KESİKLİ ZAMANLI RİSK MODELİNDE BAĞIMLI RİSKLERİN DAĞILIMLARI

DISTRIBUTION OF DEPENDENT RISKS WITH DISCRETE TIME RISK MODEL

MEHMET PIRILDAK

Hacettepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetmeliğinin
AKTÜERYA BİLİMLERİ Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

2005

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü’ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI** ’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :..
Doç.Dr. Meral Sucu

Üye (Danışman) :..
Prof. Dr. Ömer ESENSOY

Üye :..
Yrd. Doç. Dr. Fatih Tank

ONAY

Bu tez .../.../2005 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

.../..../2005

Prof.Dr. Ahmet R. ÖZDURAL
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

KESİKLİ ZAMANLI RİSK MODELİNDE BAĞIMLI RİSKLERİN DAĞILIMLARI

Mehmet Pırıldak

ÖZ

Bu çalışmada, farklı sigorta kollarına ait poliçelerden oluşan bir portföyde sigorta kollarının bağımlı olması durumu ele alınmıştır. Sigorta şirketleri portföylerinde farklı sigorta kollarına ait poliçeler bulundurmaktadır. Risk kuramıyla ilgili aktüeryal çalışmalarda genellikle sigorta kollarının bağımsız olduğu varsayımı yapılır. Ancak bu varsayım çoğu zaman gerçekçi bir varsayım değildir. Çalışmada farklı sigorta kollarına ait poliçelerden oluşan bir portföyde, hasar sayılarının bağımlı olması durumu genel etki modeliyle incelenmiş ve toplam hasar miktarının dağılımının hesaplanmasına ilişkin yöntemler ele alınarak toplam hasar miktarının dağılımı hızlı Fourier dönüşümü kullanılarak bulunmuştur.

Çalışmada kesikli zamanlı risk modellerinde iflas olasılıklarının hesaplanmasına değinilmiş ve bağımlılığın sonlu zamanlı iflas olasılığı üzerindeki etkisi incelemiştir. Uygulamada bağımlı iki sigorta kolu için hasar sayılarının Poisson ve Negatif Binom dağılımlı olduğu durumlar ele alınmıştır. Ayrıca düzenleme katsayıları kullanılarak bağımlılığın sonsuz zamanlı iflas olasılıkları üzerindeki etkisi de araştırılmıştır.

Hesaplanan sonlu zamanlı iflas olasılıkları ve bulunan düzenleme katsayıları sonucunda hasar sayılarının bağımlı olması durumunun bağımsız olması durumuna göre daha riskli olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Bağımlı riskler, iflas olasılığı, hasar dağılımları.

Danışman: Prof.Dr. Ömer ESENSOY, Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü.

DISTRIBUTION OF DEPENDENT RISKS WITH DISCRETE TIME RISK MODEL

Mehmet Pırıldak

ABSTRACT

This thesis is concerned with the portfolio consisting of dependent classes of business. In the portfolio of an insurance company, there exist policies from different classes of business. In most actuarial literature related to risk theory, it is assumed that classes of business are independent. However, there are practical situations for which this assumption is not appropriate. The number of claims for a portfolio consisting of different classes of business is assumed to be dependent and studied by means of common shock models. Moreover, a brief description of the aggregate loss distribution is reviewed and the aggregate loss distribution is calculated by fast Fourier transform (FFT).

Probability of ruin for the discrete time risk model is reviewed and the impact of the dependency on the finite time probability is investigated. The numerical studies are carried out such that the distribution of the number of claims for two dependent classes of business is Poisson and Negative Binomial. In addition to finite time ruin probability, the impact of the dependency on the infinite time ruin probability is examined by means of the adjustment coefficient.

As a result of finite time ruin probabilities and adjustment coefficients, it can be stated that the risk process for the book of business under the dependence assumption is more dangerous than the one for the book of business under the independence assumption.

Keywords: Dependent risks, ruin probability, loss distributions.

Advisor: Prof.Dr. Ömer ESENSOY, Hacettepe University, Department of Actuarial Sciences.

TEŞEKKÜR

Tez konusunun seçiminde beni teşvik eden, çalışmanın sonuçlandırılmasında ve karşılaşılan güçlüklerin aşılmasında yol gösterici olan danışmanım Sayın Prof.Dr. Ömer ESENSOY ‘a,

Değerli katkıları için Prof.Dr. Cenap ERDEMİR ’e,

Bu noktaya gelebilmem için beni teşvik eden ve her zaman yanımda olan aileme ve hep yanımızda hissetiğimiz babama,

Çalışma süresince yardım ve hoşgörülerini esirgemeyen hocalarıma ve değerli çalışma arkadaşlarıma,

Teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ ve RİSK KURAMININ TEMEL TANIMLARI

Sigortacının herhangi bir andaki ekonomik durumu kazanılan primlerle artan ve hasar ödemeleri ile azalan bir olasılıksal (stokastik) süreçtir. Burada kazanılan primlerin sürekli olduğu varsayılırken, hasar ödemeleri raslantı değişkeni olarak tanımlanır. Hasar ödemelerine yönelik yapılan tahminlerde ortalamalar kullanılır. Bu durumda hasar miktarlarında meydana gelebilecek dalgalanmalar gözden kaçırılmış olur. Hasar miktarlarında meydana gelebilecek bu dalgalanmalar risk kuramının temelini oluşturmaktadır.

Sigortacılıkta risk (P_t,S_t) çifti ile belirlenir. Burada;

P_t = [0, t) zaman aralığında primlerden elde edilen kazanç

S_t = [0, t) zaman aralığında meydana gelen hasarların toplamı

olarak tanımlanır. Genel olarak P_t 'nin değişimlerden etkilenmediği, S_t 'nin ise olasılıksal olduğu düşünülür. S_t toplam hasar miktarı süreci olarak adlandırılır (Bühlmann, 1970).

Belirli bir zaman aralığında gerçekleşen hasar ya da kayıplara yapılan ödeme miktarlarının toplamı, toplam hasar miktarı olarak adlandırılır. Toplam hasar miktarının dağılımı, hasar sayısı ve hasar miktarının dağılımları temel alınarak hesaplanır. Toplam hasar miktarı sigorta şirketinin varlığını uzun dönemde sürdürebilmesi açısından önemlidir. Sigorta şirketi için risk P_t -S_t farkı olarak tanımlanır ve bu fark negatif olduğunda sigorta şirketinin varlıklarının yükümlülüklerini karşılayamaması durumu söz konusu olur. Bu durum çalışmada "iflas" olarak adlandırılmıştır. İflastan korunmak için P_t -S_t farkının ya da sigorta şirketinin ekonomik durumunun kontrol edilmesi gerekir. Ekonomik durumun kontrolünde kesikli ve sürekli zamanlı risk modeli olmak üzere iki model söz konusudur.

Aktüeryal çalışmalarda genellikle farklı türde poliçeler içeren bir portföyde risklerin birbirinden bağımsız olduğu varsayımı yapılır. Ancak bu varsayım çoğu zaman gerçekçi bir varsayım değildir. Örneğin bir araba kazası, araç hasarıyla beraber sağlık ya da ölüm hasarını da içerebilir, dolayısıyla bu kaza sonucunda kasko, sağlık ve ölüm sigortaları poliçelerine ilişkin tazminat ödemeleri de olacağından poliçeler arasında bir bağımlılık söz konusu olabilir.

Bu nedenle son yıllarda aktüerya literatüründe bağımlı riskler için çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Ambagaspitiya (1998,1999) bağımlı hasar sayıları için toplam hasar miktarı modelleri geliştirmiş, Wang (1998) hasar sayılarının bağımlı olduğu durumlar için farklı bağımlılık modellerini ele almıştır. Yuen ve Wang (2002) farklı risklerin bağımlı hasar üretme olasılıklarını kullanarak bağımlı durumları incelemiştir. Cossette ve Marceau (2000) ve Wu ve Yuen (2003) tarafından yapılan çalışmalarda ise bağımlı hasar sayılarının iflas olasılığı üzerindeki etkisi, Bühlmann (1970) tarafından geliştirilen kesikli zamanlı risk modeli kullanılarak incelenmiştir.

İflas olasılıklarının bulunması birçok aktüeryal çalışmanın konusu olmuş, Lundberg değişmezi olarak da anılan "düzenleme katsayısı" kullanılarak iflas olasılıkları için alt ve üst sınırların bulunmasına yönelik yöntemler geliştirilmiş ve bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte ardışık yöntemler kullanılarak iflas olasılıkları sayısal olarak hesaplanmıştır. İflas olasılıklarını hesaplamak için Goovaerts ve De Vylder (1984) ve Dickson ve Waters (1991) tarafından yapılan çalışmalarda ardışık bir algoritma kullanılmıştır.

Portföyünde m bağımlı sigorta kolu bulunan bir sigorta şirketinin her sigorta kolu için, ana hasar (main-claim) ve yan hasar (by-claim) olmak üzere iki tür hasar söz konusudur. Ana hasarlar diğer sigorta kollarıyla etkileşimli olarak belirli bir olasılıkla yan hasarlar üretebilirler. j 'inci sigorta koluna ait hasar sayısı N_j

$$N_j = \sum_{k=1}^{m} N_{jk} \qquad (j=1,...,m)$$

olarak tanımlanır. Burada j'inci sigorta kolu için ana hasar sayısı N_{jj} ile ve yan hasar sayısı N_{jk} ile gösterilir. Bir başka deyişle N_{jk} j'inci ve k'ıncı sigorta kolları arasında etkileşim halinde olan hasarları göstermektedir (Yuen & Wang, 2002).

Riskler arasındaki bu bağımlılık toplam hasar miktarının dağılımını da etkilemektedir. Buna bağlı olarak P_t -S_t farkı ve iflas olasılığı da bu bağımlılıktan etkilenmektedir. Bu çalışmada poliçeler arasındaki bağımlılığın, iflas sürecine etkisi kesikli zamanlı risk modeliyle incelenecektir.

Çalışmanın Birinci Bölümünde konuya giriş yapılmış ve Risk Kuramının temel tanımları verilmiştir. İkinci Bölümde ise toplam hasar miktarının hesaplanması ve risk modellerine değinilmiştir. Birden fazla sigorta kolunun olduğu ve sigorta kollarının bağımlı olduğu durumlar için toplam hasar miktarının bulunmasına Üçüncü Bölümde yer verilmiştir. Dördüncü Bölümde, sigorta kollarının bağımlı olduğu durumlar için iflas olasılıklarına yönelik örnek hesaplamalar yapılmıştır. Beşinci Bölüm ise sonuç ve yorumlara ayrılmıştır.

1.1. Risk Rezervi

Risk rezervi genel olarak sigortacının varlıkları ile yükümlülükleri arasındaki fark olarak açıklanabilir. Sigortacının ekonomik durumu, net kazancı ve risk rezervi kavramları birbirleriyle özdeştir. Ayrıca risk rezervi pozitif risk kabul (underwriting) kazançları -prim gelirleri- tarafından doldurulan ve negatif risk kabul kazançları -hasar ödemeleri- tarafından boşaltılan bir havuz olarak da değerlendirilebilir (Beard, Pentikainen & Pesonen ,1984).

1.2. Risk Kabul Süreci (underwriting process)

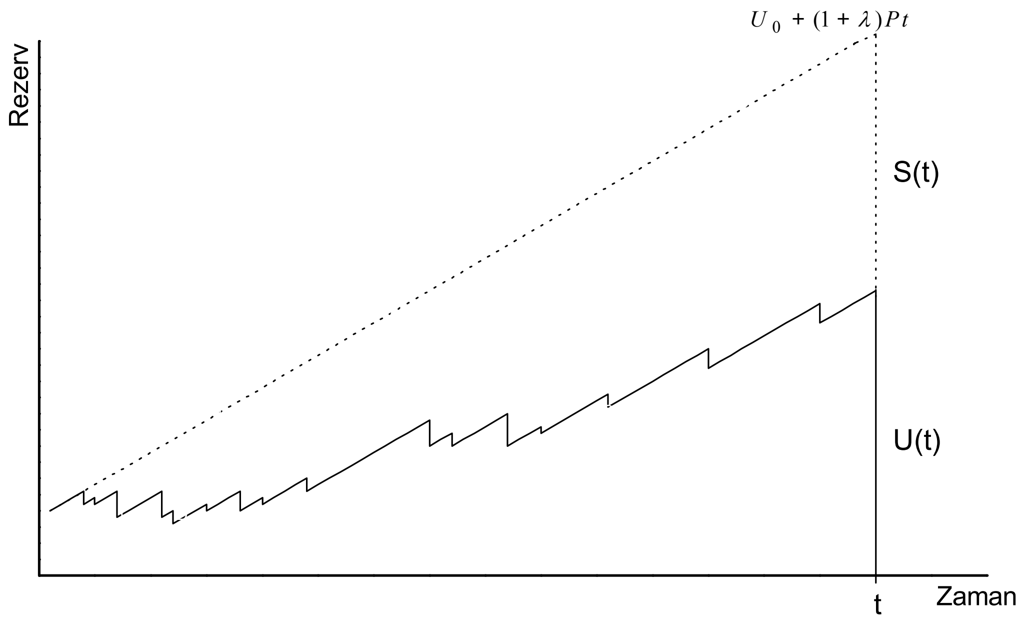
Risk rezervi hasar ödemelerinin yapıldığı bir havuz gibi düşünüldüğünde, rezervin prim gelirleri ile artan bir seyir izlediği varsayılır.

Klasik risk kavramında [0,t) zaman aralığındaki prim gelirleri $P(t) = (1+\lambda)Pt$ ile tanımlanır. Burada;

P: net risk primini
λ: güvenlik yüklemesi katsayısını

göstermektedir. Güvenlik yüklemesi gerçekleşen hasar miktarının beklenenden farklı olması durumunda primin hasarı karşılayabilmesini sağlamak için net risk primine yapılan eklemedir (Daykin, Pentikainen & Pesonen 1994).

Prim gelirlerinin sürekli ve artan olduğu varsayımı altında risk kabul sürecinde risk rezervinin grafiği Şekil 1.1’de verilmiştir. Hasarlar düşey eksende anlık inişler biçiminde gösterilmiştir. Grafikte ve risk rezervinin tanımında yatırım gelirleri, yönetim giderleri vb. gözardı edilmiştir.

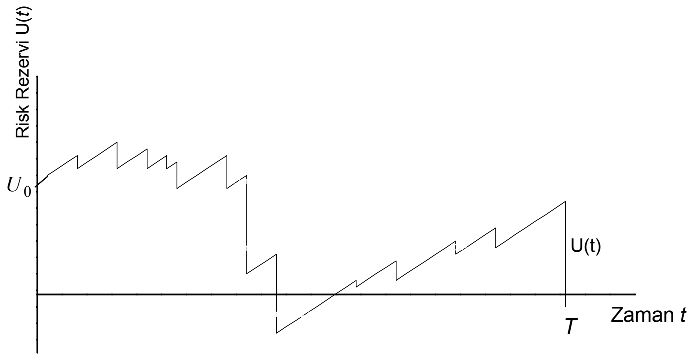


Şekil 1.1. Prim gelirleri ile hasar ödemeleri arasındaki fark (risk rezervi)

Şekil 1.1'de U_0 başlangıç rezervini, $(1+\lambda)Pt$ [0,t) zaman aralığındaki prim gelirlerini, S(t) hasar ödemelerini ve U(t) t anındaki rezerv miktarını ve göstermektedir.

1.2.1. Risk Kabul Sürecinin Modellenmesi

[0,t) zaman aralığındaki nakit akışları Şekil 1.2'deki gibi olup, $U(t)$, $t=T$ anındaki rezerv değerini göstermektedir. [0,t) zaman aralığında herhangi bir anda $U(t)$ risk rezervinin negatif değer alma olasılığı ya da belirlenen bir iflas eşiğinin (ruin barrier) altına düşme olasılığı, iflas olasılığı (ruin probability) olarak adlandırılır.



Şekil 1.2. [0,t) zaman aralığında risk süreci

Eğer [0,t) zaman aralığı genişletilirse iflas olasılığı, U risk rezervinin t_1,t_2,... gibi bir ya da daha fazla zaman noktasında negatif değer alması olarak tanımlanır. Bu durum sonlu zamanlı iflas olasılığı olarak adlandırılır (finite time ruin probability).

1.2.2. Kesikli ve Sürekli Süreç

Bir sigortacı için uzun dönemde varlığını sürdürebilmek çok önemlidir. Bu nedenle risk rezervinin negatif olmasına önlem alabilmek için rezervin [0,t) zaman aralığında gözlemlenmesi gerekmektedir. Rezervin $t_1,t_2,...$ gibi belirlenmiş zaman noktalarında *(kesikli model)* ya da periyodun her noktasında *(sürekli model)* kontrol edilmesi mümkündür.

Uygulamada gelirler ve giderler sürekli nakit akışlarıdır, fakat varlıkların değerlemesi ve yükümlülükler genellikle hesap yılı sonunda işleme konulur. Dolayısıyla ekonomik durum genellikle hesap yılı ya da hesap dönemi sonlarında, kesikli zaman noktalarında kontrol edilir. Kesikli zamanlı yaklaşımda t_i, t_{i+1} zaman aralığında rezervin negatif değer alması olasılığı gözardı edilir. Bunun sonucu olarak iflas olasılığı azalmış olur. Şekil 1.2'de görüldüğü gibi sürekli kontrol modeli uygulandığında iflas söz konusu iken, kesikli modelde kontrol noktalarında gözlenen rezerv değerinin negatif olmadığı durumlarda iflas söz konusu değildir. Kesikli modelde kontrol aralıklarının genellikle bir yıl olarak alınması bir sorun olarak görülebilir. Bununla beraber bu model teknik bir dönüştürmeye gerek olmaksızın aylık ya da üç aylık dönemlerde de uygulanabilir.

İKİNCİ BÖLÜM

2. TOPLAM HASAR MİKTARI

Hasar miktarı sigortacının üstlendiği riskler için hasar söz konusu olduğunda ödemekle yükümlü olduğu miktardır. Bireysel hasarların toplamı ise toplam hasar miktarını verir. Bu bölümde toplam hasar miktarının modellenmesinde kullanılan bireysel ve kollektif risk modelleri tanıtılacaktır.

2.1. Bireysel Risk Modeli

Bireysel risk modeli, portföydeki her poliçenin tek tek ele alınarak toplam hasar miktarının modellenmesidir. Toplam hasar miktarı S bir raslantı değişkeni olmak üzere

$$S=X_1 + X_2 +...+X_n \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır. Burada X_i i'inci poliçeye ödenen hasar miktarını, n ise portföydeki poliçe sayısını göstermektedir. Bu modelde hasar miktarı X_i değerlerinin birbirinden bağımsız olduğu varsayılmaktadır.

Bireysel hasar miktarının modellenmesi için iki aşamalı bir model kurulabilir. Buna göre, bir poliçe için sadece bir hasar söz konusu olduğunda, I hasar olup olmadığını gösteren raslantı değişkeni olarak alınırsa

$$\mathrm{I} = \begin{cases} 1, & \text{hasar var} \\ 0, & \text{hasar yok} \end{cases}$$

ile tanımlanır ve

$$P(\mathrm{I}) = \begin{cases} q, & \mathrm{I}=0 \\ p, & \mathrm{I}=1 \end{cases}$$

gösterilir.

Hasar olması durumunda ödenecek hasar miktarının b gibi bir değişmez olduğu varsayıldığında hasarın olasılık fonksiyonu

$$f_x(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1-q & x = 0 \\ q & x = b \\ 0 & \text{ö.d.} \end{cases} \tag{2.2}$$

ve dağılım fonksiyonu,

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-q & 0 \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases} \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda hasar X=Ib olarak modellenebilir. X'in beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi yazılır:

$E[X] = bq$

$Var[X] = b^2q(1-q)$

Hasar miktarının da B gibi bir raslantı değişkeni olması durumunda ise hasar modeli

$$X = \mathrm{I}\,B \tag{2.4}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda X'in dağılım fonksiyonu

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(\mathrm{I}\,B \le x)$$

$$= P(\mathrm{I}\,B \le x \mid \mathrm{I} = 0)\,P(\mathrm{I} = 0) + P(\mathrm{I}\,B \le x \mid \mathrm{I} = 1)\,P(\mathrm{I} = 1) \tag{2.5}$$

biçimindedir. X'in beklenen değer ve varyansı

$$E[X] = E[\,E[\,X \mid \mathrm{I}\,]\,] \tag{2.6}$$

$$Var[X] = Var[E[\,X \mid \mathrm{I}\,]\,] + E[Var[\,X \mid \mathrm{I}\,]\,] \tag{2.7}$$

olarak yazılır (Hogg & Craig, 1978; Bowers et al., 1997).

I ve B 'nin bağımsız olduğu varsayıldığında $E[B] = \mu$ ve $Var[B] = \sigma^2$ olarak tanımlanırsa; $E[\,X \mid \mathrm{I}=1\,] = \mu$ ve $E[\,X \mid \mathrm{I}=0\,] = 0$ olur. Bu ifade genelleştirildiğinde;

$$E[\,X \mid \mathrm{I}\,] = \mu\,\mathrm{I} \tag{2.8}$$

ve benzer şekilde

$$\mathrm{Var}[\,X \mid I\,] = \sigma^2 I \tag{2.9}$$

olur.

Elde edilen bu eşitlikler kullanılarak Eşitlik (2.6) ve (2.7) sırasıyla

$$E[X] = E[\,E[\,X \mid I\,]\,] = \mu\, E[\,I\,] = \mu q$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \mathrm{Var}[E[\,X \mid I\,]] + E[\mathrm{Var}[\,X \mid I\,]] = \mathrm{Var}[\,\mu I\,] + E[\,\sigma^2 I\,] \\ &= \mu^2 q\,(1-q) + \sigma^2 q\end{aligned}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir.

2.1.1 Konvulüsyon

Bireysel risk modelinde toplam hasar miktarı S, bireysel hasarların toplamıyla Eşitlik (2.1)'de verildiği gibi tanımlanmaktadır. X_i bireysel hasarlarının bağımsız raslantı değişkenleri olduğu varsayılmaktadır.

Konvulüsyon yöntemi kullanılarak X ve Y gibi raslantı değişkenlerinin toplamı (X+Y)'nin dağılım fonksiyonu bulunabilir. Buna göre X+Y'nin dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned}F_{X+Y}(s) &= P(X+Y \le s) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X+Y \le s \mid X = x)\, dF_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(Y \le s - X \mid X = x)\, dF_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(s-x) f_X(x)\, dx\end{aligned} \tag{2.10}$$

ile bulunur. X ve Y'nin toplamının dağılım fonksiyonu $F_{X+Y}(s) = F_X{*}F_Y(s)$ ile gösterilir ve X ve Y'nin konvulüsyonu olarak adlandırılır. Eğer X ve Y kesikli raslantı değişkenleri ise X ve Y 'nin konvulüsyonu

$$F_X{*}F_Y(s) = \sum_x F_Y(s-x) f_X(x) \tag{2.11}$$

ile bulunur. X, Y ve Z gibi ikiden fazla raslantı değişkenin konvulüsyonu;

$(F_X*F_y)*F_Z \equiv F_X*(F_y*F_Z) \equiv F_X*F_y*F_Z$

biçiminde yazılabilir. Bağımsız ve aynı dağılıma sahip n raslantı değişkeni için konvulüsyon

$F*F*...*F = F^{*n}$

olarak yazılır ve F^{*n}, F'nin n'inci konvulüsyonu olarak adlandırılır (Kaas et al., 2001).

2.2. Kollektif Risk Modeli

Portföydeki hasarların bir bütün olarak değerlendirilmesi bireysel olarak değerlendirilmesinden daha etkindir.

Eğer,

N : Belirli bir zaman aralığında portföyde oluşan hasar sayısını,
X_1 : Oluşan 1. hasardaki hasar miktarını
X_2 : Oluşan 2. hasardaki hasar miktarını
.
.
X_N : Oluşan N. hasardaki hasar miktarını

gösteren raslantı değişkenleri olmak üzere, toplam hasar miktarı

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N \qquad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır.

Modeli basitleştirmek için

- X_1 , X_2 ,...,X_N aynı dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenleridir,
- N, X_1 , X_2 ,...,X_N karşılıklı bağımsızdır,

gibi iki temel varsayım yapılır.

2.2.1. Toplam Hasar Miktarının Dağılımı

Toplam hasar miktarının olasılık dağılımı için değişik seçenekler söz konusu olabilir. Bunlar;

$N = 0$ ve $S = 0$

$N = 1$ ve $S = X_1 < s$

$N = 2$ ve $S = X_1+X_2 < s$

.

.

şeklinde olabilir.

Bireysel hasar miktarları X_i'lerin birbirinden ve N'den bağımsız olduğu varsayımı altında S'nin dağılım fonksiyonu $F_S(x)$ için şu eşitlik yazılabilir:

$$F_S(x) = P(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leq x \mid N = n)P(N = n) \tag{2.13}$$

Toplam hasar miktarının hesaplanması için geliştirilmiş farklı yöntemler vardır. Konvulüsyon, Panjer'in ardışık yöntemi, hızlı Fourier dönüşümü (Fast Fourier Transformation, FFT), Monte Carlo simulasyonu bunlardan birkaç tanesidir. Bu çalışmada Eşitlik (2.12)'nin hesaplanmasına yönelik olarak konvulüsyon ve hızlı Fourier Dönüşümü algoritmaları üzerinde durulacaktır. Konvulüsyon bunlardan en bilinen ama uygulaması pek kolay olmayan bir yöntemdir. Panjer'in ardışık algoritması ise sadece belirli dağılımlar için elverişlidir (Klugman et al.,1998).

2.2.2. Birleşik Dağılımlar

S'nin Eşitlik (2.12) 'de verilen dağılımının birleşik bir dağılım olduğu ve X_i terimlerinin dağılımının X raslantı değişkeninin dağılımına sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda

$$\mu_k = E[X^k], \quad F(x)=P[X \leq x], \quad F(s)=P[S \leq s] \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanır ve N bilindiğinde, S'nin koşullu dağılımı yardımıyla S'nin beklenen değeri

$$E[S] = E[E[S|N]] = \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + \ldots + X_N | N = n] P[N = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + \ldots + X_n | N = n] P[N = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[X_1 + \ldots + X_n] P[N = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n\mu_1 P[N = n] = \mu_1 E[N] \tag{2.15}$$

biçiminde hesaplanabilir.

Eşitlik (2.15)’ten toplam hasarın beklenen değerinin, hasar miktarı ile hasar sayısının beklenen değerlerinin çarpımına eşit olduğu görülmektedir.

Benzer şekilde toplam hasar miktarının varyansı da;

$$Var[S] = E[Var[S|N]] + Var[E[S|N]]$$

$$= E[N\,Var[X]] + Var[N\mu_1]$$

$$= E[N]\,Var[X] + \mu_1^2 Var[N] \tag{2.16}$$

ile gösterilir.

Eşitlik (2.15)’te kullanılan yöntem moment çıkaran fonksiyonlar için de uygulanırsa;

$$M_S(t) = E[E[e^{tS} | N]]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{t(X_1+\ldots+X_N)} | N = n]\, P[N = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (M_X(t))^n P[N = n] = E[(e^{\log M_X(t)})^N]$$

$$= M_N[\log M_X(t)] \;. \tag{2.17}$$

elde edilir (Kaas et al., 2001).

Buna göre; N~geometrik(p), 0<p<1 ve X~üstel(1) dağılması durumunda, S'nin moment çıkaran fonksiyonu X'in moment çıkaran fonksiyonu cinsinden yazılırsa aşağıda verilen eşitlikler elde edilir:

$$P(N=n) = pq^n \quad n=0,1,2,... \tag{2.18}$$

$$M_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt} pq^n = \frac{p}{1-qe^t}$$

Eşitlik (2.17) yardımıyla S'nin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_S(t) = M_N(\log M_X(t)) = \frac{p}{1-qM_X(t)} \tag{2.19}$$

$$= p + q\frac{p}{p-t}$$

olarak yazılır.

2.2.3. Birleşik Dağılımlar için Konvulüsyon Formülü

N = n bilindiğinde, *S*'nin koşullu dağılımı kullanılarak, *S*'nin dağılım fonksiyonu;

$$F_S(x) = P[S \le x]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P[X_1 + ... + X_N \le x | N = n] P[N = n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P[X_1 + ... + X_n \le x] P[N = n] \tag{2.20}$$

şeklinde yazılabilir.

$$P[X_1+...+X_n \le x] = P*P*...*P(x)$$

$$= P^{*n}(x) \tag{2.21}$$

Burada $P^{*n}(x)$, P'nin n'inci konvulüsyonu olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$P^{*(n+1)}(x) = P(X_1 + X_2 + ... + X_{n+1} = x)$$

$$= \sum_y P(X_{n+1} = y) P(X_1 + X_2 + ... + X_n = x - y)$$

$$= \sum_y p(y) p^{*n}(x - y).$$

$P^{*0}(x)$ ise

$$P^{*0}(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

biçiminde yazılır. Böylece

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{*n}(x) \Pr[N = n] \tag{2.22}$$

eşitliği ile birleşik dağılımlar için konvulüsyon formülü yazılabilir. S için olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x) P[N = n] \tag{2.23}$$

biçiminde yazılır (Bowers et al.,1997; Kaas et al., 2001).

2.2.4. Hasar Sayısının Dağılımı

Seyrek görülen olayları tanımlamak için ilk tercih genellikle Poisson dağılımı olur. Poisson dağılımı tek parametreli bir dağılım olup, Poisson(λ) dağılımında beklenen değer ve varyans birbirine eşit olup, λ'dır. Eğer hasar sayıları ortalamanın etrafında fazla yayılma göstermiş ise, Poisson yerine Negatif Binom dağılımı tercih edilebilir.

Poisson dağılımının olasılık fonksiyonu, n=0, 1, 2,... ve $\lambda > 0$ için

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \tag{2.24}$$

biçimindedir.

Hasar sayısı N için Poisson dağılımı kullanılırsa, toplam hasar miktarı S'nin dağılımı Birleşik Poisson olarak adlandırılır. Bu durumda toplam hasar miktarının beklenen değer ve varyansı sırasıyla $E[S] = \lambda\mu_1$, $Var[S] = \lambda\mu_2$ olur.

Poisson dağılımının moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_N(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

olduğu için birleşik Poisson dağılımının moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_S(t) = e^{\lambda[M_X(t) - 1]} \tag{2.25}$$

olur.

Negatif Binom dağılımının olasılık fonksiyonu n=0, 1, 2,... , r >0 ve 0<p<1 için

$$P(N = n) = \binom{r + n - 1}{n} p^r q^n \tag{2.26}$$

biçiminde yazılır. Negatif Binom dağılımının beklenen değer, varyans ve moment çıkaran fonksiyonları sırasıyla

$$E[N] = \frac{rq}{p}$$

$$Var[N] = \frac{rq}{p^2}$$

$$M_N(t) = \left(\frac{p}{1 - qe^t}\right)^r$$

biçimindedir. Hasar sayısı N'nin dağılımı için Negatif Binom kullanılırsa, toplam hasar miktarının dağılımı birleşik Negatif Binom olur. Bu dağılımın beklenen değer, varyans ve moment çıkaran fonksiyonu sırasıyla

$$E[S] = \frac{rq}{p}\mu_1$$

$$Var[S] = \frac{rq}{p}\mu_2 + \frac{rq^2}{p^2}\mu_1^2$$

$$M_S(t) = \left(\frac{p}{1 - qM_X(t)}\right)^r$$

biçiminde verilir (Bowers et al., 1997).

Her biri Birleşik Poisson dağılımına sahip birden çok portföy söz konusu olduğunda Teorem 2.1. ile S'nin dağılımı bulunabilir.

Teorem 2.1.

Eğer S_1 , S_2 ,..., S_m λ_i parametreli Birleşik Poisson dağılımına sahip bağımsız raslantı değişkenleri ve hasar dağılımları P_i (x), i=1,2,...,m ise $S = S_1 + S_2 + ... + S_m$'in dağılımı $\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ parametresi ve

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} P_i(x)$$

hasar dağılımı ile Birleşik Poisson dağılımına sahiptir.

İspat 2.1.

Eğer P_i 'nin moment çıkaran fonksiyonu m_i ile tanımlanırsa S' nin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{m} \exp(\lambda_i [m_i(t) - 1]) = \exp \lambda \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} m_i(t) - 1 \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu durumda S'nin dağılımı da Birleşik Poisson olur (Kaas et al., 2001).

Teorem 2.1., m bağımsız birleşik Poisson dağılımlı portföyün bileşkesinin ya da aynı portföy içinde m yıl için yıllık sonuçların bileşkesinin yine Birleşik Poisson dağılımlı olduğunu göstermektedir .

2.3. Hızlı Fourier Dönüşümü

Birleşik dağılımların moment çıkaran fonksiyonları Eşitlik (2.17)'deki gibi tanımlanmaktadır. Benzer şekilde birleşik dağılımların olasılık çıkaran fonksiyonları ve karakteristik fonksiyonları sırasıyla

$$P_S(t) = P_N[P_X(t)]$$

$$\varphi_S(t) = E\left[e^{iSt}\right] = P_N[\varphi_X(t)] \tag{2.27}$$

olarak tanımlanabilir. Karakteristik fonksiyonlar her zaman mevcuttur ve tektir. Ayrıca herhangi bir karakteristik fonksiyona karşılık gelen bir dağılım da her zaman vardır ve tektir. Karakteristik fonksiyonların hızlı Fourier dönüşümü (FFT) kullanılarak ters fonksiyonunun bulunmasıyla kesikli raslantı değişkenlerinin yoğunluk fonksiyonları elde edilebilir. Bu nedenle toplam hasar miktarının dağılımının hesaplanmasında kullanılan yöntemlerden biri de hızlı Fourier dönüşümü algoritmasıdır. Hızlı Fourier dönüşümü algoritması kullanılarak toplam hasar miktarının hesaplanması Robertson (1992) 'da ayrıntılı olarak verilmiştir. Bu çalışmada ise Klugman et al. (1998) tarafından verilen tanımlardan yararlanılmıştır.

Tanım 2.1.

Herhangi bir f(x) sürekli fonksiyonun Fourier Dönüşümü 'ü

$$\tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}dx \tag{2.28}$$

ile tanımlanır.

Orijinal fonksiyon ise kendi Fourier dönüşümünden

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)e^{-itx}dt \tag{2.29}$$

olarak elde edilebilr.

Tanımda verilen f(x) olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğunda, $\tilde{f}(t)$ onun karakteristik fonksiyonu olur. Kesikli bir dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu f(x) ise Tanım 2.1., Tanım 2.2'deki gibi genelleştirilebilir.

Tanım 2.2.

Eğer f_x, x'in, n dönem boyunca periyodik olan, tüm tamsayı değerleri için tanımlanmış bir fonksiyon ise (tüm f_x değerleri için; $f_{x+n} = f_x$); $(f_0, f_1, ..., f_{n-1})$ vektörünün kesikli Fourier dönüşümü $\tilde{f}_x, x = ... -1,0,1,...$, için

$$\tilde{f}_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \exp\left(-\frac{2\pi i}{n} jk\right), \qquad k=...-1,0,1,... \tag{2.30}$$

ile tanımlanır. Buna ek olarak $\tilde{f}_k$'da ayrıca n dönem boyunca periyodiktir. $\tilde{f}_k$ fonksiyonunun ters çevrilmesi (Inverse FFT, IFFT) ile orijinal fonksiyon yeniden aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$f_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{f}_k \exp\left(-\frac{2\pi i}{n} kj\right), \qquad j=...-1,0,1,... \tag{2.31}$$

Hızlı Fourier dönüşümü aşağıda verilen özelliklerinden dolayı hızlı bir algoritmadır: $n=2^r$ uzunluğundaki bir hızlı Fourier dönüşümü, her birinin uzunluğu $n/2 = 2^{r-1}$ olan ve birincisi çift sayıları içeren noktalar, ikincisi tek sayıları içeren noktalar olan iki hızlı Fourier dönüşümünün toplamı olarak da yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_k &= \sum_{j=0}^{n-1} f_j \exp\left(\frac{2\pi i}{n} jk\right) \\
&= \sum_{j=0}^{(n/2)-1} f_{2j} \exp\left(\frac{2\pi i}{n} 2jk\right) + \sum_{j=0}^{(n/2)-1} f_{2j+1} \exp\left[\frac{2\pi i}{n}(2j+1)k\right] \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} f_{2j} \exp\left(\frac{2\pi i}{m} jk\right) + \exp\left(\frac{2\pi i}{n} k\right)\sum_{j=0}^{m-1} f_{2j+1} \exp\left(\frac{2\pi i}{m} jk\right)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

burada $m = n/2 = 2^{r-1}$'e eşittir. Buradan;

$$\tilde{f}_k = \tilde{f}_k^a + \exp\left(\frac{2\pi i}{n} k\right)\tilde{f}_k^b \tag{2.33}$$

yazılır. $\widetilde{f}_k^a$ ve $\widetilde{f}_k^b$ terimlerinin her biri sırasıyla, $m / 2 = 2^{r-2}$ uzunluğundaki iki dönüşümün toplamı olarak yazılabilir. Bu işlem ardışık olarak sürdürülebilir. Ardışık dönüşümlerin yarı uzunluktaki dönüşümlerin toplamı olarak yazılması işlemi r kez yinelendiğinde, uzunluğu 1 olan dönüşümler elde edilir. Uzunluğu 1 olan dönüşümlerin Eşitlik (2.33) yardımıyla ardışık olarak birleştirilmesi, uzunluğu 2, 2^2, 2^3,..., 2^r olan dönüşümler elde edilmesini sağlar (Klugman et al., 1998; Wang, 1998).

Çalışmada hızlı Fourier dönüşümü yöntemi ile toplam hasar miktarının dağılımının bulunmasında kullanılacak algoritma aşağıda verilmiştir. Burada hasar miktarları dağılımı sürekli ise, dağılımın kesikli hale getirilmesi gerekmektedir.

1. Hasar miktarlarının dağılım fonksiyonu $F_X(x)$, r tamsayı olmak üzere $n=2^r$ olacak biçimde kesikli hale getirilir. Burada n, toplam hasar miktarının dağılımı $f_S(x)$'te istenilen nokta sayısını verecek biçimde seçilir.

2. Önceki adımda elde edilen hasar miktarlarının dağılımına hızlı Fourier dönüşümü uygulanır ve böylece X'in karakteristik fonksiyonu elde edilir. Bulunan sonuç $n=2^r$ uzunluğunda bir vektör olacaktır.

3. Eşitlik (2.27) kullanılarak toplam hasar miktarı *S*'nin karakteristik fonksiyonu elde edilir.

4. Elde edilen *S*'nin karakteristik fonksiyonuna ters Fourier dönüşümü (Eşitlik (2.31)) uygulanır. Böylece toplam hasar dağılımı bulunmuş olur.

Hızlı Fourier dönüşümü yöntemi hasar miktarı X'in dağılımının kesikli hale getirilmesini gerektirmektedir. Eğer hasar miktarı dağılımındaki nokta sayısı $n=2^r$'den az ise dağılım vektörünün sonuna, vektörün uzunluğu n oluncaya kadar sıfır eklemek gerekmektedir.

Örneğin; X hasar miktarının 1, 2, 3 değerlerini aldığı ve olasılıklarının sırasıyla 0,5; 0,4; 0,1; olduğu, hasar sayılarının ise λ=3 parametreli Poisson dağılımına sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda toplam hasar miktarı S' nin dağılımını n=8 ve n=4096 için hızlı Fourier dönüşümü yöntemiyle elde etmek amacıyla önce her iki n değeri için de X ‘in dağılımının başına -toplam hasar miktarı sıfır değerini de alabileceği için- sıfır eklenir. Ayrıca n=8 ve n=4096 için X ‘in dağılımınının sonuna sırasıyla 4 ve 4092 adet sıfır eklenir ve elde edilen dağılıma hızlı Fourier dönüşümü uygulanır. Daha sonra Eşitlik (2.27) uygulanarak S‘nin karakteristik fonksiyonu elde edilir ve ters hızlı Fourier dönüşümü uygulanarak toplam hasar miktarı dağılımına ulaşılır.

Hızlı ve ters hızlı Fourier dönüşümü algoritmalarının Microsoft Excel de dahil olmak üzere çeşitli bilgisayar programlarında uygulamaları mevcut olup bu çalışmada Microsoft Excel programından yararlanılmıştır.

2.3.1. Kesiklileştirme

Hasar miktarı X’in dağılımı sürekli olduğunda, hızlı Fourier dönüşümü yönteminin ya da ardışık yöntemin uygulanabilmesi için X’in dağılımının kesikli duruma dönüştürülmesi gerekmektedir.

h belirlenen uygun bir birim olmak üzere, f_j, j=0,1,2,... için jh miktarında hasar gelme olasılığı olarak tanımlanırsa,

$$f_0 = P(X < h/2) = F_X\left(\frac{h}{2} - 0\right)$$

$$f_j = P\left(jh - \frac{h}{2} \le X \le jh + \frac{h}{2}\right)$$

$$= F_X\left(jh + \frac{h}{2} - 0\right) - F_X\left(jh - \frac{h}{2} - 0\right), \quad j = 1,2,...$$

olarak yazılabilir. Bu yöntem ile (j+1)h ile jh arasındaki hasar miktarlarının olasılıkları bölünerek (j+1) ile j değerlerine atanır. Böylece hasar miktarları en yakın h birimine yuvarlanarak kesikli hale getirilir (Klugman et al. 1998).

2.4. Kesikli Zamanlı Risk Modelleri

Kesikli zamanlı risk modeli

$$U_n = U_0 + c.n - S_n \qquad n = 0,1,2,... \qquad (2.34)$$

biçiminde tanımlanır.

Burada;

U_n: Sigorta şirketinin n anındaki risk rezervini,

U_0: Sigorta şirketinin başlangıç fonunu (sermayesini),

c: her dönemde alınan brüt primi [c = (1+λ)P],

S_n: ilk n dönem boyunca oluşan toplam hasar miktarını

ifade etmektedir.

Bu durumda S_n, W_i i'nci dönem için sigortacı portföyünde bulunan poliçelerin toplam hasar miktarını göstermek üzere,

$$S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n \qquad (2.35)$$

olarak tanımlanır. W_1, W_2,..., W_n aynı dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenleridir ve $E[W_i] = \mu_W \leq c$'dir.

Eşitlik (2.34), Eşitlik (2.35)'de verilen tanımlamaya göre yeniden düzenlenirse:

$$U_n = U_0 + (c - W_1) + (c - W_2) + ... + (c - W_n)$$

olur.

Sigorta şirketinin n anındaki risk rezervinin negatif (U_n < 0) olduğu zaman iflas zamanı ($\widetilde{T}$) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\widetilde{T} = \min\{n, U_n < 0\}$$

Tüm n değerleri için $U_n \geq 0$ olursa $\widetilde{T} = \infty$ olacaktır. Bu durumda iflas olasılığı

$$\hat{\psi}(u) = P(\tilde{T} < \infty)$$

olarak tanımlanabilir (Bowers et al., 1997).

1'den n'ye kadar olan dönemde sonlu zaman iflas olasılığı $\psi(u,n) = P(\tilde{T} \leq n)$ olarak tanımlansın. Buna bağlı olarak yaşama olasılığı $\varphi(u,n) = 1 - \psi(u,n)$ olacaktır. Burada $n \to \infty$ durumunda $\psi(u) = P(\tilde{T} \leq \infty)$ olacaktır ki bu da sonsuz zaman iflas olasılığını göstermektedir.

Burada tanımlanan model matematiksel olarak basitleştirilmiş bir model olup yatırım gelirleri, yönetim, işletme giderleri vb. değişkenleri içermemektedir. Bu nedenle tanımlanan model gerçeği tam olarak yansıtmamakla birlikte rezervin seyri hakkında önemli bilgiler vermektedir.

Düzenleme katsayısı (adjustment coefficient) ile iflas olasılığı arasında da önemli bir ilişki vardır. Düzenleme katsayısı, $\tilde{R}$ olarak gösterilir ve aşağıda verilen eşitliğin pozitif çözümüyle tanımlanır.

$$M_{W-c}(r) = E\left[e^{r(W-c)}\right] = e^{-rc} M_{W-c}(r) = 1 \tag{2.36}$$

$$\ln M_W(r) = rc \tag{2.37}$$

Burada W bir dönemdeki toplam hasar miktarı dağılımını gösteren raslantı değişkenidir. Eğer W ~N(μ, σ^2) ise $M_W(r) = \exp\left[\mu r + \frac{\sigma^2 r^2}{2}\right]$ olur ve $\ln M_W(r) = rc$ eşitliğinde yerine koyulduğunda denklemin pozitif çözümünden düzenleme katsayısı

$$\tilde{R} = \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2}, \quad \mu < c$$

olarak elde edilir.

Düzenleme katsayısı ile iflas olasılığı arasındaki ilişki Teorem 2.2. ile aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.2.

$U_n = u + nc - \sum_{i=1}^{n} W_i$, n=1,2,... ve $W_1, W_2, ..., W_n$ aynı dağılıma sahip bağımsız raslantı değişkenleri olmak üzere ve $E[W_i] = \mu_W \leq c$, tüm u > 0 için iflas olasılığı

$$\tilde{\psi}(u) = \frac{\exp(-\tilde{R}u)}{E\left[\exp(-\tilde{R}U_{\tilde{T}}) \middle| \tilde{T} < \infty\right]} \tag{2.38}$$

biçiminde tanımlanır (Bowers et al., 1997; Kaas et al., 2001).

İflas tanımına göre $U_{\tilde{T}} < 0$ olduğundan Teorem 2.2. den iflas olasılığı için üstel bir üst sınır

$$\tilde{\psi}(u) < \exp(-\tilde{R}u) \tag{2.39}$$

eşitliği ile verilebilir.

Düzenleme katsayısı $\tilde{R}$ portföydeki riskin kaba bir ölçüsüdür. Düzenleme katsayısı küçüldükçe portföydeki risk artmaktadır. Ancak tüm dağılımlar için düzenleme katsayısı elde edilemeyebilir (Goovaerts et al., 1990; Kaas et al., 2001).

Bu çalışmada, tüm dağılımlar için düzenleme katsayısı açık bir ifadeyle yazılamadığından iflas olasılığını bulabilmek için Cossette ve Marceau (2000) ile Wu ve Yuen (2003) tarafından yapılan çalışmalarda da kullanılan, sonlu zaman yaşama olasılıklarını ($\hat{\varphi}(u,n)$) hesaplama yöntemi kullanılacaktır. Bunun için Bölüm 2.3.'de verilen hızlı Fourier dönüşümü algoritması uygulanarak kesikli olarak elde edilen hasar miktarı dağılımı kullanılacaktır.

Toplam hasar miktarının dağılım fonksiyonu F_S kesikli durumda f_ℓ (ℓ =0,1,...) olarak tanımlanırsa, f_ℓ kullanılarak hesaplanan yaşama olasılığı $\hat{\varphi}(u,n)$ olacaktır. Bu durumda $\hat{\psi}(u,n) = 1 - \hat{\varphi}(u,n)$ iflas olasılığıdır. Burada u ve c değerlerinin tamsayı olduğu varsayılacaktır. $\hat{\varphi}(u,n)$ değerini hesaplamak için kullanılacak ardışık algoritma u=0,1,... değerleri için aşağıdaki gibidir:

$$\hat{\varphi}(u,1) = \sum_{\ell=0}^{u+c} f_\ell \,, \tag{2.40}$$

$$\hat{\varphi}(u,n) = \sum_{\ell=0}^{u+c} \hat{\varphi}(u+c-\ell, n-1) f_\ell \qquad (n=2,\, 3,\ldots). \tag{2.41}$$

Aşağıdaki adımlar algoritmanın uygulanmasında izlenecek yolu göstermektedir:

- Hızlı Fourier dönüşümü yöntemi kullanılarak hasar miktarının olasılık fonksiyonu (f_ℓ) kesikli olarak elde edilir.
- f_ℓ ve Eşitlik (2.40) kullanılarak k=0,1,2,...,u+c(n-t) değerleri için $\hat{\varphi}(k,1)$ hesaplanır.
- Bir önceki adımda elde edilen sonuçlar Eşitlik (2.41) kullanılarak $k \le u + c(n-t)$ ve $2 \le t \le n-1$ için $\hat{\varphi}(k,t)$ değerleri hesaplanır.
- Son olarak hesaplanan $\hat{\varphi}(k,t)$ değerlerinden yine Eşitlik (2.41) yardımıyla $\hat{\varphi}(u,n)$ hesaplanır

(Dickson & Waters, 1991; Wu & Yuen, 2003).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. FARKLI SİGORTA KOLLARININ BİRLEŞTİRİLMESİ

3.1. İki Sigorta Kolunun Konvulüsyon Yöntemiyle Birleştirilmesi

İki farklı sigorta kolunun birleştirildiği varsayılsın:

Birinci sigorta kolunun hasar sayısı N ve hasar miktarı X ,

İkinci sigorta kolunun hasar sayısı K ve hasar miktarı Y ve N, X, K ve Y birbirinden bağımsız ise;

iki sigorta kolunun birleşimi

$$Z = (X_1 + ... + X_N) + (Y_1 + ... + Y_K) \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır. Toplam hasarın olasılık çıkaran fonksiyonu

$$\begin{aligned} P_Z(t) &= E\left[t^Z\right] = E\left[t^{(X_1+...+X_N)+(Y_1+...+Y_K)}\right] \\ &= E_{N,K}E\left[t^{(X_1+...+X_n)+(Y_1+...+Y_m)} \mid N = n, K = m\right] \\ &= E_{N,K}\left[P_X(t)^N P_Y(t)^K\right] \\ &= P_{N,K}(P_X(t), P_Y(t)) \end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak yazılabilir. Aynı ilişki karakteristik fonksiyonlar cinsinden

$$\phi_Z(t) = P_N(\phi_X(t)).P_K(\phi_Y(t)) \tag{3.3}$$

şeklinde yazılabilir. Karakteristik fonksiyonlar arasındaki bu ilişki hızlı Fourier dönüşümü algoritmasıyla aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Birinci sigorta kolu ve ikinci sigorta kolunun toplam hasar miktarlarının karakteristik fonksiyonları sırasıyla $\tilde{g}$ ve $\tilde{h}$ olsun.

$$\tilde{g} = P_N(\tilde{f}_X), \qquad \tilde{h} = P_K(\tilde{f}_Y). \tag{3.4}$$

$\tilde{g}$ ve $\tilde{h}$'ye ters hızlı Fourier dönüşümü uygulanmadan önce $\tilde{g}$ ve $\tilde{h}$'nin karmaşık çarpımları bulunur. Sonra $\tilde{g}\tilde{h}$ çarpımına ters hızlı Fourier dönüşümü uygulanarak birinci ve ikinci sigorta kollarının birleşimi Z'nin toplam hasar miktarı dağılımına ulaşılır.

$$f_Z = IFFT(\tilde{g}\tilde{h}).$$

Bu yol izlendiğinde toplam hasar miktarının dağılımı hızlı Fourier dönüşümü ile konvulüsyon yöntemi kullanılarak elde edilmiş olur (Wang, 1998).

3.2. Poisson Modeli

k farklı sigorta kolunun birleştirilmesinde, j=1,2,...,k, olmak üzere j'inci sigorta kolunun hasar sayısı λ_j parametresi Poisson dağılsın. Hasar miktarlarının dağılım fonksiyonu da F_j olsun. Ayrıca farklı sigorta kollarından gelen kayıpların birbirinden bağımsız olduğu varsayılsın. Bu durumda toplam hasar miktarı için karakteristik fonksiyonlar kullanılarak,

$$\begin{aligned} \phi_Z(t) &= \prod_{j=1}^{k} P_{N_j}(\phi_{X_j}(t)) \\ &= \prod_{j=1}^{k} e^{\lambda_j(\phi_{X_j}(t)-1)} \\ &= e^{\lambda(\phi_X(t)-1)} \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $\lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_k$ ve

$$\phi_X(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda}\phi_{X_1}(t) + ... + \frac{\lambda_k}{\lambda}\phi_{X_k}(t)$$

dir. k farklı sigorta kolunun "birleştirilmiş toplam hasar miktarının" dağılımını bulmak için, hasar sayısının dağılımı $\lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_k$ parametreli Poisson dağılımı ve hasar miktarının dağılımı ise, Teorem 2.1. yardımıyla elde edilen

$$F(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda}F_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda}F_2(x) + ... + \frac{\lambda_k}{\lambda}F_k(x) \tag{3.5}$$

olur.

3.3. Negatif Binom Modeli

Hasar sayısının dağılımına bakılmaksızın genel bir ilişki yazılması durumunda, toplam hasar sayısının ortalaması her sigorta kolunun hasar sayılarının ortalamalarının toplamına eşittir:

$$E[N_{agg}] = E[N_1] + E[N_2] + ... + E[N_k] \tag{3.6}$$

Toplam hasar sayısının ortalaması ise,

$$Var[N_{agg}] = Var\left[\sum_{i=1}^{k} N_i\right] = \sum_{i=1}^{k} Var[N_i] + 2\sum_{i<j} Cov[N_i, N_j] \tag{3.7}$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada $Cov[N_i, N_j] = \rho_{ij}\sqrt{N_i}\sqrt{N_j}$ olarak tanımlanır.

Farklı sigorta kollarının toplamının incelendiği modelde toplam hasar sayısının dağılımının Negatif Binom olduğu varsayılır. Bu durumda Negatif Binom'un parametreleri Eşitlik (3.6)ve (3.7) te verilen $E[N_{agg}]$ ve $Var[N_{agg}]$ ile tahmin edilebilir. Sigorta kollarının bileşiminin hasar miktarı ise yine her bir sigorta kolunun bireysel hasar miktarlarının ağırlıklılandırılmış ortalamasıyla bulunur:

$$F(x) = \frac{E[N_1]}{E[N_{agg}]} F_1(x) + \frac{E[N_2]}{E[N_{agg}]} F_2(x) + ... + \frac{E[N_k]}{E[N_{agg}]} F_k(x) . \tag{3.8}$$

Sigorta kollarının toplamının hasar sayısının Negatif Binom dağıldığı model, her sigorta kolunun bireysel hasar sayılarının negatif binom olduğu modele göre daha basittir (Wang, 1998).

3.4. Bağımlı Değişkenlerin (Risklerin) Toplamı

Risk kuramı ile ilgili aktüeryal çalışmalarda, sigorta şirketinin portföyünde bulunan poliçelerin kendi içlerinde ve aralarında bağımsız olduğu varsayımı yapılır. Ancak bu varsayım, her zaman gerçekçi bir varsayım değildir. Örneğin bir araba kazası, araç hasarıyla beraber sağlık ya da ölüm hasarını da içerebilir. Bir başka deyişle bir araba kazası kendisiyle birlikte bir sağlık hasarı da üretmiştir. Bu da poliçeler arasında bir bağımlılık olduğunu göstermektedir. Bu kesimde riskler arasındaki bağımlılık konusu incelenecektir.

Bağımlı değişkenlerin olasılık çıkaran fonksiyonları Teorem 3.1. yardımıyla bulunabilir.

Teorem 3.1.

Herhangi bir *k* değeri için $X_1, X_2, ..., X_k$ bağımlı değişkenlerinin ortak olasılık çıkaran fonksiyonu $P_{X_1,...,X_k}$ ve ortak karakteristik fonksiyonu $\phi_{X_1,...,X_k}$ ise; $S = X_1 + X_2 + ... + X_k$ toplamının olasılık çıkaran fonksiyonu ve karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P_S(t) = P_{X_1,...,X_k}(t,...,t), \qquad \phi_S(t) = \phi_{X_1,...,X_k}(t,...,t).$$

İspat 3.1.

$$P_S(t) = E\left[t^{X_1+...+X_k}\right] = E\left[t^{X_1}...t^{X_k}\right] = P_{X_1,...,X_k}(t,...,t) \quad \text{(Wang, 1998).}$$

Benzer bir eşitlik S'nin karakteristik fonksiyonunu elde etmek için de yazılabilir. S'nin karakteristik fonksiyonu elde edildikten sonra ters Fourier dönüşümü uygulanarak S'nin olasılık fonksiyonu elde edilir.

3.4.1. Hasar Sayıları Bağımlı Sigorta Kollarının Toplamı

Hasar sayıları bağımlı olan iki portföy için;

N: Birinci Portfoyün hasar sayısını,
K: İkinci Portföyün hasar sayısını,
X: Birinci Portfoyün hasar miktarını,
Y: İkinci Portföyün hasar miktarını

göstersin. N ve K hasar sayılarının bağımlı olduğunu, hasar sayılarının hasar miktarından bağımsız ve X_i ve Y_j raslantı değişkenlerinin birbirinden bağımsız olduğunu varsayıldığında iki portföyün toplam hasar dağılımı,

$$S = (X_1 + ... + X_N) + (Y_1 + ... + Y_K) \tag{3.9}$$

olarak yazılabilir.

İki portföyün toplamının karakteristik fonksiyonu Eşitlik (3.3) kullanılarak

$\phi_S(t) = P_{N,K}(\phi_X(t), \phi_Y(t))$

biçiminde yazılır.

3.4.2. Genel Karma Modelleri

Bireysel riskler, hasarı yaratan mekanizmaya ya da genel ekonomik–yasal değişikliklere bağımlı olabilir. Örneğin, mal sigortalarında aynı coğrafi bölge içinde yer alan risk portföyleri o bölgede oluşan doğal afetlere bağlı olarak etkileşim içinde olabilir. Bireysel riskler arasındaki bu etkileşimin bir dış etkiye bağlı olduğu durumların modellenmesi için karışık dağılımlar kullanılabilir. Buna göre dış etkiyle ilgili belirsizlik θ gibi yapısal bir parametreyle açıklanabilir. Burada θ parametresi Θ raslantı değişkeninin gerçekleşmesi olarak görülebilir.

Toplam hasar miktarının dağılımı iki aşamalı bir süreç olarak görülebilir: Birinci adımda dış etkenin parametresi $\Theta = \theta$ belirlenir. Daha sonra her X_i bireysel riski için $F_{X_i|\Theta}(x_i|\theta)$ koşullu dağılımından hasar frekansı elde edilir.

$N_1,...,N_k$ olmak üzere k tane kesikli raslantı değişkeni ele alındığında, olasılık yoğunluk fonksiyonu $\pi(\theta)$, moment çıkaran fonksiyonu M_Θ olan ve $(N_j | \Theta = \theta) \sim \text{Poisson}(\theta\lambda_j)$ şeklinde gösterilen bir Θ raslantı değişkeninin olduğu varsayılsın. Herhangi bir $\Theta = \theta$ değeri için $(N_j | \theta)$ değişkenleri bağımsızdır ve aşağıda verilen koşullu ortak olasılık çıkaran fonksiyonuyla dağılmıştır.

$$P_{N_1,...,N_k|\Theta}(t_1,...,t_k | \theta) = E\left[t_1^{N_1}...t_k^{N_k} | \Theta = \theta\right]$$

$$= e^{\theta[\lambda_1(t_1-1)+...+\lambda_k(t_k-1)]}.$$

Bununla birlikte, koşulsuz olarak, $N_1,...,N_k$ aynı Θ parametresine bağlı olduklarından bağımlıdırlar. $N_1,...,N_k$ için koşulsuz ortak olasılık çıkaran fonsiyon ise,

$$P_{N_1,...,N_k}(t_1,...,t_k) = E_\Theta\left[E\left[t_1^{N_1}...t_k^{N_k} | \Theta\right]\right]$$

$$= \int_0^\infty e^{\theta[\lambda_1(t_1-1)+...+\lambda_k(t_k-1)]}\pi(\theta)d\theta$$

$$= M_{\Theta}(\lambda_1(t_1-1)+...+\lambda_k(t_k-1))$$

olarak yazılabilir. $N_1,...,N_k$ için marjinal olasılık çıkaran fonksiyonlar $E[N_j]=\lambda_j\, E[\Theta]$ ile

$$P_{N_j}(t_j) = M_{\Theta}(\lambda_j(t_j-1))$$

şeklinde yazılır.

N_i ve N_j arasındaki kovaryans ve kovaryans katsayısı ($i \neq j$);

$$Cov[N_i,N_j] = E_{\Theta}Cov\left[N_i \middle| \Theta, N_j \middle| \Theta\right] + Cov\left[E[N_i|\Theta], E[N_j|\Theta]\right]$$

$$= Cov[\Theta\lambda_i, \Theta\lambda_j] = \lambda_i\lambda_j Var[\Theta]$$

$$\omega(N_i,N_j) = \frac{Cov[N_i,N_j]}{E[N_i]E[N_j]} = \frac{Var[\Theta]}{\{E[\Theta]\}^2}$$

olarak yazılabilir. Burada ω tüm *i* ve *j* değerleri için aynıdır.

Eğer Θ ~Gamma(α,1) dağılıyorsa moment çıkaran fonksiyonu $M_{\Theta}(t)=(1-t)^{-\alpha}$ olur. Bu durumda

$$P_{N_1,...,N_k}(t_1,...,t_k) = [1-\lambda_1(t_1-1)-...-\lambda_k(t_k-1)]^{-\alpha} \qquad (3.10)$$

yazılabilir. Eşitlik (3.12) marjinal dağılımları (α,λ_j) parametreli Negatif Binom ve kovaryans katsayısı $\omega(N_i,N_j) = 1/\alpha$ olan çok değişkenli Negatif Binom dağılımının olasılık çıkaran fonksiyonunu vermektedir (Wang, 1998).

Farklı k risk portföyü söz konusu olduğunda hasar sayıları N_j'lerin (j=0,1,...,k) Poisson-Gamma karması ile bağımlı olduğu varsayılırsa, N_j'lerin ortak olasılık çıkaran fonksiyonu Eşitlik (3.10) 'deki gibi yazılır. Eğer hasar miktarları X_j'lerin birbirinden ve hasar sayılarından bağımsız olduğu varsayılırsa, hasar miktarlarının toplamının dağılımı,

$$P_X(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda}P_{X_1}(t) + ... + \frac{\lambda_k}{\lambda}P_{X_k}(t)$$

eşitliğiyle bulunur. Bu durumda toplam hasar miktarı S'nin olasılık çıkaran fonksiyonu ise

$$P_{N_1,\ldots,N_k}(P_{X_1}(t),\ldots,P_{X_k}(t)) = [1-\lambda(P_X(t)-1)]^{-\alpha}$$

olur (Kaas et al., 2001). Bulunan bu eşitlik hasar sayıları Negatif Binom dağılımına sahip farklı portföylerin her birinin hasar miktarlarının ağırlıklı ortalamalarının birleşiminin dağılımına eşittir. Bu model bağımsız birleşik Negatif Binom dağılımlarının toplamının dağılımının bulunmasından daha basittir.

Burada kullanılan çok değişkenli Poisson-Gamma karması modelinde k risk portföyünün marjinal dağılımlarının (Negatif Binom (α,λ_j)) aynı α parametresine sahip olması gerekmektedir ve bu gereksinim risk portföylerinin birleştirilmesi işlemini kısıtlamaktadır. Aslında hasar sayıları Negatif Binom dağılımlı olduğunda genellikle farklı α_i parametrelerine sahip olurlar. Bu durumda kullanılacak model Bölüm 3.4.3'te verilmiştir.

3.4.3. Genel Etki Modelleri

Farklı sigorta kollarında faaliyet gösteren bir şirket için, sigorta kolları arasındaki bağımlılık bölgeler arasında farklılık gösterebilir. Bu nedenle her bir sigorta kolunun bileşenlere ayrılıp bileşenler arasındaki bağımlılığın modellenmesi daha uygun olmaktadır (örneğin; coğrafi bölgelere göre). Yüksek afet riski olan bölgelerde, afetin yarattığı genel etki (common shock), sigorta kolları arasındaki bağımlılığın artmasına neden olabilir.

Hasar sayısı ve miktarı dağılımlarının birçoğu sonsuz çoğunlukta bölünebilir. Dağılımın bir üyesi, o dağılımın iki farklı üyesinin bağımsız toplamları ile elde edilebiliyorsa o dağılım sonsuz bölünebilir bir dağılımdır. X ve Y bağımsız raslantı değişkenleri olmak üzere, raslantı değişkenlerinin toplamı $X \oplus Y$ ile ve olasılık dağılımlarının konvulüsyonu $F_X \oplus F_Y$ ile gösterilsin. Bu durumda

- $\text{Poisson}(\lambda_1) \oplus \text{Poisson}(\lambda_2) = \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$
- Negatif Binom: $NB(\alpha_1,\beta) \oplus NB(\alpha_2,\beta) = NB(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$

olur (Beard et al., 1984 ; Wang, 1998).

Sonsuz ayrıştırılabilir dağılımlar, risklerin bağımsız birimlere ayrılmasında kullanılır. Sonsuz ayrıştırılabirlikte α_j parametreli k risk ele alınsın $\{X_j(\alpha_j), j=1,...,k\}$.

Ayrıştırma işlemi:

$$\begin{aligned} X_1(\alpha_1) &= X_{11}(\alpha_{11}) \oplus \ldots \oplus X_{1n}(\alpha_{1n}) \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad , \qquad \alpha_{js} \geq 0 \\ X_k(\alpha_k) &= X_{k1}(\alpha_{k1}) \oplus \ldots \oplus X_{kn}(\alpha_{kn}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

ile gösterilebilir. Daha sonra bağımlılık yapısı birim, birim

$$P_{X_1,\ldots,X_k} = \prod_{s=1}^{n} Q_{X_{1s},\ldots,X_{ks}} ,$$

olarak tanımlanabilir. Burada $Q_{X_{1s},\ldots,X_{ks}}$, genel etkiyle modellenen s'inci birimler için ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu ifade etmektedir. Eşitlik (3.11) ile gösterilen modelde kovaryans;

$$\mathrm{Cov}\left[X_i, X_j\right] = \sum_{s=1}^{n} \mathrm{Cov}\left[X_{is}, X_{js}\right] \tag{3.12}$$

ile tanımlanabilir (Wang, 1998).

3.4.4. Genel Etkili Poisson Modeli

Eğer $X_j = X_{ja} \oplus X_{jb}$, $j = 1,...,k$, olarak a ve b gibi iki ayrı bağımsız birime ayrıştırılırsa;

$$P_{X_1,\ldots X_k}(t_1,\ldots,t_k) = E\left[t_1^{X_{1a}} \ldots t_k^{X_{ka}}\right] E\left[t_1^{X_{1b}} \ldots t_k^{X_{kb}}\right] \tag{3.13}$$

olur.

Eğer $X_{1a} = \ldots = X_{ka} = X_0$ ise;

$$P_{X_1,\ldots,X_k}(t_1,\ldots,t_k) = E\left[(t_1 \ldots t_2)^{X_0}\right] E\left[t_1^{X_{1b}} \ldots t_k^{X_{kb}}\right]$$

eşitliğini elde edilir. Burada X_{ib}'lerin de birbirinden bağımsız olduğu varsayıldığında bağımlılığın tek kaynağı X_0 olacaktır. Bu durumda $\mathrm{Cov}\left[X_i, X_j\right] = \mathrm{Var}\left[X_0\right]$ dır.

Bağımlı iki birleşik Poisson dağılımının toplamı ele alındığında;

1. Portföy için: Hasar sayısı N_1, λ_1 parametresi ile Poisson dağılımına ve hasar miktarı X ise $f_1(x)$ olasılık dağılımına sahip olsun.

2. Portföy için: Hasar sayısı N_2, λ_2 parametresi ile Poisson dağılımına ve hasar miktarı Y ise $f_2(y)$ olasılık dağılımına sahip olsun.

X ve Y'nin birbirinden ve (N_1, N_2)'den bağımsız olduğu, ancak N_1 ve N_2' nin genel etki modeliyle bağımlı olduğu varsayılsın.

$$N_1 = N_0 \oplus N_{1b}, \qquad N_2 = N_0 \oplus N_{2b}.$$

Burada N_0~Poisson(λ_0), N_{1b}~Poisson(λ_1-λ_0) ve N_{2b}~Poisson(λ_2-λ_0) olur.

Genel etki modelinde (N_1, N_2) 'nin ortak olasılık çıkaran fonksiyonu $\mathrm{Cov}[N_1,N_2] = \mathrm{Var}[N_0] = \lambda_0$ iken

$$P_{N_1,N_2}(t_1,t_2) = E\left[t_1^{N_1}, t_2^{N_2}\right]$$

$$= \exp\left[\lambda_1(t_1 - 1) + \lambda_2(t_2 - 1) + \lambda_0(t_1 - 1)(t_2 - 1)\right]$$

ile gösterilebilir (Wang, 1998).

İki risk portföyünün toplamı ise

$$S = (X_1 + ... + X_{N_1}) + (Y_1 + ... + Y_{N_2})$$

ile gösterilir ve toplam hasar miktarı,

$$f(x) = \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_0} f_1(x) + \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_0} f_1(x) + \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_0} f_{1*2}(x) \qquad (3.14)$$

biçiminde tanımlanmış Birleşik Poisson (λ_1+λ_2−λ_0) dağılımına sahip olur. Burada f_{1*2}: f_1 ve f_2'nin konvulüsyonunu göstermektedir .

Böylece Genel Etkili Poisson Modeli için hasar sayısı ve miktarının dağılımları elde edilir. Aynı model, bağımlı üç birleşik Poisson dağılımına uygulanırsa ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$P_{N_1,N_2,N_3}(t_1,t_2,t_3) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{3}\lambda_{ii}(t_i - 1) + \sum_{i<j}\lambda_{ij}(t_i t_j - 1) + \lambda_{123}(t_1 t_2 t_3 - 1)\right\} \tag{3.15}$$

olur. N_j' lerin marjinal dağılımları ise;

$$N_j \sim \text{Poisson}\left(\lambda_{123} + \sum_{i=1}^{3}\lambda_{ij}\right), \qquad j=1,2,3,$$

ile gösterilir ve $i \neq j$ için $\text{Cov}[N_i, N_j] = \lambda_{ij} + \lambda_{123}$ olur.

Model aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_{11} + N_{12} + N_{13} + N_{123} \\ N_2 &= N_{22} + N_{12} + N_{23} + N_{123} \\ N_3 &= N_{33} + N_{13} + N_{23} + N_{123} \end{aligned}$$

Modelde;

- N_{ii} ~Poisson (λ_{ii}), *i=1,2,3,*
- N_{ij} ~Poisson (λ_{ij}), $1 \leq i < j \leq 3$,
- $N_{ij} = N_{ji}$, $1 \leq i, j \leq 3$,
- N_{123} ~Poisson(λ_{123}),

olur. Burada N_{123} her üç değişkendeki (N_1, N_2, N_3) genel etkiyi ifade etmektedir. Ayrıca $i \neq j$ için $N_{ij} = N_{ji}$ de N_i ile N_j arasındaki ekstra genel etkiyi ifade etmektedir (Cossette & Marceau, 2000).

3.4.5. Genel Etkili Negatif Binom Modeli

Negatif Binom dağılımının Eşitlik (2.26) da verilen olasılık fonksiyonu $r = \alpha$ ve $p = \frac{1}{1+\lambda}$ kullanılarak yeniden düzenlenirse;

$$P(N = n) = \binom{\alpha + n - 1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^{\alpha}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{n}, \qquad \alpha, \lambda > 0, \; n = 0,1,2,... \tag{3.16}$$

olur. Bu durumda Negatif Binom için olasılık çıkaran fonksiyon;

$$P_N(t) = [1 - \lambda(t-1)]^{-\alpha} \tag{3.17}$$

olarak yazılabilir.

k risk portföyünün hasar sayılarının marjinal dağılımları

N_1~Negatif Binom(α_1,λ_1),...,N_k~Negatif Binom(α_k,λ_k)

olarak verilsin. $\alpha_0 \leq \min\{\alpha_1,...,\alpha_k\}$ olmak üzere her N_j, (j=1,...,k)

$N_j = N_{ja} \oplus N_{jb}$, $\quad N_{ja}$ ~NB(α_0,λ_j), $\quad N_{jb}$ ~NB($\alpha_j - \alpha_0,\lambda_j$)

biçiminde birimlere ayrılsın. Burada N_{ja}'lar aynı α_0 parametresiyle Poisson-Gamma karması kullanılarak modellenirse Eşitlik (3.10)

$$P_{N_{1a},...,N_{ka}}(t_1,...,t_k) = \{1 - \lambda_1(t_1-1) - ... - \lambda_k(t_k-1)\}^{-\alpha_0}$$

şeklinde yazılabilir (Wang, 1998).

N_{jb} 'lerin bağımsız olduğu varsayıldığında (N_1,...,N_k) için ortak olasılık çıkaran fonksiyon

$$P_{N_1,...,N_k}(t_1,...,t_k) = \{1 - \lambda_1(t_1-1) - ... - \lambda_k(t_k-1)\}^{-\alpha_0} \prod_{j=1}^{k} \{1 - \lambda_j(t_j-1)\}^{\alpha_0-\alpha_j}$$

olur.

Genel etkili Poisson'da kullanılan modelin, bağımlı iki sigorta kolunun Negatif Binom dağılımına sahip olduğu varsayılarak yeniden düzenlenmiş şekli aşağıda verilmiştir. Negatif Binom için de j'inci sigorta koluna ait toplam hasar sayısı iki raslantı değişkeninin toplamıyla bulunmaktadır.

$$N_j = N_{jj} + N_{j0} \tag{3.18}$$

Burada,

N_{jj} : j'inci sigorta koluna ait bağımsız hasarların sayısını,

N_{j0} : bağımlı hasarların sayısını,

N_j : j'inci sigorta koluna ait toplam hasar sayısını ifade etmektedir.

$$N_{jj} \sim NB(\alpha_{jj}, \lambda_j) \quad (j = 1,2)$$

$$N_{j0} \sim NB(\alpha_0, \lambda_j) \quad (j = 1,2) \qquad (3.19)$$

n adet bağımsız ve (α_i, λ) parametreli Negatif Binom raslantı değişkeninin toplamı $\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i, \lambda\right)$ parametresiyle Negatif Binom dağılır (Beard et al., 1984; Daykin et al., 1994; Cossette & Marceau, 2000).

Bu durumda $\alpha_j = \alpha_{jj} + \alpha_0$ için $N_j \sim NB(\alpha_j, \lambda_j)$ olur. N_{j0} bağımlı raslantı değişkenleri ise genel Poisson-Gamma karmasıyla ve

(1) $N_{j0} \mid \Theta = \theta \sim Poisson(\theta\lambda_j) \quad (j = 1,2)$,

(2) $\Theta \sim Gamma(\alpha_0, 1)$,

(3) $N_{j0} \mid \Theta = \theta$ bağımsız olmak üzere (j=1,2)

ile modellenir (Cossette & Marceau, 2000; Wu & Yuen, 2003).

Bu durumda

$$Cov[N_i, N_j] = \alpha_0 \lambda_i \lambda_j = \frac{\alpha_0}{\alpha_i \alpha_j} E[N_i] E[N_j] \qquad (3.20)$$

olur.

Genel Etkili Negatif Binom modeli'nde bağımlı değişkenlerin ortak olasılık dağılım fonksiyonu

$$P_{N_{10},N_{20}}(t_1, t_2) = E\left[E\left[t_1^{N_{10}} \; t_2^{N_{20}} \mid \Theta\right]\right] = M_\Theta\left[\lambda_1(t_1 - 1) + \lambda_2(t_2 - 1)\right]$$

$$= \left[1 - \lambda_1(t_1 - 1) - \lambda_2(t_2 - 1)\right]^{-\alpha_0}$$

olur.

Bu nedenle N_1,N_2'nin ortak olasılık çıkaran fonksiyonu

$$P_{N_1,N_2}(t_1,t_2) = E\left[t_1^{(N_{11}+N_{10})} t_2^{(N_{22}+N_{20})}\right]$$

$$= E\left[t_1^{N_{11}}\right] E\left[t_2^{N_{22}}\right] E\left[t_1^{N_{10}} t_2^{N_{20}}\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{2} \left[1-\lambda_j(t_j-1)\right]^{-\alpha_{jj}} P_{N_{10},N_{20}}(t_1,t_2) \qquad (3.21)$$

eşitliği ile yazılabilir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. UYGULAMA

Bu bölümde, bağımlılığın iflas olasılığı üzerindeki etkisini incelemek için bir sigorta portföyündeki iki sigorta kolu ele alınarak genel etkili Poisson modeli ve genel etkili Negatif Binom modeliyle bağımlı sigorta kollarının toplam hasar miktarı dağılımı bulunmuş ve sonlu zamanlı iflas olasılıkları hesaplanmıştır.

Ayrıca düzenleme katsayıları kullanılarak bağımlılığın sonsuz zamanlı iflas olasılıkları üzerindeki etkisi her iki model için incelenmiştir.

Toplam hasar dağılımının hızlı Fourier dönüşümü yöntemiyle bulunabilmesi için Excel programı kullanılmıştır. Hasar miktarı dağılımlarını kesiklileştirebilmek amacıyla, kullanılan yuvarlama yönteminde, adım sayısı olarak $n=2^r$ koşulunu sağlayan değişik n değerleri denenmiştir. Hesaplamalarda Excel programında Fourier dönüşümü için desteklenen en yüksek adım sayısı olan 4096 değeri kullanılmıştır. Ayrıca kesiklileştirme işleminde kullanılacak olan h aralığı, seçilen adım sayısının yüksekliği göz önüne alınarak ve hasar miktarlarının dağılım foksiyonundaki değişimini en düşük seviyede tutmak için h=1 olacak biçimde seçilmiştir.

İflas olasılığını ardışık olarak hesaplayabilmek için yine Excel programı kullanılmış ve iflas olasılığı için Bölüm 2.4.'te verilen algoritmaya ilişkin Makro kodları yazılmıştır. İflas olasılığının bulunabilmesi için farklı başlangıç sermayesi değerleri kullanılmıştır. Fourier dönüşümünün uygulanmasına yönelik algoritma, kesiklileştirme işleminin algoritması ve iflas olasılığının bulunmasına yönelik algoritma birleştirilerek Poisson ve Negatif Binom modelleri için oluşturulan Excel programının makro kodları EK-1 ve EK-2' de verilmiştir.

Yazılan Excel programı kullanıcı tarafından belirlenen, hasar sayısı ve hasar miktarı dağılımlarına ilişkin parametreler ve iki farklı sigorta kolu arasındaki korelasyon katsayısını kullanarak hızlı Fourier döşümü yöntemiyle toplam hasar miktarının dağılımını hesaplamaktadır. Ayrıca yine kullanıcı tarafıdan belirlenen başlangıç sermayesi ile iflas olasılığı için ilgilenilen dönem sayısı değerlerini kullanarak sonlu dönemde iflas olasılığı değeri de yazılan program tarafından bulunmaktadır. Başlangıç sermayesi ve ilgilenilen dönem sayısı ardışık algoritmadaki döngü sayısını ve dolayısıyla programın çalışma hızını etkilediğinden EK-1 ve EK-2' de verilen her iki algoritma için de belirlenen dönem sayısı 50 değeriyle sınırlandırılmıştır. Benzer şekilde başlangıç sermayesi değeri de hasar dağılımlarının parametrelerine bağlı olarak sınırlandırılmıştır.

4.1. Genel Etkili Poisson Modeli Uygulaması

Genel etkili Poisson modelinde sigorta kollarının aşağıda verilen dağılımlara sahip olduğu varsayılmıştır.

Birinci Sigorta kolu için: X_1~Üstel (0,5)
N_1~Poisson(5)

İkinci Sigorta kolu için: X_2~Pareto (3;4)
N_2 ~Poisson(5)

Bölüm 3.4.4.'de verilen model bu iki sigorta kolu için aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$N_1 = N_{11} + N_{12}$

$N_2 = N_{22} + N_{12}$.

Burada N_{11}, N_{22} ve N_{12} raslantı değişkenleri λ_{11}, λ_{22} ve λ_{12} parametreli bağımsız Poisson dağılımlı raslantı değişkenleridir:

$N_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_{11}+\lambda_{12})$ ve

$N_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_{22}+\lambda_{12})$ olur.

Bu durumda N_1 ve N_2 arasındaki bağımlılık her iki değişken için ortak birim olan N_{12}'den kaynaklanmaktadır ve N_1 ile N_2 arasındaki kovaryans; $\text{Cov}[N_1,N_2] = \lambda_{12}$ ile gösterilir.

Bu bilgiler ışığında genel etkili Poisson modeli için

$$E\left[W^{(j)}\right] = (\lambda_{jj} + \lambda_{12})E\left[X_j\right]$$

$$\text{Var}[\,W^{(j)}\,] = (\lambda_{jj} + \lambda_{12})E\left[X_j^2\right]$$

ve

$$\mathrm{Cov}\left[W^{(1)}, W^{(2)}\right] = \lambda_{12} E[X_1] E[X_2]$$

yazılır.

Toplam hasar miktarı S'nin ortalaması ve varyansı ise sırasıyla

$E[S] = (\lambda_{11}+\lambda_{12})E[X_1] + (\lambda_{22}+\lambda_{12})E[X_2]$,

$$\mathrm{Var}[S] = (\lambda_{11} + \lambda_{12})E\left[X_1^2\right] + (\lambda_{22} + \lambda_{12})E\left[X_2^2\right] + 2\lambda_{12}E[X_1]E[X_2]$$

olur.

N_1 ve N_2 için ortak olasılık çıkaran fonksiyonu

$$P_{N_1,N_2}(t_1, t_2) = E\left[t_1^{N_1}, t_2^{N_2}\right] = E\left[t_1^{N_{11}+N_{12}}, t_2^{N_{22}+N_{12}}\right],$$

$$= E\left[t_1^{N_{11}}\right] E\left[t_2^{N_{22}}\right] E\left[(t_1 t_2)^{N_{12}}\right]$$

$$= \exp\{\lambda_{11}(t_1 - 1) + \lambda_{22}(t_2 - 1) + \lambda_{12}(t_1 t_2 - 1)\}.$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda sigorta kolları için karakteristik fonksiyon

$$\phi_{W^{(1)},W^{(2)}}(t_1, t_2) = P_{N_1,N_2}\left(\phi_{X_1}(t_1), \phi_{X_2}(t_2)\right)$$

$$= \exp\{\lambda_{11}(\phi_{X_1}(t_1) - 1) + \lambda_{22}(\phi_{X_2}(t_2) - 1) + \lambda_{12}(\phi_{X_1}(t_1)\phi_{X_2}(t_2) - 1)\}$$

olur.

Teorem 3.1. 'i kullanarak S'nin karakteristik fonksiyonu

$$\phi_S(t) = \phi_{W^{(1)},W^{(2)}}(t, t)$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda

$$\phi_S(t) = \exp\{\lambda(\phi_X(t) - 1)\}$$

olur. Burada $\lambda = \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{12}$ ve

$$\phi_X(t) = \frac{\lambda_{11}}{\lambda}\phi_{X_1}(t) + \frac{\lambda_{22}}{\lambda}\phi_{X_2}(t) + \frac{\lambda_{12}}{\lambda}\phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t)$$

olarak ifade edilir.

Genel etkili Poisson modeli için sigorta kollarının beklenen değer ve varyansları Çizelge 4.1. ile verilmiştir:

Çizelge 4.1. Poisson modeli için beklenen değer ve varyanslar

	1. Sigorta Kolu	2. Sigorta Kolu
$E[X_i]$	2	2
$Var[X_i]$	4	12
$E[N_i]$	5	5
$Var[N_i]$	5	5
$E[W_i]$	10	10
$Var[W_i]$	40	80

Farklı korelasyon katsayıları için λ_{12}'nin aldığı değerler Çizelge 4.2.'de verilmiştir. Farklı başlangıç sermayesine göre hesaplanan iflas olasılıkları ise, Bölüm 2.4.'de verilen yöntem kullanılarak, Çizelge 4.3.'te verilmiştir.

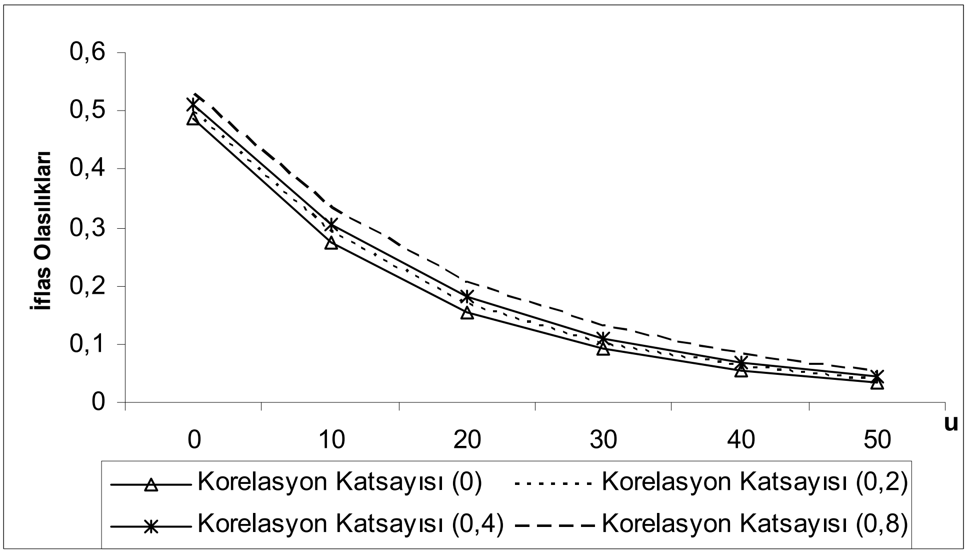
Çizelge 4.2. Poisson modeli için korelasyon katsayıları

	$\rho(N_1,N_2)=0$	$\rho(N_1,N_2)=0,2$	$\rho(N_1,N_2)=0,4$	$\rho(N_1,N_2)=0,8$
λ_{12}	0	1	2	4
$Cov[N_1,N_2]$	0	1	2	4

Çizelge 4.3. Poisson modeli için iflas olasılıkları

U	$\rho(N_1,N_2)=0$ $\psi(u,20)$	$\rho(N_1,N_2)=0,2$ $\psi(u,20)$	$\rho(N_1,N_2)=0,4$ $\psi(u,20)$	$\rho(N_1,N_2)=0,8$ $\psi(u,20)$
0	0,4866	0,4987	0,5098	0,5296
10	0,2741	0,2904	0,3056	0,3333
20	0,1556	0,1691	0,1822	0,2072
30	0,0910	0,1007	0,1105	0,1298
40	0,0548	0,0615	0,0683	0,0824
50	0,0340	0,0384	0,0430	0,0529

Çizelge 4.3.'te verilen iflas olasılıklarının, başlangıç sermayesine göre çizilen grafiği Şekil 4.1.'de verilmektedir. Buna göre, başlangıç sermayesi için seçilen değer arttırıldıkça tüm bağımlılık düzeylerinde iflas olasılıklarının azaldığı görülmektedir.



Şekil 4.1. Poisson modelinde iflas olasılıklarının başlangıç sermayesine göre değişimi

4.2. Genel Etkili Negatif Binom Modeli Uygulaması

Genel etkili Poisson modeline benzer şekilde iki sigorta kolunun aşağıda verilen dağılımlara sahip olduğu varsayılsın.

Birinci Sigorta kolu için: X_1~Üstel (0,5)

N_1~Negatif Binom (1;5)

İkinci Sigorta kolu için: X_2~Pareto (3;4)

N_2 ~ Negatif Binom (1;5)

Bölüm 3.4.5'de verilen model iki sigorta kolu için aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$N_1 = N_{11} + N_{10}$

$N_2 = N_{22} + N_{20}$

olarak yazılır. N_{jj}~$NB(\alpha_{jj},\lambda_j)$ ve N_{j0}~$NB(\alpha_0,\lambda_j)$ tanımlamaları geçerlidir. Poisson modelinden farklı olarak burada bağımlılık için α_0 değerini bulmak gereklidir. $Cov[N_1,N_2]$ ve Eşitlik (3.20) yardımıyla α_0 değeri bulunabilir.

Toplam hasar miktarı S'nin ortalaması ve varyansı;

$$E[S] = (\alpha_{11}+ \alpha_0)E[X_1] + (\alpha_{22}+ \alpha_0) E[X_2]$$

$$Var[S]=\alpha_1\lambda_1 E\left[X_1^2\right]+\alpha_1\lambda_1^2(E[X_1])^2+\alpha_2\lambda_2 E\left[X_2^2\right]+\alpha_2\lambda_2^2(E[X_2])^2+2\alpha_0\lambda_1\lambda_2 E[X_1]E[X_2]$$

olarak yazılır.

N_1 ve N_2 için ortak olasılık çıkaran fonksiyon Eşitlik (3.21) ile tanımlanmıştır. Bu eşitlik kullanılarak S için karakteristik fonksiyon aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\phi_S(t) = \left[1-\lambda_1(\phi_{X_1}(t)-1)\right]^{-\alpha_{11}}\left[1-\lambda_2(\phi_{X2}(t)-1)\right]^{-\alpha_{22}}\left[1-\lambda_1(\phi_{X_1}(t)-1)-\lambda_2(\phi_{X2}(t)-1)\right]^{-\alpha_0}$$

Genel etkili Negatif Binom modeli için beklenen değer ve varyans değerleri Çizelge 4.4.'de, farklı korelasyon katsayıları için kovaryans değerleri ve α_0 değerleri Çizelge 4.5.'te ve bu sonuçlara göre hesaplanan iflas olasılıkları Çizelge 4.6.'da verilmiştir.

Çizelge 4.4. Negatif Binom modeli için beklenen değer ve varyanslar

	1. Sigorta Kolu	2. Sigorta Kolu
$E[X_i]$	2	2
$Var[X_i]$	4	12
$E[N_i]$	5	5
$Var[N_i]$	30	30
$E[W_i]$	10	10
$Var[W_i]$	140	180

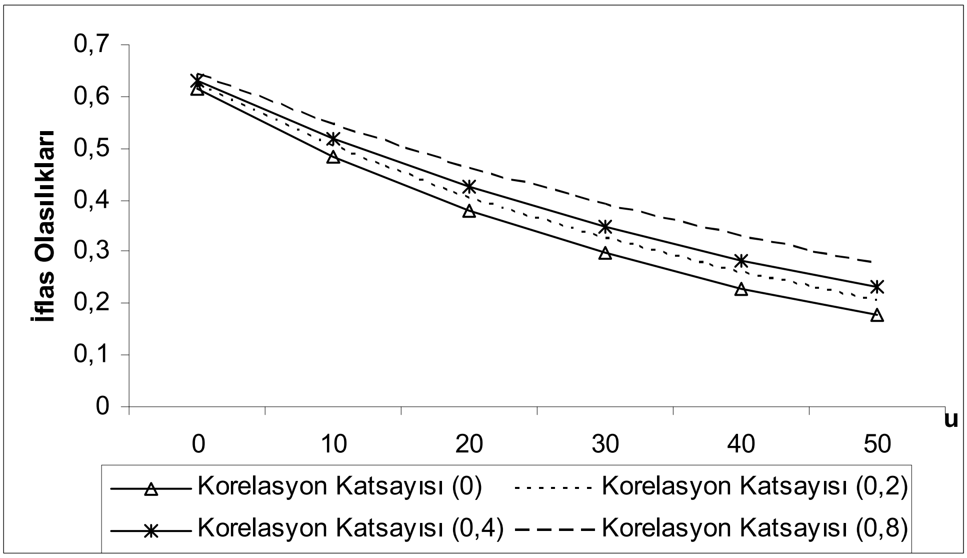
Çizelge 4.5. Negatif Binom modeli için korelasyon katsayıları

	$\rho(N_1,N_2)=0$	$\rho(N_1,N_2)=0,2$	$\rho(N_1,N_2)=0,4$	$\rho(N_1,N_2)=0,8$
α_0	0	0,24	0,48	0,96
$Cov[N_1,N_2]$	0	6	12	24

Çizelge 4.6. Negatif Binom modeli için iflas olasılıkları

u	$\rho(N_1,N_2)=0$ $\psi(u,20)$	$\rho(N_1,N_2)=0,2$ $\psi(u,20)$	$\rho(N_1,N_2)=0,4$ $\psi(u,20)$	$\rho(N_1,N_2)=0,8$ $\psi(u,20)$
0	0,6147	0,6220	0,6293	0,6436
10	0,4850	0,5019	0,5175	0,5453
20	0,3798	0,4033	0,4246	0,4612
30	0,2960	0,3233	0,3477	0,3893
40	0,2298	0,2585	0,2841	0,3279
50	0,1779	0,2063	0,2317	0,2756

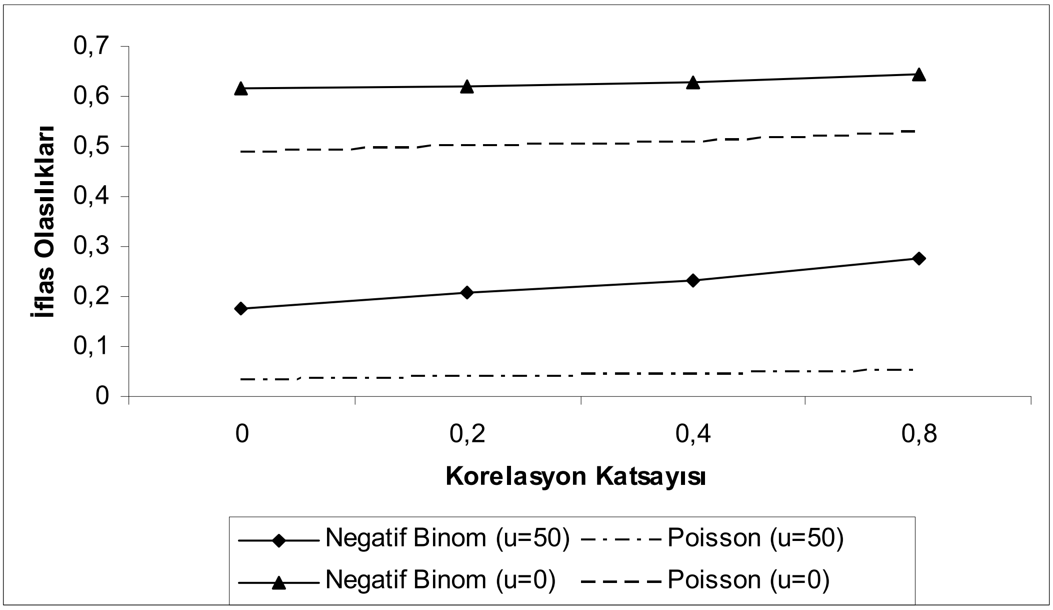
Çizelge 4.6.'te verilen iflas olasılıklarının, başlangıç sermayesine göre çizilen grafiği Şekil 4.2.'de verilmektedir. Poisson modelindeki gibi Negatif Binom Modelinde de başlangıç sermayesi için seçilen değer arttırıldıkça tüm bağımlılık düzeylerinde iflas olasılıklarının azaldığı görülmektedir.



Şekil 4.2. Negatif Binom modelinde iflas olasılıklarının başlangıç sermayesine göre değişimi

Negatif Binom modelinde iflas olasılıklarındaki azalmanın Poisson modeline göre daha yavaş olduğu ve Negatif Binom dağılımının şirketin rezervi hakkında daha muhafazakar olduğu söylenebilir.

Poisson ve Negatif Binom modellerinde farklı bağımlılık düzeyleri için iflas olasılıklarının grafiği Şekil 4.3.'de verilmiştir.



Şekil 4.3. Farklı bağımlılık düzeyleri için iflas olasılıkları

Her iki model için de bağımlılık düzeyi arttırıldıkça iflas olasılıklarının arttığı grafikte görülmektedir. Ayrıca Negatif Binom modelinde bağımlılık düzeyi arttırıldığında iflas olasılıklarının Poisson modeline göre daha hızlı artmakta olduğu görülmektedir.

4.3. Bağımlılık ve Düzenleme Katsayısı

Bağımlılığın sonsuz zaman iflas olasılığı üzerindeki etkisi düzenleme katsayısı yardımıyla ölçülebilir. Sonsuz zaman iflas olasılığı için düzenleme katsayısı Eşitlik (2.36)'da verildiği gibi toplam hasar miktarı dağılımlarına bağlıdır. Dolayısıyla sonsuz zaman iflas olasılığı ψ(u)'yu bulabilmek için toplam hasar miktarının moment çıkaran fonksiyonu $M_W(r)=E[e^{rW}]$ 'nun var olduğu kabul edilir.

4.3.1. Üstel Sıralama ve Düzenleme Katsayısı

Goovaerts et al. (1990) tarafından X ve Y risklerinin düzenleme katsayıları arasındaki ilişki üstel sıralama tanımı kullanılarak Teorem 4.1. ile açıklanmıştır.

Teorem 4.1.

X ve Y gibi iki farklı risk için üstel sıralama $X <_e Y$ iken, c primli bileşik Poisson sürecinde düzenleme katsayıları $R_X > R_Y$ koşulunu sağlar.

Teorem 4.1.'e göre X riski Y riskinden önce geliyorsa tüm r >0 değerleri için $M_X(r)<M_Y(r)$ olur. Düzenleme katsayılarının sıralaması ise üstel sıralama temelinde aşağıda verilen şekilde gösterilebilir:

W_a ve W_b iki farklı sigorta koluna ait toplam hasar miktarları olsun. $E[W_a]=E[W_b]=E[W]$ ve $c_a=c_b=c=(1+\theta)E[W]$, ($\theta>0$, iken) olduğu varsayıldığında R_a ve R_b düzenleme katsayıları $M_{W_a}(r)=e^{cr}$ ve $M_{W_b}(r)=e^{cr}$ denklemlerinin çözümleriyle bulunur. Eğer $W_a <_e W_b$ ise $R_a > R_b$ olur.

4.3.2. Genel Etkili Poisson Modeli ve Düzenleme Katsayısı

İki farklı sigorta kolu için, ilk sigorta kolunun bağımlı iki sigorta kolunun bileşiminden oluştuğu, ikinci sigorta kolunun ise bağımsız iki sigorta kolunun bileşiminden oluştuğu varsayılsın. Bu durumda W^D bağımlı sigorta kolları için toplam hasar miktarını, W^I ise bağımsız sigorta kolları için toplam hasar miktarını göstersin. W^D raslantı değişkeni genel etkili Poisson modeli ile tanımlanırken W^I raslantı değişkeni klasik Poisson modeliyle (sigorta kollarının bağımsız olduğu varsayımıyla) tanımlanır.

W^D için moment çıkaran fonksiyon

$$M_{W^D}(r)=\exp\left(\lambda_{11}M_{X_1}(t)+\lambda_{22}M_{X_2}(t)+\lambda_{12}M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)-\lambda_{11}-\lambda_{22}-\lambda_{12}\right) \tag{4.1}$$

olur. Burada $\lambda_j=\lambda_{jj}+\lambda_{12}$ eşitliğiyle bulunur. W^I için moment çıkaran fonksiyon ise

$$M_{W^I}(r)=\exp\left(\lambda_1 M_{X_1}(r)+\lambda_2 M_{X_2}(r)-\lambda_1-\lambda_2\right) \tag{4.2}$$

eşitliği ile verilir.

W^D ve W^I için düzenleme katsayıları R^D ve R^I, $M_{W^D}(r)=e^{cr}$, $M_{W^I}(r)=e^{cr}$ denklemlerinin çözümleriyle bulunur. Eşitlik (4.1) ve (4.2) incelendiğinde $M_{W^D}(r)\geq M_{W^I}(r)$ olduğu görülmektedir. Bu durumda Teorem 4.1.'e göre

$R_D < R_I$

yazılır. Bu sonuca göre bağımlı risklerden oluşan portföyün, bağımsız portföye göre daha riskli olduğu söylenebilir.

4.3.3. Genel Etkili Negatif Binom Modeli ve Düzenleme Katsayısı

Poisson modelinde olduğu gibi genel etkili Negatif Binom modelinde de iki farklı sigorta kolu; birincisinin bağımlı risklerden oluştuğu, ikincisinin bağımsız risklerden oluştuğu varsayımı altında ele alınsın. Bağımlı sigorta kolları için Poisson modeline benzer şekilde toplam hasar miktarı W^D ile bağımsız sigorta kolları için toplam hasar miktarı W^I ile gösterilsin.

Bu durumda W^D için moment çıkaran fonksiyon

$$M_{W^D}(t) = \left[1-\lambda_1(M_{X_1}(t)-1)\right]^{-\alpha_{11}}\left[1-\lambda_2(M_{X_2}(t)-1)\right]^{-\alpha_{22}}\left[1-\lambda_1(M_{X_1}(t)-1)-\lambda_2(M_{X_2}(t)-1)\right]^{-\alpha_0}$$

olarak yazılır. Burada $\alpha_{jj} = \alpha_j - \alpha_0$ olur. W^I için moment çıkaran fonksiyon ise

$$M_{W^I}(t) = \left[1-\lambda_1(M_{X_1}(t)-1)\right]^{-\alpha_1}\left[1-\lambda_2(M_{X_2}(t)-1)\right]^{-\alpha_2}$$

eşitliği ile verilir.

W^D ve W^I için de düzenleme katsayıları R^D ve R^I, $M_{W^D}(r) = e^{cr}$, $M_{W^I}(r) = e^{cr}$ denklemlerinin çözümleriyle bulunur. Eşitlik (4.1) ve (4.2) incelendiğinde $M_{W^D}(r) \geq M_{W^I}(r)$ olduğu görülmektedir. Bu durumda Teorem 4.1. yardımıyla

$R_D < R_I$

yazılır. Buna göre hasar sayılarının Negatif Binom dağıldığı modelde de bağımlı risklerden oluşan portföyün, bağımsız portföye göre daha riskli olduğu söylenebilir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ

Sigorta şirketleri portföylerinde farklı sigorta kolları için poliçeler bulundurmaktadır. Risk kuramıyla ilgili aktüeryal çalışmalarda, kolaylık açısından genellikle sigorta kollarının bağımsız olduğu varsayımında bulunulur. Ancak bu varsayım her zaman gerçekçi değildir. Bağımsızlık varsayımı iflas olasılığının değerini etkilediğinden uzun dönemde şirketin ekonomik durumunun yanlış değerlendirilmesine yol açabilir.

Bu çalışmada portföyde bulunan poliçeler arasındaki bağımlılık durumu incelenmiştir. Farklı sigorta kollarına ait poliçelerden oluşan bir portföyde sigorta kollarına ait hasar sayılarının bağımlı olması durumunda toplam hasar miktarının hızlı Fourier dönüşümü yöntemiyle hesaplanması ele alınmıştır. Buna bağlı olarak kesikli zamanlı risk modeli kullanılarak bağımlılığın iflas olasılığı üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Farklı sigorta kollarının birleştirilmesi işlemi için karakteristik fonksiyonlar yardımıyla konvulüsyon metodu kullanılmıştır. Ortak karakteristik fonksiyonların elde edilmesi, ortak dağılım fonksiyonların elde edilmesine göre daha kolay olduğundan toplam hasar miktarının bulunmasında karakteristik fonksiyonlar kullanılmıştır. Karakteristik fonksiyonlar ve konvulüsyonları kullanılarak toplam hasar miktarının dağılımının hesaplanabilmesi için Microsoft Excel programı yardımıyla Fourier dönüşümünden yararlanılmıştır.

Sigorta kolları arasındaki bağımlılık hasarı yaratan mekanizmayla ya da genel ekonomik-yasal değişiklikler, bir bölgede oluşan doğal afetler gibi dış etkilerle açıklanabilir. Yüksek afet riski olan bölgelerde, afetin yarattığı genel etki, sigorta kolları arasındaki bağımlılığın artmasına neden olabilir. j ve k sigorta kolları için genel etkinin yarattığı bağımlı hasar sayısı N_{jk} ile gösterilir. Çalışmada bağımlı hasar sayısının bulunması için sigorta kollarının hasar sayıları arasındaki kovaryanstan yararlanılmıştır. Seçilen korelasyon katsayıları için bulunan kovaryanslar yardımıyla bağımlı hasar sayısına ilişkin parametreler bulunmuştur. Bulunan bağımlı hasar sayıları kullanılarak toplam hasar miktarı hesaplanmıştır.

Bağımlılığın iflas olasılığı üzerindeki etkisini incelemek üzere farklı korelasyon katsayıları için bulunan toplam hasar miktarına ilişkin sonlu zamanlı iflas olasılıkları, farklı başlangıç sermayesi değerleri kullanılarak hesaplanmıştır. Hasar sayılarının Poisson ve Negatif Binom dağılımlarına sahip olduğu durumlar ele alınmıştır. Buna göre her iki modelde de bağımsız durum için korelasyon katsayısı sıfır olarak alınmış ve artan korelasyon katsayıları için ise bağımlılık incelenmiştir.

Bağımlı durumlar için hesaplanan iflas olasılıkları incelendiğinde bağımlılık için seçilen korelasyon katsayısı değerleri arttırıldıkça iflas olasılığının arttığı görülmüştür. Negatif Binom modelinde bağımlılık düzeyi attırıldıkça iflas olasılıklarının Poisson modeline göre daha hızlı arttığı söylenebilir. Poisson modeli için seçilen başlangıç sermayesi değeri arttırıldıkça hesaplanan iflas olasılıklarının azaldığı görülmüştür. Negatif Binom modelinde de seçilen başlangıç sermayesi değeri arttırıldıkça iflas olasılıkları azalmaktadır ancak Poisson modeline göre olasılıklardaki azalma daha yavaştır. Çalışmada sonlu zamanlı iflas olasılıkları 20 dönem için hesaplanmış sonuçlar olup farklı dönem sayıları için yapılan hesaplamalarda da bağımlılığın iflas olasılığı üzerindeki etkisi için benzer sonuçlar elde edilmiştir.

İflas olasılığının belirli bir zaman dilimi yerine sonsuz zamanda incelenebilmesi için Poisson ve Negatif Binom modelleri için bağımlı ve bağımsız durumlardaki düzenleme katsayıları bulunmuş ve karşılaştırılmıştır. Buna göre hasar sayılarının bağımlı olması durumunun bağımsız olması durumuna göre daha riskli olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Farklı sigorta kolları arasındaki bağımlılığın artması toplam hasar miktarını artırmakta ve dolayısıyla sigorta şirketinin ekonomik yapısını olumsuz yönde etkilemektedir. Sigorta şirketinin portföyünde bulunan poliçeler arasındaki bağımlılığın şirketin varlığını uzun dönemde sürdürebilmesi açısından önemli olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Sigorta kolları arasındaki bağımlı hasar sayılarına yönelik olarak bağımlılık için farklı yaklaşımlar geliştirilmesi mümkündür.

Kesikli risk modelinde risk rezervi için yapılan tanımda, rezerv sadece prim gelirleriyle artan ve hasar ödemeleriyle azalan bir yapıdadır. Uygulamada ise prim gelirleri yanında yatırım gelirleri de söz konusu olacağı için modelin yatırım gelirlerini de kapsayacak biçimde geliştirilmesi mümkündür.

KAYNAKLAR

Ambagaspitiya, R.S., 1998, On the distribution of a sum of correlated aggregate claims, Insurance: Mathematics and Economics 23, 15-19.

Ambagaspitiya, R.S., 1999, On the distribution of two classes of correlated aggregate claims, Insurance: Mathematics and Economics 24(3), 301-308.

Beard, R.E., Pentikainen, T., Pesonen, E., 1984, Risk Theory: The Stochastic Basis of Insurance, Chapman & Hall, London, 408p.

Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J., 1997, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, Schaumburg, IL., 753p.

Bühlmann, H., 1970, Mathematical Methods in Risk Theory, Springer-Verlag, New York, 210p.

Cossette, H., Marceau, E., 2000, The discrete-time risk model with correlated classes of business, Insurance: Mathematics and Economics 26(2), 133–149.

Daykin, C.D., Pentikainen, T., Pesonen, M., 1994, Practical Risk Theory for Actuaries, Chapman & Hall, London, 546p.

Dickson, D.C.M., Waters, H., 1991, Recursive calculation of survival probabilities, ASTIN Bulletin 21(2), 199-221.

Goovaerts, M.J., De Vylder, F., 1984, A stable algorithm for evaluation of ultimate ruin probabilities, ASTIN Bulletin 14, 53-59.

Goovaerts, M.J., Kaas, R., Van Heerwaarden, A.E., Bauwelinckx, T., 1990, Effective Actuarial Methods, North-Holland, Amsterdam, 316p.

Hogg, R., Craig, A., 1978, Introduction to Mathematical Statistics, Macmillan, New York, 564p.

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhane, J., Denuit, M., 2001, Modern Actuarial Risk Theory, Kluwer Academic Publishers, Boston, 309p.

Klugman, S., Panjer, H. H., Willmot G.E., 1998, Loss Models: From Data to Decisions, John Wiley & Sons, New York, 644p.

Robertson, J., 1992, The computation of aggregate loss distributions, Proceedings of the Casualty Actuarial Society, LXXIX, 57-133.

Wang, G., 1998, Aggregation of correlated risk portfolios: models and algorithms, Proceedings of the Casualty Actuarial Society, LXXXV, 848-939.

Wu, X., Yuen, K.C., 2003, A discrete-time risk model with interaction between classes of business. Insurance: Mathematics and Economics 33(1), 117-133.

Yuen, K.C., Wang, G., 2002, Comparing two models with dependent classes of business. ARCH, Society of Actuaries, 22 pages.

EKLER DİZİNİ

EK 1. Poisson Modelinde Bağımlı İki Sigorta Kolu için Toplam Hasar Miktarını ve İflas Olasılığını Bulan Excel (Makro) Programı

```
Dim i, j, a, b, k, n, l, period, t As Integer
Dim dizi(4096) As Variant
Dim ilk, sifir, span, ara As Double
Dim reserve As Integer
Dim premium, sinir As Integer
Dim survive As Variant

Range(Cells(12, 3), Cells(5000, 20)).ClearContents
Range(Sheet2.Cells(12, 3), Sheet2.Cells(5000, 20)).ClearContents

span = Cells(11, 2)
n = Cells(6, 2)

For j = 0 To n - 1
  Cells(12 + j, 3).Value = j
  Cells(12 + j, 4).Value = (2 * j - 1) * span / 2
  Cells(12 + j, 5).Value = (2 * j + 1) * span / 2
  If (1 - Exp(-Cells(12 + j, 4) * Cells(9, 2))) >= 0 Then
      Cells(12 + j, 6).Value = (1 - Exp(-Cells(12 + j, 4) * Cells(9, 2)))
  Else
      Cells(12 + j, 6).Value = 0
  End If
  Cells(12 + j, 7).Value = (1 - Exp(-Cells(12 + j, 5) * Cells(9, 2)))
  Cells(12 + j, 8).Value = Cells(12 + j, 7) - Cells(12 + j, 6)
Next j

For j = 0 To n - 1
  Sheet2.Cells(12 + j, 3).Value = j
  Sheet2.Cells(12 + j, 4).Value = (2 * j - 1) * span / 2
  Sheet2.Cells(12 + j, 5).Value = (2 * j + 1) * span / 2
  If (1 - (Sheet1.Cells(10, 4) / (Sheet2.Cells(12 + j, 4) + Sheet1.Cells(10, 4))) ^
        (Sheet1.Cells(9, 4))) >= 0 Then
  Sheet2.Cells(12 + j, 6).Value = (1 - (Sheet1.Cells(10, 4) / (Sheet2.Cells(12 + j, 4)
        + Sheet1.Cells(10, 4))) ^ (Sheet1.Cells(9, 4)))
  Else
      Sheet2.Cells(12 + j, 6).Value = 0
  End If
  Sheet2.Cells(12 + j, 7).Value = (1 - (Sheet1.Cells(10, 4) / (Sheet2.Cells(12 + j, 5)
        + Sheet1.Cells(10, 4))) ^ (Sheet1.Cells(9, 4)))
  Sheet2.Cells(12 + j, 8).Value = Sheet2.Cells(12 + j, 7) - Sheet2.Cells(12 + j, 6)
Next j
```

```
Range("H12").Select
Range(Selection, Selection.End(xlDown)).Select
Application.Run "ATPVBAEN.XLA!Fourier", ActiveSheet.Range(Cells(12, 8),
Cells(12        + n - 1, 8)), _
      ActiveSheet.Range("J12"), False, False

Sheets("Sheet2").Select
Range("H12").Select
Range(Selection, Selection.End(xlDown)).Select
Application.Run "ATPVBAEN.XLA!Fourier", ActiveSheet.Range(Cells(12, 8),
Cells(12        + n - 1, 8)), _
      ActiveSheet.Range("J12"), False, False

Sheets("Sheet1").Select
For i = 0 To n - 1
    Cells(12 + i, 11).Value = Sheet2.Cells(12 + i, 10)
Next i

Range("L12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=improduct(R6C7/R8C7,RC[-2])"
Range("L12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 12), Cells(12 + n - 1, 12))

Range("M12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=improduct(R7C7/R8C7,RC[-2])"
Range("M12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 13), Cells(12 + n - 1, 13))

Range("N12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=improduct(R5C7/R8C7,improduct(RC[-4],RC[-3]))"
Range("N12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 14), Cells(12 + n - 1, 14))

Range("O12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=imsum(RC[-3],RC[-2],RC[-1])"
Range("O12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 15), Cells(12 + n - 1, 15))

Range("P12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=imsub(RC[-1],1)"
Range("P12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 16), Cells(12 + n - 1, 16))

Range("Q12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=improduct(R8C7,RC[-1])"
Range("Q12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 17), Cells(12 + n - 1, 17))

Range("R12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=imexp(RC[-1])"
```

```
Range("R12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 18), Cells(12 + n - 1, 18))

Range("R12").Select
Range(Selection, Selection.End(xlDown)).Select
Application.Run "ATPVBAEN.XLA!Fourier", ActiveSheet.Range(Cells(12, 18),
       Cells(12 + n - 1, 18)), _
      ActiveSheet.Range("S12"), True, False

Sheets("Sheet4").Select
For i = 0 To n - 1
  Sheet4.Cells(4 + i, 2).Value = Sheet1.Cells(12 + i, 19)
Next i

reserve = Sheet4.Cells(7, 5).Value
premium = Sheet4.Cells(8, 5).Value
period = Sheet4.Cells(9, 5)
sinir = premium * (period - 1)

Dim ikinci(600, 50) As Variant

If reserve + premium * (period - 2) >= 600 Then
  Sheet4.Cells(2, 8).Value = "HATA"
  GoTo cikis2
End If
If period >= 50 Then
  Sheet4.Cells(3, 8).Value = "HATA"
  GoTo cikis2
End If

For i = 0 To 4095
   dizi(i) = Sheet4.Cells(i + 4, 2).Value
Next i

For i = 0 To 600
   For j = 0 To 50
     ikinci(i, j) = 0
   Next j
Next i

For i = 0 To sinir
   For j = 0 To premium + i
     ikinci(i, 1) = ikinci(i, 1) + dizi(j)
   Next j
Next i
```

```
For t = 2 To period - 1
   For k = 0 To reserve + premium * (period - t)
      For l = 0 To premium + k
        ikinci(k, t) = ikinci(k, t) + dizi(l) * ikinci(k + premium - l, t - 1)
      Next l
   Next k
Next t

cikis:

k = reserve
For l = 0 To premium + reserve
 İkinci(k, period) = ikinci(k, period) + dizi(l) * ikinci(reserve + premium - l, period - 1)
Next l

Sheet4.Cells(19, 6).Value = ikinci(k, period - 1)
survive = ikinci(k, period)
Sheet4.Cells(20, 6).Value = survive

cikis2:

End Sub
```

EK 2. Negatif Binom Modelinde Bağımlı İki Sigorta Kolu için Toplam Hasar Miktarını ve İflas Olasılığını Bulan Excel (Makro) Programı

```
Dim i, j, a, b, k, n, l, period, t As Integer
Dim dizi(4096) As Variant
Dim ilk, sifir, span, ara As Double
Dim reserve As Integer
Dim premium, sinir As Integer
Dim survive As Variant

Range(Cells(12, 3), Cells(5000, 25)).ClearContents
Range(Sheet2.Cells(12, 3), Sheet2.Cells(5000, 20)).ClearContents

span = Cells(11, 2)
n = Cells(6, 2)

For j = 0 To n - 1
   Cells(12 + j, 3).Value = j
   Cells(12 + j, 4).Value = (2 * j - 1) * span / 2
   Cells(12 + j, 5).Value = (2 * j + 1) * span / 2
   If (1 - Exp(-Cells(12 + j, 4) * Cells(9, 2))) >= 0 Then
         Cells(12 + j, 6).Value = (1 - Exp(-Cells(12 + j, 4) * Cells(9, 2)))
      Else
         Cells(12 + j, 6).Value = 0
   End If
   Cells(12 + j, 7).Value = (1 - Exp(-Cells(12 + j, 5) * Cells(9, 2)))
   Cells(12 + j, 8).Value = Cells(12 + j, 7) - Cells(12 + j, 6)
Next j
For j = 0 To n - 1
  Sheet2.Cells(12 + j, 3).Value = j
  Sheet2.Cells(12 + j, 4).Value = (2 * j - 1) * span / 2
  Sheet2.Cells(12 + j, 5).Value = (2 * j + 1) * span / 2
  If (1 - (Sheet1.Cells(10, 4) / (Sheet2.Cells(12 + j, 4) + Sheet1.Cells(10, 4))) ^
        (Sheet1.Cells(9, 4))) >= 0 Then
  Sheet2.Cells(12 + j, 6).Value = (1 - (Sheet1.Cells(10, 4) / (Sheet2.Cells(12 + j, 4)
        + Sheet1.Cells(10, 4))) ^ (Sheet1.Cells(9, 4)))
  Else
  Sheet2.Cells(12 + j, 6).Value = 0
  End If
  Sheet2.Cells(12 + j, 7).Value = (1 - (Sheet1.Cells(10, 4) / (Sheet2.Cells(12 + j, 5)
        +Sheet1.Cells(10, 4))) ^ (Sheet1.Cells(9, 4)))
  Sheet2.Cells(12 + j, 8).Value = Sheet2.Cells(12 + j, 7) - Sheet2.Cells(12 + j, 6)
Next j



Range("H12").Select
Range(Selection, Selection.End(xlDown)).Select
```

```
Application.Run "ATPVBAEN.XLA!Fourier", ActiveSheet.Range(Cells(12, 8),
Cells(12        + n - 1, 8)), _
        ActiveSheet.Range("J12"), False, False

Sheets("Sheet2").Select
Range("H12").Select
Range(Selection, Selection.End(xlDown)).Select
Application.Run "ATPVBAEN.XLA!Fourier", ActiveSheet.Range(Cells(12, 8),
Cells(12        + n - 1, 8)), _
        ActiveSheet.Range("J12"), False, False

Sheets("Sheet1").Select
For i = 0 To n - 1
    Cells(12 + i, 11).Value = Sheet2.Cells(12 + i, 10)
Next i

Range("L12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=imsub(RC[-2],1)"
Range("L12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 12), Cells(12 + n - 1, 12))

Range("M12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=improduct(R5C2,RC[-1])"
Range("M12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 13), Cells(12 + n - 1, 13))

Range("N12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=imsub(RC[-3],1)"
Range("N12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 14), Cells(12 + n - 1, 14))

Range("O12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=improduct(R5C4,RC[-1])"
Range("O12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 15), Cells(12 + n - 1, 15))

Range("P12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=imsub(1,imsum(RC[-3],RC[-1]))"
Range("P12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 16), Cells(12 + n - 1, 16))

Range("Q12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=impower(RC[-1],-R5C7)"
Range("Q12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 17), Cells(12 + n - 1, 17))

Range("R12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=imsub(1,RC[-5])"
Range("R12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 18), Cells(12 + n - 1, 18))
```

```
Range("S12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=imsub(1,RC[-4])"
Range("S12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 19), Cells(12 + n - 1, 19))

Range("T12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=impower(RC[-2],-R6C7)"
Range("T12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 20), Cells(12 + n - 1, 20))

Range("U12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=impower(RC[-2],-R7C7)"
Range("U12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 21), Cells(12 + n - 1, 21))

Range("V12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=improduct(RC[-2],RC[-1])"
Range("V12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 22), Cells(12 + n - 1, 22))

Range("W12").Select
ActiveCell.FormulaR1C1 = "=improduct(RC[-1],RC[-6])"
Range("W12").Select
Selection.AutoFill Destination:=Range(Cells(12, 23), Cells(12 + n - 1, 23))

Range("W12").Select
Range(Selection, Selection.End(xlDown)).Select
Application.Run "ATPVBAEN.XLA!Fourier", ActiveSheet.Range(Cells(12, 23),
        Cells(12 + n - 1, 23)), _
      ActiveSheet.Range("X12"), True, False

Sheets("Sheet4").Select
For i = 0 To n - 1
    Sheet4.Cells(4 + i, 2).Value = Sheet1.Cells(12 + i, 24)
Next i

reserve = Sheet4.Cells(7, 5).Value
premium = Sheet4.Cells(8, 5).Value
period = Sheet4.Cells(9, 5)
sinir = premium * (period - 1)
Dim ikinci(600, 50) As Variant


If reserve + premium * (period - 2) >= 600 Then
   Sheet4.Cells(2, 8).Value = "HATA"
   GoTo cikis2
End If

If period >= 50 Then
```

```
   Sheet4.Cells(3, 8).Value = "HATA"
   GoTo cikis2
End If

For i = 0 To 4095
    dizi(i) = Sheet4.Cells(i + 4, 2).Value
Next i

For i = 0 To 600
   For j = 0 To 50
     ikinci(i, j) = 0
   Next j
Next i

For i = 0 To sinir
    For j = 0 To premium + i
      ikinci(i, 1) = ikinci(i, 1) + dizi(j)
    Next j
Next i

For t = 2 To period - 1
   For k = 0 To reserve + premium * (period - t)
      For l = 0 To premium + k
         ikinci(k, t) = ikinci(k, t) + dizi(l) * ikinci(k + premium - l, t - 1)
      Next l
   Next k
Next t

cikis:

k = reserve
For l = 0 To premium + reserve
 ikinci(k, period) = ikinci(k, period) + dizi(l) * ikinci(reserve + premium - l, period - 1)
Next l

Sheet4.Cells(19, 6).Value = ikinci(k, period - 1)
survive = ikinci(k, period)
Sheet4.Cells(20, 6).Value = survive

cikis2:

End Sub
```

EK 3. Çalışmada Kullanılan Dağılımların Özellikleri

Poisson Dağılımı (λ):

$P(N=n)=\dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$, n=0, 1, 2,... ve $\lambda>0$,

E[N]=λ, Var[N]=λ,

$M_N(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$.

Negatif Binom Dağılımı (r;p):

$P(N=n)=\binom{r+n-1}{n}p^r q^n$, n=0, 1, 2,... , r >0 ve 0<p<1

E[N]=r(1-p)/p, Var[N]=r(1-p)/p^2,

$M_N(t)=\left(\dfrac{p}{1-qe^t}\right)^r$.

Üstel dağılım (λ):

$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, λ>0 ve x>0

E[X]=1/λ, Var[X]=1/λ^2,

$M_X(t)=\dfrac{\lambda}{(\lambda-t)}$,

Pareto dağılımı (α;θ):

$f(x)=\dfrac{\alpha\theta^\alpha}{(x+\theta)^{\alpha+1}}$, α>0 ve θ>0

$E[X]=\dfrac{\alpha\theta}{\alpha-1}$, $Var[X]=\dfrac{\alpha\theta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı : **Mehmet PIRILDAK

**Doğum Yeri : **İzmir

**Doğum Yılı : **1979

**Medeni Hali : **Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise :1993-1997 Mithatpaşa Anadolu Meslek Lisesi Elektronik Bölümü, İzmir

Lisans :1998-2002 Dokuz Eylül Üniversitesi İstatistik Bölümü, İzmir

**Yabancı Dil : **İngilizce

İş Tecrübesi :

Haziran, 2004 - ... Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü, Araştırma Görevlisi