4.1)$ ve $(1.4.2)$ bağıntılarını kullanarak

$$df = h_1f_1du^1 + h_2f_2du^2 + h_3f_3du^3 \qquad (1.4.4)$$

elde edilir. Diğer taraftan f fonksiyonu (u^1, u^2, u^3) eğrisel koordinatlarının bir skaler fonksiyonu olduğu dikkate alınarak

$$df = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u^1}du^1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u^3}du^3 \qquad (1.4.5)$$

yazılır. $(1.3.4),(1.3.5),(1.3.6)$ ve $(1.4.5)$ bağıntılarından

$$f_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial u^i} \qquad i = 1,2,3 \qquad (1.4.6)$$

elde edilir. Bu değerler $(1.3.1)$ bağıntısında yerine konulursa f in gradyenti

$$\vec{\nabla}f = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u^1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u^2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u^3} \qquad (1.4.7)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\vec{\nabla}$ işlemcisinin dik eğrisel koordinatlardaki ifadesi

$$\vec{\nabla} = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial}{\partial u^2} + \frac{\vec{e}_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial u^3} \qquad (1.4.8)$$

olarak bulunur.

Eğrisel koordinatlardaki bileşenleri A_1, A_2, A_3 olan

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3 \tag{1.4.9}$$

vektör fonksiyonunun diverjansını hesaplamak için $(1.4.7)$ bağıntısını kullanarak

$$\vec{\nabla} f = \vec{\nabla}\left(A_1\vec{e}_1 + A_1\vec{e}_2 + A_1\vec{e}_3\right) \tag{1.4.10}$$

den

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\left(A_1\vec{e}_1\right) &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u^1}\left(A_1h_2h_3\right)\\
\vec{\nabla}\left(A_2\vec{e}_2\right) &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u^2}\left(A_2h_3h_1\right)\\
\vec{\nabla}\left(A_3\vec{e}_3\right) &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u^3}\left(A_3h_1h_2\right)
\end{aligned} \tag{1.4.11}$$

bulunur. $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ özel değerler için $(1.4.11)$ bağıntıları

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\vec{e}_1 &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u^1}\left(h_2h_3\right)\\
\vec{\nabla}\vec{e}_2 &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u^2}\left(h_3h_1\right)\\
\vec{\nabla}\vec{e}_3 &= \frac{1}{h_1h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u^3}\left(h_1h_2\right)
\end{aligned} \tag{1.4.12}$$

şeklini alır. Böylece keyfi bir $\vec{A}$ vektörünün eğrisel koordinatlardaki diverjansı

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(A_1h_3h_1\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(A_2h_3h_1\right) + \frac{\partial}{\partial u^3}\left(A_3h_1h_2\right)\right] \tag{1.4.13}$$

formunda elde edilir. Benzer şekilde keyfi bir $\vec{A}$ vektörünün rotastyoneli için $(1.3.4),(1.3.5),(1.3.6)$ bağıntılarından

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}x\left(A_1\vec{e}_1\right) &= \frac{\vec{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u^3}\left(A_1h_1\right) + \frac{\vec{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u^2}\left(A_1h_1\right)\\
\vec{\nabla}x\left(A_2\vec{e}_2\right) &= \frac{\vec{e}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial u^2}\left(A_2h_2\right) - \frac{\vec{e}_1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial u^3}\left(A_2h_2\right)\\
\vec{\nabla}x\left(A_3\vec{e}_3\right) &= \frac{\vec{e}_1}{h_3h_2}\frac{\partial}{\partial u^3}\left(A_3h_3\right) - \frac{\vec{e}_2}{h_3h_1}\frac{\partial}{\partial u^1}\left(A_3h_3\right)
\end{aligned} \tag{1.4.14}$$

elde edilir. Bu bağıntılardan yararlanarak $\vec{A}$ vektörünün dik eğrisel koordinatlardaki rotasyoneli;

$$\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{A}=\frac{\vec{e}_1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u^2}\left(A_3h_3\right)-\frac{\partial}{\partial u^3}\left(A_2h_2\right)\right]+\frac{\vec{e}_2}{h_3h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u^3}\left(A_1h_1\right)-\frac{\partial}{\partial u^1}\left(A_3h_3\right)\right]$$
$$+\frac{\vec{e}_3}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(A_2h_2\right)-\frac{\partial}{\partial u^2}\left(A_1h_1\right)\right] \qquad (1.4.15)$$

olarak bulunur. $(1.4.15)$ ifadesini;

$$\vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u^1} & \frac{\partial}{\partial u^2} & \frac{\partial}{\partial u^3} \\ A_1h_1 & A_2h_2 & A_3h_3 \end{vmatrix} \qquad (1.4.16)$$

şeklinde de yazabiliriz. $(1.4.8)$ bağıntısından yararlanılarak f skaler fonksiyonunun ortogonal eğrisel koordinatlardaki Laplasyeninin ifadesi;

$$\nabla^2 f=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u^1}\right)+\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)+\frac{\partial}{\partial u^3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u^3}\right)\right] \qquad (1.4.17)$$

olarak bulunur.

Bu koordinat sisteminde hacim elemanı;

$$dV=h_1h_2h_3du^1du^2du^3 \qquad (1.4.18)$$

Yüzey elemanı;

$$dS=h_1h_2du^1du^2 \qquad (1.4.19)$$

olarak bulunur.

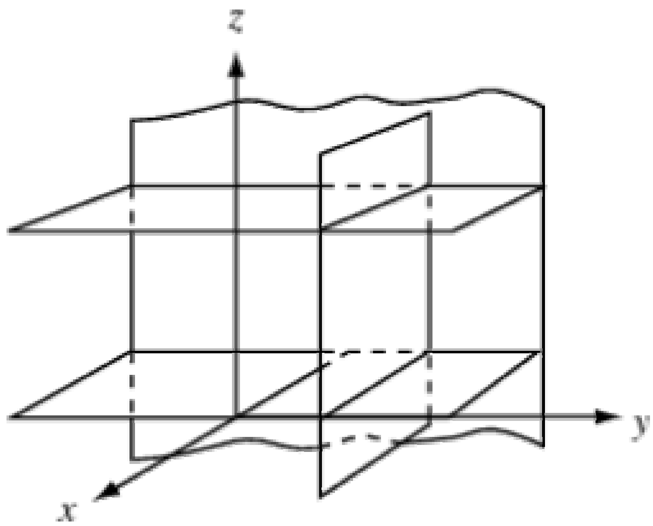
II.BÖLÜM

ÖZEL ORTOGONAL KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Uzay değişik amaçlar için farklı şekilde koordinatlandırılabilir. Kartezyen koordinat sistemi genel olarak matematiğin bir çok dalında kullanılmakla birlikte bazı matematiksel denklemlerin sade ve basit biçimde ifadeleri bu sistemde yazılamayabilir. Başka bir deyişle kartezyen koordinat sistemindeki bazı büyüklüklerin hesaplanması başka koordinat sistemlerinde daha sade biçimde yazılabilir. Fizik veya Mühendislik alanlarında kullanılan denklemlerin çözümleri için Kartezyen koordinatlar yeterli olmayabilir. Farklı koordinat sistemleri bilim alanında ilerlemeyi hızlandıran en önemli etkenlerden biridir.

Bu bölümde on bir koordinat sistemi incelenerek bazı özellikleri verilmiştir.

2.1. Kartezyen koordinatlar



Şekil (2.1.1)

Kartezyen koordinatlar;

$$\begin{aligned} u^1 &= x \qquad -\infty < x < +\infty \\ u^2 &= y \qquad -\infty < y < +\infty \\ u^3 &= z \qquad -\infty < z < +\infty \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

şeklinde ifade edilir. Kartezyen koordinat sisteminde herhangi bir $P(x, y, z)$ noktasının yer vektörü,

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{2.1.2}$$

olarak yazılır.

Metrik katsayılar; $(1.2.23)$, $(1.2.24)$, $(1.2.25)$ bağıntılarından,

$$h_1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\right| = 1 \quad h_2 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right| = 1 \quad h_3 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right| = 1 \quad g_{ij} = \delta^i_j . h^2{}_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{2.1.3}$$

dır.

$\left[g_{ij}\right]$ matrisi ve bu matrisin determinantı;

$$\left[g_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det\left[g_{ij}\right] = 1 \tag{2.1.5}$$

şeklindedir.

Bu koordinat sisteminde,

Yay elemanı;

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \tag{2.1.6}$$

Hacim elemanı;

$$dV = dxdydz \tag{2.1.7}$$

Alan elemanı;

$$dA = dxdy \tag{2.1.8}$$

$\vec{\nabla}$ operatörü;

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \tag{2.1.9}$$

şeklinde verilir.

$f = f(x, y, z)$ bir skaler fonksiyon ve $\vec{E}$ de kartezyen koordinatlardaki skaler bileşenleri E_x, E_y, E_z olan bir vektör olmak üzere f fonksiyonunun Gradyenti;

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \vec{\nabla}.f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad (2.1.10)$$

$\vec{E}$ vektörünün Diverjansı;

$$\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \qquad (2.1.11)$$

$\vec{E}$ vektörünün Rotasyoneli;

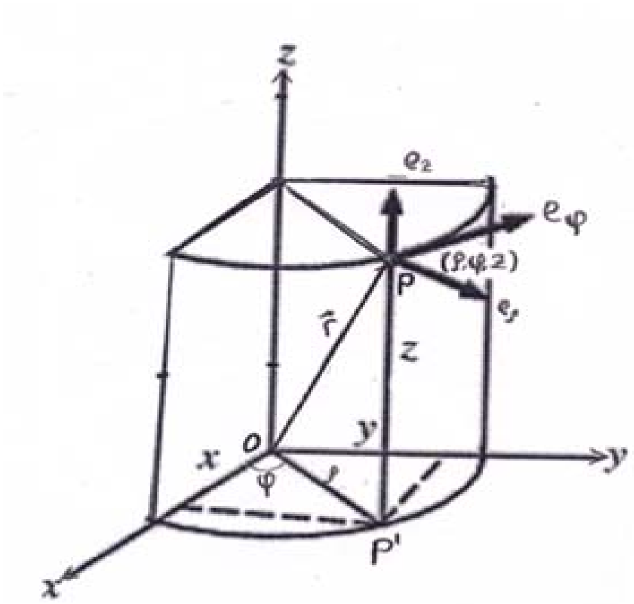
$$\text{Rot}\vec{E} = \vec{\nabla}x\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \qquad (2.1.12)$$

f fonksiyonunun Laplasyeni;

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (2.1.13)$$

olarak ifade edilir.

2. 2. Dairesel Silindirik Koordinatlar



Şekil (2.2.1)

$P(x,y,z)$ noktasının xy düzlemindeki izdüşümü P' olsun.

$$\begin{aligned} u^1 &= \rho & 0 &\le \rho < \infty \\ u^2 &= \varphi & 0 &\le \varphi < \infty \\ u^3 &= z & -\infty &< z < \infty \end{aligned} \qquad (2.2.1)$$

koordinatlarına P noktasının silindirik koordinatları denir. Kartezyen koordinatlar silindirik koordinatlara,

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned} \qquad (2.2.2)$$

bağıntıları ile bağlıdır.

Bu koordinatlarla Kartezyen Koordinatlar arasında

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \qquad z = z \qquad (2.2.3)$$

bağıntıları vardır.

$P(x,y,z)$ noktasının $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ yer vektörünün silindirik koordinatlardaki ifadesi,

$$\vec{r} = \rho\cos\varphi\vec{i} + \rho.\sin\varphi\vec{j} + z\vec{k} \tag{2.2.4}$$

ise; bu koordinat sisteminde metrik katsayılar ve ρ,φ,z nin artan yöndeki birim vektörleri

$$h_1 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\right| = 1 \qquad h_2 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| = \rho \qquad h_3 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right| = 1 \tag{2.2.5}$$

ve

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}_\rho = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j} \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_z = \vec{k} \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

dir.

Diğer taraftan $(1.2.23)$, $(1.2.24)$, $(1.2.25)$ bağıntılarının yardımı ile bu koordinat sisteminde,

$$g_{11} = g_{33} = 1, \quad g_{22} = \rho^2 \text{ ve } g_{12} = g_{13} = g_{21} = g_{23} = g_{31} = g_{32} = 0 \tag{2.2.7}$$

dır. $[g_{ij}]$ matrisi ve bu matrisin determinantı;

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det[g_{ij}] = \rho \tag{2.2.8}$$

olarak bulunur.

Silindirik koordinat sisteminde

Yay elmanı;

$$(ds)^2 = (dr)^2 + \rho^2(d\psi)^2 + (dz)^2 \tag{2.2.9}$$

Hacim elemanı;

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz \tag{2.2.10}$$

Alan elemanı;

$$dA = \rho.d\rho.d\varphi \tag{2.2.11}$$

$\vec{\nabla}$ operatörü;

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial\rho}\vec{e}_{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_{\varphi}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_{z} \qquad (2.2.12)$$

şeklindedir.

$f=f(\rho,\varphi,z)$ bir skaler fonksiyon ve $\vec{E}$ de silindirik koordinatlardaki skaler bileşenleri $E_{\rho},E_{\varphi},E_{z}$ olan bir vektör olmak üzere

f fonksiyonunun Gradyenti;

$$\overline{\text{grad}}f=\vec{\nabla}.f=\frac{\partial f}{\partial\rho}\vec{e}_{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_{\varphi}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_{z} \qquad (2.2.13)$$

$\vec{E}$ vektörünün Diverjansı;

$$\vec{\nabla}.\vec{E}=\text{div}\vec{E}=\frac{\partial E_{\rho}}{\partial\rho}+\frac{E_{\rho}}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial E_{z}}{\partial z} \qquad (2.2.14)$$

$\vec{E}$ vektörünün Rotasyoneli;

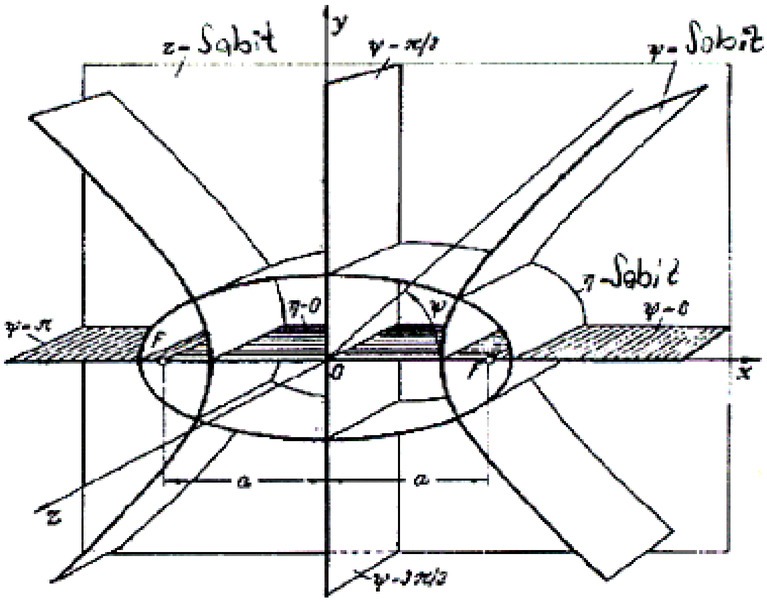
$$\text{rot}\vec{E}=\vec{\nabla}\text{x}\vec{E}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{e}_{\rho} & \rho.\vec{e}_{\varphi} & \vec{e}_{z}\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_{\rho} & \rho.E_{\varphi} & E_{z}\end{vmatrix} \qquad (2.2.15)$$

f fonksiyonunun Laplasyeni;

$$\nabla^{2}\phi=\frac{\partial^{2}f}{\partial\rho^{2}}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^{2}}\frac{\partial^{2}f}{\partial\varphi^{2}}+\frac{\partial^{2}f}{\partial z^{2}} \qquad (2.2.16)$$

olarak elde edilir.

2.3. Eliptik Silindirik Koordinatlar



Şekil (2.3.1)

$$\begin{aligned} u^1 &= \eta & 0 &\le \eta < \infty \\ u^2 &= \psi & 0 &\le \psi < 2\pi \\ u^3 &= z & 0 &\le z < +\infty \end{aligned} \qquad (2.3.1)$$

koordinatlarına Eliptik Silindirik koordinatları denir. Kartezyen koordinatlar Eliptik Silindirik koordinatlara

$a \in R$ elipsin odak uzunluğu olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= a \cosh \eta \cos \psi \\ y &= a \sinh \eta \sin \psi \\ z &= z \end{aligned} \qquad (2.3.2)$$

bağıntıları ile bağlıdır.

Bu koordinatlarla Kartezyen koordinatlar arasında

$$\left(\frac{x}{a\cosh\eta}\right)^2+\left(\frac{y}{a\sinh\eta}\right)^2=1$$
$$\left(\frac{y}{a\cos\psi}\right)^2+\left(\frac{y}{a\sin\psi}\right)^2=1 \qquad (2.3.3)$$
$$z=z$$

bağıntıları vardır.

P noktasının $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ yer vektörünün Eliptik Silindirik koordinatlardaki ifadesi

$$\vec{r}=a\cosh\eta\cos\psi\vec{i}+a\sinh\eta\sin\psi\vec{j}+z\vec{k} \qquad (2.3.4)$$

ise; metrik katsayılar ve η,ψ,z nin artan yöndeki birim vektörleri;

$$h_1=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\right|=a\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right)^{\frac{1}{2}},h_2=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\psi}\right|=a\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right)^{\frac{1}{2}},h_3=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right|=1 \quad (2.3.5)$$

ve

$$\vec{e}_1=\vec{e}_\eta=\frac{\sinh\eta\cos\psi\vec{i}+\cosh\eta\sin\psi\vec{j}}{\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\vec{e}_2=\vec{e}_\psi=\frac{\sinh\eta\cos\psi\vec{i}+\cosh\eta\sin\psi\vec{j}}{\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.3.6)$$
$$\vec{e}_3=\vec{e}_z=\vec{k}$$

dir.

Diğer taraftan $(1.2.23)$, $(1.2.24)$, $(1.2.25)$ bağıntılarının yardımı ile bu koordinat sisteminde

$$g_{11}=g_{22}=a^2\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right) \qquad g_{33}=1,$$
$$g_{12}=g_{13}=g_{21}=g_{23}=g_{31}=g_{32}=0 \qquad (2.3.7)$$

dır. $\left[g_{ij}\right]$ matrisi ve bu matrisin determinantı;

$$\left[g_{ij}\right]=\begin{bmatrix} a^2\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right) & 0 & 0 \\ 0 & a^2\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2.3.8)$$

$$\det\left[g_{ij}\right]=a^2\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right) \tag{2.3.9}$$

olarak bulunur.

Bu koordinat sisteminde

Yay elemanı;

$$(ds)^2=a^2\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right)\left[(d\eta)^2+(d\psi)^2\right]+(dz)^2 \tag{2.3.10}$$

Hacim elemanı;

$$dV=a^2\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right)d\eta\, d\psi\, dz \tag{2.3.11}$$

Alan elemanı;

$$dA=\left[a^4\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right)\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right)\right]^{\frac{1}{2}}d\eta\, d\psi \tag{2.3.12}$$

$\vec{\nabla}$ operatörü;

$$\vec{\nabla}=\frac{1}{a\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\eta}\vec{e}_\eta+\frac{1}{a\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\psi}\vec{e}_\psi+\frac{\partial}{\partial\psi}\vec{e}_\psi \tag{2.3.13}$$

şeklindedir.

$f=f(\eta,\psi,z)$ bir skaler fonksiyon ve $\vec{E}$ eliptik silindirik koordinatlardaki skaler bileşenleri E_η, E_ψ, E_z olan bir vektör olmak üzere

f fonksiyonunun gradyenti;

$$\overline{\text{grad}}f=\vec{\nabla}.f=\frac{1}{a\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial f}{\partial\eta}\vec{e}_\eta+\frac{\partial f}{\partial\psi}\vec{e}_\psi\right]+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \tag{2.3.14}$$

$\vec{E}$ vektörünün Diverjansı;

$$\begin{aligned}\text{div}\vec{E}=\vec{\nabla}.\vec{E}=&\frac{1}{a\left[\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right]^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}+E_\eta\right]\right.\\&\left.+\frac{\partial}{\partial\psi}\left[\left(\cosh^2\eta-\cos^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}+E_\psi\right]+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right\}\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

$\vec{E}$ vektörünün Rotasyoneli;

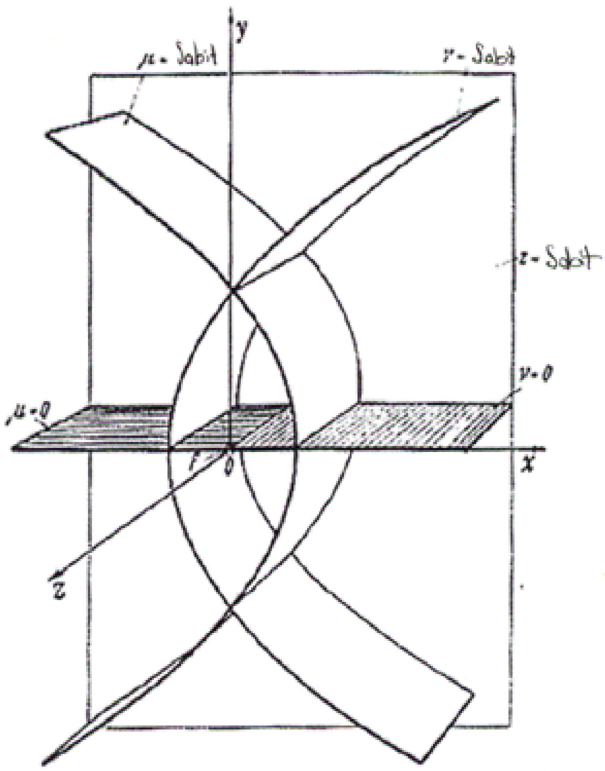
$$\mathrm{rot}\vec{E} = \frac{1}{\left(\cosh^2\eta - \cos^2\psi\right)} \begin{vmatrix} \left[\cosh^2\eta - \cos^2\psi\right]^{\frac{1}{2}} \vec{e}_\eta & \left[\cosh^2\eta - \cos^2\psi\right]^{\frac{1}{2}} \vec{e}_\psi & \frac{a_z}{a}\vec{e}_\psi \\ \frac{\partial}{\partial\eta} & \frac{\partial}{\partial\psi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\eta\left(\cosh^2\eta - \cos^2\psi\right)^{\frac{1}{2}} & E_\psi\left(\cosh^2\eta - \cos^2\psi\right)^{\frac{1}{2}} & \frac{E_z}{a} \end{vmatrix}$$

f fonksiyonunun Laplasyeni

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{a\left[\cosh^2\eta - \cos^2\psi\right]}\left[\frac{d^2f}{d\eta^2} + \frac{d^2f}{d\psi^2}\right] + \frac{d^2f}{dz^2} \qquad (2.3.17)$$

olarak elde edilir.

2.4. Parabolik Silindirik Koordinatlar



Şekil (2.4.1)

$$u^1 = \mu \qquad 0 \le \mu < +\infty$$
$$u^2 = \nu \qquad -\infty < \nu < +\infty \qquad (2.4.1)$$
$$u^3 = z \qquad -\infty < z < +\infty$$

koordinatlarına Parabolik Silindirik Koordinatlar denir. Kartezyen koordinatlar Parabolik Silindirik koordinatlara

$$x = \frac{1}{2}\left(\mu^2 - \nu^2\right)$$
$$y = \mu\nu \qquad (2.4.2)$$
$$z = z$$

bağıntıları ile bağlıdır.

Bu koordinatlarla kartezyen koordinatlar arasında

$$x^2 = \mu^2\left(\mu^2 - 2x\right)$$
$$y^2 = \nu^2\left(\nu^2 + 2x\right) \qquad (2.4.3)$$
$$z = z$$

bağıntıları vardır.

P(x,y,z) noktasının $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ yer vektörünün parabolik silindirik koordinatlardaki ifadesi

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\left(\mu^2 - \nu^2\right)\vec{i} + \mu\nu\vec{j} + z\vec{k} \tag{2.4.4}$$

ise; metrik katsayılar ve μ, ν, z nin artan yöndeki birim vektörleri

$$h_1 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\right| = \left(\mu^2 + \nu^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad h_2 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\psi}\right| = \left(\mu^2 + \nu^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad h_3 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right| = 1 \tag{2.4.5}$$

ve

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}_\mu = \frac{\mu.\vec{i} + \nu\vec{j}}{\left(\mu^2 + \nu^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_\nu = \frac{-\nu.\vec{i} + \mu.\vec{j}}{\left(\mu^2 + \nu^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_z = \vec{k} \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

dir.

Diğer taraftan $(1.2.23)$, $(1.2.24)$, $(1.2.25)$ bağıntılarının yardımı ile bu koordinat sisteminde

$$\begin{aligned} &g_{11} = g_{22} = \mu^2 + \nu^2, \quad g_{33} = 1 \\ &g_{12} = g_{13} = g_{21} = g_{23} = g_{31} = g_{32} = 0 \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

bulunur. $\left[g_{ij}\right]$ matrisi ve bu matrisin determinantı;

$$\left[g_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \mu^2 + \nu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 + \nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det\left[g_{ij}\right] = \mu^2 + \nu^2 \tag{2.4.8}$$

dır.

Bu koordinat sisteminde,

Yay elemanı;

$$(ds)^2 = \left(\mu^2 + \nu^2\right)\left[(d\mu)^2 + (d\nu)^2\right] + (dz)^2 \tag{2.4.9}$$

Hacim elemanı;

$$dV = \left(\mu^2+\nu^2\right)d\mu d\nu dz \tag{2.4.10}$$

Alan elemanı;

$$dA = \left(\mu^2+\nu^2\right)d\mu d\nu \tag{2.4.11}$$

$\vec{\nabla}$ operatörü;

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{\left(\mu^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\mu}\vec{e}_\mu + \frac{1}{\left(\mu^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\nu}\vec{e}_\nu + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \tag{2.4.12}$$

dır.

$f = f\left(\mu,\nu,z\right)$ bir skaler fonksiyon ve $\vec{E}$ parabolik silindirik koordinatlardaki skaler bileşenleri E_μ, E_ν, E_z bir vektör olmak üzere

f fonksiyonunun Gradyenti;

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \left(\mu^2+\nu^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial f}{\partial\mu}\vec{e}_\mu + \frac{\partial f}{\partial\nu}\vec{e}_\nu\right] + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \tag{2.4.13}$$

$\vec{E}$ vektörünün Diverjansı;

$$\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{E} == \left(\mu^2+\nu^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\left(\mu^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}} + E_\mu\right] + \frac{\partial}{\partial\nu}\left[\left(\mu^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}} + E_\nu\right]\right\} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{2.4.14}$$

$\vec{E}$ vektörünün Rotasyoneli;

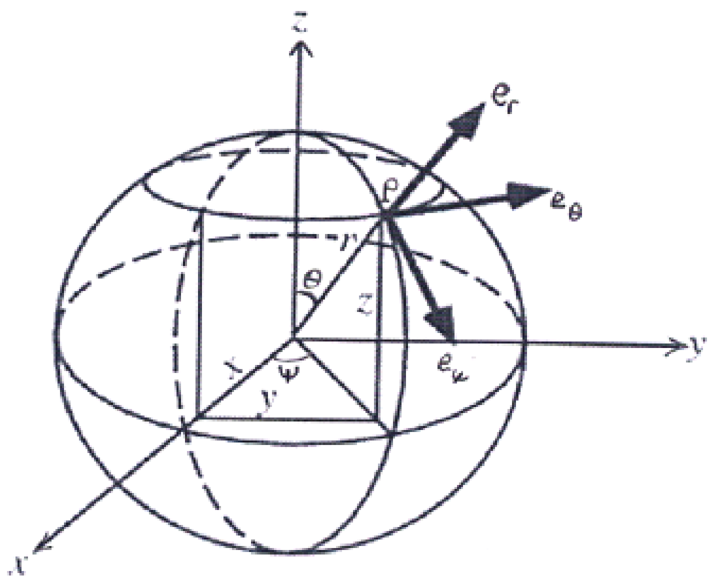
$$\text{rot}\vec{E} = \left(\mu^2+\nu^2\right)^{-1}\begin{vmatrix} \left(\mu^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\mu & \left(\mu^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\nu & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\mu} & \frac{\partial}{\partial\nu} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\mu\left(\mu^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}} & E_\nu\left(\mu^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}} & E_z \end{vmatrix} \tag{2.4.15}$$

f fonksiyonunun Laplasyeni ;

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\mu^2+\nu^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\nu^2}\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{2.4.16}$$

olarak elde edilir.

2.5. Küresel Koordinatlar



Şekil (2.5.1)

Bir $P(x,y,z)$ noktasının küresel koordinatları, r; P noktasının başlangıç noktasına uzaklığı. $\theta\,;\overrightarrow{OP}=\vec{r}$ vektörünün Z ekseni ile yaptığı açı, $\psi\,;\ \vec{r}$ vektörünün XY düzlemi üzerindeki izdüşümünün ox ekseni ile yaptığı açı olmak üzere;

$$\begin{aligned} u^1 &= r & 0 &\le r < \infty \\ u^2 &= \theta & 0 &\le \theta < \pi \\ u^3 &= \psi & 0 &\le \psi < 2\pi \end{aligned} \qquad (2.5.1)$$

koordinatlarına küresel koordinatlar denir. Kartezyen koordinatlar küresel koordinatlara

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\psi \\ y &= r\sin\theta\sin\psi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \qquad (2.5.2)$$

bağıntıları ile bağlıdır.

Bu koordinatlarla kartezyen koordinatlar arasında,

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \qquad \tan\theta=\frac{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{z} \qquad \tan\psi=\frac{y}{x} \tag{2.5.3}$$

bağıntıları vardır.

$P(x,y,z)$ noktasının $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ yer vektörünün küresel koordinatlar üzerindeki ifadesi;

$$\vec{r}=r\sin\theta\cos\psi\vec{i}+r\sin\theta\sin\psi\vec{j}+r\cos\theta\vec{k} \tag{2.4.4}$$

ise; metrik katsayılar ve r,θ,ψ nin artan yöndeki birim vektörleri

$$h_1=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\right|=1 \qquad h_2=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|=r \qquad h_3=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right|=r.\sin\theta \tag{2.5.5}$$

ve

$$\begin{aligned}\vec{e}_1&=\vec{e}_r=\sin\theta\cos\psi\vec{i}+\sin\theta\sin\psi\vec{j}+\cos\theta\vec{k}\\ \vec{e}_2&=\vec{e}_\theta=\cos\theta\cos\psi\vec{i}+\cos\theta\sin\psi\vec{j}-\sin\theta\vec{k}\\ \vec{e}_3&=\vec{e}_\psi=-r\sin\theta\sin\psi\vec{i}+r\sin\theta\cos\psi\vec{j}\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

dir.

Diğer taraftan $(1.2.23)$, $(1.2.24)$, $(1.2.25)$ bağıntılarının yardımı ile bu koordinat sisteminde

$$g_{11}=g_{33}=1 \qquad g_{22}=r^2 \qquad g_{12}=g_{13}=g_{21}=g_{23}=g_{31}=g_{32}=0 \tag{2.5.7}$$

olarak bulunur. $\left[g_{ij}\right]$ matrisi ve bu matrisin determinantı;

$$\left[g_{ij}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \quad \det\left[g_{ij}\right]=r \tag{2.5.8}$$

dır.

Bu koordinat sisteminde,

Yay elemanı;

$$(ds)^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2.\sin^2\theta(d\psi)^2 \tag{2.5.9}$$

Hacim elmanı;

$$dV=r^2\sin\theta drd\theta d\psi \tag{2.5.10}$$

Alan elemanı;

$$dA = rdrd\theta d\psi \tag{2.5.11}$$

$\vec{\nabla}$ operatörü;

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \psi}\vec{e}_\psi \tag{2.5.12}$$

$f = f(r, \theta, \psi)$ bir skaler fonksiyon ve $\vec{E}$ de küresel koordinatlardaki skaler bileşenleri E_r, E_θ, E_ψ bir vektör olmak üzere

f fonksiyonunun Gradyenti;

$$\overrightarrow{\text{gradf}} = \vec{\nabla}.f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \psi}\vec{e}_z \tag{2.5.13}$$

$\vec{E}$ vektörünün Diverjansı;

$$\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{2}{r}E_r + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot\theta}{r}E_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\psi}{\partial \psi} \tag{2.5.14}$$

$\vec{E}$ vektörünün Rotasyoneli;

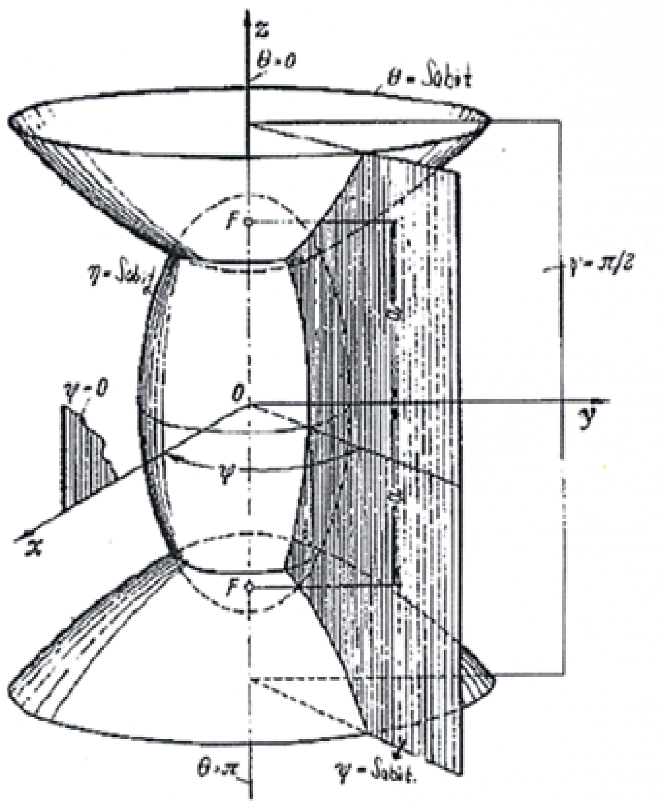
$$\text{Rot}\vec{E} = \vec{\nabla}\text{x}\vec{E} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta r & \vec{e}_\psi r\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \psi} \\ E_r & E_\theta r & E_\psi r\sin\theta \end{vmatrix} \tag{2.5.15}$$

f fonksiyonunun Laplasyeni

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} \tag{2.5.16}$$

olarak ifade edilir.

2.6. Prolate Küresel Koordinatlar



Şekil (2.6.1)

$$
\begin{aligned}
u^1 &= \eta & \quad 0 &\le \eta < \infty \\
u^2 &= \theta & \quad 0 &\le \theta \le \pi \\
u^3 &= \psi & \quad 0 &\le \psi < 2\pi
\end{aligned}
\tag{2.6.1}
$$

koordinatlarına Prolate Küresel Koordinatlar denir. Kartezyen koordinatlar prolate küresel koordinatlara

$a \in R$ elipsin odak uzunluğu olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
x &= a \sinh \eta \sin \theta \cos \psi \\
y &= a \sinh \eta \sin \theta \sin \psi \\
z &= a \cosh \eta \cos \theta
\end{aligned}
\tag{2.6.2}
$$

bağıntıları ile bağlıdır.

Bu koordinatlarla kartezyen koordinatlar arasında

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{a^2\sinh^2\eta}+\frac{y^2}{a^2\sinh^2\eta}+\frac{z^2}{a^2\cosh^2\eta}=1\\&\frac{x^2}{a^2\sin^2\theta}-\frac{y^2}{a^2\sin^2\theta}+\frac{z^2}{a^2\cos^2\theta}=1\end{aligned}\qquad(2.6.3)$$

bağıntıları vardır.

P(x,y,z) noktasının $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ yer vektörünün prolate koordinatlardaki ifadesi,

$$\vec{r}=a\sinh\eta\sin\theta\cos\psi\vec{i}+a\sinh\eta\sin\theta\sin\psi\vec{j}+a\cosh\eta\cos\theta\vec{k}\qquad(2.6.4)$$

ise metrik katsayılar ve η,θ,ψ nin artan yöndeki birim vektörleri

$$h_1=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\right|=a\left(\sinh^2\theta+\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\quad h_2=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\psi}\right|=a\left(\sinh^2\theta+\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\quad h_3=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right|=a\cdot\sinh\eta\cdot\sin\theta\qquad(2.6.7)$$

ve

$$\begin{aligned}&\vec{e}_1=\vec{e}_\eta=\frac{\cosh\eta\sin\theta\cos\psi\vec{i}+\cosh\eta\sin\theta\sin\psi\vec{j}+\sinh\eta\cos\theta\vec{k}}{\left(\sinh^2\theta+\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}}\\&\vec{e}_2=\vec{e}_\theta=\frac{\sinh\eta\cos\theta\cos\psi\vec{i}+\sinh\eta\cos\theta\sin\psi\vec{j}-\cosh\eta\sin\theta\vec{k}}{\left(\sinh^2\theta+\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}}\\&\vec{e}_3=\vec{e}_\psi=-\sin\psi\vec{i}+\cos\psi\vec{j}\end{aligned}\qquad(2.6.5)$$

dir.

Diğer taraftan $(1.2.23)$, $(1.2.24)$, $(1.2.25)$ bağıntılarının yardımı ile,

$$\begin{aligned}&g_{11}=g_{22}=a^2\left(\sinh^2\theta+\sin^2\theta\right)\qquad g_{33}=a^2\sinh^2\eta\sin^2\theta\\&g_{12}=g_{13}=g_{21}=g_{23}=g_{31}=g_{32}=0\end{aligned}\qquad(2.6.8)$$

bulunur. $\left[g_{ij}\right]$ matrisi ve bu matrisin determinantı;

$$\left[g_{ij}\right]=\begin{bmatrix}a^2\left(\sinh^2\theta+\sin^2\theta\right)&0&0\\0&a^2\left(\sinh^2\theta+\sin^2\theta\right)&0\\0&0&a^2\sinh^2\eta\sin^2\theta\end{bmatrix},\qquad(2.6.9)$$

$$\det\left[g_{ij}\right]=a^3\cdot\left(\sinh^2\eta+\sin^2\theta\right)\sinh\eta.\sin\theta$$

olarak bulunur.

Bu koordinat sisteminde;

Yay elemanı;

$$(ds)^2 = a^2\left(\sinh^2\theta + \sin^2\theta\right)\left[(d\eta)^2 + (d\theta)^2\right] + a^2\sinh^2\eta\sin^2\theta(d\psi)^2 \qquad (2.6.10)$$

Hacim elmanı;

$$dV = a^2\left(\sinh^2\theta + \sin^2\theta\right)a\sinh\eta\sin\theta d\eta d\theta d\psi \qquad (2.6.11)$$

Alan elemanı;

$$dA = a^2\left(\sinh^2\theta + \sin^2\theta\right)d\eta d\theta \qquad (2.6.12)$$

$\vec{\nabla}$ operatörü;

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{a\left(\sinh^2\theta + \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\eta}\vec{e}_\eta + \frac{1}{a\left(\sinh^2\theta + \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{a\sinh\eta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}\vec{e}_\psi \qquad (2.6.13)$$

şeklindedir.

$f = f(\eta,\theta,\psi)$ bir skaler fonksiyon ve $\vec{E}$ parabolik küresel koordinatlardaki skaler bileşenleri E_η, E_θ, E_ψ bir vektör olmak üzere,

f fonksiyonunun Gradyenti;

$$\overrightarrow{\text{grad}f} = \vec{\nabla}f = \frac{1}{a\left(\sinh^2\theta + \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial f}{\partial\eta}\vec{e}_\eta + \frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta\right] + \frac{1}{a\sinh\eta\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\psi}\vec{e}_\psi \qquad (2.6.14)$$

$\vec{E}$ vektörünün Diverjansı;

$$\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E} == \frac{1}{a\left(\sinh^2\eta + \sin^2\theta\right)}$$
$$\left\{\frac{1}{\sinh\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\sinh^2\eta + \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\sinh\eta E_\eta\right] + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\sinh^2\theta + \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta E_\theta\right]\right\} \qquad (2.6.15)$$
$$+\frac{1}{a\sinh\eta\sin\theta}\frac{\partial E_\psi}{\partial\psi}$$

$\vec{E}$ vektörünün Rotasyoneli;

$$\mathrm{Rot}\vec{E}=\vec{\nabla}x\vec{E}=\frac{1}{a\left(\sinh^2\theta+\sin^2\theta\right)\sinh\eta\sin\theta}$$

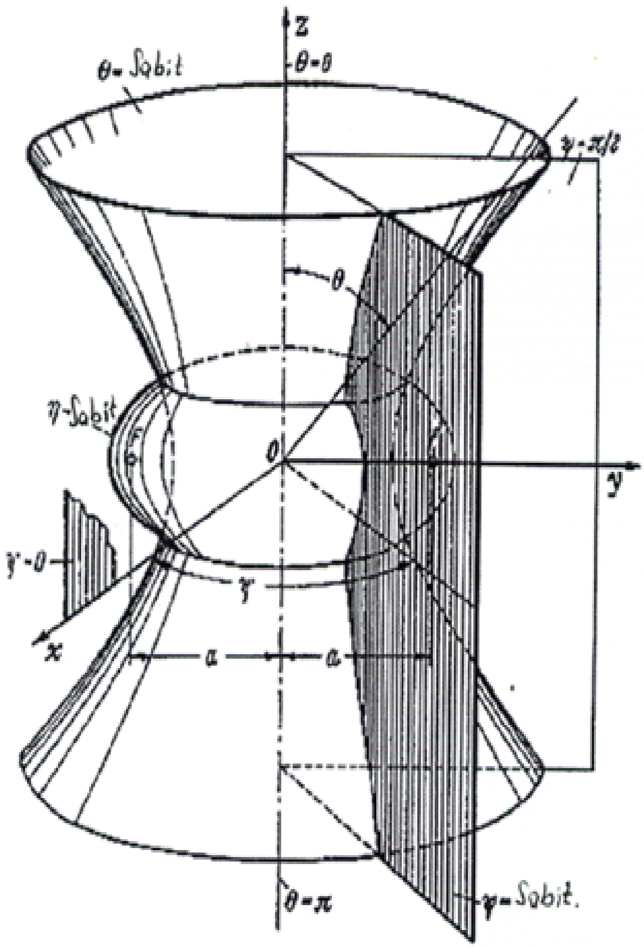
$$\begin{vmatrix} \left(\sinh^2\theta+\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\eta & \left(\sinh^2\theta+\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\theta & \sinh\eta\sin\theta\vec{e}_\psi \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\psi} \\ E_\eta\left(\sinh^2\eta+\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} & E_\theta\left(\sinh^2\eta+\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}} & E_\psi\sinh\eta\cdot\sin\theta \end{vmatrix} \quad (2.6.16)$$

f fonksiyonunun Laplasyeni ;

$$\nabla^2 f=\frac{1}{a^2\left(\sinh^2\theta+\sin^2\theta\right)}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+\coth\eta\frac{\partial f}{\partial\eta}+\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right\}$$
$$+\frac{1}{a^2\sinh^2\theta+\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^2} \quad (2.6.17)$$

olarak ifade edilir.

2.7. Oblate Küresel Koordinatlar



Şekil (2.7.1)

$$
\begin{aligned}
u^1 &= \eta \qquad & 0 \le \eta < \infty \\
u^2 &= \theta \qquad & 0 \le \theta \le \pi \\
u^3 &= \psi \qquad & 0 \le \psi < 2\pi
\end{aligned}
\tag{2.7.1}
$$

koordinatlarına Oblate Küresel Koordinatlar denir. Kartezyen koordinatlar oblate küresel koordinatlara, $a \in R$ elipsin odak uzunluğu olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
x &= a\cosh\eta\sin\theta\cos\psi \\
y &= a\cosh\eta\sin\theta\sin\psi \\
z &= a\sinh\eta\cos\theta
\end{aligned}
\tag{2.7.2}
$$

bağıntıları ile bağlıdır.

Bu koordinatlarla kartezyen koordinatlar arasında,

$$\frac{x^2}{a^2\cosh^2\eta}+\frac{y^2}{a^2\cosh^2\eta}+\frac{z^2}{a^2\sinh^2\eta}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2\sin^2\theta}+\frac{y^2}{a^2\sin^2\theta}-\frac{z^2}{a^2\cos^2\theta}=1 \qquad (2.7.3)$$

bağıntıları vardır.

P(x,y,z) noktasının $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ yer vektörünün Oblate Küresel Koordinatlardaki ifadesi

$$\vec{r}=a\cosh\eta\sin\theta\cos\psi\vec{i}+a\cosh\eta\sin\theta\sin\psi\vec{j}+a\sinh\eta\cos\theta \qquad (2.7.4)$$

ise; metrik katsayılar ve η,θ,ψ nin artan yöndeki birim vektörleri,

$$h_1=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\right|=a(\cosh^2\eta-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}},\ h_2=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|=a(\cosh^2\eta-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}},\ h_3=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\psi}\right|=a\cosh\eta.\sin\theta \qquad (2.7.5)$$

ve

$$\vec{e}_1=\vec{e}_\eta=\frac{\sinh\eta\sin\theta\cos\psi\vec{i}+\sinh\eta\sin\theta\sin\psi\vec{j}+\sinh\eta\cos\theta\vec{k}}{(\cosh^2\eta-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\vec{e}_2=\vec{e}_\theta=\frac{\cosh\eta\cos\theta\cos\psi\vec{i}+\cosh\eta\cos\theta\sin\psi\vec{j}-\sinh\eta\sin\theta}{(\cosh^2\eta-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.7.6)$$
$$\vec{e}_3=\vec{e}_\psi=-\sin\psi\vec{i}+\cos\psi\vec{j}$$

dir.

Diğer taraftan $(1.2.23)$, $(1.2.24)$, $(1.2.25)$ bağıntılarının yardımı ile bu koordinat sisteminde,

$$g_{11}=g_{22}=a^2\left(\sinh^2\theta+\sin^2\theta\right) \quad g_{33}=a^2\cdot\sinh^2\eta\cdot\sin^2\theta \qquad (2.7.7)$$

ve $\left[g_{ij}\right]$ matrisi ve bu matrisin determinantı;

$$\left[g_{ij}\right]=\begin{bmatrix} a^2(\cosh^2\eta-\sin^2\theta) & 0 & 0 \\ 0 & a^2(\cosh^2\eta-\sin^2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & a^2\cosh^2\eta\sin^2\theta \end{bmatrix}, \qquad (2.7.8)$$
$$\det\left[g_{ij}\right]=a^3\left(\sinh^2\eta+\sin^2\theta\right)\sinh\eta\sin\theta$$

olarak bulunur.

Bu koordinat sisteminde,

Yay elemanı;

$$(ds)^2 = a^2(\cosh^2\eta - \sin^2\theta)[(d\eta)^2 + (d\theta)^2] + a^2\cosh^2\eta\sin^2\theta(d\psi)^2 \qquad (2.7.9)$$

Hacim elmanı;

$$dV = a^3(\cosh^2\eta - \sin^2\theta)\cosh\eta\sin\theta\ d\eta d\theta d\psi \qquad (2.7.10)$$

Alan elemanı;

$$dA = a^2(\cosh^2\eta - \sin^2\theta)d\eta d\theta \qquad (2.7.11)$$

$\vec{\nabla}$ operatörü;

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{a(\cosh^2\eta - \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\eta}\vec{e}_\eta + \frac{1}{a(\cosh^2\eta - \sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{a\cosh\eta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}\vec{e}_\psi \qquad (2.7.12)$$

şeklinde verilir.

$f = f(\eta,\theta,\psi)$ ve $\vec{E}$ Obleyt Küresel koordinatlardaki skaler bileşenleri E_η, E_θ, E_ψ bir vektör olmak üzere,

f fonksiyonunun Gradyenti;

$$\overrightarrow{\text{gradf}} = \vec{\nabla}.f = \frac{1}{a[(\cosh^2\eta - \sin^2\theta)]^{\frac{1}{2}}}[\frac{\partial f}{\partial\eta}\vec{e}_\eta + \frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta] + \frac{1}{a\cosh\eta\sin\theta}\vec{e}_\psi\frac{\partial f}{\partial\psi} \qquad (2.7.13)$$

$\vec{E}$ vektörünün Diverjansı;

$$\text{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{a(\cosh^2\eta - \sin^2\theta)}\left\{\frac{1}{\cosh\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\cosh^2\eta - \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\cosh\eta E_\eta\right] + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\cosh^2\eta - \sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta E_\theta\right]\right\} + \frac{1}{a\cosh\eta\sin\theta}\frac{\partial E_\psi}{\partial\psi} \qquad (2.7.14)$$

$\vec{E}$ vektörünün Rotasyoneli;

$$\mathrm{rot}\vec{E}=\frac{1}{a(\cosh^2\eta-\sin^2\theta)\cosh\eta\sin\theta}$$

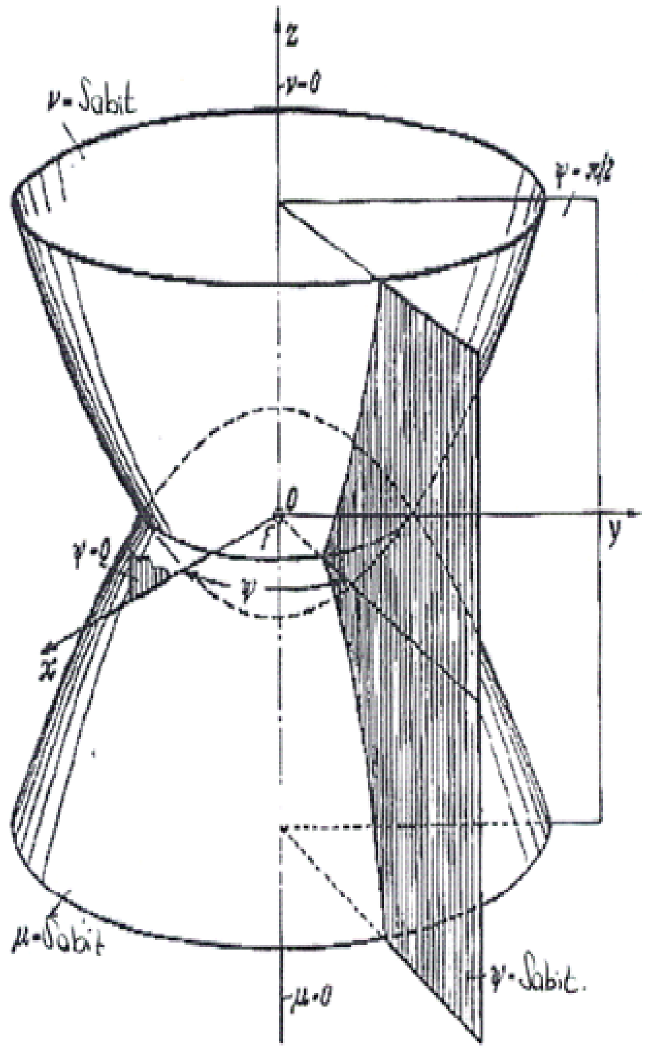
$$\begin{vmatrix} (\cosh^2\eta-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\eta & a_\theta(\cosh^2\eta-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\theta & \cosh\eta\sin\theta\vec{e}_\psi \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\psi} \\ E_\eta(\cosh^2\eta-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} & E_\theta(\cosh^2\eta-\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}} & E_\psi\cosh\eta\sin\theta \end{vmatrix} \qquad (2.7.15)$$

f fonksiyonunun Laplasyeni ;

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{a^2(\cosh^2\eta-\sin^2\theta)}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}+\tanh\eta\frac{\partial f}{\partial\eta}+\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right\}$$
$$+\frac{1}{a^2\cosh^2\eta.\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^2} \qquad (2.7.16)$$

olarak ifade edilir.

2.8. Parabolik Koordinatlar



Şekil (2.8.1)

Şekil (2.8.1)

$$\begin{array}{ll} u^1 = \mu & 0 \le \mu < \infty \\ u^2 = \nu & 0 \le \nu < \infty \\ u^3 = \psi & 0 \le \psi < 2\pi \end{array} \qquad (2.8.1)$$

koordinatlarına Parabolik Koordinatlar denir. Kartezyen koordinatlar parabolik koordinatlara

$$x = \mu\nu\cos\psi$$
$$y = \mu\nu\sin\psi \tag{2.8.2}$$
$$z = \frac{1}{2}\left(\mu^2 - \nu^2\right)$$

bağıntıları ile bağlıdır.

Bu koordinatlarla kartezyen koordinatlar arasında,

$$x^2 + y^2 = \mu^2\left(\mu^2 - 2z\right)$$
$$x^2 + y^2 = \nu^2\left(\nu^2 + 2z\right) \tag{2.8.3}$$
$$\tan\psi = \frac{y}{x}$$

bağıntıları vardır.

P(x,y,z) noktasının $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ yer vektörünün Parabolik Koordinatlardaki ifadesi,

$$\vec{r} = \mu\nu\cos\psi\vec{i} + \mu\nu\sin\psi\vec{j} + \frac{1}{2}\left(\mu^2 - \nu^2\right)\vec{k} \tag{2.8.4}$$

ise; metrik katsayılar ve μ, ν, ψ nin artan yöndeki birim vektörleri;

$$h_1 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\mu}\right| = \left(\mu^2 + \nu^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad h_2 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\nu}\right| = \left(\mu^2 + \nu^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad h_3 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\psi}\right| = \mu\nu \tag{2.8.5}$$

ve

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_\mu = \frac{\nu\cos\psi\vec{i} + \nu\sin\psi\vec{j} + \mu\vec{k}}{\left(\mu^2 + \nu^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\vec{e}_2 = \vec{e}_\nu = \frac{\mu\cos\psi\vec{i} + \mu\sin\psi\vec{j} - \nu\vec{k}}{\left(\mu^2 + \nu^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.8.6}$$
$$\vec{e}_3 = \vec{e}_\psi = -\sin\psi\vec{i} + \cos\psi\vec{j}$$

dir.

Diğer taraftan $(1.2.23)$, $(1.2.24)$, $(1.2.25)$ bağıntılarının yardımı ile bu koordinat sisteminde,

$$g_{11} = g_{22} = \mu^2 + \nu^2 \ , \quad g_{33} = \mu^2\nu^2 \tag{2.8.7}$$

ve $\left[g_{ij}\right]$ matrisi ve bu matrisin determinantı;

$$\left[g_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\mu^2+\nu^2 & 0 & 0\\ 0 & \mu^2+\nu^2 & 0\\ 0 & 0 & \mu^2\nu^2\end{bmatrix}, \qquad \det\left[g_{ij}\right]=\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2\nu^2} \tag{2.8.8}$$

olarak bulunur.

Bu koordinat sisteminde

Yay elemanı;

$$(\mathrm{ds})^2=\left(\mu^2+\nu^2\right)\left[(\mathrm{d}\mu)^2+(\mathrm{d}\nu)^2\right]+\mu^2\nu^2(\mathrm{d}\psi)^2 \tag{2.8.9}$$

Hacim elmanı;

$$\mathrm{dV}=\left(\mu^2+\nu^2\right)\mu\nu\,\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\psi \tag{2.8.10}$$

Alan elemanı;

$$\mathrm{dA}=\left(\mu^2+\nu^2\right)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\nu \tag{2.8.11}$$

$\vec{\nabla}$ operatörü;

$$\vec{\nabla}=\frac{1}{\left(\mu^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\eta}\vec{e}_\eta+\frac{1}{\left(\mu^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\mu+\frac{1}{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\psi}\vec{e}_\psi \tag{2.8.12}$$

şeklindedir.

$f=f(\mu,\nu,\psi)$ bir skaler fonksiyon ve $\vec{E}$ Parabolik Koordinatlardaki skaler bileşenleri E_μ, E_ν, E_ψ bir vektör olmak üzere

f fonksiyonunun Gradyenti;

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}f}=\vec{\nabla}.f=\frac{1}{\left(\mu^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial f}{\partial\mu}\vec{e}_\mu+\frac{\partial f}{\partial\nu}\vec{e}_\nu\right]+\frac{\vec{e}_\psi}{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial\psi} \tag{2.8.13}$$

$\vec{E}$ vektörünün Diverjansı;

$$\mathrm{div}\vec{E}=\vec{\nabla}.\vec{E}==\frac{1}{\left(\mu^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\mu\left(\mu^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}E\mu\right]+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\nu\left(\mu^2+\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}E_\nu\right]\right]+\frac{1}{\mu\iota}\frac{\partial E_\psi}{\partial\psi} \tag{2.8.14}$$

$\vec{E}$ vektörünün Rotasyoneli;

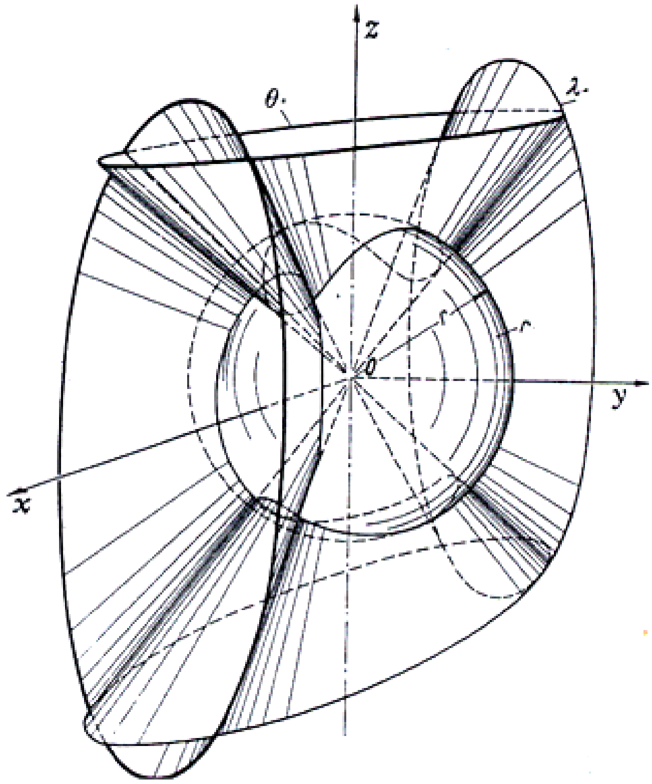
$$\mathrm{Rot}\vec{E} = \vec{\nabla}\mathrm{x}\vec{E} = \frac{1}{a(\cosh^2\eta - \sin^2\theta)\cosh\eta\sin\theta} \cdot \begin{vmatrix} (\mu^2+\nu^2)^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\mu & (\mu^2+\nu^2)^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\nu & \mu\nu\vec{e}_\psi \\ \dfrac{\partial}{\partial\mu} & \dfrac{\partial}{\partial\nu} & \dfrac{\partial}{\partial\psi} \\ E_\mu(\mu^2+\nu^2)^{\frac{1}{2}} & E_\nu(\mu^2+\nu^2)^{\frac{1}{2}} & E_\psi\mu\nu \end{vmatrix} \qquad (2.8.15)$$

f fonksiyonunun Laplasyeni;

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\mu^2+\eta^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\mu^2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial f}{\partial\mu} + \frac{\partial^2 f}{\partial\nu^2} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial f}{\partial\nu}\right] + \frac{1}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^2} \qquad (2.8.16)$$

olarak ifade edilir.

2.9. Konikal Koordinatlar



Şekil (2.9.1)

$$\begin{aligned} u^1 &= r & 0 &\le r < \infty \\ u^2 &= \theta & b^2 &< \theta^2 < c^2 \\ u^3 &= \lambda & 0 &< \lambda^2 < b^2 \end{aligned} \qquad (2.9.1)$$

koordinatlarına Konikal Koordinatlar denir. Kartezyen koordinatlar konikal koordinatlara

$$(x)^2 = \left(\frac{r\theta\lambda}{bc}\right)^2 \quad (y)^2 = \frac{r^2\left(\theta^2 - b^2\right)\left(b^2 - \lambda^2\right)}{b^2\left(c^2 - b^2\right)} \quad (z)^2 = \frac{r^2\left(c^2 - \theta^2\right)\left(c^2 - \lambda^2\right)}{c^2\left(c^2 - b^2\right)} \qquad (2.9.2)$$

bağıntıları ile bağlıdır.

Bu koordinatlarla kartezyen koordinatlar arasında,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\frac{x^2}{\theta^2} + \frac{y^2}{\theta^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \theta^2} = 0 \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} - \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = 0 \qquad (2.9.2)$$

bağıntıları vardır.

P(x,y,z) noktasının $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ yer vektörünün Konikal Koordinatlar üzerindeki ifadesi,

$$\vec{r} = \left(\frac{r.\theta.\lambda}{b.c}\right)\vec{i} + \left(\frac{r^2\left(\theta^2 - b^2\right)\left(b^2 - \lambda^2\right)}{b^2\left(c^2 - b^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\vec{j} + \left(\frac{r^2\left(c^2 - \theta^2\right)\left(c^2 - \lambda^2\right)}{c^2\left(c^2 - b^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\vec{k} \qquad (2.9.4)$$

ise; metrik katsayılar ve μ, ν, ψ nin artan yöndeki birim vektörleri,

$$h_1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \mu}\right| = 1, \quad h_2 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu}\right| = \left(\frac{r^2\left(\theta^2 - \lambda^2\right)}{\left(\theta^2 - b^2\right)\left(c^2 - \theta^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad h_3 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi}\right| = \left(\frac{r^2\left(\theta^2 - \lambda^2\right)}{\left(b^2 - \lambda^2\right)\left(c^2 - \lambda^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.9.5)$$

ve

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_r = \left[\left(\frac{\theta.\lambda}{b.c}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2\left(\theta^2 - b^2\right)\left(b^2 - \lambda^2\right)}{b^2\left(c^2 - b^2\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2r\left(\theta^2 - b^2\right)\left(b^2 - \lambda^2\right)}{b^2\left(c^2 - b^2\right)}\right)\vec{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2\left(c^2 - \theta^2\right)\left(c^2 - \lambda^2\right)}{c^2\left(c^2 - b^2\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2r\left(c^2 - \theta^2\right)\left(c^2 - \lambda^2\right)}{c^2\left(c^2 - b^2\right)}\right)\vec{k}\right] \qquad (2.9.6.a)$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_\theta = \frac{\left(\frac{.\lambda}{b.c}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{r^2\left(\theta^2 - b^2\right)\left(b^2 - \lambda^2\right)}{b^2\left(c^2 - b^2\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2r\left(\theta^2 - b^2\right)\left(b^2 - \lambda^2\right)}{b^2\left(c^2 - b^2\right)}\right)\vec{j}}{\left(\frac{r^2\left(\theta^2 - \lambda^2\right)}{\left(\theta^2 - b^2\right)\left(c^2 - \theta^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{+\frac{1}{2}\left(\frac{r^2\left(c^2 - \theta^2\right)\left(c^2 - \lambda^2\right)}{c^2\left(c^2 - b^2\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2r\left(c^2 - \theta^2\right)\left(c^2 - \lambda^2\right)}{c^2\left(c^2 - b^2\right)}\right)\vec{k}}{\left(\frac{r^2\left(\theta^2 - \lambda^2\right)}{\left(\theta^2 - b^2\right)\left(c^2 - \theta^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.9.6.b)$$

$$\vec{e}_3=\vec{e}_\lambda=\frac{\left[\left(\frac{r.\theta}{b.c}\right)\vec{i}+\frac{1}{2}\left(\frac{r^2\left(\theta^2-b^2\right)\left(b^2-\lambda^2\right)}{b^2\left(c^2-b^2\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2\left(\theta^2-b^2\right)\left(b^2-2\lambda\right)}{b^2\left(c^2-b^2\right)}\right)\vec{j}+\right]}{\left(\frac{r^2\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(b^2-\lambda^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{r^2\left(c^2-\theta^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)}{c^2\left(c^2-b^2\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{r^2\left(c^2-\theta^2\right)\left(c^2-2\lambda\right)}{c^2\left(c^2-b^2\right)}\right)\vec{k}}{\left(\frac{r^2\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(b^2-\lambda^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.9.6.c)$$

dir.

Diğer taraftan $(1.2.23)$, $(1.2.24)$, $(1.2.25)$ bağıntılarının yardımı ile bu koordinat sisteminde,

$$g_{11}=1,\quad g_{22}=\frac{r^2\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(\theta^2-b^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)},\quad g_{33}=\frac{r^2\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(b^2-\lambda^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)} \qquad (2.9.7)$$

dır. $\left[g_{ij}\right]$ matrisi ve bu matrisin determinantı;

$$\left[g_{ij}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{r^2\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(\theta^2-b^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)} & 0\\ 0 & 0 & \frac{r^2\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(b^2-\lambda^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)}\end{bmatrix} \qquad (2.9.8)$$

$$\det\left[g_{ij}\right]=\frac{r^2\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left[\left(\theta^2-b^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)\left(b^2-\lambda^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.9.9)$$

olarak bulunur.

Bu koordinat sisteminde

Yay elemanı;

$$(\mathrm{ds})^2=(\mathrm{dr})^2+\mathrm{r}^2\left(\theta^2-\mathrm{b}^2\right)\left[\frac{(\mathrm{d}\theta)^2}{\left(\theta^2-\mathrm{b}^2\right)\left(\mathrm{c}^2-\theta^2\right)}+\frac{(\mathrm{d}\lambda)^2}{\left(\mathrm{b}^2-\lambda^2\right)\left(\mathrm{c}^2-\lambda^2\right)}\right] \qquad (2.9.10)$$

Hacim elmanı;

$$\mathrm{dV}=\left(\frac{\mathrm{r}^2\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(\theta^2-\mathrm{b}^2\right)\left(\mathrm{c}^2-\theta^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\mathrm{r}^2\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(\mathrm{b}^2-\lambda^2\right)\left(\mathrm{c}^2-\lambda^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{drd}\theta\mathrm{d}\lambda \qquad (2.9.11)$$

Alan elemanı;

$$\mathrm{dA}=\left(\frac{\mathrm{r}^2\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(\theta^2-\mathrm{b}^2\right)\left(\mathrm{c}^2-\theta^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{drd}\theta \qquad (2.9.12)$$

$\vec{\nabla}$ operatörü;

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}}+\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{r}^2\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(\theta^2-\mathrm{b}^2\right)\left(\mathrm{c}^2-\theta^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{\mathrm{e}}_{\theta}+\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{r}^2\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(\mathrm{b}^2-\lambda^2\right)\left(\mathrm{c}^2-\lambda^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\vec{\mathrm{e}}_{\psi} \qquad (2.9.13)$$

$\mathrm{f}=\mathrm{f}(\mathrm{r},\theta,\lambda)$ bir skaler fonksiyon ve $\vec{\mathrm{E}}$ Konikal Koordinatlardaki skaler bileşenleri $\mathrm{E}_{\mathrm{r}},\mathrm{E}_{\theta},\mathrm{E}_{\lambda}$ bir vektör olmak üzere,

f fonksiyonunun Gradyenti;

$$\overrightarrow{\mathrm{gradf}}=\vec{\nabla}.\mathrm{f}=\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{r}}\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}}+\frac{1}{\mathrm{r}\left(\theta^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$\left\{\left(\theta^2-\mathrm{b}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{c}^2-\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}\vec{\mathrm{e}}_{\theta}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial\theta}+\left(\mathrm{b}^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{c}^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\vec{\mathrm{e}}_{\lambda}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial\lambda}\right\} \qquad (2.9.14)$$

$\vec{\mathrm{E}}$ vektörünün Diverjansı;

$$\mathrm{div}\vec{\mathrm{E}}=\vec{\nabla}\vec{\mathrm{E}}==\frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(\mathrm{r}^2\mathrm{E}_{\mathrm{r}}\right)+\frac{1}{\mathrm{r}\left(\theta^2-\lambda^2\right)}$$
$$\left\{\left(\theta^2-\mathrm{b}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{c}^2-\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\theta^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{E}_{\theta}\right]+\left(\mathrm{b}^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{c}^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\left(\theta^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{E}_{\lambda}\right]\right\} \qquad (2.9.15)$$

$\vec{E}$ vektörünün Rotasyoneli;

$(2.9.16)$

$$\mathrm{Rot}\vec{E} = \vec{\nabla}x\vec{E} = \frac{\left[\left(\theta^2-b^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)\left(b^2-\lambda^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\theta^2-\lambda^2\right)}$$

$$\cdot\begin{vmatrix} \dfrac{\vec{e}_r}{r} & \dfrac{\left(\theta^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\theta^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(c^2-\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}}\vec{e}_\theta & \dfrac{\left(\theta^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\lambda}{\left(b^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(c^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\psi} \\ \dfrac{E_r}{r} & \dfrac{E_\theta\left(\theta^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\theta^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(c^2-\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}} & \dfrac{E_\lambda\left(\theta^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(b^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(c^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}} \end{vmatrix}$$

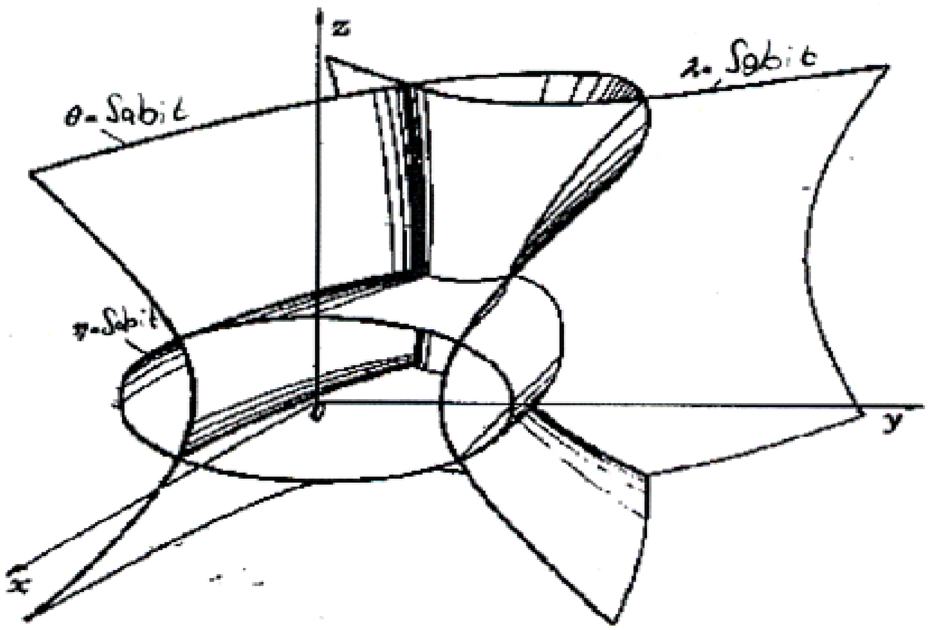
f fonksiyonunun Laplasyeni;

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2\left(\theta^2-\lambda^2\right)}\left[\left(\theta^2-b^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} - \theta\left[2\theta^2-\left(b^2+c^2\right)\right]\frac{\partial f}{\partial\theta}\right.$$

$$\left.\left(b^2-\lambda^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} + \lambda\left[2\lambda^2-\left(b^2+c^2\right)\right]\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right] \qquad (2.9.17)$$

olarak ifade edilir.

2.10. Elipsoidal Koordinatlar



Şekil (2.10.1)

2a; elipsin asal eksen uzunluğu, 2b; elipsin yedek eksen uzunluğu, c elipsin odak uzunluğu olmak üzere

$$\begin{aligned} u^1 &= \eta \qquad & c^2 < \eta < \infty^2 \\ u^2 &= \theta \qquad & b^2 < \theta^2 < c^2 \\ u^3 &= \lambda \qquad & 0 \le \lambda^2 < b^2 \end{aligned} \tag{2.10.1}$$

koordinatlarına Elipsoidal Koordinatlar denir. Kartezyen koordinatlar elipsoidal koordinatlara,

$$(x)^2 = \left(\frac{\eta\theta\lambda}{bc}\right)^2 \qquad (y)^2 = \frac{(\eta^2 - b^2)(\theta^2 - b^2)(b^2 - \lambda^2)}{b^2(c^2 - b^2)}$$
$$(z)^2 = \frac{(\eta^2 - c^2)(c^2 - \theta^2)(c^2 - \lambda^2)}{c^2(c^2 - b^2)} \tag{2.10.2}$$

bağıntıları ile bağlıdır.

Bu koordinatlarla kartezyen koordinatlar arasında

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{\eta^2}+\frac{y^2}{\eta^2-b^2}+\frac{z^2}{\eta^2-c^2}=1\\
&\frac{x^2}{\theta^2}+\frac{y^2}{\theta^2-b^2}+\frac{z^2}{\theta^2-c^2}=1\\
&\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}=1
\end{aligned} \qquad (2.10.2)$$

bağıntıları vardır.

P(x,y,z) noktasının $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ yer vektörünün Elipsiodal Koordinatlardaki ifadesi,

$$\vec{r}=\left(\frac{\eta\theta\lambda}{bc}\right).\vec{i}+\left(\frac{\left(\eta^2-b^2\right)\left(\theta^2-b^2\right)\left(b^2-\lambda^2\right)}{b^2\left(c^2-b^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}.\vec{j}+\left(\frac{\left(\eta^2-c^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)}{c^2\left(c^2-b^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}.\vec{k}$$

$(2.10.3)$

ise metrik katsayılar ve η,θ,λ nin artan yöndeki birim vektörleri;

$$h_1=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\mu}\right|=\left(\frac{\left(\eta^2-\theta^2\right)\left(\eta^2-\lambda^2\right)}{\left(\eta^2-b^2\right)\left(\eta^2-c^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}},\ h_2=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\nu}\right|=\left(\frac{\left(\theta^2-\lambda^2\right)\left(\eta^2-\theta^2\right)}{\left(\theta^2-b^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$h_3=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\psi}\right|=\left(\frac{\left(\eta^2-\lambda^2\right)\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(b^2-\lambda^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.10.4)$$

ve

$$\vec{e}_\eta=\frac{\left(\frac{\theta\lambda}{bc}\right)\vec{i}+\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\eta^2-b^2\right)\left(\theta^2-b^2\right)\left(b^2-\lambda^2\right)}{b^2\left(c^2-b^2\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\left(2\eta-b^2\right)\left(\theta^2-b^2\right)\left(b^2-\lambda^2\right)}{b^2\left(c^2-b^2\right)}\right)\vec{j}}{\left(\frac{\left(\eta^2-\theta^2\right)\left(\eta^2-\lambda^2\right)}{\left(\eta^2-b^2\right)\left(\eta^2-c^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\eta^2-c^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)}{c^2\left(c^2-b^2\right)}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\left(2\eta-c^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)}{c^2\left(c^2-b^2\right)}\right)\vec{k}}{\left(\frac{\left(\eta^2-\theta^2\right)\left(\eta^2-\lambda^2\right)}{\left(\eta^2-b^2\right)\left(\eta^2-c^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.10.5.a)$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\left(\dfrac{\eta\theta}{bc}\right).\vec{i} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(\eta^2-b^2)(\theta^2-b^2)(b^2-\lambda^2)}{b^2(c^2-b^2)}\right)^{-\frac{1}{2}} . \left(\dfrac{(\eta^2-b^2)(\theta^2-b^2)(b^2-2\lambda)}{b^2(c^2-b^2)}\right).\vec{j}}{\left(\dfrac{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(\eta^2-c^2)(c^2-\theta^2)(c^2-\lambda^2)}{c^2(c^2-b^2)}\right)^{-\frac{1}{2}} . \left(\dfrac{(\eta^2-c^2)(c^2-\theta^2)(c^2-2\lambda)}{c^2(c^2-b^2)}\right)\vec{k}}{\left(\dfrac{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.10.5.b)$$

$$\vec{e}_\lambda = \frac{\left(\dfrac{\eta\lambda}{bc}\right).\vec{i} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(\eta^2-b^2)(\theta^2-b^2)(b^2-\lambda^2)}{b^2(c^2-b^2)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\dfrac{(\eta^2-b^2)(2\theta-b^2)(b^2-\lambda^2)}{b^2(c^2-b^2)}\right).\vec{j}+}{\left(\dfrac{(\theta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(\eta^2-c^2)(c^2-\theta^2)(c^2-\lambda^2)}{c^2(c^2-b^2)}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\dfrac{(\eta^2-c^2)(c^2-2\theta)(c^2-\lambda^2)}{c^2(c^2-b^2)}\right)\vec{k}}{\left(\dfrac{(\theta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.10.5.c)$$

dir.

Diğer taraftan $(1.2.23)$, $(1.2.24)$, $(1.2.25)$ bağıntılarının yardımı ile bu koordinat sisteminde

$$g_{11} = \frac{(\eta^2-\theta^2)(\eta^2-\lambda^2)}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)} \qquad g_{22} = \frac{(\theta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}, \qquad g_{33} = \frac{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)},$$

$(2.10.6)$

dır. $[g_{ij}]$ matrisi ve bu matrisin determinantı;

$$\left[g_{ij}\right]=\begin{bmatrix} \dfrac{(\eta^2-\theta^2)(\eta^2-\lambda^2)}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{(\theta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)} \end{bmatrix}, \qquad (2.10.7)$$

$$\det\left[g_{ij}\right]=\frac{(\eta^2-\theta^2)(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}{\left[(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.10.8)$$

olarak bulunur.

Bu koordinat sisteminde,

Yay elemanı;

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= \left[\frac{(\eta^2-\theta^2)(\eta^2-\lambda^2)}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)}\right](d\eta)^2+\left[\frac{(\theta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}\right](d\theta)^2 \\ &\quad +\left[\frac{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}\right](d\lambda)^2\end{aligned} \qquad (2.10.9)$$

Hacim elmanı;

$$dV=\left(\frac{(\eta^2-\theta^2)(\eta^2-\lambda^2)}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(\theta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)}\right)^{\frac{1}{2}} d\eta d\theta d\lambda \quad (2.10.10)$$

Alan elemanı;

$$dA=\left(\frac{(\eta^2-\theta^2)(\eta^2-\lambda^2)}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(\theta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)}\right)^{\frac{1}{2}} d\eta.d\theta \qquad (2.10.11)$$

$\vec{\nabla}$ operatörü;

$$\vec{\nabla}=\frac{1}{\left(\frac{\left(\eta^2-\theta^2\right)\left(\eta^2-\lambda^2\right)}{\left(\eta^2-b^2\right)\left(\eta^2-c^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\eta}\vec{e}_\eta+\frac{1}{\left(\frac{\left(\theta^2-\lambda^2\right)\left(\eta^2-\theta^2\right)}{\left(\theta^2-b^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{\left(\frac{\left(\eta^2-\lambda^2\right)\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(b^2-\lambda^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\vec{e}_\lambda \qquad (2.10.12)$$

$f=f(\eta,\theta,\lambda)$ bir skaler fonksiyon ve $\vec{E}$ Konikal Koordinatlardaki skaler bileşenleri $E_\eta, E_\theta, E_\lambda$ bir vektör olmak üzere,

f fonksiyonunun Gradyenti;

$$\overrightarrow{\text{gradf}}=\vec{\nabla}.f=\left[\frac{\left(\eta^2-b^2\right)\left(\eta^2-c^2\right)}{\left(\eta^2-\theta^2\right)\left(\eta^2-\lambda^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\eta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}+\left[\frac{\left(\theta^2-b^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)}{\left(\theta^2-\lambda^2\right)\left(\eta^2-\theta^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\left[\frac{\left(b^2-\lambda^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)}{\left(\eta^2-\lambda^2\right)\left(\theta^2-\lambda^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\lambda\frac{\partial\phi}{\partial\lambda} \qquad (2.10.13)$$

$\vec{E}$ vektörünün Diverjansı;

$$\text{div}\vec{E}=\vec{\nabla}.\vec{E}==\frac{\left(\eta^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\eta^2-c^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\eta^2-\theta^2\right)\left(\eta^2-\lambda^2\right)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\eta^2-\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\eta^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}E_\eta\right]+\frac{\left(\theta^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(c^2-\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\eta^2-\theta^2\right)\left(\theta^2-\lambda^2\right)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\eta^2-\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\theta^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}E_\theta\right]+\frac{\left(b^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(c^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\eta^2-\lambda^2\right)\left(\theta^2-\lambda^2\right)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\left(\eta^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\theta^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}E_\lambda\right] \qquad (2.10.14)$$

$\vec{E}$ vektörünün Rotasyoneli;

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{\left[\left(\eta^2-b^2\right)\left(\eta^2-c^2\right)\left(\theta^2-b^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)\left(b^2-\lambda^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\eta^2-\theta^2\right)}$$

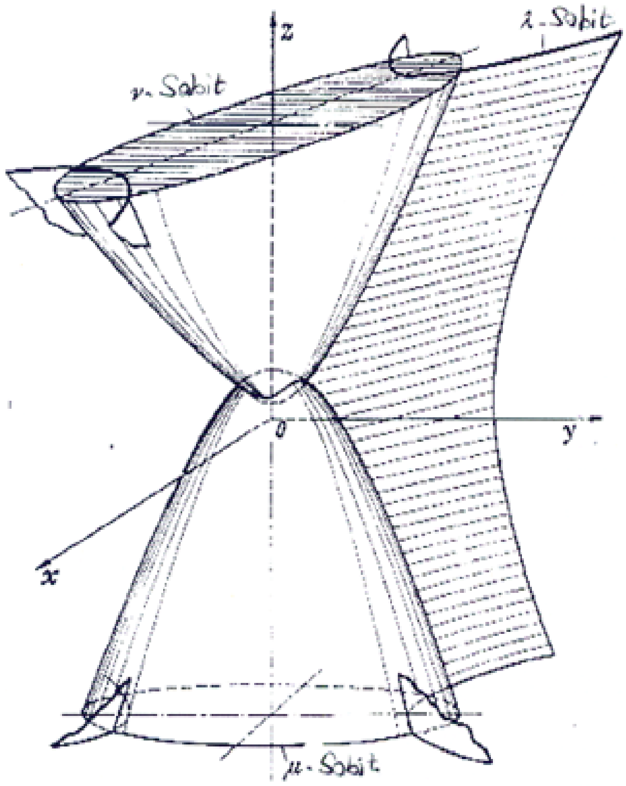
$$\cdot\begin{vmatrix} \left[\dfrac{\left(\eta^2-\theta^2\right)\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(\eta^2-b^2\right)\left(\eta^2-c^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\eta & \left[\dfrac{\left(\theta^2-\lambda^2\right)\left(\eta^2-\theta^2\right)}{\left(\theta^2-b^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\theta & \left[\dfrac{\left(\eta^2-\lambda^2\right)\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(b^2-\lambda^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\lambda \\ \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\lambda} \\ E_\eta\left[\dfrac{\left(\eta^2-\theta^2\right)\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(\eta^2-b^2\right)\left(\eta^2-c^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}} & E_\theta\left[\dfrac{\left(\theta^2-\lambda^2\right)\left(\eta^2-\theta^2\right)}{\left(\theta^2-b^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}} & E_\lambda\left[\dfrac{\left(\eta^2-\lambda^2\right)\left(\theta^2-\lambda^2\right)}{\left(b^2-\lambda^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)}\right]^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}$$

f fonksiyonunun Laplasyeni;

$$\begin{aligned}\nabla^2 f =& \frac{\left(\eta^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\eta^2-c^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\eta^2-\theta^2\right)\left(\eta^2-\lambda^2\right)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(\eta^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\eta^2-c^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial f}{\partial\eta}\right] \\ &+\frac{\left(\theta^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(c^2-\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\eta^2-\theta^2\right)\left(\theta^2-\lambda^2\right)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\theta^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(c^2-\theta^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right] \\ &+\frac{\left(b^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(c^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\eta^2-\lambda^2\right)\left(\theta^2-\lambda^2\right)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\left(b^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(c^2-\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right]\end{aligned} \qquad (2.10.16)$$

olarak ifade edilir.

2.11. Parabolidial Koordinatlar



Şekil (2.11.1)

$$\begin{aligned} u^1 &= \mu && b < \mu < \infty \\ u^2 &= \nu && 0 < \nu < c \\ u^3 &= \lambda && c \le \lambda < b \end{aligned} \qquad (2.11.1)$$

koordinatlarına Parabolidial Koordinatlar denir. Kartezyen koordinatlar parabolidial koordinatlara,

$$(x)^2 = \frac{4}{(b-c)}(\mu - b)(b-\nu)(b-\lambda) \quad (y)^2 = \frac{4}{(b-c)}(\mu - c)(c-\nu)(c-\lambda) \qquad (2.11.2)$$

$$z = \mu + \nu + \lambda - b - c \qquad \mu > b > \lambda > c > \nu > 0$$

bağıntıları ile bağlıdır.

Bu koordinatlarla kartezyen koordinatlar arsında,

$$\frac{x^2}{\mu-b}+\frac{y^2}{\mu-c}=-4(z-\mu)$$
$$\frac{x^2}{b-\nu}+\frac{y^2}{c-\nu}=-4(z-\nu) \qquad (2.11.2)$$
$$\frac{x^2}{b-\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c}=-4(z-\lambda)$$

bağıntıları vardır.

P(x,y,z) noktasının $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ yer vektörünün Paraboloödial Koordinatlar üzerindeki ifadesi,

$$\vec{r}=\left(\frac{4}{(b-c)}(\mu-b)(b-\nu)(b-\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}.\vec{i}+\left(\frac{4}{(b-c)}(\mu-c)(c-\nu)(c-\lambda)\right)^{\frac{1}{2}}.\vec{j} \qquad (2.11.3)$$
$$+(\mu+\nu+\lambda-b-c)\vec{k}$$

ise; metrik katsayılar ve μ,ν,λ nin artan yöndeki birim vektörleri,

$$h_1=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\mu}\right|=\left(\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)}\right)^{\frac{1}{2}},\ h_2=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\nu}\right|=\left(\frac{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}{(b-\nu)(c-\nu)}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$h_3=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\psi}\right|=\left(\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.11.4)$$

$$\vec{e}_\mu=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{(b-c)}(\mu-b)(b-\nu)(b-\lambda)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{(b-c)}(b-\nu)(b-\lambda)\right).\vec{i}}{\left(\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{(b-c)}(\mu-c)(c-\nu)(c-\lambda)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{(b-c)}(c-\nu)(c-\lambda)\right).\vec{j}+\vec{k}}{\left(\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.11.5.a)$$

$$\vec{e}_{\nu}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{(b-c)}(\mu-b)(b-\nu)(b-\lambda)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{(b-c)}(\mu-b)(-1)(b-\lambda)\right).\vec{i}}{\left(\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{(b-c)}(\mu-c)(c-\nu)(c-\lambda)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{(b-c)}(\mu-c)(-1)(c-\lambda)\right).\vec{j}+\vec{k}}{\left(\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.11.5.b)$$

$$\vec{e}_{\lambda}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{(b-c)}(\mu-b)(b-\nu)(b-\lambda)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{(b-c)}(\mu-b)(b-\nu)(-1)\right).\vec{i}}{\left(\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{4}{(b-c)}(\mu-c)(c-\nu)(c-\lambda)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{(b-c)}(\mu-c)(c-\nu)(-1)\right).\vec{j}+\vec{k}}{\left(\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.11.5.c)$$

dir.

Diğer taraftan (1.2.23), (1.2.24) , (1.2.25) bağıntılarının yardımı ile bu koordinat sisteminde,

$$g_{11}=\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)} \qquad g_{22}=\frac{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}{(b-\nu)(c-\nu)} \qquad g_{33}=\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)} \qquad (2.11.6)$$

ve $\left[g_{ij}\right]$ matrisi ve bu matrisin determinantı;

$$\left[g_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)} & 0 & 0\\ 0 & \frac{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}{(b-\nu)(c-\nu)} & 0\\ 0 & 0 & \frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}\end{bmatrix}, \qquad (2.11.7)$$

$$\det[g]=g^{\frac{1}{2}}=\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)(\lambda-\nu)}{\left[(\mu-b)(\mu-c)(b-\nu)(c-\nu)(b-\lambda)(\lambda-c)\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.11.8)$$

olarak bulunur.

$f=f(\eta,\theta,\lambda)$ ve $\vec{E}$ Parabolidial Koordinatlardaki skaler bileşenleri E_μ, E_ν, E_λ bir vektör olmak üzere,

Yay elemanı;

$$(ds)^2=\left[\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)}\right](d\mu)^2+\left[\frac{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}{(b-\nu)(c-\nu)}\right](d\nu)^2+\left[\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}\right](d\lambda)^2 \qquad (2.11.9)$$

Hacim Elemanı;

$$dV=\left(\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}{(b-\nu)(c-\nu)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}\right)^{\frac{1}{2}} d\mu d\nu d\lambda \qquad (2.11.10)$$

Alan Elemanı;

$$dA=\left(\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}{(b-\nu)(c-\nu)}\right)^{\frac{1}{2}} d\mu . d\nu \qquad (2.11.11)$$

$\vec{\nabla}$ Operatörü

$$\vec{\nabla}=\frac{1}{\left(\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\mu}\vec{e}_\mu+\frac{1}{\left(\frac{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}{(b-\nu)(c-\nu)}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_\nu+\frac{1}{\left(\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\vec{e}_\lambda \qquad (2.11.12)$$

f fonksiyonunun Gradyenti;

$$\overrightarrow{\text{grad}f}=\vec{\nabla}f=\left[\frac{(\mu-b)(\mu-c)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}\right]^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\mu\frac{\partial f}{\partial\mu}+\left[\frac{(b-\nu)(c-\nu)}{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}\right]^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\nu\frac{\partial f}{\partial\nu}+\left[\frac{(b-\lambda)(\lambda-c)}{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}\right]^{\frac{1}{2}}\vec{e}_\lambda\frac{\partial f}{\partial\lambda} \qquad (2.11.13)$$

$\vec{E}$ vektörünün Diverjansı;

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{(\mu-b)^{\frac{1}{2}}(\mu-c)^{\frac{1}{2}}}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(\mu-\nu)^{\frac{1}{2}}(\mu-\lambda)^{\frac{1}{2}}E_{\mu}\right]$$
$$+\frac{(b-\nu)^{\frac{1}{2}}(c-\nu)^{\frac{1}{2}}}{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[(\mu-\nu)^{\frac{1}{2}}(\lambda-\nu)^{\frac{1}{2}}E_{\nu}\right] \tag{2.11.14}$$
$$+\frac{(b-\lambda)^{\frac{1}{2}}(\lambda-c)^{\frac{1}{2}}}{(\mu-\lambda)(\lambda-\nu)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(\mu-\lambda)^{\frac{1}{2}}(\lambda-\nu)^{\frac{1}{2}}E_{\lambda}\right]$$

$\vec{E}$ vektörünün Rotasyoneli;

$$\mathrm{Rot}\vec{E} = \vec{\nabla}x\vec{E} = \frac{\left[(\mu-b)(\mu-c)(b-\nu)(c-\nu)(b-\lambda)(\lambda-c)\right]^{\frac{1}{2}}}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)(\lambda-\nu)}$$

$$\begin{vmatrix} \left[\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)}\right]^{\frac{1}{2}}\vec{e_{\mu}} & \left[\frac{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}{(b-\nu)(c-\nu)}\right]^{\frac{1}{2}}\vec{e_{\nu}} & \left[\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}\right]^{\frac{1}{2}}\vec{e_{\lambda}} \\ \frac{\partial}{\partial\mu} & \frac{\partial}{\partial\nu} & \frac{\partial}{\partial\lambda} \\ E_{\mu}\left[\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)}\right]^{\frac{1}{2}} & E_{\nu}\left[\frac{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}{(b-\nu)(c-\nu)}\right]^{\frac{1}{2}} & E_{\lambda}\left[\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)}\right]^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix} \tag{2.11.15}$$

f fonksiyonunun Laplasyeni;

$$\nabla^2\phi = \left[\frac{(\mu-b)(\mu-c)}{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(\mu-b)^{\frac{1}{2}}(\mu-c)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\phi}{\partial\mu}\right]$$
$$+\left[\frac{(b-\nu)(c-\nu)}{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[(b-\nu)^{\frac{1}{2}}(c-\nu)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right] \tag{2.11.16}$$
$$+\left[\frac{(b-\lambda)(\lambda-c)}{(\mu-\lambda)(\lambda-\nu)}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(b-\lambda)^{\frac{1}{2}}(\lambda-c)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\right]$$

olarak ifade edilir.

III. BÖLÜM

ÖZEL KOORDİNAT SİSTEMLERİNDE HELMHOLTZ DENKLEMİNİN AYRIŞTIRILMASI VE STACKEL MATRİSİ

3.1. Helmholtz Denklemi

Fizik, Mühendislik ve Uygulamalı Matematik alanında karşılaşılan diferansiyel denklemlerden pek çoğu $\phi = \phi(x, y, z, t)$ bir skaler fonksiyon ve k sabit olmak üzere

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = f(x, y, z, t) \tag{3.1.1}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$f(x, y, z, t) = 0$ ise denklem Helmholtz veya Dalga Denklemi adını alır.

Örneğin;

$$\nabla^2\phi = 0\,; \quad \text{Laplace Denklemi} \tag{3.1.2}$$

$$\nabla^2\phi = -k\,; \quad \text{Poisson Denklemi} \tag{3.1.3}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\,; \quad \text{Düfizyon Denklemi} \tag{3.1.4}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\,; \quad \text{Dalga Denklemi} \tag{3.1.5}$$

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0\,; \quad \text{Helmholtz Denklemi} \tag{3.1.6}$$

denklemleri bu türden ifade edilen denklemlerdir.

Bu denklemlerin ortak özellikleri lineer, ikinci dereceden ve kısmi türevli diferansiyel denklemler olmalarıdır. Bu denklemler özel değerlerle ve ayrıştırmalarla Helmholtz Denklemine indirgenebilirler.Helmholtz Denkleminin çözümleri yardımı ile de bu denklemlerin çözümleri irdelenir.

3.2.Basit Ayrıştırma ve Stackel Matrisi

Eğer

$$\phi = U^1(u^1)\,U^2(u^2)\,U^3(u^3) \tag{3.2.1}$$

alınması ile $\nabla^2\phi = 0$ denklemi üç adi denkleme ayrılabilirse bu ayrıştırmaya basit ayrıştırma denir.

Helmholtz Denklemi; ϕ skaler, f bir vektör fonksiyonu ve ∇^2 bir skaler laplasyen olmak üzere

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0 \tag{3.2.2}$$

ve

$$\nabla^2\vec{F} + k^2\vec{F} = 0 \tag{3.2.3}$$

şeklinde verilir.

k=0 için Helmholtz Denklemi Laplace Denklemine dönüşür.

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1.h_2.h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{h_2.h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial u^1}\right) + \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{h_1.h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial u^2}\right) + \frac{\partial}{\partial u^3}\left(\frac{h_1.h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial u^3}\right)\right] \tag{3.2.4}$$

olmak üzere $\phi = \phi\left(u^1, u^2, u^3\right)$ ve $h_1.h_2.h_3 = g^{\frac{1}{2}}$

için

$$\nabla^2\phi = g^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{U^1}\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{g^{\frac{1}{2}}}{g_{11}}\frac{dU^1}{du^1}\right) + \frac{1}{U^2}\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{g^{\frac{1}{2}}}{g_{22}}\frac{dU^2}{du^2}\right) + \frac{1}{U^3}\frac{\partial}{\partial u^3}\left(\frac{g^{\frac{1}{2}}}{g_{22}}\frac{dU^3}{du^3}\right)\right] \tag{3.2.5}$$

$$\nabla^2\phi = g^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{U^i}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{g^{\frac{1}{2}}}{g_{ii}}.\frac{dU^i}{du^i}\right) \tag{3.2.6}$$

dır.

Böylece $\nabla^2\phi + k^2\phi = 0$ şeklinde ifade edilen Helmholtz Denklemi

$$g^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{U^i}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{g^{\frac{1}{2}}}{g_{ii}}.\frac{dU^i}{du^i}\right) + k^2\phi = 0 \tag{3.2.7}$$

şeklinde yazılır. Burada k^2 zamanı içeren terimlerin ayrılmasından elde edilen ayırma sabitidir. Bu denklem bazı koordinat sistemlerinde ayrılabilir. Helmholtz Denkleminin basit ayrılabilmesi için bir koordinat sisteminin sağlaması gereken koşulları inceleyelim.

Üç fonksiyonun çarpımı olarak ifade edilen

$$\phi = U^1\left(u^1\right)U^2\left(u^2\right)U^3\left(u^3\right) \tag{3.2.8}$$

fonksiyonu $(3.2.6)$ de yerine yazılırsa,

$$g^{-\frac{1}{2}}.\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{U^i}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{g^{\frac{1}{2}}}{g_{ii}}.\frac{dU^i}{du^i}\right)+k^2=0 \qquad (3.2.9)$$

elde edilir. $(3.2.9)$ denklemi parantezin içindeki her nicelik bir tek bağımsız değişkene göre yazılamazsa denklem ayrıştırılmaz. Bu koşul genel olarak sağlanmayabilir.

Çünkü $g^{\frac{1}{2}}$ ve g_{ii} üç koordinatın fonksiyonları olabilir. Fakat $\frac{g^{\frac{1}{2}}}{g_{ii}}$ nin sabit olduğu özel durumlarda $(3.2.9)$ denklemi

$$g^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{3}\frac{\text{sabit}}{U^i}\frac{dU^i}{du^i}+k^2=0 \qquad (3.2.10)$$

olur. Burada toplamın her terimi bir bağımsız değişkenin fonksiyonudur. Diğer bir özel durum

$\frac{g^{\frac{1}{2}}}{g_{ii}}=f_i\left(u^i\right)$ olması durumundadır. Bu durumda $(3.2.9)$

$$g^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{U^i}\frac{d}{du^i}\left(f_i\frac{dU^i}{du^i}\right)+k^2=0 \qquad (3.2.11)$$

şeklini alır. Böylece toplamın her bir terimi yine sadece tek değişkenin bir fonksiyondur.

Ayrılabilme için en genel koşul $\frac{g^{\frac{1}{2}}}{g_{ii}}$ nin iki fonksiyonun çarpımı olmasıdır.

Yani;

$$\begin{aligned}\frac{g^{\frac{1}{2}}}{g_{11}}&=f_1\left(u^1\right)F_1\left(u^2,u^3\right)\\ \frac{g^{\frac{1}{2}}}{g_{22}}&=f_2\left(u^2\right)F_2\left(u^1,u^3\right)\\ \frac{g^{\frac{1}{2}}}{g_{33}}&=f_3\left(u^3\right)F_3\left(u^1,u^2\right)\end{aligned} \qquad (3.2.12)$$

koşulu basit ayırma için gerekli koşuldur.

$(3.2.12)$ Denklemi $(3.2.9)$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$g^{-\frac{1}{2}}.\sum_{i=1}^{3}\frac{F_i}{U^i}\frac{d}{du^i}\left(f_i\frac{dU^i}{du^i}\right)+k^2=0 \qquad (3.2.13)$$

ifadesi elde edilir.

Burada $g^{\frac{1}{2}}, F_i$ ve f_i koordinat sistemi tarafından belirtilir. $\phi = U^1.U^2.U^3$ nin U^i fonksiyonları koordinat sistemi ve ayırma sabitlerinin her ikisinin de fonksiyonları olurlar.

Ayırma sabitleri $\alpha_1 = (k)^2, \alpha_2, \alpha_3$ ile gösterilirse f_i ve F_i ler α lardan bağımsız iken $(3.2.13)$ denkleminin U^i leri α nın fonksiyonlarıdır. $(3.2.13)$ Denkleminin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ göre diferansiyellenebildiği kabul edilirse,

$$F_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{1}{U^1}\frac{d}{du^1}\left(f_1\frac{dU^1}{du^1}\right)\right]+F_2\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{1}{U^2}\frac{d}{du^2}\left(f_2\frac{dU^2}{du^2}\right)\right]+F_3\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{1}{U^2}\frac{d}{du^3}\left(f_3\frac{dU^3}{du^3}\right)\right]+g^{\frac{1}{2}}=0$$

$$F_1\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[\frac{1}{U^1}\frac{d}{du^1}\left(f_1\frac{dU^1}{du^1}\right)\right]+F_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[\frac{1}{U^2}\frac{d}{du^2}\left(f_2\frac{dU^2}{du^2}\right)\right]+F_3\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left[\frac{1}{U^2}\frac{d}{du^3}\left(f_3\frac{dU^3}{du^3}\right)\right]=0 \qquad (3.2.14)$$

$$F_1\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left[\frac{1}{U^1}\frac{d}{du^1}\left(f_1\frac{dU^1}{du^1}\right)\right]+F_2\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left[\frac{1}{U^2}\frac{d}{du^2}\left(f_2\frac{dU^2}{du^2}\right)\right]+F_3\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\left[\frac{1}{U^2}\frac{d}{du^3}\left(f_3\frac{dU^3}{du^3}\right)\right]=0$$

elde edilr.Denklem yeni notasyonlar kullanılarak daha kısa ve özlü olarak,

$$\begin{aligned}
f_1F_1\phi_{11}(u^1)+f_2F_2\phi_{21}(u^2)+f_3F_3\phi_{31}(u^3)&=g^{\frac{1}{2}}\\
f_1F_1\phi_{12}(u^1)+f_2F_2\phi_{22}(u^2)+f_3F_3\phi_{32}(u^3)&=0\\
f_1F_1\phi_{13}(u^1)+f_2F_2\phi_{23}(u^2)+f_3F_3\phi_{33}(u^3)&=0
\end{aligned} \qquad (3.2.15)$$

varsa

$$\phi_{ij}(u^i)=-\frac{1}{f_i(u^i)}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left[\frac{1}{U^i}\frac{d}{du^i}\left(f_i\frac{dU^i}{du^i}\right)\right] \qquad (3.2.16)$$

şeklinde yazılır.

$\left(f_1F_1\right)$, $\left(f_2F_2\right)$ ve $\left(f_3F_3\right)$ nicelikleri için ϕ_{ij} $\left(3.2.15\right)$ denklemleri için çözülebilir. Bu sistemden elde edilen,

$$S = \det\left[S\right] = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{vmatrix} \qquad \left(3.2.17\right)$$

determinantı 'Stackel Determinant' olarak adlandırılır.Bu determinantta Birinci satırın elemanları sadece u^1 in, ikinci sıradakiler sadece u^2 nin ve üçüncü satırın elemanları sadece u^3 ün fonksiyonlarıdır.

$\left(3.2.15\right)$ sisteminin çözümü M_{i1} ler 'Stackel Determinant' nın birinci sütunundaki ϕ_{i1} elemanlarının

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{32} & \phi_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{21} = -\begin{vmatrix} \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{32} & \phi_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{22} & \phi_{23} \end{vmatrix} \qquad \left(3.2.18\right)$$

şeklinde kofaktörleri olmak üzere,

$$f_1F_1 = \frac{g^{\frac{1}{2}}}{S}\left[\phi_{22}.\phi_{33} - \phi_{23}.\phi_{32}\right] = g^{\frac{1}{2}}\frac{M_{11}}{S}$$

$$f_2F_2 = \frac{g^{\frac{1}{2}}}{S}\left[\phi_{13}.\phi_{32} - \phi_{12}.\phi_{33}\right] = g^{\frac{1}{2}}\frac{M_{21}}{S} \qquad \left(3.2.19\right)$$

$$f_3F_3 = \frac{g^{\frac{1}{2}}}{S}\left[\phi_{12}.\phi_{23} - \phi_{13}.\phi_{22}\right] = g^{\frac{1}{2}}\frac{M_{31}}{S}$$

dır. $\left(3.2.12\right)$ ve $\left(3.2.18\right)$ denklemleri karşılaştırılırsa;

$$g_{ii} = \frac{S}{M_{i1}} \qquad \left(3.2.20\right)$$

olduğunu görülür. Bu basit ayrılabilme için birinci koşuldur. Aynı zamanda $\left(3.2.19\right)$ denklemlerinden,

$$\frac{g^{\frac{1}{2}}}{S} = f_1\left(u^1\right)\left[\frac{F_1\left(u^2,u^3\right)}{M_{11}\left(u^2,u^3\right)}\right]$$

$$\frac{g^{\frac{1}{2}}}{S}=f_2\left(u^2\right)\left[\frac{F_2\left(u^1,u^3\right)}{M_{21}\left(u^1,u^3\right)}\right] \qquad (3.2.22)$$

$$\frac{g^{\frac{1}{2}}}{S}=f_3\left(u^3\right)\left[\frac{F_3\left(u^1,u^2\right)}{M_{31}\left(u^1,u^2\right)}\right]$$

veya

$$f_1\left(u^1\right)\left[\frac{F\left(u^2,u^3\right)}{M_{11}\left(u^2,u^3\right)}\right]=f\left(u^2\right)\left[\frac{F\left(u^1,u^3\right)}{M_{21}\left(u^1,u^3\right)}\right]=f\left(u^3\right)\left[\frac{F\left(u^1,u^2\right)}{M_{31}\left(u^1,u^2\right)}\right] \qquad (3.2.23)$$

bulunur. Bu sonuç sadece,

$$\frac{g^{\frac{1}{2}}}{S}=f_1\left(u^1\right).f_2\left(u^2\right).f_3\left(u^3\right) \qquad (3.2.24)$$

olması ile mümkündür. $(3.2.23)$ Denklemi Helmholtz Denkleminin basit ayrılabilmesi için ikinci koşuldur. Eğer $(3.2.19)$ ve $(3.2.23)$ denklemleri verilen bir metrik katsayıları kümesi tarafından sağlanırsa, denklem bu koordinat sisteminde basit bir şekilde ayrılabilir.

Kısaca üç boyutlu Euclidean uzayda, Helmholtz Denkleminin basit ayrılabilmesi için gerekli ve yeterli koşulların metrik katsayıların

$$g_{ij}=\frac{S}{M_{i1}} \qquad i=1,2,3$$

$$\frac{g^{\frac{1}{2}}}{S}=f_1\left(u^1\right)f_2\left(u^2\right)f_3\left(u^3\right) \qquad (3.2.25)$$

koşullarını sağlanması gerektiğini söyleyebiliriz.

Diğer taraftan bir Stackel Matris

$$[S]=\begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13}\\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23}\\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33}\end{bmatrix} \qquad (3.2.26)$$

şeklinde ifade edilir.

Bu matrisin determinantı S Stackel determinantıdır. $(3.2.8)$ da belirtildiği gibi bir Stackel matris ve metrik katsayılar arasında birebir uygunluk yoktur. ϕ_{ij} elemanlarını uygun şekilde seçmek mümkündür.

IV. BÖLÜM

HELMHOTLZ DENKLEMİNİN
ÖZEL KOORDİNAT SİSTEMLERİNDE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde Helmholtz Denkleminin on bir koordinat sisteminde çözümü irdelenecektir.

4.1. Kartezyen Koordinatlarda Çözüm

Bölüm 3 $(3.2.17)$ bağıntısından bu koordinat sistemi için Stackel Matris ve determinantı;

$$[S]=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad S=\det[S]=1 \tag{4.1.1}$$

şeklinde yazılır, $(3.2.18)$ bağıntısından,

$$M_{11}=M_{21}=M_{31}=1 \tag{4.1.2}$$

kofaktörleri elde edilir. $(1.2.25)$ Bağıntısından bu sistemdeki metrik katsayıları,

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1 \qquad g^{\frac{1}{2}}=1 \tag{4.1.3}$$

şeklinde yazılarak f_1, f_2, f_3 değerleri ise $(3.2.24)$ bağıntısından,

$$f_1=f_2=f_3=1 \tag{4.1.4}$$

şeklinde hesap edilir.

Bu durumda $(3.2.13)$ Helmotz Denklemi;

$$\alpha_1=k^2, \quad U^1=X(x), \quad U^2=Y(y), \quad U^3=Z(z) \tag{4.1.5}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{f_i}\frac{d}{du^i}\left(f_i\frac{dU^i}{du^i}\right)+U^i\sum_{j=1}^{3}\phi_{ij}\alpha_j=0 \tag{4.1.6}$$

şeklini alır. Bu denklem ayrıştırılırsa;

$$\frac{d^2X}{dx^2}-(\alpha_2+\alpha_3)X=0 \tag{4.1.7}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+\alpha_2 Y=0 \tag{4.1.8}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}-(k^2+\alpha_3)Z=0 \tag{4.1.9}$$

şeklinde üç denklem elde edilir.

Eğer $\alpha_2 = p^2$ ve $\alpha_3 = q^2$ alınırsa $(4.1.7),(4.1.8),(4.1.9)$ denklemleri;

$$\frac{d^2X}{dx^2}-(p^2+q^2)X=0 \tag{4.1.10}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+p^2 Y=0 \tag{4.1.11}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+(k^2+q^2)Z=0 \tag{4.1.12}$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$X = A_1 e^{(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}x} + B_1 e^{-(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}x} \tag{4.1.13}$$

$$Y = A_2 \sin(py) + B_2 \cos(py) \tag{4.1.14}$$

$$Z = A_3 \sin[(k^2+q^2)^{\frac{1}{2}}z] + B_3 \cos[(k^2+q^2)^{\frac{1}{2}}z] \tag{4.1.15}$$

olarak bulunur.

Eğer $\alpha_2 = -p^2$ ve $\alpha_3 = -q^2$ alınırsa $(4.1.7),(4.1.8),(4.1.9)$ denklemleri:

$$\frac{d^2X}{dx^2}+(p^2+q^2)X=0 \tag{4.1.16}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}-p^2 Y=0 \tag{4.1.17}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+(k^2-q^2)Z=0 \tag{4.1.18}$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$X = A_1 \sin[(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}x] + B_1 \cos[(k^2+q^2)^{\frac{1}{2}}x] \tag{4.1.19}$$

$$Y = A_2 e^{py} + B_2 e^{-py} \tag{4.1.20}$$

$$Z = A_3 \sin[(k^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} z] + B_3 \cos[(k^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} z] \tag{4.1.21}$$

olarak bulunur.

Eğer $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ alınırsa $(4.1.7), (4.1.8), (4.1.9)$ denklemleri;

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \tag{4.1.22}$$

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + k^2 Z = 0 \tag{4.1.23}$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$X = A_1 + B_1 x \tag{4.1.24}$$

$$Y = A_2 + B_2 y \tag{4.1.25}$$

$$Z = A_3 \sin(kz) + B_3 \cos(kz) \tag{4.1.26}$$

olarak bulunur.

ϕ; z den bağımsız ise $(4.1.7), (4.1.8), (4.1.9)$ denklemleri,

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \alpha_2 X = 0 \tag{4.1.27}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + (k^2 + \alpha_2) Y = 0 \tag{4.1.28}$$

halini alır.

Eğer $\alpha_2 = p^2$ alınırsa $(4.1.27)$ ve $(4.1.28)$ denklemleri,

$$\frac{d^2X}{dx^2} - p^2 X = 0 \tag{4.1.29}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + (p^2 + q^2) Y = 0 \tag{4.1.30}$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$X = A_1 e^{px} + B_1 e^{-px} \tag{4.1.31}$$

$$Y = A_2 \sin[(k^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} y] + B_2 \cos[(k^2 + p^2)^{\frac{1}{2}} y] \tag{4.1.32}$$

dır.

Eğer $\alpha_2 = -p^2$ alınırsa $(4.1.27)$ ve $(4.1.28)$ denklemleri

$$\frac{d^2X}{dx^2}+p^2X=0 \tag{4.1.33}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+(k^2-p^2)Y=0 \tag{4.1.34}$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$X=A_1\sin\left(px\right)+B_1\cos\left(px\right) \tag{4.1.35}$$

$$Y=A_2\sin[(k^2-p^2)^{\frac{1}{2}}y]+B_2\cos[(k^2-p^2)^{\frac{1}{2}}y] \tag{4.1.36}$$

Eğer $\alpha_2=0$ alınırsa $(4.1.27)$ ve $(4.1.28)$ denklemleri

$$\frac{d^2X}{dx^2}=0 \tag{4.1.37}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+k^2Y=0 \tag{4.1.38}$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$X=A_1+B_1x \tag{4.1.39}$$

$$Y=A_2\sin ky+B_2\cos ky \tag{4.1.40}$$

dır.

ϕ ; y ve z den bağımsız ise $(4.1.7),(4.1.8),(4.1.9)$ denklemleri

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+k^2\phi=0 \tag{4.1.41}$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü ise;

$$\phi=A_1\sin kx+B_1\cos kx \tag{4.1.42}$$

olarak bulunur.

4.2. Dairesel Silindirik Koordinatlarda Çözüm

Bölüm 3 $(3.2.17)$ bağıntısından bu koordinat sistemi için Stackel Matris ve determinantı;

$$[S]=\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\rho^2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S=\det[S]=1 \tag{4.2.1}$$

şeklinde yazılır. $(3.2.18)$ bağıntısından,

$$M_{11}=1 \quad M_{21}=\frac{1}{\rho^2} \quad M_{31}=1 \tag{4.2.2}$$

kofaktörleri elde edilir. $(1.2.25)$ Bağıntısından bu sistemdeki metrik katsayıları,

$$g_{11}=1, \quad g_{22}=\rho^2, \quad g_{33}=1, \quad g^{\frac{1}{2}}=\rho \tag{4.2.3}$$

olarak bulunur. f_1, f_2, f_3 değerleri ise $(3.2.24)$ bağıntısından,

$$f_1=r \quad f_2=1 \quad f_3=1 \tag{4.2.4}$$

şeklinde elde edilir.

Bu durumda $(3.2.13)$ Helmotz Denklemi;

$$\alpha_1=k^2 \quad U^1=R(\rho) \quad U^2=\Psi(\psi) \quad U^3=Z(z) \tag{4.2.5}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{f_i}\frac{d}{du^i}\left(f_i\frac{dU^i}{du^i}\right)+U^i\sum_{j=1}^{3}\Phi_{ij}\alpha_j=0 \tag{4.2.6}$$

şeklini alır. $(4.2.6)$ denklemi ayrıştırılırsa;

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\left(\frac{\alpha_2}{\rho^2}+\alpha_3\right)R=0 \tag{4.2.7}$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}+\alpha_2\Psi=0 \tag{4.2.8}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+\left(k^2+\alpha_3\right)Z=0 \tag{4.2.9}$$

şeklinde üç denklem elde edilir.

Bu denklemlerde eğer $\alpha_2 = \mathrm{p}^2$ $\alpha_3 = \mathrm{q}^2$ alınırsa; $(4.2.7),(4.2.8),(4.2.9)$ denklemleri,

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{dr} - \left(q^2 + \frac{p^2}{\rho^2}\right)R = 0, \qquad (4.2.10)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2} + p^2\Psi = 0 \qquad (4.2.11)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \left(k^2 + q^2\right)Z = 0 \qquad (4.2.12)$$

şekline dönüşür. $(4.2.10),(4.2.11)$, $(4.2.12)$ denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$R = A_1 J_p\left(iq\rho\right) + B_1 J_{-p}\left(iq\rho\right) \qquad (4.2.13)$$

$$\Psi = A_2 \sin p\psi + B_2 \cos p\psi \qquad (4.2.14)$$

$$Z = A_3 \sin\left[\left(k^2 + q^2\right)^{\frac{1}{2}} z\right] + B_3 \cos\left[\left(k^2 + q^2\right)^{\frac{1}{2}} z\right] \qquad (4.2.15)$$

olarak bulunur.

Eğer $\alpha_2 = \mathrm{p}^2$ $\alpha_3 = -\mathrm{q}^2$ alınırsa $(4.2.8),(4.2.9),(4.2.10)$ denklemleri,

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(q^2 - \frac{p^2}{\rho^2}\right)R = 0 \qquad (4.2.16)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2} + p^2\Psi = 0 \qquad (4.2.17)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \left(k^2 - q^2\right)Z = 0 \qquad (4.2.18)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$R = A_1 J_p(q\rho) + B_1 J_{-p}(q\rho) \qquad (4.2.19)$$

$$\Psi = A_2 \sin p\psi + B_2 \cos p\psi \qquad (4.2.20)$$

$$Z = A_3 \sin\left[\left(k^2 - q^2\right)^{\frac{1}{2}} z\right] + B_3 \cos\left[\left(k^2 - q^2\right)^{\frac{1}{2}} z\right] \qquad (4.2.21)$$

olarak bulunur.

Eğer $\alpha_2 = 0$ $\alpha_3 = \mathrm{q}^2$ alınırsa $(4.2.8),(4.2.9),(4.2.10)$ denklemleri,

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-q^2R=0 \qquad (4.2.22)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}=0 \qquad (4.2.23)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+\left(k^2+q^2\right)Z=0 \qquad (4.2.23)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$R=A_1J_0(iq\rho)+B_1Y_0(iq\rho) \qquad (4.2.23)$$

$$\Psi=A_2+B_2\psi \qquad (4.2.24)$$

$$Z=A_3\sin\left[\left(k^2+q^2\right)^{\frac{1}{2}}z\right]+B_3\cos\left[\left(k^2+q^2\right)^{\frac{1}{2}}z\right] \qquad (4.2.25)$$

olarak bulunur.

Eğer $\alpha_2=\alpha_3=0$ alınırsa $(4.2.7),(4.2.8),(4.2.9)$ denklemleri,

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}=0 \qquad (4.2.26)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}=0 \qquad (4.2.27)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2Z=0 \qquad (4.2.28)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$R=A_1+B_1\ln\rho \qquad (4.2.29)$$

$$\Psi=A_2+B_2\psi \qquad (4.2.30)$$

$$Z=A_3\sin(kz)+B_3\cos(kz) \qquad (4.2.31)$$

olarak bulunur.

ϕ; z den bağımsız ise $(4.2.7),(4.2.8)$, $(4.2.9)$,denklemleri

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(k^2-\alpha_2/\rho^2\right)R=0 \qquad (4.2.32)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}+\alpha_2\Psi=0 \qquad (4.2.33)$$

olarak bulunur.

Eğer $\alpha_2 = \mathrm{p}^2$ alınırsa $(4.2.32)$, $(4.2.33)$ denklemleri

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{dr}+\left(k^2-p^2/\rho^2\right)R=0 \qquad (4.2.34)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}+p^2\Psi=0 \qquad (4.2.35)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$R=A_1J_p(x\rho)+B_1J_{-p}(x\rho) \qquad (4.2.36)$$

$$\Psi=A_2\sin\left(p\psi\right)+B_2\cos\left(p\psi\right) \qquad (4.2.37)$$

elde edilir.

Eğer $\alpha_2 = 0$ alınırsa $(4.2.32)$, $(4.2.33)$ denklemleri

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+k^2R=0 \qquad (4.2.38)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}=0 \qquad (4.2.39)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$R=A_1J_0(k\rho)+B_1Y_0(k\rho) \qquad (4.2.40)$$

$$\Psi=A_2+B_2\psi \qquad (4.2.41)$$

elde edilir.

ϕ; ψ den bağımsız ise $(4.2.7)$ $(4.2.8)$, $(4.2.9)$,denklemleri

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\alpha_3R=0 \qquad (4.2.42)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+(k^2+\alpha_3)Z=0 \qquad (4.2.43)$$

olarak yazılır.

Eğer $\alpha_3 = q^2$ alınırsa $(4.2.42)$, $(4.2.43)$ denklemleri;

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-q^2R=0 \qquad (4.2.44)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+(k^2+q^2)Z=0 \qquad (4.2.45)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$R = A_1 J_0(iq\rho) + B_1 Y_0(iq\rho) \qquad (4.2.46)$$

$$Z = A_2 \sin\left[\left(k^2+q^2\right)^{1/2} z\right] + B_2 \cos\left[\left(k^2+q^2\right)^{1/2} z\right] \qquad (4.2.47)$$

olarak bulunur.

Eğer $\alpha_3 = -q^2$ alınırsa $(4.2.42)$, $(4.2.43)$ denklemleri;

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + q^2R = 0 \qquad (4.2.48)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + (k^2 - q^2)Z = 0 \qquad (4.2.49)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$R = A_1 J_0(q\rho) + B_1 Y_0(q\rho) \qquad (4.2.50)$$

$$Z = A_2 \sin\left[\left(k^2-q^2\right)^{1/2} z\right] + B_2 \cos\left[\left(k^2-q^2\right)^{1/2} z\right] \qquad (4.2.51)$$

olarak yazılır.

Eğer $\alpha_3 = 0$ alınırsa $(4.2.42)$, $(4.2.43)$ denklemleri;

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} = 0 \qquad (4.2.52)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2Z = 0 \qquad (4.2.53)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$R = A_1 + B_1 \ln \rho \qquad (4.2.54)$$

$$Z = A_2 \sin kz + B_2 \cos kz \qquad (4.2.53)$$

olarak bulunur.

ϕ; ψ ve z den bağımsız ise $(4.2.42)$, $(4.2.43)$ denklemleri;

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho} + k^2\phi = 0 \qquad (4.2.54)$$

şeklini alır ve bu denklemin çözümü

$$\phi = A_1 J_0(k\rho) + B_1 Y_0(k\rho) \qquad (4.2.53)$$

dır.

4.3. Eliptik Silindirik Koordinatlarda Çözüm

Bölüm 3 $(3.2.17)$ bağıntısından bu koordinat sistemi için Stackel Matris ve determinantı;

$$[S]=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -a^2\cosh^2\eta \\ 0 & 1 & a^2\cosh^2\psi \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad S=\det[S]=a^2(\cosh^2\eta-\cos^2\psi) \qquad (4.3.1)$$

şeklinde yazılır. $(3.2.18)$ bağıntısından

$$M_{11}=M_{21}=1 \quad M_{31}=a^2(\cosh^2\eta-\cos^2\psi) \qquad (4.3.2)$$

kofaktörleri elde edilir. $(1.2.25)$ bağıntısından bu sistemdeki metrik katsayıları;

$$g_{11}=g_{22}=S \quad g_{33}=1 \quad g^{\frac{1}{2}}=a^2(\cosh^2\eta-\cos^2\psi) \qquad (4.3.3)$$

olarak yazılır. f_1, f_2, f_3 değerleri ise $(3.2.24)$ bağıntısından yaralanılarak

$$f_1=f_2=f_3=1 \qquad (4.3.4)$$

şeklinde bulunur.

$(3.2.13)$ Helmotz Denklemi;

$$\alpha_1=k^2,\ \ U^1=H(\eta),\ \ U^2=\Psi(\psi),\ \ U^3=Z(z) \qquad (4.3.5)$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{f_i}\frac{d}{du^i}\left(f_i\frac{dU^i}{du^i}\right)+U^i\sum_{j=1}^{3}\phi_{ij}\alpha_j=0 \qquad (4.3.6)$$

şeklinde yazılır. Bu denklem ayrıştırılırsa;

$$\frac{d^2H}{d\eta^2}-(\alpha_2+\alpha_3a^2\cosh^2\eta)H=0 \qquad (4.3.7)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}+(\alpha_2+\alpha_3a^2\cos^2\psi)\Psi=0 \qquad (4.3.8)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+(k^2+\alpha_3)Z=0 \qquad (4.3.9)$$

şeklinde üç denklem elde edilir.

Eğer $q=\alpha_3a^2/4$ ve $\lambda=\alpha_2+\alpha_3a^2/2$ alınırsa, $(4.3.7)$,$(4.3.8)$, $(4.3.9)$ denklemleri;

$$\frac{d^2H}{d\eta^2}-(\lambda+2q\cosh 2\eta)H=0 \qquad (4.3.10)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}+(\lambda+2q\cos 2\psi)\Psi=0 \qquad (4.3.12)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+(k^2+4q/a^2)Z=0 \qquad (4.3.13)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$H=A_1 ce_m(i\eta,-q)+B_1 fe_m(i\eta,-q) \qquad (4.3.14)$$

$$\Psi=A_2 ce_m(\psi,-q)+B_2 fe_m(\psi,-q) \qquad (4.3.15)$$

$$Z=A_3\sin[\left(k^2+4q/a^2\right)^{\frac{1}{2}}z]+B_3\cos[\left(k^2+4q/a^2\right)^{\frac{1}{2}}z] \qquad (4.3.16)$$

olarak bulunur.

Eğer $q=-\alpha_3 a^2/4$ ve $\lambda=\alpha_2+\alpha_3 a^2/2$ alınırsa, $(4.3.7)$,$(4.3.8)$, $(4.3.9)$ denklemleri;

$$\frac{d^2H}{d\eta^2}-(\lambda-2q\cosh 2\eta)H=0 \qquad (4.3.17)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}+(\lambda-2q\cos 2\psi)\Psi=0 \qquad (4.3.18)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+\left(k^2-4q/a^2\right)Z=0 \qquad (4.3.19)$$

şeklini alır.

Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$H=A_1 ce_m(i\eta,q)+B_1 fe_m(i\eta,q) \qquad (4.3.20)$$

$$\Psi=A_2 ce_m(\psi,q)+B_2 fe_m(\psi,q) \qquad (4.3.21)$$

$$Z=A_3\sin[\left(k^2-4q/a^2\right)^{\frac{1}{2}}z]+B_3\cos[\left(k^2-4q/a^2\right)^{\frac{1}{2}}z] \qquad (4.3.22)$$

dır.

Eğer $\alpha_2=\alpha_3=0$ alınırsa, $(4.3.7)$,$(4.3.8)$, $(4.3.9)$ denklemleri;

$$\frac{d^2H}{d\eta^2}=0 \qquad (4.3.23)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}=0 \qquad (4.3.24)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2Z=0 \qquad (4.3.25)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$H=A_1+B_1\eta \qquad (4.3.26)$$

$$\Psi=A_2+B_2\psi \qquad (4.3.26)$$

$$Z=A_3\sin(kz)+B_3\cos(kz) \qquad (4.3.27)$$

olarak bulunur.

Eğer ϕ; z den bağımsız ise $(4.3.7)$, $(4.3.8)$, $(4.3.9)$ denklemleri,

$$\frac{d^2H}{d\eta^2}-(\alpha_2-k^2a^2\cosh^2\eta)H=0 \qquad (4.3.28)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}+(\alpha_2-k^2a^2\cosh^2\psi)\Psi=0 \qquad (4.3.29)$$

şeklini alır.

$q=k^2a^2/4$ ve $\lambda=\alpha_2-k^2a^2/2$ için $(4.3.28)$, $(4.3.29)$ denklemleri;

$$\frac{d^2H}{d\eta^2}-(\lambda-2q\cosh 2\eta)H=0 \qquad (4.3.30)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}+(\lambda-2q\cosh 2\psi)\Psi=0 \qquad (4.3.31)$$

şekline dönüşür. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$H=A_1ce_m(i\eta,q)+B_1 fe_m(i\eta,q) \qquad (4.3.32)$$

$$\Psi=A_2ce_m(\psi,q)+B_2 fe_m(\psi,q) \qquad (4.3.33)$$

olarak bulunur.

Eğer $q=-k^2a^2/4$ ve $\lambda=\alpha_2-k^2a^2/2$ olarak alınırsa, $(4.3.28)$, $(4.3.29)$ denklemleri

$$\frac{d^2H}{d\eta^2}-(\lambda+2q\cosh 2\eta)H=0 \qquad (4.3.34)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2} + (\lambda + 2q\cosh 2\psi)\Psi = 0 \qquad (4.3.35)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$\mathrm{H} = \mathrm{A}_1 ce_m(i\eta, -q) + \mathrm{B}_1 fe_m(i\eta, -q) \qquad (4.3.36)$$

$$\Psi = \mathrm{A}_2 ce_m(\psi, -q) + \mathrm{B}_2 fe_m(\psi, -q) \qquad (4.3.37)$$

dır.

4.4. Parabolik Silindirik Koordinatlarda Çözüm

Bölüm 3 $(3.2.17)$ bağıntısından bu koordinat sistemi için Stackel Matris ve determinantı;

$$[S]=\begin{bmatrix}0 & -1 & \mu^2\\ 0 & 1 & -v^2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad S=\det[S]=\mu^2+v^2 \tag{4.4.1}$$

şeklinde yazılır. $(3.2.18)$ bağıntısından,

$$M_{11}=M_{21}=1,\ \ M_{31}=\mu^2+v^2 \tag{4.4.2}$$

kofaktörleri elde edilir. $(1.2.25)$ bağıntısından metrik katsayıları;

$$g_{11}=g_{22}=\mu^2+v^2\quad g_{33}=1\quad g^{\frac{1}{2}}=\mu^3+v^2 \tag{4.4.3}$$

şeklinde yazılarak $(3.2.24)$ bağıntısından;

$$f_1=f_2=f_3=1 \tag{4.4.4}$$

değeri bulunur.

$(3.2.13)$ Helmotz Denklemi;

$$\alpha_1=k^2\quad U^1=M(\mu)\quad U^2=N(v)\quad U^3=Z(z) \tag{4.4.5}$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{f_i}\frac{d}{du^i}\left(f_i\frac{dU^i}{du^i}\right)+U^i\sum_{j=1}^{3}\phi_{ij}\alpha_j=0 \tag{4.4.6}$$

şeklini alır. Bu denklem ayrıştırılırsa;

$$\frac{d^2M}{d\mu^2}-(\alpha_2+\alpha_3\mu^2)M=0 \tag{4.4.7}$$

$$\frac{d^2N}{dv^2}+(\alpha_2-\alpha_3\nu^2)N=0 \tag{4.4.8}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+(k^2+\alpha_3)Z=0 \tag{4.4.9}$$

olarak üç denklem elde edilir.

Eğer $\alpha_2 = q^2(p+1/2)$ ve $\alpha_3 = q^4/4$ alınırsa $(4.4.7)$,$(4.4.8)$, $(4.4.9)$, denklemleri,

$$\frac{d^2M}{d\mu^2} - [q^2(p+1/2) + q^4\mu^2/4]M = 0 \qquad (4.4.10)$$

$$\frac{d^2N}{dv^2} + [q^2(p+1/2) - q^4\nu^2/4]N = 0 \qquad (4.4.11)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \left(k^2 + q^4/4\right)Z = 0 \qquad (4.4.12)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$M = A_1 W_e(p, iq\mu) + B_1 W_0(p, iq\mu) \qquad (4.4.13)$$

$$N = A_2 W_e(p, q\nu) + B_2 W_0(p, q\nu) \qquad (4.4.14)$$

$$Z = A_3 \sin[\left(k^2 + q^4/4\right)^{\frac{1}{2}} z] + B_3 \cos[\left(k^2 + q^4/4\right)^{\frac{1}{2}} z] \qquad (4.4.15)$$

olarak bulunur.

$\alpha_2 = -q^2(p+1/2)$ ve $\alpha_3 = q^4/4$ alınırsa $(4.4.7)$, $(4.4.8)$, $(4.4.9)$, denklemleri,

$$\frac{d^2M}{d\mu^2} + [q^2(p+1/2) - q^4/\mu^2 4]M = 0 \qquad (4.4.16)$$

$$\frac{d^2N}{dv^2} - [q^2(p+1/2) + q^4\nu^2/4]N = 0 \qquad (4.4.17)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \left(k^2 + q^4/4\right)Z = 0 \qquad (4.4.18)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$M = A_1 W_e(p, q\mu) + B_1 W_0(p, q\mu) \qquad (4.4.19)$$

$$N = A_2 W_e(p, iq\nu) + B_2 W_0(p, iq\nu) \qquad (4.4.20)$$

$$Z = A_3 \sin[\left(k^2 + q^4/4\right)^{\frac{1}{2}} z] + B_3 \cos[\left(k^2 + q^4/4\right)^{\frac{1}{2}} z] \qquad (4.4.21)$$

olarak bulunur.

Eğer $\alpha_2 = 0,$ ve $\alpha_3 = -q^2$ alınırsa $(4.4.7)$, $(4.4.8)$, $(4.4.9)$ denklemleri,

$$\frac{d^2M}{d\mu^2} + q^2\mu^2 M = 0 \qquad (4.4.22)$$

$$\frac{d^2N}{dv^2} + q^2\nu^2 N = 0 \qquad (4.4.23)$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + (k^2 - q^2)Z = 0 \qquad (4.4.24)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$M = \mu^{\frac{1}{2}}[A_1 J_{1/4}(q\mu^2/2) + B_1 J_{-1/4}(q\mu^2/2)] \qquad (4.4.25)$$

$$N = \nu^{\frac{1}{2}}[A_2 J_{1/4}(q\nu^2/2) + B_2 J_{-1/4}(q\nu^2/2)] \qquad (4.4.26)$$

$$Z = A_3 \sin[(k^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} z] + B_3 \cos[(k^2 - q^2)^{\frac{1}{2}} z] \qquad (4.4.27)$$

Eğer ϕ; z den bağımsız ise, $(4.4.7)$, $(4.4.8)$, $(4.4.9)$

$$\frac{d^2M}{d\mu^2} - (\alpha_2 - k^2\mu^2)M = 0 \qquad (4.4.28)$$

$$\frac{d^2N}{dv^2} + (\alpha_2 + k^2\nu^2)N = 0 \qquad (4.4.29)$$

şeklini alır.

Eğer $\alpha_2 = q^2$ alınırsa, $(4.4.28)$, $(4.4.29)$ denklemleri;

$$\frac{d^2N}{d\mu^2} - \left(q^2 - k^2\mu^2\right)M = 0 \qquad (4.4.30)$$

$$\frac{d^2N}{d\nu^2} + \left(q^2 + k^2\nu^2\right)N = 0 \qquad (4.4.31)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$M = \sqrt{i\mu}[A_1 J_{1/2}(k, q, i\mu) + B_1 J_{-1/2}(k, q, i\mu)] \qquad (4.4.32)$$

$$N = \nu^{\frac{1}{2}}[A_2 J_{1/2}(k, q, \nu) + B_2 J_{-1/2}(k, q, \nu)] \qquad (4.4.33)$$

olarak bulunur.

Eğer $\alpha_2 = -q^2$ alınırsa, $(4.4.28)$, $(4.4.29)$ denklemleri;

$$\frac{d^2M}{d\mu^2}+\left(q^2+k^2\mu^2\right)M=0 \qquad (4.4.34)$$

$$\frac{d^2N}{dv^2}-\left(q^2-k^2v^2\right)N=0 \qquad (4.4.35)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$M=\mu^{\frac{1}{2}}[A_1J_{1/2}(k,q,\mu)+B_1J_{-1/2}(k,q,\mu)] \qquad (4.4.36)$$

$$N=\sqrt{i\nu}[A_2J_{1/2}(k,q,i\nu)+B_2J_{-1/2}(k,q,i\nu)] \qquad (4.4.37)$$

olarak bulunur.

Eğer $\alpha_2=0$ alınırsa, $(4.4.28)$, $(4.4.29)$ denklemleri;

$$\frac{d^2M}{d\mu^2}+k^2\mu^2M=0 \qquad (4.4.38)$$

$$\frac{d^2N}{dv^2}+k^2\nu^2N=0 \qquad (4.4.39)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$M=\mu^{\frac{1}{2}}[A_1J_{1/4}(k\mu^2/2)+B_1J_{-1/4}(k\mu^2/2)] \qquad (4.4.40)$$

$$N=\nu^{\frac{1}{2}}[A_2J_{1/4}(k\nu^2/2)+B_2J_{-1/4}(k\nu^2/2)] \qquad (4.4.41)$$

dır.

4.5. Küresel Koordinatlarda Çözüm

Bölüm 3 $(3.2.17)$ bağıntısından bu koordinat sistemi için Stackel Matris ve determinantı;

$$[S]=\begin{bmatrix} 1 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/\sin^2\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad S=\det[S]=1 \qquad (4.5.1)$$

şeklinde yazılır. $(3.2.18)$ bağıntısından,

$$M_{11}=1,\quad M_{21}=1/r^2,\quad M_{31}=1/\left(r^2\sin^2\theta\right) \qquad (4.5.2)$$

kofaktörleri elde edilir. $(1.2.25)$ bağıntısından bu sistemdeki metrik katsayıları,

$$g_{11}=1 \quad g_{22}=r^2 \quad g_{33}=r^2\sin^2\theta \quad g^{\frac{1}{2}}=r^2\sin\theta \qquad (4.5.3)$$

olarak bulunur. f_1, f_2, f_3 değerleri ise $(3.2.24)$ bağıntısından,

$$f_1=r^2,\quad f_2=\sin\theta,\quad f_3=1 \qquad (4.5.4)$$

şeklinde elde edilir.

$(3.2.13)$ Helmotz Denklemi;

$$\alpha_1=k^2 \quad U^1=R(r) \quad U^2=\Theta(\theta) \quad U^3=\Psi(\psi) \qquad (4.5.5)$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{f_i}\frac{d}{du^i}\left(f_i\frac{dU^i}{du^i}\right)+U^i\sum_{j=1}^{3}\phi_{ij}\alpha_j=0 \qquad (4.5.6)$$

şeklini alır. $(4.5.6)$ denklemi ayrıştırılırsa;

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left(k^2-\alpha_2/r^2\right)R=0 \qquad (4.5.7)$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}+(\alpha_2-\alpha_3/\sin^2\theta)\Theta=0 \qquad (4.5.8)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}\alpha_3\Psi=0 \qquad (4.5.9)$$

şeklinde üç denklem elde edilir.

Eğer $\alpha_2 = \mathrm{p}(\mathrm{p}+1)$ ve $\alpha_3 = \mathrm{q}^2$ alınırsa $(4.5.7)$, $(4.5.8)$, $(4.5.9)$ denklemleri;

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{R}}{\mathrm{dr}^2} + \frac{2}{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dr}} + \left[\mathrm{k}^2 - \mathrm{p}(\mathrm{p}+1)/\mathrm{r}^2\right]\mathrm{R} = 0 \tag{4.5.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} + \cot\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} + \left[\mathrm{p}(\mathrm{p}+1) - \mathrm{q}^2/\sin^2\theta\right]\Theta = 0 \tag{4.5.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\psi^2} + \mathrm{q}^2\Psi = 0 \tag{4.5.12}$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$\mathrm{R} = r^{-\frac{1}{2}}\left[\mathrm{A}_1 J_{p+1/2}(kr) + \mathrm{B}_1 J_{-(p+1/2)}(kr)\right] \tag{4.5.13}$$

$$\Theta = \mathrm{A}_2 P_p^q(\cos\theta) + \mathrm{B}_2 L_p^q(\cos\theta) \tag{4.5.14}$$

$$\Psi = \mathrm{A}_3 \sin q\psi + \mathrm{B}_3 \cos q\psi \tag{4.5.15}$$

dır.

ϕ; ψ den bağımsız ise; $(4.5.7)$, $(4.5.8)$, $(4.5.9)$ denklemleri;

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{R}}{\mathrm{dr}^2} + \frac{2}{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dr}} + \left(\mathrm{k}^2 - \alpha_2/\mathrm{r}^2\right)\mathrm{R} = 0 \tag{4.5.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} + \cot\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} + \alpha_2\Theta = 0 \tag{4.5.17}$$

olarak yazılır.

$\alpha_2 = \mathrm{p}(\mathrm{p}+1)$ olarak alınırsa; $(4.5.16)$ ve $(4.5.17)$ denklemleri;

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{R}}{\mathrm{dr}^2} + \frac{2}{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dr}} + \left[\mathrm{k}^2 - \mathrm{p}(\mathrm{p}+1)/\mathrm{r}^2\right]\mathrm{R} = 0 \tag{4.5.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} + \cot\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} + \mathrm{p}(\mathrm{p}+1)\Theta = 0 \tag{4.5.19}$$

şekline dönüşür. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$\mathrm{R} = r^{-\frac{1}{2}}\left[\mathrm{A}_1 J_{p+1/2}(kr) + \mathrm{B}_1 J_{-(p+1/2)}(kr)\right] \tag{4.5.20}$$

$$\Theta = \mathrm{A}_2 P_p(\cos\theta) + \mathrm{B}_2 L_p(\cos\theta) \tag{4.5.21}$$

olarak bulunur. ϕ; θ ve ψ den bağımsız ise $(4.5.7)$, $(4.5.8)$, $(4.5.9)$ denklemleri;

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{dr}^2} + \frac{2}{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dr}} + \mathrm{k}^2\phi = 0 \tag{4.5.22}$$

olarak yazılır. Denklemin çözümü ise;

$$\phi = \frac{1}{r}\left[\mathrm{A}_1 \sin(kr) + \mathrm{B}_1 \cos(kr) \right] \tag{4.5.23}$$

dır.

4.6. Prolate Küresel Koordinatlarda Çözüm

Bölüm 3 $(3.2.17)$ bağıntısından bu koordinat sistemi için Stackel Matris ve determinantı;

$$[S]=\begin{bmatrix} a^2\sinh^2\eta & -1 & 1/\sinh^2\eta \\ -a^2\sin^2\theta & 1 & -1/\sinh^2\psi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.6.1)$$

$$S=\det[S]=a^2(\cosh^2\eta-\sin^2\theta)\ =a^2(\cos^2\eta-\cos^2\theta) \qquad (4.6.2)$$

şeklinde yazılır. $(3.2.18)$ bağıntısından,

$$M_{11}=M_{21}=1 \quad M_{31}=\frac{\sinh^2\eta+\sin^2\theta}{\sinh^2\eta\sin^2\theta} \qquad (4.6.3)$$

kofaktörleri elde edilir. $(1.2.25)$ Bağıntısından bu sistemdeki metrik katsayıları,

$$g_{11}=g_{22}=a^2(\sinh^2\eta-\sin^2\theta) \quad g_{33}=a^2(\sinh^2\eta\sin^2\theta)$$
$$g^{\frac{1}{2}}=a^3(\sinh^2\eta-\sin^2\theta)\sinh\eta\sin\theta \qquad (4.6.4)$$

olarak bulunur. f_1,f_2,f_3 değerleri ise $(3.2.24)$ bağıntısından,

$$f_1=\sinh\eta,\ f_2=\sin\theta,\ f_3=a \qquad (4.6.5)$$

olarak ifade edilir.

$(3.2.13)$ Helmotz Denklemi;

$$\alpha_1=k^2,\ \ U^1=H(\eta),\quad U^2=\Theta(\theta),\quad U^3=\Psi(\psi) \qquad (4.6.6)$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{f_i}\frac{d}{du^i}\left(f_i\frac{dU^i}{du^i}\right)+U^i\sum_{j=1}^{3}\phi_{ij}\alpha_j=0 \qquad (4.6.7)$$

şeklini alır. Bu denklem ayrıştırılırsa;

$$\frac{d^2H}{d\eta^2}+\coth\eta\frac{dH}{d\eta}+\left(k^2a^2\sinh^2\eta-\alpha_2-\alpha_3/\sinh^2\eta\right)H=0 \qquad (4.6.8)$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}+(k^2a^2\sin^2\theta+\alpha_2-\alpha_3/\sinh^2\eta)\Theta=0 \qquad (4.6.9)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}\alpha_3\Psi=0 \qquad (4.6.10)$$

şeklinde üç denklem elde edilir.

Bu denklemlerde eğer $\alpha_2 = \mathrm{p}(\mathrm{p}+1)$ ve $\alpha_3 = \mathrm{q}^2$ alınırsa; $(4.2.8),(4.2.9),(4.2.10)$ denklemleri;

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{H}}{\mathrm{d}\eta^2} + \cot\mathrm{h}\,\eta\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}\eta} + \left(\mathrm{k}^2\alpha^2\cosh^2\eta - \mathrm{p}(\mathrm{p}+1) - \mathrm{q}^2/\cosh^2\eta\right)\mathrm{H} = 0 \qquad (4.6.11)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} + \cot\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} + \left(\mathrm{k}^2\alpha^2\sinh^2\eta + \mathrm{p}(\mathrm{p}+1) - \mathrm{q}^2/\sinh^2\eta\right)\Theta = 0 \qquad (4.6.12)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\psi^2} + \mathrm{q}^2\Psi = 0 \qquad (4.6.13)$$

şeklini alır. $(4.6.11),(4.6.12),(4.6.13)$ denklemlerinin çözümü;

$$\mathrm{H} = \mathrm{A}_1 P_p^q\left(k.a,\cosh\eta\right) + \mathrm{B}_1 L_p^q\left(k.a,\cosh\eta\right) \qquad (4.6.14)$$

$$\Theta = \mathrm{A}_2 P_p^q\left(k.a,\cos\theta\right) + \mathrm{B}_2 L_p^q\left(k.a,\cos\theta\right) \qquad (4.6.15)$$

$$\Psi = \mathrm{A}_3\sin\mathrm{q}\psi + \mathrm{B}_3\mathrm{c}\,\mathrm{os}\,\mathrm{q}\psi \qquad (4.6.16)$$

olarak bulunur.

ϕ; ψ den bağımsız ise $(4.6.8)$, $(4.6.9)$, $(4.6.10)$ denklemleri

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{H}}{\mathrm{d}\eta^2} + \coth\eta\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}\eta} + \left(\mathrm{k}^2\mathrm{a}^2\sinh^2\eta - \alpha_2\right)\mathrm{H} = 0 \qquad (4.6.17)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} - \cot\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} + (\mathrm{k}^2\mathrm{a}^3\sin^2\theta + \alpha_2)\Theta = 0 \qquad (4.6.18)$$

olarak bulunur.

Eğer $\alpha_2 = \mathrm{p}(\mathrm{p}+1)$ alınırsa $(4.6.14)$ ve $(4.6.15)$ denklemleri

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{H}}{\mathrm{d}\eta^2} + \cot\mathrm{h}\,\eta\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{d}\eta} + \left(\mathrm{k}^2\alpha^2\sinh^2\eta - \mathrm{p}(\mathrm{p}+1)\right)\mathrm{H} = 0 \qquad (4.6.19)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} - \cot\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} + \left(\mathrm{k}^2\alpha^2\sin^2\theta + \mathrm{p}(\mathrm{p}+1)\right)\Theta = 0 \qquad (4.6.20)$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$\mathrm{H} = \mathrm{A}_1 P_p(ka,\cosh\eta) + \mathrm{B}_1 L_p(ka,\cosh\eta) \qquad (4.6.21)$$

$$\Theta = \mathrm{A}_2 P_p(ka,\cos\theta) + \mathrm{B}_2 L_p(ka,\cos\theta) \qquad (4.6.22)$$

olarak bulunur.

4.7. Oblate Küresel Koordinatlarda Çözüm.

Bölüm 3 $(3.2.17)$ bağıntısından bu koordinat sistemi için Stackel Matris ve determinantı;

$$[S]=\begin{bmatrix} a^2\cosh^2\eta & -1 & 1/\cosh^2\eta \\ -a^2\sin^2\theta & 1 & -1/\sinh^2\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.7.1}$$

$$S=\det[S]=a^2(\cosh^2\eta-\sin^2\theta)\;=a^2(\sin^2\eta+\cos^2\theta) \tag{4.7.2}$$

şeklinde yazılır. $(3.2.18)$ bağıntısından

$$M_{11}=M_{21}=1,\;\; M_{31}=\frac{\cosh^2\eta-\sin^2\theta}{\cosh^2\eta\sin^2\theta} \tag{4.7.3}$$

kofaktörleri elde edilir. $(1.2.25)$ Bağıntısından bu sistemdeki metrik katsayıları,

$$\begin{gathered} g_{11}=g_{22}=a^2(\cosh^2\eta-\sin^2\theta) \quad g_{33}=a^2(\cosh^2\eta\sin^2\theta) \\ g^{\frac{1}{2}}=a^3(\cosh^2\eta-\sin^2\theta)\cosh\eta\sin\theta \end{gathered} \tag{4.7.4}$$

olarak bulunur. f_1, f_2, f_3 değerleri ise $(3.2.24)$ bağıntısından

$$f_1=\cosh\eta,\quad f_2=\sin\theta,\quad f_3=a \tag{4.7.5}$$

şeklinde elde edilir.

$(3.2.13)$ Helmotz Denklemi;

$$\alpha_1=k^2 \quad U^1=H(\eta) \quad U^2=\Theta(\theta) \quad U^3=\Psi(\psi) \tag{4.7.6}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{f_i}\frac{d}{du^i}\left(f_i\frac{dU^i}{du^i}\right)+U^i\sum_{j=1}^{3}\phi_{ij}\alpha_j=0 \tag{4.7.7}$$

şeklini alır. Bu denklem ayrıştırılırsa;

$$\frac{d^2H}{d\eta^2}+\tanh\eta\frac{dH}{d\eta}+\left(k^2a^2\cosh^2\eta-\alpha_2+\alpha_3/\cosh^2\eta\right)H=0 \tag{4.7.8}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}+(-k^2a^2\sin^2\theta+\alpha_2-\alpha_3/\sin^2\theta)\Theta=0 \tag{4.7.9}$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}+\alpha_3\Psi=0 \tag{4.7.10}$$

şeklinde üç denklem elde edilir.

Bu denklemlerde eğer $\alpha_2 = \mathrm{p(p+1)}$ $\alpha_3 = \mathrm{q}^2$ alınırsa; $(4.7.8)$, $(4.7.9)$, $(4.7.10)$ denklemleri,

$$\frac{d^2H}{d\eta^2} + \tan h\eta \frac{dH}{d\eta} + \left(k^2a^2 \cosh^2\eta - p(p+1) + q^2/\cosh^2\eta\right)H = 0 \qquad (4.7.11)$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left(-k^2a^2 \sin^2\theta + p(p+1) - q^2/\sin^2\theta\right)\Theta = 0 \qquad (4.7.12)$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2} + q^2\Psi = 0 \qquad (4.7.13)$$

şeklini alır. $(4.7.11)$, $(4.7.12)$, $(4.7.13)$ denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$H = A_1 P_p^q(ika, i\sinh\eta) + B_1 L_p^q(ika, i\sinh\eta) \qquad (4.7.14)$$

$$\Theta = A_2 P_p^q(ika, \cos\theta) + B_2 L_p^q(ika, \cos\theta) \qquad (4.7.15)$$

$$\Psi = A_3 \sin q\psi + B_3 \cos q\psi \qquad (4.7.16)$$

olarak bulunur.

Eğer $\phi;\psi$ den bağımsız ise $(4.7.8)$, $(4.7.9)$, $(4.7.10)$ denklemleri

$$\frac{d^2H}{d\eta^2} + \tanh\eta \frac{dH}{d\eta} + \left(k^2a^2 \cosh^2\eta - \alpha_2\right)H = 0 \qquad (4.7.17)$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + c\,ot\,\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + (-k^2\alpha^3 \sin^2\theta + \alpha_2)\Theta = 0 \qquad (4.7.18)$$

olarak yazılır.

Eğer $\alpha_2 = \mathrm{p(p+1)}$ alınırsa $(4.7.17)$, $(4.7.17)$ denklemleri,

$$\frac{d^2H}{d\eta^2} + \tan h\eta \frac{dH}{d\eta} + \left(k^2\alpha^2 \sinh^2\eta - p(p+1)\right)H = 0 \qquad (4.7.19)$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left(-k^2\alpha^2 \sin^2\theta + p(p+1)\right)\Theta = 0 \qquad (4.7.20)$$

şeklini alır. $(4.7.19)$ ve $(4.7.20)$ denklemlerin çözümleri ise sırasıyla

$$H = A_1 P_p(ika, i\sinh\eta) + B_1 L_p(ika, i\sinh\eta) \qquad (4.7.21)$$

$$\Theta = A_2 P_p(ika, \cos\theta) + B_2 L_p(ika, \cos\theta) \qquad (4.7.22)$$

şeklinde ifade edilir.

4.8. Parabolik Koordinatlarda Çözüm

Bölüm 3 $(3.2.17)$ bağıntısından bu koordinat sistemi için Stackel Matris ve determinantı;

$$[S]=\begin{bmatrix}\mu^2 & -1 & -1/\mu^2\\ \nu^2 & 1 & -1/\nu^2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad S=\det[S]=\mu^2+\nu^2 \tag{4.8.1}$$

şeklinde yazılır. $(3.2.18)$ bağıntısından,

$$M_{11}=M_{21}=1 \quad M_{31}=\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2\nu^2} \tag{4.8.2}$$

kofaktörleri elde edilir. $(1.2.25)$ Bağıntısından bu sistemdeki metrik katsayıları,

$$g_{11}=g_{22}=\mu^2+\nu^2,\quad g_{33}=\mu^2\nu^2,\quad g^{\frac{1}{2}}=(\mu^2+\nu^2)\mu\nu \tag{4.8.3}$$

olarak bulunur. f_1, f_2, f_3 değerleri ise $(3.2.24)$ bağıntısından,

$$f_1=\mu \quad f_2=\nu \quad f_3=1 \tag{4.8.4}$$

şeklinde elde edilir.

$(3.2.13)$ Helmotz Denklemi;

$$\alpha_1=k^2,\quad U^1=M(\mu),\quad U^2=N(\nu),\quad U^3=\Psi(\psi) \tag{4.8.4}$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{f_i}\frac{d}{du^i}\left(f_i\frac{dU^i}{du^i}\right)+U^i\sum_{j=1}^{3}\phi_{ij}\alpha_j=0 \tag{4.8.5}$$

şeklini alır. Bu denklem ayrıştırılırsa;

$$\frac{d^2M}{d\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{dM}{d\mu}+(k^2\mu^2-\alpha_2-\alpha_3/\mu^2)M=0 \tag{4.8.6}$$

$$\frac{d^2N}{d\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{dN}{dv}+(k^2\nu^2+\alpha_2-\alpha_3/\nu^2)N=0 \tag{4.8.7}$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2}+\alpha_3\psi=0 \tag{4.8.8}$$

şeklinde üç denklem elde edilir.

Bu denklemlerde eğer $\alpha_2 = \mathrm{q}^2$ ve $\alpha_3 = \mathrm{p}^2$ alınırsa; $(4.8.6),(4.8.7),(4.8.8)$ denklemleri,

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{M}}{\mathrm{d}\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}\mu}+(\mathrm{k}^2\mu^2-\mathrm{q}^2-\mathrm{p}^2/\mu^2)\mathrm{M}=0 \tag{4.8.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{N}}{\mathrm{d}\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{d}\nu}+(\mathrm{k}^2\nu^2+\mathrm{q}^2-\mathrm{p}^2/\nu^2)\mathrm{N}=0 \tag{4.8.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\psi^2}+\mathrm{p}^2\psi=0 \tag{4.8.11}$$

şeklini alır. $(4.8.9),(4.8.10)$, $(4.8.11)$ denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$\mathrm{M}=\mathrm{A}_1 J_p(k,iq\mu)+\mathrm{B}_1 J_{-p}(k,ik\mu) \tag{4.8.12}$$

$$\mathrm{N}=\mathrm{A}_2 J_p(k,q\nu)+\mathrm{B}_2 J_{-p}(k,q\nu) \tag{4.8.13}$$

$$\Psi=\mathrm{A}_3\sin\mathrm{p}\psi+\mathrm{B}_3\cos\mathrm{p}\psi \tag{4.8.14}$$

olarak bulunur.

ϕ; ψ den bağımsız ise $(4.8.6),(4.8.7),(4.8.8)$ denklemleri,

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{M}}{\mathrm{d}\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}\mu}+(\mathrm{k}^2\mu^2-\alpha_2)\mathrm{M}=0 \tag{4.8.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{N}}{\mathrm{d}\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dv}}(\mathrm{k}^2\nu^2+\alpha_2)\mathrm{N}=0 \tag{4.8.16}$$

olarak yazılır.

Eğer $\alpha_2 = \mathrm{q}^2$ ise $(4.8.15)$ ve $(4.8.16)$ denklemleri;

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{M}}{\mathrm{d}\mu^2}+\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{d}\mu}+(\mathrm{k}^2\mu^2-\mathrm{q}^2)\mathrm{M}=0 \tag{4.8.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{N}}{\mathrm{d}\nu^2}+\frac{1}{\nu}\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dv}}+(\mathrm{k}^2\nu^2+\mathrm{q}^2)\mathrm{N}=0 \tag{4.8.18}$$

şeklini alır. Bu denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$\mathrm{M}=\mathrm{A}_1 J_0(k,qi\mu)+\mathrm{B}_1 Y_0(k,qi\mu)] \tag{4.8.19}$$

$$\mathrm{N}=\mathrm{A}_2 J_0(k,q\nu)+\mathrm{B}_2 Y_0(k,q\nu) \tag{4.8.20}$$

olarak bulunur.

4.9. Konikal Koordinatlarda Çözüm

Bölüm 3 $(3.2.17)$ bağıntısından bu koordinat sistemi için Stackel Matris ve determinantı;

$$[S]=\begin{bmatrix} 1 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{\theta^2}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)} & \dfrac{-1}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)} \\ 0 & \dfrac{-\lambda^2}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)} & \dfrac{1}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)} \end{bmatrix} \tag{4.9.1}$$

$$S=\det[S]=\frac{\theta^2-\lambda^2}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)} \tag{4.9.2}$$

şeklinde yazılır. $(3.2.18)$ bağıntısından,

$$M_{11}=\det[S],\quad M_{21}=\frac{1}{r^2}\frac{1}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)},\quad M_{31}=\frac{1}{r^2}\frac{1}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)} \tag{4.9.3}$$

kofaktörleri elde edilir. $(1.2.25)$ Bağıntısından bu sistemdeki metrik katsayıları,

$$g_{11}=1,\quad g_{22}=\frac{r^2(\theta^2-\lambda^2)}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)},\qquad g_{33}=\frac{r^2(\theta^2-\lambda^2)}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)} \tag{4.9.4}$$

$$g^{\frac{1}{2}}=\frac{r^2(\theta^2-\lambda^2)}{[(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)]^{\frac{1}{2}}} \tag{4.9.5}$$

olarak bulunur. f_1,f_2,f_3 değerleri ise $(3.2.24)$ bağıntısından,

$$f_1=r^2,\quad f_2=[(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)]^{1/2},\quad f_3=[(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)]^{\frac{1}{2}} \tag{4.9.6}$$

şeklinde elde edilir.

$(3.3.2)$ Helmotz Denklemi;

$$\alpha_1=k^2\quad U^1=R(r)\quad U^2=\Theta(\theta)\quad U^3=\Lambda(\lambda) \tag{4.9.7}$$

olmak üzere,

$$\frac{1}{f_i}\frac{d}{du^i}\left(f_i\frac{dU^i}{du^i}\right)+U^i\sum_{j=1}^{3}\phi_{ij}\alpha_j=0 \tag{4.9.8}$$

şeklini alır. Bu denklem ayrıştırılırsa;

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+(k^2-\alpha_2/r^2)R=0 \qquad (4.9.9)$$

$$\left(\theta^2-b^2\right)\left(c^2-\theta^2\right)\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}-\theta[2\theta^2-(b^2+c^2)]\frac{d\Theta}{d\theta}+\left[\alpha_2\theta^2-\alpha_3\right]\Theta=0 \qquad (4.9.10)$$

$$\left(b^2-\lambda^2\right)\left(c^2-\lambda^2\right)\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}+\lambda[2\lambda^2-(b^2+c^2)]\frac{d\Lambda}{d\lambda}-\left[\alpha_2\lambda^2-\alpha_3\right]\Lambda=0 \qquad (4.9.11)$$

şeklinde üç denklem elde edilir.

Bu denklemlerde eğer $\alpha_2=p(p+1)$ ve $\alpha_3=q(b^2+c^2)$ alınırsa;

$(4.9.9),(4.9.10),(4.9.11)$ denklemleri,

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+(k^2-p(p+1)/r^2)R=0 \qquad (4.9.12)$$

$$(\theta^2-b^2)(\theta^2-c^2)\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\theta\left[2\theta^2-(b^2+c^2)\right]\frac{d\Theta}{d\theta}-[p(p+1)\theta^2-q(b^2+c^2)]\Theta=0 \qquad (4.9.13)$$

$$(\lambda^2-b^2)(\lambda^2-c^2)\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}+\theta\left[2\lambda^2-(b^2+c^2)\right]\frac{d\Lambda}{d\lambda}-[p(p+1)\lambda^2-q(b^2+c^2)]\Lambda=0 \qquad (4.9.14)$$

şeklini alır. $(4.9.12),(4.9.13)$, $(4.9.14)$ denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$R=r^{-1/2}[A_1J_{p+1/2}(kr)+B_1J_{-(p+1/2)}(kr)] \qquad (4.9.15)$$

$$\Theta=A_2E_p^q(\theta)+B_2F_p^q(\theta) \qquad (4.9.16)$$

$$\Lambda=E_p^q(\lambda)+B.F_p^q(\lambda) \qquad (4.9.17)$$

olarak bulunur.

Eğer $\alpha_2=\alpha_3=0$ alınırsa, $(4.9.9),(4.9.10),(4.9.11)$ denklemleri,

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+k^2r=0 \qquad (4.9.18)$$

$$\frac{d}{d\theta}[(\theta^2-b^2)^{1/2}(c^2-\theta^2)^{1/2}]\frac{d\Theta}{d\theta}=0 \qquad (4.9.19)$$

$$\frac{d}{d\lambda}[(b^2-\lambda^2)^{1/2}(c^2-\lambda^2)^{1/2}]\frac{d\Lambda}{d\lambda}=0 \qquad (4.9.20)$$

şeklini alır. $(4.2.10),(4.2.11)$, $(4.2.12)$ denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$R = \frac{1}{r}[A_1 \sin kr + B_1 \cos kr] \qquad (4.9.21)$$

$$\Theta = A_2 + B_2 sin^{-1}\left(\frac{\theta}{b}, \frac{b}{c}\right) \qquad (4.9.22)$$

$$\Lambda = A_3 + B_3 sin^{-1}\left(\frac{\lambda}{b}, \frac{b}{c}\right) \qquad (4.9.22)$$

ϕ ; θ ve λ den sağımsız ise $(4.9.9)$, $(4.9.10)$, $(4.9.11)$ denklemleri,

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr} + k^2\phi = 0 \qquad (4.9.23)$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü ise;

$$R = 1/r[A_1 \sin(kr) + B_1 \cos(kr)] \qquad (4.9.24)$$

şeklindedir.

4.10. Elipsoidal Koordinatlarda Çözüm

Bölüm 3 $(3.2.17)$ bağıntısından bu koordinat sistemi için Stackel Matris ve determinantı;

$$[S]=\begin{bmatrix} \dfrac{\eta^4}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)} & \dfrac{1}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)} & \dfrac{\eta^2}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)} \\ \dfrac{-\theta^4}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)} & \dfrac{-1}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)} & \dfrac{-\theta^2}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)} \\ \dfrac{\lambda^4}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)} & \dfrac{1}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)} & \dfrac{\lambda^2}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)} \end{bmatrix} \quad (4.10.1)$$

$$\det[S]=\frac{(\eta^2-\theta^2)(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\theta^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)} \quad (4.10.2)$$

şeklinde yazılır. $(3.2.18)$ bağıntısından;

$$\begin{aligned} M_{11}&=\frac{(\theta^2-\lambda^2)}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)} \\ M_{21}&=\frac{(\eta^2-\lambda^2)}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)} \\ M_{31}&=\frac{(\eta^2-\theta^2)}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)} \end{aligned} \quad (4.10.3)$$

kofaktörleri elde edilir. $(1.2.25)$ Bağıntısından bu sistemdeki metrik katsayıları,

$$\begin{aligned} g_{11}&=\frac{(\eta^2-\theta^2)(\eta^2-\lambda^2)}{(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)} \\ g_{22}&=\frac{(\theta^2-\lambda^2)(\eta^2-\theta^2)}{(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)} \\ g_{33}&=\frac{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}{(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)} \end{aligned} \quad (4.10.4)$$

$$g^{1/2}=\frac{(\eta^2-\theta^2)(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}{[(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)]^{1/2}} \quad (4.10.5)$$

olarak bulunur. f_1, f_2, f_3 değerleri ise $(3.2.24)$ bağıntısından,

$$\begin{aligned} f_1 &= \left[(\eta^2 - b^2)(\eta^2 - c^2)\right]^{1/2} \\ f_2 &= \left[(\theta^2 - b^2)(c^2 - \theta^2)\right]^{1/2} \\ f_3 &= \left[(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2)\right]^{1/2} \end{aligned} \qquad (4.10.6)$$

şeklinde elde edilir.

$(3.2.13)$ Helmotz Denklemi;

$$\alpha_1 = k^2, \quad U^1 = H(\eta), \quad U^2 = \Theta(\theta), \quad U^3 = \Lambda(\lambda) \qquad (4.10.7)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{f_i}\frac{d}{du^i}\left(f_i \frac{dU^i}{du^i}\right) + U^i \sum_{j=1}^{3} \phi_{ij}\alpha_j = 0 \qquad (4.10.8)$$

şeklini alır. Bu denklem ayrıştırılırsa;

$$(\eta^2 - b^2)(\eta^2 - c^2)\frac{d^2H}{d\eta^2} + \eta\left[2\eta^2 - (b^2 + c^2)\right]\frac{dH}{d\eta} + \left[k^2\eta^4 + \alpha_3\eta^2 + \alpha_2\right]H = 0 \qquad (4.10.9)$$

$$(\theta^2 - b^2)(c^2 - \theta^2)\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \theta\left[2\theta^2 - (b^2 + c^2)\right]\frac{d\Theta}{d\theta} + \left[k^2\theta^4 + \alpha_3\theta^2 + \alpha_2\right]\Theta = 0 \qquad (4.10.10)$$

$$(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2)\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} + \lambda\left[2\lambda^2 - (b^2 + c^2)\right]\frac{d\Lambda}{d\lambda} + \left[k^2\lambda^4 + \alpha_3\lambda^2 + \alpha_2\right]\Lambda = 0 \qquad (4.10.11)$$

şeklinde üç denklem elde edilir.

Bu denklemlerde eğer $\alpha_2 = q(b^2 + c^2)$ ve $\alpha_3 = -p(p+1)$ alınırsa; $(4.10.9)$, $(4.10.10)$, $(4.10.11)$ denklemleri,

$$\begin{aligned} &(\eta^2 - b^2)(\eta^2 - c^2)\frac{d^2H}{d\eta^2} + \eta\left[2\eta^2 - (b^2 + c^2)\right]\frac{dH}{d\eta} \\ &\quad + [k^2\eta^4 - p(p+1)\eta^2 - q(b^2 + c^2)]H = 0 \end{aligned} \qquad (4.10.11)$$

$$\begin{aligned} &(\theta^2 - b^2)(\theta^2 - c^2)\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \theta\left[2\theta^2 - (b^2 + c^2)\right]\frac{d\Theta}{d\theta} \\ &\quad + [k^2\theta^4 - p(p+1)\theta^2 - q(b^2 + c^2)]\Theta = 0 \end{aligned} \qquad (4.10.11)$$

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2} + \lambda\left[2\lambda^2 - (b^2 + c^2)\right]\frac{d\Lambda}{d\lambda} \\ &\quad + [k^2\lambda^4 - p(p+1)\lambda^2 + q(b^2 + c^2)]\Lambda = 0 \end{aligned} \qquad (4.10.12)$$

şeklini alır. $\left(4.2.10\right),\left(4.2.11\right)$, $\left(4.2.12\right)$ denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$\mathrm{H} = \mathrm{A}_1 E_p^q(k,\eta) + \mathrm{B}_1 F_p^q(k,\eta) \qquad (4.10.13)$$

$$\Theta = \mathrm{A}_2 E_p^q(k,\theta) + \mathrm{B}_2 F_p^q(k,\theta) \qquad (4.10.14)$$

$$\lambda = \mathrm{A}_3 E_p^q(k,\lambda) + \mathrm{B}_3 F_p^q(k,\lambda) \qquad (4.10.14)$$

dır.

4.11. Paraboloidal Koordinatlarda Çözüm

Bölüm 3 $(3.2.17)$ bağıntısından bu koordinat sistemi için Stackel Matris ve determinantı;

$$[S]=\begin{bmatrix} \dfrac{\mu^2}{(\mu-c)(\mu-b)} & \dfrac{-1}{(\mu-c)(\mu-b)} & \dfrac{\mu}{(\mu-c)(\mu-b)} \\ \dfrac{v^2}{(b-v)(c-v)} & \dfrac{-1}{(b-v)(c-v)} & \dfrac{v}{(b-v)(c-v)} \\ \dfrac{-\lambda^2}{(b-\lambda)(\lambda-c)} & \dfrac{1}{(b-\lambda)(\lambda-c)} & \dfrac{-\lambda}{(b-\lambda)(\lambda-c)} \end{bmatrix} \qquad (4.11.1)$$

$$S=\det[S]=\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)(\lambda-\nu)}{(\mu-b)(\mu-c)(\mu-\nu)(c-\nu)(b-\lambda)(\lambda-c)} \qquad (4.11.2)$$

şeklinde yazılır. $(3.2.18)$ bağıntısından

$$M_{11}=\frac{(\lambda-v)}{(b-v)(c-v)(b-\lambda)(\lambda-c)}$$
$$M_{21}=\frac{(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)(b-\lambda)(\lambda-c)} \qquad (4.11.3)$$
$$M_{31}=\frac{(\mu-v)}{(\mu-b)(\mu-c)(b-v)(c-v)}$$

kofaktörleri elde edilir. $(1.2.25)$ Bağıntısından bu sistemdeki metrik katsayıları,

$$g_{11}=\frac{(\mu-v)(\mu-\lambda)}{(\mu-b)(\mu-c)},\quad g_{22}=\frac{(\mu-v)(\lambda-v)}{(b-v)(c-v)},\quad g_{33}=\frac{(\lambda-v)(\mu-\lambda)}{(b-\lambda)(\lambda-c)} \qquad (4.11.4)$$

$$g^{\frac{1}{2}}=\frac{(\mu-v)(\mu-\lambda)(\lambda-v)}{[(\mu-b)(\mu-c)(b-v)(c-v)(b-\lambda)(\lambda-c)]^{1/2}} \qquad (4.11.5)$$

olarak bulunur. f_1, f_2, f_3 değerleri ise $(3.2.24)$ bağıntısından,

$$f_1=(\mu-b)^{\frac{1}{2}}(\mu-c)^{\frac{1}{2}},\quad f_2=(b-v)^{\frac{1}{2}}(c-v)^{\frac{1}{2}},\quad f_3=(b-\lambda)^{\frac{1}{2}}(\lambda-c)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.11.6)$$

şeklinde elde edilir.

$(3.2.13)$ Helmotz Denklemi;

$$\alpha_1=k^2,\quad U^1=M(\mu),\quad U^2=N(v),\quad U^3=\Lambda(\lambda) \qquad (4.11.7)$$

olmak üzere;

$$\frac{1}{f_i}\frac{d}{du^i}\left(f_i\frac{dU^i}{du^i}\right)+U^i\sum_{j=1}^{3}\Phi_{ij}\alpha_j=0 \qquad (4.11.8)$$

şeklini alır. Bu denklem ayrıştırılırsa;

$$(\mu-b)(\mu-c)\frac{d^2M}{d\mu^2}+\frac{1}{2}[2\mu-(b+c)]\frac{dM}{d\mu}+[k^2\mu^2+\alpha_3\mu-\alpha_2]M=0 \qquad (4.11.9)$$

$$(b\text{-}\nu)(c-\nu)\frac{d^2N}{d\nu^2}+\frac{1}{2}[2\nu-(b+c)]\frac{dN}{d\nu}+[k^2\nu^2+\alpha_3\nu-\alpha_2]N=0 \qquad (4.11.10)$$

$$(b\text{-}\lambda)(\lambda-c)\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}-\frac{1}{2}[2\lambda-(b+c)]\frac{d\Lambda}{d\lambda}+[k^2\lambda^2+\alpha_3\lambda-\alpha_2]\Lambda=0 \qquad (4.11.11)$$

şeklinde üç denklem elde edilir.

Bu denklemlerde eğer $\alpha_2=(b+c)q$ ve $\alpha_3=-p(p+1)$ alınırsa;

$(4.11.9)$, $(4.11.10)$, $(4.11.11)$ denklemleri,

$$(\mu-b)(\mu-c)\frac{d^2M}{d\mu^2}+\frac{1}{2}[2\mu-(b+c)]\frac{dM}{d\mu}+[k^2\mu^2+\alpha_3\mu-\alpha_2]M=0 \qquad (4.11.12)$$

$$(b\text{-}v)(c-v)\frac{d^2N}{dv^2}+\frac{1}{2}[2v-(b+c)]\frac{dN}{dv}+[k^2v^2+\alpha_3v-\alpha_2]N=0 \qquad (4.11.13)$$

$$(b\text{-}\lambda)(\lambda-c)\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}-\frac{1}{2}[2\lambda-(b+c)]\frac{d\Lambda}{d\lambda}+[k^2\lambda^2+\alpha_3\lambda-\alpha_2]\Lambda=0 \qquad (4.11.14)$$

şeklini alır. $(4.11.12)$, $(4.11.13)$, $(4.11.14)$ denklemlerin çözümleri ise sırasıyla;

$$M=A_1B_p^q(k,\mu)+B_1C_p^q(k,\mu) \qquad (4.11.15)$$

$$N=A_2B_p^q(k,\nu)+B_2C_p^q(k,\nu) \qquad (4.11.16)$$

$$\Lambda=A_3B_p^q(k,\lambda)+B_3C_p^q(k,\lambda) \qquad (4.11.17)$$

dır.

TARTIŞMA

Literatürde Helmhotz Diferansiyel Denklemlinin çözümlerinin incelendiği Özel Ortogonal Koordinat Sistemleri genel olarak "Silindirik Koordinatlar", "Dönel Koordinatlar", ve Genel Koordinatlar olarak üç ana başlıkta incelenmektedir. Bu başlıklar altında yapılan sınıflandırmada Silindirik Koordinatlar;

Dairesel Koordinatlar

Eliptik Silindirik Koordinatlar

Parabolik Koordinatlar

alt ana başlıkları ile, Dönel Koordinatlar;

Küresel Koordinatlar

Prolate Koordinatlar

Oblate Koordinatlar

Parabolik Koordinatlar

alt ana başlıkları ile, Genel Koordinatlar;

Küresel Koordinatlar

Elipsoidal Koordinatlar

Parabolidal Koordinatlar

altında sınıflandırmaktadır.

Bu Koordinat sistemlerine ek olarak bazı özel koordinatlar ile yüzey koordinatları da incelenmekte, bu koordinat sistemlerinin de özel fonksiyonların aldığı biçim araştırılmaktadır.

SİMGELER DİZİNİ

B_p^q, C_p^q : Bear Fonksiyonu.

ce_m, fe_m : Mathieu Fonksiyonu.

E_p^q, F_p^q : Lame Fonksiyonu.

J_p, Y_0 : Bessel Fonksiyonu.

$\left[g_{ij}\right]$: Metrik Katsayılar Matrisi.

P_e *ve* L_p : Legendre Fonksiyonu.

W_p : Weber Fonksiyonu.

KAYNAKLAR

1- Moon,P., Spenser,D.E., 1961. Field Theory Handbook. Including Coordinate Systems Differential Equations and Their Solutuons. Berlin. 1-48, 144-162.

2- Moon,P., Spencer,D.E.,1960 Field Theory For Enginers. D.Van Nostrant Company, Inc. Toronto London. 301-331

3- Moon,P., Spencer,D.E., 1953. The Meaningof the Vector Laplacian. J.Franklin Inst. 256-551.

4- Moon,P., Spencer,D.E. 1988 ‘Eleven Coordinate Systems’ and ‘The Vectör Helmholtz Equation.’ Nevyork Springer Verlog . PP . 1-48 and 1-48, 136-143

5- Magnus,W., Oberhettinger,F., Tricomi,F. G., 1955 Higher transcendental functions, McGraw-Hill Book Company, Inc., Volume III

6- Bell,W. W., 1968, Special Functions for Scientists and Engineers,D. Van Nostrand Company Ltd.

7- Haberman,R.,1987, Elementray Applied Partial Differential Equations, Prentice Hall, Inc.,Englewood Cliffs, New Jersey

8- Çağlayan,M.,Çelebi,O., 2002, Kısmi Diferansiyel Denklemler, Vipaş A.Ş. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı.

9- Murray,R.S., 1963, Theory and Problems of Advanced Calculus, McGraw-Hill, Inc, pp. 134-143

10- Gradsteny,I.S., Rhyzik. I. M. 1980, Tables of Integrals Series and Products, Academic, New York.

11- Morse,P. M. and Feshbach, H. 1953. "Tables of Separable Coordinates in Three Dimensions." Methods of Theoretical Physics, Part I. New York: McGraw-Hill, pp. 125-129, 509-511, 514, 658 ve 655-666,

12- Zwillinger,D. (Ed.). 1995. CRC Standard Mathematical Tables and Formulae. Boca Raton, FL: CRC Press, p.129, 417

13- Abramowitz,M., Stegun, I. A. (Eds.). 1972. "Mathieu Functions." Ch. 20 in Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing. New York: Dover, pp. 721-746.

14- Arfken,G. "Conical Coordinates,. 1970. 16 in Mathematical Methods for Physicists, 2nd ed. Orlando, FL: Academic Press, pp. 103-119.

15- Byerly,W. E. 1959. An Elementary Treatise on Fourier's Series, and Spherical, Cylindrical, and Ellipsoidal Harmonics, with Applications to Problems in Mathematical Physics. New York: Dover, pp. 243-244.

16- Kriez,E. E.; Tsiboukis, T. D. 1992. Panas, S. M.; and Tegopoulos, J. A. "Eddy Currents:theory and Applications,." Proc. IEEE 80, 1559-1589

17- Bitsadze,A.V.,1980,Equations of Mathemtiacl physics, Mir publishers

18- Koca,K. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler. 2001 Gündüz Eğitim Yayınevi. Ankara.

19- Bitsade,A.V., Kalenizhenko, D.F. 1980. A Collection of Problems on the Equations of Mathematical Physics.

20- Kerokian,J. 1993. Portical Differential Equations, Analtical Solution Technigues. New York – London.

21- Snedon,I.N., 1957 Elements of Portical Differential Equations, New York-Toronto –London: Me Grav –Hill.

22- Bleeker,D., Csordas,G.. 1996,Basic Partial Differential Equations, International Press, Cambridge, Massachustts

23- Abramowitz,M.& Stegun,1,A.,1972 Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, Inc.,New York, pp. 752-772

ÖZ GEÇMİŞ

Adı Soyadı : Oğuz BAĞRAN

Doğum Yeri : Yeşilhisar/KAYSERİ

Doğum Tarihi : 25.11.1969

Medeni Hali : Evli

Eğitim ve Akademik Durumu

İlkokul : Kayseri Alparslan İlkokulu

Ortaokul : Kayseri Sümer İlkokulu

Lise : Kayseri Merkez Atatürk Lisesi

Lisans : Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İş tecrübesi

1991 yılında Konya Ereğli Zengen Lisesi'nde Matematik Öğretmeni göreve başladım. 1995 yılında askerlik görevimi Asteğmen olarak tamamladım. Aynı yıl Edirne Fen Lisesine Öğretmen Seçme Sınavı ile atandım. Halen yeni ismi Edirne Süleyman Demirel Fen Lisesi olan okulumuzda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktayım.