

**GENELLEŞTİRİLMİŞ $\{G_n\}$ FIBONACCI DİZİSİNİ KULLANARAK
 2^k MERTEBELİ $\{G_n^{(2^k)}\}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ FIBONACCI MATRİS
DİZİSİNİN TEŞKİL EDİLMESİ**

Tuğba BÜYÜKHATİPOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ŞUBAT 2006
ANKARA**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ $\{G_n\}$ FIBONACCI DİZİSİNİ KULLANARAK
 2^k MERTEBELİ $\{G_n^{(2^k)}\}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ FIBONACCI MATRİS
DİZİSİNİN TEŞKİL EDİLMESİ**

Tuğba BÜYÜKHATİPOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ŞUBAT 2006
ANKARA**

Tuğba BÜYÜKHATİPOĞLU(MERMER) tarafından hazırlanan GENELLEŞTİRİLMİŞ $\{G_n\}$ FIBONACCI DİZİSİNİ KULLANARAK 2^k MERTEBELİ $\{G_n^{(2^k)}\}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ FIBONACCI MATRİS DİZİSİNİN TEŞKİL EDİLMESİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Tez Yöneticisi

Prof. Dr. Dursun TAŞCI



Bu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Adnan TERCAN 

Üye : Prof. Dr. Dursun TAŞCI 

Üye : Doç. Dr. Nuri ŞİMEN 

Üye : Doç. Dr. Ahmet ARKAN 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Naım TUĞLU 

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

**GENELLEŞTİRİLMİŞ $\{G_n\}$ FIBONACCI DİZİSİNİ KULLANARAK
 2^k MERTEBELİ $\{G_n^{(2^k)}\}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ FIBONACCI MATRİS
DİZİSİNİN TEŞKİL EDİLMESİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Tuğba BÜYÜKHATİPOĞLU

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2006**

ÖZET

Bu çalışmada; her $n \geq 0$ tamsayısı için $W_{n+2} = pW_{n+1} + qW_n$, $W_0 = a$, $W_1 = b$ (burada a , b , p , q keyfi tamsayılar) rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{W_n\}$ dizisinde $q = 1$ olması durumunda terimleri $G_{n+1} = pG_n + G_{n-1}$, $G_0 = a$, $G_1 = b$ rekürans bağıntısından elde edilen genelleştirilmiş Fibonacci dizisi $\{G_n\}$ 'i kullanarak 2^k mertebeli $\{G_n^{(2^k)}\}$ genelleştirilmiş Fibonacci matris dizisi teşkil edildi. Bu matris dizisi ile ilgili bazı sonuçlar verildi.

Bilim Kodu	: 204.1.025
Anahtar Kelimeler	: Fibonacci, Lucas, Pell, Modify Pell, Pell-Lucas dizileri
Sayfa Adedi	: 40
Tez Yöneticisi	: Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

**THE CONSTRUCTION OF GENERALIZED FIBONACCI MATRIX OF
ORDER 2^k SEQUENCE $\{G_n^{(2^k)}\}$ BY USING OF THE GENERALIZED
FIBONACCI SEQUENCE $\{G_n\}$**

Tuğba BÜYÜKHATİPOĞLU

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

February 2006

ABSTRACT

In this thesis the generalized sequence $\{W_n\}$ is defined for all integers $n \geq 0$ by the recurrence relation $W_{n+2} = pW_{n+1} + qW_n$, $W_0 = a$, $W_1 = b$ (where a , b , p , q are arbitrary integers). When $q = 1$, terms $G_{n+1} = pG_n + G_{n-1}$, $G_0 = a$, $G_1 = b$, are obtained by recurrence relation that we construct the generalized Fibonacci matrix of order 2^k sequence $\{G_n^{(2^k)}\}$ by use of the generalized Fibonacci sequence $\{G_n\}$. Some results are given interest with matrix sequence.

Science Code : 204.1.025
Key Words : Fibonacci, Lucas, Pell, Modify Pell, Pell-Lucas sequence
Page Number : 40
Adviser : Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Prof. Dr. Dursun TAŞÇI'ya yine çalışmalarımda bana değerli zamanını ayırarak destek olan Arş. Gör. Emrah KILIÇ'a, manevi desteğiyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan eşim Bora BÜYÜKHATİPOĞLU'na, tüm çalışma arkadaşlarım ve değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. LİNEER REKÜRANSLAR	3
2.1. İkili Lineer Reküranslar	9
3. FIBONACCI MATRİS DİZİLERİ	13
3.1. $\{G_n^{(2^k)}\}$ Genelleştirilmiş Fibonacci Matris Dizisinin Oluşturulması	16
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	37
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	40

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\{F_n\}$	Fibonacci dizisi
$\{L_n\}$	Lucas dizisi
$\{P_n\}$	Pell dizisi
$\{q_n\}$	Modify Pell dizisi
$\{Q_n\}$	Pell-Lucas dizisi
$\{G_n\}$	Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\{G_n^{(2^k)}\}$	2^k mertebeli genelleştirilmiş Fibonacci matris dizisi
$\{F_n^{(2^k)}\}$	2^k mertebeli Fibonacci matris dizisi
$\{L_n^{(2^k)}\}$	2^k mertebeli Lucas matris dizisi
$\{P_n^{(2^k)}\}$	2^k mertebeli Pell matris dizisi
$\{q_n^{(2^k)}\}$	2^k mertebeli Modify Pell matris dizisi
$\{Q_n^{(2^k)}\}$	2^k mertebeli Pell-Lucas matris dizisi
F_n	n -inci Fibonacci sayısı
L_n	n -inci Lucas sayısı
P_n	n -inci Pell sayısı
q_n	n -inci Modify Pell sayısı

Simgeler**Açıklama** Q_n n -inci Pell-Lucas sayısı f_n n -inci Fermat sayısı

1. GİRİŞ

Bu çalışmada her n tamsayısı için,

$$W_{n+2} = pW_{n+1} + qW_n$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{W_n\}$ dizisinin aşağıdaki özel durumlarını göz önüne alacağız. Burada a, b, p, q keyfi tamsayılar olmak üzere, $W_0 = a, W_1 = b$ dir.

1. $p = 1, q = 1, a = 0, b = 1$ için $\{F_n\}$ ile gösterilen Fibonacci dizisi,
2. $p = 1, q = 1, a = 2, b = 1$ için $\{L_n\}$ ile gösterilen Lucas dizisi,
3. $p = 2, q = 1, a = 0, b = 1$ için $\{P_n\}$ ile gösterilen Pell dizisi,
4. $p = 2, q = 1, a = 1, b = 1$ için $\{q_n\}$ ile gösterilen Modify Pell dizisi,
5. $p = 2, q = 1, a = 2, b = 2$ için $\{Q_n\}$ ile gösterilen Pell-Lucas dizisi,

Bu dizilerin ortak özelliği $q = 1$ olmasıdır. $q = 1$ olması durumunda $\{G_n\}$ ile gösterilen ve genelleştirilmiş Fibonacci dizisi denilen,

$$G_{n+1} = pG_n + G_{n-1} \quad [1.1]$$

şeklindeki diziyi göz önüne alacağız. Burada $G_0 = a$ ve $G_1 = b$ 'dir.

$\{G_n\}$ dizisinin negatif terimleri Eş. 1.1'deki rekürans bağıntısı kullanılarak aşağıdaki gibi bulunabilir;

$$G_{-1} = G_1 - pG_0, G_{-2} = G_0 - pG_{-1}, \dots, G_{-(n+1)} = G_{-(n-1)} - pG_{-n}$$

Bu arada n tamsayısına değerler vererek aşağıdaki sayıları bulabiliriz.

$n : \dots$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6 ...
$F_n : \dots$	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8 ...

$$\begin{aligned}
L_n &: \dots 18 \quad -11 \quad 7 \quad -4 \quad 3 \quad -1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \quad 11 \quad 18 \dots \\
P_n &: \dots -70 \quad 29 \quad -12 \quad 5 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \quad 12 \quad 29 \quad 70 \dots \\
q_n &: \dots -239 \quad 99 \quad -41 \quad 17 \quad -7 \quad 3 \quad -1 \quad 3 \quad 7 \quad 17 \quad 41 \quad 99 \quad 239 \dots \\
Q_n &: \dots 198 \quad -82 \quad 34 \quad -14 \quad 6 \quad -2 \quad 2 \quad 2 \quad 6 \quad 14 \quad 34 \quad 82 \quad 198 \dots
\end{aligned}$$

Bu şekilde genel olarak,

$$G_{-n} = \begin{cases} (-1)^{n+1} G_n, & a = 0 \text{ ise} \\ (-1)^n G_n, & a \neq 0 \text{ ise} \end{cases} \quad [1.2]$$

yazılabilir.

Biz burada genelleştirilmiş $\{G_n\}$ Fibonacci dizisini kullanarak 2^k mertebeli genelleştirilmiş Fibonacci matris dizisi $\{G_n^{(2^k)}\}$ ve onun özelliklerini inceleyeceğiz.

2. LİNEER REKÜRANSLAR

Bu bölümde ileride kullanacağımız bazı tanımları ve temel kavramları vereceğiz.

2.1. Tanım

$F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ $n \geq 1$ şeklinde tanımlanan rekürans bağıntılarından elde edilen sayılara Fibonacci sayıları denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Fibonacci dizisi denir ve $\{F_n\}$ ile gösterilir. Burada F_n , n -inci Fibonacci sayısını gösterir, (4-19).

2.2. Tanım

$L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ olmak üzere $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ $n \geq 1$ şeklinde tanımlanan rekürans bağıntılarından elde edilen sayılara Lucas Sayıları denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Lucas Dizisi denir ve $\{L_n\}$ ile gösterilir. Burada L_n , n -inci Lucas sayısını gösterir, (2, 5, 24).

2.3. Tanım

$P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$ $n \geq 1$ şeklinde tanımlanan rekürans bağıntılarından elde edilen sayılara Pell sayıları denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Pell dizisi denir ve $\{P_n\}$ ile gösterilir. Burada P_n , n -inci Pell sayısını gösterir, (1, 4, 20-26).

2.4. Tanım

$q_0 = 1$ ve $q_1 = 1$ olmak üzere $q_{n+1} = 2q_n + q_{n-1}$ $n \geq 1$ şeklinde tanımlanan rekürans bağıntılarından elde edilen sayılara Modify-Pell sayıları denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Modify-Pell dizisi denir ve $\{q_n\}$ ile gösterilir. Burada q_n , n -inci Modify-Pell sayısını gösterir, (1, 4, 20-26).

2.5. Tanım

$Q_0 = 2$ ve $Q_1 = 2$ olmak üzere $Q_{n+1} = 2Q_n + Q_{n-1}$ $n \geq 1$ şeklinde tanımlanan rekürans bağıntılarından elde edilen sayılara Pell-Lucas sayıları denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Pell-Lucas dizisi denir ve $\{Q_n\}$ ile gösterilir. Burada Q_n , n -inci Pell-Lucas sayısını gösterir, (2, 4, 20-26).

2.1. Teorem

F_n , n -inci Fibonacci sayısı olsun. $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ve $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ olmak üzere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir.

Bu formüle Fibonacci sayıları için Binet formülü denir, (1-4, 8-15).

İspat

İspatımızı n üzerinde tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n = 1$ için $F_1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta} = 1$ olduğundan ispat açık olarak doğrudur.

$n = 2$ için

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} \\ &= \alpha + \beta \\ &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir.

Şimdi $n = k > 2$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$F_k = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta}$$

olsun. Buna göre $n = k + 1$ için doğru olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} = \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{(\alpha^k + \alpha^{k-1}) - (\beta^k + \beta^{k-1})}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

Bununla beraber $\alpha^2 = \alpha + 1$ olup $\alpha^{k+1} = \alpha^k + \alpha^{k-1}$, dir. Aynı zamanda $\beta^2 = \beta + 1$ olup $\beta^{k+1} = \beta^k + \beta^{k-1}$, dir. Bu durumda,

$$F_{k+1} = \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta}$$

dir. Böylelikle $n = k + 1$ için ifade doğru olup ispat tamamlanmış olur.

2.2. Teorem

L_n ; n -inci Lucas sayısı olsun. $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ve $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ olmak üzere

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

dir.

Bu formüle Lucas sayıları için Binet formülü denir, (1-5, 24).

İspat

İspatımızı n üzerinde tümevarım yöntemi ile yapalım.

$$\begin{aligned}
 n = 1 \text{ için } L_1 &= \alpha^1 + \beta^1 \\
 &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) = 1
 \end{aligned}$$

olduğundan ifade açık olarak doğrudur.

$n = 2$ için

$$\begin{aligned}
 L_2 &= \alpha^2 + \beta^2 \\
 &= \left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right]^2 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

dir. Bu durumda $n = k > 2$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$L_k = \alpha^k + \beta^k$$

olsun. Şimdi $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
 L_{k+1} &= L_k + L_{k-1} = \alpha^k + \beta^k + \alpha^{k-1} + \beta^{k-1} \\
 &= (\alpha^k + \alpha^{k-1}) + (\beta^k + \beta^{k-1})
 \end{aligned}$$

Bununla beraber $\alpha^2 = \alpha + 1$ olup $\alpha^{k+1} = \alpha^k + \alpha^{k-1}$, dir. Benzer şekilde $\beta^2 = \beta + 1$ olup $\beta^{k+1} = \beta^k + \beta^{k-1}$, dir. Bu durumda,

$$L_{k+1} = \alpha^{k+1} + \beta^{k+1}$$

dir. Böylelikle $n = k + 1$ için ifade doğru olup ispat tamamlanmış olur.

2.3. Teorem

F_n ; n -inci Fibonacci sayısı ve $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$$

dır, (1-4, 10-20).

İspat

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
 x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} \right) \\
 &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} \\
 &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

olup, buradan $x = 1 + \frac{1}{x}$ yada $x^2 - x - 1 = 0$ buluruz. Bu denklemin kökü,

$$x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = \alpha$$

olduğundan buradan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$$

buluruz.

Şimdi Fibonacci ve Lucas sayılarının bazı özelliklerini verelim, (1-26).

$$1. \quad n \geq 1 \text{ için } F_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}},$$

$$2. \quad L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n,$$

3. $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$,
4. $L_{2n+1} = L_n L_{n+1} - (-1)^n$,
5. $5F_n = L_{n+1} + L_{n-1}$,
6. $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$,
7. $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$,
8. $F_{m+n} + (-1)^n F_{m-n} = F_m L_n$,
9. $F_{m+n} - (-1)^n F_{m-n} = F_n L_m$,
10. $\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1$,
11. $\sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - 3$,
12. $\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$ ve $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$,
13. $F_{kn+r} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} F_n^j F_{n-1}^{k-j} F_{r+j}$ ve $L_{kn+r} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} F_n^j F_{n-1}^{k-j} L_{r+j}$,
14. $\frac{m}{(m,n)} \equiv \frac{n}{(m,n)} \equiv 1 \pmod{2}$ ise $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$ ve $(L_m, L_n) = L_{(m,n)}$,
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{F_n} = \sqrt{5}$,
16. $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$,
17. $L_{-n} = (-1)^{n+1} L_n$,
18. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$,
19. $F_{2n} = F_n L_n$,
20. $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$,
21. $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$.

2.4. Teorem

Eğer a, b ; $a > b > 0$ olacak şekilde tamsayılar ise ve Euclid Algoritmasını kullanarak a ile b 'nin en büyük ortak bölenini n adımda hesaplamak gerekirse, o zaman $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ olmak üzere $b > \alpha^{n-1}$ 'dir, (1-6, 20).

İspat

$0 < r_1 < r_0$ olmak üzere $a = r_0, b = r_1$ olsun.

$$\begin{aligned} r_0 &= r_1 q_1 + r_2 & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2 q_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2 \\ r_2 &= r_3 q_3 + r_4 & 0 < r_4 < r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} &= r_n q_n & q_n \geq 2 \end{aligned}$$

Şimdi $r_n \geq 1$ ve $F_2 = 1$ olduğundan $r_n \geq F_2$ dir. $r_{n-1} \geq 2r_n \geq 2$ ve $F_3 = 2$ olduğundan $r_{n-1} \geq F_3$ dir.

Eğer $1 \leq j \leq n-2$ ise $r_j = r_{j+1} q_{j+1} + r_{j+2} \geq r_{j+1} + r_{j+2}$ dir. Bu durumda $r_{j+1} \geq F_{n+1-j}$ ve $r_{j+2} \geq F_{n-j}$ olup bu yüzden $r_j \geq F_{n+1-j} + F_{n-j}$ ise $r_j \geq F_{n+2-j}$. Özellikle $b = r_1 \geq F_{n+1}$ olup sonuçta $b > \alpha^{n-1}$ olur.

2.1. İkili Lineer Reküranslar

Fibonacci ve Lucas sayıları aşağıdaki gibi genelleştirilebilir: A ve B sıfırdan farklı $D = A^2 - 4B \neq 0$ olacak şekilde aralarında relatif asal tamsayılar olmak üzere,

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_n = Au_{n-1} - Bu_{n-2} \quad n \geq 2 \text{ için,}$$

$$v_0 = 2, \quad v_1 = A, \quad v_n = Av_{n-1} - Bv_{n-2} \quad n \geq 2 \text{ için}$$

şeklinde tanımlanan $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerini göz önüne alıyoruz.

Eğer $A = 1$, $B = -1$ olarak alınırsa $u_n = F_n$ yani n -inci Fibonacci Sayısı ve $v_n = L_n$ yani n -inci Lucas Sayısı olur.

$\alpha = \frac{1}{2}(A + \sqrt{D})$ ve $\beta = \frac{1}{2}(A - \sqrt{D})$ $t^2 - At + B = 0$ denleminin kökleridir. Bu durumda, $n \geq 0$ için

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{ve} \quad v_n = \alpha^n + \beta^n$$

olur.

Bu eşitlikler Binet formülleri olarak bilinirler. $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ ikili lineer reküranslar olarak bilinirler.

Daha önce yazdığımız Fibonacci ve Lucas sayılarının formülleri ikili lineer reküranslara genelleştirilebilir. Bunların bazılarını aşağıdaki gibi verebiliriz: (1-26).

$$1. \quad v_n^2 - Du_n^2 = 4B^n$$

$$2. \quad u_{2n} = u_n v_n$$

$$3. \quad v_{2n} = v_n^2 - 2B^n$$

$$4. \quad u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - Bu_n^2$$

$$5. \quad v_{2n+1} = v_n v_{n+1} - AB^n$$

$$6. \quad u_{n-1} u_{n+1} - u_n^2 = -B^{n-1}$$

$$7. \quad v_{n-1} v_{n+1} - v_n^2 = DB^{n-1}$$

$$8. \quad u_{m+n} + B^n u_{m-n} = u_m v_n$$

$$9. \quad u_{m+n} - B^n u_{m-n} = u_n v_m$$

$$10. \quad \alpha^n = \alpha u_n + B u_{n-1} \quad \text{ve} \quad \beta^n = \beta u_n + B u_{n-1}$$

$$11. \quad (u_m, u_n) = u_{(m,n)}$$

$$12. \quad \frac{m}{(m,n)} \equiv \frac{n}{(m,n)} \equiv 1 \pmod{2} \text{ ise } (v_m, v_n) = v_{(m,n)}$$

$$13. \quad \text{Eğer } B=1 \text{ ise } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & A \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Fibonacci ve Lucas sayılarından başka bazı ikili lineer reküranslar için aşağıdaki özel durumları göz önüne alabiliriz. Eğer $A = 3$, $B = 2$, $D = 1$ ise bu durumda $\alpha = 2$ ve $\beta = 1$ buluruz. Bununla beraber

$$u_n = 2^n - 1 \quad \text{ve} \quad v_n = 2^n + 1$$

olur. Burada $\{u_n\}$ Mersenne dizisi, $\{v_n\}$ Fermat dizisi olarak adlandırılır. f_n n -inci Fermat sayısını göstermek üzere

$$f_n = v_{2^n}$$

dir.

Eğer $A = 2$, $B = 1$, $D = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ise bu durumda $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ve $\beta = 1 - \sqrt{2}$ buluruz. Burada $\{u_n\}$ dizisi için,

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} \quad n \geq 2$$

olur. Bu dizi Pell dizisi olarak bilinir. Burada u_n n -inci Pell sayısı olarak adlandırılır.

$\{u_n\}$ dizisine benzer olarak,

$$v_0 = 2, v_1 = 2, v_n = 2v_{n-1} + v_{n-2} \quad n \geq 2$$

rekürans bağıntısının ürettiği dizi $\{v_n\}$ ile gösterilsin. Bu sayılar Pell-Lucas sayıları olarak adlandırılır.

3. FIBONACCI MATRİS DİZİLERİ

Bu bölümde geliştirilmiş $\{G_n\}$ Fibonacci dizisini kullanarak 2^k mertebeli geliştirilmiş Fibonacci matris dizisi $\{G_n^{(2^k)}\}$ ve onun özelliklerini inceleyeceğiz.

3.1. Teorem

$\{G_n\}$ geliştirilmiş Fibonacci dizisi olsun. O takdirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \gamma$$

dır. Burada $\gamma = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}$,dir.

İspat

$G_{n+1} = pG_n + G_{n-1}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{pG_n + G_{n-1}}{G_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(p + \frac{G_{n-1}}{G_n} \right) \\ &= p + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n-1}}{G_n} \\ &= p + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{G_n}{G_{n-1}}} \\ &= p + \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{G_{n-1}}} = p + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

olup, buradan $x = p + \frac{1}{x}$ yada $x^2 - px - 1 = 0$ buluruz.

Bu denklemin kökü,

$$x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2} = \gamma$$

olduğundan buradan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \gamma$$

buluruz.

3.2. Teorem

$\{G_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi ve

$$A = \begin{bmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A^n = \begin{bmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{bmatrix}$$

dir.

İspat

$G_{n+1} = pG_n + G_{n-1}$ olduğundan açık olarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz;

$$\begin{bmatrix} G_{n+1} \\ G_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_n \\ G_{n-1} \end{bmatrix}$$

Burada

$$A = \begin{bmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dersek, o zaman

$$A^n = \begin{bmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{bmatrix}$$

olduğunu tümevarım yöntemi ile gösterelim.

$n = 1$ için

$$A = \begin{bmatrix} G_2 & G_1 \\ G_1 & G_0 \end{bmatrix}$$

olup $\{G_n\}$ dizisinin tanımından $G_0 = 0$, $G_1 = 1$, $G_2 = p$ olduğundan

$$A = \begin{bmatrix} G_2 & G_1 \\ G_1 & G_0 \end{bmatrix}$$

dir.

$n = k$ için iddia doğru olsun. Dolayısıyla,

$$A^k = \begin{bmatrix} G_{k+1} & G_k \\ G_k & G_{k-1} \end{bmatrix}$$

olur.

$n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} G_{k+1} & G_k \\ G_k & G_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} pG_{k+1} + G_k & G_{k+1} \\ pG_k + G_{k-1} & G_k \end{bmatrix}$$

dir.

Genelleştirilmiş Fibonacci sayısının tanımından $G_{n+1} = pG_n + G_{n-1}$ olup

$$pG_{k+1} + G_k = G_{k+2}$$

$$pG_k + G_{k-1} = G_{k+1}$$

dir. Bulunan bu eşitlikleri yerine koyarsak,

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} G_{k+2} & G_{k+1} \\ G_{k+1} & G_k \end{bmatrix}$$

olup ispat tamamlanır.

3.1 $\{G_n^{(2^k)}\}$ Genelleştirilmiş Fibonacci Matris Dizisinin Oluşturulması

Genelleştirilmiş $\{G_n\}$ Fibonacci dizisinin yardımıyla 2^k mertebeli genelleştirilmiş

Fibonacci matris dizisi $\{G_n^{(2^k)}\}$ 'yi tanımlayacağız. 2 mertebeli $G_n^{(2)}$ matrisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$G_n^{(2)} = \begin{pmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 0 \text{ için})$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} p G_n^{(2)} + G_{n-1}^{(2)} &= p \begin{pmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_n & G_{n-1} \\ G_{n-1} & G_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G_{n+2} & G_{n+1} \\ G_{n+1} & G_n \end{pmatrix} \\ &= G_{n+1}^{(2)} \end{aligned}$$

olup buradan $\{G_n^{(2)}\}$ genelleştirilmiş Fibonacci matris dizisini elde edeceğiz. O halde bu dizi aşağıdaki rekürans bağıntısını sağlar.

$$G_{n+1}^{(2)} = p G_n^{(2)} + G_{n-1}^{(2)} \quad (n \geq 0 \text{ için}) \quad [3.1]$$

Burada,

$$G_0^{(2)} = \begin{pmatrix} G_1 & G_0 \\ G_0 & G_{-1} \end{pmatrix} \quad G_1^{(2)} = \begin{pmatrix} G_2 & G_1 \\ G_1 & G_0 \end{pmatrix}$$

olup Eş. 3.1 dizinin elemanlarını geriye doğru genişletmek için kullanılabilir. Yani,

$$G_{-1}^{(2)} = G_1^{(2)} - p G_0^{(2)}, \quad G_{-2}^{(2)} = G_0^{(2)} - p G_{-1}^{(2)}, \quad \dots, \quad G_{-(n+1)}^{(2)} = G_{-(n-1)}^{(2)} - p G_{-n}^{(2)} \quad (n \geq 0)$$

Böylece,

$$G_{-1}^{(2)} = \begin{pmatrix} G_0 & G_{-1} \\ G_{-1} & G_{-2} \end{pmatrix} \quad G_{-2}^{(2)} = \begin{pmatrix} G_{-1} & G_{-2} \\ G_{-2} & G_{-3} \end{pmatrix}, \dots,$$

dir. Genel olarak,

$$G_{-n}^{(2)} = \begin{pmatrix} G_{-(n-1)} & G_{-n} \\ G_{-n} & G_{-(n+1)} \end{pmatrix} \quad (n \geq 0)$$

Şimdi ise 4 mertebeli genelleştirilmiş Fibonacci matrisi $G_n^{(4)}$ aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$G_n^{(4)} = \begin{pmatrix} G_{n+1}^{(2)} & G_n^{(2)} \\ G_n^{(2)} & G_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (n \geq 0)$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
 p \ G_n^{(4)} + G_{n-1}^{(4)} &= p \begin{pmatrix} G_{n+1}^{(2)} & G_n^{(2)} \\ G_n^{(2)} & G_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_n^{(2)} & G_{n-1}^{(2)} \\ G_{n-1}^{(2)} & G_{n-2}^{(2)} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} G_{n+2}^{(2)} & G_{n+1}^{(2)} \\ G_{n+1}^{(2)} & G_n^{(2)} \end{pmatrix} \\
 &= G_{n+1}^{(4)}
 \end{aligned}$$

olup buradan 4 mertebeli $\{G_n^{(4)}\}$ genelleştirilmiş Fibonacci matris dizisini elde edeceğiz. Bu dizi aşağıdaki rekürans bağıntısını sağlar.

$$G_{n+1}^{(4)} = p \ G_n^{(4)} + G_{n-1}^{(4)} \quad (n \geq 0) \quad [3.2]$$

Burada

$$G_0^{(4)} = \begin{pmatrix} G_1^{(2)} & G_0^{(2)} \\ G_0^{(2)} & G_{-1}^{(2)} \end{pmatrix} \quad G_1^{(4)} = \begin{pmatrix} G_2^{(2)} & G_1^{(2)} \\ G_1^{(2)} & G_0^{(2)} \end{pmatrix}$$

olup Eş. 3.2 dizinin terimlerini geriye doğru genişletmek için kullanılabilir. Yani,

$$G_{-1}^{(4)} = G_1^{(4)} - p \ G_0^{(2)}, \ G_{-2}^{(4)} = G_0^{(4)} - p \ G_{-1}^{(2)}, \dots, \ G_{-(n+1)}^{(4)} = G_{-(n-1)}^{(4)} - p \ G_{-n}^{(2)} \quad (n \geq 0)$$

Böylece

$$G_{-1}^{(4)} = \begin{pmatrix} G_0^{(2)} & G_{-1}^{(2)} \\ G_{-1}^{(2)} & G_{-2}^{(2)} \end{pmatrix} \quad G_{-2}^{(4)} = \begin{pmatrix} G_{-1}^{(2)} & G_{-2}^{(2)} \\ G_{-2}^{(2)} & G_{-3}^{(2)} \end{pmatrix}, \dots,$$

dir. Genel olarak,

$$G_{-n}^{(4)} = \begin{pmatrix} G_{-(n-1)}^{(2)} & G_{-n}^{(2)} \\ G_{-n}^{(2)} & G_{-(n+1)}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (n \geq 0)$$

Böylece 2^k mertebeli $G_n^{(2^k)}$ genelleştirilmiş Fibonacci matrisi bir bloklara ayrılmış matristir. Yani,

$$G_n^{(2^k)} = \begin{pmatrix} G_{n+1}^{(2^{k-1})} & G_n^{(2^{k-1})} \\ G_n^{(2^{k-1})} & G_{n-1}^{(2^{k-1})} \end{pmatrix} \quad (n \geq 0, k \geq 1)$$

ve

$$\begin{aligned} p G_n^{(2^k)} + G_{n-1}^{(2^k)} &= p \begin{pmatrix} G_{n+1}^{(2^{k-1})} & G_n^{(2^{k-1})} \\ G_n^{(2^{k-1})} & G_{n-1}^{(2^{k-1})} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_n^{(2^{k-1})} & G_{n-1}^{(2^{k-1})} \\ G_{n-1}^{(2^{k-1})} & G_{n-2}^{(2^{k-1})} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G_{n+2}^{(2^{k-1})} & G_{n+1}^{(2^{k-1})} \\ G_{n+1}^{(2^{k-1})} & G_n^{(2^{k-1})} \end{pmatrix} \\ &= G_{n+1}^{(2^k)} \end{aligned}$$

dir.

Buradan 2^k mertebeli $\{G_n^{(2^k)}\}$ genelleştirilmiş Fibonacci matris dizisini elde edeceğiz. Bu dizi aşağıdaki rekürans bağıntısı ile tanımlıdır.

$$G_{n+1}^{(2^k)} = p G_n^{(2^k)} + G_{n-1}^{(2^k)} \quad (n \geq 0, k \geq 1) \quad [3.3]$$

ve

$$G_0^{(2^k)} = \begin{pmatrix} G_1^{(2^{k-1})} & G_0^{(2^{k-1})} \\ G_0^{(2^{k-1})} & G_{-1}^{(2^{k-1})} \end{pmatrix} \quad G_1^{(2^k)} = \begin{pmatrix} G_2^{(2^{k-1})} & G_1^{(2^{k-1})} \\ G_1^{(2^{k-1})} & G_0^{(2^{k-1})} \end{pmatrix}$$

olup Eş. 3.3 dizinin terimlerini geriye doğru genişletmek için kullanılabilir.

$$G_{-1}^{(2^k)} = G_1^{(2^k)} - p G_0^{(2^k)}, G_{-2}^{(2^k)} = G_0^{(2^k)} - p G_{-1}^{(2^k)}, \dots, G_{-(n+1)}^{(2^k)} = G_{-(n-1)}^{(2^k)} - p G_{-n}^{(2^k)} \quad (n \geq 0, k \geq 1)$$

Böylece

$$G_{-1}^{(2^k)} = \begin{pmatrix} G_0^{(2^{k-1})} & G_{-1}^{(2^{k-1})} \\ G_{-1}^{(2^{k-1})} & G_{-2}^{(2^{k-1})} \end{pmatrix} \quad G_{-2}^{(2^k)} = \begin{pmatrix} G_{-1}^{(2^{k-1})} & G_{-2}^{(2^{k-1})} \\ G_{-2}^{(2^{k-1})} & G_{-3}^{(2^{k-1})} \end{pmatrix}, \dots,$$

olup genel olarak,

$$G_{-n}^{(2^k)} = \begin{pmatrix} G_{-(n-1)}^{(2^{k-1})} & G_{-n}^{(2^{k-1})} \\ G_{-n}^{(2^{k-1})} & G_{-(n+1)}^{(2^{k-1})} \end{pmatrix} \quad (n \geq 0, k \geq 1) \quad [3.4]$$

Biz $\{G_n^{(2^k)}\}$ matris dizisinin özel durumlarını göz önüne alacağız. Bunlar,

1. $p = 1, a = 0, b = 1$ olduğunda 2^k mertebeli $\{F_n^{(2^k)}\}$ Fibonacci matris dizisidir.
2. $p = 1, a = 2, b = 1$ olduğunda 2^k mertebeli $\{L_n^{(2^k)}\}$ Lucas matris dizisidir.
3. $p = 2, a = 0, b = 1$ olduğunda 2^k mertebeli $\{P_n^{(2^k)}\}$ Pell matris dizisidir.
4. $p = 2, a = 1, b = 1$ olduğunda 2^k mertebeli $\{Q_n^{(2^k)}\}$ Modify Pell matris dizisidir.
5. $p = 2, a = 2, b = 2$ olduğunda 2^k mertebeli $\{Q_n^{(2^k)}\}$ Pell-Lucas matris dizisidir.

Şimdi Eş. 1.2 ve Eş. 3.4'ü kullanarak 2^k mertebeli $\{G_n^{(2^k)}\}$ genelleştirilmiş Fibonacci matris dizisinin bir temel özelliğini elde edeceğiz.

3.3. Teorem

$\{G_n^{(2^k)}\}$, 2^k mertebeli genelleştirilmiş Fibonacci matris dizisi aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$1. \quad G_0 = a = 0 \text{ ise } G_{-n}^{(2^k)} = (-1)^{n+1} E_{2^k} G_n^{(2^k)} E_{2^k} \quad [3.5]$$

$$2. \quad G_0 = a \neq 0 \text{ ise } G_{-n}^{(2^k)} = (-1)^n E_{2^k} G_n^{(2^k)} E_{2^k} \quad [3.6]$$

Burada,

$$E_{2^k} = \begin{pmatrix} 0_{2^{k-1}} & E_{2^{k-1}} \\ -E_{2^{k-1}} & 0_{2^{k-1}} \end{pmatrix}$$

ve $k = 1$ için

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $0_{2^{k-1}}$, 2^{k-1} mertebeli sıfır matrisidir.

İspat

Eş. 3.5'i tümevarım ile göstereceğiz.

Eğer $k = 1$ ve $G_0 = a = 0$ ise,

$$\begin{aligned} G_{-n}^{(2)} &= \begin{pmatrix} G_{-(n-1)} & G_{-n} \\ G_{-n} & G_{-(n+1)} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} -G_{n-1} & G_n \\ G_n & -G_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= (-1)^{n+1} E_2 G_n^{(2)} E_2 \end{aligned}$$

Böylece $k = 1$ için iddia doğrudur.

$k = 2$ iken,

$$\begin{aligned} G_{-n}^{(4)} &= \begin{pmatrix} G_{-(n-1)}^{(2)} & G_{-n}^{(2)} \\ G_{-n}^{(2)} & G_{-(n+1)}^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} -E_2 G_{n-1}^{(2)} E_2 & E_2 G_n^{(2)} E_2 \\ E_2 G_n^{(2)} E_2 & -E_2 G_{n+1}^{(2)} E_2 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} \left[\begin{pmatrix} 0_2 & E_2 \\ -E_2 & 0_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n+1}^{(2)} & G_n^{(2)} \\ G_n^{(2)} & G_{n-1}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_2 & E_2 \\ -E_2 & 0_2 \end{pmatrix} \right] \\ &= (-1)^{n+1} E_4 G_n^{(4)} E_4 \\ E_4 &= \begin{pmatrix} 0_2 & E_2 \\ -E_2 & 0_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

O halde $k = 2$ iken iddia doğrudur.

Eş. 3.5'in $k = m - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim ve $k = m$ için doğru olduğunu ispatlayalım.

$k = m - 1$ için doğru ise,

$$\begin{aligned}
 G_{-n}^{(2^{m-1})} &= (-1)^{n+1} E_{2^{m-1}} G_n^{(2^{m-1})} E_{2^{m-1}} \\
 G_{-n}^{(2^m)} &= \begin{pmatrix} G_{-(n-1)}^{(2^{m-1})} & G_{-n}^{(2^{m-1})} \\ G_{-n}^{(2^{m-1})} & G_{-(n+1)}^{(2^{m-1})} \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} -E_{2^{m-1}} G_{n-1}^{(2^{m-1})} E_{2^{m-1}} & E_{2^{m-1}} G_n^{(2^{m-1})} E_{2^{m-1}} \\ E_{2^{m-1}} G_n^{(2^{m-1})} E_{2^{m-1}} & -E_{2^{m-1}} G_{n+1}^{(2^{m-1})} E_{2^{m-1}} \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{n+1} \left[\begin{pmatrix} 0_{2^{m-1}} & E_{2^{m-1}} \\ -E_{2^{m-1}} & 0_{2^{m-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n+1}^{(2^{m-1})} & G_n^{(2^{m-1})} \\ G_n^{(2^{m-1})} & G_{n-1}^{(2^{m-1})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{2^{m-1}} & E_{2^{m-1}} \\ -E_{2^{m-1}} & 0_{2^{m-1}} \end{pmatrix} \right] \\
 &= (-1)^{n+1} E_{2^m} G_n^{(2^m)} E_{2^m} \\
 E_{2^m} &= \begin{pmatrix} 0_{2^{m-1}} & E_{2^{m-1}} \\ -E_{2^{m-1}} & 0_{2^{m-1}} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

O halde $k = m$ iken iddia doğrudur.

Eş. 3.6'de benzer şekilde ispatlanabilir.

3.1. Sonuç

$\{F_n\}$, Fibonacci dizisi ve

$$E_{2^m} = \begin{pmatrix} 0_{2^{m-1}} & E_{2^{m-1}} \\ -E_{2^{m-1}} & 0_{2^{m-1}} \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$F_{-n}^{(2^k)} = (-1)^{n+1} E_{2^k} F_n^{(2^k)} E_{2^k}$$

dir.

İspat

Eş. 3.5’de $G_{-n} = F_{-n}$, $p = 1$, $a = 0$ ve $b = 1$ alınarak ispat hemen görülür.

3.2. Sonuç

$\{L_n\}$, Lucas dizisi ve

$$E_{2^m} = \begin{pmatrix} 0_{2^{m-1}} & E_{2^{m-1}} \\ -E_{2^{m-1}} & 0_{2^{m-1}} \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$L_{-n}^{(2^k)} = (-1)^n E_{2^k} L_n^{(2^k)} E_{2^k}$$

dir.

İspat

Eş. 3.6’de $G_{-n} = L_{-n}$, $p = 1$, $a = 2$ ve $b = 1$ alınarak ispat hemen görülür.

3.3. Sonuç

$\{P_n\}$, Pell dizisi ve

$$E_{2^m} = \begin{pmatrix} 0_{2^{m-1}} & E_{2^{m-1}} \\ -E_{2^{m-1}} & 0_{2^{m-1}} \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$P_{-n}^{(2^k)} = (-1)^{n+1} E_{2^k} P_n^{(2^k)} E_{2^k}$$

dir.

İspat

Eş. 3.5’de $G_{-n} = P_{-n}$, $p = 2$, $a = 0$ ve $b = 1$ alınarak ispat kolayca görülür.

3.4. Sonuç

$\{q_n\}$, Modify Pell dizisi ve

$$E_{2^m} = \begin{pmatrix} 0_{2^{m-1}} & E_{2^{m-1}} \\ -E_{2^{m-1}} & 0_{2^{m-1}} \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$q_{-n}^{(2^k)} = (-1)^{n+1} E_{2^k} q_n^{(2^k)} E_{2^k}$$

dir.

İspat

Eş. 3.5’de $G_{-n} = q_{-n}$, $p = 2$, $a = 1$ ve $b = 1$ alınarak ispat tamamlanır.

3.5. Sonuç

$\{Q_n\}$, Pell-Lucas dizisi ve

$$E_{2^m} = \begin{pmatrix} 0_{2^{m-1}} & E_{2^{m-1}} \\ -E_{2^{m-1}} & 0_{2^{m-1}} \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$Q_{-n}^{(2^k)} = (-1)^n E_{2^k} Q_n^{(2^k)} E_{2^k}$$

dir.

İspat

Eş. 3.6'de $G_{-n} = Q_{-n}$, $p = 2$, $a = 2$ ve $b = 2$ alınarak ispat tamamlanır.

.

3.4. Teorem

$\{G_n^{(2^k)}\}$ dizisi için aşağıdaki toplam formülü geçerlidir.

$$\sum_{i=1}^n G_i^{(2^k)} = \frac{1}{p} (G_n^{(2^k)} + G_{n+1}^{(2^k)} - G_0^{(2^k)} - G_1^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1) \quad [3.7]$$

İspat

Gerçekten

$$\begin{aligned} p \sum_{i=1}^n G_i^{(2^k)} &= \sum_{i=2}^{n+1} G_i^{(2^k)} - \sum_{i=0}^{n-1} G_i^{(2^k)} \\ &= G_2^{(2^k)} + G_3^{(2^k)} + \dots + G_{n+1}^{(2^k)} - G_0^{(2^k)} - G_1^{(2^k)} - G_2^{(2^k)} - \dots - G_{n-1}^{(2^k)} \\ &= G_n^{(2^k)} + G_{n+1}^{(2^k)} - G_0^{(2^k)} - G_1^{(2^k)} \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$\sum_{i=1}^n G_i^{(2^k)} = \frac{1}{p} (G_n^{(2^k)} + G_{n+1}^{(2^k)} - G_0^{(2^k)} - G_1^{(2^k)})$$

olduğu kolayca görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.6. Sonuç

$\{F_n\}$, Fibonacci dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n F_i^{(2^k)} = F_{n+2}^{(2^k)} - F_2^{(2^k)} \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 3.7’de $p = 1$, $a = 0$ ve $b = 1$ alınarak ispat kolayca elde edilir.

3.7. Sonuç

$\{L_n\}$, Lucas dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n L_i^{(2^k)} = L_{n+2}^{(2^k)} - L_2^{(2^k)} \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 3.7’de $p = 1$, $a = 2$ ve $b = 1$ alınarak ispatlanabilir.

3.8. Sonuç

$\{P_n\}$, Pell dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n P_i^{(2^k)} = \frac{1}{2} (P_n^{(2^k)} + P_{n+1}^{(2^k)} - P_0^{(2^k)} - P_1^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 3.7’de $p = 2$, $a = 0$ ve $b = 1$ alınarak ispat kolayca elde edilir.

3.9. Sonuç

$\{q_n\}$, Modify Pell dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n q_i^{(2^k)} = \frac{1}{2} (q_n^{(2^k)} + q_{n+1}^{(2^k)} - q_0^{(2^k)} - q_1^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

dir.

İspat

Eş. 3.7’de $p = 2$, $a = 1$ ve $b = 1$ alınarak ispatlanabilir.

3.10. Sonuç

$\{Q_n\}$, Pell-Lucas dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n Q_i^{(2^k)} = \frac{1}{2} (Q_n^{(2^k)} + Q_{n+1}^{(2^k)} - Q_0^{(2^k)} - Q_1^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

dir.

İspat

Eş. 3.7’de $p = 2$, $a = 2$ ve $b = 2$ alınarak ispat hemen görülür.

3.5. Teorem

$$G_n^{(2^{k+1})} = G_1^{(2^{k+1})} \begin{pmatrix} pI_{2^k} & I_{2^k} \\ I_{2^k} & 0_{2^k} \end{pmatrix}^{n-1} \quad (n \geq 1, k \geq 1) \quad [3.8]$$

dir. Burada I_{2^k} ; 2^k mertebeli birim matris, 0_{2^k} ; 2^k mertebeli sıfır matrisidir.

İspat

$$\begin{aligned} G_n^{(2^{k+1})} &= \begin{pmatrix} G_{n+1}^{(2^{k-1})} & G_n^{(2^{k-1})} \\ G_n^{(2^{k-1})} & G_{n-1}^{(2^{k-1})} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G_n^{(2^{k-1})} & G_{n-1}^{(2^{k-1})} \\ G_{n-1}^{(2^{k-1})} & G_{n-2}^{(2^{k-1})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} pI_{2^k} & I_{2^k} \\ I_{2^k} & 0_{2^k} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ &= \begin{pmatrix} G_4^{(2^{k-1})} & G_3^{(2^{k-1})} \\ G_3^{(2^{k-1})} & G_2^{(2^{k-1})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} pI_{2^k} & I_{2^k} \\ I_{2^k} & 0_{2^k} \end{pmatrix}^{n-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} G_3^{(2^{k-1})} & G_2^{(2^{k-1})} \\ G_2^{(2^{k-1})} & G_1^{(2^{k-1})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} pI_{2^k} & I_{2^k} \\ I_{2^k} & 0_{2^k} \end{pmatrix}^{n-2} \\
&= G_1^{(2^{k+1})} \begin{pmatrix} pI_{2^k} & I_{2^k} \\ I_{2^k} & 0_{2^k} \end{pmatrix}^{n-1}
\end{aligned}$$

yazarız. Böylece istenilen gösterilmiş olur.

3.11. Sonuç

$\{F_n\}$, Fibonacci dizisi olmak üzere,

$$F_n^{(2^{k+1})} = F_1^{(2^{k+1})} \begin{pmatrix} I_{2^k} & I_{2^k} \\ I_{2^k} & 0_{2^k} \end{pmatrix}^{n-1} \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 3.8'de $p = 1$, $a = 0$ ve $b = 1$ alınarak ispat elde edilir.

3.12. Sonuç

$\{L_n\}$, Lucas dizisi olmak üzere,

$$L_n^{(2^{k+1})} = L_1^{(2^{k+1})} \begin{pmatrix} I_{2^k} & I_{2^k} \\ I_{2^k} & 0_{2^k} \end{pmatrix}^{n-1} \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

dir.

İspat

Eş. 3.8'de $p = 1$, $a = 2$ ve $b = 1$ alınarak ispat hemen görülür.

3.13. Sonuç

$\{P_n\}$, Pell dizisi olmak üzere,

$$P_n^{(2^{k+1})} = P_1^{(2^{k+1})} \begin{pmatrix} 2I_{2^k} & I_{2^k} \\ I_{2^k} & 0_{2^k} \end{pmatrix}^{n-1} \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 3.8'de $p = 2$, $a = 0$ ve $b = 1$ alınarak ispatlanabilir.

3.14. Sonuç

$\{q_n\}$, Modify Pell dizisi olmak üzere,

$$q_n^{(2^{k+1})} = q_1^{(2^{k+1})} \begin{pmatrix} 2I_{2^k} & I_{2^k} \\ I_{2^k} & 0_{2^k} \end{pmatrix}^{n-1} \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

dir.

İspat

Eş. 3.8'de $p = 2$, $a = 1$ ve $b = 1$ alınarak ispatlanabilir.

3.15. Sonuç

$\{Q_n\}$, Pell-Lucas dizisi olmak üzere,

$$Q_n^{(2^{k+1})} = Q_1^{(2^{k+1})} \begin{pmatrix} 2I_{2^k} & I_{2^k} \\ I_{2^k} & 0_{2^k} \end{pmatrix}^{n-1} \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

dir.

İspat

Eş. 3.8’de $p = 2$, $a = 2$ ve $b = 2$ alınarak ispat hemen görülür.

3.6. Teorem

$$\sum_{i=1}^n G_{2i-1}^{(2^k)} = \frac{1}{p} (G_{2n}^{(2^k)} - G_0^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1) \quad [3.9]$$

İspat

$$\begin{aligned} p \sum_{i=1}^n G_{2i-1}^{(2^k)} &= \sum_{i=1}^n G_{2i}^{(2^k)} - \sum_{i=1}^n G_{2i-2}^{(2^k)} \\ &= \sum_{i=1}^n G_{2i}^{(2^k)} - \sum_{i=0}^{n-1} G_{2i}^{(2^k)} \\ &= G_2^{(2^k)} + G_4^{(2^k)} + \dots + G_{2(n-1)}^{(2^k)} + G_{2n}^{(2^k)} - G_0^{(2^k)} - G_2^{(2^k)} - G_4^{(2^k)} - \dots - G_{2(n-2)}^{(2^k)} - G_{2(n-1)}^{(2^k)} \\ &= G_{2n}^{(2^k)} - G_0^{(2^k)} \end{aligned}$$

yazarız. Böylece

$$\sum_{i=1}^n G_{2i-1}^{(2^k)} = \frac{1}{p} (G_{2n}^{(2^k)} - G_0^{(2^k)})$$

eşitliğini elde ederiz.

3.16. Sonuç

$\{F_n\}$, Fibonacci dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n F_{2i-1}^{(2^k)} = F_{2n}^{(2^k)} - F_0^{(2^k)} \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 3.9'de $p = 1$, $a = 0$ ve $b = 1$ alınarak ispatlanabilir.

3.17. Sonuç

$\{L_n\}$, Lucas dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n L_{2i-1}^{(2^k)} = L_{2n}^{(2^k)} - L_0^{(2^k)} \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 3.9'de $p = 1$, $a = 2$ ve $b = 1$ alınarak ispat hemen görülür.

3.18. Sonuç

$\{P_n\}$, Pell dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n P_{2i-1}^{(2^k)} = \frac{1}{2} (P_{2n}^{(2^k)} - P_0^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 3.9'de $p = 2$, $a = 0$ ve $b = 1$ alınarak ispatlanabilir.

3.19. Sonuç

$\{q_n\}$, Modify Pell dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n q_{2i-1}^{(2^k)} = \frac{1}{2} (q_{2n}^{(2^k)} - q_0^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

İspat

Eş. 3.9'de $p = 2$, $a = 1$ ve $b = 1$ alınarak ispat kolayca görülür.

3.20. Sonuç

$\{Q_n\}$, Pell-Lucas dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n Q_{2i-1}^{(2^k)} = \frac{1}{2} (Q_{2n}^{(2^k)} - Q_0^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

İspat

Eş. 3.9'de $p = 2$, $a = 2$ ve $b = 2$ alınarak ispatlanabilir.

3.7. Teorem

$$\sum_{i=1}^n G_{2i}^{(2^k)} = \frac{1}{p} (G_{2n+1}^{(2^k)} - G_1^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1) \quad [3.10]$$

İspat

$$\begin{aligned} p \sum_{i=1}^n G_{2i}^{(2^k)} &= \sum_{i=1}^n G_{2i+1}^{(2^k)} - \sum_{i=1}^n G_{2i-1}^{(2^k)} \\ &= \sum_{i=1}^n G_{2i+1}^{(2^k)} - \sum_{i=0}^{n-1} G_{2i+1}^{(2^k)} \\ &= G_3^{(2^k)} + G_5^{(2^k)} + \dots + G_{2(n-1)+1}^{(2^k)} + G_{2n+1}^{(2^k)} - G_1^{(2^k)} - G_3^{(2^k)} - G_5^{(2^k)} - \dots - G_{2(n-1)+1}^{(2^k)} \\ &= G_{2n+1}^{(2^k)} - G_1^{(2^k)} \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

Buradan

$$\sum_{i=1}^n G_{2i}^{(2^k)} = \frac{1}{p} (G_{2n+1}^{(2^k)} - G_1^{(2^k)})$$

olduğu görülür.

3.21. Sonuç

$\{F_n\}$, Fibonacci dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n F_{2i}^{(2^k)} = F_{2n+1}^{(2^k)} - F_1^{(2^k)} \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

İspat

Eş. 3.10'de $p = 1$, $a = 0$ ve $b = 1$ alınarak ispatlanabilir.

3.22. Sonuç

$\{L_n\}$, Lucas dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n L_{2i}^{(2^k)} = L_{2n+1}^{(2^k)} - L_1^{(2^k)} \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

İspat

Eş. 3.10'de $p = 1$, $a = 2$ ve $b = 1$ alınarak ispatlanabilir.

3.23. Sonuç

$\{P_n\}$, Pell dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n P_{2i}^{(2^k)} = \frac{1}{2} (P_{2n+1}^{(2^k)} - P_1^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

İspat

Eş. 3.10'de $p = 2$, $a = 0$ ve $b = 1$ alınarak ispat hemen görülür.

3.24. Sonuç

$\{q_n\}$, Modify Pell dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n q_{2i}^{(2^k)} = \frac{1}{2} (q_{2n+1}^{(2^k)} - q_1^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

İspat

Eş. 3.10'de $p = 2$, $a = 1$ ve $b = 1$ alınarak ispat kolayca görülür.

3.25. Sonuç

$\{Q_n\}$, Pell-Lucas dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n Q_{2i}^{(2^k)} = \frac{1}{2} (Q_{2n+1}^{(2^k)} - Q_1^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

İspat

Eş. 3.10'de $p = 2$, $a = 2$ ve $b = 2$ alınarak ispat hemen görülür.

3.8. Teorem

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i G_i^{(2^k)} = \frac{1}{p} (G_{2n+1}^{(2^k)} - G_{2n}^{(2^k)} - G_1^{(2^k)} + G_0^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1) \quad [3.11]$$

İspat

Daha önce bulduğumuz,

$$\sum_{i=1}^n G_{2i}^{(2^k)} = \frac{1}{p} (G_{2n+1}^{(2^k)} - G_1^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

$$\sum_{i=1}^n G_{2i-1}^{(2^k)} = \frac{1}{p} (G_{2n}^{(2^k)} - G_0^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

eşitliklerini kullanalım.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i G_i^{(2^k)} &= -G_1^{(2^k)} + G_2^{(2^k)} - G_3^{(2^k)} + G_4^{(2^k)} - \dots + (-1)^{2n} G_{2n}^{(2^k)} \\
 &= \sum_{i=1}^n G_{2i}^{(2^k)} - \sum_{i=1}^n G_{2i-1}^{(2^k)} \\
 &= \frac{1}{p} (G_{2n+1}^{(2^k)} - G_1^{(2^k)}) - \frac{1}{p} (G_{2n}^{(2^k)} + G_0^{(2^k)}) \\
 &= \frac{1}{p} (G_{2n+1}^{(2^k)} - G_{2n}^{(2^k)} - G_1^{(2^k)} + G_0^{(2^k)})
 \end{aligned}$$

yazarız.

Böylece

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i G_i^{(2^k)} = \frac{1}{p} (G_{2n+1}^{(2^k)} - G_{2n}^{(2^k)} - G_1^{(2^k)} + G_0^{(2^k)})$$

eşitliğini elde ederiz ki bu da ispatımızı tamamlar.

3.26. Sonuç

$\{F_n\}$, Fibonacci dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i F_i^{(2^k)} = F_{2n-1}^{(2^k)} - F_1^{(2^k)} + F_0^{(2^k)} \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

İspat

Eş. 3.11'de $p = 1$, $a = 0$ ve $b = 1$ alınarak ispat hemen görülür.

3.27. Sonuç

$\{L_n\}$, Lucas dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i L_i^{(2^k)} = L_{2n-1}^{(2^k)} - L_1^{(2^k)} + L_0^{(2^k)} \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

İspat

Eş. 3.11’de $p = 1$, $a = 2$ ve $b = 1$ alınarak ispatlanabilir.

3.28. Sonuç

$\{P_n\}$, Pell dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i P_i^{(2^k)} = \frac{1}{2} (P_{2n+1}^{(2^k)} - P_{2n}^{(2^k)} - P_1^{(2^k)} + P_0^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

İspat

Eş. 3.11’de $p = 2$, $a = 0$ ve $b = 1$ alınarak ispat kolayca görülür.

3.29. Sonuç

$\{q_n\}$, Modify Pell dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i q_i^{(2^k)} = \frac{1}{2} (q_{2n+1}^{(2^k)} - q_{2n}^{(2^k)} - q_1^{(2^k)} + q_0^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

İspat

Eş. 3.11’de $p = 2$, $a = 1$ ve $b = 1$ alınarak ispatlanabilir.

3.30. Sonuç

$\{Q_n\}$, Pell-Lucas dizisi olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i Q_i^{(2^k)} = \frac{1}{2} (Q_{2n+1}^{(2^k)} - Q_{2n}^{(2^k)} - Q_1^{(2^k)} + Q_0^{(2^k)}) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

İspat

Eş. 3.11’de $p = 2$, $a = 2$ ve $b = 2$ alınarak ispat hemen görülür.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada $\{W_n\}$ dizisinin özel durumu olan $\{G_n\}$ genelleştirilmiş Fibonacci dizisi göz önüne alınarak $\{G_n^{(2^k)}\}$ genelleştirilmiş Fibonacci matris dizisi elde edildi. Benzer düşünce ile $\{W_n\}$ dizisi kullanılarak yeni matris dizilerinin oluşturulması ile ilgili yeni çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Horadam, A. F., "Associated Sequences of General Order.", *The Fibonacci Quart.*, 31.(2): 166- 172 (1993).
2. Vajda, S., "Fibonacci & Lucas Numbers and the Golden Section", Theory and appilicatlons, *Ellis Horwood Ltd*, Chichester, Newyork, (1989).
3. Dazheng, L., "Fibonacci Matrix.", *The Fibonacci Quart.*, 37(1): 14-20 (1999).
4. Robins, N., "Beginning Number Theory. ", *C. Brown Communications*, Inc (1993).
5. Hoggatt, V. E., "Fibonacci And Lucas Numbers", Boston Houghton-Mifflin. (1969).
6. Vorob'yev, N. N., "Fibonacci Numbers", New York, Blaisdell. (1961).
7. Walton, J. E. and Horadam, A.F., "Some properties of certain generalized Fibonacci matrices", *The Fibonacci Quart.*, 9 (3): 264-276 (1971).
8. Robinson, D. W. "The Fibonacci matrix modulo", *The Fibonacci Quart.*, 1 (2): 29-36 (1963).
9. Gluv starcprime, V. V., "A Fibonacci matrix". (Russian) *Izv. Severo-Kavkaz. Nauv cn. Centra Vysv Skoly Ser. Estestv. Nauk.*, 3: 16-17, 116 (1976).
10. Flipponi P., "Waring's formula, the binomial formula, and generalized Fibonacci matrices". *The Fibonacci Quart*, 30 (3): 225-231 (1992).
11. Silva, A. and Hoggatt, V. E. Jr., "Generalized Fibonacci numbers". *The Fibonacci Quart.*, 18 (4): 290-300 (1980).
12. Miller, M. D., "Mathematical Notes: On Generalized Fibonacci numbers". *Amer. Math. Monthly*, 78 (1): 1108-1109 (1971).
13. Iyer, M. R., "Identities involving generalized Fibonacci numbers", *The Fibonacci Quart.*, 7: 66-72 (1969).
14. Ferguson, D. E., "An expression for generalized Fibonacci numbers", *The Fibonacci Quart.*, 4: 270-273 (1966).
15. Miles, E. P., Jr., "Generalized Fibonacci numbers and associated matrices", *Amer. Math. Monthly*, 67: 745-752 (1960).

16. Lee, J. Z. And Lee, J.-S., "A note on the generalized Fibonacci numbers", *The Fibonacci Quart.*, 26 (1): 14-19 (1988).
17. Antoniadis, J. A., "Generalized Fibonacci numbers and some Diophantine equations", *The Fibonacci Quart.*, 23 (3): 199-213 (1985).
18. Shannon, A. G., "Some asymptotic properties of generalized Fibonacci numbers", *The Fibonacci Quart.*, 22 (3): 239-243 (1984).
19. Kalman, D., "Generalized Fibonacci numbers by matrix methods", *The Fibonacci Quart.*, 20 (1): 73-76 (1982).
20. Zhao, F. -Z. and Wang, T., "Some identities involving the powers of generalized Fibonacci numbers", *The Fibonacci Quart.*, 41 (1): 7-12 (2003).
21. Eugeni, F. and Mascella, R., "A note on generalized Fibonacci numbers", *J. Discrete Math. Sci. Cryptography*, 4 (1): 33-45 (2001).
22. Shannon, A. G. and Horadam, A. F., "Generalized Pell numbers and polynomials", *Applications of Fibonacci number.*, 9: 213-224 (2004).
23. Kiss, P. and Varnai, F., "On Generalized Pell numbers", *Math. Sem. Notes Kobe Univ.*, 6 (2): 259-267 (1978).
24. Danan, F. M., "Properties of a class of numbers related to the Fibonacci, Lucas and Pell numbers", *Proceedings of the Sixth International Conference on Difference Equations*, 399-406, CRC, Boca Raton, FL, (2004).
25. Melham, R., "Sums involving Fibonacci and Pell numbers", *Portugal. Math.*, 56 (3): 309-317 (1999).
26. Horadam, A. F., "Applications of modified Pell numbers to representations", *Ulam Quart.*, 3 (1): 20 (1995).

ÖZGEÇMİŞ

22.06.1979 tarihinde Konya’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara’da tamamladı. 1998 yılında Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde başladığı lisans eğitimini 2003 yılında tamamladı. Yüksek lisans programına Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana bilim dalında 2003 yılında başladı.