İçindekiler

PARALEL REGLE YÜZEYLERDE
ANİ HIZLAR

Gönül AYDIN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
2005

THE INSTANTENOUS VELOCITY ON THE PARALLEL RULED SURFACES

Gönül AYDIN

Department of Mathematics

Thesis for Master Degree

2005

PARALEL REGLE YÜZEYLERDE ANİ HIZLAR

Gönül AYDIN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof.Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Temmuz 2005

Gönül AYDIN 'ın Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı

"PARALEL REGLE YÜZEYLERDE ANİ HIZLAR"

başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye: Doç. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Üye: Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu′ nun .... gün ve .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr.Abdurrahman KARAMANCIOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Dual sayılar, Dual vektörlerin uzayı ($\mathbb{D}-$Modul), Regle yüzeyler ve eğrilikler ile ilgi bazı temel kavram ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde öncelikle regle yüzeyler ile ilgili bazı özellikler verilmiş, regle yüzeylerin paralel regle yüzeylerle ilişkisi ortaya konulmuştur.

Üçüncü bölümde ise Paralel Regle yüzeylerin Blaschke ve Darboux üçyüzlüleri kullanılarak ani dönme ve ani hızları arasındaki bağıntılar incelenmiştir.

SUMMARY

This master thesis consists of three chapters.

In the first chapter, we give some basic concepts such as dual numbers,ruled and parallel ruled surfaces and curvatures.

In the second chapter, first we give the some properties of ruled surface; relations between ruled surfaces and parallel surfaces.

Finally, we have stated the instantenous and the instantenous velocities for Darboux and Blaschke trihedrons on parallel ruled surfaces.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında maddi ve manevi her türlü yardım ve desteklerini benden esirgemeyen değerli hocalarım Sayın;

Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

ve

Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

ye teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir, 2005

Gönül AYDIN

Bölüm 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanım ve teoremler referans gösterilmemiş olanlar hariç, (Hacısalihoğlu, 2004), (Hacısalihoğlu, 1983) ve (Hacısalihoğlu, 2000) kaynaklarından alınmıştır.

1.1 Dual Sayılar

Reel sayılar cümlesi (+) toplama ve (.) çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. Reel sayılar cümlesi $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.1: $\forall\ a,\overline{a} \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $A = a, \overline{a})$ ikilisine bir **sıralı ikili** denir.

Bu şekilde tanımlanan sıralı ikililerin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin.

$$\mathbb{D} = \{(a, \overline{a}) : a, \overline{a} \in \mathbb{R}\}$$

üzerinde iki iç işlem ve bir eşitlik şu şekilde tanımlanır:

Tanım 1.1.2: $A = (a, \overline{a})$ ve $B = \left(b, \overline{b}\right)$ olmak üzere

$$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

iç işlemi

$$A \oplus B = (a, \overline{a}) \oplus \left(b, \overline{b}\right) = \left(a + b, \overline{a} + \overline{b}\right)$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ deki **toplama** olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.3: $A = (a, \overline{a})$ ve $B = \left(b, \overline{b}\right)$olmak üzere

$$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$$

iç işlemi

$$A \odot B = (a, \overline{a}) \odot \left(b, \overline{b}\right) = \left(a \cdot b, a\overline{b} + \overline{a}b\right) \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathbb{D}$ 'deki **çarpma** olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.4: $A = (a, \overline{a})$ ve $B = \left(b, \overline{b}\right) \in \mathbb{D}$ için

$$a = b \ , \ \overline{a} = \overline{b}$$

ise A ile B **eşittir** denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.5: $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ cümlesine **dual sayılar sistemi** ve her $(a, \overline{a}) \in \mathbb{D}$ elemanına bir **dual sayı** denir.

Teorem 1.1.1: $(\mathbb{D}, \ \oplus, \ \odot)$ üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır.

Bu halkanın toplamaya göre birim elemanı $(0, 0)$, çarpmaya göre birim elemanı ise, $(1, 0)$ dır.

Teorem 1.1.2: $(\mathbb{D}, \ \oplus, \ \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir.

Tanım 1.1.6: $A \neq (0, \overline{a})$ ve $X = (x, \overline{x})$ olmak üzere

$$A \odot X = B$$

denkleminin bir tek çözümü vardır. Gerçekten Tanım 1.1.3. den

$$(ax, a\overline{x} + \overline{a}x) = \left(b, \overline{b}\right)$$

ve Tanım 1.1.4. den

$$X = \left(\frac{b}{a}, \frac{a\overline{b} - \overline{a}b}{a^2}\right) \tag{1.2}$$

olur ve dolayısıyla $X \in \mathbb{D}$ elde edilir. X dual sayısına, B nin A ya **bölümü** denir.

Teorem 1.1.3: Dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismine izomorf bir alt cümleyi, alt cisim olarak kapsar (Hacısalihoğlu, 1983).

Bu teoremin bir sonucu olarak, reel sayılar cümlesine izomorf olan,

$$\{(a, 0) : a, 0 \in \mathbb{R}\}$$

dual sayılar cümlesinin herbir elemanı, izomorfu olan reel sayı ile gösterilebilir.

Kısaca,

$$(a, 0) \cong a \quad \text{ve} \quad (1, 0) \cong 1$$

olarak alınabilir. Genel olarak bu notasyonu kullanacağız ve ayrıca "$\oplus$" ve "$\odot$" işlemleri yerine " $+$ " ve " $\cdot$ " işaretlerini tercih edeceğiz.

$\mathbb{D}$ halkasında, $(0, 1)$ dual sayısı **dual birim** olarak adlandırılır ve

$$\varepsilon = (0, 1)$$

ile gösterilir. Çarpma işleminin tanımına göre,

$$\varepsilon \odot \varepsilon = \varepsilon^2 = (0, 0) \cong 0 \tag{1.3}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 1.1.4: Her $A = (a, \overline{a})$ dual sayısı,

$$A = a + \varepsilon\overline{a} \ , \ \varepsilon = (0, 1)$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.1.7: Bir $A = a + \varepsilon\overline{a} \in \mathbb{D}$ dual sayısındaki "a" reel sayısına A nın **reel kısmı**, "$\overline{a}$" reel sayısına da A nın **dual kısmı** denir.

Tanım 1.1.8: $(0,1) = 1$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin **birim elemanı** veya $\mathbb{D}$ deki **reel birim** denir.

Teorem 1.1.5: İki dual sayının çarpımı sıfır ise, çarpanlardan biri sıfır olmak zorunda değildir.

Tanım 1.1.9: $Z = x + \varepsilon\overline{x}$ dual sayısının **modül değeri** diye $|x|$ reel sayısına denir ve

$$\begin{aligned} |Z| &= |x + \varepsilon\overline{x}| \\ &= |x| \end{aligned}$$

ile gösterilir.

1.2 Dual Vektörlerin Uzayı ($\mathbb{D}$ - Modül)

$$\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \mathbb{D}^3 = \{(A_1, A_2, A_3) : A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{D}\ \}$$

cümlesinin her bir elemanı bir büyük harf ile gösterilirse,

$A \in \mathbb{D}^3$ için $A = (A_1, A_2, A_3)$ veya $A = (A_i)\,;\ (i = 1, 2, 3)$ notasyonlarından birisi kullanılabilir.

Bu cümle içinde aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 1.2.1: Her $A = (A_i)$, $B = (B_i) \in \mathbb{D}^3$ için

$$A = B \Longleftrightarrow A_i = B_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3)$$

Tanım 1.2.2: Her $A{=}\,(A_i)$, $B{=}\,(B_i) \in \mathbb{D}^3$ için, $(i = 1, 2, 3)\,,$

$$+ : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

iç işlemi

$$A + B = (A_i + B_i)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $A + B$ ye $\mathbb{D}^3$ de A ile B nin **toplamı** denir.

Tanım 1.2.3: $\lambda \in \ \mathbb{D}$ ve A$\in \ \mathbb{D}^3$ için,

$$\cdot : \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

dış işlemi

$$\lambda.A = (\ \lambda A_i) \quad , \quad (i = 1, 2, 3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\lambda.A$ ya A nın λ **skaları ile çarpımı** denir.

Teorem 1.2.1: $(\mathbb{D}^3, +, \cdot)$ sistemi $\mathbb{D}$ halkası üzerinde bir modüldür.

Tanım 1.2.4: $(\mathbb{D}^3, +, \cdot)$ üçlüsüne $\mathbb{D}$-Modül ve bunun elemanları olan sıralı dual üçlülere, **dual vektörler** diyeceğiz ve $\overrightarrow{A} = (A_i)$ şeklinde göstereceğiz.

Teorem 1.2.2: $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\overline{a}} \in \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$ üç boyutlu reel vektör uzayını göstermektedir) olmak üzere $\mathbb{D}$-Modül de her bir $\overrightarrow{A}$ dual vektörü

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon\,\overrightarrow{\overline{a}} \quad , \quad \varepsilon = (0, 1) \in \mathbb{D}$$

şeklinde yazılabilir.

$\mathbb{D}$-Modülün toplamaya göre birim elemanı,

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{0}}$$

şeklinde gösterilir. Buna **sıfır dual vektörü** denir.

Tanım 1.2.5: $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon\,\overrightarrow{\overline{a}}$ ve $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{b} + \varepsilon\,\overrightarrow{\overline{b}}$ dual vektörlerinin eşitliği,

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \Longleftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \text{ ve } \overrightarrow{\overline{a}} = \overrightarrow{\overline{b}} \tag{1.4}$$

ile verilir. Bu tanım 1.2.1 ile eş anlamlıdır.

Tanım 1.2.6: Her $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B} \in \mathbb{D}$-Modül için,

$$\begin{array}{rccl} \langle , \rangle : & \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ & \left(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}\right) & \longrightarrow & \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle + \varepsilon(\left\langle \overrightarrow{\overline{a}}, \overrightarrow{b} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\overline{b}} \right\rangle) \end{array} \tag{1.5}$$

ile tanımlanan $\langle , \rangle$ fonksiyonuna $\mathbb{D}$-Modülde bir **iç çarpım fonksiyonu** denir.

Tanım 1.2.7: Bir $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{a}}$ dual vektörünün **normu** diye

$$\left\|\overrightarrow{A}\right\| = \left(\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{A} \right\rangle\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|\overrightarrow{a}\|, \frac{\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{\overline{a}} \right\rangle}{\|\overrightarrow{a}\|} \right), \quad \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0} \tag{1.6}$$

dual sayısına denir.

Tanım 1.2.8: Normu reel birime karşılık gelen $(1, 0)$ dual sayısı olan dual vektöre **birim dual vektör** denir.

Teorem 1.2.3: $\overrightarrow{A} \neq \left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{\overline{a}}\right) \in \mathbb{D}$-Modül olmak üzere,
her $\overrightarrow{A} \in \mathbb{D}$-Modül için,

$$\overrightarrow{A}_0 = \frac{\overrightarrow{A}}{\left\|\overrightarrow{A}\right\|} \tag{1.7}$$

birim dual vektörüne, $\overrightarrow{A}$ **dual vektörünün ekseni** denir.

Teorem 1.2.4 (E. Study): $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{a}}$, $\overrightarrow{a} \neq \vec{0}$ olmak üzere $\mathbb{D}$-Modül de denklemi,

$$\left\|\overrightarrow{A}\right\| = (1, 0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir

Birim dual küre üzerindeki bir A dual noktasını merkeze birleştiren birim dual yer vektörü,

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{a}}$$

ise Teorem 1.2.4. den dolayı, çizgiler uzayında bir tek yönlü doğruya karşılık gelir. Burada $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^3$ vektörü, bu yönlü doğrunun doğrultman vektörü, $\overrightarrow{\overline{a}} \in \mathbb{R}^3$ vektörü ise, X bu doğrunun üzerinde bir nokta ve O bir başlangıç noktası olmak üzere,

$$\overrightarrow{\overline{a}} = \overrightarrow{OX} \wedge \overrightarrow{a} \tag{1.8}$$

ile belirlenen bir moment vektörüdür. Bu vektöre, çizgiler uzayındaki doğrunun başlangıca göre **vektörel momenti** denir.

Tanım 1.2.9 (Taylor Açılımı): $Z = x + \varepsilon\overline{x} \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(Z) &= f(Z_0) + \frac{Z - Z_0}{1!} f^{'}(Z_0) + \frac{(Z - Z_0)^2}{2!} f^{''}(Z_0) \\ &+ ... + \frac{(Z - Z_0)^n}{n!} f^{(n)}(Z_0) + ... \end{aligned}$$

serisine f dual fonksiyonunun $Z_0 \in \mathbb{D}$ noktasındaki **Taylor açılımı** denir.

Bu tanım gereğince, f dual fonksiyonunun $Z_0 = 0$ noktasındaki Taylor açılımı

$$f(x + \varepsilon\overline{x}) = f(x) + \varepsilon\overline{x} f^{'}(x)$$

şeklini alır. O halde, $f(x + \varepsilon\overline{x}) = \cos(x + \varepsilon\overline{x})$ ve $f(x + \varepsilon\overline{x}) = \sin(x + \varepsilon\overline{x})$ dual fonksiyonlarının $0 = (0, 0)$ dual noktasındaki Taylor açılımları;

$$\begin{aligned} \cos(x + \varepsilon\overline{x}) &= \cos x - \varepsilon\overline{x} \sin x \\ \sin(x + \varepsilon\overline{x}) &= \sin x + \varepsilon\overline{x} \cos x \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Tanım 1.2.10: $\mathbb{D}$-Modül de açı, $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ birer birim dual vektör olmak üzere,

$$\cos\Phi = \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle$$

ifadesi ile verilir. $\Phi = \varphi + \varepsilon\bar{\varphi}$ dual sayısına $\overrightarrow{A}$ ile $\overrightarrow{B}$ birim dual vektörleri arasındaki **dual açı** denir.

Tanım 1.2.11: Her $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B} \in \mathbb{D}$-Modül dual vektörlerinin **dış çarpımı**

$$\Lambda : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}^3$$

şeklinde bir iç işlemdir ve

$$\overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B} = \overrightarrow{a} \Lambda \overrightarrow{b} + \varepsilon \left(\overrightarrow{a} \Lambda \overrightarrow{\overline{b}} + \overrightarrow{\overline{a}} \Lambda \overrightarrow{b} \right) \tag{1.9}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.2.5: $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ gibi iki has dual vektörün dış çarpımı sıfır ise bu dual vektörlerin eksenleri çakışıktır.

Tanım 1.2.12: Uzayda herhangi a, b, c vektörlerinin bir vektörel ve bir skalar çarpımının birleşimi olan

$$\langle a, b \wedge c \rangle$$

skalar değerine bu üç vektörün karma çarpımı denir. Bu karma çarpım

$$\langle a, b \wedge c \rangle = \det(a, b, c)$$

dır (Kaya, R., 1996).

Dual anlamda:

$\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C} \in \mathbb{D}$ - Modül dual vektörlerinin **karma çarpımı**

$$f : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \longrightarrow \mathbb{D}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}) &= \langle \overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle + \varepsilon \left[\langle \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}, \overrightarrow{\overline{c}} \rangle + \langle \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{\overline{b}}, \overrightarrow{c} \rangle + \langle \overrightarrow{\overline{a}} \wedge \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \rangle \right] \end{aligned} \tag{1.10}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.2.13: $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C} \in \mathbb{D}$ - Modül has dual vektörler ve $\lambda_i = c_i + \varepsilon c_i \in \mathbb{D}$, $1 \leq i \leq 3$, olmak üzere

$$\lambda_1 \overrightarrow{A} + \lambda_2 \overrightarrow{B} + \lambda_3 \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \forall \lambda_i = 0$$

ise $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ has dual vektörleri **lineer bağımsızdır** denir.

Tanım 1.2.14: $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C} \in \mathbb{D}$ - Modül ve $\lambda_i = c_i + \varepsilon c_i \in \mathbb{D}$; $c_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 3$ için,

$$\lambda_1 \overrightarrow{A} + \lambda_2 \overrightarrow{B} + \lambda_3 \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$$

eşitliği en az bir $\lambda_i \neq 0$ için sağlanıyorsa, $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ dual vektörleri **lineer bağımlıdır** denir.

Tanım 1.2.15: $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$, $\overrightarrow{A_3}$ birim dual vektörlerinin $\mathbb{R}^3$ deki temsil ettikleri yönlü doğrular bir noktada dik olarak kesişirlerse $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$ ve $\overrightarrow{A_3}$ birim dual vektörlerine **ortonormal dual vektörler** denir.

Tanım 1.2.16: Elemanları dual sayılar olan bir A matrisine **dual matris** denir ve

$$A = [A_{ij}], A_{ij} = a_{ij} + \varepsilon \overline{a_{ij}}, \quad a_{ij},\ \overline{a_{ij}} \in \mathbb{R}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.17: $\mathbb{D}$ - Modül ün bir S alt cümlesi aşağıdaki iki özelliğe sahipse $\mathbb{D}$ - Modül ün bir **bazı** adını alır :

(i) S lineer bağımsızdır.

(ii) $S_P\{S\} = \mathbb{D}$ - Modül dür.

Yani, $\forall\ \overrightarrow{A} \in \mathbb{D}$ - Modül elemanı S deki sonlu sayıda elemanın bir lineer kombinasyonudur.

Tanım 1.3.1: E^n, n-boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$-boyutlu bir **yüzey** veya **(n − 1)-yüzey** diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyleki bu M cümlesi

$$M = \{x \epsilon U \subset E^n \mid \quad f : U \overset{dif.bilir}{\rightarrow} \mathbb{R},\ f(x) = c,\ U \text{ açık alt cümle}\}$$

$\forall P \in M$ için $\nabla f\ |_p \neq 0$, biçiminde tanımlanır.

Tanım 1.3.2: M_1 ve M_2, E^n in iki hiperyüzeyi ve M_1 in birim normal vektör alanı,

$$N_1 = \sum^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad a_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

olsun. Eğer, bir $r \in \mathbb{R}$ sabit sayısı ve $\forall P \in M_1$ için

$$f(P) = (p_1 + ra_1(P), ..., p_n + ra_n(P))$$

olacak şekilde bir $f : M_1 \to M_2$ fonksiyonu bulunabilirse, M_2 ye M_1 in **paralel hiperyüzeyi** denir.

Tanım 1.3.3: Bir doğrunun bir eğri boyunca herhangi bir biçimde belirlenen hareketiyle oluşturulan yüzeye **regle yüzey** denir.

Başka bir tanımla, $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasından geçen, E^3 ün M de kalan bir doğrusu varsa M bir **regle yüzey** ve $P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir **doğrultmanı** denir. Bir diğer tanımı ise; bir r eğrisinin bir noktasından geçen l doğrusu r eğrisi üzerinde hareket etmesiyle elde edilen yüzeye **regle yüzey** denir. Bu durumda verilen l doğrusu regle yüzeyin **anadoğrusu** ve r eğrisi de regle yüzeyin **dayanak eğrisi** olarak adlandırılır.

$\mathbb{E}^3$, 3-boyutlu Öklid uzayında $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri

$$\begin{aligned} r: \quad & I \to \mathbb{E}^3 \\ & t \to r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t)) \end{aligned}$$

olsun. Her $t \in I$ için $r(t)$ noktasındaki $T_{r(t)}$ teğet vektörü ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde

$$\begin{aligned} l: \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3 \\ & v \to l(v) = (r_1(t) + va_1(t), r_2(t) + va_2(t), r_3(t) + va_3(t)) \end{aligned}$$

doğrusunu seçelim. Burada $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere $a_i(t) \in \mathbb{R}$ skalarları $r(t)$ noktasındaki anadoğrunun doğrultman vektörün bileşenleridir.

l doğrusunun r eğrisi boyunca hareket etmesiyle, $(I \times \mathbb{R}, \varphi)$ parametrizasyonu ile verilen bir

$$\begin{aligned} \varphi: \quad I \times \mathbb{R} \quad & \to \quad \mathbb{E}^3 \\ (t, v) \quad & \to \quad \varphi(t, v) = (r_1(t) + va_1(t), r_2(t) + va_2(t), r_3(t) + va_3(t)) \end{aligned}$$

regle yüzeyi elde edilir. Bağımsız bir parametreye bağlı (∞^1) sayıdaki (R) doğrularının cümlesine **regle yüzey** veya **ışın yüzeyi** denir.

Tanım 1.3.4: Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına **boğaz (merkez veya striksiyon) noktası** denir.

Tanım 1.3.5: Bir $\varphi(t,v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin **boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi)** adı verilir.

Regle yüzeyin dual vektörel ifadesi:

Bir regle yüzey, bir t parametresine bağlı $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}(t)$ birim dual vektörel fonksiyonu olmak üzere

$$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{x}(t) + \varepsilon \overrightarrow{\overline{x}}(t)$$

birim dual vektörüne

$$\left\| \overrightarrow{X} \right\| = \left\| \overrightarrow{OX} \right\| = (1,0)$$

birim dual küresi üzerinde bir dual X noktası karşılık gelir. Biliniyorki; bu noktaya da $\mathbb{R}^3$ de bir $\overrightarrow{X}$ doğrusu karşılık gelir. Böylece t parametresi değiştikçe

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{X}(t) = \overrightarrow{x}(t) + \varepsilon \overrightarrow{\overline{x}}(t)$$

birim dual vektörü birim dual küre üzerinde bir eğri çizer. Bu eğriye de $\mathbb{R}^3$ de bir regle yüzey karşılık gelir.

X dual eğrisine regle yüzeyin **dual küresel resmi** denir. Birim dual küre üzerinde $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{X}(t)$ dual eğrisinin

$$d\Phi = d\varphi + \varepsilon d\overline{\varphi}$$

dual yay elementi için

$$d\Phi^2 = \left\langle d\overrightarrow{X}, d\overrightarrow{X} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{X}', \overrightarrow{X}' \right\rangle dt^2$$

yazılabilir. Tanım 1.1.4 den yukarıdaki ifade

$$d\Phi^2 = \langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{x} \rangle \quad \text{ve} \quad d\varphi d\overline{\varphi} = \left\langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{\overline{x}} \right\rangle$$

şeklinde elde edilir. $d\Phi$ dual büyüklüğü bilindiği gibi $\overrightarrow{X}(t)$ ve $\overrightarrow{X}(t+dt)$ komşu birim dual vektörler arasındaki dual açı, yani bu iki birim dual vektörün birim dual küre üzerindeki uç noktalarının dual kısımlarına $\overrightarrow{X}(t)$ ve $\overrightarrow{X}(t+dt)$ birim dual vektörlerine regle yüzeyde karşılık gelen komşu iki anadoğru arasındaki açı ile bu komşu iki anadoğru arasındaki en kısa uzaklık karşılık gelir.

$$\left\langle d\overrightarrow{X}, d\overrightarrow{X} \right\rangle = \langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{x} \rangle + 2\varepsilon \left\langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{\overline{x}} \right\rangle + \varepsilon^2 \left\langle d\overrightarrow{\overline{x}}, d\overrightarrow{\overline{x}} \right\rangle$$

dual ifadesi, iç çarpım olması nedeniyle koordinat değişimlerine karşı değişmezdir. Bu nedenle,

$$\langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{x} \rangle \text{ ve } \left\langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{\overline{x}} \right\rangle$$

reel büyüklükleri de koordinat değişimlerine karşı değişmezdir. Dolayısıyla onların oranı regle yüzeyin en basit (yani en küçük mertebeden) diferensiyel değişmezi olur.

Tanım 1.3.6:

$$\frac{1}{d} = \frac{\left\langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{\overline{x}} \right\rangle}{\langle d\overrightarrow{x}, d\overrightarrow{x} \rangle} = \frac{d\varphi . d\overline{\varphi}}{d\varphi . d\varphi} = \frac{d\overline{\varphi}}{d\varphi} \tag{1.11}$$

ifadesindeki $\frac{1}{d}$ büyüklüğüne regle yüzeyin t parametresine ait olan $\overrightarrow{X}$ anadoğrusu boyunca **dağılma parametresi** veya **dral** i denir. Başka bir deyişle; regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu anadoğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin **dağılma parametresi (drali)** denir.

Tanım 1.3.7: $\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_1}(s)$ bir regle yüzeyi ve bir dual açı

$$\Theta = \theta + \varepsilon\overline{\theta} = sbt$$

olsun. O zaman $[R_1^*]$ regle yüzeyi,

$$\overrightarrow{R_1^*}(s) = \overrightarrow{R_1} \cos\Theta + \overrightarrow{R_3} \sin\Theta$$

biçiminde bir birim vektörüyle ifade edersek, $[R_1^*]$ regle yüzeyine $[R_1]$ regle yüzeyinin **paralel regle yüzeyi** denir (Nizamoğlu, Ş. ; 1986).

1.3 Eğrilikler

Tanım 1.4.1: Eğri üzerindeki bir P noktası eğriyi çizerken T, N, B vektörleri değişirler, dolayısıyla küresel göstergeleri oluştururlar. Eğrinin T, N, B üç ayaklısının her s anında, bir eksen etrafında, ani helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin s paremetresine karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux** veya **ani dönme ekseni** denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = \tau T + \kappa B = N \wedge N' = \begin{vmatrix} T & N & B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \end{vmatrix}$$

B ile W arasındaki açı ϕ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \kappa &= \|W\| \cos\phi \\ \tau &= \|W\| \sin\phi \end{aligned}$$

dir. W vektörü yönündeki birim vektör C ise

$$\|W\| = \sqrt{\tau^2 + \kappa^2} \geq 0$$

olmak üzere,

$$C = \frac{\tau}{\left\|\overrightarrow{W}\right\|} T + \frac{\kappa}{\left\|\overrightarrow{W}\right\|} B$$

olur. κ ile τ nın yerleri değiştirilirse,

$$C = \sin\phi T + \cos\phi B$$

olduğu görülür.

Tanım 1.4.2: $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{w}_0 + \varepsilon \overrightarrow{\overline{w}}_0$ dual vektörüne $(\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N})$ Darboux hareketli üçyüzlüsünün ani dönme vektörü adını verelim. Dual vektörümüzü $\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N}$ nin lineer bileşenleri cinsinden

$$\overrightarrow{W} = A_1 \overrightarrow{X}_1 + A_2 \overrightarrow{G} + A_3 \overrightarrow{N}$$

yazalım. Burada

$$\begin{aligned}\overrightarrow{X}_1^{\prime} &= \overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{X}_1 \\ &= \left(A_1\overrightarrow{X}_1 + A_2\overrightarrow{G} + A_3\overrightarrow{N}\right) \wedge \overrightarrow{X}_1 \\ &= -A_2\overrightarrow{N} + A_3\overrightarrow{G}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G}^{\prime} &= \overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{G} \\ &= \left(A_1\overrightarrow{X}_1 - A_2\overrightarrow{G} + A_3\overrightarrow{N}\right) \wedge \overrightarrow{G} \\ &= A_1\overrightarrow{N} + A_3\overrightarrow{X}_1\end{aligned}$$

ve benzer olarak

$$\begin{aligned}\overrightarrow{N}^{\prime} &= \overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{N} \\ &= \left(A_1\overrightarrow{X}_1 + A_2\overrightarrow{G} + A_3\overrightarrow{N}\right) \wedge \overrightarrow{N} \\ &= -A_1\overrightarrow{G} + A_2\overrightarrow{X}_1\end{aligned}$$

olur. Burada $\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N}$ ile $\overrightarrow{X}_1^{\prime}, \overrightarrow{G}^{\prime}, \overrightarrow{N}^{\prime}$ vektörlerini iç çarparsak A_1, A_2, A_3 katsayıları

$$\begin{aligned}A_1 &= \left\langle \overrightarrow{G}^{\prime}, \overrightarrow{N} \right\rangle \\ A_2 &= \left\langle \overrightarrow{N}^{\prime}, \overrightarrow{X}_1 \right\rangle \\ A_3 &= \left\langle \overrightarrow{X}_1^{\prime}, \overrightarrow{G} \right\rangle\end{aligned}$$

elde edilir. Bu değerler

$$\overrightarrow{W} = A_1\overrightarrow{X}_1 + A_2\overrightarrow{G} + A_3\overrightarrow{N}$$

vektöründe yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\overrightarrow{W} &= \overrightarrow{w}_0 + \varepsilon\overrightarrow{\overrightarrow{w}}_0 \\ &= \left\langle \overrightarrow{G}^{\prime}, \overrightarrow{N} \right\rangle \overrightarrow{X}_1 + \left\langle \overrightarrow{N}^{\prime}, \overrightarrow{X}_1 \right\rangle \overrightarrow{G} + \left\langle \overrightarrow{X}_1^{\prime}, \overrightarrow{G} \right\rangle \overrightarrow{N}\end{aligned} \tag{1.12}$$

bulunur. Burada $\overrightarrow{w}_0$ vektörü **ani dönme vektörü**, $\overrightarrow{\overrightarrow{w}}_0$ vektörümüz ise **ani hız vektörü** olarak tanımlanır (Uğurlu, H., H., 1997).

Tanım 1.4.3: E^3 de bir α eğrisi boyunca $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ ortonormal bir sistem teşkil ediyorsa, $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ üçyüzlüsüne **Frenet üçyüzlüsü** denir.

Tanım 1.4.4: $M \subset E^3$, M yüzey; α M üzerinde bir eğri ve eğrinin bir noktadaki teğeti $\alpha^{\shortmid}$ olsun. Bu teğeti birinci bileşen $\overrightarrow{X}_1$ olarak alır ve eğrinin normalini $\overrightarrow{N}$ olarak alırsak, bu iki vektöre de dik olacak şekilde $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{X}_1$ seçtiğimizde $(\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G} = \overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{N})$ biçiminde oluşan ortonormal sisteme **Darboux üçyüzlüsü** denir.

Tanım 1.4.5: $M \subset E^3$ ve (α, M) M üzerinde bir şerit olsun. $\overrightarrow{R}_1$, bu yüzeyin doğrultman vektörü ve $\overrightarrow{R}_2$, doğrultmanın o noktadaki normali olmak üzere $\overrightarrow{R}_1$ ve $\overrightarrow{R}_2$ vektörlerinin oluşturduğu düzleme dik üçüncü vektör $\overrightarrow{R}_3 = \overrightarrow{R}_1 \wedge \overrightarrow{R}_2$ olsun. $(\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3)$ ortonormal üçyüzlüsüne bir **Blaschke üçyüzlüsü** denir.

Tanım 1.4.6: α, E^3 de bir eğri olsun. α nın Darboux üçyüzlüsü $(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N})$ olmak üzere,

$$\rho_g = \left\langle \overrightarrow{X_1}^{\shortmid}, \overrightarrow{G} \right\rangle \tag{1.13}$$

eğriliğine **geodezik eğrilik** denir.

Tanım 1.4.7: α, E^3 de bir eğri olsun. α nın Darboux üçyüzlüsü $(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N})$ olmak üzere,

$$\rho_n = \left\langle \overrightarrow{X_1}^{\shortmid}, \overrightarrow{N} \right\rangle \tag{1.14}$$

eğriliğine **normal eğrilik** denir.

Tanım 1.4.8: α, E^3 de bir eğri olsun. α nın Darboux üçyüzlüsü $(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N})$ olmak üzere,

$$\tau_g = \left\langle \overrightarrow{G}^{\shortmid}, \overrightarrow{N} \right\rangle \tag{1.15}$$

eğriliğine **geodezik torsiyon** veya **geodezik burulma** denir.

Tanım 1.4.9: M eğrisi (I, α) Koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. $a, b \in I$ olmak üzere, a dan b ye M eğrisinin **yay uzunluğu** diye, eğrinin

$\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki uzunluğuna karşılık gelen

$$\int_{b}^{a} \|\alpha^{\prime}(t)\| \, dt \quad , t \in \quad I$$

reel sayısına denir.

Bölüm 2

PARALEL REGLE YÜZEYLER

2.1 Regle Yüzeyler

Bu kısımda, Blaschke üçyüzlüsü, Blaschke ve Darboux üçyüzlüleri arasındaki bağıntılar ve Regle yüzeylerin ani hızları ele alınmıştır.

2.1.1 Blaschke Üçyüzlüsü

Tanım 1.3.3 den boğaz çizgisinin yay uzunluğu s olmak üzere $[R_1]$ regle yüzeyini

$$\overrightarrow{R}_1 = \overrightarrow{r}_1(s) + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}(s) \tag{2.1}$$

dual birim vektörüyle ifade ederiz.

Küresel $\overrightarrow{R}_1(t)$ eğrisinin dual uzunluğu için

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_b^a \|\alpha^{'}\| \, dt \\ &= \int \left\| \overrightarrow{R}_1^{'} \right\| dt \\ &= \int \sqrt{\overrightarrow{R}_1^{'2}} dt \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} S_1 &= \int \sqrt{\left\langle \overrightarrow{R}_1^{'}, \overrightarrow{R}_1^{'} \right\rangle} dt \\ &= \int P dt \\ &= \int (p + \varepsilon \overline{p}) \, dt \end{aligned}$$

dir. $\overrightarrow{R}_3(t)$ eğrisinin dual uzunluğu için de

$$\begin{aligned} S_3 &= \int \sqrt{\overrightarrow{R}_3^{'2}} dt \\ &= \int \left\langle \overrightarrow{R}_3^{'}, \overrightarrow{R}_3^{'} \right\rangle \\ &= \int Q dt \\ &= \int (q + \varepsilon \overline{q}) \, dt \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\int p dt, \int \overline{p} dt, \int q dt, \int \overline{q} dt$$

integralleri regle yüzeyinin integral invaryantı olurlar.

Regle yüzeyine bağlı olmak üzere $(\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3)$ üçyüzlüsünü ele alalım.

$$P = \sqrt{\overrightarrow{R}^{'2}} \tag{2.2}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R} &= \overrightarrow{R}_1 \\ \overrightarrow{R}_2 &= \frac{\overrightarrow{R}^{\shortmid}}{P} \\ \overrightarrow{R}_3 &= \overrightarrow{R}_1 \times \overrightarrow{R}_2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

den ibarettirler. $\overrightarrow{R}_1$, $\overrightarrow{R}_2$ ve $\overrightarrow{R}_3$ ün geometrik yorumuna bakalım.

$\overrightarrow{R}$ birim dual vektör olduğundan,

$$\left\langle \overrightarrow{R}, \overrightarrow{R} \right\rangle = \left\| \overrightarrow{R} \right\| = \left\| \overrightarrow{R}_1 \right\| = 1 \tag{2.4}$$

dir. (2.3) den $\overrightarrow{R}_2$ yerine eşitini yazarsak,

$$\left\langle \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_2 \right\rangle = \left\langle \frac{\overrightarrow{R}^{\shortmid}}{P}, \frac{\overrightarrow{R}^{\shortmid}}{P} \right\rangle = \frac{1}{P^2} \left\langle \overrightarrow{R}^{\shortmid}, \overrightarrow{R}^{\shortmid} \right\rangle = 1 \tag{2.5}$$

olur. (2.4) ün t ye göre türevini alırsak,

$$\left[\left\langle \overrightarrow{R}, \overrightarrow{R} \right\rangle \right]^{\shortmid} = \left\langle \overrightarrow{R}^{\shortmid}, \overrightarrow{R} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{\shortmid} \right\rangle = 2 \left\langle \overrightarrow{R}^{\shortmid}, \overrightarrow{R} \right\rangle = 0$$

ve buradan,

$$\left\langle \overrightarrow{R}^{\shortmid}, \overrightarrow{R} \right\rangle = 0 \tag{2.6}$$

elde ederiz (Blaschke, W., 1949).

Birbirine yakın $\overrightarrow{R}$ ve $\overrightarrow{R} + \overrightarrow{R}^*$ gibi iki doğrunun dik olarak kesişmesi için

$$\left\langle \overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^* \right\rangle = 0 \tag{2.7}$$

olması şartından faydalanarak,

$$\left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R} \right\rangle = 0$$

bulunur. Ayrıca

$$\left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R} + \overrightarrow{R}^{\shortmid} dt \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}^{\shortmid} dt \right\rangle = 0$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{R}_1 \times \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_1 \times \overrightarrow{R}_2 \right\rangle \\
&= \left\| \overrightarrow{R}_1 \times \overrightarrow{R}_2 \right\|^2 \\
&= \left\langle \overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_1 \right\rangle \left\langle \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_2 \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_2 \right\rangle \left\langle \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_1 \right\rangle \\
&= 1 - \frac{\left\langle \overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{\prime} \right\rangle^2}{P}
\end{aligned}$$

dır ve (2.6) daki eşitlikten $\left\langle \overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{\prime} \right\rangle$ nin değerini yerine yazarsak,

$$\left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle = 1$$

bulunur. Görüldüğü üzere,

$$\left\| \overrightarrow{R}_1 \right\| = \left\| \overrightarrow{R}_2 \right\| = \left\| \overrightarrow{R}_3 \right\| = 1 \tag{2.8}$$

dir.

$(\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3)$ üçyüzlüsü ortonormal dual vektördür. Bu üçyüzlünün $\overrightarrow{R}_1$, $\overrightarrow{R}_2$, $\overrightarrow{R}_3$ doğrularının $\overrightarrow{x}$ kesişme noktası, $\overrightarrow{R}_1$ üzerindedir ve bu nokta komşu doğrultmana en kısa uzaklığa sahiptir. $\overrightarrow{R}_3$ doğrusu $\overrightarrow{R}_1$ doğrultmanına dik yüzeyin boğaz noktasındaki teğetidir. $\overrightarrow{R}_2$ ise yüzeyin boğaz noktasındaki normalidir. $\overrightarrow{R}_1$ ve $\overrightarrow{R}_2$ den geçen düzlem asimtot düzlemini verir.

Şimdi bu üçyüzlümüzün türev denklemlerini inceleyecek olursak,

$$\overrightarrow{R_k^{\prime}} = \sum a_{kl} \overrightarrow{R}_l \tag{2.9}$$

denklemini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_1^{\prime} &= a_{11}\overrightarrow{R}_1 + a_{12}\overrightarrow{R}_2 + a_{13}\overrightarrow{R}_3 \\
\overrightarrow{R}_2^{\prime} &= a_{21}\overrightarrow{R}_1 + a_{22}\overrightarrow{R}_2 + a_{23}\overrightarrow{R}_3 \\
\overrightarrow{R}_3^{\prime} &= a_{31}\overrightarrow{R}_1 + a_{32}\overrightarrow{R}_2 + a_{33}\overrightarrow{R}_3
\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi yazılır. Şimdi regle yüzeyine bağlı olmak üzere $\overrightarrow{R}_k$ vektörünün katsayıları için aşağıdaki,

$$a_{kl} = \left\langle \overrightarrow{R}'_{kl}, \overrightarrow{R}_l \right\rangle \tag{2.10}$$

bağıntısını kullanabiliriz.

$\overrightarrow{R}_k$ ve $\overrightarrow{R}_l$ ortonormal dual vektörlerinin iç çarpımlarını alırsak,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{R_k}, \overrightarrow{R}_l \right\rangle &= 0 \quad , \quad k \neq l \\ \left\langle \overrightarrow{R_k}, \overrightarrow{R}_l \right\rangle &= 1 \quad , \quad k = l \end{aligned} \tag{2.11}$$

olur. $\left\langle \overrightarrow{R_k}, \overrightarrow{R}_l \right\rangle$ bağıntısının türevini alırsak,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{R_k}, \overrightarrow{R}_l \right\rangle' &= \left\langle \overrightarrow{R}'_k, \overrightarrow{R}_l \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{R_k}, \overrightarrow{R}'_l \right\rangle \\ &= \left\langle \sum a_{kl} \overrightarrow{R}_l, \overrightarrow{R}_l \right\rangle + \left\langle \sum a_{lk} \overrightarrow{R}_k, \overrightarrow{R}_k \right\rangle \\ &= \sum a_{kl} \left\langle \overrightarrow{R}_l, \overrightarrow{R}_l \right\rangle + \sum a_{kl} \left\langle \overrightarrow{R}_k, \overrightarrow{R}_k \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

buluruz. $\overrightarrow{R}_k$ ve $\overrightarrow{R}_l$ ler birim dual vektör olduklarından, $\left\langle \overrightarrow{R}_l, \overrightarrow{R}_l \right\rangle = 1$ ve $\left\langle \overrightarrow{R}_k, \overrightarrow{R}_k \right\rangle = 1$ dir. O halde

$$\left\langle \overrightarrow{R_k}, \overrightarrow{R}_l \right\rangle' = \sum a_{kl} + \sum a_{lk} = 0 \tag{2.12}$$

veya

$$a_{lk} = -a_{lk}$$

dir. (2.12) den dolayı,

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{11} &= 0 \Rightarrow a_{11} = 0 \\ a_{22} + a_{22} &= 0 \Rightarrow a_{22} = 0 \\ a_{33} + a_{33} &= 0 \Rightarrow a_{33} = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a_{12} + a_{21} &= 0 \Rightarrow a_{12} = -a_{21} \\ a_{13} + a_{31} &= 0 \Rightarrow a_{13} = -a_{31} \\ a_{23} + a_{32} &= 0 \Rightarrow a_{23} = -a_{32} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bulduğumuz bu eşitlikleri, (2.9) daki lineer denklem sisteminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}'_1 &= a_{12}\overrightarrow{R}_2 + a_{13}\overrightarrow{R}_3 &= a_{12}\overrightarrow{R}_2 - a_{31}\overrightarrow{R}_3 \\
\overrightarrow{R}'_2 &= a_{21}\overrightarrow{R}_1 + a_{23}\overrightarrow{R}_3 &= a_{23}\overrightarrow{R}_3 - a_{12}\overrightarrow{R}_1 \\
\overrightarrow{R}'_3 &= a_{31}\overrightarrow{R}_1 + a_{32}\overrightarrow{R}_2 &= a_{31}\overrightarrow{R}_1 - a_{23}\overrightarrow{R}_2
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu katsayıları bulmak için (2.10) eşitliğinden faydalanalım.

$$\left\langle \overrightarrow{R}'_1, \overrightarrow{R}_2 \right\rangle = \left\langle a_{12}\overrightarrow{R}_2 + a_{13}\overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}_2 \right\rangle = a_{12}$$

dir. Ayrıca (2.3) den dolayı $\overrightarrow{R}'_1$ eşitliğini yerine yazarsak,

$$\left\langle \overrightarrow{R}'_1, \overrightarrow{R}_2 \right\rangle = \left\langle P\overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_2 \right\rangle = P$$

olur. O halde

$$a_{12} = P$$

bulunur. Benzer yolla $\overrightarrow{R}'_1$ ile $\overrightarrow{R}_3$ ü iç çarparsak,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{R}'_1, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle &= \left\langle a_{12}\overrightarrow{R}_2 + a_{13}\overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle \\
&= a_{13}
\end{aligned}$$

ve (2.3) den $\overrightarrow{R}'_1$ nün eşitini yerine yazar ve (2.11) eşitliğini gözönünde bulundurursak,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{R}'_1, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle &= \left\langle P\overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle \\
&= P\left\langle \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle \\
&= P.0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğunu görürüz. O halde

$$a_{13} = 0$$

elde edilir. Benzer yolla a_{23} ün eşitini bulalım. Bunun için

$$a_{23} = \left\langle \overrightarrow{R}'_2, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle$$

ve (2.3) den önce $\overrightarrow{R}_2$ eşitinin türevini alırsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}^{\prime}_2 &= \left(\frac{\overrightarrow{R}^{\prime}}{P}\right)^{\prime} \\
&= \left(\overrightarrow{R}^{\prime}\frac{1}{P}\right)^{\prime} \\
&= \overrightarrow{R}^{\prime\prime}\frac{1}{P} + \overrightarrow{R}^{\prime}\left(\frac{1}{P}\right)^{\prime}
\end{aligned}$$

olur ve diğer taraftan (2.3) gereğince,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_3 &= \overrightarrow{R}_1 \times \overrightarrow{R}_2 \\
&= \frac{\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{R}^{\prime}}{P}
\end{aligned}$$

olması dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
a_{23} &= \left\langle \overrightarrow{R}^{\prime}_2, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\overrightarrow{R}^{\prime\prime}\left(\frac{1}{P}\right) + \overrightarrow{R}^{\prime}\left(\frac{1}{P}\right)^{\prime} \right), \frac{\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{R}^{\prime}}{P} \right\rangle \\
&= \det\left(\frac{\overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{\prime}, \overrightarrow{R}^{\prime\prime}}{P^2}\right) + \det\left(\frac{\overrightarrow{R}^{\prime}, \overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{\prime}}{P}\right)\left(\frac{1}{P}\right)^{\prime} \\
&= \det\left(\frac{\overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{\prime}, \overrightarrow{R}^{\prime\prime}}{P^2}\right) + \frac{0}{P}\left(\frac{1}{P}\right)^{\prime} \\
&= \det\left(\frac{\overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{\prime}, \overrightarrow{R}^{\prime\prime}}{P^2}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. a_{23} yerine Q yazılırsa,

$$a_{23} = Q = \det\left(\frac{\overrightarrow{R}, \overrightarrow{R}^{\prime}, \overrightarrow{R}^{\prime\prime}}{P^2}\right) \tag{2.13}$$

ifadesi $\overrightarrow{R}_3$ dual eğrinin dual uzunluğu için integral invaryanttır. a_{kl} matrisi ters simetrik matristir. Bu yüzden (2.12) den dolayı,

$$\begin{aligned}
a_{12} &= P \implies a_{21} = -P \\
a_{13} &= 0 \implies a_{31} = 0 \\
a_{23} &= Q \implies a_{32} = -Q
\end{aligned}$$

dir. O halde bulduğumuz bu katsayıları türev formülleri için yazdığımız lineer denklem sisteminde yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1' &= P\overrightarrow{R}_2 \\ \overrightarrow{R}_2' &= -P\overrightarrow{R}_1 + Q\overrightarrow{R}_3 \\ \overrightarrow{R}_3' &= -Q\overrightarrow{R}_2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

elde ederiz.

Şimdi $\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3$ birim dual vektörlerini reel ve dual kısımlarına ayırıp, (2.14) deki denklemde yerine yazalım. O zaman

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1' &= P\overrightarrow{R}_2 \\ &= (p+\varepsilon\overline{p})\left(\overrightarrow{r}_2 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_2\right) \\ &= p\overrightarrow{r}_2 + \varepsilon\left(p\overrightarrow{\overline{r}}_2 + \overline{p}\overrightarrow{r}_2\right) \end{aligned}$$

ve

$$\overrightarrow{R}_1' = \overrightarrow{r}_1' + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_1'$$

olacağından, Tanım 1.1.4 den

$$\overrightarrow{r}_1' = p\overrightarrow{r}_2 \tag{2.15}$$

bulunur. Benzer yolla, $\overrightarrow{R}_2'$

$$\overrightarrow{R}_2' = -P\overrightarrow{R}_1 + Q\overrightarrow{R}_3$$

eşitliğinde P, Q, $\overrightarrow{R}_1$ ve $\overrightarrow{R}_3$ reel ve dual kısımları ile birlikte yazılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}_2' + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}_2}' &= -(p+\varepsilon\overline{p})\left(\overrightarrow{r}_1 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_1\right) + (q+\varepsilon\overline{q})\left(\overrightarrow{r}_3 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_3\right) \\ &= -p\overrightarrow{r}_1 + q\overrightarrow{r}_3 + \varepsilon\left(-p\overrightarrow{\overline{r}}_1 - \overline{p}\overrightarrow{r}_1 + \overline{q}\overrightarrow{r}_3 + q\overrightarrow{\overline{r}}_3\right) \end{aligned}$$

bulunur ve Tanım 1.1.4 den,

$$\overrightarrow{r}_2' = -p\overrightarrow{r}_1 + q\overrightarrow{r}_3 \tag{2.16}$$

olur. Benzer yolla,

$$\overrightarrow{R}'_3 = -Q\overrightarrow{R}_2$$

eşitliği reel ve dual kısımları ile birlikte yazılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}'_3 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}'_3 &= -(q+\varepsilon\overline{q})\left(\overrightarrow{r}_2 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_2\right)\\ &= -q\overrightarrow{r}_2 + \varepsilon\left(-q\overrightarrow{\overline{r}}_2 - \overline{q}\overrightarrow{r}_2\right)\end{aligned}$$

ve Tanım 1.1.4 den,

$$\overrightarrow{r}'_3 = -q\overrightarrow{r}_2 \tag{2.17}$$

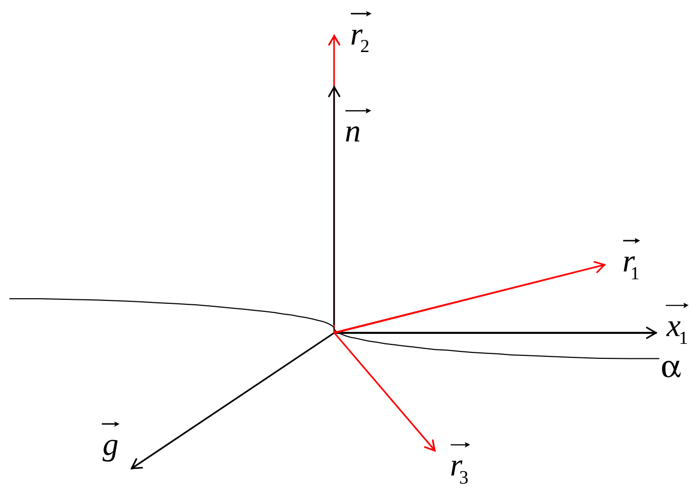
olur. Buna göre $\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{r}_3$ Blaschke vektörlerinin türevlerini $\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{r}_3$ cinsinden lineer olarak yazarsak,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}'_1 &= p\overrightarrow{r}_2\\ \overrightarrow{r}'_2 &= -p\overrightarrow{r}_1 + q\overrightarrow{r}_3\\ \overrightarrow{r}'_3 &= -q\overrightarrow{r}_2\end{aligned} \tag{2.18}$$

elde edilir.

2.1.2 Blaschke ve Darboux Üçyüzlüleri Arasındaki Bağıntılar

Boğaz çizgisinin yay uzunluğu s olmak üzere $[R_1]$ regle yüzeyini $\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{r_1}(s) + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_1(s)$ dual birim vektörleriyle temsil edelim. $[R_1]$ regle yüzeyinin boğaz çizgisi (x) olsun. Boğaz çizgisi üzerindeki her x noktasındaki, Blaschke üçyüzlüsü $(\overrightarrow{r}_1,\ \overrightarrow{r}_2,\ \overrightarrow{r}_3)$ ve Darboux üçyüzlüsü $(\overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{x}', \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n})$ olmak üzere, bunlar arsında bağıntılar vardır. Şekil 1 den aralarındaki bağıntıyı



Şekil 1

görebiliriz.

$\overrightarrow{x}_1$ vektörünü $\overrightarrow{r}_1$ ve $\overrightarrow{r}_3$ reel bileşenleri cinsinden aralarındaki açıyı ϕ kabul ederek yazalım.

Yukarıdaki şekilde görüldüğü üzere, α yüzey eğrisinin üzerindeki bir P noktasından geçmek üzere, $\overrightarrow{r}_1$ ve $\overrightarrow{r}_3$ vektörlerinin oluşturduğu düzlemde bulunan birim vektör $\overrightarrow{x}_1$ olsun. $\overrightarrow{x}_1$ vektörüne dik ve P noktasından geçen ve

$$\overrightarrow{r}_2 = \overrightarrow{n} \tag{2.19}$$

eşitliğini sağlayan birim vektör $\overrightarrow{n}$ olsun. Yine P noktasından geçen, $\overrightarrow{x}_1$ ile $\overrightarrow{n}$ birim vektörlerine dik olan üçüncü birim vektör de $\overrightarrow{g}$ ($\overrightarrow{g} = \overrightarrow{x}_1 \wedge \overrightarrow{n}$) dir. Şekil 1 den görüldüğü üzere

$$\sin\phi = \frac{\overline{q}}{\|\overrightarrow{x}_1\|}$$

veya

$$\overline{q} = \sin\phi\,\|\overrightarrow{x}_1\|$$

dır. Ayrıca

$$\cos\phi = \frac{\overline{p}}{\|\overrightarrow{x}_1\|}$$

ya da

$$\bar{p} \;=\; \cos\phi \,\|\overrightarrow{x}_1\|$$

yazılır. $\overrightarrow{x}_1$ vektörü birim dual vektör olduğundan, $\|\overrightarrow{x}_1\| = 1$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}\bar{q} &= \sin\phi \\ \bar{p} &= \cos\phi\end{aligned}$$

olacaktır, o halde

$$\begin{aligned}\bar{q}^2 + \bar{p}^2 &= \sin\phi^2 + \cos\phi^2 \\ &= 1\end{aligned} \tag{2.20}$$

elde edilir. $\overrightarrow{x}_1$ lineer bileşenler cinsinden

$$\overrightarrow{x}_1 = \bar{q}\,\overrightarrow{r}_1 + \bar{p}\,\overrightarrow{r}_3 \tag{2.21}$$

şeklinde yazılır. $\overrightarrow{x}_1$ vektörü yardımı ile $\overrightarrow{g}$ Darboux vektörünün eşitini bulalım.

$$\overrightarrow{g} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{x}_1$$

olduğunu biliyoruz. $\overrightarrow{x}_1$ in eşitini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{g} &= \overrightarrow{n} \wedge (\bar{q}\,\overrightarrow{r}_1 + \bar{p}\,\overrightarrow{r}_3) \\ &= \bar{q}\,(\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{r}_1) + \bar{p}\,(\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{r}_3)\end{aligned}$$

burada (2.19) dan $\overrightarrow{n}$ nin eşitini yazarsak

$$\begin{aligned}\overrightarrow{g} &= \bar{q}\,(\overrightarrow{r}_2 \wedge \overrightarrow{r}_1) + \bar{p}\,(\overrightarrow{r}_2 \wedge \overrightarrow{r}_3) \\ &= \bar{q}\,(-\overrightarrow{r}_3) + \bar{p}\,(\overrightarrow{r}_1) \\ &= \bar{p}\,\overrightarrow{r}_1 - \bar{q}\,\overrightarrow{r}_3\end{aligned} \tag{2.22}$$

elde edilir. $\overrightarrow{x}_1$, $\overrightarrow{g}$, $\overrightarrow{n}$ Darboux vektörlerinin $\overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{r}_3$ Blaschke vektörleri cinsinden eşitleri aşağıdaki gibi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}_1 &= \bar{q}\,\overrightarrow{r}_1 + \bar{p}\,\overrightarrow{r}_3 \\ \overrightarrow{g} &= \bar{p}\,\overrightarrow{r}_1 - \bar{q}\,\overrightarrow{r}_3 \\ \overrightarrow{n} &= \overrightarrow{r}_2\end{aligned} \tag{2.23}$$

olur.

Şimdi $(\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{r}_3)$ Blaschke üçyüzlüsüyle $(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n})$ Darboux üçyüzlüsü arasındaki ilişkiyi ifade edelim: Bir α eğrisi alalım ve bu eğrinin herhangi bir P noktasındaki teğeti $\overrightarrow{r}_1$ olsun. P noktasından geçen ve $\overrightarrow{r}_1$ vektörüne dik olan vektör $\overrightarrow{r}_2$ dir; yine P noktasından geçmek üzere $\overrightarrow{r}_1$ ve $\overrightarrow{r}_2$ nin vektörel çarpımından oluşan üçüncü vektör de $(\overrightarrow{r}_3 = \overrightarrow{r}_1 \wedge \overrightarrow{r}_2)$ dir.

(2.23) eşitliklerden faydalanarak, $\overrightarrow{r}_1$, $\overrightarrow{r}_2$, $\overrightarrow{r}_3$ Blaschke vektörlerini $\overrightarrow{x}_1$, $\overrightarrow{g}$, $\overrightarrow{n}$ Darboux vektörleri cinsinden yazalım.

$\overrightarrow{x}_1$ ve $\overrightarrow{g}$ nin eşitliklerinden yararlanarak lineer denklem çözümü yaparsak,

$$\begin{aligned} \overline{q}\,\overrightarrow{x}_1 &= \overline{q}^2\,\overrightarrow{r}_1 + \overline{p}\ \overline{q}\,\overrightarrow{r}_3 \\ \overline{p}\,\overrightarrow{g} &= \overline{p}^2\,\overrightarrow{r}_1 - \overline{q}\ \overline{p}\,\overrightarrow{r}_3 \end{aligned}$$

olur ve taraf tarafa toplarsak,

$$\overline{q}\,\overrightarrow{x}_1 + \overline{p}\,\overrightarrow{g} = (\overline{q}^2 + \overline{p}^2)\,\overrightarrow{r}_1$$

dir. (2.20) den

$$\overrightarrow{r}_1 = \overline{q}\,\overrightarrow{x}_1 + \overline{p}\,\overrightarrow{g} \tag{2.24}$$

elde edilir. $\overrightarrow{r}_3$ vektörünün eşitliğini benzer yolla gösterecek olursak

$$\begin{aligned} \overline{p}\,\overrightarrow{x}_1 &= \overline{p}\ \overline{q}\,\overrightarrow{r}_1 + \overline{p}^2\,\overrightarrow{r}_3 \\ -\overline{q}\,\overrightarrow{g} &= -\overline{q}\ \overline{p}\,\overrightarrow{r}_1 + \overline{q}^2\,\overrightarrow{r}_3 \end{aligned}$$

ve taraf tarafa topladığımız zaman,

$$\overline{p}\,\overrightarrow{x}_1 - \overline{q}\,\overrightarrow{g} = \left(\overline{q}^2 + \overline{p}^2\right)\overrightarrow{r}_3$$

olur. (2.20) deki eşitliği yerine yazarsak,

$$\overrightarrow{r}_3 = \overline{p}\,\overrightarrow{x}_1 - \overline{q}\,\overrightarrow{g} \tag{2.25}$$

bulunur. Ayrıca (2.19) dan $\overrightarrow{r}_2 = \overrightarrow{n}$ dir.

$\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{r}_3$ Blaschke vektörleri ile $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n}$ Darboux vektörleri arasında

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}_1 &= \overline{q}\,\overrightarrow{x}_1 + \overline{p}\,\overrightarrow{g} \\ \overrightarrow{r}_2 &= \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{r}_3 &= \overline{p}\,\overrightarrow{x}_1 - \overline{q}\,\overrightarrow{g} \end{aligned} \tag{2.26}$$

eşitliklerini buluruz.

$\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n}$ vektörlerinin türev denklemlerini kendileri cinsinden lineer bileşenleri olarak yazalım. Önce katsayılarının elde edilişini inceleyelim.

$$\overrightarrow{x}'_1 = a_1 \overrightarrow{x}_1 + a_2 \overrightarrow{g} + a_3 \overrightarrow{n}$$

eşitliğini $\overrightarrow{x}_1$ ile iç çarparsak, (2.7) ve (2.8) den

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{x}_1 \right\rangle &= a_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_1 \rangle + a_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{x}_1 \rangle + a_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}_1 \rangle \\ &= a_1 \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{x}_1 \right\rangle = 0$$

olduğundan

$$a_1 = 0$$

elde edilir. Aynı denklemi $\overrightarrow{g}$ ile iç çarparsak,

$$\left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{g} \right\rangle = a_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g} \rangle + a_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{g} \rangle + a_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{g} \rangle$$

veya eşitliği (2.7) ve (2.8) den,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{g} \right\rangle &= a_1.0 + a_2.1 + a_3.0 \\ &= a_2 \end{aligned}$$

olur. Tanım 1.4.6 dan $\left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{g} \right\rangle$ nin eşitini yerine yazarsak,

$$a_2 = \rho_g$$

bulunur. Aynı denklemi $\overrightarrow{n}$ ile iç çarparsak,

$$\left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{n} \right\rangle = a_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{n} \rangle + a_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n} \rangle + a_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \rangle$$

veya denklemi (2.7) ve (2.8) den,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{n} \right\rangle &= a_1.0 + a_2.0 + a_3.1 \\ &= a_3 \end{aligned}$$

ve Tanım 1.4.7 den $\left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{n} \right\rangle = \rho_n$ değerini yazarsak,

$$a_3 = \rho_n$$

katsayısı bulunur. Bulduğumuz değerleri $\overrightarrow{x}'_1 = a_1 \overrightarrow{x}_1 + a_2 \overrightarrow{g} + a_3 \overrightarrow{n}$ eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\overrightarrow{x}'_1 = \rho_n \overrightarrow{n} + \rho_g \overrightarrow{g} \tag{2.27}$$

elde edilir.

$\overrightarrow{g}'$ lineer bileşenler cinsinden

$$\overrightarrow{g}' = b_1 \overrightarrow{x}_1 + b_2 \overrightarrow{g} + b_3 \overrightarrow{n}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemi sırasıyla $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n}$ ile iç çarpalım. (2.7) ve (2.8) den

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{g}', \overrightarrow{x}_1 \rangle &= b_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_1 \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{x}_1 \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}_1 \rangle \\ &= b_1 \end{aligned}$$

olur.

$$[\langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{x}_1 \rangle]' = \left\langle \overrightarrow{g}', \overrightarrow{x}_1 \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{x}'_1 \right\rangle = 0$$

yazılır. Tanım 1.4.6 dan

$$\left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{g} \right\rangle = \rho_g$$

dir. Dolayısıyla,

$$\left\langle \overrightarrow{g}', \overrightarrow{x}_1 \right\rangle = - \left\langle \overrightarrow{x}'_1, \overrightarrow{g} \right\rangle = -\rho_g$$

ve

$$b_1 = -\rho_g$$

elde edilir. $\overrightarrow{g}$ ile iç çarparsak, (2.7) ve (2.8) den,

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{g}^{\prime}, \overrightarrow{g} \rangle &= b_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g} \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{g} \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{g} \rangle \\ &= b_2\end{aligned}$$

ve (2.6) eşitliğinden $\langle \overrightarrow{g}^{\prime}, \overrightarrow{g} \rangle = 0$ olduğu için,

$$b_2 = 0$$

bulunur. Benzer yolla $\overrightarrow{n}$ ile iç çarparsak, (2.7) ve (2.8) den

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{g}^{\prime}, \overrightarrow{n} \rangle &= b_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{n} \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n} \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \rangle \\ &= b_3\end{aligned}$$

ve Tanım 1.4.8 eşitliğinden

$$\langle \overrightarrow{g}^{\prime}, \overrightarrow{n} \rangle = \tau_g$$

dolayısıyla,

$$b_3 = \tau_g$$

olarak bellidir. Katsayıları yerlerine yazarsak,

$$\overrightarrow{g}^{\prime} = -\rho_g \overrightarrow{x}_1 + \tau_g \overrightarrow{n} \tag{2.28}$$

olur.

$\overrightarrow{n}^{\prime}$ lineer bileşenler cinsinden

$$\overrightarrow{n}^{\prime} = c_1 \overrightarrow{x}_1 + c_2 \overrightarrow{g} + c_3 \overrightarrow{n}$$

şeklinde gösterelim ve $\overrightarrow{x}_1$ ile iç çarparak, (2.7) ve (2.8) eşitliklerini gözönünde bulundurursak,

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{n}^{\prime}, \overrightarrow{x}_1 \rangle &= c_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_1 \rangle + c_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{x}_1 \rangle + c_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}_1 \rangle \\ &= c_1\end{aligned}$$

bulunur. (2.7) eşitliğinden ortonormal vektörler için,

$$[\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}_1 \rangle]^{\shortmid} = \left\langle \overrightarrow{n}^{\shortmid}, \overrightarrow{x}_1 \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}_1^{\shortmid} \right\rangle = 0$$

ve böylece

$$\left\langle \overrightarrow{n}^{\shortmid}, \overrightarrow{x}_1 \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}_1^{\shortmid} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{x}_1^{\shortmid}, \overrightarrow{n} \right\rangle$$

dir. Tanım 1.4.7 den $\left\langle \overrightarrow{x}_1^{\shortmid}, \overrightarrow{n} \right\rangle = \rho_n$ eşitliğini kullanırsak,

$$c_1 = -\rho_n$$

elde edilir. $\overrightarrow{n}^{\shortmid}$ lineer denklemimizi $\overrightarrow{g}$ ile iç çarparsak, (2.7) ve (2.8) den

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{n}^{\shortmid}, \overrightarrow{g} \rangle &= c_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g} \rangle + c_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{g} \rangle + c_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{g} \rangle \\ &= c_2 \end{aligned}$$

yazılabilir. Ortonormal vektörler için (2.7) deki eşitlik yardımıyla,

$$[\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{g} \rangle]^{\shortmid} = \left\langle \overrightarrow{n}^{\shortmid}, \overrightarrow{g} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{g}^{\shortmid} \right\rangle = 0$$

ve

$$\left\langle \overrightarrow{n}^{\shortmid}, \overrightarrow{g} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{g}^{\shortmid} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{g}^{\shortmid}, \overrightarrow{n} \right\rangle$$

olduğu görülür. Tanım 1.4.8 den $\langle \overrightarrow{g}^{\shortmid}, \overrightarrow{n} \rangle = \tau_g$ eşitliğini kullanırsak,

$$c_2 = -\tau_g$$

olur. Benzer yolla $\overrightarrow{n}^{\shortmid}$ ile $\overrightarrow{n}$ iç çarpılırsa, (2.7) ve (2.8) den

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{n}^{\shortmid}, \overrightarrow{n} \rangle &= c_1 \langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{n} \rangle + c_2 \langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n} \rangle + c_3 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \rangle \\ &= c_3 \end{aligned}$$

dır. (2.6) eşitliğinden $\langle \overrightarrow{n}^{\shortmid}, \overrightarrow{n} \rangle = 0$ olduğundan

$$c_3 = 0$$

bulunur. $\overrightarrow{n}^{\prime}$ lineer denkleminde bulduğumuz c_1, c_2, c_3 katsayıları yerlerine yazarsak,

$$\overrightarrow{n}^{\prime} = -\rho_n \overrightarrow{x}_1 - \tau_g \overrightarrow{g} \tag{2.29}$$

elde edilir. O halde $\overrightarrow{x}^{\prime}_1, \overrightarrow{g}^{\prime}, \overrightarrow{n}^{\prime}$ vektörlerini lineer denklen sistemi olarak yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x}^{\prime}_1 &= \rho_n \overrightarrow{n} + \rho_g \overrightarrow{g} \\ \overrightarrow{g}^{\prime} &= -\rho_g \overrightarrow{x}_1 + \tau_g \overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{n}^{\prime} &= -\rho_n \overrightarrow{x}_1 - \tau_g \overrightarrow{g} \end{aligned} \tag{2.30}$$

şeklindedir. ρ_n, τ_g, ρ_g büyüklükleri sırasıyla (x) boğaz çizgisinin normal eğriliği, geodezik torsiyonu ve geodezik eğriliği anlamına gelir. Şimdi de (2.18) ve (2.26) daki eşitliklerden faydalanarak regle yüzeyine baglı $p, \overline{p}, q, \overline{q}$ invaryantları ile ρ_n, τ_g, ρ_g büyüklükleri arasındaki bağıntıları bulalım.

(2.26) dan $\overrightarrow{r}_1$ vektörünün türevini alırsak,

$$\overrightarrow{r}^{\prime}_1 = \overline{q}^{\prime} \overrightarrow{x}_1 + \overline{q} \overrightarrow{x}^{\prime}_1 + \overline{p}^{\prime} \overrightarrow{g} + \overline{p} \overrightarrow{g}^{\prime} \tag{2.31}$$

şeklindedir. (2.18) ve (2.31) deki bağıntıları birbirine eşitlersek,

$$\overline{q}^{\prime} \overrightarrow{x}_1 + \overline{q} \overrightarrow{x}^{\prime}_1 + \overline{p}^{\prime} \overrightarrow{g} + \overline{p} \overrightarrow{g}^{\prime} = p \overrightarrow{r}_2$$

ve (2.19) daki $\overrightarrow{r}_2$ nin eşitliğini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} p \overrightarrow{n} &= \overline{q}^{\prime} \overrightarrow{x}_1 + \overline{q} \left(\rho_g \overrightarrow{g} + \rho_n \overrightarrow{n} \right) + \overline{p}^{\prime} \overrightarrow{g} + \overline{p} \left(-\rho_g \overrightarrow{x}_1 + \tau_g \overrightarrow{n} \right) \\ &= \overrightarrow{x}_1 \left(\overline{q}^{\prime} - \overline{p} \rho_g \right) + \overrightarrow{g} \left(\overline{q} \rho_g + \overline{p}^{\prime} \right) + \overrightarrow{n} \left(\overline{q} \rho_n + \overline{p} \tau_g \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin iki tarafındaki $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g}$ ve $\overrightarrow{n}$ vektörlerinin katsayılarını birbirine eşitlersek,

$$\overline{q}^{\prime} - \overline{p} \rho_g = 0 \quad \text{ve} \quad \overline{q} \rho_g + \overline{p}^{\prime} = 0$$

ve buradan

$$\rho_g = \frac{\overline{q}^{\prime}}{\overline{p}} \quad \text{ve} \quad \rho_g = -\frac{\overline{p}^{\prime}}{\overline{q}} \tag{2.32}$$

bulunur. (2.32) deki iki eşitliklerde gerekli işlemler yapılırsa,

$$\rho_g^2\left(\overline{p}^2+\overline{q}^2\right) = \overline{q}^{'2}+\overline{p}^{'2}$$

elde edilir. (2.20) den $\overline{p}^2+\overline{q}^2$ nin eşitini yerine yazarsak,

$$\rho_g^2 = \overline{q}^{'2}+\overline{p}^{'2} \tag{2.33}$$

bulunur.

(2.26) eşitliğinin her iki tarafının türevini alırsak,

$$\overrightarrow{r}'_2 = \overrightarrow{n}'$$

ve böylece (2.16) ve (2.29) daki eşitlikleri yerine yazarsak,

$$-p\overrightarrow{r}_1+q\overrightarrow{r}_3 = \rho_n\overrightarrow{x}_1-\tau_g\overrightarrow{g}$$

olur. Bu son eşitliğin sol tarafındaki $\overrightarrow{r_1}$ ve $\overrightarrow{r_3}$ vektörlerinin yerine (2.26) daki eşitlerini yazar ve ortak çarpan parantezine alırsak,

$$\begin{aligned}-p(\overline{q}\,\overrightarrow{x}_1+\overline{p}\,\overrightarrow{g})+q(\overline{p}\,\overrightarrow{x}_1-\overline{q}\,\overrightarrow{g}) &= -\rho_n\overrightarrow{x}_1-\tau_g\overrightarrow{g}\\ (-p\overline{q}+q\overline{p})\overrightarrow{x}_1-(q\overline{q}+p\overline{p})\overrightarrow{g} &= -\rho_n\overrightarrow{x}_1-\tau_g\overrightarrow{g}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu eşitliğin iki tarafındaki $\overrightarrow{x}_1$ ve $\overrightarrow{g}$ vektörlerinin katsayılarını birbirine eşitlersek,

$$\rho_n = p\overline{q}-q\overline{p} \tag{2.34}$$

ve

$$\tau_g = p\overline{p}+q\overline{q} \tag{2.35}$$

bulunur.

Daha önce elde ettiğimiz (2.34), (2.35) den ρ_n ve τ_g eşitliklerinin karelerini alıp toplarsak,

$$\begin{aligned}\rho_n^2+\tau_g^2 &= (p\overline{q}-q\overline{p})^2+(q\overline{q}+p\overline{p})^2\\ &= p^2\overline{p}^2+q^2\overline{q}^2+q^2\overline{p}^2+p^2\overline{q}^2\\ &= \left(p^2+q^2\right)\left(\overline{q}^2+\overline{p}^2\right)\end{aligned}$$

ve (2.20) göz önünde bulundurulursa $\overline{q}^2+\overline{p}^2$ in eşitini yerine yazarsak,

$$\rho_n^2+\tau_g^2=p^2+q^2 \tag{2.36}$$

elde ederiz.

$[R_1]$: $\overrightarrow{R}_1(s)=\overrightarrow{r_1}+\varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_1$ regle yüzeyi üzerindeki $(x)=\overrightarrow{x}=x(s)$ striksiyon çizgisi üzerinde bir nokta x olsun. $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n}$ ve $\overrightarrow{r}_i$ $(i=1,2,3)$ vektörlerinin vektörel momentleri (1.8) den dolayı

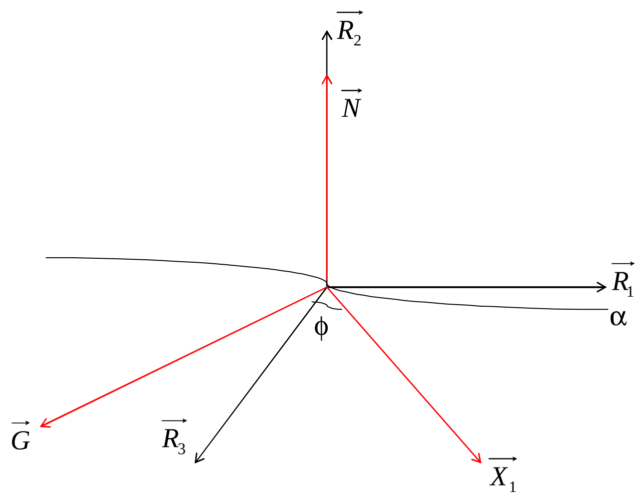
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\overline{x}}_1 &= \overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{x}_1 \\
\overrightarrow{\overline{g}} &= \overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{g} \\
\overrightarrow{\overline{n}} &= \overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{n} \\
\overrightarrow{\overline{r}}_i &= \overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{r}_i \quad i=1,2,3
\end{aligned} \tag{2.37}$$

şeklindedir.

$[R_1]$ regle yüzeyimizin her x noktasını Blaschke $(\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3)$ ve Darboux $(\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N})$ üçyüzlüleri ile ilişkilendirek, $\overrightarrow{X}_1$ vektörünü $\overrightarrow{R}_1$ ve $\overrightarrow{R}_3$ bileşenleri cinsinden yazıp, (2.21) deki eşitliğe benzer olarak lineer bileşenler cinsinden yazılırsa,

$$\overrightarrow{X}_1 = \overline{q}\overrightarrow{R}_1+\overline{p}\overrightarrow{R}_3$$

olmalıdır.



Şekil 2

$\overrightarrow{G} = \overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{X}_1$ olduğunu biliyoruz. Eşitlikte $\overrightarrow{X}_1$ dual birim vektörü yerine $\overrightarrow{R}_1$ ve $\overrightarrow{R}_3$ Blaschke vektörleri cinsinden değerini yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{G} &= \overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{X}_1 \\ &= \overrightarrow{N} \wedge \left(\overline{q}\overrightarrow{R}_1 + \overline{p}\overrightarrow{R}_3\right) \\ &= \overline{q}\left(\overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{R}_1\right) + \overline{p}\left(\overrightarrow{N} \wedge \overrightarrow{R}_3\right) \end{aligned}$$

ve dolayısıyla Darboux ve Blaschke üçyüzlülerinin normalleri birbirine eşit olduğundan

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{R}_2$$

dir. $\overrightarrow{N}$ yerine eşitini yazar ve ortonormal vektörler olduklarını gözönünde bulundurursak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{G} &= \overline{q}\left(\overrightarrow{R}_2 \wedge \overrightarrow{R}_1\right) + \overline{p}\left(\overrightarrow{R}_2 \wedge \overrightarrow{R}_3\right) \\ &= \overline{p}\overrightarrow{R}_1 - \overline{q}\overrightarrow{R}_3 \end{aligned}$$

olur. $\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}$ ve $\overrightarrow{N}$ Darboux vektöleri

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X}_1 &= \overline{q}\overrightarrow{R}_1 + \overline{p}\overrightarrow{R}_3 \\ \overrightarrow{G} &= \overline{p}\overrightarrow{R}_1 - \overline{q}\overrightarrow{R}_3 \\ \overrightarrow{N} &= \overrightarrow{R}_2 \end{aligned} \tag{2.38}$$

şeklinde yazılır.

(2.38) lineer denklem sistemininin çözümünden $\overrightarrow{R}_1$, $\overrightarrow{R}_2$ ve $\overrightarrow{R}_3$ kolayca hesaplanabilir. $\overrightarrow{X}_1$ ve $\overrightarrow{G}$ vektörlerinin eşitliklerinin her iki yanını $\overline{p}$ ve $\overline{q}$ ile çarparak $\overrightarrow{R}_1$, $\overrightarrow{R}_2$ ve $\overrightarrow{R}_3$ vektörleri $\overrightarrow{X}_1$, $\overrightarrow{G}$ ve $\overrightarrow{N}$ vektörlerini cinsinden hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \overline{q}\overrightarrow{X}_1 &= \overline{q}^2\overrightarrow{R}_1 + \overline{p}\,\overline{q}\overrightarrow{R}_3 \\ \overline{p}\overrightarrow{G} &= \overline{p}^2\overrightarrow{R}_1 - \overline{p}\,\overline{q}\overrightarrow{R}_3 \end{aligned}$$

buradan (2.20) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \overline{q}\overrightarrow{X}_1 + \overline{p}\overrightarrow{G} &= (\overline{q}^2 + \overline{p}^2)\,\overrightarrow{R}_1 \\ &= \overrightarrow{R}_1 \end{aligned}$$

veya

$$\overrightarrow{R}_1 = \overline{q}\overrightarrow{X}_1 + \overline{p}\overrightarrow{G}$$

elde edilir. Benzer yolla $\overrightarrow{R}_3$ dual birim vektörünü;

$$\begin{aligned} \overline{p}\overrightarrow{X}_1 &= \overline{p}\,\overline{q}\overrightarrow{R}_1 + \overline{p}^2\overrightarrow{R}_3 \\ -\overline{q}\overrightarrow{G} &= -\overline{p}\,\overline{q}\overrightarrow{R}_1 + \overline{q}^2\overrightarrow{R}_3 \end{aligned}$$

ifadesini taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} \overline{p}\overrightarrow{X}_1 - \overline{q}\overrightarrow{G} &= (\overline{q}^2 + \overline{p}^2)\,\overrightarrow{R}_3 \\ &= \overrightarrow{R}_3 \end{aligned}$$

olur veya

$$\overrightarrow{R}_3 = \overline{p}\overrightarrow{X}_1 - \overline{q}\overrightarrow{G}$$

bulunur. $\overrightarrow{R}_1$, $\overrightarrow{R}_2$, $\overrightarrow{R}_3$ vektörlerini

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1 &= \overline{q}\overrightarrow{X}_1 + \overline{p}\overrightarrow{G} \\ \overrightarrow{R}_2 &= \overrightarrow{N} \\ \overrightarrow{R}_3 &= \overline{p}\overrightarrow{X}_1 - \overline{q}\overrightarrow{G} \end{aligned} \tag{2.39}$$

şeklinde yazarız. Yani Blaschke vektörleri, Darboux vektörleri cinsinden yazılmış olur.

$\overrightarrow{X}'_1, \overrightarrow{G}', \overrightarrow{N}'$ vektörlerini $\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N}$ dual vektörleri cinsinden yazalım. $\overrightarrow{X}_1$ birim dual vektörünü

$$\overrightarrow{X}_1 = \overrightarrow{x}_1 + \varepsilon \overrightarrow{\overline{x}}_1$$

olarak yazarız. (2.37) den $\overrightarrow{\overline{x}}_1$ dual vektörünün eşitini yerine yazarsak

$$\overrightarrow{X}_1 = \overrightarrow{x}_1 + \varepsilon (\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{x}_1)$$

olur. Bu eşitliğin türevini alırsak

$$\overrightarrow{X}'_1 \;=\; \overrightarrow{x}'_1 + \varepsilon (\overrightarrow{x}' \wedge \overrightarrow{x}_1) + \varepsilon \left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{x}'_1\right)$$

dır. $\overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{x}'$ ve (2.27) den $\overrightarrow{x}'_1$ yerine eşitini yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X}'_1 &= \rho_n \overrightarrow{n} + \rho_g \overrightarrow{g} + \varepsilon (\overrightarrow{x}_1 \wedge \overrightarrow{x}_1) + \varepsilon \left[\overrightarrow{x} \wedge \left(\rho_n \overrightarrow{n} + \rho_g \overrightarrow{g}\right)\right] \\ &= \rho_n \overrightarrow{n} + \rho_g \overrightarrow{g} + \varepsilon.0 + \varepsilon \rho_n (\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{n}) + \varepsilon \rho_g (\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{g}) \end{aligned}$$

ve (2.37) den

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X}'_1 &= \rho_n \overrightarrow{n} + \rho_g \overrightarrow{g} + \varepsilon \rho_n \overrightarrow{\overline{n}} + \varepsilon \rho_g \overrightarrow{\overline{g}} \\ &= \rho_g \left(\overrightarrow{g} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{g}}\right) + \rho_n \left(\overrightarrow{n} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{n}}\right) \\ &= \rho_g \overrightarrow{G} + \rho_n \overrightarrow{N} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer yolla, $\overrightarrow{G}$ birim dual vektörünün eşitini gösterirsek

$$\overrightarrow{G} = \overrightarrow{g} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{g}}$$

(2.37) den $\overrightarrow{\overline{g}}$ dual vektörünün eşitini yazarsak

$$\overrightarrow{G} = \overrightarrow{g} + \varepsilon (\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{g})$$

olur. $\overrightarrow{G}$ eşitliğinin türevini aldığımızda

$$\overrightarrow{G}' = \overrightarrow{g}' + \varepsilon \left(\overrightarrow{x}' \wedge \overrightarrow{g}\right) + \varepsilon \left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{g}'\right)$$

yazılır. $\overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{x}^{\prime}$ ve (2.28) den $\overrightarrow{g}^{\prime}$ yerine eşitini yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G}^{\prime} &= -\rho_g \overrightarrow{x}_1 + \tau_g \overrightarrow{n} + \varepsilon \overrightarrow{n} + \varepsilon \left[\overrightarrow{x} \wedge \left(-\rho_g \overrightarrow{x}_1 + \tau_g \overrightarrow{n} \right) \right] \\
&= -\rho_g \overrightarrow{x}_1 + \tau_g \overrightarrow{n} + \varepsilon \overrightarrow{n} - \varepsilon \rho_g \left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{x}_1 \right) + \varepsilon \tau_g \left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{n} \right)
\end{aligned}$$

veya (2.37) den $(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{x}_1)$ ve $(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{n})$ eşitlerini yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G}^{\prime} &= -\rho_g \overrightarrow{x}_1 + \tau_g \overrightarrow{n} + \varepsilon \overrightarrow{n} - \varepsilon \rho_g \overrightarrow{\overline{x}}_1 + \varepsilon \tau_g \overrightarrow{\overline{n}} \\
&= -\rho_g \overrightarrow{x}_1 - \varepsilon \rho_g \overrightarrow{\overline{x}}_1 + \tau_g \overrightarrow{n} + \varepsilon \overrightarrow{n} + \varepsilon \tau_g \overrightarrow{\overline{n}} \\
&= -\rho_g \overrightarrow{X}_1 + (\tau_g + \varepsilon) \overrightarrow{n} + \varepsilon \tau_g \overrightarrow{\overline{n}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. (1.3) den $\varepsilon^2 \overrightarrow{\overline{n}}$ ifadesini eklediğimizde, eşitliği bozmayacaktır. Gerekli düzenlemeleri yapıp, ortak çarpan parantezine alırsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G}^{\prime} &= -\rho_g \overrightarrow{X}_1 + (\varepsilon + \tau_g) \overrightarrow{n} + \varepsilon \tau_g \overrightarrow{\overline{n}} + \varepsilon^2 \overrightarrow{\overline{n}} \\
&= -\rho_g \overrightarrow{X}_1 + (\varepsilon + \tau_g) \left(\overrightarrow{n} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{n}} \right) \\
&= -\rho_g \overrightarrow{X}_1 + (\varepsilon + \tau_g) \overrightarrow{N}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{n} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{n}}$$

birim dual vektöründe (2.37) den $\overrightarrow{\overline{n}}$ yerine eşitini yazdığımızda,

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{n} + \varepsilon \left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{n} \right)$$

olur ve eşitliğin her iki tarafının türevini alırsak,

$$\overrightarrow{N}^{\prime} = \overrightarrow{n}^{\prime} + \varepsilon \left(\overrightarrow{x}^{\prime} \wedge \overrightarrow{n} \right) + \varepsilon \left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{n}^{\prime} \right)$$

ve buradan da $\overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{x}^{\prime}$ ve (2.29) dan $\overrightarrow{n}^{\prime}$ yerine eşitini yazarsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N}^{\prime} &= -\rho_n \overrightarrow{x}_1 - \tau_g \overrightarrow{g} + \varepsilon \left(\overrightarrow{x}_1 \wedge \overrightarrow{n} \right) + \varepsilon \left[\overrightarrow{x} \wedge \left(-\rho_n \overrightarrow{x}_1 - \tau_g \overrightarrow{g} \right) \right] \\
&= -\rho_n \overrightarrow{x}_1 - \tau_g \overrightarrow{g} + \varepsilon \overrightarrow{n} - \varepsilon \rho_n \left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{x}_1 \right) - \varepsilon \tau_g \overrightarrow{g} \left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{g} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. $\varepsilon^2 \overrightarrow{\overline{g}}$ ifadesini eklediğimizde eşitliği bozmayacaktır. Gerekli düzenlemeleri yapıp ortak çarpan parantezine aldığımızda,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N}' &= -\rho_n \overrightarrow{X}_1 - (\tau_g + \varepsilon)\, \overrightarrow{g} - \varepsilon \tau_g \overrightarrow{\overline{g}} - \varepsilon^2 \overrightarrow{\overline{g}} \\
&= -\rho_n \overrightarrow{X}_1 - (\tau_g + \varepsilon) \left(\overrightarrow{g} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{g}} \right) \\
&= -\rho_n \overrightarrow{X}_1 - (\tau_g + \varepsilon)\, \overrightarrow{G}
\end{aligned}$$

olduğunu görürüz. $\overrightarrow{X}'_1$, $\overrightarrow{G}'$ ve $\overrightarrow{N}'$ Darboux vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{X}'_1 &= \rho_g \overrightarrow{G} + \rho_n \overrightarrow{N} \\
\overrightarrow{G}' &= -\rho_g \overrightarrow{X}_1 + (\varepsilon + \tau_g)\, \overrightarrow{N} \\
\overrightarrow{N}' &= -\rho_n \overrightarrow{X}_1 - (\tau_g + \varepsilon)\, \overrightarrow{G}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

yazılır. Bu sistemi matris formunda yazacak olursak,

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{X}'_1 \\ \overrightarrow{G}' \\ \overrightarrow{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \rho_g & \rho_n \\ -\rho_g & 0 & (\tau_g + \varepsilon) \\ -\rho_n & -(\tau_g + \varepsilon) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{X}'_1 \\ \overrightarrow{G}' \\ \overrightarrow{N}' \end{bmatrix}$$

olur. (2.14) eşitliğinde $\overrightarrow{R}'_1$, $\overrightarrow{R}'_2$, $\overrightarrow{R}'_3$ vektörlerini $\overrightarrow{R}_1$, $\overrightarrow{R}_2$, $\overrightarrow{R}_3$ Blaschke vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}'_1 &= P \overrightarrow{R}_2 \\
\overrightarrow{R}'_2 &= -P \overrightarrow{R}_1 + Q \overrightarrow{R}_3 \\
\overrightarrow{R}'_3 &= -Q \overrightarrow{R}_2
\end{aligned}$$

yazılabileceğini göstermiştik. Dolayısıyla bu eşitlikleri lineer matris formunda yazacak olursak,

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{R}'_1 \\ \overrightarrow{R}'_2 \\ \overrightarrow{R}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P & 0 \\ -P & 0 & Q \\ 0 & -Q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{R}_1 \\ \overrightarrow{R}_2 \\ \overrightarrow{R}_3 \end{bmatrix}$$

olur.

2.1.3 Regle Yüzeylerin Ani Hızları

$E_0(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y},\overrightarrow{Z})$ sabit eksenli sistemin merkezi olarak belirtilsin.
$E_1(\overrightarrow{X}_1,\overrightarrow{G},\overrightarrow{N})$ ve $E_2(\overrightarrow{R}_1,\overrightarrow{R}_2,\overrightarrow{R}_3)$ eksen sistemleri, sabit sisteme göre hareketli olan eksen sistemleri olsun. Matris formunu hesaba katarsak, Darboux E_1 ölçüsünün hareketinin ani dönme vektörleri, E_0 sabit ölçüsü ile ilgili olarak bulalım.

Hareket halinde olan (E_1/E_0) ani hızını (ani dönme vektörü)

$$\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}=\overrightarrow{W}_{10}+\varepsilon\overrightarrow{\overline{W}}_{10}$$

E_1 in E_0 sabit eksenli sistemle ani hızı, $(\overrightarrow{X}_1,\overrightarrow{G},\overrightarrow{N})$ Darboux vektörlerinin bileşenleri cinsinden Tanım 1.4.2 den

$$\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}=\left\langle\overrightarrow{N},\overrightarrow{G}^{\prime}\right\rangle\overrightarrow{X}_1+\left\langle\overrightarrow{X}_1,\overrightarrow{N}^{\prime}\right\rangle\overrightarrow{G}+\left\langle\overrightarrow{G},\overrightarrow{X}_1^{\prime}\right\rangle\overrightarrow{N}$$

dir. (2.40) dan $\overrightarrow{X}_1^{\prime},\overrightarrow{G}^{\prime},\overrightarrow{N}^{\prime}$ vektörlerinin eşitlerini yazarsak,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}= & \left\langle\overrightarrow{N},-\rho_g\overrightarrow{X}_1+(\varepsilon+\tau_g)\overrightarrow{N}\right\rangle\overrightarrow{X}_1+\left\langle\overrightarrow{X}_1,-\rho_n\overrightarrow{X}_1-(\tau_g+\varepsilon)\overrightarrow{G}\right\rangle\overrightarrow{G}\\ & +\left\langle\overrightarrow{G},\rho_g\overrightarrow{G}+\rho_n\overrightarrow{N}\right\rangle\overrightarrow{N}\end{aligned}$$

olur. İç çarpımın lineerlik özelliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}= & \left[\left\langle\overrightarrow{N},\overrightarrow{X}_1\right\rangle+(\tau_g+\varepsilon)\left\langle\overrightarrow{N},\overrightarrow{N}\right\rangle\right]\overrightarrow{X}_1+\left[\rho_g\left\langle\overrightarrow{G},\overrightarrow{G}\right\rangle+\rho_n\left\langle\overrightarrow{G},\overrightarrow{N}\right\rangle\right]\overrightarrow{N}\\ & +\left[-\rho_n\left\langle\overrightarrow{X}_1,\overrightarrow{X}_1\right\rangle-(\tau_g+\varepsilon)\left\langle\overrightarrow{X}_1,\overrightarrow{G}\right\rangle\right]\overrightarrow{G}\end{aligned}$$

ve bu eşitlikte $(\overrightarrow{X}_1,\overrightarrow{G},\overrightarrow{N})$ Darboux üçyüzlüsü ortonormal bir sistem olduğundan,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma}_{1/0} &= [0+(\tau_g+\varepsilon)1]\overrightarrow{X}_1+[-\rho_n1-(\tau_g+\varepsilon)0]\overrightarrow{G}+\left[\rho_g1+\rho_n0\right]\overrightarrow{N}\\ &= (\tau_g+\varepsilon)\overrightarrow{X}_1-\rho_n\overrightarrow{G}+\rho_g\overrightarrow{N}\end{aligned}$$

ve böylece,

$$\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}=\overrightarrow{W}_{10}+\varepsilon\overrightarrow{\overline{W}}_{10}=(\tau_g+\varepsilon)\overrightarrow{X}_1-\rho_n\overrightarrow{G}+\rho_g\overrightarrow{N} \qquad (2.41)$$

olduğu görülür. Ani dönme vektöründeki $\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N}$ dual birim vektörlerini reel ve dual kısımlarıyla birlikte yazarsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}_{1/0} &= (\tau_g + \varepsilon)\left(\overrightarrow{x}_1 + \varepsilon \overrightarrow{\overline{x}}_1\right) - \rho_n\left(\overrightarrow{g} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{g}}\right) + \rho_g\left(\overrightarrow{n} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{n}}\right) \\
&= \tau_g \overrightarrow{x}_1 - \rho_n \overrightarrow{g} + \rho_g \overrightarrow{n} + \varepsilon\left(\tau_g \overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{\overline{x}}_1 - \rho_n \overrightarrow{\overline{g}} + \rho_g \overrightarrow{\overline{n}}\right) \qquad (2.42) \\
&= \overrightarrow{W}_{10} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{W}}_{10}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{W}_{10} &= \tau_g \overrightarrow{x}_1 - \rho_n \overrightarrow{g} + \rho_g \overrightarrow{n} \\
\overrightarrow{\overline{W}}_{10} &= \tau_g \overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{\overline{x}}_1 - \rho_n \overrightarrow{\overline{g}} + \rho_g \overrightarrow{\overline{n}}
\end{aligned} \qquad (2.43)$$

elde edilir.

Hareket halindeki (E_2/E_0) ani hızını Tanım 1.4.2 den faydalanarak, $(\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3)$ Blaschke vektörleri cinsinden tanımlarsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}_{2/0} &= \overrightarrow{W}_{20} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{W}}_{20} \\
&= \left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}'_2 \right\rangle \overrightarrow{R}_1 + \left\langle \overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}'_3 \right\rangle \overrightarrow{R}_2 + \left\langle \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}'_1 \right\rangle \overrightarrow{R}_3
\end{aligned}$$

dır. (2.14) den $\overrightarrow{R}'_1, \overrightarrow{R}'_2, \overrightarrow{R}'_3$ vektörlerinin eşitlerini yazarsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}_{2/0} &= \left\langle \overrightarrow{R}_3, -P\overrightarrow{R}_1 + Q\overrightarrow{R}_3 \right\rangle \overrightarrow{R}_1 + \left\langle \overrightarrow{R}_1, -Q\overrightarrow{R}_2 \right\rangle \overrightarrow{R}_2 + \left\langle \overrightarrow{R}_2, P\overrightarrow{R}_2 \right\rangle \overrightarrow{R}_3 \\
&= \left[-P\left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}_1 \right\rangle + Q\left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle\right] \overrightarrow{R}_1 + \left[-Q\left\langle \overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_2 \right\rangle\right] \overrightarrow{R}_2 \\
&\quad + \left[P\left\langle \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_2 \right\rangle\right] \overrightarrow{R}_3
\end{aligned}$$

olur ve $(\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3)$ ortonormal dual vektörler olduklarından,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}_{2/0} &= [P.0 + Q.1]\,\overrightarrow{R}_1 + [-Q.0]\,\overrightarrow{R}_2 + [P.1]\,\overrightarrow{R}_3 \\
&= Q\overrightarrow{R}_1 + P\overrightarrow{R}_3
\end{aligned} \qquad (2.44)$$

bulunur. $\overrightarrow{\Gamma}_{2/0}$ ani hız vektörünü reel ve dual kısımlara ayırırsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}_{2/0} &= (q + \varepsilon\overline{q})\left(\overrightarrow{r}_1 + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_1\right) + (p + \varepsilon\overline{p})\left(\overrightarrow{r}_3 + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_3\right) \\
&= q\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{r}_3 + \varepsilon\left(q\overrightarrow{\overline{r}}_1 + \overline{q}\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{\overline{r}}_3 + \overline{p}\overrightarrow{r}_3\right) \qquad (2.45) \\
&= \overrightarrow{W}_{20} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{W}}_{20}
\end{aligned}$$

ve böylece ani hız vektörünün reel ve dual kısımları

$$\begin{aligned} \overrightarrow{W}_{20} &= q\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{r}_3 \\ \overrightarrow{\overline{W}}_{20} &= q\overrightarrow{\overline{r}}_1 + \overline{q}\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{\overline{r}}_3 + \overline{p}\overrightarrow{r}_3 \end{aligned} \tag{2.46}$$

olarak bellidir (Uğurlu, H., H., 1997).

Burada $\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}$ ve $\overrightarrow{\Gamma}_{2/0}$ dual vektörleri birim değillerdir. Ani hız vektörlerinin birim vektörlerini $\overrightarrow{G}_i$ olarak alıp, birim vektörlerini elde etmeye çalışalım. (1.7) den

$$\overrightarrow{G}_i = \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{i/0}}{\sqrt{\overrightarrow{\Gamma}^2_{i/0}}} \quad (i = 1, 2) \tag{2.47}$$

şeklinde birim vektörleri elde edilir. $\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}$ in birim dual vektörü için

$$\begin{aligned} \overrightarrow{G}_1 &= \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}}{\sqrt{\overrightarrow{\Gamma}^2_{1/0}}} \\ &= \frac{\overrightarrow{W}_{10} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{W}}_{10}}{\sqrt{\left(\overrightarrow{W}_{10} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{W}}_{10}\right)^2}} \end{aligned}$$

dır. Tanım 1.2.8 dual birim vektör tanımından,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{G}_1 &= \frac{\overrightarrow{W}_{10}}{\left\|\overrightarrow{W}_{10}\right\|} + \varepsilon\left(\frac{\overrightarrow{\overline{W}}_{10}}{\left\|\overrightarrow{W}_{10}\right\|} - \frac{\left\langle\overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overline{W}}_{10}\right\rangle}{\left\|\overrightarrow{W}_{10}\right\|^2}\frac{\overrightarrow{W}_{10}}{\left\|\overrightarrow{W}_{10}\right\|}\right) \\ &= \frac{\tau_g\overrightarrow{x}_1 - \rho_n\overrightarrow{g} + \rho_g\overrightarrow{n}}{\sqrt{\tau_g^2 + \rho_n^2 + \rho_g^2}} \\ &\quad +\varepsilon\left(\frac{\tau_g\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{\overline{x}}_1 - \rho_n\overrightarrow{\overline{g}} + \rho_g\overrightarrow{\overline{n}}}{\sqrt{\tau_g^2 + \rho_n^2 + \rho_g^2}} - \frac{-\tau_g}{\sqrt{\tau_g^2 + \rho_n^2 + \rho_g^2}}\frac{\tau_g\overrightarrow{x}\rho -_n\overrightarrow{g} + \rho_g\overrightarrow{n}}{\sqrt{\tau_g^2 + \rho_n^2 + \rho_g^2}}\right) \end{aligned} \tag{2.48}$$

elde edilir. Benzer yolla $\overrightarrow{\Gamma}_{2/0}$ birim dual vektörleri için

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G}_2 &= \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{2/0}}{\sqrt{\overrightarrow{\Gamma}^2_{2/0}}} \\ &= \frac{\overrightarrow{W}_{20} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{W}}_{20}}{\sqrt{\left(\overrightarrow{W}_{20} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{W}}_{20}\right)^2}}\end{aligned}$$

dır. Tanım 1.2.8 deki dual birim vektör tanımından

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G}_2 &= \frac{\overrightarrow{W}_{20}}{\left\|\overrightarrow{W}_{20}\right\|} + \varepsilon\left(\frac{\overrightarrow{\overline{W}}_{20}}{\left\|\overrightarrow{W}_{20}\right\|} - \frac{\left\langle\overrightarrow{W}_{20}, \overrightarrow{\overline{W}}_{20}\right\rangle}{\left\|\overrightarrow{W}_{20}\right\|^2}\frac{\overrightarrow{W}_{20}}{\left\|\overrightarrow{W}_{20}\right\|}\right) \\ &= \frac{q\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{r}_3}{\sqrt{p^2+q^2}} \\ &\quad +\varepsilon\left(\frac{q\overrightarrow{\overline{r}}_1 + \overline{q}\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{\overline{r}}_3 + \overline{p}\overrightarrow{r}_3}{\sqrt{p^2+q^2}} - \frac{q\overline{q}+p\overline{p}}{\sqrt{p^2+q^2}}\frac{q\overrightarrow{r}_1+p\overrightarrow{r}_3}{\sqrt{p^2+q^2}}\right)\end{aligned} \tag{2.49}$$

bulunur.

$\overrightarrow{\Gamma}_{i/0}$ ani hız vektörünün dralini λ_i ile gösterirsek,

$$\overrightarrow{\Gamma}_{i/0} = \overrightarrow{W}_{i0} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{W}}_{i0}$$

olmak üzere, Tanım 1.3.6 tanım gereğince,

$$\lambda_i = \frac{\langle\overrightarrow{W}_{i0}, \overrightarrow{\overline{W}}_{i0}\rangle}{\langle\overrightarrow{W}_{i0}, \overrightarrow{W}_{i0}\rangle} \tag{2.50}$$

ve $i = 1$ için λ_1 e bakacak olursak,

$$\lambda_1 = \frac{\langle\overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overline{W}}_{10}\rangle}{\langle\overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10}\rangle}$$

dır. (2.43) den

$$\lambda_1 = \frac{\left\langle\tau_g\overrightarrow{x}_1 - \rho_n\overrightarrow{g} + \rho_g\overrightarrow{n}, \tau_g\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{\overline{x}}_1 - \rho_n\overrightarrow{\overline{g}} + \rho_g\overrightarrow{\overline{n}}\right\rangle}{\left\langle\tau_g\overrightarrow{x}_1 - \rho_n\overrightarrow{g} + \rho_g\overrightarrow{n}, \tau_g\overrightarrow{x}_1 - \rho_n\overrightarrow{g} + \rho_g\overrightarrow{n}\right\rangle}$$

olur ve buradan da $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{g}$, $\overrightarrow{n}$ birim dual vektörler olduklarından uygun hesaplamalarla

$$\lambda_1 = \frac{\tau_g}{\tau_g^2 + \rho_n^2 + \rho_g^2} \tag{2.51}$$

olduğunu görürüz. Benzer yolla $i = 2$ için λ_2 yi Tanım 1.3.6 Dral tanımından,

$$\lambda_2 = \frac{\overrightarrow{W}_{20}\overline{\overrightarrow{W}}_{20}}{\overrightarrow{W}_{20}^2}$$

dır ve (2.46) dan

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{\left\langle q\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{r}_3, q\overline{\overrightarrow{r}}_1 + \overline{q}\overrightarrow{r}_1 + p\overline{\overrightarrow{r}}_3 + \overline{p}\overrightarrow{r}_3 \right\rangle}{\langle q\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{r}_3, q\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{r}_3 \rangle} \\ &= \frac{q\overline{q} + p\overline{p}}{\sqrt{p^2 + q^2}} \end{aligned}$$

bulunur. (2.35) ve (2.36) eşitliklerini yerlerine yazarsak,

$$\lambda_2 = \frac{\tau_g}{\rho_n^2 + \tau_g^2} \tag{2.52}$$

elde edilir.

$\overrightarrow{W}_{10}$ ve $\overrightarrow{W}_{20}$ vektörleri (2.42) ve (2.45) vektörlerinin reel kısımlarıdır. $\overrightarrow{W}_{10}$ ve $\overrightarrow{W}_{20}$ vektörleri ise $(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n})$ ve $(\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{r}_3)$ üçlülerinin ani dönme vektörleridir. Hareket halindeki striksiyon ve x noktasındaki hız vektörleri (2.42) ve (2.45) in dual kısımları $\overline{\overrightarrow{W}}_{10}$ ve $\overline{\overrightarrow{W}}_{20}$ dir (Uğurlu, H., H., 1997).

2.2 Paralel Regle Yüzeyler

2.2.1 Paralel Regle Yüzeyin P^* ve Q^* İnvartantlarıyla İlişkisi

$[R_1^*]$ regle yüzeyini ve Blaschke üçyüzlüsünü gözönünde bulundurarak, $\overrightarrow{R}_1 = \overrightarrow{R}_1(s)$ regle yüzeyi ve $\Theta = \theta + \varepsilon\overline{\theta} = sbt$ bir dual açısı tanımlayalım.

Paralel regle yüzeyi,

$$\overrightarrow{R}_1^* = \overrightarrow{R}_1 \cos\Theta + \overrightarrow{R}_3 \sin\Theta \tag{2.53}$$

birim dual vektörü ile gösterebiliriz (Blaschke, W., 1949).

$[R_1^*]$, regle yüzeyini gözönüne alarak, (2.53) denkleminin türevini alırsak,

$$\overrightarrow{R}_1^{*\prime} = \overrightarrow{R}_1^{\prime} \cos\Theta + \overrightarrow{R}_3^{\prime} \sin\Theta$$

dır. (2.14) den $\overrightarrow{R}_1^{\prime}$ ve $\overrightarrow{R}_3^{\prime}$ değerlerini yerlerine yazarsak,

$$\overrightarrow{R}_1^{*\prime} = P\overrightarrow{R}_2 \cos\Theta + (-Q\overrightarrow{R}_2) \sin\Theta$$

bulunur. Denklemi kendisi ile iç çarpar, (2.8) den $\overrightarrow{R}_2$ nin birim dual vektör oluğunu gözönünde bulundurarak gerekli işlemleri yaparsak,

$$\begin{aligned} \sqrt{\overrightarrow{R}_1^{*\prime 2}} &= \sqrt{\overrightarrow{R}_2^2 \left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right)^2} \\ &= \left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right) \end{aligned}$$

olur. Buna göre, $\overrightarrow{R}_1^*$ ın türev denklemini kullanarak

$$\overrightarrow{R}_2^* = \frac{\overrightarrow{R}_1^{*\prime}}{\sqrt{\overrightarrow{R}_1^{*\prime 2}}} = \frac{\overrightarrow{R}_2\left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right)}{\left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right)} = \overrightarrow{R}_2 \tag{2.54}$$

elde ederiz. $\overrightarrow{R}_1^*$, $\overrightarrow{R}_2^*$ ve $\overrightarrow{R}_3^*$ ortonormal dual bir sistem olduğundan $\overrightarrow{R}_3^* = \overrightarrow{R}_1^* \wedge \overrightarrow{R}_2^*$ dir. Bu eşitlikde $\overrightarrow{R}_1^*$ yerine (2.53) deki eşitini ve $\overrightarrow{R}_2^*$ yerine (2.54) deki eşitini yazalım.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_3^* &= \left(\overrightarrow{R}_1 \cos\Theta + \overrightarrow{R}_3 \sin\Theta\right) \wedge \overrightarrow{R}_2 \\ &= \cos\Theta\left(\overrightarrow{R}_1 \wedge \overrightarrow{R}_2\right) \wedge + \sin\Theta\left(\overrightarrow{R}_3 \wedge \overrightarrow{R}_2\right) \end{aligned}$$

bulunur. $(\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3)$ üçyüzlüsü ortonormal bir sistem olduğundan,

$$\overrightarrow{R}_3^* = \cos\Theta\overrightarrow{R}_3 - \sin\Theta\overrightarrow{R}_1 \tag{2.55}$$

olduğunu görürüz. Elde ettiğimiz bu eşitlikleri lineer denklem sistemi olarak yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1^* &= \overrightarrow{R}_1 \cos\Theta + \overrightarrow{R}_3 \sin\Theta \\ \overrightarrow{R}_2^* &= \overrightarrow{R}_2 \\ \overrightarrow{R}_3^* &= \overrightarrow{R}_3 \cos\Theta - \overrightarrow{R}_1 \sin\Theta \end{aligned} \tag{2.56}$$

olarak belirtilir. Ayrıca açıklamalardan yola çıkarak (2.2) ve (2.13) bağıntılarını gözönüne alarak P^* ve Q^* invaryantlarının eşitliklerine bakalım. Paralel regle yüzeyler için integral invaryantların

$$P^* = \sqrt{\overrightarrow{R}_1^{*\prime 2}} \tag{2.57}$$

ve

$$Q^* = \frac{\left(\overrightarrow{R}_1^*, \overrightarrow{R}_1^{*\prime}, \overrightarrow{R}_1^{*\prime\prime}\right)}{\overrightarrow{R}_1^{*\prime 2}} \tag{2.58}$$

oldukları açıktır. (2.53) den $\overrightarrow{R}_1^*$ in eşitini yazalım ve daha sonra türevini alalım,

$$\overrightarrow{R}_1^{*\prime} = \overrightarrow{R}_1^{\prime} \cos\Theta + \overrightarrow{R}_3^{\prime} \sin\Theta$$

ve (2.14) den $\overrightarrow{R}_1^{\prime}$ ve $\overrightarrow{R}_3^{\prime}$ bağıntılarının eşitini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1^{*\prime} &= \left(P\overrightarrow{R}_2\right) \cos\Theta + \left(-Q\overrightarrow{R}_2\right) \sin\Theta \\ &= P\overrightarrow{R}_2 \cos\Theta - Q\overrightarrow{R}_2 \sin\Theta \end{aligned}$$

ya da

$$\overrightarrow{R}_1^{*\prime} = \overrightarrow{R}_2 \left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right) \tag{2.59}$$

olur. (2.57) den $\overrightarrow{R}_1^{*\prime 2}$ nin eşitini (2.59) dan yazarsak,

$$P^* = \sqrt{\left(P\cos\Theta - Q\sin\Theta\right)^2}$$

buradan da

$$P^* = P\cos\Theta - Q\sin\Theta \tag{2.60}$$

elde edilir. (2.59) daki denklemin türevini alarak $\overrightarrow{R}_1^{*''}$ nin eşitini bulalım.

$$\overrightarrow{R}_1^{*''} = \left(\overrightarrow{R}_1^{*'}\right)' = \left[(P\cos\Theta - Q\sin\Theta)\,\overrightarrow{R}_2\right]' = (P\cos\Theta - Q\sin\Theta)\,\overrightarrow{R}_2' \tag{2.61}$$

ve (2.14) deki eşitlikten $\overrightarrow{R}_2'$ nin eşitini (2.61) de yerine yazarsak

$$\overrightarrow{R}_1^{*''} = (P\cos\Theta - Q\sin\Theta)\left(-P\overrightarrow{R}_1 + Q\overrightarrow{R}_3\right) \tag{2.62}$$

eşitliğini buluruz. $\overrightarrow{R}_1^{*}$, $\overrightarrow{R}_1^{*'}$ ve $\overrightarrow{R}_1^{*''}$ eşitlerini (2.53), (2.59) ve (2.62) bağıntılarını (2.58) deki Q^* denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
Q^* &= \frac{\left(\overrightarrow{R}_1^{*}, \overrightarrow{R}_1^{*'}, \overrightarrow{R}_1^{*''}\right)}{\overrightarrow{R}_1^{*'2}} \\
&= \frac{\left[\left(\overrightarrow{R}_1\cos\Theta + \overrightarrow{R}_3\sin\Theta\right), (P\cos\Theta - Q\sin\Theta)\overrightarrow{R}_2, (P\cos\Theta - Q\sin\Theta)\left(-P\overrightarrow{R}_1 + Q\overrightarrow{R}_3\right)\right]}{(P\cos\Theta - Q\sin\Theta)^2} \\
&= \frac{\left[(P\cos\Theta - Q\sin\Theta)^2\left(\overrightarrow{R}_1\cos\Theta + \overrightarrow{R}_3\sin\Theta\right), \overrightarrow{R}_2, \left(-P\overrightarrow{R}_1 + Q\overrightarrow{R}_3\right)\right]}{(P\cos\Theta - Q\sin\Theta)^2} \\
&= \left[\left(\overrightarrow{R}_1\cos\Theta + \overrightarrow{R}_3\sin\Theta\right), \overrightarrow{R}_2, \left(-P\overrightarrow{R}_1 + Q\overrightarrow{R}_3\right)\right]
\end{aligned}$$

ve Tanım 1.2.12 den

$$\begin{aligned}
Q^* &= \left\langle \left(\overrightarrow{R}_1\cos\Theta + \overrightarrow{R}_3\sin\Theta\right) \wedge \overrightarrow{R}_2, \left(-P\overrightarrow{R}_1 + Q\overrightarrow{R}_3\right)\right\rangle \\
&= \left\langle \cos\Theta\,\overrightarrow{R}_3 + \sin\Theta\left(-\overrightarrow{R}_1\right), \left(-P\overrightarrow{R}_1 + Q\overrightarrow{R}_3\right)\right\rangle \\
&= Q\cos\Theta\left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}_3\right\rangle + P\sin\Theta\left\langle \overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_1\right\rangle
\end{aligned}$$

olur. $\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3$ ortonormal birim vektörler olduklarından,

$$Q^* = Q\cos\Theta + P\sin\Theta \tag{2.63}$$

elde edilir. O halde P^* ve Q^* büyüklüklerini Θ açısı ile ilişkilendirdiğimizde

$$\begin{aligned}
P^* &= P\cos\Theta - Q\sin\Theta \qquad (2.64)\\
Q^* &= P\sin\Theta + Q\cos\Theta
\end{aligned}$$

bağıntıları bulunur.

P ve Q bağıntıları invaryanttırlar ve

$$\Theta = \theta + \varepsilon\overline{\theta} = sbt$$

dual açısı olmak üzere $[R_1^*]$ regle yüzeyinin P^* ve Q^* büyüklükleri de aynı zamanda invaryanttır. Böylece s parametresi de $[R_1]$ regle yüzeyinin invaryant parametresidir. (2.64) deki büyüklüklerin reel ve dual kısımlarını Tanım 1.2.9 daki Taylor açılımı yardımıyla bulalım. P^*, Q^*, P ve Q dual sayıları aşağıdaki gibidir;

$$P^* = p^* + \varepsilon\overline{p}^*, \quad Q^* = q^* + \varepsilon\overline{q}^*, \quad P = p + \varepsilon\overline{p}, \quad Q = q + \varepsilon\overline{q}, \tag{2.65}$$

(2.60) daki eşitliğinde Tanım 1.2.9 daki $\sin\Theta$ ve $\cos\Theta$ nin açılımlarını yazarsak,

$$\begin{aligned} P^* &= p^* + \varepsilon\overline{p}^* \\ &= (p + \varepsilon\overline{p})\left[\cos\theta - \varepsilon\overline{\theta}\sin\theta\right] - (q + \varepsilon\overline{q})\left[\sin\theta + \varepsilon\overline{\theta}\cos\theta\right] \\ &= p\cos\theta - q\sin\theta + \varepsilon\left(\overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta - \overline{\theta}p\sin\theta - \overline{\theta}q\cos\theta\right) \end{aligned}$$

dır. Reel ve dual kısımların eşitliğinden,

$$\begin{aligned} p^* &= p\cos\theta - q\sin\theta \\ \overline{p}^* &= \overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta - \overline{\theta}p\sin\theta - \overline{\theta}q\cos\theta \end{aligned} \tag{2.66}$$

elde edilir. Tanım 1.2.9 dan faydalanarak (2.66) nın bulunuşuna benzer yolla (2.64) deki Q^* eşitliğini reel ve dual kısımlarına ayıralım.

$$\begin{aligned} Q^* &= q^* + \varepsilon\overline{q}^* \\ &= P\sin\Theta + Q\cos\Theta \\ &= (p + \varepsilon\overline{p})\left[\sin\theta + \varepsilon\overline{\theta}\cos\theta\right] - (q + \varepsilon\overline{q})\left[\cos\theta - \varepsilon\overline{\theta}\sin\theta\right] \\ &= p\sin\theta - q\cos\theta + \varepsilon\left[\overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}\left(p\cos\theta - q\sin\theta\right)\right] \end{aligned}$$

reel ve dual kısımların eşitliğinden,

$$\begin{aligned} q^* &= p\sin\theta - q\cos\theta \\ \overline{q}^* &= \overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}\,(p\cos\theta - q\sin\theta) \end{aligned} \tag{2.67}$$

şeklinde buluruz. Eğer $\theta = 0$ seçilirse (2.66) daki eşitlikler

$$p^* = p \tag{2.68}$$

ve

$$\overline{p}^* = \overline{p} - \overline{\theta} q \tag{2.69}$$

bulunur. Benzer şekilde $\theta = 0$ alınırsa (2.67) daki bağıntılar

$$q^* = q \tag{2.70}$$

ve

$$\overline{q}^* = \overline{q} + \overline{\theta} p \tag{2.71}$$

bulunur. Aynı işlemler birde $\overline{\theta} = 0$ seçilerek tekrarlanırsa

$$\begin{aligned} p^* &= p\cos\theta - q\sin\theta \\ q^* &= p\sin\theta + q\cos\theta \\ \overline{p}^* &= \overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta \\ \overline{q}^* &= \overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta \end{aligned} \tag{2.72}$$

olacaktır.

2.2.2 Paralel Regle Yüzeylerin Eğrilikleri

$[R_1^*]$ regle yüzeyinin (x^*) striksiyon çizgisinin geometrik yerini bulalım.

Paralel regle yüzey olma bağıntısından,

$$\begin{aligned} f: \quad [R_1] &\to [R_1^*] \\ P &\to f(P) = P + ra(P) \end{aligned} \tag{2.73}$$

dir.

Paralel regle yüzey tanımı gereğince, paralel regle yüzeyin boğaz çizgisini x^* ve $\overrightarrow{r}_2$ yi yüzeyin normali olarak alırsak,

$$\overrightarrow{x}^* = \overrightarrow{x} + \lambda \overrightarrow{r}_2 \tag{2.74}$$

şeklinde yazarız. Bu eşitliğin s parametresine göre türevini alırsak,

$$\frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds} = \frac{dx}{ds} + \frac{d\lambda}{ds}\overrightarrow{r}_2 + \lambda \frac{d\overrightarrow{r}_2}{ds}$$

olur, yani

$$\overrightarrow{x}^{*\prime} = \overrightarrow{x}^{\prime} + \lambda^{\prime}\overrightarrow{r}_2 + \lambda \overrightarrow{r}_2^{\prime}$$

bulunur. Burada $\overrightarrow{x}^{\prime} = \overrightarrow{x}_1 = \overline{q}\,\overrightarrow{r}_1 + \overline{p}\,\overrightarrow{r}_3$ olduğu göz önüne alınır ve (2.16) da $\overrightarrow{r}_2^{\prime}$ nin eşitini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x}^{*\prime} &= \overrightarrow{x}_1 + \lambda^{\prime}\overrightarrow{r}_2 + \lambda\left(-p\,\overrightarrow{r}_1 + q\,\overrightarrow{r}_3\right) \\ &= \left(\overline{q} - \lambda p\right)\overrightarrow{r}_1 + \left(\overline{p} + \lambda q\right)\overrightarrow{r}_3 + \lambda^{\prime}\overrightarrow{r}_2 \end{aligned} \tag{2.75}$$

veya

$$\overrightarrow{x}^{*\prime} = \overrightarrow{x}_1^* = \overline{q}^*\,\overrightarrow{r}_1^* + \overline{p}^*\,\overrightarrow{r}_3^* \tag{2.76}$$

olduğundan, Tanım 1.3.7 den (2.56) daki eşitlikleri reel ve dual kısımlara ayırdığımızda

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}_1^* &= \cos\theta\,\overrightarrow{r}_1 + \sin\theta\,\overrightarrow{r}_3 \\ \overrightarrow{r}_2^* &= \overrightarrow{n}^* \\ \overrightarrow{r}_3^* &= -\sin\theta\,\overrightarrow{r}_1 + \cos\theta\,\overrightarrow{r}_3 \end{aligned} \tag{2.77}$$

elde edileceği açıktır. Bu denklemleri (2.76) denkleminde yerine yazarsak,

$$\overrightarrow{x}^{*\prime} = \left(\overline{q}^*\cos\theta - \overline{p}^*\sin\theta\right)\overrightarrow{r}_1 + \left(\overline{q}^*\sin\theta + \overline{p}^*\cos\theta\right)\overrightarrow{r}_3$$

dir. Bu eşitliği (2.75) bağıntısı ile eşitlersek,

$$\begin{aligned} \left(\overline{q} - \lambda p\right) &= \overline{q}^*\cos\theta - \overline{p}^*\sin\theta \\ \left(\overline{p} + \lambda q\right) &= \overline{q}^*\sin\theta + \overline{p}^*\cos\theta \end{aligned}$$

ve burada $\theta = 0$ alırsak

$$\begin{aligned} \overline{q}^* &= \overline{q} - \lambda p \\ \overline{p}^* &= \overline{p} + \lambda q \end{aligned} \tag{2.78}$$

olduğunu görürüz. (2.66) ve (2.67) eşitliklerinde $\theta = 0$ aldığımızda (2.69) ve (2.71) den

$$\begin{aligned} \overline{p}^* &= \overline{p} - \overline{\theta} q \\ \overline{q}^* &= \overline{q} + \overline{\theta} p \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. (2.78) ile (2.69) ve (2.71) birlikte ele alırsak,

$$\overline{\theta} = -\lambda \tag{2.79}$$

elde ederiz. (2.74) denkleminde (2.79) kullanılırsa

$$\overrightarrow{x}^* = \overrightarrow{x} - \overline{\theta}\,\overrightarrow{r}_2 \tag{2.80}$$

olarak striksiyon çizgisinin geometrik yerini buluruz. $\overrightarrow{x}^*$ striksiyon çizgisi üzerindeki herbir x^* noktası bir $[R_1^*]$ regle yüzeyinin Darboux ve Blaschke üçyüzlülerine karşılık gelir.

Eğer $(\overrightarrow{r}^*_1, \overrightarrow{r}^*_2, \overrightarrow{r}^*_3)$ ve $(\overrightarrow{x}^*_1 = \overrightarrow{x}^{*\prime}, \overrightarrow{g}^* = \overrightarrow{n}^* \wedge \overrightarrow{x}^*_1, \overrightarrow{n}^*)$ sırasıyla taban üçlüleri ise o zaman birim baz vektörleri ve bunların s parametresine göre türevleri arasındaki bağıntıya bakalım. $[R_1^*]$ regle yüzeyinin x^* boğaz çizgisini s^* yay uzunluğuna göre belirttiğimizde

$$\overrightarrow{x}^{*\prime} = \frac{d\overrightarrow{x}^*}{d\overrightarrow{s}^*}.\frac{d\overrightarrow{s}^*}{d\overrightarrow{s}} = \overline{q}^*\overrightarrow{r}^*_1 + \overline{p}^*\overrightarrow{r}^*_3 \tag{2.81}$$

olur. Öyleyse

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{s}^*}{d\overrightarrow{s}} &= \left[\left\langle \frac{d\overrightarrow{s}^*}{d\overrightarrow{s}}, \frac{d\overrightarrow{s}^*}{d\overrightarrow{s}} \right\rangle\right]^{1/2} \\ &= [\langle \overline{q}^*\overrightarrow{r_1} + \overline{p}^*\overrightarrow{r_3}, \overline{q}^*\overrightarrow{r_1} + \overline{p}^*\overrightarrow{r_3}\rangle]^{1/2} \\ &= [\langle \overline{q}^*\overrightarrow{r_1}, \overline{q}^*\overrightarrow{r_1}\rangle + \langle \overline{q}^*\overrightarrow{r_1}, \overline{p}^*\overrightarrow{r_3}\rangle + \langle \overline{p}^*\overrightarrow{r_3}, \overline{q}^*\overrightarrow{r_1}\rangle + \langle \overline{p}^*\overrightarrow{r_3}, \overline{q}^*\overrightarrow{r_3}\rangle] \\ &= \sqrt{\overline{q}^{*2} + \overline{p}^{*2}} \end{aligned} \tag{2.82}$$

buluruz. $\overline{q}^{*2} + \overline{p}^{*2}$ ifadesine A dersek

$$\sqrt{A} = \frac{ds^*}{ds} = \sqrt{\overline{q}^{*2} + \overline{p}^{*2}} \tag{2.83}$$

veya

$$A = \overline{q}^{*2} + \overline{p}^{*2} \tag{2.84}$$

dir. (2.69) ve (2.71) deki bağıntıları (2.84) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} A &= \overline{q}^{*2} + \overline{p}^{*2} \\ &= \left(\overline{q} + \overline{\theta} p\right)^2 + \left(\overline{p} - \overline{\theta} q\right)^2 \\ &= \overline{q}^2 + \overline{p}^2 + 2\overline{\theta}\left(\overline{q} p - \overline{p} q\right) + \overline{\theta}^2\left(p^2 + q^2\right) \end{aligned} \tag{2.85}$$

bulunur. (2.20) den $\overline{q}^2 + \overline{p}^2$ in eşitini, (2.33) ve (2.36) eşitliklerinde yerlerine yazarsak,

$$A = 1 + 2\overline{\theta}\rho_n + \overline{\theta}^2\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right) \tag{2.86}$$

elde edilir. $\overrightarrow{x}_1^*$ nü s^* parametresi cinsinden ifade edersek,

$$\overrightarrow{x}_1^* = \frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds^*} = \frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds}\frac{ds}{ds^*} = \frac{d\overrightarrow{x}^*}{ds}\frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{\overrightarrow{x}_1^*}{\sqrt{A}}$$

ve (2.75) den s parametresine göre $\overrightarrow{x}_1^*$ nin eşitini yerine yazarsak,

$$\overrightarrow{x}_1^* = \frac{\overrightarrow{x}_1^*}{\sqrt{A}} = \frac{\overline{q}^*\overrightarrow{r}_1^* + \overline{p}^*\overrightarrow{r}_3^*}{\sqrt{A}}$$

olur. Buradan,

$$\overrightarrow{x}_1^* = \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_3^*$$

buluruz. Benzer yolla s^* parametresi cinsinden $\overrightarrow{g}^*$ ın eşitini gösterelim. $(\overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^*)$ Darboux üçyüzlüsü ortonormal bir üçyüzlüdür. Buradan,

$$\overrightarrow{g}^* = \overrightarrow{n}^* \wedge \overrightarrow{x}_1^*$$

olacaktır. (2.19) ve (2.56) dan

$$\overrightarrow{r}_2^* = \overrightarrow{n}^* \tag{2.87}$$

eşitini ve s^* parametresi cinsinden bulduğumuz $\overrightarrow{x}_1^*$ ifadesini,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{g}^* &= \overrightarrow{r}_2^* \wedge \left(\frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_3^*\right) \\ &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}(\overrightarrow{r}_2^* \wedge \overrightarrow{r}_1^*) + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}(\overrightarrow{r}_2^* \wedge \overrightarrow{r}_3^*)\end{aligned}$$

olur ve $(\overrightarrow{r}_1^*, \overrightarrow{r}_2^*, \overrightarrow{r}_3^*)$ ortonormal bir sistem olduğundan dolayı

$$\overrightarrow{g}^* = \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_3^*$$

elde ediriz. $\overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^*$ vektörlerini $\overrightarrow{r}_1^*, \overrightarrow{r}_2^*, \overrightarrow{r}_3^*$ vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}_1^* &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_3^* \\ \overrightarrow{g}^* &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_3^* \qquad (2.88) \\ \overrightarrow{n}^* &= \overrightarrow{r}_2^*\end{aligned}$$

şeklinde yazarız. Şimdi bu denklem sistemi yardımı ile lineer denklem sisteminin çözümünden $\overrightarrow{r}_1^*, \overrightarrow{r}_2^*, \overrightarrow{r}_3^*$ Blaschke vektörlerini $\overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^*$ Darboux vektörleri cinsinden yazalım.

$\overrightarrow{r}_1^*$ için (2.88) deki birinci ve ikinci eşitlikleri sırayla $\overline{q}^*$ ve $\overline{p}^*$ invaryantları ile çarparsak,

$$\begin{aligned}\overline{q}^*\overrightarrow{x}_1^* &= \frac{\overline{q}^{*2}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_1^* + \frac{\overline{p}^*\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_3^* \\ \overline{p}^*\overrightarrow{g}^* &= \frac{\overline{p}^{*2}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_1^* - \frac{\overline{q}^*\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_3^*\end{aligned}$$

ve taraf tarafa toplarsak,

$$\overline{q}^*\overrightarrow{x}_1^* + \overline{p}^*\overrightarrow{g}^* = \left(\frac{\overline{q}^{*2} + \overline{p}^{*2}}{\sqrt{A}}\right)\overrightarrow{r}_1^*$$

olacaktır. (2.83) den $\overline{q}^{*2} + \overline{p}^{*2}$ nın eşitini yazarsak

$$\sqrt{A}\overrightarrow{r}_1^* = \overline{q}^*\overrightarrow{x}_1^* + \overline{p}^*\overrightarrow{g}^*$$

dır. Her iki tarafı $\sqrt{A}$ ile bölersek,

$$\overrightarrow{r}_1^* = \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^*$$

buluruz. $\overrightarrow{r}_1^*$ ın elde edilişine benzer yolla $\overrightarrow{r}_3^*$ ın eşitini bulalım. (2.88) deki $\overrightarrow{x}_1^*$ ve $\overrightarrow{g}^*$ sırasıyla $\overline{p}^*$ ve $(-\overline{q}^*)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}
\overline{p}^*\overrightarrow{x}_1^* &= \frac{\overline{q}^*\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_1^* + \frac{\overline{p}^{*2}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_3^* \\
-\overline{q}^*\overrightarrow{g}^* &= -\frac{\overline{p}^*\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_1^* + \frac{\overline{q}^{*2}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_3^*
\end{aligned}$$

ve taraf tarafa toplarsak,

$$\overline{p}^*\overrightarrow{x}_1^* - \overline{q}^*\overrightarrow{g}^* = \left(\frac{\overline{q}^{*2} + \overline{p}^{*2}}{\sqrt{A}}\right)\overrightarrow{r}_3^*$$

olur. (2.83) den $\overline{q}^{*2} + \overline{p}^{*2}$ yı denklemde yerine yazarsak,

$$\sqrt{A}\,\overrightarrow{r}_1^* = \overline{p}^*\overrightarrow{x}_1^* - \overline{q}^*\overrightarrow{g}^*$$

buluruz. Her iki tarafı $\sqrt{A}$ ile bölersek,

$$\overrightarrow{r}_3^* = \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^*$$

elde ederiz. $(\overrightarrow{r}_1^*, \overrightarrow{r}_2^*, \overrightarrow{r}_3^*)$ üçyüzlüsünü lineer denklem sistemi şeklinde yazdığımızda,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}_1^* &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^* \\
\overrightarrow{r}_2^* &= \overrightarrow{n}^* \qquad\qquad (2.89) \\
\overrightarrow{r}_3^* &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^*
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$\overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^*$ Darboux vektörlerinin türevlerini Darboux vektörleri cinsinden göstereceğiz. $\overrightarrow{x}_1^{*\prime}, \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{n}^{*\prime}$ leri $\overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^*$ lerin lineer bileşenleri cinsinden yazarsak,

$$\overrightarrow{x}_1^{*\prime} = a_1 \overrightarrow{x}_1^{*} + a_2 \overrightarrow{g}^{*} + a_3 \overrightarrow{n}^{*}$$
$$\overrightarrow{g}^{*\prime} = b_1 \overrightarrow{x}_1^{*} + b_2 \overrightarrow{g}^{*} + b_3 \overrightarrow{n}^{*}$$
$$\overrightarrow{n}^{*\prime} = c_1 \overrightarrow{x}_1^{*} + c_2 \overrightarrow{g}^{*} + c_3 \overrightarrow{n}^{*}$$

şeklinde olur. $\overrightarrow{x}_1^{*\prime}$ sırasıyla $\overrightarrow{x}_1^{*}$, $\overrightarrow{g}^{*}$, $\overrightarrow{n}^{*}$ ile iç çarpalım.

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{x}_1^{*\prime}, \overrightarrow{x}_1^{*}\right\rangle &= \left\langle a_1 \overrightarrow{x}_1^{*} + a_2 \overrightarrow{g}^{*} + a_3 \overrightarrow{n}^{*}, \overrightarrow{x}_1^{*}\right\rangle \\ &= a_1 \left\langle \overrightarrow{x}_1^{*}, \overrightarrow{x}_1^{*}\right\rangle + a_2 \left\langle \overrightarrow{g}^{*}, \overrightarrow{x}_1^{*}\right\rangle + a_3 \left\langle \overrightarrow{n}^{*}, \overrightarrow{x}_1^{*}\right\rangle\end{aligned}$$

ve $\overrightarrow{x}_1^{*}$, $\overrightarrow{g}^{*}$, $\overrightarrow{n}^{*}$ ortonormal dual birim vektörler olduklarından,

$$\left\langle \overrightarrow{x}_1^{*\prime}, \overrightarrow{x}_1^{*}\right\rangle = a_1 1 + a_2 0 + a_3 0 = a_1$$

olur. (2.6) dan birim dual vektör için $\left\langle \overrightarrow{x}_1^{*\prime}, \overrightarrow{x}_1^{*}\right\rangle = 0$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$a_1 = 0$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{x}_1^{*\prime}, \overrightarrow{g}^{*}\right\rangle &= \left\langle a_1 \overrightarrow{x}_1^{*} + a_2 \overrightarrow{g}^{*} + a_3 \overrightarrow{n}^{*}, \overrightarrow{g}^{*}\right\rangle \\ &= a_1 \left\langle \overrightarrow{x}_1^{*}, \overrightarrow{g}^{*}\right\rangle + a_2 \left\langle \overrightarrow{g}^{*}, \overrightarrow{g}^{*}\right\rangle + a_3 \left\langle \overrightarrow{n}^{*}, \overrightarrow{g}^{*}\right\rangle\end{aligned}$$

ve $\overrightarrow{x}_1^{*}$, $\overrightarrow{g}^{*}$, $\overrightarrow{n}^{*}$ ortonormal dual vektörler olduklarından,

$$\left\langle \overrightarrow{x}_1^{*\prime}, \overrightarrow{g}^{*}\right\rangle = a_2$$

dır. Tanım 1.4.6 dan $\left\langle \overrightarrow{x}_1^{*\prime}, \overrightarrow{g}^{*}\right\rangle = \rho_g^{*}$ olup,

$$a_2 = \rho_g^{*}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{x}_1^{*\prime}, \overrightarrow{n}^{*}\right\rangle &= \left\langle a_1 \overrightarrow{x}_1^{*} + a_2 \overrightarrow{g}^{*} + a_3 \overrightarrow{n}^{*}, \overrightarrow{n}^{*}\right\rangle \\ &= a_1 \left\langle \overrightarrow{x}_1^{*}, \overrightarrow{n}^{*}\right\rangle + a_2 \left\langle \overrightarrow{g}^{*}, \overrightarrow{n}^{*}\right\rangle + a_3 \left\langle \overrightarrow{n}^{*}, \overrightarrow{n}^{*}\right\rangle\end{aligned}$$

$\overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^*$ ortonormal dual birim vektörler olduklarından,

$$\left\langle \overrightarrow{x}_1^{*\prime}, \overrightarrow{n}^* \right\rangle = a_3$$

yazılır. Tanım 1.4.7 den $\left\langle \overrightarrow{x}_1^{*\prime}, \overrightarrow{n}^* \right\rangle = \rho_n^*$ olup

$$a_3 = \rho_n^*$$

ve böylece a_1, a_2, a_3 ün eşitini lineer denklem sistemindeki $\overrightarrow{x}_1^{*\prime}$ denkleminde yerlerine yazarsak,

$$\overrightarrow{x}_1^{*\prime} = \rho_g^* \overrightarrow{g}^* + \rho_n^* \overrightarrow{n}^*$$

elde edilir. Bu eşitlik s^* parametresine göre ilişkilendirilmiştir. s parametresiyle ilişkisine bakarsak,

$$\overrightarrow{x}_1^{*\prime} = \frac{d\overrightarrow{x}_1^*}{ds^*} = \frac{d\overrightarrow{x}_1^*}{ds}\frac{ds}{ds^*} = \frac{d\overrightarrow{x}_1^*}{ds}\frac{1}{\sqrt{A}}$$

ve

$$\frac{d\overrightarrow{x}_1^*}{ds} = \sqrt{A}\frac{d\overrightarrow{x}_1^*}{ds^*}$$

yani

$$\overrightarrow{x}_1^{*\prime} = \sqrt{A}\left(\rho_g^* \overrightarrow{g}^* + \rho_n^* \overrightarrow{n}^*\right)$$

elde edilir. Benzer yolla $\overrightarrow{g}^{*\prime}$ sırasıyla $\overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^*$ ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{x}_1^* \rangle &= \langle b_1 \overrightarrow{x}_1^* + b_2 \overrightarrow{g}^* + b_3 \overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{x}_1^* \rangle \\
&= b_1 \langle \overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{x}_1^* \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{x}_1^* \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{x}_1^* \rangle
\end{aligned}$$

ve $\overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^*$ ler ortonormal dual birim vektörler olduklarından,

$$\langle \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{x}_1^* \rangle = b_1$$

olur. Ayrıca

$$[\langle \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{x}_1^* \rangle]' = \left\langle \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{x}_1^* \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{x}_1^{*\prime} \right\rangle = 0$$

ve

$$\left\langle \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{x}_1^{*} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{g}^{*}, \overrightarrow{x}_1^{*\prime} \right\rangle$$

dır. Tanım 1.4.6 dan

$$\left\langle \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{x}_1^{*} \right\rangle = -\rho_g^*$$

ve

$$b_1 = -\rho_g^*$$

bulunur. Benzer yolla

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{g}^{*} \rangle &= \langle b_1 \overrightarrow{x}_1^{*} + b_2 \overrightarrow{g}^{*} + b_3 \overrightarrow{n}^{*}, \overrightarrow{g}^{*} \rangle \\ &= b_1 \langle \overrightarrow{x}_1^{*}, \overrightarrow{g}^{*} \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{g}^{*}, \overrightarrow{g}^{*} \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{n}^{*}, \overrightarrow{g}^{*} \rangle \end{aligned}$$

$\overrightarrow{x}_1^{*}, \overrightarrow{g}^{*}, \overrightarrow{n}^{*}$ ortonormal dual vektörler olduklarından,

$$\langle \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{g}^{*} \rangle = b_2$$

dır. (2.6) dan birim dual vektör için $\langle \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{g}^{*} \rangle = 0$ olup

$$b_2 = 0$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{n}^{*} \rangle &= \langle b_1 \overrightarrow{x}_1^{*} + b_2 \overrightarrow{g}^{*} + b_3 \overrightarrow{n}^{*}, \overrightarrow{n}^{*} \rangle \\ &= b_1 \langle \overrightarrow{x}_1^{*}, \overrightarrow{n}^{*} \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{g}^{*}, \overrightarrow{n}^{*} \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{n}^{*}, \overrightarrow{n}^{*} \rangle \end{aligned}$$

dır. $\overrightarrow{x}_1^{*}, \overrightarrow{g}^{*}, \overrightarrow{n}^{*}$ ortonormal dual vektörler olduklarından,

$$\langle \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{n}^{*} \rangle = b_1 0 + b_2 0 + b_3 1 = b_3$$

olacaktır. Tanım 1.4.8 den $\langle \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{n}^{*} \rangle = \tau_g^*$ olup,

$$b_3 = \rho_g^*$$

ve böylece b_1, b_2, b_3 ün eşitini lineer denklem sistemindeki $\overrightarrow{g}^{*\prime}$ denkleminde yerlerine yazarsak,

$$\overrightarrow{g}^{*\prime} = -\rho_g^* \overrightarrow{x}_1^{*} + \tau_g^* \overrightarrow{n}^{*}$$

elde edilir. Bu eşitlik s^* parametresine göre ilişkilendirilmiştir. s parametresiyle ilişkisine bakarsak, $\overrightarrow{x}^{*\prime}$ nin s parametresiyle ilişkisine benzer yolla

$$\overrightarrow{g}^{*\prime} = \frac{d\overrightarrow{g}^*}{ds^*} = \frac{d\overrightarrow{g}^*}{ds}\frac{ds}{ds^*} = \frac{d\overrightarrow{g}^*}{ds}\frac{1}{\sqrt{A}}$$

ve

$$\frac{d\overrightarrow{g}^*}{ds} = \sqrt{A}\frac{d\overrightarrow{g}^*}{ds^*}$$

buradan

$$\overrightarrow{g}^{*\prime} = \sqrt{A}\left(-\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* + \tau_g^*\overrightarrow{n}^*\right)$$

dır. Benzer yolla $\overrightarrow{n}^{*\prime}$ sırasıyla $\overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^*$ ile iç çarpılırsa,

$$\begin{aligned}\langle\overrightarrow{n}^{*\prime}, \overrightarrow{x}_1^*\rangle &= \langle c_1\overrightarrow{x}_1^* + c_2\overrightarrow{g}^* + c_3\overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{x}_1^*\rangle \\ &= c_1\langle\overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{x}_1^*\rangle + c_2\langle\overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{x}_1^*\rangle + c_3\langle\overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{x}_1^*\rangle\end{aligned}$$

yazılır. $\overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^*$ ortonormal dual vektörler olduklarından,

$$\langle\overrightarrow{n}^{*\prime}, \overrightarrow{x}_1^*\rangle = c_1$$

elde edilir. Tanım 1.4.7 den $\left\langle\overrightarrow{x}_1^{*\prime}, \overrightarrow{n}^*\right\rangle = \rho_n^*$ olacağından

$$[\langle\overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{x}_1^*\rangle]^\prime = \left\langle\overrightarrow{n}^{*\prime}, \overrightarrow{x}_1^*\right\rangle + \left\langle\overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{x}_1^{*\prime}\right\rangle = 0$$

ya da

$$\left\langle\overrightarrow{n}^{*\prime}, \overrightarrow{x}_1^*\right\rangle = -\left\langle\overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{x}_1^{*\prime}\right\rangle$$

olur ve buradan

$$\left\langle\overrightarrow{n}^{*\prime}, \overrightarrow{x}_1^*\right\rangle = -\rho_n^*$$

veya

$$c_1 = -\rho_n^*$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\langle\overrightarrow{n}^{*\prime}, \overrightarrow{g}^*\rangle &= \langle c_1\overrightarrow{x}_1^* + c_2\overrightarrow{g}^* + c_3\overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{g}^*\rangle \\ &= c_1\langle\overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{g}^*\rangle + c_2\langle\overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{g}^*\rangle + c_3\langle\overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{g}^*\rangle\end{aligned}$$

işleminde $\overrightarrow{x}^*_1, \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^*$ ortonormal dual birim vektörler olduklarından,

$$\langle \overrightarrow{n}^{*\prime}, \overrightarrow{g}^* \rangle \quad = \quad c_2$$

olur. Tanım 1.4.8 den $\langle \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{n}^* \rangle = \tau^*_g$ olduğundan

$$[\langle \overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{g}^* \rangle]^{\prime} = \left\langle \overrightarrow{n}^{*\prime}, \overrightarrow{g}^* \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{g}^{*\prime} \right\rangle = 0$$

ya da

$$\left\langle \overrightarrow{n}^{*\prime}, \overrightarrow{g}^* \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{g}^{*\prime} \right\rangle$$

yazdığımızda

$$\left\langle \overrightarrow{n}^{*\prime}, \overrightarrow{x}^*_1 \right\rangle = -\tau^*_g$$

ve buradan

$$c_2 = -\tau^*_g$$

buluruz. Benzer olarak

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{n}^{*\prime}, \overrightarrow{n}^* \rangle \quad &= \quad \langle c_1 \overrightarrow{x}^*_1 + c_2 \overrightarrow{g}^* + c_3 \overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{n}^* \rangle \\ &= \quad c_1 \langle \overrightarrow{x}^*_1, \overrightarrow{n}^* \rangle + c_2 \langle \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^* \rangle + c_3 \langle \overrightarrow{n}^*, \overrightarrow{n}^* \rangle \end{aligned}$$

$\overrightarrow{x}^*_1, \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^*$ ortonormal dual vektörler olduklarından,

$$\langle \overrightarrow{n}^{*\prime}, \overrightarrow{n}^* \rangle \quad = \quad c_3$$

olur. (2.6) dan birim dual vektör için

$$c_3 = 0$$

dır. c_1, c_2, c_3 ün eşitini lineer denklem sistemindeki $\overrightarrow{n}^{*\prime}$ denkleminde yerine yazarsak,

$$\overrightarrow{n}^{*\prime} = -\rho^*_n \overrightarrow{x}^*_1 - \tau^*_g \overrightarrow{g}^*$$

elde edilir. Bu eşitlik s^* parametresine göre ilişkilendirilmiştir. s parametresiyle ilişkisine bakarsak, $\overrightarrow{g}^{*\prime}$ nin s parametresiyle ilişkisine benzer yolla

$$\overrightarrow{n}^{*\prime} = \frac{d\overrightarrow{n}^*}{ds^*} = \frac{d\overrightarrow{n}^*}{ds}\frac{ds}{ds^*} = \frac{d\overrightarrow{n}^*}{ds}\frac{1}{\sqrt{A}}$$

ve

$$\frac{d\overrightarrow{n}^*}{ds} = \sqrt{A}\frac{d\overrightarrow{n}^*}{ds^*}$$

$$\overrightarrow{n}^{*\prime} = \sqrt{A}\left(-\rho_n^*\overrightarrow{x}_1^* - \tau_g^*\overrightarrow{g}^*\right)$$

eşitliği elde edilir.

$\overrightarrow{x}_1^{*\prime}, \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{n}^{*\prime}$ eşitlerini s^* parametresine göre ilişkilendirdiğimiz zaman

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x}_1^{*\prime} &= \rho_g^*\overrightarrow{g}^* + \rho_n^*\overrightarrow{n}^* \\ \overrightarrow{g}^{*\prime} &= -\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* + \tau_g^*\overrightarrow{n}^* \\ \overrightarrow{n}^{*\prime} &= -\rho_n^*\overrightarrow{x}_1^* - \tau_g^*\overrightarrow{g}^* \end{aligned} \tag{2.90}$$

lineer denklemlerini ve $\overrightarrow{x}_1^{*\prime}, \overrightarrow{g}^{*\prime}, \overrightarrow{n}^{*\prime}$ vektörlerinin s parametresine göre ilişkilendirdiğimiz zaman da

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x}_1^{*\prime} &= \sqrt{A}\left(\rho_g^*\overrightarrow{g}^* + \rho_n^*\overrightarrow{n}^*\right) \\ \overrightarrow{g}^{*\prime} &= \sqrt{A}\left(-\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* + \tau_g^*\overrightarrow{n}^*\right) \\ \overrightarrow{n}^{*\prime} &= \sqrt{A}\left(-\rho_n^*\overrightarrow{x}_1^* - \tau_g^*\overrightarrow{g}^*\right) \end{aligned} \tag{2.91}$$

lineer denklemlerini elde ederiz.

$\overrightarrow{r}_1^{*\prime}, \overrightarrow{r}_2^{*\prime}, \overrightarrow{r}_3^{*\prime}$ vektörlerini s parametresine göre ilişkilendirelim. (2.38) bağıntısında

$$\overrightarrow{R}_1^{*\prime} = P^*\overrightarrow{R}_2^*$$

dır $\overrightarrow{R}_1^* = \overrightarrow{r}_1^* + \varepsilon\,\overrightarrow{\overline{r}}_1^*$ eşitliğinin türevini alıp, P^* ve $\overrightarrow{R}_2^*$ reel ve dual kısımları ile birlikte yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}_1^{*\prime} + \varepsilon\,\overrightarrow{\overline{r}}_1^{*\prime} &= (p^* + \varepsilon\overline{p}^*)\left(\overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon\,\overrightarrow{\overline{r}}_2^*\right) \\ &= p^*\overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon\left(\overline{p}^*\overrightarrow{r}_2^* + p^*\overrightarrow{\overline{r}}_2^*\right) + \varepsilon^2\left(\overline{p}^*\overrightarrow{\overline{r}}_2^*\right) \end{aligned}$$

olur. Burada (1.3) den

$$\overrightarrow{r}_1^{*\prime} + \varepsilon\,\overrightarrow{\overline{r}}_1^{*\prime} = p^*\overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon\left(\overline{p}^*\overrightarrow{r}_2^* + p^*\overrightarrow{\overline{r}}_2^*\right)$$

bulunur ve dual sayıların eşitliğinden,

$$\overrightarrow{r}_1^{*\prime} = p^* \overrightarrow{r}_2^*$$

elde edilir. (2.38) deki eşitliklerden

$$\overrightarrow{R}_2^{*\prime} = -P^* \overrightarrow{R}_1^* + Q^* \overrightarrow{R}_3^*$$

dir. $\overrightarrow{R}_2^* = \overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_2^*$ eşitliğinin türevini alıp, $\overrightarrow{R}_1^*$, $\overrightarrow{R}_3^*, P^*, Q^*$ değerlerini reel ve dual kısımları ile birlikte, (1.3) den eşitini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}_2^{*\prime} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_2^{*\prime} &= -\left(p^* + \varepsilon \overline{p}^*\right)\left(\overrightarrow{r}_1^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_1^*\right) + \left(q^* + \varepsilon \overline{q}^*\right)\left(\overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_3^*\right) \\
&= -p^* \overrightarrow{r}_1^* + q^* \overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon \left(-\overline{p}^* \overrightarrow{r}_3^* - p^* \overrightarrow{\overline{r}}_3^* + \overline{q}^* \overrightarrow{r}_3^* + q^* \overrightarrow{\overline{r}}_3^*\right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada

$$\overrightarrow{r}_2^{*\prime} = -p^* \overrightarrow{r}_1^* + q^* \overrightarrow{r}_3^*$$

olur. Benzer yolla (2.38) den

$$\overrightarrow{R}_3^{*\prime} = -Q^* \overrightarrow{R}_2^*$$

dir. $\overrightarrow{R}_3^* = \overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_3^*$ eşitliğin türevini alıp, Q^* ve $\overrightarrow{R}_2^*$ reel ve dual kısımları ile birlikte yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}_3^{*\prime} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_3^{*\prime} &= -\left(q^* + \varepsilon \overline{q}^*\right)\left(\overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_2^*\right) \\
&= -q^* \overrightarrow{r}_2^* - \varepsilon \left(\overline{q}^* \overrightarrow{r}_2^* + q^* \overrightarrow{\overline{r}}_2^*\right) - \varepsilon^2 \left(\overline{q}^* \overrightarrow{\overline{r}}_2^*\right)
\end{aligned}$$

olur. Burada (1.3) den

$$\overrightarrow{r}_3^{*\prime} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_3^{*\prime} = -q^* \overrightarrow{r}_2^* - \varepsilon \left(\overline{q}^* \overrightarrow{r}_2^* + q^* \overrightarrow{\overline{r}}_2^*\right)$$

ve dual sayıların eşitliğinden,

$$\overrightarrow{r}_3^{*\prime} = -q^* \overrightarrow{r}_2^*$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}_1^{*\prime} &= p^* \overrightarrow{r}_2^* \\ \overrightarrow{r}_2^{*\prime} &= -p^* \overrightarrow{r}_1^* + q^* \overrightarrow{r}_3^* \\ \overrightarrow{r}_3^{*\prime} &= -q^* \overrightarrow{r}_2^* \end{aligned} \tag{2.92}$$

yazılır.

Diğer taraftan, $\left[\overrightarrow{R}_1\right]$ regle yüzeyinin (x) striksiyon çizgisi üzerindeki her bir x noktasında $(\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{r}_3)$ Blaschke ile $(\overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{x}^{\prime}, \overrightarrow{g} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{n})$ Daboux üçyüzlüleri ile $(\overrightarrow{x}_1^* = \overrightarrow{x}^{*\prime}, \overrightarrow{g}^* = \overrightarrow{n}^* \wedge \overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{n}^*)$ üçyüzlüsü arasında ilişki vardır. Bu ilişkiyi gösterecek olursak, (2.88) deki

$$\overrightarrow{x}_1^* = \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_3^*$$

eşitliğine (2.66), (2.67) ve (2.77) eşitliklerinden $\overline{p}^*, \overline{q}^*$, $\overrightarrow{r}_1^*$ ve $\overrightarrow{r}_3^*$ değerlerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x}_1^* = & \frac{\overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}\,(p\cos\theta - q\sin\theta)}{\sqrt{A}} (\cos\theta \overrightarrow{r}_1 + \sin\theta \overrightarrow{r}_3) \\ & + \frac{\overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta - \overline{\theta}\,(p\sin\theta + q\cos\theta)}{\sqrt{A}} (-\sin\theta \overrightarrow{r}_1 + \cos\theta \overrightarrow{r}_3) \end{aligned}$$

dır ve burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\overrightarrow{x}_1^* = \frac{\left(\overline{q} + \overline{\theta} p\right)}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_1 + \frac{\left(\overline{p} + \overline{\theta} q\right)}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_3$$

olur. Benzer yolla (2.88) deki $\overrightarrow{g}^*$ eşitliğinde (2.66), (2.67) ve (2.77) eşitliklerinden $\overline{p}^*, \overline{q}^*$, $\overrightarrow{r}_1^*$ ve $\overrightarrow{r}_3^*$ değerlerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{g}^* = & \frac{\overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta - \overline{\theta}\,(p\sin\theta + q\cos\theta)}{\sqrt{A}} (\cos\theta \overrightarrow{r}_1 + \sin\theta \overrightarrow{r}_3) \\ & - \frac{\overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}\,(p\cos\theta - q\sin\theta)}{\sqrt{A}} (-\sin\theta \overrightarrow{r}_1 + \cos\theta \overrightarrow{r}_3) \end{aligned}$$

dır, burada gerekli düzenleme yapılırsa,

$$\overrightarrow{g}^* = \frac{\left(\overline{p} - \overline{\theta} q\right)}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_1 - \frac{\left(\overline{q} + \overline{\theta} p\right)}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_3$$

elde edilir. (2.87) den $\overrightarrow{n}^* = \overrightarrow{r}_2^* = \overrightarrow{r}_2$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x}_1^* &= \frac{\left(\overline{q}+\overline{\theta}p\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_1 + \frac{\left(\overline{p}+\overline{\theta}q\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_3 \\ \overrightarrow{g}^* &= \frac{\left(\overline{p}-\overline{\theta}q\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_1 - \frac{\left(\overline{q}+\overline{\theta}p\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_3 \\ \overrightarrow{n}^* &= \overrightarrow{r}_2 \end{aligned} \tag{2.93}$$

eşitlikleri elde edilir.

$\overrightarrow{x}_1^*$, $\overrightarrow{g}^*$, $\overrightarrow{n}^*$ vektörlerini eğrilikler ve $\overrightarrow{x}_1$, $\overrightarrow{g}$, $\overrightarrow{n}$ bileşenleri cinsinden yazalım. (2.93) de elde ettiğimiz eşitliklerde (2.23) eşitliklerini kullanarak

$$\overrightarrow{x}_1^* = \frac{\left(\overline{q}+\overline{\theta}p\right)}{\sqrt{A}}\left(\overline{q}\,\overrightarrow{x}_1 + \overline{p}\,\overrightarrow{g}\right) + \frac{\left(\overline{p}+\overline{\theta}q\right)}{\sqrt{A}}\left(\overline{p}\,\overrightarrow{x}_1 - \overline{q}\,\overrightarrow{g}\right)$$

olur. Bu eşitlikde gerekli düzenleme yapılırsa

$$\overrightarrow{x}_1^* = \frac{1+\overline{\theta}\left(p\overline{q}-q\overline{p}\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \frac{\overline{\theta}\left(p\overline{p}+q\overline{q}\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}$$

bulunur. (2.34) ve (2.35) eşitliklerindeki eğrilikleri yazarsak,

$$\overrightarrow{x}_1^* = \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}$$

elde edilir. (2.93) de elde ettiğimiz $\overrightarrow{g}^*$ ifadesinde (2.23) eşitliklerini kullanırsak,

$$\overrightarrow{g}^* = \frac{\left(\overline{p}-\overline{\theta}q\right)}{\sqrt{A}}\left(\overline{q}\,\overrightarrow{x}_1 + \overline{p}\,\overrightarrow{g}\right) - \frac{\left(\overline{q}+\overline{\theta}p\right)}{\sqrt{A}}\left(\overline{p}\,\overrightarrow{x}_1 - \overline{q}\,\overrightarrow{g}\right)$$

bulunur.Burada gerekli düzenlemeyi yaparsak,

$$\overrightarrow{g}^* = -\frac{\overline{\theta}\left(p\overline{p}+q\overline{q}\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \frac{1+\overline{\theta}\left(p\overline{q}-q\overline{p}\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}$$

olur ve (2.34), (2.35) eşitliklerindeki eğrilikleri yazarsak,

$$\overrightarrow{g}^* = -\frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}$$

elde edilir. Ayrıca (2.87) den $\overrightarrow{n}^* = \overrightarrow{r}_2^* = \overrightarrow{r}_2$ ve (2.23) den de $\overrightarrow{r}_2 = \overrightarrow{n}$ dir. Dolayısıyla

$$\overrightarrow{n}^* = \overrightarrow{n}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x}_1^* &= \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} \\ \overrightarrow{g}^* &= -\frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} \\ \overrightarrow{n}^* &= \overrightarrow{n} \end{aligned} \tag{2.94}$$

eşitlikleri elde edir.

$[R_1]$ regle yüzeyinin striksiyon çizgisi üzerindeki ρ_n, ρ_g, τ_g büyüklükleri ile $\rho_n^*, \rho_g^*, \tau_g^*$ leri arasındaki bağıntıları bulalım. (2.87) de

$$\overrightarrow{r}_2^* = \overrightarrow{n}^*$$

eşitliğinin her iki tarafınında türevini alırsak,

$$\overrightarrow{r}_2^{*\prime} = \overrightarrow{n}^{*\prime}$$

olur. Burada (2.91) ve (2.92) den $\overrightarrow{n}^{*\prime}$ ve $\overrightarrow{r}_2^{*\prime}$ eşitliklerinin değerlerini yerlerine yazarsak,

$$-p^*\overrightarrow{r}_1^* + q^*\overrightarrow{r}_3^* = \sqrt{A}\left(-\rho_n^*\overrightarrow{x}_1^* - \tau_g^*\overrightarrow{g}^*\right)$$

olur. (2.89) dan $\overrightarrow{r}_1^*$ ve $\overrightarrow{r}_3^*$ yerine eşitlerini yazarsak,

$$\begin{aligned} \sqrt{A}\left(-\rho_n^*\overrightarrow{x}_1^* - \tau_g^*\overrightarrow{g}^*\right) &= -p^*\left(\frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^*\right) + q^*\left(\frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^*\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{A}}\left[\left(q^*\overline{p}^* - p^*\overline{q}^*\right)\overrightarrow{x}_1^* - \left(p^*\overline{p}^* + q^*\overline{q}^*\right)\overrightarrow{g}^*\right] \end{aligned}$$

bulunur ve burada dual sayıların eşitliğinden aynı katsayılı dual vektörlerin katsayılarıda birbirine eşit olacaktır. Dolayısıyla

$$-\sqrt{A}\rho_n^* = \frac{1}{\sqrt{A}}\left(q^*\overline{p}^* - p^*\overline{q}^*\right)$$

ve

$$\rho_n^* = \frac{-q^*\overline{p}^* + p^*\overline{q}^*}{A} \tag{2.95}$$

olacaktır. Aynı zamanda

$$-\sqrt{A}\tau_g^* = -\frac{1}{\sqrt{A}}\left(p^*\overline{p}^* + q^*\overline{q}^*\right)$$

ve

$$\tau_g^* = \frac{p^*\overline{p}^* + q^*\overline{q}^*}{A} \tag{2.96}$$

olduğu görülür. Burada (2.95) deki eşitlikte (2.66), (2.67) eşitliklerinden $\overline{p}^*, \overline{q}^*$ ın değerlerini yazarsak

$$\begin{aligned}\rho_n^* &= \frac{1}{A}\left[(p\cos\theta - q\sin\theta)\left(\overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}\,(p\cos\theta - q\sin\theta)\right)\right] \\ &\quad -\frac{1}{A}\left[(p\sin\theta + q\cos\theta)\left(\overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta - \overline{\theta}\,(p\sin\theta + q\cos\theta)\right)\right]\end{aligned}$$

dır. Gerekli düzlenlemeler yapılırsa

$$\rho_n^* = \frac{1}{A}\left[p\overline{q} - \overline{p}q + \overline{\theta}\left(p^2 + q^2\right)\right]$$

olur. (2.34) ve (2.36) dan

$$\rho_n^* = \frac{\rho_n + \overline{\theta}\left(\rho_n^2 + \tau_g^2\right)}{A} \tag{2.97}$$

elde edilir. Benzer yolla (2.96) eşitliğinde (2.66), (2.67) eşitliklerinden $\overline{p}^*$, $\overline{q}^*$ değerlerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}\tau_g^* &= \frac{1}{A}\left[(p\cos\theta - q\sin\theta)\left(\overline{p}\cos\theta - \overline{q}\sin\theta - \overline{\theta}\,(p\sin\theta + q\cos\theta)\right)\right] \\ &\quad +\frac{1}{A}\left[(p\sin\theta + q\cos\theta)\left(\overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}\,(p\cos\theta - q\sin\theta)\right)\right]\end{aligned}$$

ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\tau_g^* = \frac{1}{A}\left[p\overline{p}\cos^2\theta + p\overline{p}\sin^2\theta + q\overline{q}\cos^2\theta + q\overline{q}\sin^2\theta\right]$$

olur. Böylece

$$\tau_g^* = \frac{p\overline{p} + q\overline{q}}{A} \tag{2.98}$$

ve (2.35) den

$$\tau_g^* = \frac{\tau_g}{A} \tag{2.99}$$

buluruz. Benzer yolla (2.89) daki $\overrightarrow{r}_1^*$ eşitliğinin türevi alınırsa

$$\overrightarrow{r}_1^{*\prime} = \frac{\overline{q}^{*\prime}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1^* + \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1^{*\prime} + \frac{\overline{p}^{*\prime}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^{*\prime}$$

ve (2.91) deki türev denklemlerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}_1^{*\prime} &= \frac{\overline{q}^{*\prime}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1^* + \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\left(\sqrt{A}\left(\rho_g^*\overrightarrow{g}^* + \rho_n^*\overrightarrow{n}^*\right)\right) \\ &\quad + \frac{\overline{p}^{*\prime}}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\left(\sqrt{A}\left(-\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* + \tau_g^*\overrightarrow{n}^*\right)\right)\end{aligned}$$

ve (2.92) den,

$$\overrightarrow{r}_1^{*\prime} = p^*\overrightarrow{r}_2^*$$

dır.Bu iki ifadeyi birbirine eşitlersek,

$$\frac{\overline{q}^{*\prime}}{\sqrt{A}} - \overline{p}^*\rho_g^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{A}\rho_g^* = \frac{\overline{q}^{*\prime}}{\overline{p}^*}$$

ve

$$\frac{\overline{p}^{*\prime}}{\sqrt{A}} + \overline{q}^*\rho_g^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{A}\rho_g^* = -\frac{\overline{p}^{*\prime}}{\overline{q}^*}$$

yazılır. Sırasıyla iki eşitliğide $\overline{p}^*$ ve $\overline{q}^*$ ile çarpıp, orantının özelliğinden paylar ile payları ve paydalar ile paydaları topladığımız zaman sonuç yine ρ_g^* ye eşit olacağından,

$$\sqrt{A}\rho_g^* = \frac{\overline{p}^*\overline{q}^{*\prime} - \overline{p}^{*\prime}\overline{q}^*}{A} \tag{2.100}$$

elde ederiz. (2.100) eşitliğinde (2.50) ve (2.51) deki $\overline{p}^*$ ve $\overline{q}^*$ değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\sqrt{A}\rho_g^* &= \tfrac{1}{A}\left[\left(\overline{p}\cos\theta\text{-}\overline{q}\sin\theta\text{-}\overline{\theta}\left(\mathrm{p}\sin\theta{+}\mathrm{q}\cos\theta\right)\right)\left(\overline{p}\sin\theta{+}\overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}\left(\mathrm{p}\cos\theta\text{-}\mathrm{q}\sin\theta\right)\right)^{\prime}\right] \\ &\quad -\tfrac{1}{A}\left[\left(\overline{p}\cos\theta\text{-}\overline{q}\sin\theta\text{-}\overline{\theta}\left(\mathrm{p}\sin\theta + \mathrm{q}\cos\theta\right)\right)^{\prime}\left(\overline{p}\sin\theta + \overline{q}\cos\theta + \overline{\theta}\left(\mathrm{p}\cos\theta\text{-}\mathrm{q}\sin\theta\right)\right)\right]\end{aligned}$$

dır. Burada gerekli işlemleri yapıp, sadeştirme yaparsak,

$$\sqrt{A}\rho_g^* \quad = \quad \frac{\overline{p}\ \overline{q}' - \overline{p}'\overline{q}}{A} + \frac{\overline{\theta}}{A}\left[\overline{p}p' - p\overline{p}' + \overline{q}q' - q\overline{q}' + \overline{\theta}\left(pq' - p'q\right)\right]$$

olur. (2.32), (2.34) ve (2.35) ifadeleri kullanılırsa,

$$\sqrt{A}\rho_g^* \quad = \quad \rho_g + \frac{\overline{\theta}}{A}\left[\tau'_g + \overline{\theta}\left(\frac{\tau_g}{\rho_n}\right)'\right] \tag{2.101}$$

elde edilir.

Bölüm 3

PARALEL REGLE YÜZEYLERDE ANİ HIZLAR

3.1 Paralel Regle Yüzeyler İle Regle Yüzeylerin Ani Hızları Arasındaki İlişkiler

$[R_1]$ regle yüzeyine paralel olan Tanım 1.3.9 ile belirlenmiş $[R_1^*]$ regle yüzeyini gözönüne alalım.

Dual vektörlerin vektörel momentleri için

$$\overrightarrow{\overline{x}}_1^* = \overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{x}_1^* \qquad \overrightarrow{\overline{g}}^* = \overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{g}^* \qquad \overrightarrow{\overline{n}}^* = \overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{n}^*$$
$$\overrightarrow{\overline{r}}_i^* = \overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_i^* \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3.1}$$

formülleri geçerlidir.

$[R_1^*]$ paralel regle yüzeyinin striksiyon çizgisinin x^* striksiyon noktasında sırasıyla, $(\overrightarrow{X}_1^*, \overrightarrow{G}^*, \overrightarrow{N}^*)$ ve $(\overrightarrow{R}_1^*, \overrightarrow{R}_2^*, \overrightarrow{R}_3^*)$ Darboux ve Blaschke üçyüzlüleri vardır. Varolan bu üçyüzlülerin dual birim vektörleri arasında (2.88) den

(3.1) e kadar olan eşitlikler kullanılarak, Darboux ve Blaschke üçyüzlüleri arasındaki bağıntıları hesaplamaya çalışacağız.(3.1) deki

$$\overrightarrow{X}_1^* = \overrightarrow{x}_1^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{x}}_1^*$$

eşitliğinde $\overrightarrow{x}_1^*$ değerini yerine yazarsak

$$\overrightarrow{X}_1^* = \overrightarrow{x}_1^* + \varepsilon \left(\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{x}_1^* \right)$$

ve buradan (2.88) deki eşitlikten $\overrightarrow{x}_1^*$ eşitini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X}_1^* &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon \left[\overrightarrow{x}^* \Lambda \left(\frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_3^* \right) \right] \\ &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \left(\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_1^* \right) + \varepsilon \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \left(\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_3^* \right) \end{aligned}$$

bulunur. (3.1) deki eşitlikten $\left(\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_1^* \right)$ ve $\left(\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_3^* \right)$ yerine değerlerini yazarsak

$$\begin{aligned} \overrightarrow{X}_1^* &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{\overline{r}}_1^* + \varepsilon \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{\overline{r}}_3^* \\ &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \left(\overrightarrow{r}_1^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_1^* \right) + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \left(\overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_3^* \right) \\ &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{R}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{R}_3^* \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla $\overrightarrow{G}^*$ eşitini bulalım. Buna göre

$$\overrightarrow{G}^* = \overrightarrow{g}^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{g}}^*$$

olup, (3.1) deki eşitlikten $\overrightarrow{\overline{g}}^*$ değerini yerine yazarsak

$$\overrightarrow{G}^* = \overrightarrow{g}^* + \varepsilon \left(\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{g}^* \right)$$

olur ve (2.88) deki eşitlikten $\overrightarrow{g}^*$ değerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \overrightarrow{G}^* &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon \left[\overrightarrow{x}^* \Lambda \left(\frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_3^* \right) \right] \\ &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \left(\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_1^* \right) - \varepsilon \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \left(\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_3^* \right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. (3.1) eşitliklerinden $(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{r}_1^*)$ ve $(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{r}_3^*)$ değerleri yerlerine yazılır ve uygun hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G}^* &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon\frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{\overline{r}}_1^* - \varepsilon\frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{\overline{r}}_3^* \\ &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\left(\overrightarrow{r}_1^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_3^*\right) - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\left(\overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_3^*\right) \\ &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{R}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{R}_3^*\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla $\overrightarrow{N}^*$ eşitini bulalım. Buna göre

$$\overrightarrow{N}^* = \overrightarrow{n}^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{n}}^*$$

ve (3.1) eşitliklerinden $\overrightarrow{\overline{n}}^*$ değerini yazarsak

$$\overrightarrow{N}^* = \overrightarrow{n}^* + \varepsilon\,(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{n}^*)$$

bulur ve (2.88) deki eşitlikten $\overrightarrow{n}^* = \overrightarrow{r}_2^*$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}\overrightarrow{N}^* &= \overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_2^* \\ &= \overrightarrow{R}_2^*\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\overrightarrow{X}_1^* &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{R}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{R}_3^* \\ \overrightarrow{G}^* &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{R}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{R}_3^* \\ \overrightarrow{N}^* &= \overrightarrow{R}_2^*\end{aligned} \tag{3.2}$$

eşitlikleri yazılır.

$(\overrightarrow{R}_1^*, \overrightarrow{R}_2^*, \overrightarrow{R}_3^*)$ Blaschke üçyüzlüsü vektörlerini $(\overrightarrow{X}_1^*, \overrightarrow{G}^*, \overrightarrow{N}^*)$ Darboux üçyüzlüleri cinsinden yazalım. Buna göre

$$\overrightarrow{R}_1^* = \overrightarrow{r}_1^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_1^*$$

eşitliğinde (3.1) deki eşitlikten $\overrightarrow{r}_1^*$ değerini yerine yazarsak

$$\overrightarrow{R}_1^* = \overrightarrow{r}_1^* + \varepsilon \left(\overrightarrow{x}^* \wedge \overrightarrow{r}_1^* \right)$$

olur. (2.89) daki eşitlikten $\overrightarrow{r}_1^*$ değerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1^* &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{x}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{g}^* + \varepsilon \left[\overrightarrow{x}^* \wedge \left(\frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{x}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{g}^* \right) \right] \\ &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{x}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{g}^* + \varepsilon \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \left(\overrightarrow{x}^* \wedge \overrightarrow{x}_1^* \right) + \varepsilon \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \left(\overrightarrow{x}^* \wedge \overrightarrow{g}^* \right) \end{aligned}$$

ve buradan (3.1) deki eşitlikten $(\overrightarrow{x}^* \wedge \overrightarrow{x}_1^*)$ ve $(\overrightarrow{x}^* \wedge \overrightarrow{g}^*)$ yerine eşitini yazarsak

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1^* &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{x}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{g}^* + \varepsilon \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{\overline{x}}_1^* + \varepsilon \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{\overline{g}}^* \\ &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \left(\overrightarrow{x}_1^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{x}}_1^* \right) + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \left(\overrightarrow{g}^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{g}}^* \right) \\ \overrightarrow{R}_1^* &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{X}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{G}^* \end{aligned}$$

elde edilir. (3.2) den $\overrightarrow{R}_2^* = \overrightarrow{N}^*$ dir. Son olarak benzer yolla $\overrightarrow{R}_3^*$ eşitini bulalım. Buna göre

$$\overrightarrow{R}_3^* = \overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_3^*$$

ve (3.1) deki eşitlikten faydalanarak

$$\overrightarrow{R}_3^* = \overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon \left(\overrightarrow{x}^* \wedge \overrightarrow{r}_3^* \right)$$

olur. Böylece (2.89) daki eşitlikten $\overrightarrow{r}_3^*$ ın değerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_3^* &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{x}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{g}^* + \varepsilon \left[\overrightarrow{x}^* \wedge \left(\frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{x}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{g}^* \right) \right] \\ &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{x}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{g}^* + \varepsilon \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \left(\overrightarrow{x}^* \wedge \overrightarrow{x}_1^* \right) - \varepsilon \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \left(\overrightarrow{x}^* \wedge \overrightarrow{g}^* \right) \end{aligned}$$

dir ve (3.1) deki eşitlikten $(\overrightarrow{x}^* \wedge \overrightarrow{x}_1^*)$ ve $(\overrightarrow{x}^* \wedge \overrightarrow{g}^*)$ yerine eşitini yazarsak

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_3^* &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{x}_1^* - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{g}^* + \varepsilon \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{\overline{x}}_1^* - \varepsilon \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{\overline{g}}^* \\ &= \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \left(\overrightarrow{x}_1^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{x}}_1^* \right) - \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \left(\overrightarrow{g}^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{g}}^* \right) \\ &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{X}_1^* - \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}} \overrightarrow{G}^* \end{aligned}$$

buluruz. Buna göre

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_1^* &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1^* + \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G}^* \\
\overrightarrow{R}_2^* &= \overrightarrow{N}^* \\
\overrightarrow{R}_3^* &= \frac{\overline{q}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1^* - \frac{\overline{p}^*}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G}^*
\end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde yazarız.

$(\overrightarrow{X}_1^*, \overrightarrow{G}^*, \overrightarrow{N}^*)$ ve $(\overrightarrow{R}_1^*, \overrightarrow{R}_2^*, \overrightarrow{R}_3^*)$ vektörlerinin türev fomüllerini kendileri cinsinden (2.90), (2.91), (2.92) eşitlikleri ve (3.1) yardımıyla bulmaya calışacağız.

$$\overrightarrow{X}_1^* = \overrightarrow{x}_1^* + \varepsilon\,\overrightarrow{\overline{x}}_1^*$$

eşitliğinde (3.1) kullanılırsa

$$\overrightarrow{X}_1^* = \overrightarrow{x}_1^* + \varepsilon\,(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{x}_1^*)$$

dır. Eşitliğin her iki tarafının türevini alırsak

$$\overrightarrow{X}_1^{*\prime} = \overrightarrow{x}_1^{*\prime} + \varepsilon\left(\overrightarrow{x}^{*\prime}\Lambda\overrightarrow{x}_1^*\right) + \varepsilon\left(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{x}_1^{*\prime}\right)$$

ve $\overrightarrow{x}^{*\prime} = \overrightarrow{x}_1^*$ olduğundan

$$\overrightarrow{X}_1^{*\prime} = \overrightarrow{x}_1^{*\prime} + \varepsilon\,(\overrightarrow{x}_1^*\Lambda\overrightarrow{x}_1^*) + \varepsilon\left(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{x}_1^{*\prime}\right)$$

yazılır. (2.90) daki türev formüllerini yerine yazarsak

$$\overrightarrow{X}_1^{*\prime} = \rho_g^*\overrightarrow{g}^* + \rho_n^*\overrightarrow{n}^* + \varepsilon\left[\overrightarrow{x}^*\Lambda\left(\rho_g^*\overrightarrow{g}^* + \rho_n^*\overrightarrow{n}^*\right)\right]$$

olup, ortonormal vektörlerin dış çarpımları

$$\overrightarrow{X}_1^{*\prime} = \rho_g^*\overrightarrow{g}^* + \rho_n^*\overrightarrow{n}^* + \varepsilon\rho_g^*\,(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{g}^*) + \varepsilon\rho_n^*\,(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{n}^*)$$

şeklindedir. (3.1) eşitliğinden $(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{g}^*)$ ve $(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{n}^*)$ eşitlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\overrightarrow{X}_1^{*\prime} &= \rho_g^*\overrightarrow{g}^* + \rho_n^*\overrightarrow{n}^* + \varepsilon\rho_g^*\overrightarrow{\overline{g}}^* + \varepsilon\rho_n^*\overrightarrow{\overline{n}}^* \\ &= \rho_g^*\left(\overrightarrow{g}^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{g}}^*\right) + \rho_n^*\left(\overrightarrow{n}^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{n}}^*\right) \\ &= \rho_g^*\overrightarrow{G}^* + \rho_n^*\overrightarrow{N}^*\end{aligned}$$

elde ederiz. (2.91) deki denklemlere benzer yolla s^* parametresiyle bulduğumuz bu denklemleri s parametresi ile ilişkilendirdiğimizde

$$\overrightarrow{X}_1^{*\prime} = \sqrt{A}\left(\rho_g^*\overrightarrow{G}^* + \rho_n^*\overrightarrow{N}^*\right)$$

olduğu görülür. Benzer yolla

$$\overrightarrow{G}^* = \overrightarrow{g}^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{g}}^*$$

eşitliğinde (3.1) deki eşitlikten $\overrightarrow{\overline{g}}^*$ ın değerini yazarsak

$$\overrightarrow{G}^* = \overrightarrow{g}^* + \varepsilon(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{g}^*)$$

dır. Eşitliğin türevini alırsak

$$\overrightarrow{G}^{*\prime} = \overrightarrow{g}^{*\prime} + \varepsilon(\overrightarrow{x}^{*\prime}\Lambda\overrightarrow{g}^*) + \varepsilon(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{g}^{*\prime})$$

olur. (2.90) daki eşitlikten $\overrightarrow{g}^{*\prime}$ nin ve $\overrightarrow{x}^{*\prime} = \overrightarrow{x}_1^*$ in değerini yerine yazarsak

$$\overrightarrow{G}^{*\prime} = -\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* + \tau_g^*\overrightarrow{n}^* + \varepsilon(\overrightarrow{x}_1^*\Lambda\overrightarrow{g}^*) + \varepsilon\left[x^*\Lambda(-\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* + \tau_g^*\overrightarrow{n}^*)\right]$$

ve dolayısıyla $(\overrightarrow{x}_1^*, \overrightarrow{g}^*, \overrightarrow{n}^*)$ ortonormal bir sistem olduğundan

$$\overrightarrow{G}^{*\prime} = -\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* + \tau_g^*\overrightarrow{n}^* + \varepsilon\overrightarrow{n}^* - \varepsilon\rho_g^*(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{x}_1^*) + \varepsilon\tau_g^*(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{n}^*)$$

bulunur. (3.1) eşitliğinden $(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{x}_1^*)$ ve $(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{n}^*)$ ın değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G}^{*\prime} &= -\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* + \tau_g^*\overrightarrow{n}^* + \varepsilon\overrightarrow{n}^* - \varepsilon\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* + \varepsilon\tau_g^*\overrightarrow{n}^* \\
&= -\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* - \varepsilon\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* + \tau_g^*\overrightarrow{n}^* + \varepsilon\tau_g^*\overrightarrow{n}^* + \varepsilon\overrightarrow{n}^* \\
&= -\rho_g^*(\overrightarrow{x}_1^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{x}}_1^*) + \tau_g^*(\overrightarrow{n}^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{n}}^*) + \varepsilon\overrightarrow{n}^* \\
&= -\rho_g^*\overrightarrow{X}_1^* + \tau_g^*\overrightarrow{N}^* + \varepsilon\overrightarrow{n}^*
\end{aligned}$$

olur. $\varepsilon^2\overrightarrow{\overline{n}}^*$ ifadesini eşitliğe ilave edersek, (1.3) den dolayı eşitliğimizin değeri değişmez. Buna göre

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G}^{*\prime} &= -\rho_g^*\overrightarrow{X}_1^* + \tau_g^*\overrightarrow{N}^* + \varepsilon\overrightarrow{n}^* + \varepsilon^2\overrightarrow{\overline{n}}^* \\
&= -\rho_g^*\overrightarrow{X}_1^* + \tau_g^*\overrightarrow{N}^* + \varepsilon\left(\overrightarrow{n}^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{n}}^*\right) \\
&= -\rho_g^*\overrightarrow{X}_1^* + \tau_g^*\overrightarrow{N}^* + \varepsilon\overrightarrow{N}^* \\
&= -\rho_g^*\overrightarrow{X}_1^* + \left(\tau_g^* + \varepsilon\right)\overrightarrow{N}^*
\end{aligned}$$

olacaktır. (2.91) deki denklemlere benzer yolla s^* parametresiyle bulduğumuz bu denklemleri s parametresi ile ilişkilendirdiğimizde

$$\overrightarrow{G}^{*\prime} = \sqrt{A}\left(-\rho_g^*\overrightarrow{X}_1^* + \left(\tau_g^* + \varepsilon\right)\overrightarrow{N}^*\right)$$

elde edilir. Benzer yolla, $\overrightarrow{N}^*$ ın eşitini gösterelim.

$$\overrightarrow{N}^* = \overrightarrow{n}^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{n}}^*$$

eşitliğinde (3.1) deki eşitlikten $\overrightarrow{\overline{n}}^*$ ın değerini yerine yarsak

$$\overrightarrow{N}^* = \overrightarrow{n}^* + \varepsilon(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{n}^*)$$

ve her iki tarafın türevini alırsak

$$\overrightarrow{N}^{*\prime} = \overrightarrow{n}^{*\prime} + \varepsilon(\overrightarrow{x}^{*\prime}\Lambda\overrightarrow{n}^*) + \varepsilon(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{n}^{*\prime})$$

olur. (2.90) daki türev formüllerini ve $\overrightarrow{x}^{*\prime} = \overrightarrow{x}_1^*$ olduğunu yerine yazarsak

$$\overrightarrow{N}^{*\prime} = -\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* - \tau_g^*\overrightarrow{g}^* + \varepsilon(\overrightarrow{x}_1^*\Lambda\overrightarrow{n}^*) + \varepsilon\left[\overrightarrow{x}^*\Lambda(-\rho_g^*\overrightarrow{x}_1^* - \tau_g^*\overrightarrow{g}^*)\right]$$

ve buradan da $\overrightarrow{x}_1^*$ ile $\overrightarrow{n}^*$ ortonormal vektörler olduğundan

$$\overrightarrow{N}^{*\prime} = -\rho_g^* \overrightarrow{x}_1^* - \tau_g^* \overrightarrow{g}^* - \varepsilon \overrightarrow{g}^* - \varepsilon \rho_n^* (\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{x}_1^*) - \varepsilon \tau_g^* (\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{g}^*)$$

dır. (3.1) deki eşitlikten $(\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{x}_1^*)$ ve $(\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{g}^*)$ değerlerini yazarsak

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N}^{*\prime} &= -\rho_n^* \overrightarrow{x}_1^* - \tau_g^* \overrightarrow{g}^* - \varepsilon \overrightarrow{g}^* - \varepsilon \rho_n^* \overrightarrow{\overline{x}}_1^* - \varepsilon \tau_g^* \overrightarrow{\overline{g}}^* \\
&= -\rho_n^* (\overrightarrow{x}_1^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{x}}_1^*) - \tau_g^* (\overrightarrow{g}^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{g}}^*) - \varepsilon \overrightarrow{g}^* \\
&= -\rho_n^* \overrightarrow{X}_1^* - \tau_g^* \overrightarrow{G}^* - \varepsilon \overrightarrow{g}^*
\end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Burada $\overrightarrow{N}^{*\prime}$ dual vektörünü $\overrightarrow{X}_1^*$ ve $\overrightarrow{G}^*$ vektörleri cinsinden yazabiliriz. $(-\varepsilon^2 \overrightarrow{\overline{g}}^*)$ ilave edilirse, (1.3) den $(-\varepsilon^2 \overrightarrow{\overline{g}}^*)$ eşitliğin değerini değiştirmez. Buna göre

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N}^{*\prime} &= -\rho_n^* \overrightarrow{X}_1^* - \tau_g^* \overrightarrow{G}^* - \varepsilon \overrightarrow{g}^* - \varepsilon^2 \overrightarrow{\overline{g}}^* \\
&= -\rho_n^* \overrightarrow{X}_1^* - \tau_g^* \overrightarrow{G}^* - \varepsilon (\overrightarrow{g}^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{g}}^*) \\
&= -\rho_n^* \overrightarrow{X}_1^* - \left(\tau_g^* + \varepsilon\right) \overrightarrow{G}^*
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.91) deki denklemlere benzer yolla s^* parametresiyle bulduğumuz bu denklemleri s parametresi ile ilişkilendirdiğimizde

$$\overrightarrow{N}^{*\prime} = \sqrt{A} \left(-\rho_n^* \overrightarrow{X}_1^* - \left(\tau_g^* + \varepsilon\right) \overrightarrow{G}^*\right)$$

elde edilir.

Buna göre

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{X}_1^{*\prime} &= \sqrt{A} \left(\rho_g^* \overrightarrow{G}^* + \rho_n^* \overrightarrow{N}^*\right) \\
\overrightarrow{G}^{*\prime} &= \sqrt{A} \left(-\rho_g^* \overrightarrow{X}_1^* + \left(\tau_g^* + \varepsilon\right) \overrightarrow{N}^*\right) \\
\overrightarrow{N}^{*\prime} &= -\sqrt{A} \left(\rho_n^* \overrightarrow{X}_1^* + \left(\tau_g^* + \varepsilon\right) \overrightarrow{G}^*\right)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

olarak yazılır. (3.4) eşitliğindeki lineer denklem sistemini matris formunda yazacak olursak,

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{X}_1^{*\prime} \\ \overrightarrow{G}^{*\prime} \\ \overrightarrow{N}^{*\prime} \end{bmatrix} = \sqrt{A} \begin{vmatrix} 0 & \rho_g^* & \rho_n^* \\ -\rho_g^* & 0 & \tau_g^* + \varepsilon \\ -\rho_n^* & -\left(\tau_g^* + \varepsilon\right) & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{X}_1^* \\ \overrightarrow{G}^* \\ \overrightarrow{N}^* \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

şeklindedir.

Şimdi benzer yolla $\overrightarrow{R}_1^*$, $\overrightarrow{R}_2^*$, $\overrightarrow{R}_3^*$ vektörlerinin türev denklemlerini bulalım.

$$\overrightarrow{R}_1^* = \overrightarrow{r}_1^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_1^*$$

dır ve (3.1) deki eşitlikten $\overrightarrow{\overline{r}}_1^*$ ın değerini yerine yazarsak,

$$\overrightarrow{R}_1^* = \overrightarrow{r}_1^* + \varepsilon(\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_1^*)$$

ve her iki tarafın türevini alırsak

$$\overrightarrow{R}_1^{*\prime} = \overrightarrow{r}_1^{*\prime} + \varepsilon(\overrightarrow{x}^{*\prime} \Lambda \overrightarrow{r}_1^*) + \varepsilon(\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_1^{*\prime})$$

olur. (2.92) deki eşitlikten $\overrightarrow{r}_1^{*\prime}$ ve $\overrightarrow{x}^{*\prime} = \overrightarrow{x}_1^*$ değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1^{*\prime} &= p^* \overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon(\overrightarrow{x}_1^* \Lambda \overrightarrow{r}_1^*) + \varepsilon \left[\overrightarrow{x}^* \Lambda (p^* \overrightarrow{r}_2^*)\right] \\ &= p^* \overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon(x_1^* \Lambda \overrightarrow{r}_1^*) + \varepsilon p^* (\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_2^*) \end{aligned}$$

bulunur. (3.1) deki eşitlikten $\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_2^*$ ın değerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1^{*\prime} &= p^* \overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon p^* \overrightarrow{\overline{r}}_2^* + \varepsilon(\overrightarrow{x}_1^* \Lambda \overrightarrow{r}_1^*) \\ &= p^* (\overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_2^*) + \varepsilon(\overrightarrow{x}_1^* \Lambda \overrightarrow{r}_1^*) \end{aligned}$$

olur. (2.76) göz önüne alınır ve x^* boğaz çizgisi için $\overrightarrow{x}_1^*$ ın s^* parametresi cinsinden değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1^{*\prime} &= p^* \overrightarrow{R}_2^* + \varepsilon \left[(\overline{q}^* \overrightarrow{r}_1^* + \overline{p}^* \overrightarrow{r}_3^*) \Lambda \overrightarrow{r}_1^*\right] \\ &= p^* \overrightarrow{R}_2^* + \varepsilon \overline{q}^* (\overrightarrow{r}_1^* \Lambda \overrightarrow{r}_1^*) + \varepsilon \overline{p}^* (\overrightarrow{r}_3^* \Lambda \overrightarrow{r}_1^*) \end{aligned}$$

dır. $(\overrightarrow{r}_1^*, \overrightarrow{r}_2^*, \overrightarrow{r}_3^*)$ üçyüzlüsü ortonormal bir üçyüzlü olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1^{*\prime} &= p^* \overrightarrow{R}_2^* + \varepsilon \overline{q}^* 0 + \varepsilon \overline{p}^* \overrightarrow{r}_2^* \\ &= p^* \overrightarrow{R}_2^* + \varepsilon \overline{p}^* \overrightarrow{r}_2^* \end{aligned}$$

bulunur. (1.3) den $\varepsilon^2 \overline{p}^* \overrightarrow{r}_2^* = 0$ dır, yukarıdaki eşitlikte $\varepsilon^2 \overline{p}^* \overrightarrow{r}_2^*$ değeri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_1^{*\prime} &= p^* \overrightarrow{R}_2^* + \varepsilon \overline{p}^* \overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon^2 \overline{p}^* \overrightarrow{\overline{r}}_2^* \\ &= p^* \overrightarrow{R}_2^* + \varepsilon \overline{p}^* (\overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_2^*) \\ &= p^* \overrightarrow{R}_2^* + \varepsilon \overline{p}^* \overrightarrow{R}_2^* \\ &= P^* \overrightarrow{R}_2^* \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla $\overrightarrow{R}_2^{*\prime}$ nin eşitini gösterirsek

$$\overrightarrow{R}_2^* = \overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{r}}_2^*$$

ve eşitlikte (3.1) den $\overrightarrow{\overline{r}}_2^*$ ın değerini yerine yazarsak

$$\overrightarrow{R}_2^* = \overrightarrow{r}_2^* + \varepsilon \, (\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_2^*)$$

olur. Her iki tarafın türevini alırsak

$$\overrightarrow{R}_2^{*\prime} = \overrightarrow{r}_2^{*\prime} + \varepsilon (\overrightarrow{x}^{*\prime} \Lambda \overrightarrow{r}_2^*) + \varepsilon (\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_2^{*\prime})$$

yazılır. (2.92) deki eşitlikten $\overrightarrow{r}_2^{*\prime}$ değerini ve (2.76) dan $\overrightarrow{x}^{*\prime} = \overrightarrow{x}_1^*$ nin eşitini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R}_2^{*\prime} &= -p^* \overrightarrow{r}_1^* + q^* \overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon (\overrightarrow{x}_1^* \Lambda \overrightarrow{r}_2^*) + \varepsilon \, [\overrightarrow{x}^* \Lambda (-p^* \overrightarrow{r}_1^* + q^* \overrightarrow{r}_3^*)] \\ &= -p^* \overrightarrow{r}_1^* + q^* \overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon \, [(\overline{q}^* \overrightarrow{r}_1^* + \overline{p}^* \overrightarrow{r}_3^*) \wedge \overrightarrow{r}_2^*] \\ &\quad -\varepsilon p^* (\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_1^*) + \varepsilon q^* (\overrightarrow{x}^* \Lambda \overrightarrow{r}_3^*) \end{aligned}$$

olur. (3.1) deki eşitlikten ve $(\overrightarrow{r}_1^*, \overrightarrow{r}_2^*, \overrightarrow{r}_3^*)$ üçyüzlüsü ortonormal bir sistem olduğundan

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_2^{*\prime} &= -p^*\overrightarrow{r}_1^* + q^*\overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon\overline{q}^*\left(\overrightarrow{r}_1^*\Lambda\overrightarrow{r}_2^*\right) + \varepsilon\overline{p}^*\left(\overrightarrow{r}_3^*\Lambda\overrightarrow{r}_2^*\right) - \varepsilon p^*\overrightarrow{\overline{r}}_1^* + \varepsilon q^*\overrightarrow{\overline{r}}_3^* \\
&= -p^*\overrightarrow{r}_1^* - \varepsilon p^*\overrightarrow{\overline{r}}_1^* + q^*\overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon q^*\overrightarrow{\overline{r}}_3^* - \varepsilon\overline{p}^*\overrightarrow{r}_1^* + \varepsilon\overline{q}^*\overrightarrow{r}_3^* \\
&= -p^*\overrightarrow{R}_1^* + q^*\overrightarrow{R}_3^* - \varepsilon\overline{p}^*\overrightarrow{r}_1^* + \varepsilon\overline{q}^*\overrightarrow{r}_3^*
\end{aligned}$$

dır. Eşitliği $\overrightarrow{R}_1^*$ ve $\overrightarrow{R}_3^*$ bileşenleri cinsinden yazabilmek için $\left(-\varepsilon^2\overline{p}^*\overrightarrow{\overline{r}}_1^*\right)$ ve $\left(\varepsilon^2\overline{q}^*\overrightarrow{\overline{r}}_3^*\right)$ ilave edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_2^{*\prime} &= -p^*\overrightarrow{R}_1^* + q^*\overrightarrow{R}_3^* - \varepsilon\overline{p}^*\overrightarrow{r}_1^* + \varepsilon\overline{q}^*\overrightarrow{r}_3^* - \varepsilon^2\overline{p}^*\overrightarrow{\overline{r}}_1^* + \varepsilon^2\overline{q}^*\overrightarrow{\overline{r}}_3^* \\
&= -p^*\overrightarrow{R}_1^* + q^*\overrightarrow{R}_3^* - \varepsilon\overline{p}^*\left(\overrightarrow{r}_1^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_1^*\right) + \varepsilon\overline{q}^*\left(\overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_3^*\right) \\
&= -p^*\overrightarrow{R}_1^* + q^*\overrightarrow{R}_3^* - \varepsilon\overline{p}^*\overrightarrow{R}_1^* + \varepsilon\overline{q}^*\overrightarrow{R}_3^* \\
&= -\left(p^* + \varepsilon\overline{p}^*\right)\overrightarrow{R}_1^* + \left(q^* + \varepsilon\overline{q}^*\right)\overrightarrow{R}_3^* \\
&= -P^*\overrightarrow{R}_1^* + Q^*\overrightarrow{R}_3^*
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yolla $\overrightarrow{R}_3^{*\prime}$ nin eşitini gösterelim.

$$\overrightarrow{R}_3^* = \overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_3^*$$

olup, (3.1) den $\overrightarrow{\overline{r}}_3^*$ ın değerini yerine yazarsak

$$\overrightarrow{R}_3^* = \overrightarrow{r}_3^* + \varepsilon(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{r}_3^*)$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafının türevini alırsak

$$\overrightarrow{R}_3^{*\prime} = \overrightarrow{r}_3^{*\prime} + \varepsilon(\overrightarrow{x}^{*\prime}\Lambda\overrightarrow{r}_3^*) + \varepsilon(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{r}_3^{*\prime})$$

olur. (2.92) deki eşitlikten $\overrightarrow{r}_3^{*\prime}$, (2.76) dan $\overrightarrow{x}^{*\prime} = \overrightarrow{x}_1^{*}$ olduğunu ve $(\overrightarrow{x}_1^{*}\Lambda\overrightarrow{r}_2^{*})$ ifadesini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_3^{*\prime} &= -q^{*}\overrightarrow{r}_2^{*} + \varepsilon\left[(\overline{q}^{*}\overrightarrow{r}_1^{*} + \overline{p}^{*}\overrightarrow{r}_3^{*})\Lambda\overrightarrow{r}_3^{*}\right] - \varepsilon q^{*}\overrightarrow{\overline{r}}_2^{*} \\
&= -q^{*}\overrightarrow{r}_1^{*} + \varepsilon\overline{q}^{*}(\overrightarrow{r}_1^{*}\Lambda\overrightarrow{r}_3^{*}) + \varepsilon\overline{p}^{*}(\overrightarrow{r}_3^{*}\Lambda\overrightarrow{r}_3^{*}) - \varepsilon q^{*}\overrightarrow{\overline{r}}_2^{*}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\overrightarrow{r}_1^{*}, \overrightarrow{r}_2^{*}, \overrightarrow{r}_3^{*}$ vektörleri ortonormal olduğundan,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_3^{*\prime} &= -q^{*}\overrightarrow{r}_2^{*} + \varepsilon\overline{q}^{*}(-\overrightarrow{r}_2^{*}) + \varepsilon\overline{p}^{*}0 - \varepsilon q^{*}\overrightarrow{\overline{r}}_2^{*} \\
&= -q^{*}\overrightarrow{r}_2^{*} - \varepsilon\overline{q}^{*}\overrightarrow{r}_2^{*} - \varepsilon q^{*}\overrightarrow{\overline{r}}_2^{*}
\end{aligned}$$

ve $(-\varepsilon^2\overline{q}^{*}\overrightarrow{\overline{r}}_2^{*})$ ifadesini eşitliğe eklersek

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_3^{*\prime} &= -q^{*}\overrightarrow{r}_2^{*} - \varepsilon\overline{q}^{*}\overrightarrow{r}_2^{*} - \varepsilon\overline{q}^{*}\overrightarrow{\overline{r}}_2^{*} - \varepsilon^2\overline{q}^{*}\overrightarrow{\overline{r}}_2^{*} \\
&= -\overrightarrow{r}_2^{*}(q^{*} + \varepsilon\overline{q}^{*}) - \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_2^{*}(q^{*} + \varepsilon\overline{q}^{*}) \\
&= -Q^{*}(\overrightarrow{r}_2^{*} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_2^{*}) \\
&= -Q^{*}\overrightarrow{R}_2^{*}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R}_1^{*\prime} &= P^{*}\overrightarrow{R}_2^{*} \\
\overrightarrow{R}_2^{*\prime} &= -P^{*}\overrightarrow{R}_1^{*} + Q^{*}\overrightarrow{R}_3^{*} \\
\overrightarrow{R}_3^{*\prime} &= -Q^{*}\overrightarrow{R}_2^{*}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

yazılır. Bu denklem sistemini matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{R}_1^{*\prime} \\ \overrightarrow{R}_2^{*\prime} \\ \overrightarrow{R}_3^{*\prime} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & P^{*} & 0 \\ -P^{*} & 0 & Q^{*} \\ 0 & -Q^{*} & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{R}_1^{*} \\ \overrightarrow{R}_2^{*} \\ \overrightarrow{R}_3^{*} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

elde edilir.

Belirli sabit eksen sisteminde olan $E_0(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y},\overrightarrow{Z})$ sabit eksenli sistemine nazaran hareketli eksen sistemleri $E_1^*(\overrightarrow{X}_1^*,\overrightarrow{G}^*,\overrightarrow{N}^*)$ ve $E_2^*(\overrightarrow{R}_1^*,\overrightarrow{R}_2^*,\overrightarrow{R}_3^*)$ olsun. Hareket sırasında (E_1^*/E_0) ve (E_2^*/E_0) hareketinin ani hızlarını Darboux ve Blaschke vektörleri cinsinden bulalım. (2.41) eşitliğinde

$$\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}=\overrightarrow{W}_{10}+\varepsilon\overrightarrow{\overline{W}}_{10}=(\tau_g+\varepsilon)\,\overrightarrow{X}_1-\rho_n\overrightarrow{G}+\rho_g\overrightarrow{N}$$

olduğunu biliyoruz. Tanım 1.4.2 gereğince

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0}=\left\langle\overrightarrow{N}^*,\overrightarrow{G}^{*\prime}\right\rangle\overrightarrow{X}_1^*+\left\langle\overrightarrow{X}_1^*,\overrightarrow{N}^{*\prime}\right\rangle\overrightarrow{G}^*+\left\langle\overrightarrow{G}^*,\overrightarrow{X}_1^{*\prime}\right\rangle\overrightarrow{N}^*$$

olarak tanımlanır. (3.4) eşitliklerinden $\overrightarrow{X}_1^{*\prime}$, $\overrightarrow{G}^{*\prime}$, $\overrightarrow{N}^{*\prime}$ değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} &= \left\langle\overrightarrow{N}^*,\sqrt{A}\left(-\rho_g^*\overrightarrow{X}_1^*+\left(\tau_g^*+\varepsilon\right)\overrightarrow{N}^*\right)\right\rangle\overrightarrow{X}_1^*\\ &\quad+\left\langle\overrightarrow{X}_1^*,\sqrt{A}\left(-\rho_n^*\overrightarrow{X}_1^*-\left(\tau_g^*+\varepsilon\right)\overrightarrow{G}^*\right)\right\rangle\overrightarrow{G}^*\\ &\quad+\left\langle\overrightarrow{G}^*,\sqrt{A}\left(\rho_g^*\overrightarrow{G}^*+\rho_n^*\overrightarrow{N}^*\right)\right\rangle\overrightarrow{N}^*\\ &= \left[-\sqrt{A}\rho_g^*\left\langle\overrightarrow{N}^*,\overrightarrow{X}_1^*\right\rangle+\sqrt{A}\left(\tau_g^*+\varepsilon\right)\left\langle\overrightarrow{N}^*,\overrightarrow{N}^*\right\rangle\right]\overrightarrow{X}_1^*\\ &\quad+\left[-\sqrt{A}\rho_n^*\left\langle\overrightarrow{X}_1^*,\overrightarrow{X}_1^*\right\rangle-\sqrt{A}\left(\tau_g^*+\varepsilon\right)\left\langle\overrightarrow{X}_1^*,\overrightarrow{G}^*\right\rangle\right]\overrightarrow{G}^*\\ &\quad+\left[\sqrt{A}\rho_g^*\left\langle\overrightarrow{G}^*,\overrightarrow{G}^*\right\rangle+\sqrt{A}\rho_n^*\left\langle\overrightarrow{G}^*,\overrightarrow{N}^*\right\rangle\right]\overrightarrow{N}^*\end{aligned}$$

olur. $\overrightarrow{X}_1^*$, $\overrightarrow{G}^*$, $\overrightarrow{N}^*$ vektörleri ortonormal vektörler oldukları kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} &= \left[-\sqrt{A}\rho_g^*0+\sqrt{A}\left(\tau_g^*+\varepsilon\right)1\right]\overrightarrow{X}_1^*\\ &\quad+\left[-\sqrt{A}\rho_n^*1-\sqrt{A}\left(\tau_g^*+\varepsilon\right)0\right]\overrightarrow{G}^*\\ &\quad+\left[\sqrt{A}\rho_g^*1+\sqrt{A}\rho_n^*0\right]\overrightarrow{N}^*\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} &= \sqrt{A}\left(\tau_g^*+\varepsilon\right)\overrightarrow{X}_1^*-\sqrt{A}\rho_n^*\overrightarrow{G}^*+\sqrt{A}\rho_g^*\overrightarrow{N}^*\\ &= \sqrt{A}\left[\left(\tau_g^*+\varepsilon\right)\overrightarrow{X}_1^*-\rho_n^*\overrightarrow{G}^*+\rho_g^*\overrightarrow{N}^*\right]\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer yolla $(\overrightarrow{R}_1^*, \overrightarrow{R}_2^*, \overrightarrow{R}_3^*)$ Blaschke üçyüzlüsünün ani hızını bulalım. Tanım 1.4.2 gereğince

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{2/0} = \left\langle \overrightarrow{R}_3^*, \overrightarrow{R}_2^{*\prime} \right\rangle \overrightarrow{R}_1^* + \left\langle \overrightarrow{R}_1^*, \overrightarrow{R}_3^{*\prime} \right\rangle \overrightarrow{R}_2^* + \left\langle \overrightarrow{R}_2^*, \overrightarrow{R}_1^{*\prime} \right\rangle \overrightarrow{R}_3^*$$

biçiminde tanımlanır. (3.5) eşitliğindeki $\overrightarrow{R}_1^{*\prime}, \overrightarrow{R}_2^{*\prime}, \overrightarrow{R}_3^{*\prime}$ türev değerlerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
\Gamma^*_{2/0} &= \left\langle \overrightarrow{R}_3^*, -P^* \overrightarrow{R}_1^* + Q^* \overrightarrow{R}_3^* \right\rangle \overrightarrow{R}_1^* + \left\langle \overrightarrow{R}_1^*, -Q^* \overrightarrow{R}_2^* \right\rangle \overrightarrow{R}_2^* + \left\langle \overrightarrow{R}_2^*, P^* \overrightarrow{R}_2^* \right\rangle \overrightarrow{R}_3^* \\
&= \left[-P^* \left\langle \overrightarrow{R}_3^*, \overrightarrow{R}_1^* \right\rangle + Q^* \left\langle \overrightarrow{R}_3^*, \overrightarrow{R}_3^* \right\rangle \right] \overrightarrow{R}_1^* \\
&\quad - Q^* \left\langle \overrightarrow{R}_1^*, \overrightarrow{R}_3^* \right\rangle \overrightarrow{R}_2^* + P^* \left\langle \overrightarrow{R}_2^*, \overrightarrow{R}_2^* \right\rangle \overrightarrow{R}_3^*
\end{aligned}$$

ve burada $\overrightarrow{R}_1^*, \overrightarrow{R}_2^*, \overrightarrow{R}_3^*$ vektörleri ortonormal vektörler olduğundan

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}^*_{2/0} &= \left[-P^*.0 + Q^*.1 \right] \overrightarrow{R}_1^* - 0.Q \overrightarrow{R}_2^* + 1.P^* \overrightarrow{R}_3^* \\
&= Q^* \overrightarrow{R}_1^* + P^* \overrightarrow{R}_3^*
\end{aligned}$$

bulunur.

$(\overrightarrow{X}_1^*, \overrightarrow{G}^*, \overrightarrow{N}^*)$ Darboux ve $(\overrightarrow{R}_1^*, \overrightarrow{R}_2^*, \overrightarrow{R}_3^*)$ Blaschke üçyüzlülerinin ani hız vektörlerinin, sırasıyla

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = \sqrt{A} \left[\left(\tau_g^* + \varepsilon \right) \overrightarrow{X}_1^* - \rho_n^* \overrightarrow{G}^* + \rho_g^* \overrightarrow{N}^* \right] \tag{3.8}$$

ve

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{2/0} = Q^* \overrightarrow{R}_1^* + P^* \overrightarrow{R}_3^* \tag{3.9}$$

olduğu görülür.

$\overrightarrow{X}_1^*, \overrightarrow{G}^*, \overrightarrow{N}^*$ Darboux vektörlerini τ_g, ρ_n, ρ_g eğrilikleri ve $\overrightarrow{X}_1^*, \overrightarrow{G}^*, \overrightarrow{N}^*$ Darboux vektörleri bileşenleri cinsinden bulalım.

$$\overrightarrow{X}_1^* = \overrightarrow{x}^* + \varepsilon \overrightarrow{\overline{x}}_1^*$$

olup, (3.1) deki eşitlikten $\overrightarrow{\overline{x}}_1^*$ ın değerini yerine yarsak,

$$\overrightarrow{X}_1^* = \overrightarrow{x}_1^* + \varepsilon\,(\overrightarrow{x}^*\Lambda\,\overrightarrow{x}_1^*)$$

ve (2.80) eşitliğinden $\overrightarrow{x}^*$ ın değerini yerine yazdığımızda,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{X}_1^* &= \overrightarrow{x}_1^* + \varepsilon\left[(\overrightarrow{x} - \varepsilon\overline{\theta}\,\overrightarrow{r}_2)\Lambda\,\overrightarrow{x}_1^*\right] \\ &= \overrightarrow{x}_1^* + \varepsilon\,(\overrightarrow{x}\,\Lambda\,\overrightarrow{x}_1^*) - \varepsilon\overline{\theta}(\overrightarrow{r}_2\Lambda\,\overrightarrow{x}_1^*)\end{aligned}$$

dır. (2.87) ve (2.94) eşitliklerinden $\overrightarrow{r}_2^* = \overrightarrow{n}^* = \overrightarrow{r}_2$ değerini yazarsak

$$\begin{aligned}\overrightarrow{X}_1^* &= \overrightarrow{x}_1^* + \varepsilon\,(\overrightarrow{x}\,\Lambda\,\overrightarrow{x}_1^*) - \varepsilon\overline{\theta}\,(\overrightarrow{n}^*\Lambda\,\overrightarrow{x}_1^*) \\ &= \overrightarrow{x}_1^* + \varepsilon\,(\overrightarrow{x}\,\Lambda\,\overrightarrow{x}_1^*) - \varepsilon\overline{\theta}\,\overrightarrow{g}^*\end{aligned}$$

olur. (2.94) eşitliklerinden $\overrightarrow{x}_1^*$ ve $\overrightarrow{g}^*$ değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\overrightarrow{X}_1^* &= \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} + \varepsilon\left[\overrightarrow{x}\,\Lambda\left(\frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}\right)\right] \\ &\quad -\varepsilon\overline{\theta}\left(-\frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}\right) \\ &= \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} + \varepsilon\frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\,(\overrightarrow{x}\,\Lambda\,\overrightarrow{x}_1) + \varepsilon\frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\,(\overrightarrow{x}\,\Lambda\,\overrightarrow{g}) \\ &\quad +\varepsilon\overline{\theta}^2\frac{\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 - \varepsilon\overline{\theta}\frac{(1+\overline{\theta}\rho_n)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}\end{aligned}$$

olur. (3.1) eşitliğindeki $(\overrightarrow{x}\,\Lambda\,\overrightarrow{x}_1)$ ve $(\overrightarrow{x}\,\Lambda\,\overrightarrow{g})$ değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{X}_1^* &= \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \varepsilon\frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{\overline{x}}_1 + \varepsilon\frac{\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} + \varepsilon\overline{\theta}\frac{\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{\overline{g}} \\
&\quad - \varepsilon\frac{\overline{\theta}\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} \\
&= \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\left(\overrightarrow{x}_1 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{x}}_1\right) + \frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\left(\overrightarrow{g} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{g}}\right) + \varepsilon\frac{\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 - \varepsilon\frac{\overline{\theta}\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} \\
&= \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1 + \frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G} + \varepsilon\frac{\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 - \varepsilon\overline{\theta}\frac{\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}
\end{aligned}$$

buluruz. Eşitliği $\overrightarrow{X}_1^*$ ve $\overrightarrow{G}^*$ dual birim vektörleri cinsinden yazabilmek için $\left(\varepsilon^2\frac{\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{\overline{x}}_1\right)$ ve $\left(-\varepsilon^2\frac{\overline{\theta}\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{\overline{g}}\right)$ ifadelerini ilave edelim. O zaman

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{X}_1^* &= \tfrac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1 + \tfrac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G} + \varepsilon\tfrac{\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \varepsilon^2\tfrac{\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{\overline{x}}_1 - \varepsilon\overline{\theta}\tfrac{\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} - \varepsilon^2\tfrac{\overline{\theta}\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{\overline{g}} \\
&= \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1 + \frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G} + \varepsilon\frac{\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\left(\overrightarrow{x}_1 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{x}}_1\right) - \varepsilon\overline{\theta}\frac{\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\left(\overrightarrow{g} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{g}}\right) \\
&= \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1 + \frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G} + \varepsilon\frac{\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1 - \varepsilon\overline{\theta}\frac{\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G} \\
&= \frac{1+\overline{\theta}\rho_n + \varepsilon\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1 + \frac{\overline{\theta}\tau_g - \varepsilon\overline{\theta}\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G}
\end{aligned}$$

olur. Benzer yolla $\overrightarrow{G}^*$ ın eşitini bulalım.

$$\overrightarrow{G}^* = \overrightarrow{g}^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{g}}^*$$

ifadesinde (3.1) deki eşitlikten $\overrightarrow{\overline{g}}^*$ ın değerini yerine yazarak

$$\overrightarrow{G}^* = \overrightarrow{g}^* + \varepsilon\left(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{g}^*\right)$$

olur. Bu denklemde (2.80) eşitliğinden $\overrightarrow{x}^*$ ın değerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G}^* &= \overrightarrow{g}^* + \varepsilon\left[\left(\overrightarrow{x} - \varepsilon\overline{\theta}\overrightarrow{r}_2\right)\Lambda\overrightarrow{g}^*\right] \\
&= \overrightarrow{g}^* + \varepsilon\left(\overrightarrow{x}\Lambda\overrightarrow{g}^*\right) - \varepsilon\overline{\theta}\left(\overrightarrow{r}_2\Lambda\overrightarrow{g}^*\right)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.56) ve (2.87) eşitliklerinden $\overrightarrow{r}_2 = \overrightarrow{r}_2^* = \overrightarrow{n}^*$ değerini yerine yazarsak

$$\overrightarrow{G}_1^* = \overrightarrow{g}^* + \varepsilon\left(\overrightarrow{x}\Lambda\overrightarrow{g}^*\right) + \varepsilon\overline{\theta}\overrightarrow{x}_1^*$$

ve (2.94) eşitliklerinden $\overrightarrow{x}_1^*$ ve $\overrightarrow{g}^*$ değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G}^* &= -\tfrac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \tfrac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} + \varepsilon\left[\overrightarrow{x}\Lambda\left(-\tfrac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \tfrac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}\right)\right] \\
&\quad +\varepsilon\overline{\theta}\left(\tfrac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \tfrac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}\right) \\
&= -\frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} + \varepsilon\frac{-\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\left(\overrightarrow{x}\Lambda\overrightarrow{x}_1\right) + \varepsilon\frac{\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} \\
&\quad +\varepsilon\frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\left(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{g}\right) + \varepsilon\frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1
\end{aligned}$$

olur. (3.1) eşitliğindeki $\left(\overrightarrow{x}\Lambda\overrightarrow{x}_1\right)$ ve $\left(\overrightarrow{x}\Lambda\overrightarrow{g}\right)$ değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G}^* &= -\frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} + \varepsilon\frac{\overline{\theta}\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \varepsilon\frac{\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} \\
&\quad -\varepsilon\frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{\overline{x}}_1 + \varepsilon\frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{\overline{g}} \\
&= -\frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\left(\overrightarrow{x}_1 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{x}}_1\right) + \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\left(\overrightarrow{g} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{g}}\right) + \varepsilon\overline{\theta}\frac{\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 \\
&\quad +\varepsilon\overline{\theta}^2\frac{\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} \\
&= -\frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1 + \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G} + \varepsilon\overline{\theta}\frac{\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \varepsilon\overline{\theta}^2\frac{\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g}
\end{aligned}$$

dır. (1.3) kullanarak $\left(+\varepsilon^2\overline{\theta}\frac{\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{\overline{x}}_1\right)$ ve $\left(+\varepsilon^2\overline{\theta}^2\frac{\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{\overline{g}}\right)$ son eşitliğe eklenirse

$$\begin{aligned}\overrightarrow{G}^* &= -\frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1 + \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G} + \varepsilon\overline{\theta}^2\frac{\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{x}_1 + \varepsilon\overline{\theta}\frac{\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{g} \\ &\quad +\varepsilon^2\overline{\theta}\frac{\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{\overline{x}}_1 + \varepsilon^2\overline{\theta}^2\frac{\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{\overline{g}} \\ &= -\frac{\overline{\theta}\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1 + \frac{1+\overline{\theta}\rho_n}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G} + \varepsilon\overline{\theta}\frac{\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}(\overrightarrow{x}_1 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{x}}_1) \\ &\quad +\varepsilon\overline{\theta}^2\frac{\tau_g}{\sqrt{A}}(\overrightarrow{g} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{g}})\end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\overrightarrow{G}^* = \frac{\overline{\theta}\tau_g - \varepsilon\overline{\theta}\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1 + \frac{1+\overline{\theta}\rho_n + \varepsilon\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G}$$

bulunur. Benzer yolla $\overrightarrow{N}^*$ dual birim vektörü

$$\overrightarrow{N}^* = \overrightarrow{n}^* + \varepsilon\overrightarrow{\overline{n}}^*$$

olduğundan, (3.1) deki eşitlikten $\overrightarrow{\overline{n}}^*$ ın değerini yerine yazarsak,

$$\overrightarrow{N}^* = \overrightarrow{n}^* + \varepsilon(\overrightarrow{x}^*\Lambda\overrightarrow{n}^*)$$

olur. Bu eşitliğe (2.80) eşitliğinden $\overrightarrow{x}^*$ ın değerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\overrightarrow{N}^* &= \overrightarrow{n}^* + \varepsilon\left[(\overrightarrow{x} - \varepsilon\overline{\theta}\overrightarrow{r}_2)\Lambda\overrightarrow{n}^*\right] \\ &= \overrightarrow{n}^* + \varepsilon(\overrightarrow{x}\Lambda\overrightarrow{n}^*) - \varepsilon\overline{\theta}(\overrightarrow{r}_2\Lambda\overrightarrow{n}^*)\end{aligned}$$

bulunur. (2.56), (2.89) eşitliklerinden $\overrightarrow{r}_2 = \overrightarrow{r}_2^* = \overrightarrow{n}^*$ değerini yerine yazarsak

$$\overrightarrow{N}^* = \overrightarrow{n} + \varepsilon(\overrightarrow{x}\Lambda\overrightarrow{n}) - \varepsilon\overline{\theta}(\overrightarrow{n}\Lambda\overrightarrow{n})$$

veya

$$\overrightarrow{N}^{*}=\overrightarrow{n}+\varepsilon\left(\overrightarrow{x}\Lambda\overrightarrow{n}\right)$$

olur. $\overrightarrow{x}\Lambda\overrightarrow{n}=\overrightarrow{\overline{n}}$ olduğu kullanılırsa

$$\overrightarrow{N}^{*}=\overrightarrow{N}$$

elde edilir.

O halde bulduğumuz bu denklemleri lineer denklem sistemi olarak yazarsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{X}_1^{*} &= \frac{1+\overline{\theta}\rho_n+\varepsilon\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1+\frac{\overline{\theta}\tau_g-\varepsilon\overline{\theta}\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G} \\
\overrightarrow{G}^{*} &= \frac{-\overline{\theta}\tau_g+\varepsilon\overline{\theta}\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1+\frac{1+\overline{\theta}\rho_n+\varepsilon\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G} \qquad (3.10) \\
\overrightarrow{N}^{*} &= \overrightarrow{N}
\end{aligned}$$

şeklinde gösteririz.

(3.8) deki ifade de (2.94), (2.97) ve (2.99) bağıntılarını (3.10) ile ilişkilendirdiğimizde, $\overrightarrow{\Gamma}^{*}_{1/0}$ dual vektörünü $\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N}$ vektörleri cinsinden yazabiliriz. (3.8) deki

$$\overrightarrow{\Gamma}^{*}_{1/0}=\sqrt{A}\left[\left(\tau_g^{*}+\varepsilon\right)\overrightarrow{X}_1^{*}-\rho_n^{*}\overrightarrow{G}^{*}+\rho_g^{*}\overrightarrow{N}^{*}\right]$$

eşitliğinde (2.94), (2.99) ve (3.10) bağıntılarındaki eşitlikleri yazarsak,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} &= \sqrt{A}\left(\frac{\tau_g}{A}+\varepsilon\right)\left[\frac{1+\overline{\theta}\rho_n+\varepsilon\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1+\frac{\overline{\theta}\tau_g-\varepsilon\overline{\theta}\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G}\right] \\
&\quad +\sqrt{A}\rho_g^*\overrightarrow{N}-\sqrt{A}\left(\frac{\rho_n+\overline{\theta}\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)}{A}\right)\left(\frac{-\overline{\theta}\tau_g+\varepsilon\overline{\theta}\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)}{\sqrt{A}}\overrightarrow{X}_1\right) \\
&\quad -\sqrt{A}\left(\frac{\rho_n+\overline{\theta}\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)}{A}\right)\left(+\frac{1+\overline{\theta}\rho_n+\varepsilon\overline{\theta}^2\tau_g}{\sqrt{A}}\overrightarrow{G}\right) \\
&= \left(\tfrac{\tau_g}{A}+\varepsilon\right)\left[\left(1+\overline{\theta}\rho_n+\varepsilon\overline{\theta}^2\tau_g\right)\overrightarrow{X}_1+\left(\overline{\theta}\tau_g-\varepsilon\overline{\theta}\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)\right)\overrightarrow{G}\right] \\
&\quad +\sqrt{A}\rho_g^*\overrightarrow{N}-\tfrac{\left(\rho_n+\overline{\theta}\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)\right)}{A}\left[\left(-\overline{\theta}\tau_g+\varepsilon\overline{\theta}\left(1+\overline{\theta}\rho_n\right)\right)\overrightarrow{X}_1\right] \\
&\quad -\tfrac{\left(\rho_n+\overline{\theta}\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)\right)}{A}\left[\left(1+\overline{\theta}\rho_n+\varepsilon\overline{\theta}^2\tau_g\right)\overrightarrow{G}\right]
\end{aligned}
$$

ve gerekli sadeleştirmeleri yapıp, $\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N}$ vektörlerinin parantezine alırsak,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} &= \left[\frac{\tau_g}{A}\left(1+2\overline{\theta}\rho_n+\overline{\theta}^2\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)\right)+\varepsilon\right]\overrightarrow{X}_1 \\
&\quad -\frac{\rho_n}{A}\left(1+2\overline{\theta}\rho_n+\overline{\theta}^2\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)\right)\overrightarrow{G}+\sqrt{A}\rho_g^*\overrightarrow{N}
\end{aligned}
$$

olur. (2.86) den $1+2\overline{\theta}\rho_n+\overline{\theta}^2\left(\rho_n^2+\tau_g^2\right)$ değerini yerine yazarsak,

$$
\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = \left(\frac{\tau_g}{A}A+\varepsilon\right)\overrightarrow{X}_1-\frac{\rho_n}{A}A\overrightarrow{G}+\sqrt{A}\rho_g^*\overrightarrow{N}^*
$$

ve (3.10) kullanılırsa,

$$
\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = \left(\tau_g+\varepsilon\right)\overrightarrow{X}_1-\rho_n\overrightarrow{G}+\sqrt{A}\rho_g^*\overrightarrow{N} \tag{3.11}
$$

elde edilir. (2.41) deki bağıntı ile (3.11) bağıntısını taraf tarafa çıkarırsak,

$$
\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = \left(\tau_g+\varepsilon\right)\overrightarrow{X}_1-\rho_n\overrightarrow{G}+\sqrt{A}\rho_g^*\overrightarrow{N}
$$

$$
\overrightarrow{\Gamma}_{1/0} = \left(\tau_g+\varepsilon\right)\overrightarrow{X}_1-\rho_n\overrightarrow{G}+\rho_g\overrightarrow{N}
$$

olduğundan

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} - \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} = \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N}$$

ve buradan

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N} \tag{3.12}$$

olarak bulunur. O halde paralel regle yüzeyin Darboux üçyüzlüsünün ani hızı ile regle yüzeyin Darboux üçyüzlüsünün ani hızı arasındaki bağıntıyı göstermiş olduk. (2.101) bağıntısı

$$\sqrt{A}\rho_g^* = \rho_g + \frac{\overline{\theta}}{A}\left[\tau_g^{'} + \overline{\theta}\left(\frac{\tau_g}{\rho_n}\right)^{'}\right]$$

(3.12) bağıntısında yerine yazarsak

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\rho_g + \frac{\overline{\theta}}{A}\left[\tau_g^{'} + \overline{\theta}\left(\frac{\tau_g}{\rho_n}\right)^{'}\right] - \rho_g\right)\overrightarrow{N}$$

ve buradan

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \frac{\overline{\theta}}{A}\left[\tau_g^{'} + \overline{\theta}\left(\frac{\tau_g}{\rho_n}\right)^{'}\right]\overrightarrow{N} \tag{3.13}$$

bulunur. (3.12) eşitliğinde verilen bağıntıyı reel ve dual kısımlarına ayırırsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} &= \overrightarrow{W}^*_{10} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{W}}^*_{10} \\
&= \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N} \\
&= \overrightarrow{W}_{10} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{W}}_{10} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\left(\overrightarrow{n} + \varepsilon\overrightarrow{\overline{n}}\right) \\
&= \overrightarrow{W}_{10} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{n} + \varepsilon\left[\overrightarrow{\overline{W}}_{10} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{\overline{n}}\right]
\end{aligned}$$

dır. Buradan dual sayıların eşitliği kullanılırsa

$$\overrightarrow{W}^*_{10} = \overrightarrow{W}_{10} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{n} \tag{3.14}$$

ve

$$\overrightarrow{\overline{W}}^*_{10} = \overrightarrow{\overline{W}}_{10} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{\overline{n}} \tag{3.15}$$

elde edilir.

$\overrightarrow{W}^*_{10}$ ile $\overrightarrow{\overrightarrow{W}}^*_{10}$ vektörleri iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{W}^*_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}^*_{10} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{W}_{10} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{n}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{\overrightarrow{n}} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} \right\rangle + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{n}} \right\rangle \\
&\quad + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} \right\rangle + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)^2 \left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{\overrightarrow{n}} \right\rangle
\end{aligned}$$

olur. (3.1) eşitliği ve $\overrightarrow{n}$ ortonormal bir vektör olduğu kullanılırsa

$$\left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{\overrightarrow{n}} \right\rangle = \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}\Lambda\overrightarrow{n} \rangle = 0 \tag{3.16}$$

dır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{W}^*_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}^*_{10} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} \right\rangle + (\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g)\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{n}} \right\rangle \\
&\quad + (\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g)\left\langle \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle
\end{aligned}$$

veya eşitliğinde iç çarpım işlemini skalar çarpım şeklinde gösterecek olursak

$$\left\langle \overrightarrow{W}^*_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}^*_{10} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} \right\rangle + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\left[\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{n}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle\right] \tag{3.17}$$

bulunur. Şimdi $\overrightarrow{W}^*_{10}$ ın kendisi ile iç çarpımını bulalım.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{W}^*_{10}, \overrightarrow{W}^*_{10} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{W}_{10} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{n}, \overrightarrow{W}_{10} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{n} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\left[\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle\right] \\
&\quad + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)^2 \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \rangle
\end{aligned}$$

dır. İç çarpımın değişme özelliği ve n ortonormal birim vektör olduğundan

$$\left\langle \overrightarrow{W}^*_{10}, \overrightarrow{W}^*_{10} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle + 2\left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)^2$$

ve buradan

$$\overrightarrow{W}^{*2}_{10} = \overrightarrow{W}^{2}_{10} + \left(\sqrt{A}\rho^*_g - \rho_g\right)^2 + 2\left(\sqrt{A}\rho^*_g - \rho_g\right)\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle \tag{3.18}$$

bulunur. (2.40) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\Gamma}_{10}, \overrightarrow{N} \right\rangle &= \left\langle (\tau_g + \varepsilon)\overrightarrow{X_1} - \rho_n \overrightarrow{G} + \rho_g \overrightarrow{N}, \overrightarrow{N} \right\rangle \\ &= (\tau_g + \varepsilon)\left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{N} \right\rangle - \rho_n \left\langle \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N} \right\rangle + \rho_g \left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{N} \right\rangle \end{aligned}$$

dır. $\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N}$ ortonormal vektörler olduklarından,

$$\left\langle \overrightarrow{\Gamma}_{10}, \overrightarrow{N} \right\rangle = \rho_g \tag{3.19}$$

ve böylece (3.19) u reel ve dual kısımlara ayırırsak.

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\Gamma}_{10}, \overrightarrow{N} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{W}_{10} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{W}}_{10}, \overrightarrow{n} + \varepsilon \overrightarrow{\overline{n}} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle + \varepsilon \left\langle \overrightarrow{\overline{W}}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle + \varepsilon \left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overline{n}} \right\rangle + \varepsilon^2 \left\langle \overrightarrow{\overline{W}}_{10}, \overrightarrow{\overline{n}} \right\rangle \end{aligned}$$

olur. Buradan (1.3) gereğinde $\varepsilon^2 = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\Gamma}_{10}, \overrightarrow{N} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle + \varepsilon \left[\left\langle \overrightarrow{\overline{W}}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\overline{n}}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle \right] \\ &= \rho_g \end{aligned}$$

dır, iki dual sayının eşitliği kullanılırsa

$$\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle = \rho_g \tag{3.20}$$

ve

$$\left\langle \overrightarrow{\overline{W}}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overline{n}} \right\rangle = 0 \tag{3.21}$$

bulunur.

Paralel regle yüzeylerinde (2.70) eşitliğini i=1 için hesaplayalım.

$$\lambda_1^* = \frac{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}^*, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10}^* \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}^*, \overrightarrow{W}_{10}^* \right\rangle}$$

bu eşitlikde (3.17) ve (3.18) den eşitliklerin değerlerini yerine yazarsak

$$\lambda_1^* = \frac{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} \right\rangle + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\left(\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{n}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle\right)}{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)^2 + 2\left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle}$$

olur.

(2.43) eşitlerinde $\overrightarrow{W}_{10}$ ve $\overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10}$ eşitliklerini kullanarak $\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{n}} \right\rangle$ ve $\left\langle \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle$ eşitliklerini bulalım.

$$\overrightarrow{W}_{10} = \tau_g \overrightarrow{x}_1 - \rho_n \overrightarrow{g} + \rho_g \overrightarrow{n}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overline{n} \right\rangle &= \left\langle \tau_g \overrightarrow{x}_1 - \rho_n \overrightarrow{g} + \rho_g \overrightarrow{n}, \overrightarrow{\overrightarrow{n}} \right\rangle \\
&= \tau_g \left\langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{\overrightarrow{n}} \right\rangle - \rho_n \left\langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{\overrightarrow{n}} \right\rangle + \rho_g \left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{\overrightarrow{n}} \right\rangle \\
&= \tau_g \left\langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x} \Lambda \overrightarrow{n} \right\rangle - \rho_n \left\langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{x} \Lambda \overrightarrow{\overrightarrow{n}} \right\rangle + \rho_g \left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x} \Lambda \overrightarrow{n} \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} = \overrightarrow{x}_1 + \tau_g \overrightarrow{\overline{x}}_1 - \rho_n \overrightarrow{\overline{g}} + \rho_g \overrightarrow{\overline{n}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{x}_1 + \tau_g \overrightarrow{\overline{x}}_1 - \rho_n \overrightarrow{\overline{g}} + \rho_g \overrightarrow{\overline{n}}, \overrightarrow{n} \right\rangle \\
&= \left\langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{n} \right\rangle + \tau_g \left\langle \overline{x}_1, \overrightarrow{n} \right\rangle - \rho_n \left\langle \overrightarrow{\overline{g}}, \overrightarrow{n} \right\rangle + \rho_g \left\langle \overrightarrow{\overline{n}}, \overrightarrow{n} \right\rangle
\end{aligned}$$

dır. $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n}$ ortonormal vektörler olduklarından

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle &= 0 + \tau_g \left\langle \overrightarrow{x} \Lambda \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{n} \right\rangle - \rho_n \left\langle \overrightarrow{x} \Lambda \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n} \right\rangle + \rho_g \left\langle \overrightarrow{x} \Lambda \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \right\rangle \\
&= 0 + \tau_g 0 - \rho_n 0 + \rho_g 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{n} \right\rangle &= \left\langle \tau_g \overrightarrow{x}_1 - \rho_n \overrightarrow{g} + \rho_g \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \right\rangle \\
&= \tau_g \left\langle \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{n} \right\rangle - \rho_n \left\langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n} \right\rangle + \rho_g \left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \right\rangle \\
&= \rho_g
\end{aligned}$$

Yine bu ifade de $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n}$ ortonormal vektörler olduklarından

$$\begin{aligned}
\lambda_1^* &= \frac{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} \right\rangle + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right) 0 + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right) 0 + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)^2 0}{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle + 2.\rho_g \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right) + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)^2} \\
&= \frac{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle + 2\sqrt{A}\rho_g^*\rho_g - 2\rho_g^2 + A\rho_g^{*2} - 2\sqrt{A}\rho_g^*\rho_g + \rho_g^2} \\
&= \frac{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle - \rho_g^2 + A\rho_g^{*2}}
\end{aligned}$$

veya

$$\lambda_1^* = \frac{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle + A\rho_g^{*2} - \rho_g^2} \tag{3.22}$$

demektir. O halde (2.44) deki dağılma parametresi $i = 1$ için bulalım. Dağılma parametresinin tanımından λ_i için λ_1 alırsak

$$\lambda_1 = \frac{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} \right\rangle}{\overrightarrow{W}_{10}^2}$$

dır. Bu ifade de $\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} \right\rangle$ yi uygun işlemlerle

$$\overrightarrow{W}_{10}^2 \lambda_1 = \left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} \right\rangle$$

yazılır ve (3.22) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= \frac{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{\overrightarrow{W}}_{10} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle + A\rho_g^{*2} - \rho_g^2} \\ &= \frac{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle \lambda_1}{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle - \rho_g^2 + A\rho_g^{*2}} \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin pay ve paydasını $\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle$ ile bölersek,

$$\lambda_1^* = \frac{\lambda_1}{1 + \dfrac{A\rho_g^{*2} - \rho_g^2}{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle}} \tag{3.23}$$

dır. Eğer (2.101) ifadenin iki tarafına ρ_g eklersek

$$\sqrt{A}\rho_g^* + \rho_g = 2\rho_g + \frac{\overline{\theta}}{A}\left[\tau'_g + \overline{\theta}\rho_n^2 \left(\frac{\tau_g}{\rho_n}\right)'\right]$$

ve aynı zamanda (2.101) ifadesinde ρ_g yi eşitliğin iki tarafdan çıkarırsak,

$$\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g = \frac{\overline{\theta}}{A}\left[\tau'_g + \overline{\theta}\rho_n^2 \left(\frac{\tau_g}{\rho_n}\right)'\right]$$

elde edilir. Bulunan bu iki eşitlik taraf tarafa çarpılırsa

$$(\sqrt{A}\rho_g^* + \rho_g)(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g) = \tfrac{\overline{\theta}}{A}\left[\tau'_g + \overline{\theta}\rho_n^2 \left(\tfrac{\tau_g}{\rho_n}\right)'\right](2\rho_g + \tfrac{\overline{\theta}}{A}\left[\tau'_g + \overline{\theta}\rho_n^2 \left(\tfrac{\tau_g}{\rho_n}\right)'\right])$$

veya

$$\left(A\rho_g^{*2} - \rho_g^2\right) = \frac{\overline{\theta}}{A}\left[\tau'_g + \overline{\theta}\rho_n^2 \left(\frac{\tau_g}{\rho_n}\right)'\right]\left(2\rho_g + \frac{\overline{\theta}}{A}\left(\tau'_g + \overline{\theta}\rho_n^2 \left(\frac{\tau_g}{\rho_n}\right)'\right)\right) \tag{3.24}$$

olarak bulunur. Eğer $\left(A\rho_g^{*2} - \rho_g^2\right) = B$ alınırsa ve (3.22) de yerine yazılırsa,

$$\lambda_1^* = \frac{\lambda_1}{1 + \dfrac{B}{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10} \right\rangle}} \tag{3.25}$$

elde edilir.

$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0}$ dual vektörü birim değildir. O halde $\overrightarrow{G}_1^*$ a $\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0}$ ın birim vektörü kabul edip, Tanım 1.2.8 den

$$\overrightarrow{G}_1^* = \frac{\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0}}{\sqrt{\langle \overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0}, \overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} \rangle}} \tag{3.26}$$

olur. (3.12) bağıntısıdan $\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}$ ın eşitini yazarsak

$$\overrightarrow{G}_1^* = \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N}}{\sqrt{\left\langle \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N}, \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N} \right\rangle}}$$

dir. Bu ifadede, iç çarpımın lineerlik özelliği ve $\overrightarrow{N}$ birim dual vektör olduğu kullanılırsa,

$$\overrightarrow{G}_1^* = \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N}}{\sqrt{\left\langle \overrightarrow{\Gamma}_{1/0}, \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} \right\rangle + 2\left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\left\langle \overrightarrow{\Gamma}_{1/0}, \overrightarrow{N} \right\rangle + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)^2}}$$

olur. (2.41) gereğince

$$\overrightarrow{\Gamma}_{1/0} = (\tau_g + \varepsilon)\overrightarrow{X}_1 - \rho_n\overrightarrow{G} + \rho_g\overrightarrow{N}$$

olup, $\overrightarrow{N}$ ile iç çarparsak,

$$\left\langle \overrightarrow{\Gamma}_{1/0}, \overrightarrow{N} \right\rangle = \left\langle (\tau_g + \varepsilon)\overrightarrow{X}_1 - \rho_n\overrightarrow{G} + \rho_g\overrightarrow{N}, \overrightarrow{N} \right\rangle$$

bulunur. $(\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N})$ ortonormal birim vektörler olduğundan

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{\Gamma}_{1/0}, N \right\rangle &= \tau_g + \varepsilon \left\langle \overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{N} \right\rangle - \rho_n \left\langle \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N} \right\rangle + \rho_g \left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{N} \right\rangle \\ &= 0 \left\langle \overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{N} \right\rangle - \rho_n .0 + \rho_g .1\end{aligned}$$

veya

$$\left\langle \overrightarrow{\Gamma}_{1/0}, \overrightarrow{N} \right\rangle = \rho_g \tag{3.27}$$

elde edilir. (2.41) gereğince $\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}$ nın kendisi ile iç çarpımını yazarsak,

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{\Gamma}_{1/0}, \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} \right\rangle &= \left\langle (\tau_g + \varepsilon) \overrightarrow{X}_1 - \rho_n \overrightarrow{G} + \rho_g \overrightarrow{N}, (\tau_g + \varepsilon) \overrightarrow{X}_1 - \rho_n \overrightarrow{G} + \rho_g \overrightarrow{N} \right\rangle \\ &= (\tau_g + \varepsilon)^2 \left\langle \overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{X}_1 \right\rangle - (\tau_g + \varepsilon) \rho_n \left\langle X_1, \overrightarrow{G} \right\rangle + \rho_n^2 \left\langle \overrightarrow{G}, \overrightarrow{G} \right\rangle \\ &\quad - (\tau_g + \varepsilon) \rho_n \left\langle \overrightarrow{G}, \overrightarrow{X}_1 \right\rangle + \rho_g^2 \left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{N} \right\rangle - \rho_n \rho_g \left\langle \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N} \right\rangle \\ &\quad + (\tau_g + \varepsilon) \rho_g \left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{X}_1 \right\rangle - \rho_n \rho_g \left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{G} \right\rangle + (\tau_g + \varepsilon) \rho_g \left\langle \overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{N} \right\rangle\end{aligned}$$

olur. $(\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N})$ ortonormal bir sistem olduğundan

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{\Gamma}_{1/0}, \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} \right\rangle &= (\tau_g + \varepsilon)^2 + \rho_n^2 + \rho_n^2 \\ &= \tau_g^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\tau_g + \rho_n^2 + \rho_g^2\end{aligned}$$

veya (1.3) gereğince

$$\left\langle \overrightarrow{\Gamma}_{1/0}, \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} \right\rangle = \rho_n^2 + \rho_g^2 + \tau_g^2 + 2\varepsilon\tau_g \tag{3.28}$$

eşitliğini elde ederiz. (3.26) bağıntısında (3.27) ve (3.28) bağıntıları kullanılırsa,

$$\overrightarrow{G}_1^* = \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right) \overrightarrow{N}}{\sqrt{\tau_g^2 + 2\varepsilon\tau_g + \varepsilon^2 + \rho_n^2 + \rho_g^2 + 2\left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\rho_g + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)^2}}$$

bulunur. (1.3) den ve $\left(\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N}\right)$ ortonormal bir sistem olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G}_1^* &= \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N}}{\sqrt{\tau_g^2 + 2\varepsilon\tau_g + \varepsilon^2 + \rho_n^2 + \rho_g^2 + 2\sqrt{A}\rho_g^*\rho_g - 2\rho_g^2 + \sqrt{A}\rho_g^{*2} + \rho_g^2 - 2\sqrt{A}\rho_g^*\rho_g}} \\
&= \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N}}{\sqrt{\tau_g^2 + \rho_n^2 + 2\varepsilon\tau_g + A\rho_g^{*2}}}
\end{aligned}$$

olur. Payda da ρ_g^2 ekleyip çıkartırsak

$$\overrightarrow{G}_1^* = \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}g_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N}}{\sqrt{\tau_g^2 + \rho_n^2 + 2\varepsilon\tau_g + A\rho_g^{*2} + \rho_g^2 - \rho_g^2}}$$

yazılır ve bu denklemde $A\rho_g^{*2} - \rho_g^2 = B$ alınırsa

$$\overrightarrow{G}_1^* = \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N}}{\sqrt{\tau_g^2 + \rho_n^2 + 2\varepsilon\tau_g + \rho_g^2 + A\rho_g^{*2} - \rho_g^2}}$$

veya

$$\overrightarrow{G}_1^* = \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N}}{\sqrt{\tau_g^2 + \rho_n^2 + 2\varepsilon\tau_g + \rho_g^2 + B}} \tag{3.29}$$

birim vektörü elde edilir.

Bu ise, (3.25) formülün de belirtildiği gibi, eksene teğet helicoid bir hareket belirtir.

$$\frac{\tau_g^{'}}{\rho_n^2\left(\dfrac{\tau_g}{\rho_n}\right)^{'}} = \frac{\tau_g^{'}}{\tau_g^{'}\rho_n - \tau_g\rho_n^{'}} = \mu = sbt. \tag{3.30}$$

bağıntıları sağlanır. $\overline{\theta}$ sabit olarak seçilir ve $\overline{\theta} = -\,\mu$ alınırsa (2.101) ifadesi $\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g = 0$ olur ve buradan da $B = 0$ olur. Buna göre

$$\left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right) = \frac{\overline{\theta}}{A}\left[\tau_g^{'} + \overline{\theta}\rho_n^2\left(\frac{\tau_g}{\rho_n}\right)^{'}\right]$$

ve

$$\frac{\tau_g^2}{\rho_n^2\left(\dfrac{\tau_g}{\rho_n}\right)^{'}} = \mu = -\overline{\theta}$$

olursa

$$\tau_g^{'} = -\overline{\theta}\rho_n^2\left(\frac{\tau_g}{\rho_n}\right)^{'}$$

olur. Buradan $\tau_g^{'}$ yerine eşitini yazarsak $\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g = 0$ ve buradan da $B = \sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g$ olacağından $B = 0$ bulunur.

(3.13) bağınısında $\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g = 0$ alınırsa

$$\left\langle \overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0}, \overrightarrow{\Gamma}_{1/0}\right\rangle + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N} = \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + 0.\overrightarrow{N} = \overrightarrow{\Gamma}_{1/0}$$

veya

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} \tag{3.31}$$

elde edilir.

(3.27) bağıntısında da $\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G}_1^* &= \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N}}{\sqrt{\tau_g^2 + \rho_n^2 + \rho_g^2 + 2\varepsilon\tau_g + B}} = \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + 0.\overrightarrow{N}}{\sqrt{\tau_g^2 + \rho_n^2 + \rho_g^2 + 2\varepsilon\tau_g + 0}} \\
&= \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}}{\sqrt{\tau_g^2 + \rho_n^2 + \rho_g^2 + 2\varepsilon\tau_g}} \\
&= \overrightarrow{G}_1
\end{aligned}$$

olduğunu görülür. O halde

$$\overrightarrow{G}_1^* = \overrightarrow{G}_1 \tag{3.32}$$

dir. Benzer şekilde (3.23) bağıntısında $\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g = 0$ alırsak

$$\lambda_1^* = \frac{\lambda_1}{1 + \dfrac{B}{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10}\right\rangle}} = \frac{\lambda_1}{1 + \dfrac{0}{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}, \overrightarrow{W}_{10}\right\rangle}} = \frac{\lambda_1}{1} = \lambda_1$$

bulunur. O zaman

$$\lambda_1^* = \lambda_1 \tag{3.33}$$

elde edilir. $\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0}$ ve $\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}$ birim olmayan dual vektörleri de aynı şekilde helikodal teğet hareketi yapar

3.2 Paralel Regle Yüzeyin Darboux ve Blaschke Vektörleri İle İlişkisi

$[R_1^*]$ paralel regle yüzeyinin (x^*) striksiyon çizgisi jeodezik ise veya $\rho_g^* = 0$ ise o zaman (3.12) gereğince

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} &= \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}\rho_g^* - \rho_g\right)\overrightarrow{N} \\ &= \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} + \left(\sqrt{A}.0 - \rho_g\right)\overrightarrow{N} \end{aligned}$$

veya

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} - \rho_g\overrightarrow{N} \tag{3.34}$$

elde edilir. (3.8) ifadesi

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = \sqrt{A}\left[\left(\tau_g^* + \varepsilon\right)\overrightarrow{X}_1^* - \rho_n^*\overrightarrow{G}^* + \rho_g^*\overrightarrow{N}^*\right]$$

olup, $\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = \overrightarrow{\Gamma}_{1/0}$ alırsak,

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = \overrightarrow{\Gamma}_{1/0} = \sqrt{A}\left[(\tau_g + \varepsilon)\overrightarrow{X}_1 - \rho_n\overrightarrow{G} + \rho_g\overrightarrow{N}\right]$$

dır. $\rho_g^* = 0$ olursa, $\rho_g = 0$ olur. Bu da

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = \left[(\tau_g + \varepsilon)\overrightarrow{X}_1 - \rho_n\overrightarrow{G}\right] \tag{3.35}$$

olduğunu gösterir. (3.35) bağıntısını reel ve dual kısımlarına ayırırırsak,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} &= (\tau_g+\varepsilon)\left(\overrightarrow{x}_1+\varepsilon\overrightarrow{\overline{x}}_1\right)-\rho_n\left(\overrightarrow{g}+\varepsilon\overrightarrow{\overline{g}}\right)\\ &= \tau_g\overrightarrow{x}_1+\varepsilon\tau_g\overrightarrow{\overline{x}}_1+\varepsilon\overrightarrow{x}_1+\varepsilon^2\overrightarrow{\overline{x}}_1-\rho_n\overrightarrow{g}-\varepsilon\rho_n\overrightarrow{\overline{g}}\end{aligned}$$

olur. (1.3) gereğince

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0}=\tau_g\overrightarrow{x}_1-\rho_n\overrightarrow{g}+\varepsilon\left(\tau_g\overrightarrow{\overline{x}}_1+\overrightarrow{x}_1-\rho_n\overrightarrow{\overline{g}}\right) \tag{3.36}$$

olacaktır. Dual sayıların eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\overrightarrow{W}^*_{10} &= \tau_g\overrightarrow{x}_1-\rho_n\overrightarrow{g}\\ \overrightarrow{\overline{W}}^*_{10} &= \tau_g\overrightarrow{\overline{x}}_1+\overrightarrow{x}_1+\rho_n\overrightarrow{\overline{g}}\end{aligned} \tag{3.37}$$

olarak elde edilir. Ayrıca (2.50) den

$$\lambda_1^*=\frac{\left\langle\overrightarrow{W}^*_{10},\overrightarrow{\overline{W}}^*_{10}\right\rangle}{\left\langle\overrightarrow{W}^*_{10},\overrightarrow{W}^*_{10}\right\rangle}$$

ifadesinde (3.37) bağıntısı yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\lambda_1^* &= \frac{\left\langle\tau_g\overrightarrow{x}_1-\rho_n\overrightarrow{g},\tau_g\overrightarrow{\overline{x}}_1+\overrightarrow{x}_1+\rho_n\overrightarrow{\overline{g}}\right\rangle}{\langle\tau_g\overrightarrow{x}_1-\rho_n\overrightarrow{g},\tau_g\overrightarrow{x}_1-\rho_n\overrightarrow{g}\rangle}\\ &= \frac{\tau_g\langle\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{x}_1\rangle+\tau_g^2\left\langle\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{\overline{x}}_1\right\rangle-\rho_n\left\langle\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{\overline{g}}\right\rangle-\rho_n\tau_g\left\langle\overrightarrow{g},\overrightarrow{\overline{x}}_1\right\rangle+\rho_n^2\left\langle\overrightarrow{g},\overrightarrow{\overline{g}}\right\rangle}{\tau_g^2\langle\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{x}_1\rangle-\rho_n\tau_g\langle\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{g}\rangle-\rho_n\tau_g\langle\overrightarrow{g},\overrightarrow{x}_1\rangle+\rho_n^2\langle\overrightarrow{g},\overrightarrow{g}\rangle}\end{aligned}$$

olur. $(\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{g},\overrightarrow{n})$ ortonormal vektörler olduğundan

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{x}_1=1 &&, \quad \left\langle\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{\overline{x}}_1\right\rangle=\langle\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{x}\Lambda\overrightarrow{x}_1\rangle=0\\ &\left\langle\overrightarrow{g},\overrightarrow{\overline{g}}\right\rangle=0 &&, \quad \langle\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{g}\rangle=0\\ &\left\langle\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{\overline{g}}\right\rangle=0 &&, \quad \left\langle\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{\overline{g}}\right\rangle=\langle\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{x}\Lambda\overrightarrow{g}\rangle=0\\ &\left\langle\overrightarrow{\overline{x}}_1,\overrightarrow{g}\right\rangle=0 &&\end{aligned}$$

dır.

Bu değerleri yerine yazarsak,

$$\lambda_1^* = \frac{\tau_g}{\tau_g^2 + \rho_n^2} \tag{3.38}$$

elde ederiz.

(3.33) birim olmayan dual vektördür. (3.33) deki $\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0}$ vektörünü dual birim vektör olarak yazalım.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G}_1^* &= \frac{\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0}}{\sqrt{\overrightarrow{\Gamma}^{*2}_{1/0}}} \\
&= \frac{(\tau_g + \varepsilon)\overrightarrow{X}_1 - \rho_n \overrightarrow{G}}{\sqrt{\left\langle (\tau_g + \varepsilon)\overrightarrow{X}_1 - \rho_n \overrightarrow{G}, (\tau_g + \varepsilon)\overrightarrow{X}_1 - \rho_n \overrightarrow{G} \right\rangle}} \\
&= \frac{(\tau_g + \varepsilon)\overrightarrow{X}_1 - \rho_n \overrightarrow{G}}{\sqrt{(\tau_g + \varepsilon)^2 \left\langle \overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{X}_1 \right\rangle - 2(\tau_g + \varepsilon)\rho_n \left\langle \overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G} \right\rangle + \rho_n^2 \left\langle \overrightarrow{G}, \overrightarrow{G} \right\rangle}}
\end{aligned}$$

bulunur. $(\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N})$ ortonormal vektörler olduklarından,

$$\overrightarrow{G}_1^* = \frac{(\tau_g + \varepsilon)\overrightarrow{X}_1 - \rho_n \overrightarrow{G}}{\sqrt{(\tau_g + \varepsilon)^2 + \rho_n^2}}$$

olur. Gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\overrightarrow{G}_1^* = \frac{(\tau_g + \varepsilon)\overrightarrow{X}_1 - \rho_n \overrightarrow{G}}{\sqrt{\tau_g^2 + \varepsilon^2 + 2\tau_g\varepsilon + \rho_n^2}}$$

ve (1.3) den $\varepsilon^2 = 0$ kullanılırsa,

$$\overrightarrow{G}_1^* = \frac{(\tau_g + \varepsilon)\overrightarrow{X}_1 - \rho_n \overrightarrow{G}}{\sqrt{\tau_g^2 + \rho_n^2 + 2\tau_g\varepsilon}} \tag{3.39}$$

elde edilir.

Ayrıca, (3.36) da belirlenen yöntemle bir helicoidal teğet hareket ifade eder.

$$\overrightarrow{R}_2 = \overrightarrow{R}_2(s)$$

dual birim vektör tarafından oluşturulan $[R_2]$ dual regle yüzeyi için,

$$\frac{1}{d_2} = \frac{\tau_g}{\tau_g^2 + \rho_n^2} \tag{3.40}$$

dir.

$[R_2]$ regle yüzeyinin drali $\dfrac{1}{d_2}$ dir. Tanım 1.3.6 dan $\dfrac{1}{d_2}$ drali için,

$$\frac{1}{d_2} = \frac{\left\langle \overrightarrow{r}'_2, \overline{\overrightarrow{r}}'_2 \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{r}'_2, \overrightarrow{r}'_2 \right\rangle}$$

olduğunu biliyoruz. (2.26) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r}'_2 &= -p\overrightarrow{r}_1 + q\overrightarrow{r}_3 \\ \overline{\overrightarrow{r}}'_2 &= -p\overline{\overrightarrow{r}}_1 - \overline{p}\overrightarrow{r}_1 + \overline{q}\overrightarrow{r}_3 + q\overline{\overrightarrow{r}}_3 \end{aligned}$$

ve $\dfrac{1}{d_2}$ eşitliğinde bunları yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_2} &= \frac{\left\langle -p\overrightarrow{r}_1 + q\overrightarrow{r}_3, -p\overline{\overrightarrow{r}}_1 - \overline{p}\overrightarrow{r}_1 + \overline{q}\overrightarrow{r}_3 + q\overline{\overrightarrow{r}}_3 \right\rangle}{\left\langle -p\overrightarrow{r}_1 + q\overrightarrow{r}_3, -p\overrightarrow{r}_1 + q\overrightarrow{r}_3 \right\rangle} \\ &= \frac{p^2\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overline{\overrightarrow{r}}_1 \right\rangle + p\overline{p}\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_1 \right\rangle - p\overline{q}\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_3 \right\rangle - pq\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overline{\overrightarrow{r}}_3 \right\rangle}{p^2\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_1 \right\rangle - pq\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_3 \right\rangle - pq\left\langle \overrightarrow{r}_3, \overrightarrow{r}_1 \right\rangle + q^2\left\langle \overrightarrow{r}_3, \overrightarrow{r}_3 \right\rangle} \\ &\quad + \frac{-pq\left\langle \overrightarrow{r}_3, \overrightarrow{r}_1 \right\rangle - q\overline{p}\left\langle \overrightarrow{r}_3, \overrightarrow{r}_1 \right\rangle + q\overline{q}\left\langle \overrightarrow{r}_3, \overrightarrow{r}_3 \right\rangle + q^2\left\langle \overrightarrow{r}_3, \overline{\overrightarrow{r}}_3 \right\rangle}{p^2\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_1 \right\rangle - pq\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_3 \right\rangle - pq\overrightarrow{r}_3 + q^2\left\langle \overrightarrow{r}_3, \overrightarrow{r}_3 \right\rangle} \end{aligned}$$

olacaktır. $\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{r}_3$ ortonormal birim vektörler olduğundan,

$$\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_1 \rangle = \langle \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{r}_2 \rangle = \langle \overrightarrow{r}_3, \overrightarrow{r}_3 \rangle = 1,$$

$$\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{\overline{r}}_1 \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{\overline{r}}_2 \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{r}_3, \overrightarrow{\overline{r}}_3 \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{\overline{r}}_2 \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\overline{r}}_1, \overrightarrow{r}_3 \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{\overline{r}}_3 \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{\overline{r}}_3 \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\overline{r}}_2, \overrightarrow{r}_3 \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\overline{r}}_1, \overrightarrow{r}_2 \right\rangle = 0$$

dir. Bu eşitlikleri $\dfrac{1}{d_2}$ ifadesinde yerine yazarsak

$$\frac{1}{d_2} = \frac{p\overline{p} + q\overline{q}}{p^2 + q^2} \tag{3.41}$$

buluruz. (2.35) ve (2.36) daki eşitliklerden $p\overline{p}+q\overline{q}$ ve p^2+q^2 eşitlerini yerlerine yazarsak

$$\frac{1}{d_2} = \frac{\tau_g}{\tau_g^2 + \rho_n^2}$$

elde edilir.

Helicoidal teğet hareketi, (3.31) deki birim olmayan vektör ile belirlenir, bu $[R_2]$ dual regle yüzeyine eşittir.

Eğer $[R_1^*]$ paralel regle yüzeyinin (x^*) striksiyon çizgisi, dayanak eğrisi ise, $\tau_g^* = 0$ buradan da $\tau_g = 0$ dır. (2.99) daki eşitliklerden, $\tau_g^* = 0$ ise $\tau_g = 0$ olacaktır. Bu ifadeler (2.101) denkleminde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \sqrt{A}\rho_g^* &= \rho_g + \frac{\overline{\theta}}{A}[(0)' + \overline{\theta}\rho_n^2(\frac{0}{\rho_n})'] \\ &= \rho_g + \frac{\overline{\theta}}{A}(0) \end{aligned}$$

veya

$$\sqrt{A}\rho_g^* = \rho_g \tag{3.42}$$

bulunur. (3.12) denkleminde $\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}$ yerine (2.41) eşitliğini yazarsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} &= (\tau_g + \varepsilon)\overrightarrow{X}_1 - \rho_n\overrightarrow{G} + \rho_n\overrightarrow{N} + \sqrt{A}\rho_g^*\overrightarrow{N} - \rho_n\overrightarrow{N} \\
&= \tau_g\overrightarrow{X}_1 + \varepsilon\overrightarrow{X}_1 - \rho_n\overrightarrow{G} + \sqrt{A}\rho_g^*\overrightarrow{N}
\end{aligned}$$

olur. $\tau_g = 0$ ve $\sqrt{A}\rho_g^* = \rho_n$ olduğundan,

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = \varepsilon\overrightarrow{X}_1 - \rho_n\overrightarrow{G} + \rho_g\overrightarrow{N} \tag{3.43}$$

elde edilir. (3.43) eşitliğini reel ve dual kısımlara ayırırsak,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} &= \overrightarrow{W}^*_{10} + \varepsilon\overrightarrow{\overrightarrow{W}}^*_{10} \\
&= \varepsilon\overrightarrow{X}_1 - \rho_n\overrightarrow{G} + \rho_g\overrightarrow{N} \\
&= \varepsilon(\overrightarrow{x}_1 + \varepsilon\overrightarrow{\overrightarrow{x_1}}) - \rho_n(\overrightarrow{g} + \varepsilon\overrightarrow{\overrightarrow{g}}) + \rho_g(\overrightarrow{n} + \varepsilon\overrightarrow{\overrightarrow{n}}) \\
&= \varepsilon\overrightarrow{x}_1 + \varepsilon^2\overrightarrow{\overrightarrow{x}}_1 - \rho_n\overrightarrow{g} + \varepsilon\rho_n\overrightarrow{\overrightarrow{g}} + \rho_g\overrightarrow{n} + \varepsilon\rho_g\overrightarrow{\overrightarrow{n}}
\end{aligned}$$

veya

$$\overrightarrow{\Gamma}^*_{1/0} = -\rho_n\overrightarrow{g} + \rho_g\overrightarrow{n} + \varepsilon(\overrightarrow{x}_1 - \rho_n\overrightarrow{\overrightarrow{g}} + \rho_g\overrightarrow{\overrightarrow{n}})$$

yazılır. Dual sayıların eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{W}^*_{10} &= -\rho_n\overrightarrow{g} + \rho_g\overrightarrow{n} \\
\overrightarrow{\overrightarrow{W}}^*_{10} &= \overrightarrow{x}_1 - \rho_n\overrightarrow{\overrightarrow{g}} + \rho_g\overrightarrow{\overrightarrow{n}}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

olduğunu görürüz.

Şimdi de λ_1^* ifadesini bulalım,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{W}^*_{10}, \overrightarrow{W}^*_{10} \right\rangle &= \left\langle -\rho_n\overrightarrow{g} + \rho_g\overrightarrow{n}, -\rho_n\overrightarrow{g} + \rho_g\overrightarrow{n} \right\rangle \\
&= \rho_n^2\left\langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{g} \right\rangle - 2\rho_n\rho_g\left\langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n} \right\rangle + \rho_g^2\left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \right\rangle
\end{aligned}$$

dır. Bu eşitlikte $\overrightarrow{g}$ ve $\overrightarrow{n}$ vektörleri ortonormal vektörler olduklarından,

$$\left\langle \overrightarrow{W}^*_{10}, \overrightarrow{W}^*_{10} \right\rangle = \rho_n^2 + \rho_g^2$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{W}_{10}^{*}, \overrightarrow{\overline{W}}_{10}^{*} \right\rangle &= \left\langle -\rho_n \overrightarrow{g} + \rho_g \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}_1 - \rho_n \overrightarrow{\overline{g}} + \rho_g \overrightarrow{\overline{n}} \right\rangle \\
&= -\rho_n \left\langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{x}_1 \right\rangle + \rho_n^2 \left\langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{\overline{g}} \right\rangle - \rho_n \rho_g \left\langle \overrightarrow{g}, \overrightarrow{\overline{n}} \right\rangle + \rho_g \left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x}_1 \right\rangle \\
&\quad -\rho_n \rho_g \left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{\overline{g}} \right\rangle + \rho_g^2 \left\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{\overline{n}} \right\rangle
\end{aligned}$$

dır ve $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{n}$ vektörleri ortonormal olduklarından,

$$\left\langle \overrightarrow{W}_{10}^{*}, \overrightarrow{\overline{W}}_{10}^{*} \right\rangle = 0$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{*} &= \frac{\left\langle \overrightarrow{W}_{10}^{*}, \overrightarrow{\overline{W}}_{10}^{*} \right\rangle}{\overrightarrow{W}_{10}^{*2}} \\
&= \frac{0}{\rho_n^2 + \rho_g^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğunu görülür. (3.43) birim olmayan dual vektör olup,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G}_1^{*} &= \frac{\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}^{*}}{\sqrt{\overrightarrow{\Gamma}_{1/0}^{*2}}} \\
&= \frac{\varepsilon \overrightarrow{X}_1 - \rho_n \overrightarrow{G} + \rho_g \overrightarrow{N}}{\sqrt{\left\langle \varepsilon \overrightarrow{X}_1 - \rho_n \overrightarrow{G} + \rho_g \overrightarrow{N}, \varepsilon \overrightarrow{X}_1 - \rho_n \overrightarrow{G} + \rho_g \overrightarrow{N} \right\rangle}}
\end{aligned}$$

veya

$$\overrightarrow{G}_1^{*} = \frac{\varepsilon \overrightarrow{X}_1 - \rho_n \overrightarrow{G} + \rho_g \overrightarrow{N}}{\sqrt{\varepsilon^2 \left\langle \overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{X}_1 \right\rangle + \rho_n^2 \left\langle \overrightarrow{G}, \overrightarrow{G} \right\rangle + \rho_g^2 \left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{N} \right\rangle}}$$

dır. $\overrightarrow{X}_1, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{N}$ vektörleri ortonormal olduklarında

$$\overrightarrow{G}_1^{*} = \frac{\varepsilon \overrightarrow{X}_1 - \rho_n \overrightarrow{G} + \rho_g \overrightarrow{N}}{\sqrt{\rho_n^2 + \rho_g^2}}$$

bulunur.

$\overrightarrow{G}_1^*$ eksene teğet hareket yönünde kalır.

$[R_1]$ regle yüzeyinin ve $[R_1^*]$ paralel regle yüzeyinin ani dönme eksenleri aynıdır. (E_2^*/E_0) ve (E_2/E_0) hareketlerinin ani hızları aynı ve birim olmayan

$$\overrightarrow{\Gamma}_{2/0}^* = \overrightarrow{\Gamma}_{2/0} = Q\overrightarrow{R}_1 + P\overrightarrow{R}_3$$

dual vektörleridir.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G}_2^* &= \overrightarrow{G}_2 \\
&= \frac{Q\overrightarrow{R}_1 + P\overrightarrow{R}_3}{\sqrt{\left\langle Q\overrightarrow{R}_1 + P\overrightarrow{R}_3, Q\overrightarrow{R}_1 + P\overrightarrow{R}_3 \right\rangle}} \\
&= \frac{Q\overrightarrow{R}_1 + P\overrightarrow{R}_3}{\sqrt{Q^2\left\langle \overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{R_1} \right\rangle + 2PQ\left\langle \overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle + P^2\left\langle \overrightarrow{R}_3, \overrightarrow{R}_3 \right\rangle}}
\end{aligned}$$

eşitliğinde $(\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_3)$ Blaschke üçyüzlüleri ortonormal bir sistem olduklarından,

$$\overrightarrow{G}_2^* = \frac{Q\overrightarrow{R}_1 + P\overrightarrow{R}_3}{\sqrt{Q^2 + P^2}}$$

olur. Ayrıca

$$\lambda_2^* = \lambda_2 = \frac{\left\langle \overrightarrow{W}_{20}, \overrightarrow{\overline{W}}_{20} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{W}_{20}, \overrightarrow{W}_{20} \right\rangle}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma}_{2/0}^* &= \overrightarrow{\Gamma}_{2/0} \\
&= (q + \varepsilon\overline{q})(\overrightarrow{r}_1 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_1) + (p + \varepsilon\overline{p})(\overrightarrow{r}_3 + \varepsilon\overrightarrow{\overline{r}}_3) \\
&= q\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{r}_3 + \varepsilon(q\overrightarrow{\overline{r}}_1 + \overline{q}\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{\overline{r}}_3 + \overline{p}\overrightarrow{r}_3)
\end{aligned}$$

bulunur. Reel ve dual kısımlarını ayırırsak,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{W}_{20} &= q\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{r}_3 \\ \overrightarrow{\overline{W}}_{20} &= q\overrightarrow{r}_1 + \overline{q}\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{\overline{r}}_3 + \overline{p}\overrightarrow{r}_3\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca.

$$\begin{aligned}\lambda_2^* &= \lambda_2 \\ &= \frac{(q\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{r}_3)(q\overrightarrow{r}_1 + \overline{q}\overrightarrow{r}_1 + p\overrightarrow{\overline{r}}_3 + \overline{p}\overrightarrow{r}_3)}{\langle q\overrightarrow{r_1} + p\overrightarrow{r_3}, q\overrightarrow{r_1} + p\overrightarrow{r_3}\rangle} \\ &= \frac{q\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{\overline{r}}_1 \right\rangle + q\overline{q}\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_1 \right\rangle + pq\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{\overline{r}}_3 \right\rangle + q\overline{p}\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r_3} \right\rangle}{q^2\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_1 \right\rangle + 2pq\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_3 \right\rangle + p^2\left\langle \overrightarrow{r}_3, \overrightarrow{r}_3 \right\rangle} \\ &\quad + \frac{pq\left\langle \overrightarrow{r}_3, \overrightarrow{\overline{r}}_1 \right\rangle + p\overline{q}\left\langle \overrightarrow{r}_3, \overrightarrow{\overline{r}}_1 \right\rangle + p^2\left\langle \overrightarrow{r}_3, \overrightarrow{\overline{r}}_3 \right\rangle + p\overline{p}\left\langle \overrightarrow{r}_3, \overrightarrow{r}_3 \right\rangle}{q^2\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_1 \right\rangle + 2pq\left\langle \overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_3 \right\rangle + p^2\left\langle \overrightarrow{r}_3, \overrightarrow{r}_3 \right\rangle}\end{aligned}$$

ve $\overrightarrow{r}_1, \overrightarrow{r}_2, \overrightarrow{r}_3$ ortonormal birim vektörler olduklarından,

$$\lambda_2^* = \frac{p\overline{p} + q\overline{q}}{p^2 + q^2}$$

yazılır. (2.35) ve (2.36) gereğince

$$\lambda_2^* = \frac{1}{d_2} = \frac{\tau_g}{\tau_g^2 + \rho_n^2}$$

olarak bulunur. O halde. $\lambda_2^* = \lambda_2$ bir eksene göre helicoidal hareket gösterir.

KAYNAKLAR

1. NİZAMİOĞLU Ş., Surface reglees parallel E.Ü. Fen Fakültesi Dergisi Cilt 9 Sayı 1 İZMİR, 1986.

2. NİZAMİOĞLU Ş., Vitesses instantanees dans les surfaces, E.Ü. Fen Fakültesi Dergisi Cilt 9 Sayı 1 İZMİR, 1986.

3. BLASCHKE W., Diferensiyel Geometri Dersleri, İstanbul Üniversitesi Yay. No. 433, 1949.

4. UĞURLU H. H., Relations among the Instantaneous Velocities of Trihedrons Depending on a Space-like Ruled Surfaces, Celal Bayar Üni. MANİSA, 1997.

5. BİRAN L., Mouvement a parametre, RFSUİ Serie A, Tome 12 Facs 3 İSTANBUL

6. KAYA R., Analitik Geometri, Bilim Teknik Yayınevi, 1996.

7. HACISALİHOĞLU H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt I, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 1993.

8. HACISALİHOĞLU H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 2000.

9. HACISALİHOĞLU H. H., Diferensiyel Geometri, Cilt III, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, 2004.

10. HACISALİHOĞLU H. H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1983.

11. AKBULUT F., Vektörel Analiz, Ege Üniv. Fen Fak. Kitap Serisi, 1970.