

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MUTLAK MATRİS TOPLANABİLME METODLARI

**Tezi Hazırlayan
Mehmet YÜCEL**

**Tezi Yöneten
Doç. Dr. Hikmet ÖZARSLAN**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Haziran 2005
KAYSERİ**

Bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

16 / 06 / 2005.

JÜRİ:

Üye Prof. Dr. Mehmet ÖZDEMİR
Üye Doç. Dr. Hikmet ÖZARSLAN
Üye Yrd. Doç. Dr. A. Nihal TUNCER

ONAY:

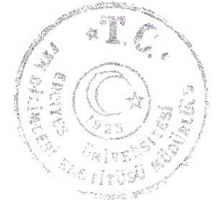
Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun ..05..07..2005 tarih ve
...1...3... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

08 / 07 / 2005.

Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ

Müdür
N. Ayyıldız

Enstitü Müdürü
Mühür ve İmza



TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanması, yürütülmesi ve yazılmasında değerli katkıları ile en büyük desteği gördüğüm saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Hüseyin BOR'a ve Sayın Doç. Dr. Hikmet ÖZARSLAN'a, Sayın Arş. Gör. Nedret ÖĞDÜK'e ve manevi destekleri için aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet YÜCEL

MUTLAK MATRİS TOPLANABİLME METODLARI

Mehmet Yücel

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2005

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hikmet ÖZARSLAN

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, tezin içeriği ile ilgili bir giriş yapıldı.

İkinci bölümde, bazı temel tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilme metodu ile $|\overline{N}, q_n|_k$ toplanabilme metodu arasındaki ilişki incelendi.

Dördüncü bölümde, $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilme metodu ile $|T, p_n|_k$ toplanabilme metodu arasındaki ilişki incelendi, ortaya çıkan uygulamalar ifade ve ispat edildi.

Beşinci bölümde $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilme metodu ile $|T|_k$ toplanabilme metodu arasındaki ilişki incelendi, ortaya çıkan sonuçlar ifade ve ispat edildi.

Anahtar Kelimeler: Sonsuz seriler, $|T|_k$ toplanabilme, $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilme, $|\overline{N}, q_n|_k$ toplanabilme

ABSOLUTE MATRIS SUMMABILITY METHODS

Mehmet YÜCEL

Erciyes Universty, Graduate School of Naturel and Applied Sciences

M.S. Thesis, June 2005

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Hikmet ÖZARSLAN

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters:

In the first chapter, the introduction is given dealing with thesis.

In the second chapter, some basic definitions and theorems are given.

In the third chapter, the relation between the $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ summability method and the $\left|\overline{N}, q_n\right|_k$ summability method is examined.

In the fourth chapter, the relation between the $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ summability method and the $\left|T, q_n\right|_k$ summability method is examined, the results found is explained and proved.

In the fifth chapter, the relation between the $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ summability method and the $\left|T\right|_k$ summability method is examined, the results found is explained and proved.

Keywords: Infinite Series, $\left|T\right|_k$ summability, $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ summability, $\left|\overline{N}, q_n\right|_k$ summability

SEMBOLLER

$\mathbf{N}$: Doğal Sayılar Cümlesi

$\sum a_n$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi

(s_n) : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi

$s_n = O(1)$: (s_n) dizisi sınırlı

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY.....	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
SEMBOLLER.....	v
1. BÖLÜM	
GİRİŞ.....	1
2. BÖLÜM	
TEMEL TANIMLAR VE LEMMALAR.....	2
3. BÖLÜM	
$ \overline{N}, p_n _k$ VE $ \overline{N}, q_n _k$ TOPLANABİLME METODU İLE İLGİLİ TEOREMLER.....	9
4. BÖLÜM	
$ \overline{N}, p_n _k$ VE $ T, p_n _k$ TOPLANABİLME METODU İLE İLGİLİ TEOREMLER.....	16
5. BÖLÜM	
$ \overline{N}, p_n _k$ VE $ T _k$ TOPLANABİLME METODU İLE İLGİLİ TEOREMLER.....	27
KAYNAKLAR.....	36
ÖZGEÇMİŞ.....	38

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Son zamanlarda “bazı şartlar altında toplanabilme metotları arasındaki ilişkiler”, farklı matematikçiler tarafından incelenmiş ve bunlardan bir takım sonuçlar elde edilmiştir. Biz bu çalışmamızda $|\overline{N}, p_n|_k$ ve $|\overline{N}, q_n|_k$ toplanabilme metodlarının hangi şartlar altında birinin diğerini gerektirdiğini inceledik. Ayrıca $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilen bir serinin hangi şartlar altında $|T, p_n|_k$ toplanabilir olduğu, yine $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilen bir serinin $|T|_k$ toplanabilir olması için hangi şartların sağlanması gerektiği gösterilmiştir. Ortaya çıkan sonuç ve uygulamalar incelenmiştir.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE LEMMALAR

Bu bölümde, genel çalışmamızda temel tanım ve teoremleri vererek işe başlayacağız.

TANIM 2.1. F reel veya kompleks sayıların bir cismi olsun ve $n, v = 0, 1, 2, 3, \dots$, için $a_{nv} \in F$ olmak üzere bir $T = (a_{nv})$ sonsuz matrisi ve (s_n) de F de dir dizi olsun. Bu takdirde (s_n) dizisinden (t_n) dizisine bir dönüşüm

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} s_v \quad (2.1)$$

olarak tanımlansın. (t_n) dizisine (s_n) dizisinin T dönüşüm dizisi denir ve T ye de diziden-diziye bir dönüşüm denir. Bu dönüşümün var olması için (2.1) deki sonsuz toplamın her n için yakınsak olması gerekir [1].

TANIM 2.2. Bir $T = (a_{nv})$, $n, v = 0, 1, 2, \dots$, matrisi verilmiş olsun. Eğer T matrisi yakınsak her diziyi yakınsak bir diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti de koruyorsa, T matrisine regülerdir denir [2].

Aşağıdaki teorem verilen bir T matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartları verir.

TEOREM 2.3. Bir $T = (a_{nv})$, $n, v = 0, 1, 2, \dots$, matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartlar:

$$(i) \quad \text{her } v \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nv} = 0$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} = 1 \quad (2.2)$$

$$(iii) \quad \text{her } n \text{ için } \sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| \leq M$$

olacak şekilde n den bağımsız bir M pozitif reel sayısının var olmasıdır [3].

Toplanabilme teorisinde çok önemli yer teşkil eden Teorem 2.3 Silverman-Toeplitz teoremi olarak bilinir.

TANIM 2.4. Reel yada kompleks terimli bir $B=(b_{nv})$ sonsuz matrisi ve $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun.

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} b_{nv} a_v \quad (2.3)$$

olacak şekilde tanımlanan (t_n) dizisine, $\sum a_n$ serisinin B -dönüşüm dizisi denir ve B ye seriden-diziye bir dönüşüm denir. Bu dönüşümün tanımlı olması için (2.3) deki toplamın her n için yakınsak olması gerekir [1].

TANIM 2.5. Reel yada kompleks terimli bir $C=(c_{nv})$ sonsuz matrisi ve $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun.

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} c_{nv} a_v \quad (2.4)$$

mevcut ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = s$$

ise, C ye seriden seriye dönüşüm, s sayısına da $\sum a_n$ serisinin C dönüşümü ile genelleştirilmiş toplam denir [1].

TANIM 2.6. Kısmi toplam dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. Ayrıca (s_n) dizisinin $T=(a_{nv})$ matrisi yardımı ile oluşturulan (t_n) dönüşüm dizisi, (2.1) deki şekilde tanımlansın. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = s$ ise, $\sum a_n$ serisine veya (s_n) dizisine s değerine T toplanabilirdir denir [3].

TANIM 2.7. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. Ayrıca (s_n) dizisinin $T = (a_{nv})$ matrisi yardımı ile oluşturulan (t_n) dönüşüm dizisi, (2.1) deki şekilde tanımlansın. Eğer $(t_n) \in BV$ ise, $\sum a_n$ serisine veya (s_n) dizisine mutlak T toplanabilir yada kısaca $|T|$ toplanabilir denir. Eğer $\sum a_n$ serisi, $|T|$ toplanabilir ise $\sum a_n \in |T|$ veya $(s_n) \in |T|$ sembollerinden birisiyle gösterilir [4].

TANIM 2.8. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. (s_n) dizisinin $T = (a_{nv})$ matrisi yardımı ile (t_n) dönüşüm dizisi (2.1) deki şekilde tanımlansın. Eğer $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |t_n - t_{n-1}|^k < \infty \quad (2.5)$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|T|_k$ toplanabilirdir denir [5].

$k=1$ özel durumunda $|T|_k$ toplanabilirlik, $|T|$ toplanabilirlik ile aynıdır.

Özel olarak $T=(a_{nv})$ normal bir matris alalım. Bu durumda $(A_n(s))$ dönüşüm dizisi

$$T_n(s) = \sum_{v=0}^n a_{nv} s_v, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklindedir.

$$\overline{\Delta} T_n(s) = T_n(s) - T_{n-1}(s)$$

olmak üzere, $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\overline{\Delta} T_n(s)|^k < \infty$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|T|_k$ toplanabilirdir denir[6]

Aksi bir şey söylenmedikçe, (s_n) , $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisini ve (p_n) ,

$$P_n = \sum_{v=0}^n p_v \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (p_{-i} = p_{-i} = 0, i \geq 1) \quad (2.6)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisini gösterecektir.

TANIM 2.9. Hepsi birden sıfır olmayan non-negatif reel sayıların bir (p_n) dizisi verilmiş olsun. (p_n) , $p_n > 0$, $P_n = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$ olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere (s_n) dizisinden (u_n) dizisine

$$u_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v \quad (2.7)$$

ile verilen dönüşüme Riesz ortalaması yada Riesz dönüşümü denir ve kısaca $(\bar{N}, p_n)$ ortalaması ya da dönüşümü denir [3].

(2.7) ile tanımlanan dönüşümün matris elemanları

$$a_{nv} = \begin{cases} \frac{p_v}{P_n}, & v \leq n \quad \text{için} \\ 0, & v > n \quad \text{için} \end{cases} \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilir [3].

TEOREM 2.10. $(\bar{N}, p_n)$ ortalamasının matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ için $P_n \rightarrow \infty$ olmasıdır [3].

TANIM 2.11. (u_n) , diziden diziye $(\bar{N}, p_n)$ ortalamasını gösterebilir. Yani

$$u_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v \quad (2.9)$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = s$$

ise, $\sum a_n$ serisi s değerine $(\bar{N}, p_n)$ toplanabilir denir [7].

TANIM 2.12. Hepsi birden sıfır olmayan non-negatif reel sayıların bir (p_n) dizisi verilmiş olsun. (p_n) , $p_n > 0$, $P_n = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$ olacak şekilde bir dizi olsun. Kısmi toplam dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi ve bu $\sum a_n$ serisinin (2.7) de verilen (u_n) Riesz dönüşümleri verilmiş olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n-1}| < \infty \quad (2.10)$$

ise, $\sum a_n$ serisine mutlak $(\bar{N}, p_n)$ toplanabilir veya kısaca $|\bar{N}, p_n|$ toplanabilirdir denir [8].

TANIM 2.13. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. $(u_n), (s_n)$ dizisinin (2.7) de verilen Reisz dönüşümü olsun. Eğer $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p_n}{p_n} \right)^{k-1} |u_n - u_{n-1}|^k < \infty \quad (2.11)$$

ise, $\sum a_n$ serisine k indisli mutlak $(\bar{N}, p_n)$ toplanabilir veya kısaca $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilirdir denir [9].

$k=1$ özel durumunda $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilirlik $|\bar{N}, p_n|$ toplanabilirlik ile çakışır.

TANIM 2.14. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. (s_n) dizisinin $T = (a_{nv})$ matrisi yardımı ile (t_n) dönüşüm dizisi (2.1) deki şekilde tanımlansın. Eğer $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p_n}{p_n} \right)^{k-1} |t_n - t_{n-1}|^k < \infty \quad (2.12)$$

ise, $\sum a_n$ serisine $|T, p_n|_k$ toplanabilirdir denir [10].

TANIM 2.15. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. $\sum a_n$ serisinin veya (s_n) dizisinin matris elemanları

$$a_{nv} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & v \leq n \quad \text{için} \\ 0, & v > n \quad \text{için} \end{cases} \quad (2.13)$$

ile verilen $T = (a_{nv})$ matrisi yardımıyla elde edilen (σ_n) dönüşüm dizisi

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n s_v \quad (2.14)$$

olarak tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan ortalamaya Cesàro ortalaması veya kısaca (C,1) ortalaması denir [3].

(C,1) ortalaması regülerdir. (C,1) ortalamasının regüler olması $(\bar{N}, p_n)$ ortalamasının bir sonucudur. Çünkü (C,1) ortalaması $(\bar{N}, p_n)$ ortalamasında her n için $p_n \equiv 1$ olarak elde edilir. Bu seçim için $(\bar{N}, p_n)$ metodu da regüler olur.

TANIM 2.16. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. (σ_n) , (s_n) dizisinin (2.14) de verilen (C,1) dönüşümü olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n - \sigma_{n-1}| < \infty \quad (2.15)$$

ise, $\sum a_n$ serisine mutlak (C,1) toplanabilir veya kısaca $|C,1|$ toplanabilirdir denir.

TANIM 2.17. Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. (σ_n) , (s_n) dizisinin (2.14) de verilen (C,1) dönüşümü olsun. Eğer $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |\sigma_n - \sigma_{n-1}|^k < \infty \quad (2.16)$$

ise, $\sum a_n$ serisine k indisli mutlak (C,1) toplanabilir veya kısaca $|C,1|_k$ toplanabilirdir denir [11]. (2.16) de ifade edilen $|C,1|_k$ toplanabilirlik k=1 özel durumunda $|C,1|$ toplanabilirlik ile çakışır.

TANIM 2.18. A ve B iki toplanabilme metodu olsun. A toplanabilen her dizi, aynı değere B toplanabiliyorsa A ya B yi gerektiriyor denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir [3].

TANIM 2.19. Bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer $\sum a_n x_n$ serisi bir metoda göre toplanabiliyor fakat $\sum a_n$ serisi aynı metoda göre toplanamıyorsa (x_n) dizisine $\sum a_n$ serisi için toplanabilme çarpanı denir [12] .

TANIM 2.20. (Hölder Eşitsizliği)

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q} \quad (2.17)$$

dur .

TANIM 2.21. (Minkowski Eşitsizliği)

$p \geq 1$, $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} \quad (2.18)$$

dır .

LEMMA 2.22. $k \geq 1$ ve $A = (a_{nv})$ sonsuz bir matris olsun. $A \in (l^k, l^k)$ olması için gerekli şart, bütün $n, v \geq 0$ için

$$a_{nv} = O(1)$$

olmasıdır [13].

3. BÖLÜM

$\left| \overline{N}, p_n \right|_k$ ve $\left| \overline{N}, q_n \right|_k$ TOPLANABİLME METODLARI İLE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde ele alınan iki toplanabilme metodunun, birinin diğerini gerektirmesi için hangi şartların gerek ve yeter şart olduğunu veren bir teoremi ifade ve ispat edeceğiz.

TEOREM 3.1. (p_n) ve (q_n) pozitif diziler ve $k \geq 1$ olsun. $\left| \overline{N}, p_n \right|_k$ toplanabilen her serinin $\left| \overline{N}, q_n \right|_k$ toplanabilir olması için

$$\frac{q_n P_n}{Q_n p_n} = O(1) \quad (3.1)$$

şartının sağlanması gereklidir[14]. Eğer

$$\frac{Q_n p_n}{q_n P_n} = O(1) \quad (3.2)$$

şartı da sağlanıyorsa, (3.1) şartı aynı zamanda yeterlidir[15].

İSPAT :

YETERLİLİK : $\sum a_n$ serisinin $(\overline{N}, p_n)$ ortalaması t_n olsun. Bu takdirde küçük bir hesaplama neticesinde

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n (P_n - P_{v-1}) a_v \quad (3.3)$$

elde ederiz. $\sum a_n$ serisinin $\left| \overline{N}, p_n \right|_k$ toplanabilir olması demek,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\Delta t_{n-1}|^k < \infty \quad (3.4)$$

olmasıdır. Diğer taraftan,

$$\Delta t_{n-1} = t_{n-1} - t_n$$

$$\begin{aligned}
&= -(t_n - t_{n-1}) \\
&= -\frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n a_v P_{v-1}, \quad n \geq 1, \quad (P_{-1} = 0)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

olduğundan (3.5) de n yerine (n-1) alırsak,

$$\Delta t_{n-2} = -\frac{P_{n-1}}{P_{n-1} P_{n-2}} \sum_{v=1}^{n-1} a_v P_{v-1}$$

bulunur. Buradan da

$$\sum_{v=1}^n P_{v-1} a_v = -\frac{P_n P_{n-1}}{P_n} \Delta t_{n-1} \tag{3.6}$$

$$\sum_{v=1}^{n-1} P_{v-1} a_v = -\frac{P_{n-1} P_{n-2}}{P_{n-1}} \Delta t_{n-2} \tag{3.7}$$

(3.6) dan (3.7) ifadesi çıkarılır ise,

$$a_n = \frac{1}{P_{n-1}} \left\{ -\frac{P_n P_{n-1}}{P_n} \Delta t_{n-1} + \frac{P_{n-1} P_{n-2}}{P_{n-1}} \Delta t_{n-2} \right\} \tag{3.8}$$

$$= -\frac{P_n}{P_n} \Delta t_{n-1} + \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} \Delta t_{n-2}, \quad (n \geq 1) \tag{3.9}$$

elde ederiz. Eğer $\sum a_n$ serisinin $(\bar{N}, q_n)$ ortalaması T_n ise, benzer olarak

$$T_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^n q_v s_v = \frac{1}{Q_n} \sum_{v=0}^n (Q_n - Q_{v-1}) a_v \tag{3.10}$$

elde ederiz. Böylece (3.5) deki benzer düşüncüyü kullanarak,

$$\Delta T_{n-1} = -\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n a_v Q_{v-1}, \quad n \geq 1, \quad (Q_{-1} = 0) \tag{3.11}$$

elde ederiz. (3.9) da elde ettiğimiz a_v değerini (3.11) de yerine koyarsak,

$$\begin{aligned}
\Delta T_{n-1} &= -\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \left\{ -\frac{P_v}{P_v} \Delta t_{v-1} + \frac{P_{v-2}}{P_{v-2}} \Delta t_{v-2} \right\} \\
&= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \frac{P_v}{P_v} \Delta t_{v-1} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^n Q_{v-1} \frac{P_{v-2}}{P_{v-1}} \Delta t_{v-2} \\
&= \frac{q_n P_n}{Q_n Q_{n-1}} Q_{n-1} \frac{1}{P_n} \Delta t_{v-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_{v-1} \frac{P_v}{P_v} \Delta t_{v-1} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=0}^{n-1} Q_v \frac{P_{v-1}}{P_v} \Delta t_{v-1} \\
&= \frac{q_n P_n}{Q_n P_n} \Delta t_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_{v-1} \frac{P_v}{P_v} \Delta t_{v-1} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_v \frac{P_{v-1}}{P_v} \Delta t_{v-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \Delta t_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} (Q_{v-1} P_v - Q_v P_{v-1}) \frac{\Delta t_{v-1}}{p_v} \\
&= \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \Delta t_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \{(Q_v - q_v) P_v - Q_v (P_v - p_v)\} \frac{\Delta t_{v-1}}{p_v} \\
&= \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \Delta t_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} (Q_v p_v - q_v P_v) \frac{\Delta t_{v-1}}{p_v} \\
&= \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \Delta t_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_v \Delta t_{v-1} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} q_v \frac{P_v}{p_v} \Delta t_{v-1} \\
&= \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \Delta t_{n-1} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} q_v \frac{P_v}{p_v} \Delta t_{v-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_v \Delta t_{v-1} \\
&= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Teoremi ispat etmek için Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak, $r=1,2,3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |T_{n,r}|^k < \infty \quad (3.12)$$

olduğunu göstermek kafidir. İlk olarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |T_{n,1}|^k &= \sum_{n=1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \left| \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \Delta t_{n-1} \right|^k \\
&= \sum_{n=1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \left(\frac{q_n}{Q_n} \right)^k \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^k |\Delta t_{n-1}|^k \\
&= \sum_{n=1}^m \frac{q_n}{Q_n} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^k |\Delta t_{n-1}|^k
\end{aligned}$$

(3.1) den dolayı $\frac{q_n}{Q_n} = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ olduğundan ve (3.4) den

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |T_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^m \frac{p_n}{P_n} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^k |\Delta t_{n-1}|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\Delta t_{n-1}|^k \\
&= O(1) \quad (m \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi $k > 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini uygulayarak,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |T_{n,2}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \left| -\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} q_v \frac{P_v}{p_v} \Delta t_{v-1} \right|^k \\
&= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \left(\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right)^k \left| \sum_{v=1}^{n-1} q_v \frac{P_v}{p_v} \Delta t_{v-1} \right|^k \\
&\leq \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \frac{q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \left(\sum_{v=1}^{n-1} q_v \frac{P_v}{p_v} |\Delta t_{v-1}| \right)^k \\
&= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \frac{q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \left(\sum_{v=1}^{n-1} q_v^{1/k} q_v^{(k-1)/k} \frac{P_v}{p_v} |\Delta t_{v-1}| \right)^k \\
&\leq \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \frac{q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \\
&\quad \times \left\{ \left(\sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} q_v^{1/k} |\Delta t_{v-1}| \right)^k \right)^{1/k} \left(\sum_{v=1}^{n-1} \left(q_v^{k-1} \right)^p \right)^{1/p} \right\}^k \\
&= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \frac{q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \\
&\quad \times \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta t_{v-1}|^k \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(q_v^{k-1} \right)^p \right\}^{k/p} \\
&\leq \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \frac{q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta t_{v-1}|^k \right\} \times \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} q_v \right\}^{k-1} \\
&= \sum_{n=2}^{m+1} \frac{Q_n^k}{q_n^k} \frac{q_n}{Q_n} \frac{q_n^k}{Q_n^k} \frac{Q_{n-1}^{k-1}}{Q_{n-1}^k} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta t_{v-1}|^k \\
&= \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta t_{v-1}|^k \\
&= \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k q_v |\Delta t_{v-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k \frac{q_v}{Q_v} |\Delta t_{v-1}|^k
\end{aligned}$$

(3.1) den dolayı $\frac{q_n}{Q_n} = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ olduğundan ve (3.4) den

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |T_{n,2}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^m \frac{p_v}{P_v} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k |\Delta t_{v-1}|^k \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{k-1} |\Delta t_{v-1}|^k \\ &= O(1) \quad (m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

elde ederiz. Son olarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |T_{n,3}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \left| \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} Q_v \Delta t_{v-1} \right|^k \\ &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \frac{q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^k} \left(\sum_{v=1}^{n-1} Q_v |\Delta t_{v-1}| \right)^k \\ &= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^k \frac{q_n}{Q_n} \frac{q_n^k}{Q_n^k} \frac{1}{Q_{n-1}^k} \left(\sum_{v=1}^{n-1} Q_v |\Delta t_{v-1}| \right)^k \\ &= \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}^k} \left(\sum_{v=1}^{n-1} \frac{Q_v}{q_v} q_v |\Delta t_{v-1}| \right)^k \\ &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n} \frac{1}{Q_{n-1}^k} \left(\sum_{v=1}^{n-1} \frac{Q_v^k}{q_v^k} q_v |\Delta t_{v-1}|^k \right) \left(\sum_{v=1}^{n-1} q_v^{\frac{k-1}{k} p} \right)^{k/p} \\ &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n} \frac{1}{Q_{n-1}^k} \left(\sum_{v=1}^{n-1} \frac{Q_v^k}{q_v^k} q_v |\Delta t_{v-1}|^k \right) \left(\sum_{v=1}^{n-1} q_v \right)^{k-1} \\ &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n} \frac{1}{Q_{n-1}^k} Q_{n-1}^{k-1} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{Q_v^k}{q_v^k} q_v |\Delta t_{v-1}|^k \\ &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k q_v |\Delta t_{v-1}|^k \\ &= \sum_{v=1}^{m-1} \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k q_v |\Delta t_{v-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^k \frac{q_v}{Q_v} |\Delta t_{v-1}|^k \end{aligned}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m_1} \left(\frac{Q_v}{q_v} \right)^{k-1} |\Delta t_{v-1}|^k$$

(3.1) den dolayı $\frac{Q_n}{q_n} = O\left(\frac{P_n}{p_n}\right)$ olduğundan ve (3.4) den

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |T_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{k-1} |\Delta t_{v-1}|^k \\ &= O(1) \quad (m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $r=1,2,3$ için

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |T_{n,r}|^k = O(1) \quad (m \rightarrow \infty)$$

bulunur.

Gereklilik: Gerekliliğin ispatı için (2.4) ün seriden seriye dönüşümünü ve $n \geq 1$ için (3.5) ve (3.11) ifadelerini göz önüne alalım. $n \geq 1$ için yeterliliğinin ispatında hesapladığımız gibi

$$\Delta T_{n-1} = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\Delta t_{v-1}}{p_v} (P_v Q_{v-1} - P_{v-1} Q_v) + \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \Delta t_{n-1} \quad (3.13)$$

olduğundan (3.13) ifadesinin her iki tarafını $\left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{1-\frac{1}{k}}$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{1-\frac{1}{k}} \Delta T_{n-1} &= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{1-\frac{1}{k}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\Delta t_{v-1}}{p_v} (P_v Q_{v-1} - P_{v-1} Q_v) \\ &\quad + \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{1-\frac{1}{k}} \Delta t_{n-1} \\ &= \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{q_n}{Q_n} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{P_v Q_{v-1} - Q_v P_{v-1}}{p_v Q_{n-1}} \right) \left(\frac{p_v}{P_v} \right)^{1-\frac{1}{k}} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{1-\frac{1}{k}} \Delta t_{v-1} \\ &\quad + \left(\frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{1-\frac{1}{k}} \Delta t_{n-1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

yazılabilir. (3.14) de

$$x_n = \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{1-\frac{1}{k}} \Delta t_{n-1}$$

$$y_n = \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{1-\frac{1}{k}} \Delta T_{n-1}$$

ve

$$A_{nv} = \begin{cases} \left(\frac{q_n}{Q_n} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{P_v Q_{v-1} - Q_v P_{v-1}}{p_v Q_{n-1}} \left(\frac{p_v}{P_v} \right)^{1-\frac{1}{k}} & , n \geq v+1 \\ \left(\frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \right)^{\frac{1}{k}} & , n = v \\ 0 & , n < v \end{cases}$$

olarak alırsak, (3.14) eşitliğini

$$y_n = \sum_{v=1}^{\infty} A_{nv} x_v$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buradan hemen şunu yazabiliriz ki A matrisi $\left(\left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\frac{k-1}{k}} \Delta t_{n-1} \right)_i$

$\left(\left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{\frac{k-1}{k}} \Delta T_{n-1} \right)_i$ içine dönüştürür. Şu halde $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilen her serinin $|\bar{N}, q_n|_k$

toplanabilir olması demek, $A \in (l^k, l^k)$ olması demektir. Böylece Lemma 2.22 dan dolayı $|\bar{N}, p_n|_k \Rightarrow |\bar{N}, q_n|_k$ olması için gerekli şart, A matrisinin sınırlı olmasıdır. Özel olarak bunun diagonal elemanlarının sınırlı olması gerekir. Bu da bize (3.1) şartının gerekliliğini verir.

4. BÖLÜM

$|T, p_n|_k$ ve $|\overline{N}, p_n|_k$ TOPLANABİLME METODLARI İLE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde, $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilir bir serisinin hangi şartlar altında $|T, q_n|_k$ toplanabilirliği ile ilgili iki teorem ifade ve ispat edeceğiz.

$$\textbf{TEOREM 4.1.} \quad \sum_{v=1}^{n-1} \frac{p_v}{P_v} |A_{n-1,v-1}| = O(f_n) \quad (4.1)$$

$$\sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v A_{n-1,v-1}| = O(g_n) \quad (4.2)$$

olsun. $k \geq 1$ olmak üzere, $\sum a_n$ serisi $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilir iken

$$|\varepsilon_v|^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} f_n \right)^{k-1} |A_{n-1,v-1}| = O(1) \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k |\varepsilon_v|^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} g_n \right)^{k-1} |\Delta_v A_{n-1,v-1}| = O(1) \quad (4.4)$$

$$\left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k |\Delta \varepsilon_v|^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} f_n \right)^{k-1} |A_{n-1,v}| = O(1) \quad (4.5)$$

ve

$$\left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \frac{P_n}{p_n} |A_{n-1,n-1}|^k |\varepsilon_n|^k = O(1) \quad (4.6)$$

şartları sağlanıyor ise, bu takdirde $\sum a_n \varepsilon_n$ serisi $|T, q_n|_k$ toplanabilirdir [10].

İSPAT : (s_n) dizisinin $(\overline{N}, p_n)$ ortalaması (V_n) yani

$$V_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v$$

dür. Buna göre $V_n - V_{n-1}$ farkını teşkil edersek,

$$V_n - V_{n-1} = \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n P_{v-1} a_v$$

elde ederiz. Buna göre

$$\Delta U_n = \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{1-\frac{1}{k}} |V_n - V_{n-1}|$$

olmak üzere $\sum a_n \in \left| \bar{N}, p_n \right|_k$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta U_n|^k < \infty$$

olduğunu biliyoruz.

$t_n = \sum_{r=0}^n a_{nr} s_r$ tanımını kullanarak $\Delta t_{n-1} = t_{n-1} - t_n$ farkını

$$\begin{aligned} \Delta t_{n-1} &= t_{n-1} - t_n = \sum_{r=0}^{n-1} a_{n-1,r} s_r - \sum_{r=0}^n a_{n,r} s_r \\ &= \sum_{r=0}^n a_{n-1,r} s_r - a_{n-1,n} s_n - \sum_{r=0}^n a_{n,r} s_r \\ &= \sum_{r=0}^n (a_{n-1,r} - a_{n,r}) s_r = \sum_{r=0}^n (a_{n-1,r} - a_{n,r}) \sum_{v=0}^n a_v \varepsilon_v \end{aligned}$$

$$\Delta t_{n-1} = \sum_{v=0}^n a_v \varepsilon_v \sum_{r=v}^n (a_{n-1,r} - a_{n,r})$$

şeklinde elde ederiz. Şimdi

$$\begin{aligned} \sum_{r=v}^n a_{n-1,r} - \sum_{r=v}^n a_{n,r} &= \sum_{r=0}^{n-1} a_{n-1,r} - \sum_{r=0}^{v-1} a_{n-1,r} - \sum_{r=0}^n a_{n,r} + \sum_{r=0}^{v-1} a_{n,r} \\ &= 1 - \sum_{r=0}^{v-1} a_{n-1,r} - 1 + \sum_{r=0}^{v-1} a_{n,r} = \sum_{r=0}^{v-1} (a_{nr} - a_{n-1,r}) \\ &= \sum_{r=0}^{v-1} \Delta_n(a_{n-1,r}) = A_{n-1,v-1} \end{aligned}$$

diyelim. Bu durumda,

$$\Delta t_{n-1} = \sum_{v=0}^n a_v \varepsilon_v A_{n-1,v-1} = \sum_{v=1}^n a_v \varepsilon_v A_{n-1,v-1} \frac{P_{v-1}}{P_{v-1}} = \sum_{v=0}^n (P_{v-1} a_v) \left(\frac{A_{n-1,v-1} \varepsilon_v}{P_{v-1}} \right)$$

elde edilir. Şimdi bu ifadeye Abel kısmi toplama formülünü uygulayalım. Bu durumda,

$$\Delta t_{n-1} = \sum_{v=1}^{n-1} \left(\sum_{r=1}^v P_{r-1} a_r \right) \Delta_v \left(\frac{A_{n-1,v-1} \varepsilon_v}{P_{v-1}} \right) + \left(\sum_{v=1}^n P_{v-1} a_v \right) \frac{A_{n-1,n-1} \varepsilon_n}{P_{n-1}}$$

bulunur. ΔU_n den

$$\Delta t_{n-1} = \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^{1/k} P_{v-1} \Delta U_v \left[\frac{A_{n-1,v-1} \varepsilon_v}{P_{v-1}} - \frac{A_{n-1,v} \varepsilon_{v+1}}{P_v} \right] + \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{1/k} P_{n-1} \Delta U_n \frac{A_{n-1,n-1} \varepsilon_n}{P_{n-1}} \quad (4.7)$$

bulunur. Diğer taraftan, $\frac{A_{n-1,v-1} \varepsilon_v}{P_{v-1}} - \frac{A_{n-1,v} \varepsilon_{v+1}}{P_v}$ farkını teşkil edersek

$$\begin{aligned} \frac{A_{n-1,v-1} \varepsilon_v}{P_{v-1}} - \frac{A_{n-1,v} \varepsilon_{v+1}}{P_v} &= \frac{A_{n-1,v-1} \varepsilon_v P_v - A_{n-1,v} \varepsilon_{v+1} P_{v-1} + (A_{n-1,v} \varepsilon_v - A_{n-1,v} \varepsilon_v) P_{v-1}}{P_v P_{v-1}} \\ &= \frac{A_{n-1,v-1} \varepsilon_v P_v + A_{n-1,v} \Delta \varepsilon_v P_{v-1} - A_{n-1,v} \varepsilon_v P_{v-1}}{P_v P_{v-1}} \\ &= \frac{A_{n-1,v-1} \varepsilon_v P_{v-1} + A_{n-1,v-1} \varepsilon_v p_v + A_{n-1,v} \Delta \varepsilon_v P_{v-1} - A_{n-1,v} \varepsilon_v P_{v-1}}{P_v P_{v-1}} \\ &= \frac{\Delta_v A_{n-1,v-1} \varepsilon_v P_{v-1} + A_{n-1,v-1} \varepsilon_v p_v + A_{n-1,v} \Delta \varepsilon_v P_{v-1}}{P_v P_{v-1}} \\ &= \frac{\Delta_v A_{n-1,v-1} \varepsilon_v}{P_v} + \frac{A_{n-1,v-1} \varepsilon_v p_v}{P_v P_{v-1}} + \frac{A_{n-1,v} \Delta \varepsilon_v}{P_v} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu bulduğumuz ifadeyi (4.7) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \Delta t_{n-1} &= \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^{1/k} P_{v-1} \Delta U_v \left(\frac{P_v}{P_v P_{v-1}} A_{n-1,v-1} \varepsilon_v + \frac{1}{P_v} \Delta_v (A_{n-1,v-1}) \varepsilon_v + \frac{1}{P_v} A_{n-1,v} \Delta \varepsilon_v \right) \\ &\quad + \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{1/k} \Delta U_n A_{n-1,n-1} \varepsilon_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta t_{n-1} &= \sum_{v=1}^{n-1} \left[\left(\frac{p_v}{P_v} \right)^{-1+1/k} A_{n-1,v-1} \Delta U_v \varepsilon_v + \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^{1/k} \frac{P_{v-1}}{P_v} \Delta_v A_{n-1,v-1} \Delta U_v \varepsilon_v \right. \\
&\quad \left. + \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^{1/k} \frac{P_{v-1}}{P_v} A_{n-1,v} \Delta U_v \Delta \varepsilon_v \right] + \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{1/k} A_{n-1,n-1} \Delta U_n \varepsilon_n \quad (4.8) \\
&= t_1 + t_2 + t_3 + t_4
\end{aligned}$$

elde ederiz. Teoremi ispatlamak için $k \geq 1$ olmak üzere Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak $i=1,2,3,4$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |t_i|^k < \infty,$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak (4.1), (4.3) şartlarından ve $k > 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |t_1|^k &= \sum_{n=2}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{p_v}{P_v} \right)^{1-1/k} A_{n-1,v-1} \Delta U_v \varepsilon_v \right|^k \\
&\leq \sum_{n=2}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} |A_{n-1,v-1}|^k |\Delta U_v|^k |\varepsilon_v|^k \right\} \times \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{p_v}{P_v} |A_{n-1,v-1}| \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} f_n \right)^{k-1} \sum_{v=1}^{n-1} |A_{n-1,v-1}|^k |\Delta U_v|^k |\varepsilon_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\Delta U_v|^k |\varepsilon_v|^k \sum_{n=v+1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} f_n \right)^{k-1} |A_{n-1,v-1}| \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\Delta U_v|^k \\
&= O(1), \quad (m \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

elde ederiz. (4.2), (4.4) şartlarından ve $k > 1$ Hölder eşitsizliğinden,

$$\sum_{n=2}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |t_2|^k = \sum_{n=2}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^{1/k} \frac{P_{v-1}}{P_v} \Delta_v (A_{n-1,v-1}) \Delta U_v \varepsilon_v \right|^k$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=2}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right) \left| \Delta_v(A_{n-1,v-1}) \right| \left| \Delta U_v \right|^k \left| \mathcal{E}_v \right|^k \right\} \times \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left| \Delta_v(A_{n-1,v-1}) \right| \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} g_n \right)^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} \left| \Delta_v(A_{n-1,v-1}) \right| \left| \Delta U_v \right|^k \left| \mathcal{E}_v \right|^k \right\} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \frac{P_v}{p_v} \left| \Delta U_v \right|^k \left| \mathcal{E}_v \right|^k \sum_{n=v+1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} g_n \right)^{k-1} \left| \Delta_v(A_{n-1,v-1}) \right| \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left| \Delta U_v \right|^k \\
&= O(1), \quad (m \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.1) , (4.5) şartlarını kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \left| t_3 \right|^k &= \sum_{n=2}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{1/k} \frac{P_{v-1}}{P_v} A_{n-1,v} \Delta U_v \Delta \mathcal{E}_v \right|^k \\
&\leq \sum_{n=2}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k \left| A_{n-1,v} \right| \left| \Delta U_v \right|^k \left| \Delta \mathcal{E}_v \right|^k \right\} \times \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} \left| A_{n-1,v} \right| \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=2}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} f_n \right)^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k \left| A_{n-1,v} \right| \left| \Delta U_v \right|^k \left| \Delta \mathcal{E}_v \right|^k \right\} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k \left| \Delta U_v \right|^k \left| \Delta \mathcal{E}_v \right|^k \sum_{n=v+1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} f_n \right)^{k-1} \left| A_{n-1,v} \right| \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left| \Delta U_v \right|^k \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak t_4 için, (4.6) şartını uygularsak,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |t_4|^k &= \sum_{n=1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \left| \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{1/k} A_{n-1,n-1} \Delta U_n \varepsilon_n \right|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \frac{P_n}{p_n} |A_{n-1,n-1}|^k |\Delta U_n|^k |\varepsilon_n|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\Delta U_v|^k \\
&= O(1), \quad m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde $i=1,2,3,4$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |t_i|^k < \infty$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar. Şimdi $k \geq 1$ olmak üzere $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilme metodu ile $|T, q_n|_k$ toplanabilme metodu arasındaki ilişkiyi inceleyen bir teoremi ifade ve ispat edelim.

TEOREM 4.2. $k \geq 1$ olmak üzere, $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilir iken $\sum a_n \varepsilon_n$ serisinin $|T, q_n|_k$ toplanabilir olması için

$$\left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \frac{P_n}{p_n} |A_{n-1,n-1}| |\varepsilon_n|^k = O(1) \quad (4.9)$$

$$\frac{P_n}{p_n} |\Delta \varepsilon_v|^k \sum_{n=v}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |A_{n-1,v}|^k = O(1) \quad (4.10)$$

şartları sağlanması gereklidir [10].

İSPAT : $k \geq 1$ olmak üzere $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilir iken $\sum a_n \varepsilon_n$ serisi $|T, p_n|_k$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} |\Delta t_{n-1}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\Delta V_{n-1}|^k \\
\sum_{n=1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n} \right)^{k-1} \left| \sum_{v=1}^n A_{n-1,v-1} a_v \varepsilon_v \right|^k &= O(1) \sum_{n=1}^m \frac{P_n}{P_{n-1} P_{n-1}^k} \left| \sum_{v=1}^n a_v P_{v-1} \right|^k
\end{aligned}$$

$a_m = 1$ ve $v \neq m$ için $a_v = 0$ olsun. Bu durumda

$$\left(\frac{Q_m}{q_m}\right)^{k-1} |A_{m-1,m-1}|^k |\varepsilon_m|^k = O\left(\frac{P_m}{P_m}\right)$$

olur ki bu da (4.9) şartıdır. Şimdi (4.10) şartını göstermek için (4.7) deki ifadeyi yazarsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \left[\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{1-1/k} A_{n-1,v-1} \Delta U_v \varepsilon_v + \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{1/k} \frac{P_{v-1}}{P_v} \Delta_v A_{n-1,v} \Delta U_v \varepsilon_v \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{1/k} \frac{P_{v-1}}{P_v} A_{n-1,v} \Delta U_v \Delta \varepsilon_v \right] + \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{1/k} A_{n-1,n-1} \Delta U_n \varepsilon_n \right|^k = O(1) \sum_{n=1}^m |\Delta U_n|^k \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliği ε_v ve $\Delta \varepsilon_v$ den bağımsız olarak alırsak

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{1/k} \frac{P_{v-1}}{P_v} A_{n-1,v} \Delta U_v \Delta \varepsilon_v \right|^k = O(1) \sum_{n=1}^m |\Delta U_n|^k$$

elde ederiz. Şimdi $\Delta U_v = 1$ ve $r \neq v$ için $\Delta U_r = 0$ alalım. Bu takdirde

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} \left| \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{1/k} \frac{P_{v-1}}{P_v} A_{n-1,v} \Delta \varepsilon_v \right|^k = O(1) \quad (4.11)$$

elde ederiz.

$$\frac{P_v}{P_{v-1}} = \frac{P_v}{P_v - p_v} = \frac{1}{1 - \frac{p_v}{P_v}} = O(1)$$

eşitliğinden $P_v = O(P_{v-1})$ elde edilir ki bu ifadeyi (4.11) de yerine yazarsak

$$\frac{P_v}{P_v} |\Delta \varepsilon_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} |A_{n-1,v}|^k = O(1)$$

bulunur. Bu da bize (4.10) şartının gerekliliğini gösterir. Böylece ispatımız tamamlanmış olur.

Şimdi elde ettiğimiz sonuçları içeren uygulamaları inceleyelim.

UYGULAMA 4.3. Kabul edelim ki $k \geq 1$ ve (q_n) artmayan bir dizi,

$$\sum_{r=0}^{n-1} q_{n-v+1} = \sum_{v=r}^{n-1} \frac{p_v}{P_v} = O(h_n) \quad (4.12)$$

$$\sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{h_n}{Q_{n-1}} \right)^{k-1} \left(\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right) (Q_n - Q_{n-v}) = O(1) \quad (4.13)$$

$$P_n q_n = O(p_n Q_n) \quad (4.14)$$

$$p_n Q_n = O(P_n q_n) \quad (4.15)$$

olsun. Bu takdirde $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilir iken $\sum a_n \varepsilon_n$ serisinin $|\bar{N}, q_n|_k$ toplanabilir olması için

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{p_n Q_n}{P_n q_n}\right)^{1/k} \quad (4.16)$$

$$\Delta \varepsilon_n = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \quad (4.17)$$

şartları yeterlidir [10].

İSPAT : Bu teoremin ispatını yapmak için Teorem 4.1 in şartlarının sağlandığını gösterelim. (q_n) artmayan bir dizi olduğundan,

$$A_{n-1, v-1} = \sum_{r=0}^{v-1} \left(\frac{q_{n-r}}{Q_n} - \frac{q_{n-r-1}}{Q_{n-1}} \right) \leq \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{r=0}^{v-1} q_{n-r} = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} (Q_n - Q_{n-v}) \quad (4.18)$$

yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{p_v}{P_v} |A_{n-1, v-1}| &= O(1) \sum_{v=1}^{n-1} \frac{p_v}{P_v} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{r=1}^v q_{n-r+1} \\ &= O(1) \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} q_{n-r+1} \sum_{v=r}^{n-1} \frac{p_v}{P_v} \end{aligned} \quad (4.19)$$

(4.19) ifadesinde (4.12) kabulünü yazarsak

$$\sum_{v=1}^{n-1} \frac{p_v}{P_v} |A_{n-1, v-1}| = O(1) \left(\frac{h_n q_n}{Q_n Q_{n-1}} \right) \quad (4.20)$$

elde ederiz. Şimdi (4.20) ifadesini (4.1) de yerine yazarsak

$$\sum_{v=1}^{n-1} \frac{p_v}{P_v} |A_{n-1, v-1}| = O(f_n) \Rightarrow f_n = O(1) \frac{h_n q_n}{Q_n Q_{n-1}}$$

buluruz. Öncelikle Teorem 4.1 in şartlarından (4.3) şartının sağlandığını gösterelim. Bunun için önce (4.3) ifadesinde (4.20) yi yerine yazarsak

$$|\varepsilon_v|^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} f_n \right)^{k-1} |A_{n-1,v-1}| = O(1) \sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{h_n}{Q_{n-1}} \right)^{k-1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} (Q_n - Q_{n-v})$$

elde ederiz. (4.15) ve (4.16) şartlarından

$$|\varepsilon_v|^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} f_n \right)^{k-1} |A_{n-1,v-1}| = O(|\varepsilon_v|^k) = O\left(\frac{p_n Q_n}{P_n q_n}\right) = O(1) \quad (4.21)$$

elde edilir. Şimdi de (4.4) şartını göstermeden önce $|\Delta_v(A_{n-1,v-1})|$ ifadesini elde edersek

$$\begin{aligned} \Delta_v(A_{n-1,v-1}) &= \Delta_v \sum_{r=0}^{v-1} \left(\frac{q_{n-r}}{Q_n} - \frac{q_{n-r-1}}{Q_{n-1}} \right) = \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{q_{n-v-1}}{Q_{n-1}} - \frac{q_{n-v}}{Q_n} \right) = \frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}} - \frac{Q_{n-1}}{Q_n} \\ &\leq \frac{Q_{n-1}(Q_n - Q_{n-1})}{Q_n Q_{n-1}} = \frac{q_n}{Q_n} \end{aligned} \quad (4.22)$$

bulunur. Şimdi (4.4) şartını göstermek içinde $\Delta_v(A_{n-1,v-1})$ değerini yerine yazarsak

$$\left(\frac{P_v}{p_v} \right) |\varepsilon_v|^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} g_n \right)^{k-1} |\Delta_v A_{n-1,v-1}| = O(1) \frac{P_v}{p_v} |\varepsilon_v|^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{q_n q_{n-v}}{Q_n Q_{n-1}} \quad (4.23)$$

elde edilir. $\sum_{n=v}^{\infty} \frac{q_n q_{n-v}}{Q_n Q_{n-1}}$ ifadesini iki ayrı toplam olarak incelersek

$$\begin{aligned} \sum_{n=v}^{\infty} \frac{q_n q_{n-v}}{Q_n Q_{n-1}} &= \sum_{n=v}^{2v-1} + \sum_{n=v}^{\infty} = \sum_1 + \sum_2 \\ \sum_1 &= O(1) \frac{q_v}{Q_v Q_{v-1}} \sum_{n=v}^{2v-1} q_{n-v} = O\left(\frac{q_v}{Q_v}\right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_2 &= O(1) \sum_{m=2v}^{\infty} \frac{q_{v+m} q_m}{Q_{v+m} Q_{v+m-1}} = O(1) \sum_{m=v+1}^{\infty} \frac{q_{v+m-1} q_{m-1}}{Q_{v+m-2} Q_{v+m-1}} \\ &= O(1) q_v \sum_{m=v+1}^{\infty} \frac{q_m}{Q_m Q_{m-1}} = O\left(\frac{q_v}{Q_v}\right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

elde edilir. (4.24) ve (4.25) de elde ettiğimiz eşitlikleri (4.23) de yerine yazarsak

$$\frac{P_v}{p_v} |\varepsilon_v|^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} g_n \right)^{k-1} |\Delta_v A_{n-1,v-1}| = O(1) \frac{P_v}{p_v} |\varepsilon_v|^k \left(\frac{q_v}{Q_v} \right) = O(1)$$

elde edilir ki (4.4) şartı sağlanmış olur. Şimdi (4.5) şartına bakalım. Bunun için (4.16) şartından

$$\left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k |\Delta \varepsilon_v|^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n} f_n \right)^{k-1} |A_{n-1,v-1}| = O(1)$$

elde edilir. Son olarak (4.6) şartını göstermek için (4.18) ifadesinde (4.16) kabulünü yerine yazarsak

$$\left(\frac{P_n}{p_n} \right)^k |A_{n-1,n-1}|^k |\varepsilon_n|^k = O(1) \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^k \left(\frac{q_n}{Q_n} \right)^k |\varepsilon_n|^k = O(1)$$

elde ederiz ki böylece ispatımız tamamlanmış olur.

UYGULAMA 4.4. $k \geq 1$ olsun. (q_n) artmayan bir dizi olmak üzere $\sum a_n$ serisi

$|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilir iken $\sum a_n \varepsilon_n$ serisi $|\overline{N}, q_n|_k$ toplanabilir olması için

$$\varepsilon_n = O \left(\frac{p_n Q_n}{P_n q_n} \right)^{1/k} \quad (4.26)$$

$$\Delta \varepsilon_n = O \left(\frac{p_n Q_{v+1}}{P_n q_{v+1}} \right)^{1/k} \quad (4.27)$$

şartlarının sağlanması gereklidir [10].

İSPAT : İspatımızı Teorem 4.2 nin şartlarını sağlatarak yapalım. Öncelikli olarak (q_n)

artmayan bir dizisini kullanarak $A_{n-1,n-1}$ ifadesini teşkil edersek

$$\begin{aligned} A_{n-1,n-1} &= \frac{1}{Q_n} \sum_{r=0}^{n-1} q_{n-r} - \frac{1}{Q_{n-1}} \sum_{r=0}^{n-1} q_{n-r-1} \\ &= \frac{Q_n - q_0}{Q_n} - \frac{Q_{n-1}}{Q_{n-1}} = -\frac{q_0}{Q_n} \end{aligned}$$

$$|A_{n-1,n-1}| = \left| -\frac{q_0}{Q_n} \right| = \frac{q_0}{Q_n} \geq \frac{q_n}{Q_n}$$

elde edilir. (4.9) şartına bakarsak

$$\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} \left(\frac{q_n}{Q_n}\right)^k \frac{P_n}{p_n} |\varepsilon_n|^k = O(1)$$

$$\frac{P_n q_n}{p_n Q_n} |\varepsilon_n|^k = O(1)$$

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{p_n Q_n}{P_n q_n}\right)^{1/k}$$

elde edilir ki bu da (4.26) şartıdır. Şimdi de $A_{n-1,v}$ ifadesini oluşturursak,

$$A_{n-1,v} = \sum_{r=0}^v \left(\frac{q_{n-r}}{Q_n} - \frac{q_{n-r-1}}{Q_{n-1}} \right) = \frac{Q_n - Q_{n-v-1}}{Q_n} - \frac{Q_{n-1} - Q_{n-v-2}}{Q_{n-1}} = \frac{Q_{n-v-2}}{Q_{n-1}} - \frac{Q_{n-v-1}}{Q_n} \quad (4.28)$$

elde ederiz. Yine (4.10) ifadesinde (4.28) yi yerine yazarsak

$$\left(\frac{P_v}{p_v}\right) |\Delta \varepsilon_v|^k \sum_{n=v}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} |A_{n-1,v}|^k = O(1)$$

$$\left(\frac{P_v}{p_v}\right) |\Delta \varepsilon_v|^k \sum_{n=v}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} \left| \left(\frac{Q_{n-v-2}}{Q_{n-1}} - \frac{Q_{n-v-1}}{Q_n} \right) \right|^k = O(1)$$

elde edilir. $n = v + 1$ alırsak

$$\frac{P_v}{p_v} |\Delta \varepsilon_v|^k \left(\frac{Q_{v+1}}{q_{v+1}}\right)^{k-1} \left(\frac{Q_0}{Q_{v+1}}\right)^k = O(1)$$

$$\frac{P_v}{p_v} |\Delta \varepsilon_v|^k \frac{1}{q_{v+1}^{k-1} Q_{v+1}} = O(1) \Rightarrow \Delta \varepsilon_v = \left(q_v \left(\frac{p_v Q_{v+1}}{P_v q_{v+1}} \right)^{1/k} \right)$$

elde edilir ki buda (4.27) şartıdır. Bu da ispatı tamamlar.

5. BÖLÜM

$|T|_k$ ve $|\bar{N}, p_n|_k$ TOPLANABİLME METODLARI İLE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde, $\sum a_n$ serisinin $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilir iken hangi şartlar altında $\sum a_n \varepsilon_n$ serisinin $|T|_k$ toplanabildiğini gösteren iki teorem ifade ve ispat edeceğiz.

$$\text{TEOREM 5.1.} \quad \sum_{v=1}^{n-1} \frac{p_v}{P_v} |A_{n-1,v-1}| = O(f_n) \quad (5.1)$$

$$\sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v A_{n-1,v}| = O(g_n) \quad (5.2)$$

olsun. $k \geq 1$ olmak üzere $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilir iken

$$|\varepsilon_v|^k \sum_{n=v}^{\infty} (nf_n)^{k-1} |A_{n-1,v}| = O(1) \quad (5.3)$$

$$\left(\frac{p_v}{P_v} \right) |\varepsilon_v|^k \sum_{n=v}^{\infty} (ng_n)^{k-1} |\Delta_v A_{n-1,v}| = O(1) \quad (5.4)$$

$$\left(\frac{p_v}{P_v} \right)^k |\Delta \varepsilon_v|^k \sum_{n=v}^{\infty} (nf_n)^{k-1} |A_{n-1,v}| = O(1) \quad (5.5)$$

ve

$$n^{k-1} \frac{p_n}{P_n} |A_{n-1,n}|^k |\varepsilon_n|^k = O(1) \quad (5.6)$$

şartları sağlanıyor ise, bu takdirde $\sum a_n \varepsilon_n$ serisi $|T|_k$ toplanabilirdir [16].

İSPAT : (s_n) dizisinin $(\bar{N}, p_n)$ ortalaması V_n olsun. Yani

$$V_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v$$

dür. Buna göre $V_n - V_{n-1}$ farkını teşkil edersek,

$$V_n - V_{n-1} = \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n P_{v-1} a_v$$

elde ederiz. ΔU_n i oluşturursak

$$\Delta U_n = \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{1-\frac{1}{k}} |V_n - V_{n-1}| = \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{1-\frac{1}{k}} \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^n P_{v-1} a_v$$

olmak üzere $\sum a_n \in \left| \bar{N}, p_n \right|_k$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta V_n|^k < \infty$$

olduğunu biliyoruz.

$t_n = \sum_{r=0}^n a_{n,r} s_r$ tanımını kullanarak $\Delta t_{n-1} = t_{n-1} - t_n$ farkına bakarsak

$$\begin{aligned} \Delta t_{n-1} = t_{n-1} - t_n &= \sum_{r=0}^{n-1} a_{n-1,r} s_r - \sum_{r=0}^n a_{n,r} s_r \\ &= \sum_{r=0}^n (a_{n-1,r} - a_{n,r}) \sum_{r=v}^n a_v \varepsilon_v \\ &= \sum_{r=0}^n a_v \varepsilon_v \sum_{r=v}^n (a_{n-1,r} - a_{n,r}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

bulunur. Şimdi $\sum_{r=v+1}^n (a_{n-1,r} - a_{n,r})$ ifadesini düzenlersek

$$\begin{aligned} \sum_{r=v}^n (a_{n-1,r} - a_{n,r}) &= \sum_{r=v}^n a_{n-1,r} - \sum_{r=v}^n a_{nr} \\ &= 1 - \sum_{r=0}^{v-1} a_{n-1,r} - 1 + \sum_{r=0}^{v-1} a_{nr} \\ &= \sum_{r=0}^{v-1} (a_{nr} - a_{n-1,r}) = \sum_{r=0}^{v-1} \Delta_n(a_{n-1,r}) \\ &= A_{n-1,v} \end{aligned}$$

elde edilir ki (5.7) de yerine yazarsak

$$\Delta t_{n-1} = \sum_{v=1}^n (P_{v-1} a_v) \left(\frac{A_{n-1,v} \varepsilon_v}{P_{v-1}} \right)$$

elde edilir. Şimdi bu ifadeye Abel kısmi toplama formülünü uygulayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\Delta t_{n-1} &= \sum_{v=1}^{n-1} \left(\sum_{r=1}^v P_{r-1} a_r \right) \Delta_v \left(\frac{A_{n-1,v} \varepsilon_v}{P_{v-1}} \right) + \left(\sum_{v=1}^n P_{v-1} a_v \right) \frac{A_{n-1,n} \varepsilon_n}{P_{n-1}} \\
&= \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^{1/k} P_{v-1} \Delta U_v \left(\frac{P_v}{P_v P_{v-1}} A_{n-1,v} \varepsilon_v + \frac{1}{P_v} \Delta_v (A_{n-1,v}) \varepsilon_v \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{P_v} A_{n,v} \Delta \varepsilon_v \right) + \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{1/k} \Delta U_n A_{n-1,n} \varepsilon_n
\end{aligned} \tag{5.8}$$

elde edilir. $\Delta_v \left(\frac{A_{n-1,v} \varepsilon_v}{P_{v-1}} \right)$ ifadesini açalım

$$\Delta_v \left(\frac{A_{n-1,v} \varepsilon_v}{P_{v-1}} \right) = \frac{\Delta_v A_{n-1,v} \varepsilon_v}{P_v} + \frac{A_{n-1,v} \varepsilon_v P_v}{P_v P_{v-1}} + \frac{A_{nv} \Delta \varepsilon_v}{P_v} \tag{5.9}$$

bulunur ki (5.9) u (5.8) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\Delta t_{n-1} &= \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^{1-1/k} \varepsilon_v A_{n-1,v} \Delta U_v + \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^{1/k} \frac{P_{v-1}}{P_v} \Delta_v A_{n-1,v} \Delta U_v \varepsilon_v \\
&\quad + \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^{1-1/k} \frac{P_{v-1}}{P_v} A_{n,v} \Delta U_v \Delta \varepsilon_v + \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^{1/k} A_{n-1,n} \Delta U_n \varepsilon_n \\
&= t_1 + t_2 + t_3 + t_4
\end{aligned} \tag{5.10}$$

elde edilir. Teoremi ispatlamak için $k \geq 1$ olmak üzere Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak $i=1,2,3,4$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |t_i|^k < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak (5.1), (5.3) ve $k > 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |t_1|^k &= \sum_{n=1}^m n^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^{1-1/k} \varepsilon_v A_{n-1,v} \Delta U_v \right|^k \\
&\leq \sum_{n=1}^m n^{k-1} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^{1-1/k} |\varepsilon_v|^k |A_{n-1,v}|^k |\Delta U_v|^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=1}^m n^{k-1} \sum_{v=1}^{n-1} |\varepsilon_v|^k |A_{n-1,v}| \|\Delta U_v\|^k \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{P_v} |A_{n-1,v}| \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m (nf_n)^{k-1} \sum_{v=1}^{n-1} |\varepsilon_v|^k |A_{n-1,v}| \|\Delta U_v\|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\varepsilon_v|^k \|\Delta U_v\|^k \sum_{n=v}^m (nf_n)^{k-1} |A_{n-1,v}| \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \|\Delta U_v\|^k \\
&= O(1), \quad (m \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.2), (5.4) ve $k > 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |t_2|^k &= \sum_{n=1}^m n^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{1/k} \frac{P_{v-1}}{P_v} \varepsilon_v \Delta_v(A_{n-1,v}) \Delta U_v \right|^k \\
&\leq \sum_{n=1}^m n^{k-1} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^{1/k} |\varepsilon_v| \|\Delta_v(A_{n-1,v})\| \|\Delta U_v\| \right\}^k \\
&\leq \sum_{n=1}^m n^{k-1} \sum_{v=1}^{n-1} \|\Delta U_v\|^k \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^k |\varepsilon_v|^k \|\Delta_v(A_{n-1,v})\|^k \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \|\Delta_v A_{n-1,v}\| \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m (ng_n)^{k-1} \sum_{v=1}^{n-1} \|\Delta U_v\|^k \left(\frac{P_v}{P_v} \right)^k |\varepsilon_v|^k \|\Delta_v(A_{n-1,v})\|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \|\Delta U_v\|^k \frac{P_v}{P_v} |\varepsilon_v|^k \sum_{n=v}^m (ng_n)^{k-1} \|\Delta_v(A_{n-1,v})\|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \|\Delta U_v\|^k \\
&= O(1), \quad (m \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.1), (5.5) ve $k > 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |t_3|^k = \sum_{n=1}^m n^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{1/k} \frac{P_{v-1}}{P_v} \Delta \varepsilon_v A_{n,v} \Delta U_v \right|^k \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{n=1}^m n^{k-1} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k |A_{n,v}|^k |\Delta U_v|^k |\Delta \varepsilon_v|^k \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{P_v} |A_{n,v}| \right\}^{k-1} \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k |\Delta U_v|^k |\Delta \varepsilon_v|^k \sum_{n=v}^m (nf_n)^{k-1} |A_{n,v}| \\ &= O(1) \sum_{v=1}^m |\Delta U_v|^k \\ &= O(1), \quad (m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak t_4 için (5.6) şartını kullanarak

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |t_4|^k &= \sum_{n=1}^m n^{k-1} \left| \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{1/k} A_{n-1,n} \Delta \varepsilon_n \Delta U_n \right|^k \\ &= O(1) \sum_{n=1}^m n^{k-1} \frac{P_n}{p_n} |A_{n-1,n}|^k |\Delta \varepsilon_n|^k |\Delta U_n|^k \\ &= O(1), \quad (m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde $i=1,2,3,4$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |t_i|^k < \infty$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

TEOREM 5.2. $k \geq 1$ olmak üzere $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilir iken $\sum a_n \varepsilon_n$ serisi $|T|_k$ toplanabilir olması için

$$n^{k-1} \frac{P_n}{p_n} |A_{n-1,n}|^k |\varepsilon_n|^k = O(1) \quad (5.12)$$

$$\frac{P_n}{p_n} |\Delta \varepsilon_n|^k \sum_{n=v}^{\infty} n^{k-1} |A_{n,v}|^k = O(1) \quad (5.13)$$

şartlarının sağlanması gereklidir [16].

İSPAT : $k \geq 1$ olmak üzere $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilir iken $\sum a_n \varepsilon_n$ serisi $|T|_k$ toplanabilir olsun. Yani

$$\sum_{n=1}^m n^{k-1} |\Delta t_{n-1}|^k = O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\Delta V_{n-1}|^k$$

$$\sum_{n=1}^m n^{k-1} \left| \sum_{v=1}^n A_{n-1,v} a_v \varepsilon_v \right|^k = O(1) \sum_{n=1}^m \frac{P_n}{P_n P_n^{k-1}} \left| \sum_{v=1}^n a_v P_{v-1} \right|^k$$

olsun. $a_m = 1$ ve $v \neq m$ için $a_v = 0$ alırsak

$$m^{k-1} |A_{m-1,m} \varepsilon_m|^k = O(1) \frac{P_m}{P_m P_m^{k-1}} P_m^k$$

$$\Rightarrow m^{k-1} |A_{m-1,m} \varepsilon_m|^k = O\left(\frac{P_m}{P_m}\right)$$

elde edilir ki buda (5.12) şartıdır. (5.11) eşitliğini yazarsak

$$\sum_{n=1}^m n^{k-1} |t_3|^k = O(1) \sum_{n=1}^m |U_n|^k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |t_3|^k = \sum_{n=1}^m n^{k-1} \left| \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{1/k} \frac{P_{v-1}}{P_v} \Delta \varepsilon_v A_{n,v} \Delta U_v \right|^k$$

Burada $\Delta U_v = 1$ ve $r \neq v$ için $\Delta U_r = 0$ alalım. Bu durumda

$$\sum_{n=v}^m n^{k-1} \left| \left(\frac{P_v}{p_v} \right) \frac{P_{v-1}}{P_v} \Delta \varepsilon_v A_{n,v} \right|^k = O(1)$$

$$\frac{P_v}{p_v} |\Delta \varepsilon_v|^k \sum_{n=v}^m n^{k-1} |A_{n,v}|^k = O(1)$$

elde edilir bu da (5.13) şartıdır. Böylece ispatımız tamamlanmış olur.

Şimdi de bu teoremlerden çıkartılan sonuçları inceleyelim.

SONUÇ 5.3. (p_n) ve (q_n) ,

$$P_n q_n = O(p_n Q_n) \quad (5.14)$$

$$p_n Q_n = O(P_n q_n) \quad (5.15)$$

ve

$$\sum_{n=v}^{\infty} \frac{n^{k-1} q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}} = O\left(\frac{(v q_v)^{k-1}}{Q_v^k}\right) \quad (5.16)$$

olacak şekilde pozitif diziler olsun. Bu durumda $k \geq 1$ olmak üzere $\sum a_n$ serisi $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$

toplanabilir iken $\sum a_n \varepsilon_n$ serisi $|T|_k$ toplanabilmesi için

$$\varepsilon_n = O\left\{\left(\frac{Q_n}{n q_n}\right)^{1-1/k}\right\} \quad (5.17)$$

$$\Delta \varepsilon_n = \frac{p_n}{P_n} \left(\frac{Q_n}{n q_n}\right)^{1-1/k} \quad (5.18)$$

şartları yeterlidir [16].

İSPAT : İspatımıza başlamadan önce $a_{nv} = \frac{q_v}{Q_n}$ alıp $A_{n-1,v}$ ifadesini teşkil edersek

$$|A_{n-1,v}| = \left|\sum_{r=0}^n (a_{n,r} - a_{n-1,r})\right| = \left|\sum_{r=0}^v \frac{q_r}{Q_{n-1}} - \frac{q_r}{Q_n}\right| = O\left(\frac{q_n Q_v}{Q_n Q_{n-1}}\right) \quad (5.19)$$

elde edilir.

$$\sum_{v=1}^{n-1} \frac{p_v}{P_v} |A_{n-1,v}| = O(1) \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{p_v Q_v}{P_v} = O(1) \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} q_v = O\left(\frac{q_n}{Q_n}\right)$$

elde edilir. Şimdi de $\Delta_v(A_{n-1,v})$ ifadesini elde edelim

$$\Delta_v(A_{n-1,v}) = -\Delta_n(a_{n-1,v+1}) = -\frac{q_n q_{v+1}}{Q_n Q_{n-1}} \quad (5.20)$$

bulunur.

$$\sum_{v=1}^{n-1} |\Delta_v A_{n-1,v}| = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} q_{v+1} = O(1) \left(\frac{q_n}{Q_{n-1}}\right)$$

elde edilir. Şimdi (5.3) şartını göstermek için (5.19) da elde ettiğimiz eşitliği yerine yazarsak

$$|\varepsilon_v|^k \sum_{n=v+1}^{\infty} (nf_n)^{k-1} |A_{n-1,v}| = |\varepsilon_v|^k Q_v \sum_{n=v}^{\infty} \frac{n^{k-1} q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}} = |\varepsilon_v|^k O\left(\frac{vq_v}{Q_v}\right)^{k-1} = O(1)$$

elde edilir. Şimdi (5.4) şartını elde etmek için (5.20) de elde ettiğimiz eşitliği yerine koyarsak

$$\begin{aligned} \frac{P_v}{p_v} \varepsilon_v^k \sum_{n=v}^{\infty} (ng_n)^{k-1} |\Delta_v A_{n-1,v}| &= O(1) \frac{P_v}{p_v} |\varepsilon_v|^k \sum_{n=v}^{\infty} \left(\frac{ng_n}{Q_{n-1}}\right)^{k-1} \frac{q_n q_{v+1}}{Q_n Q_{n-1}} \\ &= O(1) \frac{P_v q_{v+1}}{p_v} |\varepsilon_v|^k \sum_{n=v}^{\infty} \frac{n^{k-1} q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}^{k-1}} \\ &= O(1) |\varepsilon_v|^k Q_v \frac{v^{k-1} q_v^{k-1}}{Q_v^k} = O(1) \end{aligned}$$

elde edilir. (5.5) şartı

$$\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k |\Delta \varepsilon_v|^k \sum_{n=v}^{\infty} (nf_n)^{k-1} |A_{n-1,v}| = O(1) |\Delta \varepsilon_v|^k \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k \left(\frac{vq_v}{Q_v}\right)^{k-1} = O(1)$$

elde edilir. (5.6) şartı

$$n^{k-1} \frac{P_n}{p_n} |A_{n-1,n}|^k |\varepsilon_n|^k = O(1)$$

elde edilir ki böylece ispatımız tamamlanmış olur.

SONUÇ 5.4. (q_n) ,

$$nq_n = O(Q_n) \tag{5.21}$$

$$Q_n = O(nq_n) \tag{5.22}$$

olacak şekilde pozitif bir dizi olsun. Bu takdirde $\sum a_n$ serisi $|C,1|_k$ toplanabilir iken

$\sum a_n \varepsilon_n$ serisi $|T|_k$ toplanabilirliği olması için yeterli şartlar

$$\varepsilon_n = O\left\{\left(\frac{Q_n}{nq_n}\right)^{1-1/k}\right\} \tag{5.23}$$

$$\Delta \varepsilon_n = O\left\{\frac{1}{n} \left(\frac{Q_n}{nq_n}\right)^{1-1/k}\right\} \tag{5.24}$$

dir[16].

İSPAT : Sonuç (5.3) de $p_n = 1$ alırsak (5.4) ve (5.15) şartları (5.22) ve (5.23) ile aynı olur. (4.16) şartını ispatlamak için (5.23) ve (5.24) şartlarını kullanırsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=v}^{\infty} \frac{n^{k-1} q_n^k}{Q_n^k Q_{n-1}} &= O(1) \sum_{n=v}^{\infty} \frac{Q_n^{k-1} q_n}{Q_n^k Q_{n-1}} = O(1) \sum_{n=v}^{\infty} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} = O\left(\frac{1}{Q_v}\right) = O\left(\frac{1}{Q_v}\right) O(1) \\ &= O\left(\frac{1}{Q_v}\right) O\left(\frac{v q_v}{Q_v}\right)^{k-1} = \frac{1}{Q_v^k} O\left((v q_v)^{k-1}\right) = O\left(\frac{(v q_v)^{k-1}}{Q_v^k}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buda ispatımızı tamamlar.

KAYNAKLAR

1. Maddox, I. J., "Elements of Functional Analysis", Cambridge University Press, 1970.
2. Mc Fadden, L., "Absolute Nörlund Summability", Duke Math. J., 9, 168-207, 1942
3. Petersen, G. M., Regular Matrix Transformations, Mc Graw Hill Publishing Company Limited, London, 1966.
4. Das, G., "Tauberian Theorems for Absolute Nörlund Summability", Proc. London Math. Soc. (3) 19, 73-81, 1969.
5. Sarigöl, M.A., On $|T|_k$ Summability and Absolute Nörlund Summability, Math. Slovaca, 42, no. 3, 325-329, 1992.
6. Tanovic-Miller, N., On Strong Summability, Glasnik Matematicki, 34 (14), 87- 97, 1979.
7. Hardy, G. H., Divergent Series, Oxford, 1973.
8. Kayashima, I., "On the Relation Between Nörlund and Riesz Means", Pacific J. Math., 49, 391-396, 1973.
9. Bor, H., On Two Summability Methods, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 97, 147-149, 1985.
10. Sulaiman, W. T., Inclusion Theorems for Absolute Matrix Summability Methods of an Infinite Series IV, Indian J. Pure and Appl. Math., 34 (11), 1547-1557, 2003.
11. Flett, T. M., "On an Extension of Absolute Summability and Some Theorems of Littlewood and Paley", Proc. Lond. Math. Soc. 7, 113-141, 1957.
12. Kishore, N. and Hotta, G. C., On $|\overline{N}, p_n|$ Summability Factors, Acta Sci. Math. (Szeged), 31, 9-12, 1970.
13. Bor, H., On the Relative Strength of Two Absolute Summability Methods, Proc. Amer. Math. Soc., 113, 1009-1012, 1991.

14. Bor, H. and Thorpe, B., A Note on Two Absolute Summability Methods, Analysis, 12, 1-3, 1992.
15. Bor, H. and Thorpe, B., On Two Absolute Summability Methods, Analysis, 7, 145-152, 1987.
16. Sulaiman, W. T., Inclusion Theorems for Absolute Matrix Summability Methods of an Infinite Series. I, Panamer. Math. J. 13 (3), 25-34, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet YÜCEL
Baba Adı : Ayhan
Ana Adı : Şükran
Doğum Yeri : Kayseri
Doğum Tarihi : 06.04.1979

İlk ve orta öğrenimini Kayseri de tamamladı. Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü nden lisans diploması alarak 2002 yılında mezun oldu. Aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. 2003 yılında Özel Zirve Tümay Dershane'sinde matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Halen Uzman Dersanesi nde Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.

Adres: F. Çakmak Mh. Fuzuli Cd. No :49/6, Kocasinan, KAYSERİ

Mail: meuyucel@yahoo.com, 4010730213@erciyes.edu.tr