

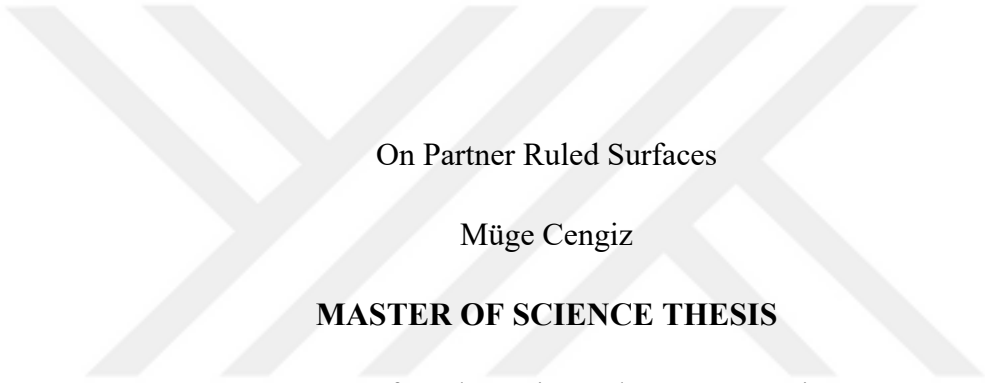
Ortak Regle Yüzeyler Üzerine

Müge Cengiz

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Mayıs 2025



On Partner Ruled Surfaces

Müge Cengiz

**MASTER OF SCIENCE THESIS**

Department of Mathematics and Computer Sciences

May 2025

# Ortak Regle Yüzeyler Üzerine

Müge Cengiz

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalında

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Ş. Nevin Gürbüz

Mayıs 2025

## ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS öğrencisi Müge Cengiz'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı “Ortak Regle Yüzeyler Üzerine” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Danışman** : Prof. Dr. Ş. Nevin GÜRBÜZ

**İkinci Danışman** : -

**Yüksek Lisans Tez Savunma Jürisi:**

**Üye** : Prof. Dr. Ş. Nevin GÜRBÜZ

**Üye** : Prof. Dr. Özcan GELİŞGEN

**Üye** : Doç. Dr. Koray YILMAZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma TÜMSEK  
Enstitü Müdürü

## ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Ş. Nevin Gürbüz danışmanlığında hazırlamış olduğum “Ortak Regle Yüzeyler Üzerine” başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 13/05/2025

Müge CENGİZ

## ÖZET

Bu çalışmada, Öklid hibrit ortak regle yüzeyler, Öklid Darboux ortak regle yüzeyler, Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler, Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler incelenmiştir. Aynı zamanda, bu ortak regle yüzeylerin birinci, ikinci temel formları, Gauss ve ortalama eğrilikleri elde edilmiştir.

Çalışma, altı ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, tezin giriş ve amaç kısmı belirlenmiştir. İkinci bölümde ise çalışmaya ilişkin literatür bilgisi verilmiştir ve çalışmanın tarihsel gelişimi hakkında bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, çalışmaya ilişkin temel kavram ve teoremler sunulmuştur. Dördüncü bölümde, Öklid hibrit çatısında ortak regle yüzeyler incelenmiş, Gauss ve ortalama eğrilikler bulunmuş ve ilgili örnekler verilmiştir. Beşinci bölümde, Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler üç farklı durum için araştırılmış, Gauss ve ortalama eğrilikler hesaplanmış ve ilgili örnekler sunulmuştur. Altıncı bölümde, Lorentz Darboux hibrit ortak regle yüzeyleri üç durum için incelenmiş, Gauss ve ortalama eğrilikler bulunmuş ve örnekler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Ortak regle yüzey, hibrit çatısı, Darboux çatısı.

## SUMMARY

In this study, Euclidean hybrid partner ruled surfaces, Euclidean Darboux partner ruled surfaces, Lorentz hybrid partner ruled surfaces, and Lorentz Darboux partner ruled surfaces are examined. Additionally, the first and second fundamental forms, Gauss curvatures, and mean curvatures of these partner ruled surfaces are derived.

The study consists of six main chapters. In the first chapter, the introduction and purpose of the thesis are defined. The second chapter provides a literature review related to the study and includes information about the historical development of the topic. In the third chapter, the fundamental concepts and theorems related to the study are presented. In the fourth chapter, partner ruled surfaces in the Euclidean hybrid frame are examined, Gauss and mean curvatures are calculated, and related examples are provided. In the fifth chapter, Lorentz hybrid partner ruled surfaces are investigated for three cases, Gauss and mean curvatures are calculated, and relevant examples are presented. In the sixth chapter, Lorentz Darboux hybrid partner ruled surfaces are studied for three cases, Gauss and mean curvatures are found, and examples are given.

**Key Words:** Partner ruled surface, hybrid frame, Darboux frame.

## TEŞEKKÜR

“Ortak Regle Yüzeyler Üzerine” adlı tez çalışmamda bana her konuda yardımcı olan, değerli bilgilerini ve deneyimlerini benimle paylaşan, tez çalışmamın yürütülmesi boyunca bana desteğini esirgemeyen her zaman bana inanan çok kıymetli Sayın

Prof. Dr. Şerife Nevin GÜRBÜZ

hocama, bugünlere gelmemde yanımda olan canım aileme teşekkürlerimi borç bilirim.

ESKİŞEHİR, 2025  
Müge Cengiz

# İÇİNDEKİLER

|                                                                                                                                    | <u>Sayfa</u> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| <b>ÖZET</b> . . . . .                                                                                                              | <b>vi</b>    |
| <b>SUMMARY</b> . . . . .                                                                                                           | <b>vii</b>   |
| <b>TEŞEKKÜR</b> . . . . .                                                                                                          | <b>viii</b>  |
| <b>İÇİNDEKİLER</b> . . . . .                                                                                                       | <b>ix</b>    |
| <b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> . . . . .                                                                                                   | <b>xi</b>    |
| <b>SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ</b> . . . . .                                                                                    | <b>xii</b>   |
| <b>1. GİRİŞ VE AMAÇ</b> . . . . .                                                                                                  | <b>1</b>     |
| <b>2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI</b> . . . . .                                                                                          | <b>3</b>     |
| <b>3. TEMEL KAVRAMLAR</b> . . . . .                                                                                                | <b>5</b>     |
| 3.1. $\mathbb{E}^3$ Uzayı için Frenet ve Darboux Çatıları, Gauss ve Ortalama Eğrilikler,<br>Darboux Ortak Regle Yüzeyler . . . . . | 5            |
| 3.2. $\mathbb{E}^3$ Uzayı için Bishop ve Hibrit Çatısı . . . . .                                                                   | 8            |
| 3.3. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayı için Frenet Çatısı, Regle Yüzey, Gauss ve Ortalama Eğrilikleri . .                                     | 10           |
| 3.4. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayı için Hibrit, Darboux Çatı Türev Formülleri ve Regle Yüzeyler . .                                       | 12           |
| <b>4. ÖKLİD 3 UZAYDA HİBRİT ORTAK REGLE YÜZEYLER</b> . . . . .                                                                     | <b>15</b>    |
| 4.1. $TC_1$ Öklid Hibrit Ortak Regle Yüzeyler . . . . .                                                                            | 15           |
| 4.2. $TC_2$ Öklid Hibrit Ortak Regle Yüzeyler . . . . .                                                                            | 20           |
| 4.3. $C_1C_2$ Öklid Hibrit Ortak Regle Yüzeyler . . . . .                                                                          | 24           |
| <b>5. LORENTZ-3 UZAYINDA LORENTZ HİBRİT ORTAK REGLE YÜZEYLER</b> <b>30</b>                                                         |              |
| 5.1. $TM_1$ Lorentz Hibrit Ortak Regle Yüzeyler . . . . .                                                                          | 30           |
| 5.2. $TM_2$ Lorentz Hibrit Ortak Regle Yüzeyler . . . . .                                                                          | 44           |
| 5.3. $M_1M_2$ Lorentz Hibrit Ortak Regle Yüzeyler . . . . .                                                                        | 59           |
| <b>6. LORENTZ DARBOUX ORTAK REGLE YÜZEYLER</b> . . . . .                                                                           | <b>75</b>    |
| 6.1. $TY$ Lorentz Darboux Ortak Regle Yüzeyler . . . . .                                                                           | 75           |
| 6.2. $TZ$ Lorentz Darboux Ortak Regle Yüzeyler . . . . .                                                                           | 89           |
| 6.3. $YZ$ Lorentz Darboux Ortak Regle Yüzeyler . . . . .                                                                           | 103          |

## İÇİNDEKİLER

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 7. BULGULAR VE TARTIŞMA . . . . . | 123 |
| 8. SONUÇ VE ÖNERİLER . . . . .    | 124 |
| KAYNAKLAR DİZİNİ . . . . .        | 126 |



## ŞEKİLLER DİZİNİ

| <u>Şekil</u>                       | <u>Sayfa</u> |
|------------------------------------|--------------|
| 3.1 Frenet vektörleri . . . . .    | 6            |
| 6.1 TY Regle Yüzey . . . . .       | 120          |
| 6.2 YT Regle Yüzey . . . . .       | 121          |
| 6.3 TY Ortak Regle Yüzey . . . . . | 122          |



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| <u>Simgeler</u>    | <u>Açıklama</u>                                 |
|--------------------|-------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$       | Reel Sayılar Cismi                              |
| $\alpha$           | Uzay Eğrisi                                     |
| $h(s, u)$          | $\mathbb{E}^3$ de Yüzey                         |
| $M$                | Regüler Yüzey                                   |
| $T$                | Birim Teğet Vektör                              |
| $N$                | Birim Normal Vektör                             |
| $B$                | Birim Binormal Vektör                           |
| $J$                | Konumsal Normal Vektör                          |
| $Z$                | Konumsal Binormal Vektör                        |
| $P$                | Regüler Yüzey Üzerinde Konumsal Normal Vektör   |
| $R$                | Regüler Yüzey Üzerinde Konumsal Binormal Vektör |
| $\eta$             | Birinci Eğrilik                                 |
| $\tau$             | İkinci Eğrilik                                  |
| $C_1$              | Öklid Hibrid Birim Normal Vektör                |
| $C_2$              | Öklid Hibrid Birim Binormal Vektör              |
| $M_1$              | Lorentz Hibrid Birim Normal Vektör              |
| $M_2$              | Lorentz Hibrid Birim Binormal Vektör            |
| $K$                | Ortalama Eğrilik                                |
| $H$                | Gauss Eğrilik                                   |
| $\ \cdot\ $        | Norm Fonksiyonuh(s,u)                           |
| $E, F, G$          | Yüzeyinin I.Temel Form Katsayıları              |
| $l, m, n$          | h(s,u) Yüzeyinin II. Temel Form Katsayıları     |
| $\langle, \rangle$ | İç Çarpım Fonksiyonu                            |
| $\times$           | Vektörel Çarpım Fonksiyonu                      |

# 1. GİRİŞ VE AMAÇ

3-boyutlu Öklid uzayında eğrilerin ve yüzeyler geniş bir çalışma alanına sahiptir. Frenet (1847) ve Serret (1851) üç boyutlu Öklid uzayında türevlenebilir bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın kinematik özelliklerini tanımladılar. Teğet, normal ve binormal birim vektörlerden oluşan çatı, Serret-Frenet çatısı olarak adlandırıldı. Frenet çatısı dışında Bishop tarafından tanımlanan Bishop çatısıdır. Bishop çatısı, sürekli bir eğri için sürekli bir çatı olup, bu eğrinin sürekli bir teğeti vardır. Hanson ve Ma (1995) bilgisayar grafikleri uygulamaları açısından, böyle bir çatıyı genel bir kapalı eğri için ayrık bir şekilde oluşturmak üzere bir sezgisel yaklaşım benimsemişlerdir. Arbind vd. (2018) Öklid 3-uzayında, iyi bilinen Frenet ve Bishop hareketli çatıların özel durumlarını içeren yeni bir çatı olan hibrit çatısını oluşturmuşlardır.

Bishop çatısı sürekli ve düzgün dönüşler sağlar ancak kapalı eğrilerde hizalanma sorunu yaşayabilir. Frenet çatısı eğrinin eğrilik ve burulmasına bağlı olarak döner fakat keskin değişimlerde süreksiz olabilir. Hibrit çatısı, hem düzgünlük hemde gerekli yerlerde yön değişimi avantajlarına sahiptir. Kapalı bir eğri üzerinde Bishop çatısı eğrinin başına geri döndüğünde  $M_1$  ve  $M_2$  vektörleri başladığı yön ile örtüşmeyebilir. Hibrit çatısı bu durumu düzeltmek için zaman zaman Frenet çatısı benzeri dönmeler uygulayarak başlangıçla hizalamayı sağlar.

Yüzeylerin diferensiyel geometrisinde, adını Fransız matematikçi Jean Gaston Darboux'dan alan Darboux çatısı bir yüzey üzerine inşa edilmiş doğal bir hareketli çatıdır. Yüzey üzerindeki eğri boyunca tanımlanan ve eğrinin hem kendi geometrisini hemde yüzeyle olan ilişkisini yansıtan bir ortonormal vektör çatısıdır. Eğrinin, yüzeyde ne kadar kıvrıldığını ve yüzey üzerinde nasıl döndüğünü tek bir çatı sistemi ile ifade eder. Geodezik hesaplama, robotik, 3D modelleme, moleküler geometri ve akışkanlar dinamiği gibi farklı konularda uygulama alanı vardır.

Regle yüzeyler teorisi, diferensiyel geometri alanında önemli bir teori sınıfını oluşturmaktadır. Regle yüzey, bir eğri boyunca hareket eden doğruların oluşturduğu yüzeydir. Hareket eden doğruya yüzeyin anadoğrusu veya üretici denir. Bir regle yüzey

$$\varphi : (s, t) \in I \times \mathbb{R} \rightarrow \alpha(s) + tX(s)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $\alpha(s)$  dayanak eğrisi ve  $X(s)$  doğrultman vektörüdür. Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir regle yüzey denir. Regle yüzeylerin uygulamaları inşaat mühendisliği, bilgisayar programlaması,

mimarlık ve katı modelleme gibi alanlarda kullanılmaktadır. Birçok matematikçi, çeşitli çatılara göre regle yüzeylerin bazı diferensiyel geometrik kavramlarını araştırmışlardır. Alegre vd. (2010) açılabilir regle yüzeylerin bazı özel tiplerini incelemişlerdir. Şentürk ve Yüce (2015) Öklidyen-3 uzayda Darboux çatısına göre regle yüzeyin karakteristik özelliklerini incelemişlerdir.

Ortak regle yüzey, iki farklı çatı sistemine ait yön vektörlerinin aynı yüzey üzerinde birleşmesidir. Örneğin bir köprüde eğri şeklinde korkuluk hem yerçekimi doğrultusunda düşey desteklerle hem de dönmeden yukarı çıkan spiral desteklerle sabitlenmiş olsun. Her iki destek çizgisi aynı eğri boyunca çiziliyor. Bu durumda, korkuluğun geçtiği eğri boyunca iki farklı yön doğrultusunda destek çizilmiş olur. Bu doğrularla oluşturulan yüzey, ortak regle yüzeydir. Ouarab (2018) Darboux çatısını kullanarak regle yüzeyler üzerinde üç çift ortak regle tanımlamış ve açılabilirliğini incelemiştir. Li vd. (2022) FLC çatısını kullanarak ortak regle yüzeyleri incelemişlerdir.

Bu çalışmadaki amaçlarımız Öklid 3-uzayında hibrit ortak regle yüzeyleri, Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri ve Lorentz Darboux ortak regle yüzeylere ilişkin karakterizasyonları araştırmaktır. Her biri için temel formları, Gauss ve ortalama eğrilikleri elde etmek ve Maple programı yardımıyla çeşitli örnekleri sunmaktır.

## 2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Yüzeyler teorisi, diferansiyel geometri ve matematiksel fizik alanında, yüzeylerin geometrik özelliklerini ve yapısını analiz eden bir alandır. Bu teori, yüzeylerin eğriliklerini, metrik özelliklerini ve geometriyi anlamak için kullanılan çok sayıda matematiksel aracı içerir. Bu araçlar, özellikle Gauss eğriliği, ortalama eğrilik, şekil operatörü ve temel form katsayıları gibi kavramlarla tanımlanır. Yüzeylerin analizi, sadece matematiksel açıdan değil, aynı zamanda fiziksel ve mühendislik problemlerinde de önemli bir yere sahiptir. Regle yüzey bir parametrelili doğru ailesini içeren bir yüzeydir (Kreyzig, 1991). Son yıllarda regle yüzeylere ilişkin pek çok çalışma yapılmıştır (Akutagawa ve Nishikawa (1990), Ravani ve Ku (1991), Gray (1993), Uğurlu ve Kocayigit (1996), Turgut ve Hacısalihoğlu (1997), Turgut ve Hacısalihoğlu (1998), Ekici (1998), Yu vd. (2014), Şentürk ve Yüce (2015)).

Diferansiyel geometride Frenet-Serret formülleri, üç boyutlu Öklid uzayında türevlenebilir bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın kinematik özelliklerini tanımlar. Üç boyutlu uzayda herhangi bir hareketten bağımsız olarak eğrinin geometrik özelliklerini verir. Geçmişten günümüze birçok araştırmacı Serret-Frenet çatısının dışında pek çok alternatif çatı geliştirdiler. Farklı geometri alanındaki en önemli konulardan biri de, bir yüzey üzerinde doğal bir hareketli çatı olarak inşa edilen Darboux çatısıdır. Darboux çatısı yüzeyin herhangi bir noktasındaki geometrik özellikleri anlamak için hız vektörü ve yüzeyin normal vektörüyle oluşturulan bir sistemdir. Bu çatı, yüzeyin geometrisini ve eğriliklerini anlamaya yardımcı olur. Fransız matematikçi Jean Gaston Darboux'un 1887 ile 1896 yılları arasında yayımladığı çalışmalarında adını duyurmuştur. Paralel vektör alanlarına bağlı olarak 1975 yılında eğrilerin alternatif veya paralel çatısı olarak adlandırılan Bishop çatısı, Bishop tarafından tanımlanmıştır (Bishop, 1975). Böylece geometriciler bu çatı sayesinde Frenet çatısının tanımlanamadığı durumlar için (özellikle eğrinin ikinci türevinin sıfır olduğu durumlarda) alternatif bir çatı olarak Bishop çatısını kullanmaya başladılar. Karacan ve Bükçü (2008) Minkowski 3-uzayında Bishop çatısı için timelike eğrileri incelemişlerdir.

Ouarab (2021) Öklidyen 3- uzayda Darboux çatısı için ortak regle yüzeyleri sunmuştur. Li vd. (2022) Öklidyen 3-uzayda ortak regle yüzeylerin karakterizasyonlarını FLC çatısı için incelemişlerdir. Li vd. (2023) Minkowski-3 uzayında Frenet çatısına göre ortak regle yüzeyleri araştırmışlardır. Eren vd. (2025) alternatif çatı için ortak regle yüzeyleri araştırmışlardır.

Arbind vd. (2018) Öklidyen-3 uzayda hibrit çatısını incelemişlerdir. Minkowski 3-uzayında hibrit çatısına göre doğrusal olmayan visco-Schrödinger denklemi ile ilişkili eğri evölüsyonunun üç sınıfı için elektrik alanının değişimi ve üç geometrik faz Ertuğ Gürbüz tarafından incelenmiştir (2022). Körpınar vd. (2021) 3 boyutlu Öklid uzayında hibrit optik manyetik Lorentz akısı için bir hibrit çatı kullanarak hibrit optik elektromanyetik kuvvetlerini incelemişlerdir. Körpınar vd. (2023) hibrit manyetik paralel öteleme ve enerji dağılım akılarını Minkowski-3 uzayında incelemişlerdir. Ertuğ Gürbüz ve Yoon (2022) visko modifiye Heisenberg ferromanyetik denklemi ve fiziksel uygulamalarını araştırmışlardır.

Bu çalışmada öncelikle temel kavramlar ve teoremler verilmiştir. Öklidyen 3-uzayda Frenet ve Darboux çatılarına göre bir uzay eğrisinin Öklidyen ve Minkowski 3-uzaylarına göre ortak hibrit regle yüzeyleri incelenmiş, Lorentz Darboux çatısına göre ortak regle yüzeyler sunulmuş ve çalışmaya ilişkin örnekler verilmiştir.

### 3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmanın temelini oluşturan ve kullanılan tanımlar ile teoremler sunulmuştur.

#### 3.1. $\mathbb{E}^3$ Uzayı için Frenet ve Darboux Çatıları, Gauss ve Ortalama Eğrilikler, Darboux Ortak Regle Yüzeyler

Bir reel afin uzayı  $A$  ile birleşen vektör uzayı  $V$  olsun.  $V$  'de iç çarpım işlemi

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow R$$

$u = (u_1, u_2, u_3)$  ve  $v = (v_1, v_2, v_3)$  iki vektör olmak üzere

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$$

Öklid iç çarpımı ile  $A$  afin uzayına 3-boyutlu Öklid uzayı denir ve  $\mathbb{E}^3$  ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

3-boyutlu  $\mathbb{E}^3$  Öklid uzayı olmak üzere  $\forall u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{E}^3$  için

$$\| u \| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona  $u$  vektörünün normu denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

3-boyutlu  $\mathbb{E}^3$  Öklid uzayı olmak üzere  $\forall u = (u_1, u_2, u_3), \forall v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{E}^3$  için vektörel çarpım

$$u \times v = (u_2 v_3 - v_2 u_3, u_3 v_1 - v_3 u_1, u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

biçiminde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1998).

$I, \mathbb{R}$  nin bir açık aralığı olmak üzere  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  biçiminde diferensiyellenebilir bir  $\alpha$  dönüşümüne  $\mathbb{E}^3$  uzayı için bir eğri denir (Sabuncuoğlu, 2004).

$(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile bir  $\alpha$  eğrisi verilsin.  $\forall s \in I$  için  $\|\alpha'(s)\| = 1$  ise  $\alpha$  eğrisine  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri,  $s$  parametresine de eğrinin yay-parametresi denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

3- boyutlu Öklid uzayında  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi tanımlansın.  $\alpha$  eğrisi için

$$\alpha'(s) = T(s)$$

eşitliği ile verilen  $T(s)$  vektörüne  $\alpha$  eğrisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki birim teğet vektörü denir (Sabuncuoğlu, 2004).

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  birim hızlı eğrisi için

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \|T'(s)\|$$

fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonkiyonu denir.  $\kappa(s)$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu, 2004).

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi için

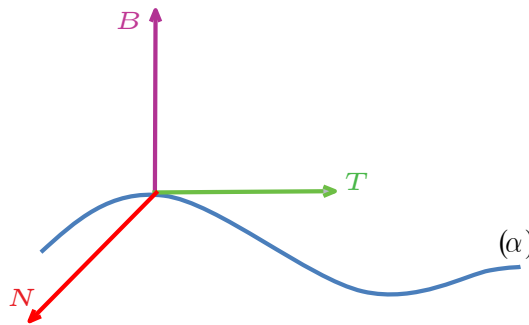
$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

eşitliği ile belirlenen  $N(s)$  vektörüne eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki asli normali denir (Sabuncuoğlu, 2004).

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi için

$$B = T \times N$$

eşitliği ile tanımlanan  $B$  vektörüne, eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki binormali denir (Sabuncuoğlu, 2004).  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^3$  eğrisi için Frenet vektör alanları  $T, N, B$  olmak üzere  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  için



Şekil 3.1 Frenet vektörleri

$$\tau(s) = - \langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna  $\alpha$  eğrisinin burulma (torsiyon) fonksiyonu denir.  $\tau(s)$  sayısına eğrinin  $\alpha(s)$  noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu, 2004).

$\mathbb{E}^3$  uzayında  $s$  yay-parametresi ile verilen regüler bir  $\alpha$  eğrisinin Frenet bileşenleri  $\{T, N, B, \kappa, \tau\}$  olmak üzere  $\alpha$  eğrisinin  $s$  yay parametresine göre Frenet türev formülleri aşağıdaki biçimde verilir (O'Neill,1966):

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned} \quad (3.1)$$

$\mathbb{E}^3$  uzayında bir  $M$  yüzeyi  $h(s, u) = (a(s, u), b(s, u), c(s, u))$  biçiminde verilmiş olsun. Burada diferensiyellenebilir  $a, b, c$  fonksiyonlarına  $h$  'nin koordinat fonksiyonları denir. Birinci ve ikinci temel formun katsayıları aşağıdaki gibi verilir:

$$E = \langle h_s, h_s \rangle, \quad F = \langle h_s, h_u \rangle, \quad G = \langle h_u, h_u \rangle \quad (3.2)$$

$$e = \langle h_{ss}, \mathbb{N} \rangle, \quad f = \langle h_{su}, \mathbb{N} \rangle, \quad g = \langle h_{uu}, \mathbb{N} \rangle \quad (3.3)$$

$\times$ , Öklidyen vektörel çarpımdır. Burada

$$\mathbb{N} = \frac{h_s \times h_u}{\|h_s \times h_u\|} \quad (3.4)$$

yüzeyin birim normal vektör alanıdır. (3.2), (3.3) denklemleri kullanılarak yüzeyin  $I$ . ve  $II$ . temel formları sırasıyla

$$I = E ds^2 + 2F ds du + G du^2 \quad (3.5)$$

$$II = e ds^2 + 2f ds du + g du^2 \quad (3.6)$$

ile gösterilir. Yüzeyin ortalama ve Gauss eğrilikleri sırasıyla

$$H = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)} \quad (3.7)$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (3.8)$$

biçimindedir. Bir yüzeyin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye minimal yüzey denir (O'Neill,1966).

Öklidyen 3-uzay için  $\alpha : s \in I \rightarrow \alpha(s)$  olan  $C^2$  sınıfından türevlenebilir birim hızda bir eğri olsun.  $\phi = \phi(y, r)$  regüler yüzey üzerinde yatan  $\alpha = \alpha(s)$  eğrisi boyunca birim hızlı eğrisi düşünölsün.  $T = \alpha'(s)$  eğrinin birin tanjant vektörü,  $n(s) = \frac{\phi_y \times \phi_r}{\|\phi_y \times \phi_r\|}$  eğrisi boyunca birim normal vektör alanı,  $p(s) = n(s) \times T(s)$ . Öklidyen 3 uzayda Darboux çatı  $\{T, p, n\}$  türev formülleri aşağıdaki biçimde verilir (Do Carmo, 1966):

$$\begin{bmatrix} T \\ p \\ n \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ p \\ n \end{bmatrix}$$

$\mathbb{E}^3$  Öklidyen 3 uzayı için bir regle yüzey  $\varphi(s, t) : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$  olmak üzere

$$\varphi(s, t) = \alpha(s) + tX(s)$$

ile tanımlanır. Burada  $\alpha(s)$  ve  $X(s)$  sırasıyla regle yüzeyinin dayanak eğrisi ve ana doğrusudur (Hacısalıhoğlu, 2000).

Öklidyen 3 uzayda Darboux çatısına göre aşağıda verilen iki regle yüzey

$$\varphi^{Tp} : (s, t) \in I \times \mathbb{R} \mapsto T(s) + tp(s)$$

$$\varphi^{pT} : (s, t) \in I \times \mathbb{R} \mapsto p(s) + tT(s)$$

$Tp$  ortak regle yüzeyi olarak tanımlanır (Ouarab, 2021).

Öklidyen 3 uzayda Darboux çatısına göre aşağıda verilen iki regle yüzey

$$\varphi^{Tn} : (s, t) \in I \times \mathbb{R} \mapsto T(s) + tn(s)$$

$$\varphi^{nT} : (s, t) \in I \times \mathbb{R} \mapsto n(s) + tT(s)$$

$Tn$  ortak regle yüzeyi olarak tanımlanır (Ouarab, 2021).

Öklidyen 3 uzayda Darboux çatısına göre aşağıda verilen iki regle yüzey

$$\varphi^{pn} : (s, t) \in I \times \mathbb{R} \mapsto p(s) + tn(s)$$

$$\varphi^{np} : (s, t) \in I \times \mathbb{R} \mapsto n(s) + tp(s)$$

$pn$  ortak regle yüzeyi olarak tanımlanır (Ouarab, 2021).

### 3.2. $\mathbb{E}^3$ Uzayı için Bishop ve Hibrit Çatısı

Öklid Bishop çatısı, hareketli çatı tanımlamasına alternatif bir yaklaşımdır. Yani bir eğrinin ikinci türevi olmasa bile bir çatı oluşturulabilir. Bishop çatısı inşa etmek için  $T(s)$  vektörü teğet vektörü olarak alınır ve bu vektöre dik bir düzlemde bulunan herhangi iki elemanlı  $\{N_1(s), N_2(s)\}$  bazı seçilir. Öklid Bishop çatısı  $\{T(s), N_1(s), N_2(s)\}$  için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\langle T, T \rangle = \langle N_1, N_1 \rangle = \langle N_2, N_2 \rangle = 1$$

$$\langle T, N_1 \rangle = \langle N_2, T \rangle = \langle N_1, N_2 \rangle = 0$$

$$T \times N_1 = N_2, N_1 \times N_2 = T, N_2 \times T = N_1$$

$\alpha$  eğrisinin Bishop ve Frenet çatıları arasında

$$T = T$$

$$N_1 = \cos \theta N - \sin \theta B \quad (3.9)$$

$$N_2 = \sin \theta N + \cos \theta B \quad (3.10)$$

bağıntıları vardır.  $\theta$ , Bishop çatısının  $N_1$  normal vektör alanı ile Frenet çatısının  $N$  asli normal vektör alanı arasındaki açıdır. (3.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N = \kappa(\cos \theta N_1 + \sin \theta N_2) \\ &= \kappa \cos \theta N_1 + \kappa \sin \theta N_2 \\ &= \tilde{c}_1 N_1 + \tilde{c}_2 N_2 \end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= \kappa \cos \theta, \tilde{c}_2 = \kappa \sin \theta \\ \theta(s) &= \arctan\left(\frac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1}\right) = \int \tau ds, \tilde{c}_1 \neq 0 \end{aligned}$$

biçimindedir (Bishop, 1975).

Öklidyen Bishop çatı  $\{T, N_1, N_2\}$  türev formülleri aşağıdaki biçimde verilir (Bishop, 1975):

$$\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 \\ -\tilde{c}_1 & 0 & 0 \\ -\tilde{c}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Burada,  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$  Bishop çatı  $\{T, N_1, N_2\}$  birinci ve ikinci eğrilikleridir.

Bishop çatısı, sürekli teğet ile verilen bir uzay eğrisi için sürekli bir çatıdır. Öklidyen 3-uzayda hibrit çatısı  $\{T, C_1, C_2\}$  ile Bishop çatısı  $\{T, N_1, N_2\}$  arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{bmatrix} T \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta(s) & \sin \beta(s) \\ 0 & -\sin \beta(s) & \cos \beta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Bishop çatısının normal düzlemi  $\{N_1, N_2\}$  üzerine bir dönme uygulanır. Bu dönmenin açısı  $\beta(s)$  olarak adlandırılır ve eğri boyunca değişebilir. Her noktada Bishop çatısı,  $T(s)$  eksenini etrafında  $\beta(s)$  kadar döndürülür. Bu döndürülmüş sistem hibrit çatısı olarak adlandırılır. (Arbind vd., 2018).

Öklidyen 3-uzayda (3.11) ve (3.12) kullanılarak

$$\begin{bmatrix} T' \\ C'_1 \\ C'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & 0 & \beta' \\ -c_2 & -\beta' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

elde edilir (Arbind vd., 2018). Burada

$$\begin{aligned} c_1 &= \tilde{c}_1 \cos \beta(s) + \tilde{c}_2 \sin \beta(s) \\ c_2 &= -\tilde{c}_1 \sin \beta(s) + \tilde{c}_2 \cos \beta(s) \\ \beta' &= \frac{d\beta(s)}{ds} \end{aligned}$$

(3.13) yardımıyla Öklidyen hibrit çatı  $\{T, C_1, C_2\}$  türev formülleri aşağıdaki gibi verilir (Arbind vd., 2018):

$$\begin{bmatrix} T \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & c_1 & c_2 \\ -c_1 & 0 & c_3 \\ -c_2 & -c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Burada,  $c_1, c_2$  ve  $c_3$  hibrit çatı eğrilikleridir. (3.14) denkleminde

$$\begin{aligned} c_1 &= \kappa(s), c_2 = 0, c_3 = \tau(s) \\ C_1 &= N, C_2 = B \end{aligned}$$

alınırsa Frenet çatı türev formülleri elde edilir. Eğer (3.14) denkleminde

$$\begin{aligned} c_1 &= \tilde{c}_1, c_2 = \tilde{c}_2, c_3 = 0 \\ C_1 &= N_1, C_2 = N_2 \end{aligned}$$

alınırsa Bishop çatısı elde edilir.

### 3.3. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayı için Frenet Çatısı, Regle Yüzey, Gauss ve Ortalama Eğrilikleri

$\mathbb{E}_1^3$  Minkowski 3-uzayı için  $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  olmak üzere Lorentziyan iç çarpımı,

$$\langle x, y \rangle_L = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

şeklinde tanımlanır.  $\mathbb{E}_1^3$  uzayında bir  $x$  vektörünün normu

$$\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle_L|}$$

biçimindedir (O'Neill, 1983).

$x$  ve  $y$  vektörlerinin Lorentziyan vektörel çarpımı

$$x \times_L y = - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

biçiminde tanımlanır (Akutagawa ve Nishikawa, 1990).

$\mathbb{E}_1^3$  uzayında  $x$  bir vektör olmak üzere,

(i)  $\langle x, x \rangle_L > 0$  veya  $x = 0$  ise  $x$  spacelike vektördür.

(ii)  $\langle x, x \rangle_L < 0$  ise  $x$  timelike vektördür.

(iii)  $\langle x, x \rangle_L = 0, x \neq 0$  ise  $x$  lightlike (null) vektördür (O'Neill, 1983).

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  Minkowski 3 uzayı için  $\sigma$  yay uzunluğu ile verilen, düzgün birim hızda null olmayan bir eğri olsun.  $T, N$ , ve  $B$  vektörleri eğrinin sırasıyla teğet, normal ve binormal birim vektörlerini göstermek üzere Frenet çatı türev formülleri şu şekilde verilir:

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 \kappa & 0 \\ -\varepsilon_1 \kappa & 0 & \varepsilon_3 \tau \\ 0 & -\varepsilon_2 \kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Burada,  $\kappa(\sigma)$  ve  $\tau(\sigma)$  eğrinin eğrilik ve torsiyonudur. Aynı zamanda,

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle_L &= \varepsilon_1, \quad \langle N, N \rangle_L = \varepsilon_2, \quad \langle B, B \rangle_L = \varepsilon_3 \\ T \times_L N &= \varepsilon_3 B, \quad N \times_L B = \varepsilon_1 T, \quad B \times_L T = \varepsilon_2 N, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1 \end{aligned}$$

biçimindedir.

$\mathbb{E}_1^3$  Minkowski 3-uzayı için bir regle yüzey  $\varphi(\sigma, v) : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  olmak üzere

$$\varphi(\sigma, v) = \alpha(\sigma) + vr(\sigma)$$

ile tanımlanır. Burada  $\alpha(\sigma)$  ve  $r(\sigma)$  sırasıyla regle yüzeyinin dayanak eğrisi ve ana doğrusudur.  $\varphi(\sigma)$  birim normal vektör alanı

$$U = \frac{\varphi_\sigma \times_L \varphi_v}{\|\varphi_\sigma \times_L \varphi_v\|} \quad (3.16)$$

biçiminde verilir (Turgut & Hacısalihoğlu, 1998). Burada  $\varphi_\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}$  ve  $\varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ .

Birinci ve ikinci temel formlar sırasıyla,

$$\begin{aligned} I &= E d\sigma^2 + 2F d\sigma dv + G dv^2 \\ II &= e d\sigma^2 + 2f d\sigma dv + g dv^2 \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada,

$$\begin{aligned} E &= \langle \varphi_\sigma, \varphi_\sigma \rangle_L, \quad F = \langle \varphi_\sigma, \varphi_v \rangle_L, \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_L \\ e &= \langle \varphi_{\sigma\sigma}, U \rangle_L, \quad f = \langle \varphi_{\sigma v}, U \rangle_L, \quad g = \langle \varphi_{vv}, U \rangle_L \end{aligned}$$

biçimindedir. Ayrıca  $\varphi$  regle yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğrilikleri

$$K = \varepsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \varepsilon \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)} \quad (3.17)$$

biçiminde verilir.  $\varepsilon = 1$  için timelike yüzey ve  $\varepsilon = -1$  için spacelike yüzeydir (Turgut ve Hacısalihoğlu, 1998).

### 3.4. $\mathbb{E}_1^3$ Uzayı için Hibrit, Darboux Çatı Türev Formülleri ve Regle Yüzeyler

Minkowski 3-uzayda  $T$  timelike,  $M_1$  spacelike,  $M_2$  spacelike vektörleri için Lorentz hibrit çatı türev formülleri aşağıdaki biçimde verilir (Ertuğ Gürbüz, 2021a):

$$\begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & z_1 & z_2 \\ z_1 & 0 & z_3 \\ z_2 & -z_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Burada

$$T \times_L M_1 = M_2, M_1 \times_L M_2 = -T, M_2 \times_L T = M_1$$

ve  $z_1, z_2$  ve  $z_3$  Lorentz hibrit eğrilikleridir.

$$\begin{aligned} z_1 &= \tilde{z}_1 \cos \beta(\sigma) - \tilde{z}_2 \sin \beta(\sigma) \\ z_2 &= \tilde{z}_1 \sin \beta(\sigma) + \tilde{z}_2 \cos \beta(\sigma) \\ z_3 &= \frac{d\beta(\sigma)}{d\sigma} \end{aligned}$$

Burada  $\tilde{z}_1$  ve  $\tilde{z}_2$ , Minkowski 3-uzayındaki Bishop çatı birinci ve ikinci eğrilikleridir.

Minkowski 3-uzayda  $T$  spacelike,  $M_1$  timelike,  $M_2$  spacelike vektörleri için Lorentz hibrit çatı türev formülleri aşağıdaki biçimde verilir (Ertuğ Gürbüz, 2021a):

$$\begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & -z_1 & z_2 \\ -z_1 & 0 & z_3 \\ -z_2 & z_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$T \times_L M_1 = M_2, M_1 \times_L M_2 = T, M_2 \times_L T = -M_1$$

ve  $z_1, z_2, z_3$  Lorentz hibrit eğrilikleridir.

$$\begin{aligned} z_1 &= \tilde{z}_1 \cosh \beta(\sigma) + \tilde{z}_2 \sinh \beta(\sigma) \\ z_2 &= \tilde{z}_1 \sinh \beta(\sigma) + \tilde{z}_2 \cosh \beta(\sigma) \\ z_3 &= \frac{d\beta(\sigma)}{d\sigma} \end{aligned}$$

Minkowski 3-uzayda  $T$  spacelike,  $M_1$  spacelike,  $M_2$  timelike vektörleri için Lorentz hibrit çatı türev formülleri aşağıdaki biçimindedir (Ertuğ Gürbüz, 2021a):

$$\begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & z_1 & -z_2 \\ -z_1 & 0 & -z_3 \\ -z_2 & -z_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$T \times_L M_1 = -M_2, M_1 \times_L M_2 = T, M_2 \times_L T = M_1.$$

ve  $z_1, z_2, z_3$  Lorentz hibrit çatı eğrilikleridir.

Bir null olmayan yüzey üzerindeki timelike  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  eğrisinin Minkowski 3-uzayında Darboux çatısına göre türev formülleri

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle_L &= -1, \langle Y, Y \rangle_L = \langle Z, Z \rangle_L = 1, \\ \langle T, Y \rangle_L &= \langle T, Z \rangle_L = \langle Y, Z \rangle_L = 0 \\ T \times_L Y &= Z, Y \times_L Z = -T, Z \times_L T = Y \end{aligned}$$

sağlamak üzere

$$\begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ k_g & 0 & \tau_g \\ k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

biçiminde verilir. Burada  $k_g$  geodezik eğrilik,  $k_n$  normal eğrilik,  $\tau_g$  geodezik torsiyon olarak adlandırılır (Uğurlu, 1996).

Bir null olmayan yüzey üzerindeki spacelike  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  eğrisinin Minkowski 3-uzayında Darboux çatısına göre türev formülleri

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle_L &= \langle Z, Z \rangle_L = 1, \langle Y, Y \rangle_L = -1 \\ \langle T, Y \rangle_L &= \langle T, Z \rangle_L = \langle Y, Z \rangle_L = 0 \\ T \times_L Y &= Z, Y \times_L Z = T, Z \times_L T = -Y \end{aligned}$$

sağlanmak üzere

$$\begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & -k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & \tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

biçiminde verilir (Uğurlu, 1996).

Bir null olmayan yüzey üzerindeki spacelike  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}_1^3$  eğrisinin Minkowski 3-uzayında Darboux çatısına göre türev formülleri

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle_L &= \langle Y, Y \rangle_L = 1, \langle Z, Z \rangle_L = -1, \\ \langle T, Y \rangle_L &= \langle T, Z \rangle_L = \langle Y, Z \rangle_L = 0 \\ T \times_L Y &= -Z, Y \times_L Z = T, Z \times_L T = Y \end{aligned}$$

sağlamak üzere

$$\begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & k_g & -k_n \\ -k_g & 0 & -\tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

biçiminde verilir (Uğurlu, 1996).

Minkowski 3 uzayında bir regle yüzey

$$\varphi(s, v) : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_1^3 \mapsto a(s) + vb(s)$$

biçiminde verilir.  $a(s)$  ve  $b(s)$  sırasıyla yüzeyin dayanak eğrisi ve ana doğrusudur (Li vd., 2023).

Minkowski 3-uzayında bir regle yüzeyin açılabilir regle yüzey olması için gerek ve yeter şart ana doğruları boyunca teğet düzlemlerinin aynı olmasıdır (Hacısalıhoğlu, 1983; Turgut, 1995; O'Neill, 2014).



## 4. ÖKLİD 3 UZAYDA HİBRİT ORTAK REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde, Öklidyen 3-uzayda hibrit çatısı kullanılarak hibrit ortak regle yüzeylere ilişkin karakterizasyonlar incelenecektir.

### 4.1. $TC_1$ Öklid Hibrit Ortak Regle Yüzeyler

**Tanım 4.1:** Öklid uzayında  $\alpha = \alpha(s)$  uzay eğrisinin  $s$  yay parametresi ile Öklidyen hibrit çatısı  $\{T, C_1, C_2\}$  verilsin.

$$\begin{cases} \xi_{C_1}^T(s, t) = T(s) + tC_1(s) \\ \xi_T^{C_1}(s, t) = C_1(s) + tT(s) \end{cases} \quad (4.1)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $TC_1$  Öklidyen hibrit ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 4.1:**  $\xi_{C_1}^T$  ve  $\xi_T^{C_1}$  iki Öklidyen hibrit regle yüzey olsun.  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyleri eş zamanlı olarak aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $c_1 = 0, c_2 \neq 0$  ve ya  $c_3 \neq 0$  olmasıdır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $c_2 = c_3 = 0$  ve  $c_1 \neq 0$  olmasıdır.

**İspat:** Öklidyen 3-uzayda hibrit çatısına göre, (3.14) yardımıyla denklem (4.1) denkleminin birincisinin  $s$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial s}(s, t) = -tc_1T(s) + c_1C_1(s) + (c_2 + tc_3)C_2(s) \\ \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial v}(s, t) = C_1(s) \end{cases} \quad (4.2)$$

elde edilir. (3.14) yardımıyla (4.2) denkleminin birincisi yardımıyla  $\xi_{C_1}^T$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birim normal vektör alanı aşağıdaki biçimde verilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{C_1}^T &= \frac{\frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial t}}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial t}, \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial t} \right\rangle}} \\ &= -\frac{(c_2 + vc_3)T(s) + tc_1C_2(s)}{\sqrt{t^2c_1^2 + (c_2 + tc_3)^2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Öklid hibrit çatısına göre,  $\xi_{C_1}^T$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (4.2) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{C_1}^T = \left\langle \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial s}, \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial s} \right\rangle = (1+t^2)c_1^2 + (c_2+tc_3)^2 \quad (4.4)$$

$$F_{C_1}^T = \left\langle \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial s}, \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial t} \right\rangle = c_1 \quad (4.5)$$

$$G_{C_1}^T = \left\langle \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial t}, \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial t} \right\rangle = 1 \quad (4.6)$$

$\frac{\partial}{\partial s} = ' .$  (4.2) denkleminin birincisinin  $s$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\xi_{C_1}^T)}{\partial s^2}(s,t) &= c_1' C_1(s) + c_1 C_1'(s) + c_2' C_2(s) + c_2 C_2'(s) \\ &\quad + t(-c_1' T(s) - c_1 T'(s) + c_3' C_2(s) + c_3 C_2'(s)) \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.2) denkleminin birincisinin  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2 \xi_{C_1}^T}{\partial t \partial s}(s,t) = -c_1 T(s) + c_3 C_2(s) \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.2) denkleminin ikincisinin  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2 \xi_{C_1}^T}{\partial t^2}(s,t) = 0 \quad (4.9)$$

elde edilir. Öklid hibrit çatısına göre  $\xi_{C_1}^T$  Öklid hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (4.3), (4.7), (4.8) ve (4.9) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde bulunur:

$$e_{C_1}^T = \frac{\left( c_1^2 c_2 + c_2^3 + 2c_2^2 t c_3 + t c_1' c_2 + t^2 c_1' c_3 \right) + c_2 t^2 c_3^2 - t c_1 c_2' + t^2 c_1^2 c_2 - t^2 c_1 c_3'}{\sqrt{t^2 c_1^2 + (c_2 + t c_3)^2}} \quad (4.10)$$

$$f_{C_1}^T = \frac{c_1 c_2}{\sqrt{t^2 c_1^2 + (c_2 + t c_3)^2}} \quad (4.11)$$

$$g_{C_1}^T = 0 \quad (4.12)$$

(4.4), (4.5), (4.6), (4.10), (4.11), ve (4.12) denklemleri (3.7) ve (3.8) denklemlerinde yerine yazıldığında,  $\xi_{C_1}^T$  hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_{C_1}^T &= - \left( \frac{c_1 c_2}{t^2 c_1^2 + (c_2 + t c_3)^2} \right)^2 \\ H_{C_1}^T &= \frac{-c_1^2 c_2 + c_2^3 + 2c_2^2 t c_3 + t c_1' c_2 + t^2 c_1^2 c_3 + c_2 t^2 c_3^2 - t c_1 c_2' + t^2 c_1^2 c_2 - t^2 c_1 c_3'}{2(t^2 c_1^2 + (c_2 + t c_3))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (4.13)$$

Öklidyen 3-uzayda hibrit çatısına göre (3.14) yardımıyla (4.1) denkleminin ikincisinin  $s$  ve  $t$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial s}(s,t) &= -c_1 T(s) + t c_1 C_1(s) + (c_3 + t c_2) C_2(s) \\ \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial t}(s,t) &= T(s) \end{aligned} \right. \quad (4.14)$$

elde edilir.  $\xi_T^{C_1}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birim normal vektör alanı aşağıdaki biçimdedir:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_T^{C_1} &= \frac{\frac{\partial(\xi_T^{C_1})}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_T^{C_1})}{\partial t}}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial(\xi_T^{C_1})}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_T^{C_1})}{\partial t}, \frac{\partial(\xi_T^{C_1})}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_T^{C_1})}{\partial t} \right\rangle}} \\ &= \frac{(c_3 + tc_2)C_1(s) - tc_1C_2(s)}{\sqrt{t^2c_1^2 + (c_3 + tc_2)^2}}\end{aligned}\quad (4.15)$$

Öklid hibrit çatısına göre  $\xi_T^{C_1}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (4.14) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimdedir:

$$E_T^{C_1} = \left\langle \frac{\partial(\xi_T^{C_1})}{\partial s}, \frac{\partial(\xi_T^{C_1})}{\partial s} \right\rangle = (1 + t^2)c_1^2 + (c_2 + tc_3)^2 \quad (4.16)$$

$$F_T^{C_1} = \left\langle \frac{\partial(\xi_T^{C_1})}{\partial s}, \frac{\partial(\xi_T^{C_1})}{\partial t} \right\rangle = -c_1 \quad (4.17)$$

$$G_T^{C_1} = \left\langle \frac{\partial(\xi_T^{C_1})}{\partial t}, \frac{\partial(\xi_T^{C_1})}{\partial t} \right\rangle = 1 \quad (4.18)$$

(4.14) denkleminin birincisinin  $s$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(\xi_T^{C_1})}{\partial s^2}(s, t) &= -c_1'T(s) - c_1T'(s) + c_3'C_2(s) + c_3C_2'(s) \\ &\quad + t(c_1'C_1(s) + c_1C_1'(s) + c_2'C_2(s) + c_2C_2'(s))\end{aligned}\quad (4.19)$$

elde edilir. (4.14) denkleminin birincisinin  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2\xi_T^{C_1}}{\partial t\partial s}(s, t) = c_1C_1(s) + c_2C_2(s) \quad (4.20)$$

elde edilir. (4.14) denkleminin ikincisinin  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2\xi_T^{C_1}}{\partial t^2}(s, t) = 0 \quad (4.21)$$

elde edilir. Öklid hibrit çatısına göre  $\xi_T^{C_1}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (4.15), (4.19), (4.20) ve (4.21) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde

$$e_T^{C_1} = -\frac{\begin{pmatrix} c_1^2c_3 + c_3^3 + 2c_3^2tc_2 - tc_1'c_3 - t^2c_1'c_2 \\ + c_3^2t^2c_2^2 + tc_1c_3' + t^2c_1^2c_3 + t^2c_1c_2' \end{pmatrix}}{\sqrt{t^2c_1^2 + (c_3 + tc_2)^2}} \quad (4.22)$$

$$f_T^{C_1} = \frac{c_1c_3}{\sqrt{t^2c_1^2 + (c_3 + tc_2)^2}} \quad (4.23)$$

$$g_T^{C_1} = 0 \quad (4.24)$$

elde edilir.

(4.16), (4.17), (4.18), (4.22), (4.23), (4.24) denklemleri (3.7) ve (3.8) denklemlerinde yerine yazıldığında  $\xi_T^{C_1}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_T^{C_1} = - \left( \frac{c_1 c_3}{t^2 c_1^2 + (c_3 + t c_2)^2} \right)^2 \\ H_T^{C_1} = \frac{(-c_1^2 c_3 + c_3^3 + 2c_3^2 t c_2 - t c_1' c_3 - t^2 c_1' c_2 + c_3^2 t^2 c_2^2 + t c_1 c_3' + t^2 c_1^2 c_3 + t^2 c_1 c_2')}{2(t^2 c_1^2 + (c_3 + t c_2)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (4.25)$$

Sonuç olarak (4.13) ve (4.25) denklemlerinden teoremden ifade edilen şartlar altında  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 4.2:**  $\xi_T^{C_1}$  ve  $\xi_{C_1}^T, TC_1$  Öklid hibrit regle yüzeyleri olsun.  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $s$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $c_2 = c_3 = 0$  ve  $c_1 \neq 0$ .

**İspat:** (4.3), (4.7), (4.15) ve (4.19) denklemlerinin Öklidyen vektörel çarpımı kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\xi_{C_1}^T)}{\partial s^2} \times \mathcal{N}_{C_1}^T &= \begin{pmatrix} \frac{(-c_1' + c_2 c_3 + t c_1^2 + t c_3^2) t c_1}{\sqrt{t^2 c_1^2 + (c_2 + t c_3)^2}}, \\ \frac{-(c_1 c_3 c_2) + c_1 c_3^2 t + c_2^2 c_2 + c_2^2 t c_3 + t c_3^2 c_2 + t^2 c_3^2 c_3 + t c_1^3 + t^2 c_1 c_1'}{\sqrt{t^2 c_1^2 + (c_2 + t c_3)^2}}, \\ \frac{(-c_1' + c_2 c_3 + t c_1^2 + t c_3^2)(c_2 + t c_3)}{\sqrt{t^2 c_1^2 + (c_2 + t c_3)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\xi_T^{C_1})}{\partial s^2} \times \mathcal{N}_T^{C_1} &= \begin{pmatrix} \frac{(t c_1^3 - t^2 c_1 c_1' + c_1 c_2 c_3 + c_1 c_2^2 t - c_3^2 c_3 - c_3^2 t c_2 - t c_2^2 c_3 - t^2 c_2^2 c_2)}{\sqrt{t^2 c_1^2 + (c_3 + t c_2)^2}}, \\ \frac{-(c_1' + c_3 c_2 + t c_1^2 + t c_2^2) t c_1}{\sqrt{t^2 c_1^2 + (c_3 + t c_2)^2}}, \\ \frac{-(c_1' + c_3 c_2 + t c_1^2 + t c_2^2)(c_3 + t c_2)}{\sqrt{t^2 c_1^2 + (c_3 + t c_2)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\xi_{C_1}^T)}{\partial s^2} \times \mathcal{N}_{C_1}^T &\neq 0, \quad \frac{\partial^2(\xi_T^{C_1})}{\partial s^2} \times \mathcal{N}_T^{C_1} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $s$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak geodezik değildirler. Diğer yonden

$$< \frac{\partial(\xi_{C_1}^T)}{\partial s^2}, \mathcal{N}_{C_1}^T > = \frac{\begin{pmatrix} c_1^2 c_2 + c_2^3 + 2c_2^2 t c_3 + t c_1' c_2 + t^2 c_1' c_3 \\ + c_2 t^2 c_3^2 - t c_1 c_2' + t^2 c_1^2 c_2 - t^2 c_1 c_3' \end{pmatrix}}{\sqrt{t^2 c_1^2 + (c_2 + t c_3)^2}} \quad (4.26)$$

$$< \frac{\partial(\xi_T^{C_1})}{\partial s^2}, \mathcal{N}_T^{C_1} > = - \frac{\begin{pmatrix} c_1^2 c_3 + c_3^3 + 2c_3^2 t c_2 - t c_1' c_3 - t^2 c_1' c_2 \\ + c_3 t^2 c_2^2 + t c_1 c_3' + t^2 c_1^2 c_3 + t^2 c_1 c_2' \end{pmatrix}}{\sqrt{t^2 c_1^2 + (c_3 + t c_2)^2}} \quad (4.27)$$

biçiminde elde edilir. (4.26) ve (4.27) denklemlerinden  $c_2 = c_3 = 0$  ve  $c_1 \neq 0$  ise

$$\langle \frac{\partial^2(\xi_{C_1}^T)}{\partial t^2}, \mathcal{N}_{C_1}^T \rangle = 0, \langle \frac{\partial^2(\xi_T^{C_1})}{\partial t^2}, \mathcal{N}_T^{C_1} \rangle = 0$$

olduğundan  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $s$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $c_2 = c_3 = 0$  ve  $c_1 \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 4.3:**  $\xi_T^{C_1}$  ve  $\xi_{C_1}^T$ ,  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $t$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:**  $\xi_T^{C_1}$  ve  $\xi_{C_1}^T$ ,  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.

$$\frac{\partial^2(\xi_{C_1}^T)}{\partial t^2} \times \mathcal{N}_{C_1}^T = 0, \frac{\partial^2(\xi_T^{C_1})}{\partial t^2} \times \mathcal{N}_T^{C_1} = 0$$

olduğundan  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $t$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$\langle \frac{\partial^2(\xi_{C_1}^T)}{\partial t^2}, \mathcal{N}_{C_1}^T \rangle = 0, \langle \frac{\partial^2(\xi_T^{C_1})}{\partial t^2}, \mathcal{N}_T^{C_1} \rangle = 0$$

olduğundan  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $t$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 4.4:**  $\xi_T^{C_1}$  ve  $\xi_{C_1}^T$ ,  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerin  $s$  ve  $t$  parametre eğrilerinin aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $c_1 = 0$  olmasıdır.

**İspat:**  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $c_1 = 0$  için

$$F_{C_1}^T = c_1 = 0, f_{C_1}^T = \frac{c_1 c_2}{\sqrt{t^2 c_1^2 + (c_2 + t c_3)^2}} = 0$$

ve

$$F_T^{C_1} = -c_1 = 0, f_T^{C_1} = \frac{c_1 c_3}{\sqrt{t^2 c_1^2 + (c_3 + t c_2)^2}} = 0$$

$s$  ve  $t$  parametre eğrileri  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerin aynı anda eğrilik çizgileri olması için gerek ve yeter şart  $c_1 = 0$  olmalıdır.

## 4.2. $TC_2$ Öklid Hibrit Ortak Regle Yüzeyler

**Tanım 4.2:** Öklid uzayında  $\alpha = \alpha(s)$  uzay eğrisinin  $s$  yay parametresi ile Öklidyen hibrit çatısı  $\{T, C_1, C_2\}$  verilsin.

$$\begin{cases} \xi_{C_2}^T(s, t) = T(s) + tC_2(s) \\ \xi_T^{C_2}(s, t) = C_2(s) + tT(s) \end{cases} \quad (4.28)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $TC_2$  Öklidyen hibrit ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 4.5:**  $\xi_{C_2}^T$  ve  $\xi_T^{C_2}$ ,  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyleri eş zamanlı olarak aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $c_2 = 0, c_1 \neq 0$  ve ya  $c_3 \neq 0$  olmasıdır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $c_1 = c_3 = 0$  ve  $c_2 \neq 0$  dır.

**İspat:** Öklidyen 3-uzayda hibrit çatısına göre (3.14) yardımıyla (4.28) denkleminin birincisinin  $s$  ve  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\xi_{C_2}^T)}{\partial s}(s, t) = -tc_2T(s) + (c_1 - tc_3)C_1(s) + c_2C_2(s) \\ \frac{\partial(\xi_{C_2}^T)}{\partial t}(s, t) = C_2(s) \end{cases} \quad (4.29)$$

elde edilir. (4.29) ile verilen  $\xi_{C_2}^T$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birim normal vektör alanı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{C_2}^T &= \frac{\frac{\partial(\xi_{C_2}^T)}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_{C_2}^T)}{\partial t}}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial(\xi_{C_2}^T)}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_{C_2}^T)}{\partial t}, \frac{\partial(\xi_{C_2}^T)}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_{C_2}^T)}{\partial t} \right\rangle}} \\ &= \frac{(c_1 - tc_3)T(s) + tc_2C_1(s)}{\sqrt{t^2c_2^2 + (c_1 - tc_3)^2}} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Öklid hibrit çatısına göre  $\xi_{C_2}^T$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (4.29) denklemini yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{C_2}^T = \left\langle \frac{\partial(\xi_{C_2}^T)}{\partial s}, \frac{\partial(\xi_{C_2}^T)}{\partial s} \right\rangle = (1 + t^2)c_2^2 + (c_1 - tc_3)^2 \quad (4.31)$$

$$F_{C_2}^T = \left\langle \frac{\partial(\xi_{C_2}^T)}{\partial s}, \frac{\partial(\xi_{C_2}^T)}{\partial t} \right\rangle = c_2 \quad (4.32)$$

$$G_{C_2}^T = \left\langle \frac{\partial(\xi_{C_2}^T)}{\partial t}, \frac{\partial(\xi_{C_2}^T)}{\partial t} \right\rangle = 1 \quad (4.33)$$

(4.29) denkleminin birincisinin  $s$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\xi_{C_2}^T)}{\partial s^2}(s, t) = & c_1' C_1(s) + c_1 C_1'(s) + c_2' C_2(s) + c_2 C_2'(s) \\ & - t(c_2' T(s) + c_2 T'(s) + c_3' C_1(s) + c_3 C_1'(s)) \end{aligned} \quad (4.34)$$

elde edilir. (4.29) denkleminin birincisinin  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\xi_{C_2}^T)}{\partial t \partial s}(s, t) = -c_2 T(s) - c_3 C_1(s) \quad (4.35)$$

elde edilir. (4.29) denkleminin ikincisinin  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\xi_{C_2}^T)}{\partial t^2}(s, t) = 0 \quad (4.36)$$

elde edilir.  $\xi_{C_2}^T$  Öklid hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (4.30), (4.34), (4.35) ve (4.36) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_{C_2}^T = \frac{- \left( c_1^3 - 2c_1^2 t c_3 + c_2^2 c_1 + t c_2' c_1 - t^2 c_2' c_3 \right) + c_1 t^2 c_3^2 - t c_2 c_1' + t^2 c_2^2 c_1 + t^2 c_2 c_3'}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_1 - t c_3)^2}} \quad (4.37)$$

$$f_{C_2}^T = \frac{-c_1 c_2}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_1 - t c_3)^2}} \quad (4.38)$$

$$g_{C_2}^T = 0 \quad (4.39)$$

(4.31), (4.32), (4.33), (4.37), (4.38) ve (4.39) denklemleri (3.7) ve (3.8) denkleminde yerine yazıldığında  $\xi_{C_2}^T$  Öklid hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_{C_2}^T &= - \left( \frac{c_1 c_2}{t^2 c_2^2 + (c_1 - t c_3)^2} \right)^2 \\ H_{C_2}^T &= \frac{-(c_1^3 - 2c_1^2 t c_3 - c_2^2 c_1 + t c_2' c_1 - t^2 c_2' c_3 + c_1 t^2 c_3^2 - t c_2 c_1' + t^2 c_2^2 c_1 + t^2 c_2 c_3')}{2(t^2 c_2^2 + (c_1 - t c_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (4.40)$$

Öklidyen 3-uzayda Öklid hibrit çatısına göre (3.14) yardımıyla (4.28) denkleminin ikincisinin  $s$  ve  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\xi_T^{C_2})}{\partial s}(s, t) &= -c_2 T(s) + (t c_1 - c_3) C_1(s) + t c_2 C_2(s) \\ \frac{\partial(s, t)}{\partial t}(\xi_T^{C_2}) &= T(s) \end{aligned} \right. \quad (4.41)$$

elde edilir. Denklem (4.41) ile verilen  $\xi_T^{C_2}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birim normal vektör alanı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_T^{C_2} &= \frac{\frac{\partial(\xi_T^{C_2})}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_T^{C_2})}{\partial t}}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial(\xi_T^{C_2})}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_T^{C_2})}{\partial t}(s, t), \frac{\partial(\xi_T^{C_2})}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_T^{C_2})}{\partial t} \right\rangle}} \\ &= \frac{(c_3 - t c_1) C_2(s) + t c_2 C_1(s)}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_3 - t c_1)^2}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$\xi_T^{C_2}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (4.42) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_T^{C_2} = \left\langle \frac{\partial(\xi_T^{C_2})}{\partial s}, \frac{\partial(\xi_T^{C_2})}{\partial s} \right\rangle = (1+t^2)c_2^2 + (c_3 - tc_1)^2 \quad (4.43)$$

$$F_T^{C_2} = \left\langle \frac{\partial(\xi_T^{C_2})}{\partial s}, \frac{\partial(\xi_T^{C_2})}{\partial t} \right\rangle = -c_2 \quad (4.44)$$

$$G_T^{C_2} = \left\langle \frac{\partial(\xi_T^{C_2})}{\partial t}, \frac{\partial(\xi_T^{C_2})}{\partial t} \right\rangle = 1 \quad (4.45)$$

(4.41) denkleminin birincisinin  $s$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\xi_T^{C_2})}{\partial s^2}(s, t) &= -c_2' T(s) - c_2 T'(s) - c_3' C_1(s) - c_3 C_1'(s) \\ &\quad + t(c_1' C_1(s) + c_1 C_1'(s) + c_2' C_2(s) + c_2 C_2'(s)) \end{aligned} \quad (4.46)$$

elde edilir. (4.41) denkleminin birincisinin  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\xi_T^{C_2})}{\partial t \partial s}(s, t) = c_1 C_1(s) + c_2 C_2(s) \quad (4.47)$$

elde edilir. (4.41) denkleminin ikincisinin  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\xi_T^{C_2})}{\partial t^2}(s, t) = 0 \quad (4.48)$$

elde edilir.  $\xi_T^{C_2}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (4.42) ve (4.43) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_T^{C_2} = - \frac{\left( tc_2 c_3' - t^2 c_2 c_1' + t^2 c_2^2 c_3 + c_2^2 c_3 + c_3^3 \right)}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_3 - tc_1)^2}} \quad (4.49)$$

$$f_T^{C_2} = \frac{c_2 c_3}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_3 - tc_1)^2}} \quad (4.50)$$

$$g_T^{C_2} = 0 \quad (4.51)$$

(4.43), (4.44), (4.45), (4.49), (4.50) ve (4.51) denklemleri (3.7) ve (3.8) denkleminde yerine yazıldığında  $\xi_T^{C_2}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_T^{C_2} &= - \left( \frac{c_2 c_3}{t^2 c_2^2 + (c_3 - tc_1)^2} \right)^2 \\ H_T^{C_2} &= \frac{-(tc_2 c_3' - t^2 c_2 c_1' + t^2 c_2^2 c_3 - c_2^2 c_3 + c_3^3 - 2c_3^2 tc_1 + c_3 t^2 c_1^2 - tc_2' c_3 + t^2 c_2' c_1)}{2(t^2 c_2^2 + (c_3 - tc_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (4.52)$$

Sonuç olarak (4.40) ve (4.52) denklemleri yardımıyla teoremden ifade edilen şartlar altında  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 4.6:**  $\xi_{C_2}^T$  ve  $\xi_T^{C_2}$ ,  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $s$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $c_1 = c_3 = 0$  ve  $c_2 \neq 0$ .

**İspat:** (4.30), (4.34), (4.42) ve (4.46) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\xi_{C_2}^T)}{\partial s^2} \times \mathcal{N}_{C_2}^T &= \begin{pmatrix} \frac{-(c_1 c_3 + c'_2 - t c_2^2 - t c_3^2) t c_2}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_1 - t c_3)^2}}, \\ \frac{(c_1 c_3 + c'_2 - t c_2^2 - t c_3^2)(c_1 - t c_3)}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_1 - t c_3)^2}}, \\ \frac{-t c_2^3 - t^2 c_2 c'_2 - c'_1 c_1 + c'_1 t c_3 + c_2 c_3 c_1 - c_2 c_3^2 t + t c'_3 c_1 - t^2 c'_3 c_3}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_1 - t c_3)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\xi_T^{C_2})}{\partial s^2} \times \mathcal{N}_T^{C_2} &= \begin{pmatrix} \frac{-c_2 c_1 c_3 + c_2 c_1^2 t - c'_3 c_3 + c'_3 t c_1 + t c'_1 c_3 - t^2 c'_1 c_1 + t c_2^3 - t^2 c_2 c'_2}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_3 - t c_1)^2}}, \\ \frac{(c'_2 - c_3 c_1 + t c_1^2 + t c_2^2)(c_3 - t c_1)}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_3 - t c_1)^2}}, \\ \frac{-(c'_2 - c_3 c_1 + t c_1^2 + t c_2^2) t c_2}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_3 - t c_1)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\xi_{C_2}^T)}{\partial s^2} \times \mathcal{N}_{C_2}^T &\neq 0, \frac{\partial^2(\xi_T^{C_2})}{\partial s^2} \times \mathcal{N}_T^{C_2} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyler  $s$  parametre eğrileri aynı anda geodezik değildirler. Diğer yünden,

$$\left\langle \frac{\partial^2(\xi_{C_2}^T)}{\partial s^2}, \mathcal{N}_{C_2}^T \right\rangle = - \frac{\begin{pmatrix} c_1^3 - 2c_1^2 t c_3 + c_2^2 c_1 + t c'_2 c_1 - t^2 c'_2 c_3 \\ + c_1 t^2 c_3^2 - t c_2 c'_1 + t^2 c_2^2 c_1 + t^2 c_2 c'_3 \end{pmatrix}}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_1 - t c_3)^2}} \quad (4.53)$$

$$\left\langle \frac{\partial^2(\xi_T^{C_2})}{\partial s^2}, \mathcal{N}_T^{C_2} \right\rangle = - \frac{\begin{pmatrix} t c_2 c'_3 - t^2 c_2 c'_1 + t^2 c_2^2 c_3 + c_2^2 c_3 + c_3^3 \\ - 2c_3^2 t c_1 + c_3 t^2 c_1^2 - t c'_2 c_3 + t^2 c'_2 c_1 \end{pmatrix}}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_3 - t c_1)^2}} \quad (4.54)$$

biçiminde elde edilir. (4.53) ve (4.54) denlemlerinden eğer  $c_1 = c_3 = 0$  ve  $c_2 \neq 0$  ise

$$\left\langle \frac{\partial^2(\xi_{C_2}^T)}{\partial s^2}, \mathcal{N}_{C_2}^T \right\rangle = 0, \left\langle \frac{\partial^2(\xi_T^{C_2})}{\partial s^2}, \mathcal{N}_T^{C_2} \right\rangle = 0$$

olduğundan  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyler  $s$  parametresi için aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $c_1 = c_3 = 0$  ve  $c_2 \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 4.7:** Öklidyen 3-uzayda  $\xi_{C_2}^T$  ve  $\xi_T^{C_2}$ ,  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $t$  parametre eğrileri aynı anda

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:**  $\xi_{C_2}^T$  ve  $\xi_T^{C_2}$  ortak regle yüzeyleri olsun.

$$\frac{\partial^2(\xi_{C_2}^T)}{\partial t^2} \times \mathcal{N}_{C_2}^T = 0, \frac{\partial^2(\xi_T^{C_2})}{\partial t^2} \times \mathcal{N}_T^{C_2} = 0$$

olduğundan  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $t$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$\langle \frac{\partial^2(\xi_{C_2}^T)}{\partial s^2}, \mathcal{N}_{C_2}^T \rangle = 0, \langle \frac{\partial^2(\xi_T^{C_2})}{\partial s^2}, \mathcal{N}_T^{C_2} \rangle = 0$$

olduğundan  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $t$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 4.8:** Öklidyen 3-uzayda Öklidyen hibrit çatısına göre  $\xi_{C_2}^T$  ve  $\xi_T^{C_2}$ ,  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $s$  ve  $t$  parametre eğrilerinin aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $c_2 = 0$  olmasıdır.

**İspat:**  $\xi_{C_2}^T$  ve  $\xi_T^{C_2}$   $TC_2$  ortak regle yüzeyler olsun.  $c_2 = 0$  için

$$F_{C_2}^T = c_2 = 0, f_{C_2}^T = \frac{-c_1 c_2}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_1 - t c_3)^2}} = 0$$

ve

$$F_T^{C_2} = -c_2 = 0, f_T^{C_2} = \frac{c_2 c_3}{\sqrt{t^2 c_2^2 + (c_3 - t c_1)^2}} = 0$$

Öklidyen 3-uzayda Öklidyen hibrit çatısına göre  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $s$  ve  $t$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgileri olması için gerek ve yeter şart  $c_2 = 0$  olmalıdır.

### 4.3. $C_1 C_2$ Öklid Hibrit Ortak Regle Yüzeyler

**Tanım 4.3:** Öklid uzayında  $\alpha = \alpha(s)$  uzay eğrisinin  $s$  yay parametresi ile Öklidyen hibrit çatısı  $\{T, C_1, C_2\}$  verilsin.

$$\begin{cases} \xi_{C_2}^{C_1}(s, t) = C_1(s) + t C_2(s) \\ \xi_{C_1}^{C_2}(s, t) = C_2(s) + t C_1(s) \end{cases} \quad (4.55)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $TC_2$  hibrit ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 4.9:** Öklidyen 3-uzayda Öklidyen hibrit çatısına göre  $\xi_{C_2}^{C_1}$  ve  $\xi_{C_1}^{C_2}$ ,  $C_1 C_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $C_1 C_2$  hibrit ortak regle yüzeyleri eş zamanlı olarak aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $c_3 = 0, c_1 \neq 0$  ve ya  $c_2 \neq 0$  olmasıdır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $c_1 = c_2 = 0$  ve  $c_3 \neq 0$  olmasıdır.

**İspat:** Öklidyen 3-uzayda hibrit çatısına göre (3.14) yardımıyla (4.55) denkleminin birincisinin  $s$  ve  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial s}(s, t) = (-c_1 - tc_2)T(s) - tc_3C_1(s) + c_3C_2(s) \\ \frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial t}(s, t) = C_2(s) \end{cases} \quad (4.56)$$

elde edilir. Denklem (4.55) ile verilen  $\xi_{C_2}^{C_1}$  Öklidyen hibrit regle yüzeyinin birim normal vektör alanı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{C_2}^{C_1} &= \frac{\frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial t}}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial t}, \frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial t} \right\rangle}} \\ &= \frac{-tc_3T(s) + (c_1 + tc_2)C_1(s)}{\sqrt{t^2c_3^2 + (c_1 + tc_2)^2}} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Öklid hibrit çatısına göre  $\xi_{C_2}^{C_1}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (4.57) denklemini yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{C_2}^{C_1} = \left\langle \frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial s}, \frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial s} \right\rangle = (1 + t^2)c_3^2 + (c_1 + tc_2)^2 \quad (4.58)$$

$$F_{C_2}^{C_1} = \left\langle \frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial s}, \frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial t} \right\rangle = c_3 \quad (4.59)$$

$$G_{C_2}^{C_1} = \left\langle \frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial t}, \frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial t} \right\rangle = 1 \quad (4.60)$$

(4.56) denkleminin birincisinin  $s$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial s^2}(s, t) &= -c_1' T(s) - c_1 T'(s) + c_3' C_2(s) + c_3 C_2'(s) \\ &\quad - t(c_2' T(s) + c_2 T'(s) + c_3' C_1(s) + c_3 C_1'(s)) \end{aligned} \quad (4.61)$$

elde edilir. (4.56) denkleminin birincisinin  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial t \partial s}(s, t) = -c_2 T(s) - c_3 C_1(s) \quad (4.62)$$

elde edilir. (4.56) denkleminin ikincisinin  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial t^2}(s, t) = 0 \quad (4.63)$$

elde edilir. Öklid hibrit çatısına göre  $\xi_{C_2}^{C_1}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (4.57), (4.61), (4.62) ve (4.63) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_{C_2}^{C_1} = \frac{\begin{pmatrix} tc_3c'_1 + t^2c_3c'_2 - t^2c_3^2c_1 - c_1^3 - 2c_1^2tc_2 \\ -c_3^2c_1 - c_1t^2c_2^2 - tc'_3c_1 - t^2c'_3c_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{t^2c_1^2 + (c_3 + tc_2)^2}} \quad (4.64)$$

$$f_{C_2}^{C_1} = \frac{-c_1c_3}{\sqrt{t^2c_1^2 + (c_3 + tc_2)^2}} \quad (4.65)$$

$$g_{C_2}^{C_1} = 0 \quad (4.66)$$

(4.58), (4.59), (4.60), (4.64), (4.65) ve (4.66) denklemleri (3.7) ve (3.8) denkleminde yerine yazıldığında  $\xi_{C_2}^{C_1}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_{C_2}^{C_1} = - \left( \frac{c_1c_3}{t^2c_1^2 + (c_3 + tc_2)^2} \right)^2 \\ H_{C_2}^{C_1} = \frac{tc_3c'_1 + t^2c_3c'_2 - t^2c_3^2c_1 - c_1^3 - 2c_1^2tc_2 + c_3^2c_1 - c_1t^2c_2^2 - tc'_3c_1 - t^2c'_3c_2}{2(t^2c_1^2 + (c_3 + tc_2))^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (4.67)$$

Öklidyen 3-uzayda hibrit çatısına göre (3.14) yardımıyla (4.55) denkleminin ikincisinin  $s$  ve  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial s}(s, t) = (-c_2 - tc_1)T - c_3C_1 + tc_3C_2 \\ \frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial t}(s, t) = C_1(s) \end{cases} \quad (4.68)$$

elde edilir. Denklem (4.68) yardımıyla  $\xi_{C_1}^{C_2}$  Öklidyen hibrit regle yüzeyinin birim normal vektör alanı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{C_1}^{C_2} &= \frac{\frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial t}}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial t}, \frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial s} \times \frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial t} \right\rangle}} \\ &= \frac{-tc_3T(s) - (c_2 + tc_1)C_2(s)}{\sqrt{t^2c_3^2 + (c_2 + tc_1)^2}} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Öklid hibrit çatısına göre  $\xi_{C_1}^{C_2}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (4.69) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{C_1}^{C_2} = \left\langle \frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial s}, \frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial s} \right\rangle = (1 + t^2)c_3^2 + (c_2 + tc_1)^2 \quad (4.70)$$

$$F_{C_1}^{C_2} = \left\langle \frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial s}, \frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial t} \right\rangle = -c_3 \quad (4.71)$$

$$G_{C_1}^{C_2} = \left\langle \frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial t}, \frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial t} \right\rangle = 1 \quad (4.72)$$

(4.29) denkleminin birincisinin  $s$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial s^2}(s, t) &= -c'_2 T(s) - c_2 T'(s) - c'_3 C_1(s) - c_3 C'_1(s) \\ &\quad + t(c'_3 C_2(s) + c_3 C'_2(s) - c'_1 T(s) - c_1 T'(s)) \end{aligned} \quad (4.73)$$

elde edilir. (4.29) denkleminin birincisinin  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial t \partial s}(s, t) = -c_1 T(s) + c_3 C_2(s) \quad (4.74)$$

elde edilir. (4.29) denkleminin ikincisinin  $t$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial t^2}(s, t) = 0 \quad (4.75)$$

elde edilir.  $\xi_{C_1}^{C_2}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (4.69), (4.73), (4.74) ve (4.75) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_{C_1}^{C_2} = \frac{\left( tc_3 c'_2 + t^2 c_3 c'_1 + t^2 c_3^2 c_2 + c_3^3 + 2c_2^2 t c_1 \right)}{\sqrt{t^2 c_3^2 + (c_2 + t c_1)^2}} \quad (4.76)$$

$$f_{C_1}^{C_2} = -\frac{c_2 c_3}{\sqrt{t^2 c_3^2 + (c_2 + t c_1)^2}} \quad (4.77)$$

$$g_{C_1}^{C_2} = 0 \quad (4.78)$$

(4.70), (4.71), (4.72), (4.76), (4.77) ve (4.78) denklemleri (3.7) ve (3.8) denkleminde yerine yazıldığında  $\xi_{C_1}^{C_2}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_{C_1}^{C_2} &= - \left( \frac{c_2 c_3}{t^2 c_3^2 + (c_2 + t c_1)^2} \right)^2 \\ H_{C_1}^{C_2} &= \frac{tc_3 c'_2 + t^2 c_3 c'_1 + t^2 c_3^2 c_2 + c_3^3 + 2c_2^2 t c_1 - c_3^2 c_2 + c_2 t^2 c_1^2 - t c'_3 c_2 - t^2 c'_3 c_1}{2(t^2 c_3^2 + (c_2 + t c_1))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (4.79)$$

(4.67) ve (4.79) denklemleri yardımıyla, teoremden ifade edilen şartlar altında  $C_1 C_2$  ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 4.10:** Öklidyen 3-uzayda Öklidyen hibrit çatısına göre  $\xi_{C_2}^{C_1}$  ve  $\xi_{C_1}^{C_2}$ ,  $C_1 C_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $C_1 C_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyleri  $s$  parametre eğrilerinin aynı anda

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $c_1 = c_2 = 0$  ve  $c_3 \neq 0$ .

**İspat:** (4.57), (4.61), (4.69) ve (4.73) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial s^2} \times \mathcal{N}_{C_2}^{C_1} &= \begin{pmatrix} \frac{(c_1 c_2 - c'_3 + t c_2^2 + t c_3^2)(c_1 + t c_2)}{\sqrt{t^2 c_3^2 + (c_1 + t c_2)^2}}, \\ \frac{(c_1 c_2 - c'_3 + t c_2^2 + t c_3^2) t c_3}{\sqrt{t^2 c_3^2 + (c_1 + t c_2)^2}}, \\ \frac{-(c'_1 c_1 + c'_1 t c_2 + c_3 c_2 c_1 + c_3 c_2^2 t + t c'_2 c_1 + t^2 c'_2 c_2 + t c_3^3 + t^2 c_3 c'_3)}{\sqrt{t^2 c_3^2 + (c_1 + t c_2)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial s^2} \times \mathcal{N}_{C_1}^{C_2} &= \begin{pmatrix} \frac{(c_2 c_1 + c'_3 + t c_1^2 + t c_3^2)(c_2 + t c_1)}{\sqrt{t^2 c_3^2 + (c_2 + t c_1)^2}}, \\ \frac{t c_3^3 - t^2 c_3 c'_3 - c'_2 c_2 - c'_2 t c_1 + c_3 c_1 c_2 + c_3 c_1^2 t - t c'_1 c_2 - t^2 c'_1 c_1}{\sqrt{t^2 c_3^2 + (c_2 + t c_1)^2}}, \\ \frac{-(c_2 c_1 + c'_3 + t c_1^2 + t c_3^2) t c_3}{\sqrt{t^2 c_3^2 + (c_2 + t c_1)^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\frac{\partial^2(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial s^2} \times \mathcal{N}_{C_2}^{C_1} \neq 0$  ve  $\frac{\partial^2(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial s^2} \times \mathcal{N}_{C_1}^{C_2} \neq 0$  olduğundan  $C_1 C_2$  hibrit ortak regle yüzeyler  $s$  parametre eğrileri aynı anda geodezik değildirler. Diğer yonden

$$\langle \frac{\partial(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial s^2}, \mathcal{N}_{C_2}^{C_1} \rangle = - \frac{\begin{pmatrix} -t c_3 c'_1 - t^2 c_3 c'_2 + t^2 c_3^2 c_1 + c_1^3 + 2 c_1^2 t c_2 \\ + c_3^2 c_1 + c_1 t^2 c_2^2 + t c'_3 c_1 + t^2 c'_3 c_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{t^2 c_3^2 + (c_1 + t c_2)^2}} \quad (4.80)$$

$$\langle \frac{\partial(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial s^2}, \mathcal{N}_{C_1}^{C_2} \rangle = \frac{\begin{pmatrix} t c_3 c'_2 + t^2 c_3 c'_1 + t^2 c_3^2 c_2 + c_2^3 + 2 c_2^2 t c_1 \\ + c_3^2 c_2 + c_2 t^2 c_1^2 - t c'_3 c_2 - t^2 c'_3 c_1 \end{pmatrix}}{\sqrt{t^2 c_3^2 + (c_2 + t c_1)^2}} \quad (4.81)$$

biçiminde elde edilir. (4.80) ve (4.81) denklemlerinden eğer  $c_1 = c_2 = 0$  ve  $c_3 \neq 0$  ise

$$\langle \frac{\partial^2(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial s^2}, \mathcal{N}_{C_2}^{C_1} \rangle = 0, \langle \frac{\partial^2(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial s^2}, \mathcal{N}_{C_1}^{C_2} \rangle = 0$$

olduğundan  $C_1 C_2$  hibrit ortak regle yüzeylerinin  $s$  parametre eğrileri aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $c_1 = c_2 = 0$  ve  $c_3 \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 4.11:** Öklidyen 3-uzayda Öklidyen hibrit çatısına göre  $\xi_{C_2}^{C_1}$  ve  $\xi_{C_1}^{C_2}$ ,  $C_1 C_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $C_1 C_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $t$  parametre eğrileri aynı anda

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:** Öklidyen 3-uzayda Öklidyen hibrit çatısına göre  $\xi_{C_2}^{C_1}$  ve  $\xi_{C_1}^{C_2}$ ,  $C_1 C_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.

$$\frac{\partial^2(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial t^2} \times \mathcal{N}_{C_2}^{C_1} = 0, \frac{\partial^2(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial t^2} \times \mathcal{N}_{C_1}^{C_2} = 0$$

olduğundan  $C_1C_2$  ortak regle yüzeylerinin  $t$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$\langle \frac{\partial^2(\xi_{C_2}^{C_1})}{\partial t^2}, \mathcal{N}_{C_2}^{C_1} \rangle = 0, \langle \frac{\partial^2(\xi_{C_1}^{C_2})}{\partial t^2}, \mathcal{N}_{C_1}^{C_2} \rangle = 0$$

olduğundan  $C_1C_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $t$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 4.12:** Öklidyen 3-uzayda Öklidyen hibrit çatısına göre  $\xi_{C_2}^{C_1}$  ve  $\xi_{C_1}^{C_2}$ ,  $C_1C_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $C_1C_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $s$  ve  $t$  parametre eğrilerinin aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $c_3 = 0$  olmasıdır.

**İspat:**  $\xi_{C_2}^{C_1}$  ve  $\xi_{C_1}^{C_2}$ ,  $C_1C_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $c_3 = 0$  için

$$F_{C_2}^{C_1} = c_3 = 0, f_{C_2}^{C_1} = \frac{-c_1c_3}{\sqrt{t^2c_1^2 + (c_3 + tc_2)^2}} = 0$$

ve

$$F_{C_1}^{C_2} = -c_3 = 0, f_{C_1}^{C_2} = -\frac{c_2c_3}{\sqrt{t^2c_3^2 + (c_2 + tc_1)^2}} = 0$$

$C_1C_2$  ortak regle yüzeylerinin  $s$  ve  $t$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgileri olması için gerek ve yeter şart  $c_3 = 0$  olmasıdır.

## 5. LORENTZ-3 UZAYINDA LORENTZ HİBRİT ORTAK REGLE YÜZEYLER

### 5.1. $TM_1$ Lorentz Hibrit Ortak Regle Yüzeyler

Bu bölümde, Minkowski 3-uzayında hibrit çatısı yardımıyla Lorentz hibrit ortak regle yüzeylere ilişkin karakterizasyonlar verilecektir.

Minkowski 3-uzayında  $\alpha = \alpha(\sigma)$  eğrisi boyunca hibrit çatısı  $\{T(\sigma), M_1(\sigma), M_2(\sigma)\}$  olarak verilsin.

**Durum I:**  $\langle T, T \rangle_L = -1, \langle M_1, M_1 \rangle_L = 1, \langle M_2, M_2 \rangle_L = 1$

**Tanım 5.1:** Minkowski 3-uzayında Lorentz hibrit çatısına göre birinci durum ile null olmayan bir yüzey üzerinde timelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \zeta_{M_1}^T(\sigma, v) = T(\sigma) + vM_1(\sigma) \\ \zeta_T^{M_1}(\sigma, v) = M_1(\sigma) + vT(\sigma) \end{cases} \quad (5.1)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 5.1:** Birinci durum ile  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$ ,  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin eş zamanlı olarak

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = 0, z_2 \neq 0$  veya  $z_3 \neq 0$  olmasıdır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = z_3 = 0$  ve  $z_1 \neq 0$  olmasıdır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda Lorentz hibrit çatısına göre (3.18) kullanılarak (5.1) denkleminin birinci satırının  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = vz_1T + z_1M_1 + (z_2 + vz_3)M_2 \\ \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v}(\sigma, v) = M_1(\sigma) \end{cases} \quad (5.2)$$

elde edilir. Denklem (5.1) ile verilen  $\zeta_{M_1}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı (5.2) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{M_1}^T &= \frac{\frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{(z_2 + vz_3)T + vz_1M_2}{\sqrt{|v^2z_1^2 - (z_2 + vz_3)^2|}}\end{aligned}\quad (5.3)$$

$v^2z_1^2 - (z_2 + vz_3)^2 > 0$  olsun. Bu durumda

$$\mathcal{N}_{M_1}^T = \frac{(z_2 + vz_3)T + vz_1M_2}{\sqrt{v^2z_1^2 - (z_2 + vz_3)^2}}$$

elde edilir.  $\zeta_{M_1}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (5.2) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{M_1}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 - v^2)z_1^2 + (z_2 + vz_3)^2 \quad (5.4)$$

$$F_{M_1}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v} \right\rangle_L = z_1 \quad (5.5)$$

$$G_{M_1}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (5.6)$$

(5.2) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= z_1' M_1(\sigma) + z_1 M_1'(\sigma) + z_2' M_2(\sigma) + z_2 M_2'(\sigma) \\ &\quad + v(z_1' T(\sigma) + z_1 T'(\sigma) + z_3' M_2(\sigma) + z_3 M_2'(\sigma))\end{aligned}\quad (5.7)$$

elde edilir. (5.2) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = z_1 T(\sigma) + z_3 M_2(\sigma) \quad (5.8)$$

elde edilir. (5.2) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.9)$$

elde edilir.  $\zeta_{M_1}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.2), (5.7), (5.8) ve (5.9) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_{M_1}^T = \frac{\begin{pmatrix} -(vz_1' + z_1^2 + z_2^2 + vz_2z_3)(z_2 + vz_3) \\ + vz_1(vz_1z_2 + z_1z_3 + z_2' + vz_3') \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2z_1^2 - (z_2 + vz_3)^2}} \quad (5.10)$$

$$f_{M_1}^T = -\frac{z_1z_2}{\sqrt{v^2z_1^2 - (z_2 + vz_3)^2}} \quad (5.11)$$

$$g_{M_1}^T = 0 \quad (5.12)$$

(5.4), (5.5), (5.6), (5.10), (5.11) ve (5.12) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\zeta_{M_1}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_{M_1}^T = -\frac{z_1^2 z_2^2}{(-v^2 z_1^2 + (z_2 + v z_3)^2)^2} \\ H_{M_1}^T = \frac{(v z_1' + z_1^2 + z_2^2 + v z_2 z_3)(z_2 + v z_3) + v z_1 (v z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2' + v z_3') - 2 z_1^2 z_2}{2(v^2 z_1^2 - (z_2 + v z_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (5.13)$$

Lorentz hibrit çatısına göre  $\zeta_T^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin denklem (5.1) denkleminin ikincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma}(\sigma, v) = z_1 T(\sigma) + v z_1 M_1(\sigma) + (z_3 + v z_2) M_2(\sigma) \\ \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v}(\sigma, v) = T(\sigma) \end{cases} \quad (5.14)$$

elde edilir. Denklem (5.2) ile verilen  $\zeta_T^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_T^{M_1} &= \frac{\frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{(z_3 + v z_2) M_1(\sigma) - v z_1 M_2(\sigma)}{\sqrt{(z_3 + v z_2)^2 + v^2 z_1^2}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Lorentz hibrit çatısına göre,  $\zeta_T^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (5.15) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_T^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (v^2 - 1) z_1^2 + (z_3 + v z_2)^2 \quad (5.16)$$

$$F_T^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v} \right\rangle_L = -z_1 \quad (5.17)$$

$$G_T^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v} \right\rangle_L = -1 \quad (5.18)$$

(5.14) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= z_1' T(\sigma) + z_1 T'(\sigma) + z_3' M_2 + z_3 M_2' + \\ &\quad v(z_1' M_1(\sigma) + z_1 M_1'(\sigma) + z_2' M_2(\sigma) + z_2 M_2'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.19)$$

elde edilir. (5.14) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = z_1 M_1(\sigma) + z_2 M_2(\sigma) \quad (5.20)$$

elde edilir. (5.14) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.21)$$

elde edilir.  $\zeta_T^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.15), (5.19), (5.20) ve (5.21) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_{T1}^{M_1} = - \frac{\left( (z_3 + vz_2)(z_1^2 + vz_1' - z_3(z_3 + vz_2)) - vz_1(z_1z_2 + vz_1z_3 + z_3' + vz_2') \right)}{\sqrt{(z_3 + vz_2)^2 + v^2z_1^2}} \quad (5.22)$$

$$f_T^{M_1} = \frac{z_1z_3}{\sqrt{(z_3 + vz_2)^2 + v^2z_1^2}} \quad (5.23)$$

$$g_T^{M_1} = 0 \quad (5.24)$$

(5.16), (5.17), (5.18), (5.22), (5.23) ve (5.24) denklemleri, (3.17) denkleminde yerine yazılarak  $\zeta_T^{M_1}$  hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_T^{M_1} = -\frac{z_1^2z_3^2}{(v^2z_1^2 + (z_3 + vz_2)^2)^2} \\ H_T^{M_1} = \frac{(z_3 + vz_2)(z_1^2 + vz_1' - z_3(z_3 + vz_2)) - vz_1(z_1z_2 + vz_1z_3 + z_3' + vz_2') - 2z_1^2z_3}{2(v^2z_1^2 + (z_3 + vz_2)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (5.25)$$

Sonuç olarak (5.13) ve (5.25) denklemleri yardımıyla teoremden ifade edilen şartlar altında  $TM_1$  ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 5.2:**  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$  ortak regle yüzeyler olsun.  $TM_1$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = z_3 = 0$  ve  $z_1 \neq 0$ .

**İspat:** (5.3), (5.7), (5.15) ve (5.19) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^T &= \left( \begin{array}{c} \frac{(z_1' - z_2z_3 + vz_3^2 - vz_1^2)vz_1}{\sqrt{v^2z_1^2 - (z_2 + vz_3)^2}}, \\ \frac{(-vz_1^3 - v^2z_1z_1' + z_3z_1z_2 + z_3^2z_1v + z_2'z_2 + z_2'vz_3 + vz_3'z_2 + v^2z_3'z_3)(z_2 + vz_3)}{\sqrt{v^2z_1^2 - (z_2 + vz_3)^2}}, \\ \frac{(-z_1' + z_2z_3 + vz_3^2 - vz_1^2)(z_2 + vz_3)}{\sqrt{v^2z_1^2 - (z_2 + vz_3)^2}} \end{array} \right) \\ \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_1} &= \left( \begin{array}{c} -\frac{vz_1^3 + v^2z_1z_1' + z_1z_2z_3 + z_1z_2^2v + z_3^2z_3 + z_3'vz_2 + vz_2'z_3 + v^2z_2'z_2}{\sqrt{(z_3 + vz_2)^2 + v^2z_1^2}}, \\ \frac{(z_1' + z_3z_2 + vz_2^2 + vz_1^2)vz_1}{\sqrt{(z_3 + vz_2)^2 + v^2z_1^2}}, \\ \frac{(z_1' + z_3z_2 + vz_2^2 + vz_1^2)(z_3 + vz_2)}{\sqrt{(z_3 + vz_2)^2 + v^2z_1^2}} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^T \neq 0, \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_1} \neq 0$$

olduğundan  $TM_1$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrileri aynı anda geodezik değildir. Diğer yönden,

$$\left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_{M_1}^T \right\rangle_L = - \frac{\begin{pmatrix} z_1^2 z_2 + z_2^3 + 2z_2^2 v z_3 + v z_1' z_2 + v^2 z_1' z_3 \\ + z_2 v^2 z_3^2 + v z_1 z_2' + v^2 z_1^2 z_2 - v^2 z_1 z_3' + v z_1^2 z_3 \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 z_1^2 - (z_2 + v z_3)^2}} \quad (5.26)$$

$$\left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_1} \right\rangle_L = - \frac{\begin{pmatrix} -z_1^2 z_3 + z_3^3 + 2z_3^2 v z_2 - v z_1' z_3 - v^2 z_1' z_2 \\ + z_3 v^2 z_2^2 + v z_1 z_3' + v^2 z_1^2 z_3 + v^2 z_1 z_2' - v z_1^2 z_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(z_3 + v z_2)^2 + v^2 z_1^2}} \quad (5.27)$$

biçiminde elde edilir. (5.26) ve (5.27) denklemlerinden eğer  $z_2 = z_3 = 0$  ve  $z_1 \neq 0$  ise

$$\left\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_{M_1}^T \right\rangle_L = 0, \left\langle \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_1} \right\rangle_L = 0$$

dır. Böylece  $TM_1$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametresi için aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $z_2 = z_3 = 0$  ve  $z_1 \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 5.3:**  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$ ,  $TM_1$  ortak regle yüzeyler olsun.  $TM_1$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:** Birinci durum için  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$ ,  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^T = 0, \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_1} = 0$$

olduğundan  $TM_1$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$\left\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_{M_1}^T \right\rangle_L = 0, \left\langle \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial v^2}, \mathcal{N}_T^{M_1} \right\rangle_L = 0$$

olduğundan  $TM_1$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 5.4:**  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$  ortak regle yüzeyler olsun.  $TM_1$  ortak regle yüzeylerin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrilerinin aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = 0$  olmasıdır.

**İspat:** Birinci durum için  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$ ,  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $z_1 = 0$  için

$$F_{M_1}^T = z_1 = 0, f_{M_1}^T = \frac{z_1 z_2}{\sqrt{v^2 z_1^2 - (z_2 + v z_3)^2}} = 0 \quad (5.28)$$

ve

$$F_T^{M_1} = -z_1 = 0, \quad f_T^{M_1} = \frac{-z_1 z_3}{\sqrt{(z_3 + v z_2)^2 + v^2 z_1^2}} = 0 \quad (5.29)$$

Böylece (5.28) ve (5.29) kullanılarak  $TM_1$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgileri olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = 0$  olmalıdır.

$$\textbf{Durum II: } \langle T, T \rangle_L = 1, \langle M_1, M_1 \rangle_L = -1, \langle M_2, M_2 \rangle_L = 1$$

**Tanım 5.2:** Minkowski 3-uzayında Lorentz hibrit çatısına göre ikinci durum ile null olmayan bir yüzey üzerinde spacelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \zeta_{M_1}^T(\sigma, v) = T(\sigma) + v M_1(\sigma) \\ \zeta_{M_1}^{M_1}(\sigma, v) = M_1(\sigma) + v T(\sigma) \end{cases} \quad (5.30)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 5.5:** İkinci durum için  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_1}$ ,  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak yüzeyleri olsun. Lorentz  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak yüzeylerinin eş zamanlı olarak

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = 0, z_2 \neq 0$  veya  $z_3 \neq 0$  olmasıdır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = z_3 = 0$  ve  $z_1 \neq 0$  olmasıdır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda Lorentz hibrit çatısına göre (3.19) kullanılarak (5.30) denkleminin birincisi  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = -v z_1 T - z_1 M_1 + (z_2 + v z_3) M_2 \\ \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v}(\sigma, v) = M_1(\sigma) \end{cases} \quad (5.31)$$

elde edilir. Denklem (5.30) ile verilen  $\zeta_{M_1}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı (5.31) denklemini kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{M_1}^T &= \frac{\frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{-(z_2 + v z_3)T - v z_1 M_2}{\sqrt{|v^2 z_1^2 + (z_2 + v z_3)^2|}} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ayrıca  $v^2 z_1^2 - (z_2 + v z_3)^2 > 0$  olsun. Bu durumda

$$\mathcal{N}_{M_1}^T = -\frac{(z_2 + v z_3)T + v z_1 M_2}{(v^2 z_1^2 + (z_2 + v z_3)^2)^{1/2}}$$

dir.  $\zeta_{M_1}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (5.32) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{M_1}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (v^2 - 1)z_1^2 + (z_2 + vz_3)^2 \quad (5.33)$$

$$F_{M_1}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v} \right\rangle_L = z_1 \quad (5.34)$$

$$G_{M_1}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v} \right\rangle_L = -1 \quad (5.35)$$

(5.31) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= -z_1' M_1(\sigma) - z_1 M_1'(\sigma) + z_2' M_2(\sigma) + z_2 M_2'(\sigma) \\ &\quad + v(-z_1' T(\sigma) - z_1 T'(\sigma) + z_3' M_2(\sigma) + z_3 M_2'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.36)$$

elde edilir. (5.31) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -z_1 M_1(\sigma) + z_3 M_2(\sigma) \quad (5.37)$$

elde edilir. (5.31) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.38)$$

elde edilir.  $\zeta_{M_1}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.32), (5.36), (5.37) ve (5.38) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_{M_1}^T = \frac{\left( (vz_3' - z_1^2 + z_2^2 + vz_3 z_2)(vz_3 + z_2) + vz_1(vz_1 z_2 + z_1 z_3 - z_2' - vz_3') \right)}{\sqrt{v^2 z_1^2 + (z_2 + vz_3)^2}} \quad (5.39)$$

$$f_{M_1}^T = \frac{z_1 z_2}{\sqrt{v^2 z_1^2 + (z_2 + vz_3)^2}} \quad (5.40)$$

$$g_{M_1}^T = 0 \quad (5.41)$$

(5.33), (5.34), (5.35), (5.39), (5.40) ve (5.41) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\zeta_{M_1}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_{M_1}^T &= \frac{z_1^2 z_2^2}{(v^2 z_1^2 + (z_2 + vz_3)^2)^2} \\ H_{M_1}^T &= \frac{(vz_3' - z_1^2 + z_2^2 + vz_3 z_2)(vz_3 + z_2) + vz_1(vz_1 z_2 + z_1 z_3 - z_2' - vz_3') + 2z_1^2 z_2}{2(v^2 z_1^2 + (z_2 + vz_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (5.42)$$

Lorentz hibrit çatısına göre,  $\zeta_T^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin (5.30) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma}(\sigma, v) &= -z_1 T(\sigma) - vz_1 M_1(\sigma) + (z_3 + vz_2) M_2(\sigma) \\ \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v}(\sigma, v) &= T(\sigma) \end{aligned} \right. \quad (5.43)$$

elde edilir. Denklem (5.31) ile verilen  $\zeta_T^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_T^{M_1} &= \frac{\frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{vz_1M_2(\sigma) - (z_3 + vz_2)M_1(\sigma)}{\sqrt{v^2z_1^2 - (z_3 + vz_2)^2}}\end{aligned}\quad (5.44)$$

$\zeta_T^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları Lorentz hibrit çatısına (5.44) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_T^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 - v^2)z_1^2 + (z_3 + vz_2)^2 \quad (5.45)$$

$$F_T^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v} \right\rangle_L = -z_1 \quad (5.46)$$

$$G_T^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (5.47)$$

(5.43) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= -z_1'T(\sigma) - z_1T'(\sigma) + z_3'M_2(\sigma) + z_3M_2'(\sigma) \\ &\quad + v(-z_1'M_1(\sigma) - z_1M_1'(\sigma) + z_2'M_2(\sigma) + z_2M_2'(\sigma))\end{aligned}\quad (5.48)$$

elde edilir. (5.43) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -z_1M_1(\sigma) + z_2M_2(\sigma) \quad (5.49)$$

elde edilir. (5.43) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.50)$$

elde edilir.  $\zeta_T^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.44), (5.48), (5.49) ve (5.50) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_T^{M_1} = \frac{\begin{pmatrix} (-vz_1' + z_3^2 + z_2^2 + vz_3z_2)(z_3 + vz_2) \\ +vz_1(-vz_1z_2 - vz_1z_3 + z_3' + vz_2') \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2z_1^2 - (z_3 + vz_2)^2}} \quad (5.51)$$

$$f_T^{M_1} = \frac{-z_1z_3}{\sqrt{v^2z_1^2 - (z_3 + vz_2)^2}} \quad (5.52)$$

$$g_T^{M_1} = 0 \quad (5.53)$$

(5.45), (5.46), (5.47), (5.51), (5.52) ve (5.53) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\zeta_T^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki

biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_T^{M_1} = \frac{z_1^2 z_3^2}{(-v^2 z_1^2 + (z_3 + v z_2)^2)^2} \\ H_T^{M_1} = \frac{(-v z_1' + z_3^2 + z_2^2 + v z_3 z_2)(z_3 + v z_2) + v z_1(-v z_1 z_2 - v z_1 z_3 + z_3' + v z_2') + 2 z_1^2 z_3}{2(-v^2 z_1^2 + (z_3 + v z_2)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right. \quad (5.54)$$

Sonuç olarak (5.42) ve (5.54) denklemleri yardımıyla teoremde ifade edilen şartlar altında  $TM_1$  ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 5.6:**  $\zeta_T^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$ ,  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $TM_1$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = z_3 = 0$  ve  $z_1 \neq 0$ .

**İspat:** İkinci durumu için (5.32), (5.36), (5.44) ve (5.48) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^T &= \begin{pmatrix} \frac{(z_1' - z_2 z_3 - v z_3^2 - v z_1^2) v z_1}{\sqrt{v^2 z_1^2 + (z_2 + v z_3)^2}}, \\ \frac{-v z_1^3 + v^2 z_1 z_1' - z_1 z_3 z_2 - z_1 z_3^2 v + z_2' z_2 + z_2' v z_3 + v z_3' z_2 + v^2 z_3' z_2}{\sqrt{v^2 z_1^2 + (z_2 + v z_3)^2}}, \\ \frac{-(z_1' - z_2 z_3 - v z_3^2 - v z_1^2)(z_2 + v z_3)}{\sqrt{v^2 z_1^2 + (z_2 + v z_3)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_1} &= \begin{pmatrix} \frac{-(z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2^2 v - z_3' z_3 - z_3' v z_2 - v z_2' z_3 - v^2 z_2' z_2 - v z_1^3 + v^2 z_1 z_1')}{\sqrt{v^2 z_1^2 + (z_3 + v z_2)^2}}, \\ \frac{-(z_1 + z_3 z_2 + v z_2^2 - v z_1^2) v z_1}{\sqrt{v^2 z_1^2 + (z_3 + v z_2)^2}}, \\ \frac{(z_1' + z_3 z_2 + v z_2^2 - v z_1^2)(z_3 + v z_2)}{\sqrt{v^2 z_1^2 + (z_3 + v z_2)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^T &\neq 0, \quad \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_1} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $TM_1$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametresi için aynı anda geodezik değildir.

Diğer yönden,

$$< \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_1}^T >_L = \frac{\begin{pmatrix} -z_1^2 z_2 + z_2^3 + 2 z_2^2 v z_3 + v z_1' z_2 + v^2 z_1' z_3 \\ + z_2 v^2 z_3^2 - v z_1 z_2' + v^2 z_1^2 z_2 - v^2 z_1 z_3' \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 z_1^2 + (z_2 + v z_3)^2}} \quad (5.55)$$

$$< \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_1} >_L = - \frac{\begin{pmatrix} -z_1^2 z_3 - z_3^3 - 2 z_3^2 v z_2 + v z_1' z_3 + v^2 z_1' z_2 \\ - z_3 v^2 z_2^2 - v z_1 z_3' + v^2 z_1^2 z_3 - v^2 z_1 z_2' \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 z_1^2 + (z_3 + v z_2)^2}} \quad (5.56)$$

biçiminde elde edilir. (5.55) ve (5.56) denklemlerinden  $z_2 = z_3 = 0$  ve  $z_1 \neq 0$  ise

$$< \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_1}^T >_L = 0, \quad < \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_1} >_L = 0$$

dır. Böylece  $TM_1$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrileri aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $z_2 = z_3 = 0$  ve  $z_1 \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 5.7:**  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$  ortak regle yüzeyleri olsun.  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:** İkinci durum için  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}, TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^T = 0, \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_1} = 0$$

olduğundan  $TM_1$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak geodeziktir. Ayrıca

$$\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_{M_1}^T \rangle_L = 0, \langle \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial v^2}, \mathcal{N}_T^{M_1} \rangle_L = 0$$

olduğundan  $TM_1$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 5.8:**  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$ ,  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrilerinin aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = 0$  olmasıdır.

**İspat:**  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$   $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $z_1 = 0$  için

$$F_{M_1}^T = z_1 = 0, f_{M_1}^T = \frac{z_1 z_2}{\sqrt{v^2 z_1^2 + (z_2 + v z_3)^2}} = 0 \quad (5.57)$$

ve

$$F_T^{M_1} = -z_1 = 0, f_T^{M_1} = \frac{-z_1 z_3}{\sqrt{v^2 z_1^2 - (z_3 + v z_2)^2}} = 0 \quad (5.58)$$

Böylece (5.57) ve (5.58) kullanılarak  $TM_1$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgileri olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = 0$  olmalıdır.

**Durum III:**  $\langle T, T \rangle_L = 1, \langle M_1, M_1 \rangle_L = 1, \langle M_2, M_2 \rangle_L = -1$ .

**Tanım 5.3:** Minkowski 3-uzayında Lorentz hibrit çatısına göre üçüncü durum ile null olmayan bir yüzey üzerinde spacelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \zeta_{M_1}^T(\sigma, v) = T(\sigma) + v M_1(\sigma) \\ \zeta_T^{M_1}(\sigma, v) = M_1(\sigma) + v T(\sigma) \end{cases} \quad (5.59)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 5.9:** Üçüncü durum için  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_1}$ ,  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak yüzeyleri olsun. Lorentz  $TM_1$  hibrit ortak yüzeylerinin aynı anda

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = 0$ ,  $z_2 \neq 0$  veya  $z_3 \neq 0$  olmasıdır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = z_3 = 0$  ve  $z_1 \neq 0$  olmasıdır.

**İspat:** Lorentz uzayda hibrit çatısına göre (3.20) kullanılarak (5.59) denkleminin birinci satırının  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = -vz_1T + z_1M_1 - (z_2 + vz_3)M_2 \\ \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v}(\sigma, v) = M_1(\sigma) \end{cases} \quad (5.60)$$

elde edilir. Denklem (5.59) ile verilen  $\zeta_{M_1}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı (5.60) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{M_1}^T &= \frac{\frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{(z_2 + vz_3)T + vz_1M_2}{\sqrt{(z_2 + vz_3)^2 - v^2z_1^2}} \end{aligned} \quad (5.61)$$

$v^2z_1^2 - (z_2 + vz_3)^2 > 0$  olsun. Bu durumda

$$\mathcal{N}_{M_1}^T = \frac{(z_2 + vz_3)T + vz_1M_2}{((z_2 + vz_3)^2 - v^2z_1^2)^{1/2}}$$

$\zeta_{M_1}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (5.61) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{M_1}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 + v^2)z_1^2 - (z_2 + vz_3)^2 \quad (5.62)$$

$$F_{M_1}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v} \right\rangle_L = z_1 \quad (5.63)$$

$$G_{M_1}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (5.64)$$

(5.31) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= z_1' M_1(\sigma) + z_1 M_1'(\sigma) - z_2' M_2(\sigma) - z_2 M_2'(\sigma) \\ &\quad - v(z_1' T(\sigma) + z_1 T'(\sigma) + z_3' M_2 + z_3 M_2') \end{aligned} \quad (5.65)$$

elde edilir. (5.31) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -z_1 T(\sigma) - z_3 M_2(\sigma) \quad (5.66)$$

elde edilir. (5.31) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.67)$$

elde edilir.  $\zeta_{M_1}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.61), (5.65), (5.66) ve (5.67) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_{M_1}^T = - \frac{\begin{pmatrix} z_1^2 z_2 - z_2^3 - 2z_2^2 v z_3 + v z_1' z_2 + v^2 z_1' z_3 \\ -z_2 v^2 z_3^2 - v z_1 z_2' + v^2 z_1^2 z_2 - v^2 z_1 z_3' \end{pmatrix}}{\sqrt{(z_2 + v z_3)^2 - v^2 z_1^2}} \quad (5.68)$$

$$f_{M_1}^T = \frac{-z_1 z_2}{\sqrt{(z_2 + v z_3)^2 - v^2 z_1^2}} \quad (5.69)$$

$$g_{M_1}^T = 0 \quad (5.70)$$

(5.62), (5.63), (5.64), (5.68), (5.69) ve (5.70) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\zeta_{M_1}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_{M_1}^T = \frac{-z_1^2 z_2^2}{((z_2 + v z_3)^2 - v^2 z_1^2)^2} \\ H_{M_1}^T = \frac{-(-z_1^2 z_2 - z_2^3 - 2z_2^2 v z_3 + v z_1' z_2 + v^2 z_1' z_3 - z_2 v^2 z_3^2 - v z_1 z_2' + v^2 z_1^2 z_2 - v^2 z_1 z_3')}{2((z_2 + v z_3)^2 - v^2 z_1^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (5.71)$$

Lorentz hibrit çatısına göre,  $\zeta_T^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin denklem (5.59) denkleminin ikincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial \sigma}(\sigma, v) = -z_1 T(\sigma) + v z_1 M_1(\sigma) - (z_3 + v z_2) M_2(\sigma) \\ \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v}(\sigma, v) = T(\sigma) \end{cases} \quad (5.72)$$

elde edilir. Denklem (5.59) ile verilen  $\zeta_T^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_T^{M_1} &= \frac{\frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{-(z_3 + v z_2) M_1(\sigma) - v z_1 M_2(\sigma)}{\sqrt{(z_3 + v z_2)^2 - v^2 z_1^2}} \end{aligned} \quad (5.73)$$

$\zeta_T^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları Lorentz hibrit çatısına göre (5.73) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_T^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (v^2 + 1)z_1^2 - (z_3 + vz_2)^2 \quad (5.74)$$

$$F_T^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v} \right\rangle_L = -z_1 \quad (5.75)$$

$$G_T^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (5.76)$$

(5.72) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= -z_1' T(\sigma) - z_1 T'(\sigma) - z_3' M_2(\sigma) - z_3 M_2'(\sigma) \\ &\quad + v(z_1' M_1(\sigma) + z_1 M_1'(\sigma) - z_2' M_2(\sigma) - z_2 M_2'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.77)$$

elde edilir. (5.72) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_T^{M_1})}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = z_1 M_1(\sigma) - z_2 M_2(\sigma) \quad (5.78)$$

elde edilir. (5.72) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.79)$$

elde edilir.  $\zeta_T^{M_1}$  Lorentz hibrit çatısına göre, Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.73), (5.77), (5.78) ve (5.79) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_T^{M_1} = \frac{\begin{pmatrix} -z_1^2 z_3 + z_3^3 + 2z_3^2 v z_2 + v z_1' z_3 + v^2 z_1' z_2 \\ + z_3 v^2 z_2^2 - v z_1 z_3' - v^2 z_1^2 z_3 - v^2 z_1 z_2' \end{pmatrix}}{\sqrt{(z_3 + v z_2)^2 - v^2 z_1^2}} \quad (5.80)$$

$$f_T^{M_1} = \frac{-z_1 z_3}{\sqrt{(z_3 + v z_2)^2 - v^2 z_1^2}} \quad (5.81)$$

$$g_T^{M_1} = 0 \quad (5.82)$$

(5.74), (5.75), (5.76), (5.80), (5.81) ve (5.82) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\zeta_T^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_T^{M_1} = \frac{-z_1^2 z_3^2}{(-v^2 z_1^2 + (z_3 + v z_2)^2)^2} \\ H_T^{M_1} = -\frac{(z_1^2 z_3 + z_3^3 + 2z_3^2 v z_2 + v z_1' z_3 + v^2 z_1' z_2 + z_3 v^2 z_2^2 - v z_1 z_3' - v^2 z_1^2 z_3 - v^2 z_1 z_2')}{2(-v^2 z_1^2 + (z_3 + v z_2)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (5.83)$$

Sonuç olarak (5.61) ve (5.83) denklemleri yardımıyla teoremden ifade edilen şartlar altında  $TM_1$  ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 5.10:**  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$ ,  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = z_3 = 0$  ve  $z_1 \neq 0$ .

**İspat:**(5.61), (5.65), (5.73) ve (5.77) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^T &= \begin{pmatrix} -\frac{(z_1' - z_2 z_3 - v z_3^2 + v z_1^2) v z_1}{\sqrt{(z_2 + v z_3)^2 - v^2 z_1^2}}, \\ \frac{v z_1^3 + v^2 z_1 z_1' - z_1 z_3 z_2 - z_1 z_3^2 v - z_2' z_2 - z_2' v z_3 - v z_3' z_2 - v^2 z_3' z_3}{\sqrt{(z_2 + v z_3)^2 - v^2 z_1^2}}, \\ -\frac{(z_1' - z_2 z_3 - v z_3^2 + v z_1^2)(z_2 + v z_3)}{\sqrt{(z_2 + v z_3)^2 - v^2 z_1^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_1} &= \begin{pmatrix} \frac{z_2 z_1 z_3 + z_2^2 z_1 v - z_3' z_3 - z_3' v z_2 - v z_2' z_3 - v^2 z_2' z_2 - v z_1^3 + v^2 z_1 z_1'}{\sqrt{(z_3 + v z_2)^2 - v^2 z_1^2}}, \\ \frac{(z_1' - z_3 z_2 - v z_2^2 + v z_1^2) v z_1}{\sqrt{(z_3 + v z_2)^2 - v^2 z_1^2}}, \\ -\frac{(z_1' - z_3 z_2 - v z_2^2 + v z_1^2)(z_3 + v z_2)}{\sqrt{(z_3 + v z_2)^2 - v^2 z_1^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^T &\neq 0, \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_1} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $TM_1$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametresi için aynı anda geodezik değildir. Diğer yönden

$$< \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_1}^T >_L = \frac{\begin{pmatrix} z_1^2 z_2 - z_2^3 - 2 z_2^2 v z_3 + v z_1' z_2 + v^2 z_1' z_3 \\ -z_2 v^2 z_3^2 - v z_1 z_2' + v^2 z_1^2 z_2 - v^2 z_1 z_3' \end{pmatrix}}{\sqrt{(z_2 + v z_3)^2 - v^2 z_1^2}} \quad (5.84)$$

$$< \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_1} >_L = \frac{\begin{pmatrix} -z_1^2 z_3 + z_3^3 + 2 z_3^2 v z_2 + v z_1' z_3 + v^2 z_1' z_2 \\ + z_3 v^2 z_2^2 - v z_1 z_3' - v^2 z_1^2 z_3 - v^2 z_1 z_2' \end{pmatrix}}{\sqrt{(z_3 + v z_2)^2 - v^2 z_1^2}} \quad (5.85)$$

biçiminde elde edilir. (5.84) ve (5.85) denklemlerinden  $z_2 = z_3 = 0$  ve  $z_1 \neq 0$  ise

$$< \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_1}^T >_L = 0, < \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_1} >_L = 0$$

dır. Böylece  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $z_2 = z_3 = 0$  ve  $z_1 \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 5.11:**  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$  ortak regle yüzeyleri olsun.  $TM_1$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:** Üçüncü durum için  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$ ,  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^T = 0, \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_1} = 0$$

olduğundan  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^T)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_{M_1}^T \rangle_L = 0, \langle \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_1})}{\partial v^2}, \mathcal{N}_T^{M_1} \rangle_L = 0$$

olduğundan  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 5.12:**  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$ ,  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $TM_1$  ortak regle yüzeylerin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrilerinin aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = 0$  olmasıdır.

**İspat:** Üçüncü durum için  $\zeta_{M_1}^T$  ve  $\zeta_T^{M_1}$ ,  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $z_1 = 0$  için

$$F_{M_1}^T = z_1 = 0, f_{M_1}^T = \frac{-z_1 z_2}{\sqrt{(z_2 + v z_3)^2 - v^2 z_1^2}} = 0 \quad (5.86)$$

ve

$$F_T^{M_1} = -z_1 = 0, f_T^{M_1} = \frac{z_1 z_3}{\sqrt{(z_3 + v z_2)^2 - v^2 z_1^2}} = 0 \quad (5.87)$$

Böylece (5.86) ve (5.87) kullanılarak  $TM_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak eğrilik çizgileri olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = 0$  olmalıdır.

## 5.2. $TM_2$ Lorentz Hibrit Ortak Regle Yüzeyler

**Durum I:**  $\langle T, T \rangle_L = -1, \langle M_1, M_1 \rangle_L = 1, \langle M_2, M_2 \rangle_L = 1$ .

**Tanım 5.4:** Minkowski 3-uzayında Lorentz hibrit çatısına göre birinci durum ile timelike bir yüzey üzerinde timelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \zeta_{M_2}^T(\sigma, v) = T(\sigma) + v M_2(\sigma) \\ \zeta_T^{M_2}(\sigma, v) = M_2(\sigma) + v T(\sigma) \end{cases} \quad (5.88)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 5.13:** Birinci durum ile Lorentz hibrit  $TM_2$  ortak regle yüzeyleri göz önüne alınsın.  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin eş zamanlı olarak

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = 0$ ,  $z_1 \neq 0$  ve ya  $z_3 \neq 0$  dır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_3 = 0$  ve  $z_2 \neq 0$  dır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda Lorentz hibrit çatısına göre (3.18) kullanılarak (5.88) denkleminin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = vz_2T + z_2M_2 + (z_1 - vz_3)M_1 \\ \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v}(\sigma, v) = M_2(\sigma) \end{cases} \quad (5.89)$$

elde edilir. Denklem (5.88) ile verilen  $\zeta_{M_2}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı (5.89) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{M_2}^T &= \frac{\frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= -\frac{(z_1 - vz_3)T(\sigma) + vz_2M_1(\sigma)}{\sqrt{v^2z_2^2 - (z_1 - vz_3)^2}} \end{aligned} \quad (5.90)$$

$v^2z_2^2 - (z_1 - vz_3)^2 > 0$  olsun.  $\zeta_{M_2}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (5.90) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{M_2}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 - v^2)z_2^2 + (z_1 - vz_3)^2 \quad (5.91)$$

$$F_{M_2}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v} \right\rangle_L = z_2 \quad (5.92)$$

$$G_{M_2}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (5.93)$$

(5.89) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= z_1'M_1(\sigma) + z_1M_1'(\sigma) + z_2'M_2(\sigma) + z_2M_2'(\sigma) \\ &\quad + v(z_2'T(\sigma) + z_2T'(\sigma) - z_3'M_1(\sigma) - z_3M_1'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.94)$$

elde edilir. (5.89) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = z_2T(\sigma) - z_3M_1(\sigma) \quad (5.95)$$

elde edilir. (5.89) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.96)$$

elde edilir.  $\zeta_{M_2}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.90), (5.94), (5.95) ve (5.96) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_{M_2}^T = \frac{\begin{pmatrix} z_1^3 - 2z_1^2 v z_3 + z_2^2 z_1 + v z_2' z_1 - v^2 z_2' z_3 \\ + z_1 v^2 z_3^2 - v z_2 z_1' - v^2 z_2^2 z_1 + v^2 z_2 z_3' + v^2 z_1 z_3^2 - v z_1^2 z_3 \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 z_2^2 - (z_1 - v z_3)^2}} \quad (5.97)$$

$$f_{M_2}^T = \frac{z_1 z_2}{\sqrt{v^2 z_2^2 - (z_1 - v z_3)^2}} \quad (5.98)$$

$$g_{M_2}^T = 0 \quad (5.99)$$

(5.91), (5.92), (5.93), (5.97), (5.98) ve (5.99) denklemleri (3.17) denklemlerinde yerine yazıldığında  $\zeta_{M_2}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{cases} K_{M_2}^T = -\frac{z_1^2 z_2^2}{(v^2 z_2^2 - (z_1 - v z_3)^2)^2} \\ T_{M_2} H = \frac{z_1^3 - 2z_1^2 v z_3 + z_2^2 z_1 + v z_2' z_1 - v^2 z_2' z_3 + z_1 v^2 z_3^2 - v z_2 z_1' - v^2 z_2^2 z_1 + v^2 z_2 z_3' + v^2 z_1 z_3^2 - v z_1^2 z_3 - 2z_1^2 z_2^2}{2(v^2 z_2^2 - (z_1 - v z_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (5.100)$$

Lorentz hibrit çatısına göre  $\zeta_T^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin denklem (5.88) denkleminin ikincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma}(\sigma, v) = z_2 T + v z_2 M_2 + M_1(v z_1 - z_3) \\ \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v}(\sigma, v) = T(\sigma) \end{cases} \quad (5.101)$$

elde edilir. Denklem (5.88) ile verilen  $\zeta_T^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı (5.101) denklemini kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_T^{M_2} &= \frac{\frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{v z_2 M_1(\sigma) - (z_3 - v z_1) M_2(\sigma)}{\sqrt{v^2 z_2^2 + (v z_1 - z_3)^2}} \end{aligned} \quad (5.102)$$

$\zeta_T^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (5.101) ve (5.102) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_T^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (v^2 - 1) z_2^2 + (v z_1 - z_3)^2 \quad (5.103)$$

$$F_T^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v} \right\rangle_L = -z_2 \quad (5.104)$$

$$G_T^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v} \right\rangle_L = -1 \quad (5.105)$$

(5.101) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial \sigma^2}(\sigma, v) &= z_2' T(\sigma) + z_2 T'(\sigma) - z_3' M_1(\sigma) - z_3 M_1'(\sigma) \\ &\quad + v(z_1' M_1(\sigma) + z_1 M_1'(\sigma) + z_2' M_2(\sigma) + z_2 M_2'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.106)$$

elde edilir. (5.101) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = z_1 M_1(\sigma) + z_2 M_2(\sigma) \quad (5.107)$$

elde edilir. (5.101) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.108)$$

elde edilir.

$\zeta_T^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.102), (5.106), (5.107) ve (5.108) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_T^{M_2} = \frac{\begin{pmatrix} v z_2 z_3' - v^2 z_2 z_1' + v^2 z_2^2 z_3 - z_2^2 z_3 + z_3^3 \\ -2 z_3^2 v z_1 + z_3 v^2 z_1^2 - v z_2' z_3 + v^2 z_2' z_1 \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 z_2^2 + (v z_1 - z_3)^2}} \quad (5.109)$$

$$f_T^{M_2} = \frac{z_2 z_3}{\sqrt{v^2 z_2^2 + (v z_1 - z_3)^2}} \quad (5.110)$$

$$g_T^{M_2} = 0 \quad (5.111)$$

(5.103), (5.104), (5.105), (5.109), (5.110) ve (5.109) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\zeta_T^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde verilir:

$$\begin{cases} K_T^{M_2} = \frac{z_2^2 z_3^2}{(v^2 z_2^2 + (v z_1 - z_3)^2)^2} \\ H_T^{M_2} = \frac{(v z_2 z_3' - v^2 z_2 z_1' + v^2 z_2^2 z_3 + 2 z_3^2 z_3 + z_3^3 - 2 z_3^2 v z_1 + z_3 v^2 z_1^2 - v z_2' z_3 + v^2 z_2' z_1) + 2 z_2^2 z_3^2}{2(v^2 z_2^2 + (v z_1 - z_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (5.112)$$

(5.100) ve (5.112) denklemleri yardımıyla teoremden ifade edilen şartlar altında  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri eş zamanlı olarak açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 5.14:**  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}$ ,  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_3 = 0$  ve  $z_2 \neq 0$ .

**İspat:** (5.90), (5.94), (5.102) ve (5.106) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma^2} \times_L {}^T M_2 \mathcal{N} &= \begin{pmatrix} \frac{-(z_1 z_3 + z'_2 - v z_3^2 + v z_2^2) v z_2}{\sqrt{v^2 z_2^2 - (z_1 - v z_3)^2}}, \\ -\frac{(z_1 z_3 + z'_2 - v z_3^2 + v z_2^2)(z_1 - v z_3)}{\sqrt{v^2 z_2^2 - (z_1 - v z_3)^2}}, \\ -\frac{-z'_1 z_1 + z'_1 v z_3 + z_3 z_2 z_1 - z_3^2 z_2 v + v z'_3 z_1 - v^2 z'_3 z_3 + v z_2^3 + v^2 z_2 z'_2}{\sqrt{v^2 z_2^2 - (z_1 - v z_3)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma^2} \times_L {}^M T \mathcal{N} &= \begin{pmatrix} -\frac{-z_2 z_1 z_3 + z_2 z_1^2 v + z'_3 z_3 - z'_3 v z_1 - v z'_1 z_3 + v^2 z'_1 z_1 + v z_2^3 + v^2 z_2 z'_2}{\sqrt{v^2 z_2^2 + (v z_1 - z_3)^2}}, \\ -\frac{(z'_2 - z_3 z_1 + v z_2^2 + v z_1^2)(z_3 - v z_1)}{\sqrt{v^2 z_2^2 + (v z_1 - z_3)^2}}, \\ \frac{(z'_2 - z_3 z_1 + v z_2^2 + v z_1^2) v z_2}{\sqrt{v^2 z_2^2 + (v z_1 - z_3)^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^T \neq 0, \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_2} \neq 0$$

olduğundan  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak geodezik değildir. Diğer yönden

$$< \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^T >_L = -\frac{\begin{pmatrix} z_1^3 - 2z_1^2 v z_3 + z_2^2 z_1 + v z'_2 z_1 - v^2 z'_2 z_3 \\ + z_1 v^2 z_3^2 - v z_2 z'_1 - v^2 z_2^2 z_1 + v^2 z_2 z'_3 \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 z_2^2 - (z_1 - v z_3)^2}} \quad (5.113)$$

$$< \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_2} >_L = \frac{\begin{pmatrix} -z_2 z_1 z_3 + z_2 z_1^2 v + z'_3 z_3 - z'_3 v z_1 \\ -v z'_1 z_3 + v^2 z'_1 z_1 + v z_2^3 + v^2 z_2 z'_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 z_2^2 + (v z_1 - z_3)^2}} \quad (5.114)$$

biçiminde elde edilir. (5.113) ve (5.114) denklemlerinden  $z_1 = z_3 = 0$  ve  $z_2 \neq 0$  ise

$$< \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^T >_L = 0, \quad < \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_2} >_L = 0$$

dır. Böylece  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_3 = 0$  ve  $z_2 \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 5.15:**  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}$ ,  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $TM_2$  ortak regle yüzeyleri  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:**  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}$ ,  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^T = 0, \quad \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_2} = 0$$

olduğundan  $TM_2$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$\left\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^T \right\rangle_L = 0, \quad \left\langle \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_2} \right\rangle_L = 0$$

olduğundan  $TM_2$  ortak regle yüzeylerin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 5.16:**  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}$ ,  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = 0$  olmasıdır.

**İspat:**  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}$ ,  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $z_2 = 0$  için

$$F_{M_2}^T = z_2 = 0, \quad f_{M_2}^T = \frac{z_1 z_2}{\sqrt{v^2 z_2^2 - (z_1 - v z_3)^2}} = 0 \quad (5.115)$$

ve

$$F_T^{M_2} = -z_2 = 0, \quad f_T^{M_2} = \frac{z_2 z_3}{\sqrt{v^2 z_2^2 + (v z_1 - z_3)^2}} = 0 \quad (5.116)$$

Böylece (5.115) ve (5.116) kullanılarak  $TM_2$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak eğrilik çizgileri olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = 0$  olmalıdır.

**Durum II:**  $\langle T, T \rangle_L = 1, \langle M_1, M_1 \rangle_L = -1, \langle M_2, M_2 \rangle_L = 1$

**Tanım 5.5:** Minkowski 3-uzayında Lorentz hibrit çatısına göre ikinci durum ile timelike bir yüzey üzerinde spacelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \zeta_{M_2}^T(\sigma, v) = T(\sigma) + v M_2(\sigma) \\ \zeta_T^{M_2}(\sigma, v) = M_2(\sigma) + v T(\sigma) \end{cases} \quad (5.117)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 5.17:** İkinci durum ile  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri eş zamanlı olarak

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = 0, z_1 \neq 0$  ve ya  $z_3 \neq 0$  dır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_3 = 0$  ve  $z_2 \neq 0$  dır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda hibrit çatısına göre (3.19) kullanılarak (5.117)'nin birinci satırının  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = -vz_2T(\sigma) + z_2M_2(\sigma) + (vz_3 - z_1)M_1(\sigma) \\ \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v}(\sigma, v) = M_2(\sigma) \end{cases} \quad (5.118)$$

elde edilir. Denklem (5.117) ile verilen  $\zeta_{M_2}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı, (5.118) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{M_2}^T &= \frac{\frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{(vz_3 - z_1)T(\sigma) + vz_2M_1(\sigma)}{\sqrt{(vz_3 - z_1)^2 - v^2z_2^2}} \end{aligned} \quad (5.119)$$

$\zeta_{M_2}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (5.119) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{M_2}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (v^2 + 1)z_2^2 - (vz_3 - z_1)^2 \quad (5.120)$$

$$F_{M_2}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v} \right\rangle_L = z_2 \quad (5.121)$$

$$G_{M_2}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (5.122)$$

(5.118) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= -z_1'M_1(\sigma) - z_1M_1'(\sigma) + z_2'M_2(\sigma) + z_2M_2'(\sigma) \\ &\quad + v(-z_2'T(\sigma) - z_2T'(\sigma) + z_3'M_1(\sigma) + z_3M_1'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.123)$$

elde edilir. (5.118) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = z_2T(\sigma) + z_3M_1(\sigma) \quad (5.124)$$

elde edilir. (5.118) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.125)$$

elde edilir.  $\zeta_{M_2}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.119), (5.123), (5.124) ve (5.125) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_{M_2}^T = -\frac{\begin{pmatrix} z_1^3 - 2z_1^2vz_3 - z_2^2z_1 - vz_2'z_1 + v^2z_2'z_3 \\ + z_1v^2z_3' + vz_2z_1' - v^2z_2^2z_1 - v^2z_2z_3' \end{pmatrix}}{\sqrt{(vz_3 - z_1)^2 - v^2z_2^2}} \quad (5.126)$$

$$f_{M_2}^T = \frac{-z_1z_2}{\sqrt{(vz_3 - z_1)^2 - v^2z_2^2}} \quad (5.127)$$

$$g_{M_2}^T = 0 \quad (5.128)$$

(5.120), (5.121), (5.122), (5.126), (5.127) ve (5.128) denklemleri (3.17) denklemlerinde yerine yazıldığında  $\zeta_{M_1}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde verilir:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{M_2}^T = \frac{z_2^2 z_3^2}{(-(vz_3 - z_1)^2 + v^2 z_2^2)^2} \\ H_{M_2}^T = \frac{(z_1^3 - 2z_1^2 vz_3 + z_2^2 z_1 - vz_2' z_1 + v^2 z_2' z_3 + z_1 v^2 z_3^2 + vz_2 z_1' - v^2 z_2^2 z_1 - v^2 z_2 z_3') + 2z_1 z_2^2}{2((vz_3 - z_1)^2 - v^2 z_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right. \quad (5.129)$$

Minkowski 3-uzayda hibrit çatısına göre (5.117) denkleminin ikincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma}(\sigma, v) = -z_2 T(\sigma) + vz_2 M_2(\sigma) + (z_3 - vz_1) M_1(\sigma) \\ \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v}(\sigma, v) = T(\sigma) \end{array} \right. \quad (5.130)$$

elde edilir. Denklem (5.117) ile verilen  $\zeta_T^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı (5.130) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_T^{M_2} &= \frac{\frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= -\frac{(vz_1 - z_3) M_2(\sigma) - vz_2 M_1(\sigma)}{\sqrt{-v^2 z_2^2 + (vz_1 - z_3)^2}} \end{aligned} \quad (5.131)$$

Lorentz hibrit çatısına göre,  $\zeta_T^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (5.130) ve (5.131) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_T^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 + v^2) z_2^2 - (z_3 - vz_1)^2 \quad (5.132)$$

$$F_T^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v} \right\rangle_L = -z_2 \quad (5.133)$$

$$G_T^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (5.134)$$

(5.130) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= -z_2' T(\sigma) - z_2 T'(\sigma) + z_3' M_1(\sigma) + z_3 M_1'(\sigma) \\ &\quad + v(-z_1' M_1(\sigma) - z_1 M_1'(\sigma) - z_2' M_2(\sigma) + z_2 M_2'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.135)$$

elde edilir. (5.130) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -z_1 M_1(\sigma) + z_2 M_2(\sigma) \quad (5.136)$$

elde edilir. (5.130) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.137)$$

elde edilir. Lorentz hibrit çatısına göre  $\zeta_T^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.131), (5.135), (5.136) ve (5.137) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_T^{M_2} = \frac{\left( v z_2 z'_3 - v^2 z_2 z'_1 + v^2 z_2^2 z_3 + z_2^2 z_3 - z_3^3 \right) + 2 z_3^2 v z_1 - z_3 v^2 z_1^2 - v z'_2 z_3 + v^2 z'_2 z_1}{\sqrt{(v z_3 - z_1)^2 - v^2 z_2^2}} \quad (5.138)$$

$$f_T^{M_2} = \frac{-z_2 z_3}{\sqrt{(v z_3 - z_1)^2 - v^2 z_2^2}} \quad (5.139)$$

$$g_T^{M_2} = 0 \quad (5.140)$$

(5.132), (5.133), (5.134), (5.138), (5.139) ve (5.140) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında,  $\zeta_T^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} \frac{M_2}{T} K = \frac{z_2^2 z_3^2}{(-(v z_3 - z_1)^2 + v^2 z_2^2)^2} \\ \frac{M_2}{T} H = -\frac{v z_2 z'_3 - v^2 z_2 z'_1 + v^2 z_2^2 z_3 - z_2^2 z_3 - z_3^3 + 2 z_3^2 v z_1 - z_3 v^2 z_1^2 - v z'_2 z_3 + v^2 z'_2 z_1}{2((v z_3 - z_1)^2 - v^2 z_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (5.141)$$

Sonuç olarak (5.129) ve (5.141) denklemleri yardımıyla teoremden ifade edilen şartlar altında  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 5.18:**  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}$ ,  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_3 = 0$  ve  $z_2 \neq 0$ .

**İspat:** (5.119), (5.123), (5.131) ve (5.135) denklemleri yardımıyla aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^T &= \begin{pmatrix} -\frac{(z_1 z_3 - z'_2 - v z_3^2 + v z_2^2) v z_2}{\sqrt{(z_1 - v z_3)^2 - v^2 z_2^2}}, \\ -\frac{(z_1 z_3 - z'_2 - v z_3^2 + v z_2^2)(z_1 - v z_3)}{\sqrt{(z_1 - v z_3)^2 - v^2 z_2^2}}, \\ \frac{-z'_1 z_1 + z'_1 v z_3 + z_2 z_3 z_1 - z_2 z_3^2 v + v z'_3 z_1 - v^2 z'_3 z_3 + v z_2^3 + v^2 z_2^2 z'_2}{\sqrt{(z_1 - v z_3)^2 - v^2 z_2^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_2} &= \begin{pmatrix} \frac{-(v z_2^3 - v^2 z_2 z'_2 + z_2 z_1 z_3 - z_2 z_1^2 v + z'_3 z_3 - z'_3 v z_1 - v z'_1 z_3 + v^2 z'_1 z_1)}{\sqrt{-v^2 z_2^2 + (z_3 - v z_1)^2}}, \\ \frac{(z'_2 + z_3 z_1 + v z_2^2 - v z_1^2)(z_3 - v z_1)}{\sqrt{-v^2 z_2^2 + (z_3 - v z_1)^2}}, \\ \frac{(z_2 + z_3 z_1 + v z_2^2 - v z_1^2) v z_2}{\sqrt{-v^2 z_2^2 + (z_3 - v z_1)^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^T \neq 0, \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_2} \neq 0$$

olduğundan  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrileri için eş zamanlı olarak geodezik değildir. Diğer yünden

$$\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^T \rangle_L = \frac{\begin{pmatrix} -z_1^3 + 2z_1^2 v z_3 + z_2^2 z_1 + v z_2' z_1 - v^2 z_2' z_3 \\ -z_1 v^2 z_3^2 - v z_2 z_1' + v^2 z_2^2 z_1 + v^2 z_2 z_3' \end{pmatrix}}{\sqrt{(z_1 - v z_3)^2 - v^2 z_2^2}} \quad (5.142)$$

$$\langle \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_2} \rangle_L = \frac{\begin{pmatrix} v z_2 z_3' - v^2 z_2 z_1' + v^2 z_2^2 z_3 + z_2^2 z_3 - z_3^3 \\ + 2z_3^2 v z_1 - z_3 v^2 z_1^2 - v z_2' z_3 + v^2 z_2' z_1 \end{pmatrix}}{\sqrt{-v^2 z_2^2 + (z_3 - v z_1)^2}} \quad (5.143)$$

biçiminde elde edilir. (6.247) ve (5.143) denklemlerinden  $z_1 = z_3 = 0$  ve  $z_2 \neq 0$  ise

$$\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^T \rangle_L = 0, \quad \langle \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_2} \rangle_L = 0$$

dır. Böylece  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametresi için aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_3 = 0$  ve  $z_2 \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 5.19:** İkinci durum ile  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}$ ,  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:** İkinci durum ile  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}$ ,  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^T = 0, \quad \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_2} = 0$$

olduğundan  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri aynı anda  $v$  parametre eğrileri geodeziktir. Ayrıca

$$\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^T \rangle_L = 0, \quad \langle \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_2} \rangle_L = 0$$

olduğundan  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 5.20:**  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}$ ,  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = 0$  olmasıdır.

**İspat:** İkinci durum ile  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}, TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $z_2 = 0$  için

$$\frac{T}{M_2}F = z_1 = 0, \frac{T}{M_2}f = \frac{z_1 z_2}{\sqrt{(z_1 - vz_3)^2 - v^2 z_2^2}} = 0 \quad (5.144)$$

ve

$$\frac{M_2}{T}F = -z_1 = 0, \frac{M_2}{T}f = \frac{-z_2 z_3}{\sqrt{(vz_3 - z_1)^2 - v^2 z_2^2}} = 0 \quad (5.145)$$

Böylece (5.144) ve (5.145) kullanılarak  $TM_2$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgileri olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = 0$  olmasıdır.

**Durum III:**  $\langle T, T \rangle_L = 1, \langle M_1, M_1 \rangle_L = 1, \langle M_2, M_2 \rangle_L = -1$ .

**Tanım 5.6:** Minkowski 3-uzayında Lorentz hibrit çatısına göre üçüncü durum ile timelike yüzey üzerinde spacelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \zeta_{M_2}^T(\sigma, v) = T(\sigma) + vM_2(\sigma) \\ \zeta_T^{M_2}(\sigma, v) = M_2(\sigma) + vT(\sigma) \end{cases} \quad (5.146)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey üçüncü durum için  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 5.21:** Üçüncü durum ile  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak yüzeyleri olsun.  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin eş zamanlı olarak

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = 0, z_1 \neq 0$  veya  $z_3 \neq 0$  olmasıdır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_3 = 0$  ve  $z_2 \neq 0$  olmasıdır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda hibrit çatısına göre (3.20) kullanılarak (5.146) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = -vz_2T(\sigma) + (z_1 - vz_3)M_1(\sigma) - z_2M_2(\sigma) \\ \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v}(\sigma, v) = M_2(\sigma) \end{cases} \quad (5.147)$$

elde edilir. Denklem (5.146) ile verilen  $\zeta_{M_2}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı, (5.147) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{M_2}^T &= \frac{\frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{(z_1 - vz_3)T(\sigma) + vz_2M_1(\sigma)}{\sqrt{v^2 z_2^2 + (z_1 - vz_3)^2}} \end{aligned} \quad (5.148)$$

$\zeta_{M_2}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları, (5.148) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{M_2}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (z_1 - vz_3)^2 + z_2^2(v^2 - 1) \quad (5.149)$$

$$F_{M_2}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v} \right\rangle_L = z_2 \quad (5.150)$$

$$G_{M_2}^T = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v} \right\rangle_L = -1 \quad (5.151)$$

(5.147) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= z_1' M_1(\sigma) + z_1 M_1'(\sigma) - z_2' M_2(\sigma) - z_2 M_2'(\sigma) \\ &\quad - v(z_2' T(\sigma) + z_2 T'(\sigma) + z_3' M_1(\sigma) + z_3 M_1'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.152)$$

elde edilir. (5.147) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -z_2 T(\sigma) - z_3 M_1(\sigma) \quad (5.153)$$

elde edilir. (5.147) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.154)$$

elde edilir.

$\zeta_{M_2}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.148), (5.152), (5.153) ve (5.154) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_{M_2}^T = - \frac{\left( z_1^3 - 2z_1^2 vz_3 - z_2^2 z_1 + vz_2^2 z_1 - v^2 z_2' z_3 \right.}{\sqrt{v^2 z_2^2 + (z_1 - vz_3)^2}} \quad (5.155)$$

$$f_{M_2}^T = - \frac{z_1 z_2}{\sqrt{v^2 z_2^2 + (z_1 - vz_3)^2}} \quad (5.156)$$

$$g_{M_2}^T = 0 \quad (5.157)$$

(5.149), (5.150), (5.151), (5.155), (5.156) ve (5.157) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\zeta_{M_2}^T$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_{M_2}^T &= \frac{z_1^2 z_2^2}{(v^2 z_2^2 + (z_1 - vz_3)^2)^2} \\ H_{M_2}^T &= \frac{(z_1^3 - 2z_1^2 vz_3 + z_2^2 z_1 + vz_2' z_1 - v^2 z_2' z_3 + z_1 v^2 z_3^2 + vz_2 z_1' - v^2 z_2^2 z_1 - v^2 z_2 z_3')}{2(v^2 z_2^2 + (z_1 - vz_3)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (5.158)$$

Lorentz hibrit çatısına göre,  $\zeta_T^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin (5.147) denkleminin ikincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma}(\sigma, v) = -z_2 T(\sigma) - v z_2 M_2(\sigma) + (v z_1 - z_3) M_1(\sigma) \\ \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v}(\sigma, v) = T(\sigma) \end{cases} \quad (5.159)$$

elde edilir. Denklem (5.159) yardımıyla  $\zeta_T^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_T^{M_2} &= \frac{\frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{-v z_2 M_1(\sigma) + (v z_1 - z_3) M_2(\sigma)}{\sqrt{v^2 z_2^2 - (v z_1 - z_3)^2}} \end{aligned} \quad (5.160)$$

Lorentz hibrit çatısına göre  $\zeta_T^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (5.160) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_T^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 - v^2) z_2^2 + (v z_1 - z_3)^2 \quad (5.161)$$

$$F_T^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v} \right\rangle_L = -z_2 \quad (5.162)$$

$$G_T^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (5.163)$$

(5.159) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= -z_2' T(\sigma) - z_2 T'(\sigma) - z_3' M_1(\sigma) - z_3 M_1'(\sigma) \\ &\quad + v(z_1' M_1(\sigma) + z_1 M_1'(\sigma) - z_2' M_2(\sigma) - z_2 M_2'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.164)$$

elde edilir. (5.159) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_T^{M_2})}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = z_1 M_1(\sigma) - z_2 M_2(\sigma) \quad (5.165)$$

elde edilir. (5.159) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.166)$$

elde edilir.

$\zeta_T^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.160), (5.164), (5.165) ve (5.166) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_T^{M_2} = \frac{\begin{pmatrix} -vz_2z'_3 + v^2z_2z'_1 + v^2z_2^2z_3 - z_2^2z_3 - z_3^3 \\ + 2z_3^2vz_1 - z_3v^2z_1^2 + vz_2'z_3 - v^2z_2'z_1 \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2z_2^2 - (vz_1 - z_3)^2}} \quad (5.167)$$

$$f_T^{M_2} = \frac{z_2z_3}{\sqrt{v^2z_2^2 - (z_1 - vz_3)^2}} \quad (5.168)$$

$$g_T^{M_2} = 0 \quad (5.169)$$

Lorentz hibrit çatısına göre,  $\zeta_T^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.161), (5.162), (5.163), (5.167), (5.168) ve (5.169) denklemleri yardımıyla (3.17) denkleminde yerine yazılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{cases} K_T^{M_2} = \frac{z_2^2z_3^2}{(v^2z_2^2 - (z_3 - vz_1)^2)^2} \\ H_T^{M_2} = \frac{-(-vz_2z'_3 + v^2z_2z'_1 + v^2z_2^2z_3 - z_2^2z_3 - z_3^3 + 2z_3^2vz_1 - z_3v^2z_1^2 + vz_2'z_3 - v^2z_2'z_1)}{2(v^2z_2^2 - (z_3 - vz_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (5.170)$$

Sonuç olarak (5.158) ve (5.170) denklemleri yardımıyla teoremden ifade edilen şartlar altında  $TM_2$  ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 5.22:**  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}$ ,  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_3 = 0$  ve  $z_2 \neq 0$ .

**İspat:** (5.148), (5.152), (5.160) ve (5.164) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^T &= \begin{pmatrix} -\frac{(-z_1z_3 - z'_2 + vz_3^2 + vz_2^2)vz_2}{\sqrt{v^2z_2^2 + (z_1 - vz_3)^2}}, \\ \frac{(-z_1z_3 - z'_2 + vz_3^2 + vz_2^2)(z_1 - vz_3)}{\sqrt{v^2z_2^2 + (z_1 - vz_3)^2}}, \\ -\frac{vz_2^3 - v^2z_2z'_2 - z'_1z_1 + z'_1vz_3 - z_2z_3z_1 + z_2z_3^2v + vz_3'z_1 - v^2z_3'z_3}{\sqrt{v^2z_2^2 + (z_1 - vz_3)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_2} &= \begin{pmatrix} \frac{vz_2^3 - v^2z_2z'_2 + z_2z_1z_3 - z_2z_1^2v + z_3'z_3 - z_3'vz_1 - vz_1'z_3 + v^2z_1'z_1}{\sqrt{v^2z_2^2 - (vz_1 - z_3)^2}}, \\ \frac{(-z_2' + z_3z_1 + vz_2^2 - vz_1^2)(z_3 - vz_1)}{\sqrt{v^2z_2^2 - (vz_1 - z_3)^2}}, \\ \frac{(-z_2' + z_3z_1 + vz_2^2 - vz_1^2)vz_2}{\sqrt{v^2z_2^2 - (vz_1 - z_3)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^T &\neq 0, \quad \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_2} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $TM_2$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak geodezik değillerdir. Diğer yönden

$$\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^T \rangle_L = \frac{\begin{pmatrix} z_1^3 - 2z_1^2 v z_3 - z_2^2 z_1 + v z_2 z_1 - v^2 z_2' z_3 + \\ z_1 v^2 z_3^2 - v z_2 z_1' + v^2 z_2^2 z_1 + v^2 z_2 z_3' \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 z_2^2 + (z_1 - v z_3)^2}} \quad (5.171)$$

$$\langle \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_2} \rangle_L = \frac{\begin{pmatrix} -v z_2 z_3' + v^2 z_2 z_1' + v^2 z_2^2 z_3 - z_2^2 z_3 - z_3^3 + \\ 2z_3^2 v z_1 - z_3 v^2 z_1' + v z_2' z_3 - v^2 z_2' z_1 \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 z_2^2 + (v z_1 - z_3)^2}} \quad (5.172)$$

biçiminde elde edilir. (5.171) ve (5.172) denklemlerinden  $z_1 = z_3 = 0$  ve  $z_2 \neq 0$  ise

$$\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^T \rangle_L = 0, \langle \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_2} \rangle_L = 0$$

dır. Böylece  $TM_2$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_3 = 0$  ve  $z_2 \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 5.23:**  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}$ ,  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $TM_2$  ortak regle yüzeyleri  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:** Üçüncü durum ile  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}$ ,  $TM_2$  Lorentz ortak regle yüzeyleri olsun.

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^T = 0, \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^{M_2} = 0$$

olduğundan  $TM_2$  ortak regle yüzeyleri aynı anda  $v$  parametre eğrileri geodeziktir.

Ayrıca

$$\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^T \rangle_L = 0, \langle \frac{\partial^2(\zeta_T^{M_2})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^{M_2} \rangle_L = 0$$

olduğundan  $TM_2$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 5.24:**  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}$ ,  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $TM_2$  ortak regle yüzeylerin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrilerinin aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = 0$  olmasıdır.

**İspat:** Üçüncü durum ile  $\zeta_{M_2}^T$  ve  $\zeta_T^{M_2}$ ,  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $z_2 = 0$  için

$$F_{M_2}^T = z_2 = 0, f_{M_2}^T = \frac{-z_1 z_2}{\sqrt{v^2 z_1^2 - (z_2 + v z_3)^2}} = 0 \quad (5.173)$$

ve

$$F_T^{M_2} = -z_2 = 0, f_T^{M_2} = \frac{z_2 z_3}{\sqrt{v^2 z_2^2 - (z_1 - v z_3)^2}} = 0 \quad (5.174)$$

Böylece (5.173) ve (5.174) kullanılarak  $TM_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak eğrilik çizgileri olması için gerek ve yeter şart  $z_2 = 0$  olmalıdır.

### 5.3. $M_1 M_2$ Lorentz Hibrit Ortak Regle Yüzeyler

**Durum I:**  $\langle T, T \rangle_L = -1, \langle M_1, M_1 \rangle_L = 1, \langle M_2, M_2 \rangle_L = 1$

**Tanım 5.7:** Minkowski 3-uzayında Lorentz hibrit çatısına göre birinci durum ile timelike bir yüzey üzerinde timelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \zeta_{M_2}^{M_1}(\sigma, v) = M_1(\sigma) + v M_2(\sigma) \\ \zeta_{M_1}^{M_2}(\sigma, v) = M_2(\sigma) + v M_1(\sigma) \end{cases} \quad (5.175)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 5.25:** Birinci durum ile  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak yüzeyleri olsun.  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin aynı anda

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_3 = 0, z_1 \neq 0$  veya  $z_2 \neq 0$  olmasıdır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_2 = 0$  ve  $z_3 \neq 0$  olmasıdır.

**İspat:.** Minkowski 3-uzayda hibrit çatısına göre (3.18) kullanılarak (5.175) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma}(\sigma, v) = (z_1 + v z_2)T(\sigma) - v z_3 M_1(\sigma) + z_3 M_2(\sigma) \\ \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v}(\sigma, v) = M_2(\sigma) \end{cases} \quad (5.176)$$

elde edilir. (5.176) ile verilen  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı (5.176) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} &= \frac{\frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma}(\sigma, v) \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v}(\sigma, v)}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{-(z_1 + v z_2)M_1(\sigma) + v z_3 T(\sigma)}{\sqrt{(z_1 + v z_2)^2 - (v^2 z_3^2)}} \end{aligned} \quad (5.177)$$

$(v^2 z_3^2)^2 - (z_2 + v z_3)^2 > 0$  olsun.  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (5.177) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{M_2}^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 + v^2)z_3^2 - (z_1 + v z_2)^2 \quad (5.178)$$

$$F_{M_2}^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v} \right\rangle_L = z_3 \quad (5.179)$$

$$G_{M_2}^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (5.180)$$

(5.176) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= z_1' T(\sigma) + z_1 T'(\sigma) + z_3' M_2(\sigma) + z_3 M_2'(\sigma) \\ &\quad + v(z_2' T(\sigma) + z_2 T'(\sigma) - z_3' M_1(\sigma) - z_3 M_1'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.181)$$

elde edilir. (5.176) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = z_2 T(\sigma) - z_3 M_1(\sigma) \quad (5.182)$$

elde edilir. (5.176) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.183)$$

elde edilir.  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.177), (5.181), (5.182) ve (5.183) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_{M_2}^{M_1} = \frac{\left( v z_3 z_1' + v^2 z_3 z_2 - v^2 z_3^2 z_1 + z_1^3 + 2 z_1^2 v z_2 - z_3^2 z_1 + z_1 v^2 z_2^2 - v z_3' z_1 - v^2 z_3' z_2 \right)}{\sqrt{(-v^2 z_3^2) + (z_1 + v z_2)^2}} \quad (5.184)$$

$$f_{M_2}^{M_1} = \frac{z_1 z_3}{\sqrt{(-v^2 z_3^2) + (z_1 + v z_2)^2}} \quad (5.185)$$

$$g_{M_2}^{M_1} = 0 \quad (5.186)$$

(5.178), (5.179), (5.180), (5.184), (5.178) ve (5.186) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_{M_2}^{M_1} &= \frac{z_1^2 z_3^2}{((-v^2 z_3^2) + (z_1 + v z_2)^2)^2} \\ H_{M_2}^{M_1} &= \frac{v z_3 z_1' + v^2 z_3 z_2' - v^2 z_3^2 z_1 + z_1^3 + 2 z_1^2 v z_2 + z_3^2 z_1 + z_1 v^2 z_2^2 - v z_3' z_1 - v^2 z_3' z_2}{2((-v^2 z_3^2) + (z_1 + v z_2)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (5.187)$$

Lorentz hibrit çatısına göre,  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin (5.175) denkleminin ikincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma}(\sigma, v) = (z_2 + vz_1)T(\sigma) - z_3M_1(\sigma) + vz_3M_2(\sigma) \\ \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v}(\sigma, v) = M_1(\sigma) \end{cases} \quad (5.188)$$

elde edilir. Denklem (5.175) yardımıyla  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı (5.188) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} &= \frac{\frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v}}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v} \right\rangle}} \\ &= \frac{vz_3T(\sigma) + (z_2 + vz_1)M_2(\sigma)}{\sqrt{(z_2 + vz_1)^2 - v^2z_3^2}} \end{aligned} \quad (5.189)$$

Ayrıca  $v^2z_1^2 - (z_2 + vz_3)^2 > 0$  dır. Lorentz hibrit çatısına göre  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (5.189) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde verilir:

$$E_{M_1}^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 + v^2)z_3^2 - (z_2 + vz_1)^2 \quad (5.190)$$

$$F_{M_1}^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v} \right\rangle_L = -z_3 \quad (5.191)$$

$$G_{M_1}^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (5.192)$$

(5.188) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= z_2'T(\sigma) + z_2T'(\sigma) - z_3'M_1(\sigma) - z_3M_1'(\sigma) \\ &\quad + v(z_1'T(\sigma) + z_1T'(\sigma) + z_3'M_2(\sigma) + z_3M_2'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.193)$$

elde edilir. (5.188) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = z_1T(\sigma) + z_3M_2(\sigma) \quad (5.194)$$

elde edilir. (5.188) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.195)$$

elde edilir.  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit çatısına regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.189), (5.193), (5.194) ve (5.195) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$${}_{M_1}^{M_2}e = \frac{\left( \begin{aligned} &vz_3z'_2 + v^2z_3z'_1 + v^2z_3^2z_2 + z_2^3 + 2z_2^2vz_1 \\ &+ z_3^2z_2 - v^2z_2z_1^2 + vz_3'z_2 + v^2z_3'z_1 \end{aligned} \right)}{\sqrt{-v^2z_3^2 + (z_2 + vz_1)^2}} \quad (5.196)$$

$${}_{M_1}^{M_2}f = \frac{z_2z_3}{\sqrt{-v^2z_3^2 + (z_2 + vz_1)^2}} \quad (5.197)$$

$${}_{M_1}^{M_2}g = 0 \quad (5.198)$$

(5.190), (5.191), (5.192), (5.196), (5.197) ve (5.198) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_{M_1}^{M_2} &= \frac{-z_1^2z_2^2}{(-v^2z_3^2 + (z_2 + vz_1)^2)^2} \\ H_{M_1}^{M_2} &= -\frac{(vz_3z'_2 + v^2z_3z'_1 + v^2z_3^2z_2 - z_2^3 - 2z_2^2vz_1 - z_3^2z_2 - v^2z_2z_1^2 - vz_3'z_2 - v^2z_3'z_1) + 2z_2z_3}{2(-v^2z_3^2 + (z_2 + vz_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (5.199)$$

(5.187) ve (5.199) denklemleri yardımıyla, teoremden ifade edilen şartlar altında  $M_1M_2$  ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 5.26:**  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  ve  $\zeta_{M_2}^{M_1}$ ,  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_2 = 0$  ve  $z_3 \neq 0$ .

**İspat:** (5.177), (5.181), (5.189) ve (5.193) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} &= \left( \begin{aligned} &-\frac{(z_1z_2 + z'_3 - vz_3^2 + vz_2^2)(z_1 + vz_2)}{\sqrt{(z_1 + vz_2)^2 - (v^2z_3^2)}}, \\ &\frac{(z_1z_2 + z'_3 - vz_3^2 + vz_2^2)vz_3}{\sqrt{(z_1 + vz_2)^2 - (v^2z_3^2)}}, \\ &\frac{-(-vz_3^3 - v^2z_3z'_3 + z'_1z_1 + z'_1vz_2 + z_2z_3z_1 + z_2^2z_3v + vz'_2z_1)}{\sqrt{(z_1 + vz_2)^2 - (v^2z_3^2)}} \end{aligned} \right) \\ \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} &= \left( \begin{aligned} &\frac{(-z_2z_1 + z'_3 + vz_3^2 - vz_1^2)(z_2 + vz_1)}{\sqrt{(z_2 + vz_1)^2 - v^2z_3^2}}, \\ &\frac{-(z'_2z_2 + z'_2vz_1 - z_3z_1z_2 - z_3z_1^2v + vz'_1z_2 + v^2z'_1z_1 + vz_3^3 - v^2z_3z'_3)}{\sqrt{(z_2 + vz_1)^2 - v^2z_3^2}}, \\ &\frac{(-z_2z_1 + z'_3 + vz_3^2 - vz_1^2)vz_3}{\sqrt{(z_2 + vz_1)^2 - v^2z_3^2}} \end{aligned} \right) \\ \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} &\neq 0, \quad \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $M_1M_2$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrileri aynı anda geodezik değillerdir. Diğer yönden

$$\left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma^2}, {}_{M_2}^{M_1}\mathcal{N} \right\rangle_L = - \frac{\begin{pmatrix} vz_3z'_1 + v^2z_3z'_2 - v^2z_3^2z_1 + z_1^3 \\ + 2z_1^2vz_2 - z_3^2z_1 + z_1v^2z_2^2 - vz'_3z_1 - v^2z'_3z_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(z_1+ vz_2)^2 - (v^2z_3^2)}} \quad (5.200)$$

$$\left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma^2}, {}_{M_1}^{M_2}\mathcal{N} \right\rangle_L = \frac{\begin{pmatrix} vz_3z'_2 + v^2z_3z'_1 + v^2z_3^2z_2 - z_2^3 \\ - 2z_2^2vz_1 + z_3^2z_2 - z_2v^2z_1^2 - vz'_3z_2 - v^2z'_3z_1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(z_2+ vz_1)^2 - v^2z_3^2}} \quad (5.201)$$

biçiminde elde edilir. (5.200) ve (5.201) denklemlerinden eğer  $z_1 = z_2 = 0$  ve  $z_3 \neq 0$  ise

$$\left\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} \right\rangle_L = 0, \left\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} \right\rangle_L = 0$$

dır. Böylece  $M_1M_2$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_2 = 0$  ve  $z_3 \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 5.27:**  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:** Birinci durum ile  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun. Burada

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} = 0, \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} = 0$$

olduğundan  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak geodeziktir. Ayrıca

$$\left\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} \right\rangle_L = 0, \left\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} \right\rangle_L = 0$$

olduğundan  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri  $v$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak asimptotiktir.

**Teorem 5.28:** Birinci durum ile  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $z_3 = 0$  olmasıdır.

**İspat:**  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1M_2$  Lorentz ortak regle yüzeyler olsun.  $z_3 = 0$  için

$$F_{M_2}^{M_1} = z_3 = 0, f_{M_2}^{M_1} = - \frac{z_1z_3}{\sqrt{(-v^2z_3^2) + (z_1 + vz_2)^2}} = 0 \quad (5.202)$$

ve

$$F_{M_1}^{M_2} = -z_3 = 0, f_{M_1}^{M_2} = -\frac{z_2 z_3}{\sqrt{-v^2 z_3^2 + (z_2 + v z_1)^2}} = 0 \quad (5.203)$$

Böylece (5.202) ve (5.203) kullanılarak  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $z_3 = 0$  olmalıdır.

$$\textbf{Durum II: } \langle T, T \rangle_L = 1, \langle M_1, M_1 \rangle_L = -1, \langle M_2, M_2 \rangle_L = 1$$

**Tanım 5.8:** Minkowski 3-uzayında Lorentz hibrit çatısına göre ikinci durum ile null olmayan bir yüzey üzerinde timelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \zeta_{M_2}^{M_1}(\sigma, v) = M_1(\sigma) + v M_2(\sigma) \\ \zeta_{M_1}^{M_2}(\sigma, v) = M_2(\sigma) + v M_1(\sigma) \end{cases} \quad (5.204)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 5.29:** İkinci durum ile  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak yüzeyleri olsun.  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak yüzeylerinin eş zamanlı olarak

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_3 = 0, z_1 \neq 0$  ve ya  $z_2 \neq 0$  olmasıdır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_2 = 0$  ve  $z_3 \neq 0$  olmasıdır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda hibrit çatısına göre (3.19) kullanılarak (5.204) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma}(\sigma, v) = -(z_1 + v z_2)T(\sigma) + v z_3 M_1(\sigma) + z_3 M_2(\sigma) \\ \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v}(\sigma, v) = M_2(\sigma) \end{cases} \quad (5.205)$$

elde edilir. Denklem (5.204) ile verilen  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı (5.205) denklemleri kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} &= \frac{\frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})(\sigma, v)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{v z_3 T(\sigma) - (z_1 + v z_2) M_1(\sigma)}{\sqrt{v^2 z_3^2 - (z_1 + v z_2)^2}} \end{aligned} \quad (5.206)$$

Ayrıca  $v^2 z_1^2 - (z_2 + v z_3)^2 > 0$  dır. Bu durumda,  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (5.206) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{M_2}^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 - v^2)z_3^2 + (z_1 + v z_2)^2 \quad (5.207)$$

$$F_{M_2}^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v} \right\rangle_L = z_3 \quad (5.208)$$

$$G_{M_2}^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (5.209)$$

(5.206) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= -z_1' T(\sigma) - z_1 T'(\sigma) + z_3' M_2(\sigma) + z_3 M_2'(\sigma) \\ &\quad + v(-z_2' T(\sigma) - z_2 T'(\sigma) + z_3' M_1(\sigma) + z_3 M_1'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.210)$$

elde edilir. (5.206) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -z_2 T(\sigma) + z_3 M_1(\sigma) \quad (5.211)$$

elde edilir. (5.206) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.212)$$

elde edilir.  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.206), (5.210), (5.211) ve (5.212) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_{M_2}^{M_1} = - \frac{\begin{pmatrix} v z_3 z_1' + v^2 z_3 z_2' + v^2 z_3^2 z_1 - z_1^3 - 2 z_1^2 v z_2 \\ - z_3^2 z_1 - v^2 z_2^2 z_1 - v z_3' z_1 - v^2 z_3' z_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 z_3^2 - (z_1 + v z_2)^2}} \quad (5.213)$$

$$f_{M_2}^{M_1} = \frac{z_1 z_3}{\sqrt{v^2 z_3^2 - (z_1 + v z_2)^2}} \quad (5.214)$$

$$g_{M_2}^{M_1} = 0 \quad (5.215)$$

(5.207), (5.208), (5.209), (5.213), (5.214) ve (5.215) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_{M_2}^{M_1} &= \frac{z_1^2 z_3^2}{(v^2 z_3^2 - (z_1 + v z_2)^2)^2} \\ H_{M_2}^{M_1} &= \frac{-(v z_3 z_1' + v^2 z_3 z_2' + v^2 z_3^2 z_1 - z_1^3 - 2 z_1^2 v z_2 + z_3^2 z_1 - v^2 z_2^2 z_1 - v z_3' z_1 - v^2 z_3' z_2)}{2(v^2 z_3^2 - (z_1 + v z_2)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (5.216)$$

Lorentz hibrit çatısına göre,  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin (5.204) denkleminin ikinci satırı için  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma}(\sigma, v) = -(z_2 + vz_1)T(\sigma) + z_3M_1(\sigma) + vz_3M_2(\sigma) \\ \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v}(\sigma, v) = M_1(\sigma) \end{cases} \quad (5.217)$$

elde edilir. (5.204) yardımıyla,  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı (5.217) kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} &= \frac{\frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma}}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v} \right\rangle}} \\ &= -\frac{vz_3T(\sigma) + (z_2 + vz_1)M_2(\sigma)}{\sqrt{v^2z_3^2 + (z_2 + vz_1)^2}} \end{aligned} \quad (5.218)$$

Ayrıca  $v^2z_1^2 - (z_2 + vz_3)^2 > 0$  dır. Lorentz hibrit çatısına göre  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (5.218) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{M_1}^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (v^2 - 1)z_3^2 + (z_2 + vz_1)^2 \quad (5.219)$$

$$F_{M_1}^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v} \right\rangle_L = -z_3 \quad (5.220)$$

$$G_{M_1}^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v} \right\rangle_L = -1 \quad (5.221)$$

(5.217) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= z_2'T(\sigma) + z_2T'(\sigma) + z_3'M_1(\sigma) + z_3M_1'(\sigma) \\ &\quad + v(-z_1'T(\sigma) - z_1T'(\sigma) + z_3'M_2(\sigma) + z_3M_2'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.222)$$

elde edilir. (5.217) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -z_1T(\sigma) + z_3M_2(\sigma) \quad (5.223)$$

elde edilir. (5.217) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.224)$$

elde edilir.  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.218), (5.222), (5.223) ve (5.224) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\frac{M_2}{M_1}e = \frac{\begin{pmatrix} vz_3z_2' + v^2z_3z_1' + v^2z_2z_3^2 - z_2^3 - 2z_2^2vz_1 \\ -z_3^2z_2 - z_2v^2z_1^2 - vz_3'z_2 + v^2z_3'z_1 \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2z_3^2 + (z_2 + vz_1)^2}} \quad (5.225)$$

$$\frac{M_2}{M_1}f = -\frac{z_2z_3}{\sqrt{v^2z_3^2 + (z_2 + vz_1)^2}} \quad (5.226)$$

$$\frac{M_2}{M_1}g = 0 \quad (5.227)$$

(5.219), (5.219), (5.219), (5.219), (5.219) ve (5.226) denklemleri (3.17) denklemlerinde yerine yazıldığında  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_{M_1}^{M_2} = \frac{-z_3^2z_2^2}{(v^2z_3^2 + (z_2 + vz_1)^2)^2} \\ H_{M_1}^{M_2} = \frac{vz_3z_2' + v^2z_3z_1' + v^2z_2z_3^2 + z_2^3 + 2z_2^2vz_1 + z_3^2z_2 + z_2v^2z_1^2 - vz_3'z_2 - v^2z_3'z_1}{2(v^2z_3^2 + (z_2 + vz_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (5.228)$$

(5.216) ve (5.228) denklemleri yardımıyla teoremden ifade edilen şartlar altında  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri eş zamanlı olarak açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 5.30:**  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_3 = 0$  ve  $z_2 \neq 0$ .

**İspat:** (5.206), (5.210), (5.218) ve (5.222) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma^2} \times_L \frac{M_1}{M_2} \mathcal{N} &= \begin{pmatrix} -\frac{(z_1z_2 - z_3' + vz_2^2 - vz_3^2)(z_1 + vz_2)}{\sqrt{v^2z_3^2 - (z_1 + vz_2)^2}}, \\ \frac{(z_1z_2 - z_3' + vz_2^2 - vz_3^2)vz_3}{\sqrt{v^2z_3^2 - (z_1 + vz_2)^2}}, \\ \frac{-vz_3^3 - v^2z_3z_3' + z_1'z_1 + z_1'vz_2 + z_2z_3z_1 + z_2^2z_3v + vz_2'z_1 + v^2z_2'z_2}{\sqrt{v^2z_3^2 - (z_1 + vz_2)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial \sigma^2} \times_L \frac{M_2}{M_1} \mathcal{N} &= \begin{pmatrix} -\frac{(z_2z_1 + z_3' + vz_3^2 + vz_1^2)(z_2 + vz_1)}{\sqrt{v^2z_3^2 + (z_2 + vz_1)^2}}, \\ \frac{z_2'z_2 + z_2'vz_1 + z_3z_1z_2 + z_3z_1^2v + vz_1'z_2 + v^2z_1'z_1 + vz_3^3 + v^2z_3z_3'}{\sqrt{v^2z_3^2 + (z_2 + vz_1)^2}}, \\ \frac{(z_2z_1 + z_3' + vz_3^2 + vz_1^2)vz_3}{\sqrt{v^2z_3^2 + (z_2 + vz_1)^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma^2} \times_{LM_2} \mathcal{N} \neq 0, \quad \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial \sigma^2} \times_{LM_1} \mathcal{N} \neq 0$$

olduğundan  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak geodezik değillerdir.

Diğer yönden

$$\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} \rangle_L = \frac{\begin{pmatrix} -vz_3z'_1 - v^2z_3z'_2 - v^2z_3^2z_1 + z_1^3 + 2z_1^2vz_2 \\ + z_3^2z_1 + z_1v^2z_2^2 + vz'_3z_1 + v^2z'_3z_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2z_3^2 - (z_1 + vz_2)^2}} \quad (5.229)$$

$$\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} \rangle_L = \frac{\begin{pmatrix} vz_3z'_2 + v^2z_3z'_1 + v^2z_3^2z_2 + z_2^3 + 2z_2^2vz_1 \\ - z_3^2z_2 + z_2v^2z_1^2 - vz'_3z_2 - v^2z'_3z_1 \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2z_3^2 + (z_2 + vz_1)^2}} \quad (5.230)$$

biçiminde elde edilir. (5.229) ve (5.230) denklemlerinden eğer  $z_1 = z_2 = 0$  ve  $z_3 \neq 0$  ise

$$\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} \rangle_L = 0, \quad \langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} \rangle_L = 0$$

dır. Böylece  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrileri aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_2 = 0$  ve  $z_3 \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 5.31:** İkinci durum ile  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:** İkinci durum ile  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun. Burada

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} = 0, \quad \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} = 0$$

olduğundan  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} \rangle_L = 0, \quad \langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma^2}, \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} \rangle_L = 0$$

olduğundan  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 5.32:** İkinci durum ile  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $z_3 = 0$  olmasıdır.

**İspat:** İkinci durum ile  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  ortak regle yüzeyler olsun.  $z_3 = 0$  için

$$F_{M_2}^{M_1} = z_3 = 0, f_{M_2}^{M_1} = \frac{z_1 z_3}{\sqrt{v^2 z_3^2 - (z_1 + v z_2)^2}} \quad (5.231)$$

ve

$$F_{M_1}^{M_2} = -z_3 = 0, f_{M_1}^{M_2} = -\frac{z_2 z_3}{\sqrt{v^2 z_3^2 + (z_2 + v z_1)^2}} \quad (5.232)$$

(5.231) ve (5.232) kullanılarak  $M_1 M_2$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $z_3 = 0$  olmalıdır.

**Durum III:**  $\langle T, T \rangle_L = 1, \langle M_1, M_1 \rangle_L = 1, \langle M_2, M_2 \rangle_L = -1$

**Tanım 5.9:** Minkowski 3-uzayında Lorentz hibrit çatısına göre üçüncü durum ile null olmayan bir yüzey üzerinde timelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \zeta_{M_2}^{M_1}(\sigma, v) = M_1(\sigma) + v M_2(\sigma) \\ \zeta_{M_1}^{M_2}(\sigma, v) = M_2(\sigma) + v M_1(\sigma) \end{cases} \quad (5.233)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 5.33:** Üçüncü durum ile  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $M_2 M_1$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin eş zamanlı olarak

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_3 = 0, z_1 \neq 0$  ve ya  $z_2 \neq 0$  olmasıdır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_2 = 0$  ve  $z_3 \neq 0$  olmasıdır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda hibrit çatısına göre (3.20) kullanılarak (5.233) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma}(\sigma, v) = -(z_1 + v z_2)T(\sigma) - v z_3 M_1(\sigma) - z_3 M_2(\sigma) \\ \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v}(\sigma, v) = M_2(\sigma) \end{cases} \quad (5.234)$$

elde edilir. Denklem (5.233) ile verilen  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı, (5.234) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} &= \frac{\frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma} \times \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})(\sigma, v)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{-v z_3 T(\sigma) + (z_1 + v z_2) M_1(\sigma)}{\sqrt{(z_1 + v z_2)^2 + v^2 z_3^2}} \end{aligned} \quad (5.235)$$

Ayrıca  $v^2 z_1^2 - (z_2 + v z_3)^2 > 0$  dir.  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (5.235) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{M_2}^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (z_1 + v z_2)^2 + (1 - v^2) z_3^2 \quad (5.236)$$

$$F_{M_2}^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v} \right\rangle_L = z_3 \quad (5.237)$$

$$G_{M_2}^{M_1} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v} \right\rangle_L = -1 \quad (5.238)$$

(5.234) denklemini birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= -z_1' T(\sigma) - z_1 T'(\sigma) - z_3' M_2(\sigma) - z_3 M_2'(\sigma) \\ &\quad - v(z_2' T(\sigma) + z_2 T'(\sigma) + z_3' M_1(\sigma) + z_3 M_1'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.239)$$

elde edilir. (5.234) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -z_2 T(\sigma) - z_3 M_1(\sigma) \quad (5.240)$$

elde edilir. (5.234) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.241)$$

elde edilir.  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (5.235), (5.239), (5.240) ve (5.241) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_{M_2}^{M_1} = - \frac{\left( v z_3 z_1' + v^2 z_3 z_2' + v^2 z_3^2 z_1 + z_1^3 + 2 z_1^2 v z_2 \right) - z_3^2 z_1 + z_1 v^2 z_2^2 + v z_3' z_1 + v^2 z_3' z_2}{\sqrt{(z_1 + v z_2)^2 + v^2 z_3^2}} \quad (5.242)$$

$$f_{M_2}^{M_1} = - \frac{z_1 z_3}{\sqrt{(z_1 + v z_2)^2 + v^2 z_3^2}} \quad (5.243)$$

$$g_{M_2}^{M_1} = 0 \quad (5.244)$$

(5.236), (5.237), (5.238), (5.242), (5.243) ve (5.244) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{M_1}{M_2} K &= \frac{z_1^2 z_3^2}{((z_1 + v z_2)^2 + v^2 z_3^2)^2} \\ \frac{M_1}{M_2} H &= \frac{-v z_3 z_1' - v^2 z_3 z_2' + v^2 z_3^2 z_1 + z_1^3 + 2 z_1^2 v z_2 - z_3^2 z_1 + z_1 v^2 z_2^2 + v z_3' z_1 + v^2 z_3' z_2 + 2 z_3 (f_{M_2}^{M_1})}{2((z_1 + v z_2)^2 + v^2 z_3^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (5.245)$$

Lorentz hibrit çatısına göre  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyinin (5.233) denkleminin ikinci satırı için  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma}(\sigma, v) = -(z_2 + vz_1)T(\sigma) - z_3M_1(\sigma) - vz_3M_2(\sigma) \\ \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v}(\sigma, v) = M_1(\sigma) \end{cases} \quad (5.246)$$

elde edilir. Denklem (5.233) ile verilen  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin normal vektör alanı, (5.246) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} &= \frac{\frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma}}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma} \right\rangle}} \\ &= \frac{vz_3T(\sigma) + (z_2 + vz_1)M_2(\sigma)}{\sqrt{v^2z_3^2 - (z_2 + vz_1)^2}} \end{aligned} \quad (5.247)$$

Ayrıca  $v^2z_1^2 - (z_2 + vz_3)^2 > 0$  dır. Lorentz hibrit çatısına göre  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları Lorentz hibrit çatısına göre (5.247) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{M_1}^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (z_2 + vz_1)^2 + (-v^2 + 1)z_3^2 \quad (5.248)$$

$$F_{M_1}^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v} \right\rangle_L = -z_3 \quad (5.249)$$

$$G_{M_1}^{M_2} = \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (5.250)$$

(5.246) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= -z_2'T(\sigma) - z_2T'(\sigma) - z_3'M_1(\sigma) - z_3M_1'(\sigma) \\ &\quad + v(-z_1'T(\sigma) - z_1T'(\sigma) - z_3'M_2(\sigma) - z_3M_2'(\sigma)) \end{aligned} \quad (5.251)$$

elde edilir. (5.246) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -z_1T(\sigma) - z_3M_2(\sigma) \quad (5.252)$$

elde edilir. (5.246) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (5.253)$$

elde edilir. Lorentz hibrit çatısına göre  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları, (5.247), (5.251), (5.252) ve (5.253) denklemleri yardımıyla aşağıdaki

biçimde elde edilir:

$$e_{M_1}^{M_2} = \frac{\left( \begin{array}{c} -vz_3z'_2 - v^2z_3z'_1 + v^2z_3^2z_2 + z_2^3 - 2z_2^2vz_1 \\ + z_3^2z_2 + z_2v^2z_1^2 - vz'_3z_2 - v^2z'_3z_1 \end{array} \right)}{\sqrt{v^2z_3^2 - (z_2 + vz_1)^2}} \quad (5.254)$$

$$f_{M_1}^{M_2} = \frac{-z_2z_3}{\sqrt{v^2z_3^2 - (z_2 + vz_1)^2}} \quad (5.255)$$

$$g_{M_1}^{M_2} = 0 \quad (5.256)$$

(5.248), (5.249), (5.250), (5.254), (5.255) ve (5.256) denklemleri (3.17) denklemlerinde yerine yazıldığında  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{M_1}^{M_2} = \frac{z_3^2z_2^2}{(v^2z_3^2 - (z_2 + vz_1)^2)^2} \\ H_{M_1}^{M_2} = \frac{(-vz_3z'_2 - v^2z_3z'_1 + v^2z_3^2z_2 - z_2^3 - 2z_2^2vz_1 - z_3^2z_2 - z_2v^2z_1^2 + vz'_3z_2 - v^2z'_3z_1)}{2(v^2z_3^2 - (z_2 + vz_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right. \quad (5.257)$$

elde edilir. (5.245) ve (5.257) denklemleri yardımıyla, teoremden ifade edilen şartlar altında  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 5.34:** Üçüncü durum ile  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $M_1M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrileri eşzamanlı olarak

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_2 = 0$  ve  $z_3 \neq 0$ .

**İspat:** (5.235), (5.239), (5.247) ve (5.251) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} &= \left( \begin{array}{c} -\frac{(z_1z_2 - z'_3 + vz_2^2 + vz_3^2)(z_1 + vz_2)}{\sqrt{(z_1 + vz_2)^2 + v^2z_3^2}}, \\ -\frac{(z_1z_2 - z'_3 + vz_2^2 + vz_3^2)vz_3}{\sqrt{(z_1 + vz_2)^2 + v^2z_3^2}}, \\ -\frac{(-z'_1z_1 - z'_1vz_2 + z_3z_2z_1 + z_3z_2^2v - vz'_2z_1 - v^2z'_2z_2 + vz_3^3 - v^2z_3z'_3)}{\sqrt{(z_1 + vz_2)^2 + v^2z_3^2}} \end{array} \right) \\ \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} &= \left( \begin{array}{c} \frac{(-z_2z_1 - z'_3 + vz_3^2 - vz_1^2)(z_2 + vz_1)}{\sqrt{v^2z_3^2 - (z_2 + vz_1)^2}}, \\ \frac{z'_2z_2 + z'_2vz_1 - z_3z_1z_2 - z_3z_1^2v + vz'_1z_2 + v^2z'_1z_1 + vz_3^3 - v^2z_3z'_3}{\sqrt{v^2z_3^2 - (z_2 + vz_1)^2}}, \\ \frac{(-z_2z_1 - z'_3 + vz_3^2 - vz_1^2)vz_3}{\sqrt{v^2z_3^2 - (z_2 + vz_1)^2}} \end{array} \right) \\ \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} &\neq 0, \quad \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak geodezik değillerdir. Diğer yönden

$$\left\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} \right\rangle_L = - \frac{\begin{pmatrix} -v z_3 z_1' - v^2 z_3 z_2' + v^2 z_3^2 z_1 + z_1^3 + 2 z_1^2 v z_2 \\ -z_3^2 z_1 + z_1 v^2 z_2^2 + v z_3' z_1 + v^2 z_3' z_2 \end{pmatrix}}{\sqrt{(z_1 + v z_2)^2 + v^2 z_3^2}} \quad (5.258)$$

$$\left\langle \frac{\partial^2(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} \right\rangle_L = - \frac{\begin{pmatrix} -v z_3 z_2 - v^2 z_3 z_1' + v^2 z_3^2 z_2 - z_2^3 - 2 z_2^2 v z_1 \\ -z_3^2 z_2 - z_2 v^2 z_1^2 + v z_3' z_2 + v^2 z_3' z_1 \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 z_3^2 - (z_2 + v z_1)^2}} \quad (5.259)$$

biçiminde elde edilir. (5.258) ve (5.259) denklemlerinden eğer  $z_1 = z_2 = 0$  ve  $z_3 \neq 0$  ise

$$\left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} \right\rangle_L = 0, \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} \right\rangle_L = 0$$

olduğundan  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $z_1 = z_2 = 0$  ve  $z_3 \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 5.35:** Üçüncü durum ile  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$  ortak regle yüzeyleri olsun.  $v$  parametresi için  $M_1 M_2$  ortak regle yüzeyleri aynı anda

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:** Üçüncü durum ile  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.

$$\frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} = 0, \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} = 0$$

olduğundan  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$\left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_2}^{M_1})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_2}^{M_1} \right\rangle_L = 0, \left\langle \frac{\partial(\zeta_{M_1}^{M_2})}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_{M_1}^{M_2} \right\rangle_L = 0$$

olduğundan  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 5.36:** Üçüncü durum ile  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $z_3 = 0$  olmasıdır.

**İspat:** Üçüncü durum ile  $\zeta_{M_2}^{M_1}$  ve  $\zeta_{M_1}^{M_2}$ ,  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $z_3 = 0$  için

$$F_{M_2}^{M_1} = z_3 = 0, f_{M_2}^{M_1} = \frac{z_1 z_3}{\sqrt{(z_1 + v z_2)^2 + v^2 z_3^2}} = 0 \quad (5.260)$$

ve

$$F_{M_1}^{M_2} = -z_3 = 0, f_{M_1}^{M_2} = \frac{-z_2 z_3}{\sqrt{v^2 z_3^2 - (z_2 + v z_1)^2}} = 0 \quad (5.261)$$

Böylece (5.260) ve (5.261) kullanılarak  $M_1 M_2$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $z_3 = 0$  olmalıdır.

## 6. LORENTZ DARBOUX ORTAK REGLE YÜZEYLER

### 6.1. $TY$ Lorentz Darboux Ortak Regle Yüzeyler

Bu bölümde, Minkowski 3-uzayında Darboux çatısı yardımıyla Lorentz Darboux ortak regle yüzeylere ilişkin karakterizasyonlar verilecektir.

Minkowski 3 uzayında  $\alpha = \alpha(\sigma)$  eğrisi boyunca Darboux çatısı  $\{T(\sigma), Y(\sigma), Z(\sigma)\}$  olarak verilsin.

**Durum I:**  $\langle T, T \rangle_L = -1, \langle Y, Y \rangle_L = 1, \langle Z, Z \rangle_L = 1$

**Tanım 6.1:** Minkowski 3-uzayında Lorentz Darboux çatısına göre birinci durum ile null olmayan bir yüzey üzerinde timelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \varsigma_Y^T(\sigma, v) = T(\sigma) + vY(\sigma) \\ \varsigma_T^Y(\sigma, v) = Y(\sigma) + vT(\sigma) \end{cases} \quad (6.1)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 6.1:** Birinci durum ile  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$ ,  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri olsun.  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin eş zamanlı olarak

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_g = 0, k_n \neq 0$  veya  $\tau_g \neq 0$

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$

olmasıdır.

**İspat:** Birinci durum ile Minkowski 3-uzayında Darboux çatısına göre (3.21) kullanılarak sırasıyla (6.1) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = vk_gT + k_gY + (v\tau_g + k_n)Z \\ \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v}(\sigma, v) = Y(\sigma) \end{cases} \quad (6.2)$$

elde edilir. Denklem (6.1) ile verilen  $\varsigma_Y^T$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı, (6.2) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_Y^T &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v} \right\rangle_L \right|^{1/2}} \\ &= \frac{(k_n + v\tau_g)T + vk_gZ}{\sqrt{|(v\tau_g + k_n)^2 - v^2k_g^2|}}\end{aligned}\quad (6.3)$$

$(v\tau_g + k_n)^2 - v^2k_g^2 > 0$  alınsın.  $\langle \mathcal{N}_Y^T, \mathcal{N}_Y^T \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_Y^T$  timelike yüzeydir.

$\varsigma_Y^T$  timelike Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.2) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_Y^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (v\tau_g + k_n)^2 + k_g^2(1 - v^2) \quad (6.4)$$

$$F_Y^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v} \right\rangle_L = k_g \quad (6.5)$$

$$G_Y^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (6.6)$$

$\frac{\partial}{\partial\sigma} = ' .$  (6.2) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= k'_gY(\sigma) + k_gY'(\sigma) + k'_nZ(\sigma) + k_nZ'(\sigma) \\ &\quad + v(k'_gT(\sigma) + k_gT'(\sigma) + \tau'_gZ(\sigma) + \tau_gZ'(\sigma)) \\ &= T(vk'_g + k_g^2 + k_n^2 + vk_n\tau_g) + Y(vk_g^2 + k'_g - v\tau_g^2 - \tau_gk_n) \\ &\quad + Z(vk_gk_n + k_g\tau_g + (k_n + v\tau_g)')\end{aligned}\quad (6.7)$$

elde edilir. (6.2) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2\varsigma_Y^T}{\partial v\partial\sigma}(\sigma, v) = k_gT(\sigma) + \tau_gZ(\sigma) \quad (6.8)$$

elde edilir. (6.2) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2\varsigma_Y^T}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.9)$$

elde edilir.  $\varsigma_Y^T$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.3), (6.7), (6.8) ve (6.9) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_Y^T = \frac{vk_g(vk_gk_n + k_g\tau_g + k'_n + v\tau'_g) - (k_n + v\tau_g)(vk'_g + k_g^2 + k_n^2 + vk_n\tau_g)}{\sqrt{v^2k_g^2 - (v\tau_g + k_n)^2}} \quad (6.10)$$

$$f_Y^T = \frac{-k_gk_n}{\sqrt{v^2k_g^2 - (v\tau_g + k_n)^2}} \quad (6.11)$$

$$g_Y^T = 0 \quad (6.12)$$

(6.4), (6.5), (6.6), (6.10), (6.11) ve (6.12) denklemleri, (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\varsigma_Y^T$  timelike Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_Y^T = -\frac{k_g^2 k_n^2}{((k_n + v\tau_g)^2 - v^2 k_g^2)^2} \\ H_Y^T = \frac{vk_g(vk_g k_n + k_g \tau_g + k_n' + v\tau_g') + (k_n + v\tau_g)(vk_g' + k_g^2 + k_n^2 + vk_n \tau_g) - 2k_g^2 k_n}{2(-v^2 k_g^2 + (k_n + v\tau_g)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right. \quad (6.13)$$

Lorentz Darboux çatısına göre,  $\varsigma_T^Y$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin (6.1) denkleminin ikincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = k_g T(\sigma) + vk_g Y + (\tau_g + vk_n)Z \\ \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v}(\sigma, v) = T(\sigma) \end{array} \right. \quad (6.14)$$

elde edilir. Denklem (6.14) ile verilen  $\varsigma_T^Y$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_T^Y &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{(\tau_g + vk_n)Y(\sigma) - vk_g Z(\sigma)}{\sqrt{v^2 k_g^2 + (\tau_g + vk_n)^2}} \end{aligned} \quad (6.15)$$

$\langle \mathcal{N}_T^Y, \mathcal{N}_T^Y \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_T^Y$  timelike yüzeydir. Minkowski 3-uzayında Darboux çatısına göre  $\varsigma_T^Y$  timelike Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.14) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_T^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (v^2 - 1)k_g^2 + (\tau_g + vk_n)^2 \quad (6.16)$$

$$F_T^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v} \right\rangle_L = -k_g \quad (6.17)$$

$$G_T^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v} \right\rangle_L = -1 \quad (6.18)$$

(6.14) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma^2}(\sigma, v) &= k_g' T(\sigma) + k_g T'(\sigma) + \tau_g' Z(\sigma) + \tau_g Z'(\sigma) \\ &\quad + v(k_g' Y(\sigma) + k_g Y'(\sigma) + k_n' Z(\sigma) + k_n Z'(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.19)$$

elde edilir. (6.14) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = k_g Y(\sigma) + k_n Z(\sigma) \quad (6.20)$$

elde edilir. (6.14) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.21)$$

elde edilir.  $\varsigma_T^Y$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.15), (6.19), (6.20), (6.21) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_T^Y = \frac{(\tau_g + vk_n)(k_g^2 + vk_g' - \tau_g(\tau_g + vk_n)) - vk_g(k_g k_n + vk_g \tau_g + \tau_g' + vk_n')}{\sqrt{v^2 k_g^2 + (\tau_g + vk_n)^2}} \quad (6.22)$$

$$f_T^Y = \frac{k_g \tau_g}{\sqrt{v^2 k_g^2 + (\tau_g + vk_n)^2}} \quad (6.23)$$

$$g_T^Y = 0 \quad (6.24)$$

(6.16), (6.17), (6.18), (6.22), (6.23) ve (6.24) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\varsigma_T^Y$  Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_T^Y = -\frac{k_g'^2}{(v^2 k_g^2 + (\tau_g + vk_n)^2)^2} \\ H_T^Y = \frac{(\tau_g + vk_n)(k_g^2 + vk_g' - \tau_g(\tau_g + vk_n) - vk_g(k_g k_n + vk_g \tau_g + \tau_g' + vk_n') - 2k_g^2 \tau_g)}{2(v^2 k_g^2 + (\tau_g + vk_n)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right. \quad (6.25)$$

Sonuç olarak, (6.13) ve (6.25) denklemlerinden teoremden ifade edilen şartlar altında  $TY$  ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 6.2:** Birinci durum ile  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$ ,  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler olsun.  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrileri aynı anda

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$ .

**İspat:** (6.3), (6.7), (6.15) ve (6.19) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Y^T = \left( \begin{array}{c} \frac{(k_g' - k_n \tau_g + v \tau_g^2 - v k_g^2) v k_g}{\sqrt{v^2 k_g^2 - (v \tau_g + k_n)^2}}, \\ \frac{-(v k_g^3 + v^2 k_g k_g' - \tau_g k_g k_n - \tau_g^2 k_g v - k_n' k_n - k_n' v \tau_g - v \tau_g' k_n - v^2 \tau_g' \tau_g)(k_n + v \tau_g)}{\sqrt{v^2 k_g^2 - (v \tau_g + k_n)^2}}, \\ \frac{-(k_g' - k_n \tau_g - v \tau_g^2 + v k_g^2)(k_n + v \tau_g)}{\sqrt{v^2 k_g^2 - (v \tau_g + k_n)^2}} \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^Y = \left( \begin{array}{c} \frac{v k_g^3 + v^2 k_g k_g' + k_g k_n \tau_g + k_g k_n^2 v + \tau_g' \tau_g + \tau_g' v k_n + v k_n' \tau_g + v^2 k_n' k_n}{\sqrt{v^2 k_g^2 + (\tau_g + vk_n)^2}}, \\ \frac{(k_g' + \tau_g k_n + v k_n^2 + v k_g^2) v k_g}{\sqrt{v^2 k_g^2 + (\tau_g + vk_n)^2}}, \\ \frac{(k_g' + \tau_g k_n + v k_n^2 + v k_g^2)(\tau_g + vk_n)}{\sqrt{v^2 k_g^2 + (\tau_g + vk_n)^2}} \end{array} \right)$$

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Y^T \neq 0, \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^Y \neq 0$$

olduğundan  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrileri aynı anda geodezik değildir. Diğer yönden,

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Y^T >_L = \frac{\left( k_g^2 k_n + k_n^3 + 2k_n^2 v \tau_g + v k_g' k_n + v^2 k_g' \tau_g \right.}{\sqrt{v^2 k_g^2 - (v \tau_g + k_n)^2}} \quad (6.26)$$

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Y >_L = - \frac{\left( -k_g^2 \tau_g + \tau_g^3 + 2\tau_g^2 v k_n - v k_g \tau_g - v^2 k_g' k_n \right.}{\sqrt{v^2 k_g^2 + (\tau_g + v k_n)^2}} \quad (6.27)$$

biçiminde elde edilir. (6.26) ve (6.27)'dan eğer  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$  ise

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Y^T >_L = 0, < \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Y >_L = 0$$

dır. Böylece  $TY$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 6.3:** Birinci durum ile  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$ ,  $TY$  ortak regle yüzeyleri olsun.  $TY$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:** Birinci durum ile  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$ ,  $TY$  ortak regle yüzeyler olsun.

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_Y^T = 0, \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_T^Y = 0$$

olduğundan  $TY$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_Y^T >_L = 0, < \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_T^Y >_L = 0$$

olduğundan  $TY$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 6.4:** Birinci durum ile  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$ ,  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler olsun.  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $k_g = 0$  olmasıdır.

**İspat:** Birinci durum ile  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$  ortak regle yüzeyler olsun.  $k_g = 0$  için

$$F_Y^T = k_g = 0, f_Y^T = \frac{-k_g k_n}{\sqrt{v^2 k_g^2 - (v \tau_g + k_n)^2}} = 0 \quad (6.28)$$

ve

$$F_T^Y = -k_g = 0, f_T^Y = \frac{k_g \tau_g}{\sqrt{v^2 k_g^2 + (\tau_g + v k_n)^2}} = 0 \quad (6.29)$$

Böylece (6.28) ve (6.29) kullanılarak  $TY$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $k_g = 0$  olmasıdır.

**Durum II:**  $\langle T, T \rangle_L = 1, \langle Y, Y \rangle_L = -1, \langle Z, Z \rangle_L = 1$

**Tanım 6.2:** Minkowski 3-uzayında Lorentz Darboux çatısına göre ikinci durum ile null olmayan bir yüzey üzerinde timelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \varsigma_Y^T(\sigma, v) = T(\sigma) + vY(\sigma) \\ \varsigma_T^Y(\sigma, v) = Y(\sigma) + vT(\sigma) \end{cases} \quad (6.30)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 6.5:** İkinci durum ile  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$ , Lorentz  $TY$  Darboux ortak yüzeyleri olsun.  $TY$  Lorentz Darboux ortak yüzeylerinin eş zamanlı olarak

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_g = 0, k_n \neq 0$  ve ya  $\tau_g \neq 0$

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$

olmasıdır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda Darboux çatısına göre, (3.22) kullanılarak sırasıyla (6.30)'nin birinci satırının  $\sigma$  ve  $v$  ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = -vk_g T - k_g Y + (v\tau_g + k_n)Z \\ \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v}(\sigma, v) = Y(\sigma) \end{cases} \quad (6.31)$$

elde edilir. Denklem (6.30) ile verilen  $\varsigma_Y^T$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı, (6.31) denklemleri kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Y^T &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{-(k_n + v\tau_g)T - vk_g Z}{\sqrt{v^2 k_g^2 + (v\tau_g + k_n)^2}} \end{aligned} \quad (6.32)$$

$\langle \mathcal{N}_Y^T, \mathcal{N}_Y^T \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_Y^T$  timelike yüzeydir.

$\varsigma_Y^T$  timelike Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.31) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_Y^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (v\tau_g + k_n)^2 + k_g^2(v^2 - 1) \quad (6.33)$$

$$F_Y^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v} \right\rangle_L = k_g \quad (6.34)$$

$$G_Y^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v} \right\rangle_L = -1 \quad (6.35)$$

(6.31) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= -k'_g Y(\sigma) - k_g Y'(\sigma) + k'_n Z(\sigma) + k_n Z'(\sigma) + \\ &\quad v(-k'_g T(\sigma) - k_g T'(\sigma) + \tau'_g Z(\sigma) + \tau_g Z'(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.36)$$

elde edilir. (6.31) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -k_g T(\sigma) + \tau_g Z(\sigma) \quad (6.37)$$

elde edilir. (6.31) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.38)$$

elde edilir.  $\varsigma_Y^T$  Timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.32), (6.36), (6.37) ve (6.38) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_Y^T = \frac{\left( (vk'_g - k_g^2 + k_n^2 + v\tau_g k_n)(v\tau_g + k_n) + vk_g(vk_g k_n + k_g \tau_g - k'_n - v\tau'_g) \right)}{\sqrt{v^2 k_g^2 + (v\tau_g + k_n)^2}} \quad (6.39)$$

$$f_Y^T = \frac{k_n k_g}{\sqrt{v^2 k_g^2 + (v\tau_g + k_n)^2}} \quad (6.40)$$

$$g_Y^T = 0 \quad (6.41)$$

(6.33), (6.34), (6.35), (6.39), (6.40) ve (6.41) denklemleri, (3.17) denklemlerinde yerine yazıldığında  $\varsigma_Y^T$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_Y^T &= \frac{k_g^2 k_n^2}{(v^2 k_g^2 + (k_n + v\tau_g)^2)^2} \\ H_Y^T &= \frac{(vk'_g - k_g^2 + k_n^2 + v\tau_g k_n)(v\tau_g + k_n) + vk_g(vk_g k_n - k_g \tau_g - k'_n - v\tau'_g) + 2k_g^2 k_n}{2(v^2 k_g^2 + (k_n + v\tau_g)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (6.42)$$

Lorentz Darboux çatısına göre  $\varsigma_Y^T$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin (6.30) denkleminin ikincisinin  $\sigma$  ve  $v$  'ye göre türevleri alındığında

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\sigma}(\varsigma_Y^T)(\sigma, v) &= -k_g T(\sigma) - vk_g Y + (\tau_g + vk_n)Z \\ \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v}(\sigma, v) &= T(\sigma) \end{aligned} \right. \quad (6.43)$$

elde edilir. Denklem (6.30) ile verilen  $\varsigma_T^Y$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_T^Y &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{-(\tau_g + vk_n)Y(\sigma) + vk_g Z(\sigma)}{\sqrt{v^2 k_g^2 - (\tau_g + vk_n)^2}}\end{aligned}\quad (6.44)$$

$\langle \mathcal{N}_T^Y, \mathcal{N}_T^Y \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_T^Y$  timelike yüzeydir. Minkowski 3-uzayında Darboux çatısına göre  $\varsigma_T^Y$  timelike Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.44) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_T^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 - v^2)k_g^2 + (\tau_g + vk_n)^2 \quad (6.45)$$

$$F_T^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v} \right\rangle_L = -k_g \quad (6.46)$$

$$G_T^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (6.47)$$

(6.43) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= -k_g' T(\sigma) - k_g T'(\sigma) + \tau_g' Z(\sigma) + \tau_g Z'(\sigma) \\ &\quad + v(-k_g' Y(\sigma) - k_g Y'(\sigma) + k_n' Z(\sigma) + k_n Z'(\sigma))\end{aligned}\quad (6.48)$$

elde edilir. (6.43) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -k_g Y(\sigma) + k_n Z(\sigma) \quad (6.49)$$

elde edilir. (6.43) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.50)$$

elde edilir.  $\varsigma_T^Y$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları, (6.44), (6.48), (6.49) ve (6.50) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_T^Y = \frac{\left( (k_g^2 - vk_g' + \tau_g^2 + v\tau_g k_n)(\tau_g + vk_n) + vk_g(-k_g k_n - vk_g \tau_g + \tau_g' + vk_n') \right)}{\sqrt{v^2 k_g^2 - (\tau_g + vk_n)^2}} \quad (6.51)$$

$$f_T^Y = \frac{-k_g \tau_g}{\sqrt{v^2 k_g^2 - (\tau_g + vk_n)^2}} \quad (6.52)$$

$$g_T^Y = 0 \quad (6.53)$$

(6.45), (6.46), (6.47), (6.51), (6.52) ve (6.53) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında,  $\varsigma_T^Y$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_T^Y = \frac{k_g'^2 \tau_g^2}{(-v^2 k_g'^2 + (\tau_g + vk_n)^2)^2} \\ H_T^Y = \frac{(k_g'^2 - vk_g' + \tau_g^2 + v\tau_g k_n)(\tau_g + vk_n) + vk_g'(-k_g k_n - vk_g \tau_g + \tau_g' + vk_n') + 2k_g'^2 \tau_g}{2(-v^2 k_g'^2 + (\tau_g + vk_n)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (6.54)$$

(6.42) ve (6.54) denklemlerinden teoremdede ifade edilen şartlar altında  $TY$  ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 6.6:**  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$  ortak regle yüzeyler olsun.  $TY$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$ .

**İspat:** (6.32), (6.36), (6.44) ve (6.48) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Y^T &= \begin{pmatrix} \frac{(-vk_g' - vk_n \tau_g - \tau_g^2 - vk_g'^2)vk_g}{\sqrt{v^2 k_g'^2 - (v\tau_g + k_n)^2}}, \\ \frac{v^2 k_g'^3 - v^2 k_g k_g' - v^2 k_g \tau_g k_n - k_g \tau_g^2 v^2 + k_n' k_n + k_n' v^2 \tau_g + \tau_g' k_n - v\tau_g' \tau_g}{\sqrt{v^2 k_g'^2 - (v\tau_g + k_n)^2}}, \\ \frac{(-vk_g' + k_n \tau_g + \tau_g^2 + k_g'^2)(k_n + v\tau_g)}{\sqrt{v^2 k_g'^2 + (v\tau_g + k_n)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^Y &= \begin{pmatrix} -\frac{(k_n k_g \tau_g + k_n^2 k_g v - \tau_g' \tau_g - \tau_g' vk_n - vk_n' \tau_g - v^2 k_n' k_n - vk_g^3 + v^2 k_g k_g')}{\sqrt{v^2 k_g'^2 - (\tau_g + vk_n)^2}}, \\ \frac{-(k_g' + \tau_g k_n + vk_n^2 - vk_g'^2)vk_g}{\sqrt{v^2 k_g'^2 - (\tau_g + vk_n)^2}}, \\ \frac{(k_g' + k_n \tau_g + vk_n^2 - vk_g'^2)(\tau_g + vk_n)}{\sqrt{v^2 k_g'^2 - (\tau_g + vk_n)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Y^T &\neq 0, \quad \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^Y \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $TY$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrileri aynı anda geodezik değildir. Diğer yönden

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Y^T >_L = \frac{\begin{pmatrix} (k_g' - vk_g'^2 + k_n^2 + v\tau_g k_n)(v\tau_g + k_n) \\ -vk_g'(k_g k_n - vk_g \tau_g + \tau_g' + vk_n') \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 k_g'^2 - (v\tau_g + k_n)^2}} \quad (6.55)$$

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Y >_L = \frac{\begin{pmatrix} k_g^2 \tau_g + \tau_g^3 + 2v\tau_g^2 k_n - vk_g' \tau_g - v^2 k_g' k_n \\ + k_n^2 v^2 \tau_g + vk_g \tau_g' - v^2 k_g^2 \tau_g + v^2 k_g k_n' \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 k_g'^2 - (\tau_g + vk_n)^2}} \quad (6.56)$$

biçiminde elde edilir. (6.55) ve (6.56) denklemlerinden  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$  ise

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Y^T >_L = 0, < \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Y >_L = 0$$

olduğundan  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 6.7:**  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$ ,  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri olsun.  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri  $v$  parametre eğrileri aynı anda

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:**  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$ ,  $TY$  ortak regle yüzeyleri olsun. Burada

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_Y^T = 0, \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_T^Y = 0$$

olduğundan  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_Y^T >_L = 0, < \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_T^Y >_L = 0$$

olduğundan  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 6.8:**  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$  ortak regle yüzeyler olsun.  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $k_g = 0$  olmasıdır.

**İspat:**  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$ ,  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri olsun.  $k_g = 0$  için

$$F_Y^T = k_g = 0, f_Y^T = \frac{-k_n k_g}{\sqrt{v^2 k_g^2 + (v \tau_g + k_n)^2}} = 0 \quad (6.57)$$

ve

$$F_T^Y = -k_g = 0, f_T^Y = \frac{-k_g \tau_g}{\sqrt{v^2 k_g^2 - (\tau_g + v k_n)^2}} = 0 \quad (6.58)$$

Böylece (6.57) ve (6.58) kullanılarak  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $k_g = 0$  olmalıdır.

**Durum III:**  $< T, T >_L = 1, < Y, Y >_L = 1, < Z, Z >_L = -1$

**Tanım 6.3:** Minkowski 3-uzayında Lorentz Darboux çatısına göre üçüncü durum ile null olmayan bir yüzey üzerinde timelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \varsigma_Y^T(\sigma, v) = T(\sigma) + vY(\sigma) \\ \varsigma_T^Y(\sigma, v) = Y(\sigma) + vT(\sigma) \end{cases} \quad (6.59)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler olarak adlandırılır.

**Teorem 6.9:** Üçüncü durum ile  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$ ,  $TY$  Lorentz Darboux ortak yüzeyleri olsun.  $TY$  Lorentz Darboux ortak yüzeyleri eş zamanlı olarak

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_g = 0$ ,  $k_n \neq 0$  ve ya  $\tau_g \neq 0$

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$

olmasıdır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda Darboux çatısına göre, Denklem (3.23) kullanılarak, sırasıyla (6.59)'ün birinci satırı için  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = -vk_gT + k_gY - (v\tau_g + k_n)Z \\ \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v}(\sigma, v) = Y(\sigma) \end{cases} \quad (6.60)$$

elde edilir. Denklem (6.59) ile verilen  $\varsigma_Y^T$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı, (6.60) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Y^T &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{(k_n + v\tau_g)T + vk_gZ}{\sqrt{-v^2k_g^2 + (v\tau_g + k_n)^2}} \end{aligned} \quad (6.61)$$

$\langle \mathcal{N}_Y^T, \mathcal{N}_Y^T \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_Y^T$  timelike yüzeydir.  $\varsigma_Y^T$  timelike Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.60) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_Y^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = -(v\tau_g + k_n)^2 + k_g^2(1 + v^2) \quad (6.62)$$

$$F_Y^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v} \right\rangle_L = k_g \quad (6.63)$$

$$G_Y^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (6.64)$$

(6.60) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= k'_g Y(\sigma) + k_g Y'(\sigma) - k'_n Z(\sigma) - k_n Z'(\sigma) \\ &\quad + v(-k'_g T(\sigma) - k_g T'(\sigma) - \tau'_g Z(\sigma) - \tau_g Z'(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.65)$$

elde edilir. (6.60) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -k_g T(\sigma) - \tau_g Z(\sigma) \quad (6.66)$$

elde edilir. (6.60) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.67)$$

elde edilir.  $\varsigma_Y^T$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.61), (6.158), (6.159) ve (6.166) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_Y^T = - \frac{\left( k_g^2 k_n - k_n^3 - 2k_n^2 v \tau_g + v k'_g k_n + v^2 k'_g \tau_g \right)}{\sqrt{-v^2 k_g^2 + (v \tau_g + k_n)^2}} \quad (6.68)$$

$$f_Y^T = \frac{-k_n k_g}{\sqrt{-v^2 k_g^2 + (v \tau_g + k_n)^2}} \quad (6.69)$$

$$g_Y^T = 0 \quad (6.70)$$

(6.62), (6.63), (6.64), (6.68), (6.69) ve (6.70) denklemleri, (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\varsigma_Y^T$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_Y^T = \frac{-k_g^2 k_n^2}{(-v^2 k_g^2 + (v \tau_g + k_n)^2)^2} \\ H_Y^T = - \frac{(-k_g^2 k_n - k_n^3 - 2k_n^2 v \tau_g + v k'_g k_n + v^2 k'_g \tau_g - k_n v^2 \tau_g^2 - v k_g k'_n + v^2 k_g^2 k_n - v^2 k_g \tau'_g)}{2(-v^2 k_g^2 + (v \tau_g + k_n)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (6.71)$$

Lorentz Darboux çatısına göre,  $\varsigma_T^Y$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin (6.59) denkleminin ikincisi  $\sigma$  ve  $v$  ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma}(\sigma, v) = -k_g T(\sigma) + v k_g Y - (\tau_g + v k_n) Z \\ \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v}(\sigma, v) = T(\sigma) \end{cases} \quad (6.72)$$

elde edilir. Denklem (6.59) ile verilen  $\varsigma_T^Y$  Lorentz Darboux yüzeyinin normal vektör alanı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_T^Y &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{-(\tau_g + v k_n) Y(\sigma) - v k_g Z(\sigma)}{\sqrt{(\tau_g + v k_n)^2 - v^2 k_g^2}} \end{aligned} \quad (6.73)$$

$\langle \mathcal{N}_T^Y, \mathcal{N}_T^Y \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_T^Y$  timelike yüzeydir. Minkowski 3-uzayında Darboux çatısına göre,  $\varsigma_T^Y$  timelike Darboux ortak regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.72) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_T^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (v^2 + 1)k_g^2 - (\tau_g + vk_n)^2 \quad (6.74)$$

$$F_T^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v} \right\rangle_L = -k_g \quad (6.75)$$

$$G_T^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (6.76)$$

(6.72) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= -k'_g T(\sigma) - k_g T'(\sigma) - \tau'_g Z(\sigma) - \tau_g Z'(\sigma) \\ &\quad + v(k'_g Y(\sigma) + k_g Y'(\sigma) - k'_n Z(\sigma) - k_n Z'(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.77)$$

elde edilir. (6.72) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = k_g Y(\sigma) - k_n Z(\sigma) \quad (6.78)$$

elde edilir. (6.72) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.79)$$

elde edilir.  $\varsigma_T^Y$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.77), (6.78), (6.79) ve (6.73) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_T^Y = - \frac{\left( k_g^2 \tau_g - \tau_g^3 - 2\tau_g^2 vk_n - vk'_g \tau_g - v^2 k'_g k_n \right) - \tau_g v^2 k_n^2 + vk_g \tau'_g + v^2 k_g^2 \tau_g + v^2 k_g k'_n}{\sqrt{-v^2 k_g^2 + (\tau_g + vk_n)^2}} \quad (6.80)$$

$$f_T^Y = \frac{-k_g \tau_g}{\sqrt{-v^2 k_g^2 + (\tau_g + vk_n)^2}} \quad (6.81)$$

$$g_T^Y = 0 \quad (6.82)$$

(6.74), (6.75), (6.76), (6.80), (6.81) ve (6.82) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\varsigma_T^Y$  Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_T^Y &= \frac{-k_g^2 \tau_g^2}{(-v^2 k_g^2 + (\tau_g + vk_n)^2)^2} \\ H_T^Y &= - \frac{k_g^2 \tau_g - \tau_g^3 - 2\tau_g^2 vk_n - vk'_g \tau_g - v^2 k'_g k_n - \tau_g v^2 k_n^2 + vk_g \tau'_g + v^2 k_g^2 \tau_g + v^2 k_g k'_n + 2k_g^2 \tau_g}{2(-v^2 k_g^2 + (\tau_g + vk_n)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (6.83)$$

(6.71) ve (6.83) denklemleri yardımıyla, teoremden ifade edilen şartlar altında  $TY$  ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 6.10:**  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$ ,  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler olsun.  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$ .

**İspat:** (6.61), (6.65), (6.73) ve (6.77) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Y^T &= \begin{pmatrix} \frac{(k'_g - k_n \tau_g + v \tau_g^2 - v k_g^2) v k_g}{\sqrt{-v^2 k_g^2 + (v \tau_g + k_n)^2}}, \\ \frac{-(-v k_g^3 - v^2 k_g k'_g + k_g \tau_g k_n + k_g \tau_g^2 v - k'_n k_n + k'_n v \tau_g + v \tau'_g k_n + v^2 \tau'_g \tau_g)}{\sqrt{-v^2 k_g^2 + (v \tau_g + k_n)^2}}, \\ \frac{-(k'_g + k_n \tau_g + v \tau_g^2 - v k_g^2)(k_n + v \tau_g)}{\sqrt{-v^2 k_g^2 + (v \tau_g + k_n)^2}} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^Y &= \begin{pmatrix} \frac{(-v k_g^3 + v k_g \tau_g^2 + v^2 k_g k'_g - v^2 k_g k_n \tau_g)}{\sqrt{-v^2 k_g^2 + (\tau_g + v k_n)^2}}, \\ \frac{(-\tau'_g \tau_g - v \tau'_g k_n + k_g k_n \tau_g + v k_g k_n^2 - v k_g \tau_g^2 - v^2 k_g \tau_g k_n - v k'_n \tau_g - v^2 k'_n k_n + v k_g k_n \tau_g + v^2 k_g k_n^2)}{\sqrt{-v^2 k_g^2 + (\tau_g + v k_n)^2}}, \\ \frac{-(k'_g - \tau_g k_n - v k_n^2 + v k_g^2)(\tau_g + v k_n)}{\sqrt{-v^2 k_g^2 + (\tau_g + v k_n)^2}} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Y^T &\neq 0, \quad \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^Y \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $TY$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrileri aynı anda geodezik değildir. Diğer yonden

$$< \frac{\partial(\varsigma_Y^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Y^T >_L = \frac{\begin{pmatrix} (-k_g^2 + k_n^2 + v(-k'_g + \tau_g k_n))(k_n + v \tau_g) \\ + v k_g(k_g \tau_g + k'_n - v(k_g k_n - \tau'_g)) \end{pmatrix}}{\sqrt{-v^2 k_g^2 + (v \tau_g + k_n)^2}} \quad (6.84)$$

$$< \frac{\partial(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Y >_L = \frac{\begin{pmatrix} (-k_g v(-k_g k_n + \tau'_g + v(k_g \tau_g + k'_n)) \\ + (\tau_g + v k_n)(-k'_g + \tau_g k_n - v(k_g^2 - k_n^2)) \end{pmatrix}}{\sqrt{-v^2 k_g^2 + (\tau_g + v k_n)^2}} \quad (6.85)$$

biçiminde elde edilir. (6.84) ve (6.85) denklemlerinden  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$  ise

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Y^T >_L = 0, \quad < \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Y >_L = 0$$

dır. Böylece  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 6.11:**  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$ ,  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri olsun.  $v$  parametresi için  $TY$  ortak regle yüzeyleri aynı anda

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:** Üçüncü durum ile  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$  ortak regle yüzeyleri olsun. Burada

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_Y^T = 0, \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_T^Y = 0$$

olduğundan  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$\langle \frac{\partial^2(\varsigma_Y^T)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_Y^T \rangle_L = 0, \langle \frac{\partial^2(\varsigma_T^Y)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_T^Y \rangle_L = 0$$

olduğundan  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 6.12:**  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$ ,  $TY$  ortak regle yüzeyler olsun.  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrilerinin aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $k_g = 0$  olmasıdır.

**İspat:** Üçüncü durum ile  $\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$ ,  $TY$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler olsun.  $k_g = 0$  için

$$F_Y^T = k_g = 0, f_Y^T = \frac{k_n k_g}{\sqrt{-v^2 k_g^2 + (v\tau_g + k_n)^2}} = 0 \quad (6.86)$$

ve

$$F_T^Y = -k_g = 0, f_T^Y = \frac{-k_g \tau_g}{\sqrt{-v^2 k_g^2 + (\tau_g - vk_n)^2}} = 0 \quad (6.87)$$

Böylece (6.86) ve (6.87) kullanılarak  $TY$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $k_g = 0$  olmalıdır.

## 6.2. $TZ$ Lorentz Darboux Ortak Regle Yüzeyler

**Durum I:**  $\langle T, T \rangle_L = -1, \langle Y, Y \rangle_L = 1, \langle Z, Z \rangle_L = 1$

**Tanım 6.4:** Minkowski 3-uzayında nonnull yüzey üzerinde timelike bir eğri için Lorentz Darboux çatısı göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \varsigma_Z^T(\sigma, v) = T(\sigma) + vZ(\sigma) \\ \varsigma_T^Z(\sigma, v) = Z(\sigma) + vT(\sigma) \end{cases} \quad (6.88)$$

**Teorem 6.13:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$ ,  $T$  timelike,  $Y$  spacelike ve  $Z$  spacelike durumu ile  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri olsun.  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin aynı anda

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_g = 0$ ,  $k_n \neq 0$  veya  $\tau_g \neq 0$

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$

olmasıdır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda Darboux çatısına göre (3.21) kullanılarak (6.88) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ve  $v$  'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = vk_nT(\sigma) + (k_g - v\tau_g)Y(\sigma) + k_nZ(\sigma) \\ \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v}(\sigma, v) = Z(\sigma) \end{cases} \quad (6.89)$$

elde edilir. Denklem (6.88) ile verilen  $\varsigma_Z^T$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı (6.89) denklemini kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Z^T &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Z^T)(\sigma, v)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma} \times \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma} \times \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{-(k_g - v\tau_g)T(\sigma) - vk_nY(\sigma)}{\sqrt{v^2k_n^2 - (k_g - v\tau_g)^2}} \end{aligned} \quad (6.90)$$

$\langle \mathcal{N}_Z^T, \mathcal{N}_Z^T \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_Z^T$  timelike yüzeydir.

$\varsigma_Z^T$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.89) denklemini yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$E_Z^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 - v^2)k_n^2 + (k_g - v\tau_g)^2 \quad (6.91)$$

$$F_Z^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v} \right\rangle_L = k_n \quad (6.92)$$

$$G_Z^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (6.93)$$

(6.89)'in birinci denkleminin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= k'_gY(\sigma) + k_gY'(\sigma) + k'_nZ(\sigma) + k_nZ'(\sigma) \\ &\quad + v(k'_nT(\sigma) + k_nT'(\sigma) - \tau'_gY(\sigma) - \tau_gY'(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.94)$$

elde edilir. (6.89)'in birinci denkleminin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = k_nT(\sigma) - \tau_gY(\sigma) \quad (6.95)$$

elde edilir. (6.89)'in ikinci denkleminin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\zeta_Z^T)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.96)$$

elde edilir.  $\zeta_Z^T$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.90), (6.94), (6.95) ve (6.96) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_Z^T = \frac{\begin{pmatrix} k_g^3 - 2k_g^2 v \tau_g + k_n^2 k_g + v k_n' k_g - v^2 k_n' \tau_g \\ -k_g \tau_g^2 - v k_n k_g' - v^2 k_n^2 k_g + v k_n^2 \tau_g + v^2 k_g \tau_g^2 - v k_n^2 \tau_g \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 k_n^2 - (k_g - v \tau_g)^2}} \quad (6.97)$$

$$f_Z^T = \frac{k_n k_g}{\sqrt{v^2 k_n^2 - (k_g - v \tau_g)^2}} \quad (6.98)$$

$$g_Z^T = 0 \quad (6.99)$$

(6.91), (6.92), (6.93), (6.97), (6.98) ve (6.99) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\zeta_Z^T$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_Z^T = -\frac{k_n^2 k_g^2}{(v^2 k_n^2 - (k_g - v \tau_g)^2)^2} \\ H_Z^T = \frac{(-k_g^3 - 2k_g^2 v \tau_g + 3k_n^2 k_g + v k_n' k_g - v^2 k_n' \tau_g + k_g \tau_g^2 + v k_n k_g' - v^2 k_n^2 k_g - v^2 k_n^2 \tau_g)}{2(v^2 k_n^2 - (k_g - v \tau_g)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (6.100)$$

Lorentz Darboux çatısına göre,  $\zeta_T^Z$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyinin (6.88)'ün ikinci satırı için  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\zeta_T^Z)}{\partial \sigma}(\sigma, v) = k_n T(\sigma) + (v k_g - \tau_g) Y(\sigma) + v k_n Z(\sigma) \\ \frac{\partial(\zeta_T^Z)}{\partial v}(\sigma, v) = T(\sigma) \end{cases} \quad (6.101)$$

elde edilir. Denklem (6.88) ile verilen  $\zeta_T^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_T^Z &= \frac{\frac{\partial(\zeta_T^Z)}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^Z)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^Z)}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^Z)}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_T^Z)}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\zeta_T^Z)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{-(v k_g - \tau_g) Z(\sigma) + v k_n Y(\sigma)}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (v k_g - \tau_g)^2}} \end{aligned} \quad (6.102)$$

$\langle \mathcal{N}_T^Z, \mathcal{N}_T^Z \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\zeta_T^Z$  timelike yüzeydir. Minkowski 3-uzayında Darboux çatısına göre  $\zeta_T^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.102), denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_T^Z = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^Z)}{\partial \sigma}, \frac{\partial(\zeta_T^Z)}{\partial \sigma} \right\rangle_L = (v^2 - 1) k_n^2 + (v k_g - \tau_g)^2 \quad (6.103)$$

$$F_T^Z = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^Z)}{\partial \sigma}, \frac{\partial(\zeta_T^Z)}{\partial v} \right\rangle_L = -k_n \quad (6.104)$$

$$G_T^Z = \left\langle \frac{\partial(\zeta_T^Z)}{\partial v}, \frac{\partial(\zeta_T^Z)}{\partial v} \right\rangle_L = -1 \quad (6.105)$$

(6.101)'ün birinci satırının  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= k'_n T(\sigma) + k_n T'(\sigma) - \tau'_g Y(\sigma) - \tau_g Y'(\sigma) \\ &\quad + v(k'_g Y(\sigma) + k_g Y'(\sigma) + k'_n Z(\sigma) + k_n Z'(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.106)$$

elde edilir. (6.101)'ün birinci satırının  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial\sigma v}(\sigma, v) = k_g Y(\sigma) + k_n Z(\sigma) \quad (6.107)$$

elde edilir. (6.101)'ün ikinci satırının  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.108)$$

elde edilir.  $\varsigma_T^Z$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.102), (6.106), (6.107) ve (6.108) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_T^Z = \frac{- \left( vk_n \tau'_g - v^2 k_n k'_g + v^2 k_n^2 \tau_g - k_n^2 \tau_g + \tau_g^3 \right)}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (vk_g - \tau_g)^2}} \quad (6.109)$$

$$f_T^Z = \frac{k_n \tau_g}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (vk_g - \tau_g)^2}} \quad (6.110)$$

$$g_T^Z = 0 \quad (6.111)$$

(6.103), (6.104), (6.105), (6.109), (6.110) ve (6.111) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\varsigma_T^Z$  Lorentz Darboux ortak yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_T^Z &= \frac{k_n^2 \tau_g^2}{(v^2 k_n^2 + (\tau_g - vk_g)^2)^2} \\ H_T^Z &= \frac{(vk_n \tau'_g - v^2 k_n k'_g + v^2 k_n^2 \tau_g + k_n^2 \tau_g - \tau_g^3 - 2\tau_g^2 vk_g - \tau_g v^2 k_g^2 - vk'_n \tau_g + v^2 k'_n k_g)}{2(v^2 k_n^2 + (\tau_g - vk_g))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (6.112)$$

Sonuç olarak (6.100) ve (6.112) denklemleri yardımıyla teoremden ifade edilen şartlar altında  $TZ$  ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 6.14:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$  ortak regle yüzeyler olsun.  $TZ$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $k_g = \tau_g = 0$  ve  $k_n \neq 0$ .

**İspat:** (6.90), (6.94), (6.102) ve (6.106) denklemlerinin Lorentziyan vektörel çarpımı kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Z^T &= \begin{pmatrix} \frac{-(k_g \tau_g + k'_n - v \tau_g^2 + v k_n^2) v k_n}{\sqrt{v^2 k_n^2 - (k_g - v \tau_g)^2}}, \\ \frac{-(k_g \tau_g + k'_n - v \tau_g^2 + v k_n^2)(k_g - v \tau_g)}{\sqrt{v^2 k_n^2 - (k_g - v \tau_g)^2}}, \\ \frac{-(-k'_g k_g + k'_g v \tau_g + \tau_g k_n k_g - \tau_g^2 k_n v + v \tau_g' k_g - v^2 \tau_g' \tau_g + v k_n^3 + v^2 k_n k'_n)}{\sqrt{v^2 k_n^2 - (k_g - v \tau_g)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^Z &= \begin{pmatrix} -\frac{k_n k_g \tau_g + k_n k_g^2 v + \tau_g' \tau_g - \tau_g' v k_g - v k'_g \tau_g + v^2 k'_g k_g + v k_n^3 + v^2 k_n k'_n}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (\tau_g - v k_g)^2}}, \\ \frac{-(k'_n - \tau_g k_g + v k_n^2 + v k_g^2)(\tau_g - v k_g)}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (\tau_g - v k_g)^2}}, \\ \frac{-v k_n^2 k_g + v k_n \tau_g' - v^2 k_n k'_g + v^2 k_n^2 \tau_g + \tau_g k_n^2 - \tau_g^3 - v k_g k_n^2 + v k_g \tau_g^2}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (\tau_g - v k_g)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Z^T &\neq 0, \quad \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^Z \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametresi için aynı anda geodezik değildir. Diğer yönden

$$< \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^T >_L = - \frac{\left( \begin{aligned} &k_g^3 - 2k_g^2 v \tau_g + k_n^2 k_g + v k'_n k_g - v^2 k'_n \tau_g \\ &+ k_g v^2 \tau_g^2 - v k_n k'_g - v^2 k_n^2 k_g + v^2 k_n \tau_g' \end{aligned} \right)}{\sqrt{v^2 k_n^2 - (k_g - v \tau_g)^2}} \quad (6.113)$$

$$< \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Z >_L = \frac{\left( \begin{aligned} &-k_n k_g \tau_g + v k_n k_g^2 + \tau_g \tau_g' - v \tau_g' k_g - v k'_g \tau_g \\ &+ v^2 k'_g k_g + v k_n \tau_g^2 - v^2 k_n \tau_g k_g - v k_n^3 + v k_n + \tau_g^2 \end{aligned} \right)}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (\tau_g - v k_g)^2}} \quad (6.114)$$

biçiminde elde edilir. (6.113) ve (6.114) denklemlerinden eğer  $k_g = \tau_g = 0$  ve  $k_n \neq 0$  ise

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^T >_L = 0, \quad < \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Z >_L = 0$$

dır. Yani  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametresi için aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $k_g = \tau_g = 0$  ve  $k_n \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 6.15:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$  ortak regle yüzeyleri olsun.  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$ ,  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri olsun.

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_Z^T = 0, \quad \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_T^Z = 0$$

olduğundan  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri aynı anda  $v$  parametre eğrileri geodeziktir. Ayrıca

$$\left\langle \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^T \right\rangle_L = 0, \left\langle \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Z \right\rangle_L = 0$$

olduğundan  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 6.16:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$  ortak regle yüzeyler olsun.  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrilerinin aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $k_n = 0$  olmasıdır.

**İspat:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$  ortak regle yüzeyler olsun.  $k_n = 0$  için

$$F_Z^T = k_n = 0, f_Z^T = \frac{-k_n k_g}{\sqrt{v^2 k_n^2 - (k_g - v\tau_g)^2}} = 0$$

ve

$$F_T^Z = -k_n = 0, f_T^Z = \frac{-k_n \tau_g}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (\tau_g - vk_g)^2}} = 0$$

$\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri  $TZ$  ortak regle yüzeylerin aynı anda eğrilik çizgileri olması için gerek ve yeter şart  $k_n = 0$  olmalıdır.

**Durum II:**  $\langle T, T \rangle_L = 1, \langle Y, Y \rangle_L = -1, \langle Z, Z \rangle_L = 1$

**Tanım 6.5:** Minkowski 3-uzayında nonnull yüzey üzerinde spacelike bir eğri için Lorentz Darboux çatısı göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \varsigma_Z^T(\sigma, v) = T(\sigma) + vZ(\sigma) \\ \varsigma_T^Z(\sigma, v) = Z(\sigma) + vT(\sigma) \end{cases} \quad (6.115)$$

**Teorem 6.17:** İkinci durum ile  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$ ,  $T$  spacelike,  $Y$  timelike ve  $Z$  spacelike durumu ile  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri olsun.  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin aynı anda

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_g = 0, k_n \neq 0$  veya  $\tau_g \neq 0$

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$

olmasıdır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda Darboux çatısına göre (3.22) kullanılarak, sırasıyla (6.115) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ve  $v$  ye göre türevi alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = -vk_n T(\sigma) + (v\tau_g - k_g)Y(\sigma) + k_n Z(\sigma) \\ \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v}(\sigma, v) = Z(\sigma) \end{cases} \quad (6.116)$$

elde edilir. Denklem (6.115) ile verilen  $\varsigma_Z^T$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı (6.116) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Z^T &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Z^T)(\sigma, v)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma} \times \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma} \times \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{(-k_g + v\tau_g)T(\sigma) + vk_n Y(\sigma)}{\sqrt{(-k_g + v\tau_g)^2 - v^2 k_n^2}} \end{aligned} \quad (6.117)$$

$\langle \mathcal{N}_Z^T, \mathcal{N}_Z^T \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_Z^T$  timelike yüzeydir.  $\varsigma_Z^T$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.116) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_Z^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 + v^2)k_n^2 - (v\tau_g - k_g)^2 \quad (6.118)$$

$$F_Z^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v} \right\rangle_L = k_n \quad (6.119)$$

$$G_Z^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (6.120)$$

(6.116)'ün birinci satırının  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= -k'_g Y(\sigma) - k_g Y'(\sigma) + k'_n Z(\sigma) + k_n Z'(\sigma) \\ &\quad + v(-k'_n T(\sigma) - k_n T'(\sigma) + \tau'_g Y(\sigma) + \tau_g Y'(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.121)$$

elde edilir. (6.116)'ün birinci satırının  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -k_n T(\sigma) + \tau_g Y(\sigma) \quad (6.122)$$

elde edilir. (6.116)'ün ikinci satırının  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.123)$$

elde edilir.  $\varsigma_Z^T$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.117), (6.121), (6.122) ve (6.123) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_Z^T = \frac{\begin{pmatrix} -k_g^3 + 2k_g^2 v\tau_g + k_n^2 k_g + vk'_n k_g - v^2 k'_n \tau_g \\ -k_g v^2 \tau_g^2 + vk_n k'_g + v^2 k_n^2 k_g - v^2 k_n \tau'_g \end{pmatrix}}{\sqrt{(v\tau_g - k_g)^2 - v^2 k_n^2}} \quad (6.124)$$

$$f_Z^T = \frac{-k_n k_g}{\sqrt{(v\tau_g - k_g)^2 - v^2 k_n^2}} \quad (6.125)$$

$$g_Z^T = 0 \quad (6.126)$$

(6.118), (6.119), (6.120), (6.124), (6.125) ve (6.126) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\varsigma_Z^T$  timelike Darboux ortak regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_Z^T = \frac{k_n^2 k_g^2}{(-(v\tau_g - k_g)^2 + v^2 k_n^2)^2} \\ H_Z^T = \frac{-(-k_g^3 + 2k_g^2 v\tau_g - k_n^2 k_g + vk_n' k_g - v^2 k_n' \tau_g - k_g v^2 \tau_g^2 - vk_n k_g' - v^2 k_n^2 k_g + v^2 k_n \tau_g') + 2k_g k_n^2}{2((v\tau_g - k_g)^2 - v^2 k_n^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (6.127)$$

Lorentz Darboux çatısına göre  $\varsigma_T^Z$  timelike Darboux regle yüzeyinin (6.115)'ün ikinci satırının  $\sigma$  ve  $v$  'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = -k_n T(\sigma) + (\tau_g - vk_g)Y(\sigma) + vk_n Z(\sigma) \\ \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v}(\sigma, v) = T(\sigma) \end{cases} \quad (6.128)$$

elde edilir. Denklem (6.115) ile verilen  $\varsigma_T^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_T^Z &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial\sigma} \times \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial\sigma} \times \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= -\frac{(-\tau_g + vk_g)Z(\sigma) - vk_n Y(\sigma)}{\sqrt{(vk_g - \tau_g)^2 - v^2 k_n^2}} \end{aligned} \quad (6.129)$$

$\langle \mathcal{N}_T^Z, \mathcal{N}_T^Z \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_T^Z$  timelike yüzeydir. Minkowski 3-uzayında Darboux çatısına göre,  $\varsigma_T^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.128) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_T^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 + v^2)k_n^2 - (\tau_g - vk_g)^2 \quad (6.130)$$

$$F_T^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v} \right\rangle_L = -k_n \quad (6.131)$$

$$G_T^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (6.132)$$

(6.128)'nin birinci satırının  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= (-k_n' T(\sigma) - k_n T'(\sigma) + \tau_g' Y(\sigma) + \tau_g Y'(\sigma) \\ &\quad + v(-k_g' Y(\sigma) - k_g Y'(\sigma) + k_n' Z(\sigma) + k_n Z'(\sigma))) \end{aligned} \quad (6.133)$$

elde edilir. (6.128)'nin birinci satırının  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -k_g Y(\sigma) + k_n Z(\sigma) \quad (6.134)$$

elde edilir. (6.128)'nin ikinci satırının  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.135)$$

elde edilir.  $\varsigma_T^Z$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.129), (6.133), (6.134) ve (6.135) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_T^Z = \frac{\begin{pmatrix} vk_n\tau_g' - v^2k_nk_g' + v^2k_n^2\tau_g + k_n^2\tau_g - \tau_g^3 \\ + 2\tau_g^2vk_g - \tau_gv^2k_g^2 - vk_n'\tau_g + v^2k_n'k_g \end{pmatrix}}{\sqrt{(vk_g - \tau_g)^2 - v^2k_n^2}} \quad (6.136)$$

$$f_T^Z = \frac{-k_n\tau_g}{\sqrt{(vk_g - \tau_g)^2 - v^2k_n^2}} \quad (6.137)$$

$$g_T^Z = 0 \quad (6.138)$$

(6.130), (6.131), (6.132), (6.136), (6.137) ve (6.138) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\varsigma_T^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_T^Z = \frac{k_n^2\tau_g^2}{(v^2k_n^2 - (vk_g - \tau_g)^2)^2} \\ H_T^Z = \frac{-(vk_n\tau_g' - v^2k_nk_g' + v^2k_n^2\tau_g - k_n^2\tau_g - \tau_g^3 + 2\tau_g^2vk_g - \tau_gv^2k_g^2 - vk_n'\tau_g + v^2k_n'k_g)}{2(vk_g - \tau_g)^2 - v^2k_n^2} \end{cases} \quad (6.139)$$

(6.127) ve (6.139) denklemleri yardımıyla teoremden ifade edilen şartlar altında  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 6.18:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$  ortak regle yüzeyler olsun.  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $k_g = \tau_g = 0$  ve  $k_n \neq 0$ .

**İspat:** (6.117), (6.121), (6.129) ve (6.133) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Z^T &= \begin{pmatrix} \frac{-(k_g\tau_g - k_n' - v\tau_g^2 + vk_n^2)vk_n}{\sqrt{v^2k_n^2 - (v\tau_g - k_g)^2}}, \\ \frac{-(k_g\tau_g - k_n' - v\tau_g^2 + vk_n^2)(k_g - v\tau_g)}{\sqrt{v^2k_n^2 - (v\tau_g - k_g)^2}}, \\ \frac{(-k_g'k_g + k_g'v\tau_g + k_n\tau_gk_g - k_n\tau_g^2v + v\tau_g'k_g - v^2\tau_g'\tau_g + vk_n^3 + v^2k_nk_n')}{\sqrt{v^2k_n^2 - (v\tau_g - k_g)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^Z &= \begin{pmatrix} \frac{-(vk_n^3 - v^2k_nk_n' + k_nk_g\tau_g - k_nk_g^2v + \tau_g'\tau_g - \tau_g'vk_g - vk_g'\tau_g + v^2k_g'k_g)}{\sqrt{-v^2k_n^2 + (\tau_g - vk_g)^2}}, \\ \frac{(k_n' + \tau_gk_g + vk_n^2 - vk_g^2)(\tau_g - vk_g)}{\sqrt{-v^2k_n^2 + (\tau_g - vk_g)^2}}, \\ \frac{(k_n' + \tau_gk_g + vk_n^2 - vk_g^2)vk_n}{\sqrt{-v^2k_n^2 + (\tau_g - vk_g)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Z^T &\neq 0, \quad \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial\sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^Z \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $TZ$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrileri aynı anda geodezik değildir. Diğer yünden

$$\langle \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^T \rangle_L = \frac{\begin{pmatrix} -k_g^3 + 2k_g^2 v \tau_g + k_n^2 k_g + v k_n' k_g - v^2 k_n' \tau_g \\ -k_g v^2 \tau_g^2 - v k_n k_g' + v^2 k_n^2 k_g + v^2 k_n \tau_g' \end{pmatrix}}{\sqrt{-v^2 k_n^2 + (v \tau_g + k_g)^2}} \quad (6.140)$$

$$\langle \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Z \rangle_L = \frac{\begin{pmatrix} v k_n \tau_g' - v^2 k_n k_g' + v^2 k_n^2 \tau_g + k_n^2 \tau_g - \tau_g^3 \\ + 2\tau_g^2 v k_g - \tau_g v^2 k_g^2 - v k_n' \tau_g + v^2 k_n' k_g \end{pmatrix}}{\sqrt{-v^2 k_n^2 + (\tau_g - v k_g)^2}} \quad (6.141)$$

biçiminde elde edilir. (6.140) ve (6.141) denklemlerinden  $k_g = \tau_g = 0$  ve  $k_n \neq 0$  ise

$$\langle \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^T \rangle_L = 0, \langle \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Z \rangle_L = 0$$

dır. Böylece  $TZ$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $k_g = \tau_g = 0$  ve  $k_n \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 6.19:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$  ortak regle yüzeyleri olsun.  $v$  parametresi için  $TZ$  ortak regle yüzeyleri aynı anda

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$  ortak regle yüzeyleri olsun. Burada

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Z^T = 0, \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^Z = 0$$

olduğundan  $TZ$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$\langle \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^T \rangle_L = 0, \langle \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Z \rangle_L = 0$$

olduğundan  $TZ$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 6.20:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$  ortak regle yüzeyler olsun.  $TZ$  ortak regle yüzeylerin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrilerinin aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $k_n = 0$  olmasıdır.

**İspat:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$  ortak regle yüzeyler olsun.  $k_n = 0$  için

$$F_Z^T = k_n = 0, f_Z^T = \frac{k_n k_g}{\sqrt{(v \tau_g - k_g)^2 - v^2 k_n^2}} = 0 \quad (6.142)$$

ve

$$F_T^Z = -k_n = 0, f_T^Z = \frac{-k_n \tau_g}{\sqrt{(v k_g - \tau_g)^2 - v^2 k_n^2}} = 0 \quad (6.143)$$

Böylece (6.142) ve (6.143) kullanılarak  $TZ$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $k_n = 0$  olmalıdır.

$$\textbf{Durum III: } \langle T, T \rangle_L = 1, \langle Y, Y \rangle_L = 1, \langle Z, Z \rangle_L = -1$$

**Tanım 6.6:** Minkowski 3-uzayında nonnull yüzey üzerinde spacelike bir eğri için Lorentz Darboux çatısı göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \varsigma_Z^T(\sigma, v) = T(\sigma) + vZ(\sigma) \\ \varsigma_T^Z(\sigma, v) = Z(\sigma) + vT(\sigma) \end{cases} \quad (6.144)$$

**Teorem 6.21:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$ ,  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri olsun.  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin eş zamanlı

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_g = 0$ ,  $k_n \neq 0$  veya  $\tau_g \neq 0$

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_n = \tau_g = 0$  ve  $k_g \neq 0$

olmasıdır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda Darboux çatısına göre (3.23) kullanılarak (6.144) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = -vk_n T(\sigma) + (k_g - v\tau_g)Y(\sigma) - k_n Z(\sigma) \\ \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v}(\sigma, v) = Z(\sigma) \end{cases} \quad (6.145)$$

elde edilir. Denklem (6.144) ile verilen  $\varsigma_Z^T$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı (6.145) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Z^T &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Z^T)(\sigma, v)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{(k_g - v\tau_g)T(\sigma) + vk_n Y(\sigma)}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (k_g - v\tau_g)^2}} \end{aligned} \quad (6.146)$$

$\langle \mathcal{N}_Z^T, \mathcal{N}_Z^T \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_Z^T$  timelike yüzeydir.  $\varsigma_Z^T$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.146) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_Z^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (v^2 - 1)k_n^2 + (k_g - v\tau_g)^2 \quad (6.147)$$

$$F_Z^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v} \right\rangle_L = k_n \quad (6.148)$$

$$G_Z^T = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v} \right\rangle_L = -1 \quad (6.149)$$

(6.145)'in birinci satırının  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= k'_g Y(\sigma) + k_g Y'(\sigma) - k'_n Z(\sigma) - k_n Z'(\sigma) \\ &\quad - v(k'_n T(\sigma) + k_n T'(\sigma) + \tau'_g Y(\sigma) + \tau_g Y'(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.150)$$

elde edilir. (6.145)'in birinci satırının  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -k_n T(\sigma) - \tau_g Y(\sigma) \quad (6.151)$$

elde edilir. (6.145)'in ikinci satırının  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Z^T)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.152)$$

elde edilir.  $\varsigma_Z^T$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.146), (6.150), (6.151) ve (6.152) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_Z^T = - \frac{\left( k_g^3 - 2k_g^2 v \tau_g - k_n^2 k_g + v k'_n k_g - v^2 k'_n \tau_g \right.}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (k_g - v \tau_g)^2}} \quad (6.153)$$

$$f_Z^T = \frac{-k_n k_g}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (k_g - v \tau_g)^2}} \quad (6.154)$$

$$g_Z^T = 0 \quad (6.155)$$

(6.147), (6.148), (6.149), (6.153), (6.154) ve (6.155) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında,  $\varsigma_Z^T$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_Z^T &= \frac{k_n^2 k_g^2}{(v^2 k_n^2 + (k_g - v \tau_g)^2)^2} \\ H_Z^T &= \frac{(k_g^3 - 2k_g^2 v \tau_g + k_n^2 k_g + v k'_n k_g - v^2 k'_n \tau_g + k_g v^2 \tau_g^2 + v k_n k'_g - v^2 k_n^2 k_g - v^2 k_n \tau'_g)}{2(v^2 k_n^2 + (k_g - v \tau_g)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (6.156)$$

Lorentz Darboux çatısına göre  $\varsigma_Z^T$  Darboux regle yüzeyinin (6.144) denkleminin ikincisinin için  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma}(\sigma, v) &= -k_n T(\sigma) + (-\tau_g + v k_g) Y(\sigma) - v k_n Z(\sigma) \\ \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v}(\sigma, v) &= T(\sigma) \end{aligned} \right. \quad (6.157)$$

elde edilir. Denklem (6.144) ile verilen  $\varsigma_T^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı (6.157) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_T^Z &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{(-\tau_g + v k_g) Z(\sigma) - v k_n Y(\sigma)}{\sqrt{v^2 k_n^2 - (-\tau_g + v k_g)^2}} \end{aligned} \quad (6.158)$$

$\langle \mathcal{N}_T^Z, \mathcal{N}_T^Z \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_T^Z$  timelike yüzeydir. Minkowski 3-uzayında Darboux çatısına göre,  $\varsigma_T^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.158) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_T^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 - v^2)k_n^2 + (-\tau_g + vk_g)^2 \quad (6.159)$$

$$F_T^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v} \right\rangle_L = -k_n \quad (6.160)$$

$$G_T^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_T^Z)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (6.161)$$

(6.157)'ün birinci satırının  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= (-k_n'T(\sigma) - k_nT'(\sigma) - \tau_g'Y(\sigma) - \tau_gY'(\sigma) \\ &\quad + v(k_g'Y(\sigma) + k_gY'(\sigma) - k_n'Z(\sigma) - k_nZ'(\sigma))) \end{aligned} \quad (6.162)$$

elde edilir. (6.157)'ün birinci satırının  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = k_gY(\sigma) - k_nZ(\sigma) \quad (6.163)$$

elde edilir. (6.157)'ün ikinci satırının  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.164)$$

elde edilir.  $\varsigma_T^Z$  Timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.158), (6.162), (6.163) ve (6.164) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_T^Z = \frac{\left( \begin{aligned} &-vk_n\tau_g' + v^2k_nk_g' + v^2k_n^2\tau_g - k_n^2\tau_g - \tau_g^3 \\ &+ 2\tau_g^2vk_g - \tau_gv^2k_g^2 + vk_n'\tau_g - v^2k_n'k_g \end{aligned} \right)}{\sqrt{v^2k_n^2 - (-\tau_g + vk_g)^2}} \quad (6.165)$$

$$f_T^Z = \frac{k_n\tau_g}{\sqrt{v^2k_n^2 - (-\tau_g + vk_g)^2}} \quad (6.166)$$

$$g_T^Z = 0 \quad (6.167)$$

(6.159), (6.160), (6.161), (6.165), (6.166) ve (6.167) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\varsigma_T^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_T^Z &= \frac{k_n^2\tau_g^2}{(\sqrt{v^2k_n^2 - (-\tau_g + vk_g)^2})^2} \\ H_T^Z &= -\frac{(-vk_n\tau_g' + v^2k_nk_g' + v^2k_n^2\tau_g + k_n^2\tau_g - \tau_g^3 + 2\tau_g^2vk_g - \tau_gv^2k_g^2 + vk_n'\tau_g - v^2k_n'k_g)}{2(v^2k_n^2 - (-\tau_g + vk_g)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (6.168)$$

(6.156) ve (6.168) denklemleri yardımıyla, teoremden ifade edilen şartlar altında  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 6.22:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$ ,  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler olsun.  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $k_g = \tau_g = 0$  ve  $k_n \neq 0$ .

**İspat:** (6.146), (6.150), (6.158) ve (6.162) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Z^T &= \begin{pmatrix} \frac{-(-k_g \tau_g - k'_n + v \tau_g^2 + v k_n^2) v k_n}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (-v \tau_g + k_g)^2}}, \\ \frac{(-k_g \tau_g - k'_n + v \tau_g^2 + v k_n^2)(k_g - v \tau_g)}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (-v \tau_g + k_g)^2}}, \\ \frac{-(v k_n^3 - v^2 k_n k'_n - k'_g k_g + k'_g v \tau_g - k_n \tau_g k_g + k_n \tau_g^2 v + v \tau'_g k_g - v^2 \tau'_g \tau_g)}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (-v \tau_g + k_g)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^Z &= \begin{pmatrix} \frac{v k_n^3 - v^2 k_n k'_n + k_n k_g \tau_g - k_n k_g^2 v + \tau'_g \tau_g - \tau'_g v k_g - v k'_g \tau_g + v^2 k'_g k_g}{\sqrt{v^2 k_n^2 - (-\tau_g + v k_g)^2}}, \\ \frac{(-k'_n + \tau_g k_g + v k_n^2 - v k_g^2)(\tau_g - v k_g)}{\sqrt{v^2 k_n^2 - (-\tau_g + v k_g)^2}}, \\ \frac{(-k'_n + \tau_g k_g + v k_n^2 - v k_g^2) v k_n}{\sqrt{v^2 k_n^2 - (-\tau_g + v k_g)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Z^T &\neq 0, \quad \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^Z \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrileri aynı anda geodezik değildirler. Diğer yönden

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^T >_L = \frac{\begin{pmatrix} k^3 - 2k_g^2 v \tau_g - k_n^2 k_g + v k'_n k_g - v^2 k'_n \tau_g \\ + k_g v^2 \tau_g^2 - v k_n k'_g + v^2 k_n^2 k_g + v^2 k_n \tau'_g \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (-v \tau_g + k_g)^2}} \quad (6.169)$$

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Z >_L = \frac{\begin{pmatrix} -v k_n \tau'_g + v^2 k_n k'_g + v^2 k_n^2 \tau_g - k_n^2 \tau_g - \tau_g^3 \\ + 2\tau_g^2 v k_g - \tau_g v^2 k_g^2 + v k'_n \tau_g - v^2 k'_n k_g \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 k_n^2 - (-\tau_g + v k_g)^2}} \quad (6.170)$$

biçiminde elde edilir. (6.169) ve (6.170) denklemlerinden  $k_g = \tau_g = 0$  ve  $k_n \neq 0$  ise

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^T >_L = 0, \quad < \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Z >_L = 0$$

dır. Böylece  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $k_g = \tau_g = 0$  ve  $k_n \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 6.23:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$ ,  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri olsun.  $v$  parametresi için  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri aynı anda

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$ ,  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri olsun. Burada

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Z^T = 0, \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_T^Z = 0$$

olduğundan  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$\langle \frac{\partial^2(\varsigma_Z^T)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^T \rangle_L = 0, \langle \frac{\partial^2(\varsigma_T^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_T^Z \rangle_L = 0$$

olduğundan  $TZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 6.24:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$  ortak regle yüzeyler olsun.  $TZ$  ortak regle yüzeylerin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $k_n = 0$  olmasıdır.

**İspat:**  $\varsigma_Z^T$  ve  $\varsigma_T^Z$  ortak regle yüzeyler olsun.  $k_n = 0$  için

$$F_Z^T = k_n = 0, f_Z^T = \frac{-k_n \tau_g}{\sqrt{(\tau_g - vk_g)^2 - v^2 k_n^2}} = 0 \quad (6.171)$$

ve

$$F_T^Z = -k_n = 0, f_T^Z = \frac{k_n \tau_g}{\sqrt{v^2 k_n^2 + (-\tau_g + vk_g)^2}} = 0 \quad (6.172)$$

Böylece (6.171) ve (6.172) kullanılarak  $TZ$  ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $k_n = 0$  olmalıdır.

### 6.3. $YZ$ Lorentz Darboux Ortak Regle Yüzeyler

**Durum I:**  $\langle T, T \rangle_L = -1, \langle Y, Y \rangle_L = 1, \langle Z, Z \rangle_L = 1$

**Tanım 6.7:** Minkowski 3-uzayında Lorentz Darboux çatısına göre birinci durum ile null olmayan bir yüzey üzerinde timelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \varsigma_Z^Y(\sigma, v) = Y(\sigma) + vZ(\sigma) \\ \varsigma_Y^Z(\sigma, v) = Z(\sigma) + vY(\sigma) \end{cases} \quad (6.173)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $YZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler olarak anlandırılır.

**Teorem 6.28:**  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri olsun.  $YZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin aynı anda

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $\tau_g = 0, k_n \neq 0$  ve ya  $k_n \neq 0$  olmasıdır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_g = k_n = 0$  ve  $\tau_g \neq 0$  olmasıdır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda Darboux çatısına göre (3.21) kullanılarak (6.173) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = (k_g + vk_n)T(\sigma) - v\tau_g Y(\sigma) + \tau_g Z(\sigma) \\ \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v}(\sigma, v) = Z(\sigma) \end{cases} \quad (6.174)$$

elde edilir. Denklem (6.173) ile verilen  $\varsigma_Z^Y$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı (6.174) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Z^Y &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma}(\sigma, v) \times_L \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v}(\sigma, v)}{\left| \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{v\tau_g T(\sigma) - (vk_n + k_g)Y(\sigma)}{\sqrt{(k_g + vk_n)^2 - v^2\tau_g^2}} \end{aligned} \quad (6.175)$$

$\langle \mathcal{N}_Z^Y, \mathcal{N}_Z^Y \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_Z^Y$  timelike yüzeydir.  $\varsigma_Z^Y$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.175) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_Z^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 + v^2)\tau_g^2 - (k_g + vk_n)^2 \quad (6.176)$$

$$F_Z^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v} \right\rangle_L = \tau_g \quad (6.177)$$

$$G_Z^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (6.178)$$

(6.174) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= k_g' T(\sigma) + k_g T'(\sigma) + \tau_g' Z(\sigma) + \tau_g Z'(\sigma) \\ &\quad + v(k_n' T(\sigma) + k_n T'(\sigma) - \tau_g' Y(\sigma) - \tau_g Y'(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.179)$$

elde edilir. (6.174) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = k_n T(\sigma) - \tau_g Y(\sigma) \quad (6.180)$$

elde edilir. (6.174) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.181)$$

elde edilir.  $\varsigma_Z^Y$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.175), (6.179), (6.180) ve (6.181) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_Z^Y = \frac{\left( v\tau_g k'_g + v^2\tau_g k'_n + v^2\tau_g^2 k_g - k_g^3 - 2k_g^2 v k_n \right) + \tau_g^2 k_g - k_g v^2 k_n^2 + v\tau'_g k_g + v^2\tau'_g k_n}{\sqrt{(k_g + v k_n)^2 - v^2\tau_g^2}} \quad (6.182)$$

$$f_Z^Y = \frac{k_g \tau_g}{\sqrt{(k_g + v k_n)^2 - v^2\tau_g^2}} \quad (6.183)$$

$$g_Z^Y = 0 \quad (6.184)$$

(6.176), (6.177), (6.178), (6.182), (6.183) ve (6.184) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\varsigma_Z^Y$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_Z^Y = \frac{k_g^2 \tau_g^2}{((k_g + v k_n)^2 - v^2 \tau_g^2)^2} \\ H_Z^Y = \frac{(v\tau_g k'_g + v^2\tau_g k'_n - v^2\tau_g^2 k_g + k_g^3 + 2k_g^2 v k_n + \tau_g^2 k_g + k_g v^2 k_n^2 - v\tau'_g k_g - v^2\tau'_g k_n)}{2((k_g + v k_n)^2 - v^2 \tau_g^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (6.185)$$

Lorentz Darboux çatısına göre,  $\varsigma_Y^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin denklem (6.173) denkleminin ikincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = (k_n + v k_g)T(\sigma) - \tau_g Y(\sigma) + v\tau_g Z(\sigma) \\ \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v}(\sigma, v) = Y(\sigma) \end{cases} \quad (6.186)$$

elde edilir. Denklem (6.173) ile verilen  $\varsigma_Y^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı (6.186) kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Y^Z &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v}}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma} \times \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma} \times \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v} \right\rangle}} \\ &= \frac{v\tau_g T(\sigma) + (k_n + v k_g)Z(\sigma)}{\sqrt{(k_n + v k_g)^2 - v^2\tau_g^2}} \end{aligned} \quad (6.187)$$

Lorentz Darboux çatısına göre  $\varsigma_Y^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları Lorentz Darboux çatısına göre (6.187) denklemini yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_Y^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (v^2 + 1)\tau_g^2 - (k_n + v k_g)^2 \quad (6.188)$$

$$F_Y^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v} \right\rangle_L = -\tau_g \quad (6.189)$$

$$G_Y^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (6.190)$$

(6.186) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= k'_n T(\sigma) + k_n T'(\sigma) - \tau'_g Y(\sigma) - \tau_g Y'(\sigma) \\ &\quad + v(k'_g T(\sigma) + k_g T'(\sigma) + \tau'_g Z(\sigma) + \tau_g Z'(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.191)$$

elde edilir. (6.186) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = k_g T(\sigma) + \tau_g Z(\sigma) \quad (6.192)$$

elde edilir. (6.186) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.193)$$

elde edilir.  $\varsigma_Y^Z$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.187), (6.191), (6.192) ve (6.193) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_Y^Z = \frac{\left( v\tau_g k'_n + v^2\tau_g k'_g + v^2\tau_g^2 k_n - k_n^3 - 2k_n^2 v k_g \right) + \tau_g^2 k_n - k_n v^2 k_g^2 - v\tau'_g k_n - v^2\tau'_g k_g}{\sqrt{(k_n + v k_g)^2 - v^2 \tau_g^2}} \quad (6.194)$$

$$f_Y^Z = \frac{k_n \tau_g}{\sqrt{(k_n + v k_g)^2 - v^2 \tau_g^2}} \quad (6.195)$$

$$g_Y^Z = 0 \quad (6.196)$$

(6.188), (6.189), (6.190), (6.194), (6.195) ve (6.196) denklemleri (3.17) denklemlerinde yerine yazıldığında  $\varsigma_Y^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliği aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_Y^Z &= \frac{k_n^2 \tau_g^2}{(v^2 \tau_g^2 - (k_n + v k_g)^2)^2} \\ H_Y^Z &= -\frac{(v\tau_g k'_n + v^2\tau_g k'_g + v^2\tau_g^2 k_n - k_n^3 - 2k_n^2 v k_g - \tau_g^2 k_n - k_n v^2 k_g^2 + v\tau'_g k_n - v^2\tau'_g k_g) + 2k_n \tau_g}{2(v^2 \tau_g^2 - (k_n + v k_g)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (6.197)$$

(6.185) ve (6.197) denklemleri yardımıyla teoremden ifade edilen şartlar altında  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 6.29:**  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $k_g = k_n = 0$  ve  $\tau_g \neq 0$ .

**İspat:** (6.175), (6.179), (6.187) ve (6.191) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Z^Y &= \begin{pmatrix} \frac{-(k_g k_n + \tau_g' - v \tau_g^2 + v k_n^2)(k_g + v k_n)}{\sqrt{(k_g + v k_n)^2 - v^2 \tau_g^2}}, \\ \frac{(k_g k_n + \tau_g' - v \tau_g^2 + v k_n^2) v \tau_g}{\sqrt{(k_g + v k_n)^2 - v^2 \tau_g^2}}, \\ \frac{-(-v \tau_g^3 - v^2 \tau_g \tau_g' + k_g' k_g + k_g' v k_n + k_n \tau_g k_g + k_n^2 \tau_g v + v k_n' k_g + v^2 k_n' k_n)}{\sqrt{(k_g + v k_n)^2 - v^2 \tau_g^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Y^Z &= \begin{pmatrix} \frac{(-k_n k_g + \tau_g' + v \tau_g^2 - v k_g^2)(k_n + v k_g)}{\sqrt{(k_n + v k_g)^2 - v^2 \tau_g^2}}, \\ \frac{-(k_n' k_n + k_n' v k_g - \tau_g k_g k_n - \tau_g k_g^2 v + v k_g' k_n + v^2 k_g' k_g + v \tau_g^3 - v^2 \tau_g \tau_g')}{\sqrt{(k_n + v k_g)^2 - v^2 \tau_g^2}}, \\ \frac{(-k_n k_g + \tau_g' + v \tau_g^2 - v k_g^2) v \tau_g}{\sqrt{(k_n + v k_g)^2 - v^2 \tau_g^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Z^Y \neq 0, \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Y^Z \neq 0$$

olduğundan  $YZ$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametresi için aynı anda geodezik değildir. Diğer yönden

$$< \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^Y >_L = \frac{- \begin{pmatrix} v \tau_g k_g' + v^2 \tau_g k_n' - v^2 \tau_g^2 k_g + k_g^3 + 2 k_g^2 v k_n \\ - \tau_g^2 k_g + k_g v^2 k_n^2 - v \tau_g' k_g - v^2 \tau_g' k_n \end{pmatrix}}{\sqrt{(k_g + v k_n)^2 - v^2 \tau_g^2}} \quad (6.198)$$

$$< \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Y^Z >_L = \frac{\begin{pmatrix} v \tau_g k_n' + v^2 \tau_g k_g' + v^2 \tau_g^2 k_n - k_n^3 - 2 k_n^2 v k_g \\ + \tau_g^2 k_n - k_n v^2 k_g^2 - v \tau_g k_n - v^2 \tau_g' k_g \end{pmatrix}}{\sqrt{(k_n + v k_g)^2 - v^2 \tau_g^2}} \quad (6.199)$$

biçiminde elde edilir. (6.198) ve (6.199) denklemlerinden  $k_g = k_n = 0$  ve  $\tau_g \neq 0$  ise

$$< \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^Y >_L = 0, < \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Y^Z >_L = 0$$

dır. Böylece  $YZ$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $k_g = k_n = 0$  ve  $\tau_g \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 6.30:** Birinci durum ile  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  ortak regle yüzeyleri olsun.  $YZ$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:** Birinci durum ile  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  ortak regle yüzeyleri olsun. Burada

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_Z^Y = 0, \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_Y^Z = 0$$

dır. Bu durumda  $YZ$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$\left\langle \frac{\partial^2(\zeta_Z^Y)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_Z^Y \right\rangle_L = 0, \left\langle \frac{\partial^2(\zeta_Y^Z)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_Y^Z \right\rangle_L = 0$$

olduğundan  $YZ$  ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 6.31:** Birinci durum ile  $\zeta_Z^Y$  ve  $\zeta_Y^Z$  ortak regle yüzeyler olsun.  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $\tau_g = 0$  olmasıdır.

**İspat:** Birinci durum ile  $\zeta_Z^Y$  ve  $\zeta_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $\tau_g = 0$  için

$$F_Z^Y = \tau_g = 0, f_Z^Y = \frac{-k_g \tau_g}{\sqrt{(k_g + vk_n)^2 - v^2 \tau_g^2}} = 0$$

ve

$$F_Y^Z = -\tau_g = 0, f_Y^Z = \frac{-k_n \tau_g}{\sqrt{(k_n + vk_g)^2 - v^2 \tau_g^2}} = 0$$

$\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerin eş zamanlı olarak eğrilik çizgileri olması için gerek ve yeter şart  $\tau_g = 0$  olmalıdır.

**Durum II:**  $\langle T, T \rangle_L = 1, \langle Y, Y \rangle_L = -1, \langle Z, Z \rangle_L = 1$

**Tanım 6.8:** Minkowski 3-uzayında Lorentz Darboux çatısına göre ikinci durum ile null olmayan bir yüzey üzerinde spacelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \zeta_Z^Y(\sigma, v) = Y(\sigma) + vZ(\sigma) \\ \zeta_Y^Z(\sigma, v) = Z(\sigma) + vY(\sigma) \end{cases} \quad (6.200)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $YZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler olarak anlandırılır.

**Teorem 6.32:** İkinci durum ile  $\zeta_Z^Y$  ve  $\zeta_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri olsun.  $YZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin eş zamanlı olarak

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $\tau_g = 0, k_n \neq 0$  ve ya  $k_n \neq 0$  olmasıdır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_g = k_n = 0$  ve  $\tau_g \neq 0$  olmasıdır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda Darboux çatısına göre (3.22) kullanılarak (6.200) denkleminin birincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = (-k_g - vk_n)T(\sigma) + v\tau_g Y(\sigma) + \tau_g Z(\sigma) \\ \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v}(\sigma, v) = Z(\sigma) \end{cases} \quad (6.201)$$

elde edilir. Denklem (6.200) ile verilen  $\varsigma_Z^Y$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı (6.201) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Z^Y &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma} \times \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)(\sigma, v)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{v\tau_g T(\sigma) - (vk_n + k_g)Y(\sigma)}{\sqrt{v^2\tau_g^2 - (k_g + vk_n)^2}} \end{aligned} \quad (6.202)$$

$\langle \mathcal{N}_Z^Y, \mathcal{N}_Z^Y \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_Z^Y$  timelike yüzeydir.  $\varsigma_Z^Y$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.202) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$E_Z^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 - v^2)\tau_g^2 + (k_g + vk_n)^2 \quad (6.203)$$

$$F_Z^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v} \right\rangle_L = \tau_g \quad (6.204)$$

$$G_Z^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (6.205)$$

(6.201) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= -k'_g T(\sigma) - k_g T'(\sigma) + \tau'_g Z(\sigma) + \tau_g Z'(\sigma) \\ &\quad + v(-k'_n T(\sigma) - k_n T'(\sigma) + \tau'_g Y(\sigma) + \tau_g Y'(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.206)$$

elde edilir. (6.201) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -k_n T(\sigma) + \tau_g Y(\sigma) \quad (6.207)$$

elde edilir. (6.201) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.208)$$

elde edilir.  $\varsigma_Z^Y$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.202), (6.206), (6.207) ve (6.208) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_Z^Y = - \frac{\begin{pmatrix} v\tau_g k'_g + v^2\tau_g k'_n + v^2\tau_g^2 k_g - k_g^3 - 2k_g^2 v k_n \\ -\tau_g^2 k_g - k_g v^2 k_n^2 - v\tau'_g k_g - v^2\tau'_g k_n \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2\tau_g^2 - (k_g + v k_n)^2}} \quad (6.209)$$

$$f_Z^Y = \frac{k_g \tau_g}{\sqrt{v^2\tau_g^2 - (k_g + v k_n)^2}} \quad (6.210)$$

$$g_Z^Y = 0 \quad (6.211)$$

(6.203), (6.204), (6.205), (6.209), (6.210) ve (6.211) denklemleri (3.17) denklemlerinde yerine yazıldığında  $\varsigma_Z^Y$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_Z^Y = \frac{k_g^2 \tau_g^2}{(v^2\tau_g^2 - (k_g + v k_n)^2)^2} \\ H_Z^Y = \frac{-(v\tau_g k'_g + v^2\tau_g k'_n + v^2\tau_g^2 k_g - k_g^3 - 2k_g^2 v k_n - \tau_g^2 k_g - k_g v^2 k_n^2 - v\tau'_g k_g - v^2\tau'_g k_n)}{2(v^2\tau_g^2 - (k_g + v k_n)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (6.212)$$

Lorentz Darboux çatısına göre  $\varsigma_Y^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin denklem (6.200) denkleminin ikincisinin  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = (-k_n - v k_g)T(\sigma) + \tau_g Y(\sigma) + v\tau_g Z(\sigma) \\ \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v}(\sigma, v) = Y(\sigma) \end{cases} \quad (6.213)$$

elde edilir. Denklem (6.200) ile verilen  $\varsigma_Y^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı (3.22) ve (6.213) kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Y^Z &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma}}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma} \right\rangle}} \\ &= \frac{-v\tau_g T(\sigma) - (k_n + v k_g)Z(\sigma)}{\sqrt{v^2\tau_g^2 + (k_n + v k_g)^2}} \end{aligned} \quad (6.214)$$

$\langle \mathcal{N}_Y^Z, \mathcal{N}_Y^Z \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_Y^Z$  timelike yüzeydir. Lorentz Darboux çatısına göre  $\varsigma_Y^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.214) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_Y^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (v^2 - 1)\tau_g^2 + (k_n + v k_g)^2 \quad (6.215)$$

$$F_Y^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v} \right\rangle_L = -\tau_g \quad (6.216)$$

$$G_Y^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v} \right\rangle_L = -1 \quad (6.217)$$

(6.213) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= -k'_n T(\sigma) - k_n T'(\sigma) + \tau'_g Y(\sigma) + \tau_g Y'(\sigma) \\ &\quad + v(-k'_g T(\sigma) - k_g T'(\sigma) + \tau'_g Z(\sigma) + \tau_g Z'(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.218)$$

elde edilir. (6.213) denkleminin birincisini  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -k_g T(\sigma) + \tau_g Z(\sigma) \quad (6.219)$$

elde edilir. (6.213) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.220)$$

elde edilir.  $\varsigma_Y^Z$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.214), (6.219), (6.220) ve (6.225) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_Y^Z = \frac{\left( v\tau'_g k_n + v^2\tau'_g k_g + v^2\tau_g^2 k_n - k_n^3 - 2k_n^2 v k_g \right)}{\sqrt{v^2\tau_g^2 + (k_n + v k_g)^2}} \quad (6.221)$$

$$f_Y^Z = \frac{-k_n \tau_g}{\sqrt{v^2\tau_g^2 + (k_n + v k_g)^2}} \quad (6.222)$$

$$g_Y^Z = 0 \quad (6.223)$$

(6.215), (6.216), (6.217), (6.221), (6.222) ve (6.223) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\varsigma_Y^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_Y^Z &= \frac{-k_n^2 \tau_g^2}{(v^2\tau_g^2 + (v k_g + k_n)^2)^2} \\ H_Y^Z &= \frac{(v\tau_g k'_n + v^2\tau_g k'_g + v^2\tau_g^2 k_n + k_n^3 + 2k_n^2 v k_g + \tau_g^2 k_n + k_n v^2 k_g^2 - v\tau'_g k_n - v^2\tau'_g k_g)}{2(v^2\tau_g^2 + (v k_g + k_n)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (6.224)$$

(6.212) ve (6.224) denklemleri yardımıyla teoremden ifade edilen şartlar altında  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri aynı anda açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 6.33:** İkinci durum ile  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $k_g = k_n = 0$  ve  $\tau_g \neq 0$ .

**İspat:** (6.202), (6.206), (6.214) ve (6.218) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Z^Y &= \begin{pmatrix} \frac{-(k_g k_n - \tau_g' + v k_n^2 - v \tau_g^2)(k_g + v k_n)}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 - (k_g + v k_n)^2}}, \\ \frac{(k_g k_n - \tau_g' + v k_n^2 - v \tau_g^2) v \tau_g}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 - (k_g + v k_n)^2}}, \\ \frac{-v \tau_g^3 - v^2 \tau_g \tau_g' + k_g' k_g + k_g' v k_n + k_n \tau_g k_g + k_n^2 \tau_g v + v k_n' k_g + v^2 k_n' k_n}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 - (k_g + v k_n)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Y^Z &= \begin{pmatrix} \frac{-(k_n k_g + \tau_g' + v \tau_g^2 + v k_g^2)(k_n + v k_g)}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 + (k_n + v k_g)^2}}, \\ \frac{k_n' k_n + k_n' v k_g + \tau_g k_g k_n + \tau_g k_g^2 v + v k_g' k_n + v^2 k_g' k_g + v \tau_g^3 + v^2 \tau_g \tau_g'}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 + (k_n + v k_g)^2}}, \\ \frac{(k_n k_g + \tau_g' + v \tau_g^2 + v k_g^2) v \tau_g}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 + (k_n + v k_g)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Z^Y &\neq 0, \quad \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Y^Z \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametresi için aynı anda geodezik değildir. Diğer yünden

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^Y >_L = \frac{\begin{pmatrix} -v \tau_g k_g' - v^2 \tau_g k_n' - v^2 \tau_g^2 k_g + k_g^3 + 2k_g^2 v k_n + \\ \tau_g^2 k_g + k_g v^2 k_n^2 + v \tau_g' k_g + v^2 \tau_g' k_n \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 - (k_g + v k_n)^2}} \quad (6.225)$$

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Y^Z >_L = \frac{\begin{pmatrix} v \tau_g k_n' + v^2 \tau_g k_g' + v^2 \tau_g^2 k_n + k_n^3 + 2k_n^2 v k_g \\ -\tau_g^2 k_n + k_n v^2 k_g^2 - v \tau_g' k_n - v^2 \tau_g' k_g \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 + (k_n + v k_g)^2}} \quad (6.226)$$

biçiminde elde edilir. (6.225) ve (6.226) denklemlerinden  $k_g = k_n = 0$  ve  $\tau_g \neq 0$  ise

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^Y >_L = 0, \quad < \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Y^Z >_L = 0$$

dır. Böylece  $YZ$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $k_g = k_n = 0$  ve  $\tau_g \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 6.34:** İkinci durum ile  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $v$  parametresi için  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri aynı anda

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:** İkinci durum ile  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun. Burada

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_Z^Y = 0, \quad \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_Y^Z = 0$$

dır. Bu durumda  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$\langle \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_Z^Y \rangle_L = 0, \langle \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_Y^Z \rangle_L = 0$$

olduğundan  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 6.35:** İkinci durum ile  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri eş zamanlı olarak eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $\tau_g = 0$  olmasıdır.

**İspat:** İkinci durum ile  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $\tau_g = 0$  için

$$F_Z^Y = \tau_g = 0, f_Z^Y = \frac{k_g \tau_g}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 - (k_g + v k_n)^2}} = 0$$

ve

$$F_Y^Z = -\tau_g = 0, f_Y^Z = \frac{-k_n \tau_g}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 + (k_n + v k_g)^2}} = 0$$

$YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak eğrilik çizgileri olması için gerek ve yeter şart  $\tau_g = 0$  olmalıdır.

**Durum III:**  $\langle T, T \rangle_L = 1, \langle Y, Y \rangle_L = 1, \langle Z, Z \rangle_L = -1$

**Tanım 6.9:** Minkowski 3-uzayında Lorentz Darboux çatısına göre üçüncü durum ile null olmayan bir yüzey üzerinde spacelike bir eğri göz önüne alınsın.

$$\begin{cases} \varsigma_Z^Y(\sigma, v) = Y(\sigma) + vZ(\sigma) \\ \varsigma_Y^Z(\sigma, v) = Z(\sigma) + vY(\sigma) \end{cases} \quad (6.227)$$

ile tanımlanan iki regle yüzey  $YZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyler olarak anlandırılır.

**Teorem 6.36:** Üçüncü durum ile  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyleri olsun.  $YZ$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeylerinin eş zamanlı olarak

(i) açılabilir yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $\tau_g = 0, k_n \neq 0$  ve ya  $k_n \neq 0$  olmasıdır.

(ii) minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şart  $k_g = k_n = 0$  ve  $\tau_g \neq 0$  olmasıdır.

**İspat:** Minkowski 3-uzayda Darboux çatısına göre (3.23) kullanılarak (6.227) denkleminin birincisini  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = (-k_g - vk_n)T(\sigma) - v\tau_g Y(\sigma) - \tau_g Z(\sigma) \\ \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v}(\sigma, v) = Z(\sigma) \end{cases} \quad (6.228)$$

elde edilir. Denklem (6.227) ile verilen  $\varsigma_Z^Y$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin normal vektör alanı (6.228) denklemi kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Z^Y &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v}}{\left| \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v} \right\rangle \right|^{1/2}} \\ &= \frac{-v\tau_g T(\sigma) + (vk_n + k_g)Y(\sigma)}{\sqrt{v^2\tau_g^2 + (k_g + vk_n)^2}} \end{aligned} \quad (6.229)$$

$\langle \mathcal{N}_Z^Y, \mathcal{N}_Z^Y \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_Z^Y$  timelike yüzeydir.  $\varsigma_Z^Y$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.229) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$E_Z^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (1 - v^2)\tau_g^2 + (k_g + vk_n)^2 \quad (6.230)$$

$$F_Z^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v} \right\rangle_L = \tau_g \quad (6.231)$$

$$G_Z^Y = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v} \right\rangle_L = -1 \quad (6.232)$$

(6.229) denkleminin birincisinin  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= -k_g' T(\sigma) - k_g T'(\sigma) - \tau_g' Z(\sigma) - \tau_g Z'(\sigma) \\ &\quad + v(-k_n' T(\sigma) - k_n T'(\sigma) - \tau_g' Y(\sigma) - \tau_g Y'(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.233)$$

elde edilir. (6.229) denkleminin birincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -k_n T(\sigma) - \tau_g Y(\sigma) \quad (6.234)$$

elde edilir. (6.229) denkleminin ikincisinin  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.235)$$

elde edilir.  $\varsigma_Z^Y$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.229), (6.233), (6.52) ve (6.235) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_Z^Y = \frac{\begin{pmatrix} -v\tau_g k'_g - v^2\tau_g k'_n + v^2\tau_g^2 k_g + k_g^3 + 2k_g^2 v k_n \\ -\tau_g^2 k_g + k_g v^2 k_n^2 - v\tau'_g k_g + v^2\tau'_g k_n \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2\tau_g^2 + (k_g + v k_n)^2}} \quad (6.236)$$

$$f_Z^Y = \frac{-k_g \tau_g}{\sqrt{v^2\tau_g^2 + (k_g + v k_n)^2}} \quad (6.237)$$

$$g_Z^Y = 0 \quad (6.238)$$

(6.230), (6.231), (6.232), (6.236), (6.237) ve (6.238) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\varsigma_Z^Y$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\begin{cases} K_Z^Y = \frac{k_g^2 \tau_g^2}{(v^2\tau_g^2 + (k_g + v k_n)^2)^2} \\ H_Z^Y = \frac{(-v\tau_g k'_g - v^2\tau_g k'_n + v^2\tau_g^2 k_g + k_g^3 + 2k_g^2 v k_n - \tau_g^2 k_g + k_g v^2 k_n^2 - v\tau'_g k_g + v^2\tau'_g k_n + 2\tau_g f)}{2(v^2\tau_g^2 + (k_g + v k_n)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (6.239)$$

Lorentz Darboux çatısına göre  $\varsigma_Y^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin (6.227) denkleminin ikincisi için  $\sigma$  ve  $v$ 'ye göre türevleri alındığında

$$\begin{cases} \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma}(\sigma, v) = (-k_n - v k_g)T(\sigma) - \tau_g Y(\sigma) - v\tau_g Z(\sigma) \\ \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v}(\sigma, v) = Y(\sigma) \end{cases} \quad (6.240)$$

elde edilir. Denklem (6.227) ile verilen  $\varsigma_Y^Z$  Lorentz Darboux yüzeyinin normal vektör alanı (6.240) kullanılarak aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_Y^Z &= \frac{\frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma}}{\sqrt{\left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma} \times_L \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v} \right\rangle}} \\ &= \frac{v\tau_g T(\sigma) + (k_n + v k_g)Z(\sigma)}{\sqrt{v^2\tau_g^2 - (k_n + v k_g)^2}} \end{aligned} \quad (6.241)$$

$\langle \mathcal{N}_Y^Z, \mathcal{N}_Y^Z \rangle_L = 1 > 0$  olduğundan  $\varsigma_Y^Z$  timelike yüzeydir.  $\varsigma_Y^Z$  Lorentz Darboux ortak regle yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları (6.241) denklemi yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_Y^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma} \right\rangle_L = (-v^2 + 1)\tau_g^2 + (k_n + v k_g)^2 \quad (6.242)$$

$$F_Y^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial\sigma}, \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v} \right\rangle_L = -\tau_g \quad (6.243)$$

$$G_Y^Z = \left\langle \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v}, \frac{\partial(\varsigma_Y^Z)}{\partial v} \right\rangle_L = 1 \quad (6.244)$$

(6.240)'nin birinci satırının  $\sigma$ 'ya göre türevi alındığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial^2\sigma}(\sigma, v) &= -k'_n T(\sigma) - k_n T'(\sigma) - \tau'_g Y(\sigma) - \tau_g Y'(\sigma) \\ &\quad + v(-k'_g T(\sigma) - k_g T'(\sigma) - \tau'_g Z(\sigma) - \tau_g Z'(\sigma)) \end{aligned} \quad (6.245)$$

elde edilir. (6.240)'nin birinci satırının  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v \partial \sigma}(\sigma, v) = -k_g T(\sigma) - \tau_g Z(\sigma) \quad (6.246)$$

elde edilir. (6.240)'nin ikinci satırının  $v$ 'ye göre türevi alındığında

$$\frac{\partial(\varsigma_Z^Y)}{\partial v^2}(\sigma, v) = 0 \quad (6.247)$$

elde edilir.  $\varsigma_Y^Z$  timelike Darboux regle yüzeyinin ikinci temel formunun katsayıları (6.241), (6.245), (6.246) ve (6.247) denklemleri yardımıyla aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$e_Y^Z = \frac{\left( -v\tau_g k'_n - v^2\tau_g k'_g + v^2\tau_g^2 k_n + k_n^3 + 2k_n^2 v k_g \right) + \tau_g^2 k_n + k_n v^2 k_g^2 - v\tau'_g k_n - v^2\tau'_g k_g}{\sqrt{v^2\tau_g^2 - (k_n + v k_g)^2}} \quad (6.248)$$

$$f_Y^Z = \frac{-k_n \tau_g}{\sqrt{v^2\tau_g^2 - (k_n + v k_g)^2}} \quad (6.249)$$

$$g_Y^Z = 0 \quad (6.250)$$

(6.242), (6.243), (6.244), (6.248), (6.249) ve (6.250) denklemleri (3.17) denkleminde yerine yazıldığında  $\varsigma_Y^Z$  Lorentz Darboux regle yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri aşağıdaki biçimde çıkarılır:

$$\left\{ \begin{aligned} K_Y^Z &= \frac{k_g^2 k_n^2}{(v^2\tau_g^2 - (v k_g + k_n)^2)^2} \\ H_Y^Z &= \frac{-(v\tau_g k'_n + v^2\tau_g k'_g - v^2\tau_g^2 k_n - k_n^3 - 2k_n^2 v k_g + \tau_g^2 k_n - k_n v^2 k_g^2 + v\tau'_g k_n + v^2\tau'_g k_g)}{2(v^2\tau_g^2 - (v k_g + k_n)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right. \quad (6.251)$$

(6.239) ve (6.251) denklemleri yardımıyla, teoremden ifade edilen şartlar altında  $YZ$  ortak regle yüzeyleri eş zamanlı olarak açılabilir ve minimal yüzeylerdir.

**Teorem 6.37:** Üçüncü durum ile  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak

(i) geodezik değildir.

(ii) asimptotik olması için gerek ve yeter şart  $k_g = k_n = 0$  ve  $\tau_g \neq 0$ .

**İspat:** (6.229), (6.233), (6.241) ve (6.245) denklemleri kullanılarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Z^Y &= \begin{pmatrix} \frac{-(k_g k_n - \tau_g' + v k_n^2 + v \tau_g^2)(k_g + v k_n)}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 + (k_g + v k_n)^2}}, \\ \frac{-(k_g k_n - \tau_g' + v k_n^2 + v \tau_g^2) v \tau_g}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 + (k_g + v k_n)^2}}, \\ \frac{-(-k_g' k_g - k_g' v k_n + \tau_g k_n k_g + \tau_g k_n^2 v - v k_n' k_g - v^2 k_n' k_n + v \tau_g^3 - v^2 \tau_g \tau_g')}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 + (k_g + v k_n)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Y^Z &= \begin{pmatrix} \frac{(-k_n k_g - \tau_g' + v \tau_g^2 - v k_g^2)(k_n + v k_g)}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 - (k_n + v k_g)^2}}, \\ \frac{(k_n' k_n + k_n' v k_g - \tau_g k_g k_n - \tau_g k_g^2 v + v k_g' k_n + v^2 k_g' k_g + v \tau_g^3 - v^2 \tau_g \tau_g')}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 - (k_n + v k_g)^2}}, \\ \frac{(-k_n k_g - \tau_g' + v \tau_g^2 - v k_g^2) v \tau_g}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 - (k_n + v k_g)^2}} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Z^Y &\neq 0, \quad \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial \sigma^2} \times_L \mathcal{N}_Y^Z \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan  $YZ$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametresi için aynı anda geodezik değildir.

Diğer yönden

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^Y >_L = \frac{\begin{pmatrix} -v \tau_g k_g' - v^2 \tau_g k_n' + v^2 \tau_g^2 k_g + k_g^3 + 2k_g^2 v k_n \\ -\tau_g^2 k_g + k_g v^2 k_n^2 + v \tau_g' k_g + v^2 \tau_g' k_n \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 + (k_g + v k_n)^2}} \quad (6.252)$$

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Y^Z >_L = - \frac{\begin{pmatrix} -v \tau_g k_n' - v^2 \tau_g k_g' + v^2 \tau_g^2 k_n - k_n^3 - 2k_n^2 v k_g \\ -\tau_g^2 k_n - k_n v^2 k_g^2 + v \tau_g' k_n + v^2 \tau_g' k_g \end{pmatrix}}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 - (k_n + v k_g)^2}} \quad (6.253)$$

biçiminde elde edilir. (6.252) ve (6.253) denklemlerinden  $k_g = k_n = 0$  ve  $\tau_g \neq 0$  ise

$$< \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Z^Y >_L = 0, \quad < \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial \sigma^2}, \mathcal{N}_Y^Z >_L = 0$$

dır. Böylece  $YZ$  ortak regle yüzeyler  $\sigma$  parametre eğrilerinin aynı anda asimptotik olmaları için gerek ve yeter şart  $k_g = k_n = 0$  ve  $\tau_g \neq 0$  olmasıdır.

**Teorem 6.38:** üçüncü durum ile  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun.  $v$  parametresi için  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri aynı anda

(i) geodeziktir.

(ii) asimptotiktir.

**İspat:** Üçüncü durum ile  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyleri olsun. Burada

$$\frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_Z^Y = 0, \quad \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial v^2} \times_L \mathcal{N}_Y^Z = 0$$

dır. Bu durumda  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda geodeziktir. Ayrıca

$$\langle \frac{\partial^2(\varsigma_Z^Y)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_Z^Y \rangle_L = 0, \langle \frac{\partial^2(\varsigma_Y^Z)}{\partial v^2}, \mathcal{N}_Y^Z \rangle_L = 0$$

olduğundan  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $v$  parametre eğrileri aynı anda asimptotiktir.

**Teorem 6.39:** Üçüncü durum ile  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerinin  $\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri aynı anda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $\tau_g = 0$  olmasıdır.

**İspat:** Üçüncü durum ile  $\varsigma_Z^Y$  ve  $\varsigma_Y^Z$ ,  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeyler olsun.  $\tau_g = 0$  için

$$F_Z^Y = \tau_g = 0, f_Z^Y = \frac{k_g \tau_g}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 + (k_g + v k_n)^2}} = 0$$

ve

$$F_Y^Z = -\tau_g = 0, f_Y^Z = \frac{-k_n \tau_g}{\sqrt{v^2 \tau_g^2 - (k_n + v k_g)^2}} = 0$$

$\sigma$  ve  $v$  parametre eğrileri  $YZ$  Lorentz hibrit ortak regle yüzeylerin aynı anda eğrilik çizgileri olması için gerek ve yeter şart  $\tau_g = 0$  olmalıdır.

**Örnek 6.1:**  $\varsigma(\sigma, v) = (2 \cosh(\frac{\sigma}{2}) - \frac{v}{\sqrt{2}} \sinh(\frac{\sigma}{2}), 2 \sinh(\frac{\sigma}{2}) - \frac{v}{\sqrt{2}} \cosh(\frac{\sigma}{2}), \frac{v}{\sqrt{2}})$  yüzeyini parametreleştirelim.

$\sigma = s$  ve  $v = 0$  için

$$c(s, 0) = (2 \cosh(\frac{s}{2}), 2 \sinh(\frac{s}{2}), 0)$$

eğrisinin türevi alındığında

$$c'(s, 0) = (\sinh(\frac{s}{2}), \cosh(\frac{s}{2}), 0)$$

elde edilir.

$$T(s) = (\sinh(\frac{s}{2}), \cosh(\frac{s}{2}), 0)$$

$$Y(s) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(\cosh(\frac{s}{2}), \sinh(\frac{s}{2}), 0)$$

$$Z(s) = (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \cosh(s))$$

$\langle Y, Y \rangle_L = -1$  durumu için  $k_g$ ,  $k_n$  ve  $\tau_g$  aşağıdaki biçimdedir:

$$\begin{aligned} k_g &= \langle Y', T \rangle_L = 0 \\ k_n &= \langle Z', T \rangle_L = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cosh(s) \\ \tau_g &= \langle Y', Z \rangle_L = 0 \end{aligned}$$

Gauss ve ortalama eğriliği aşağıdaki şekilde bulunur:

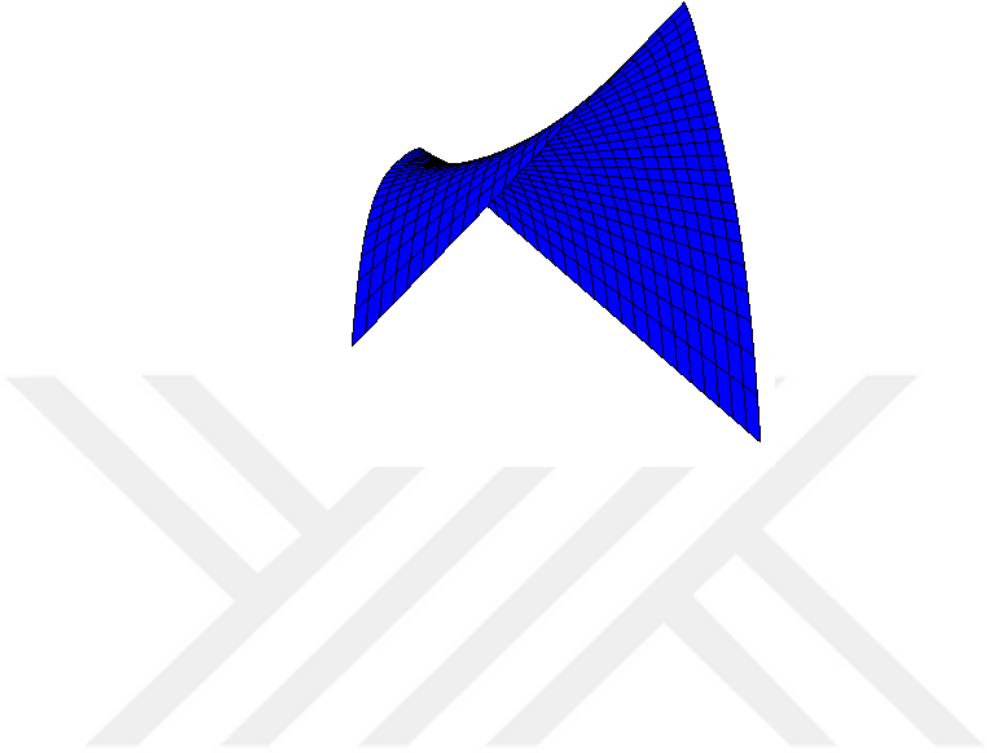
$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{8} \cosh^2(s) \\ H &= -\frac{1}{16} \cosh^2(s) \end{aligned}$$

$\varsigma_Y^T$  ve  $\varsigma_T^Y$  ortak regle yüzeyleri aşağıdaki biçimdedir:

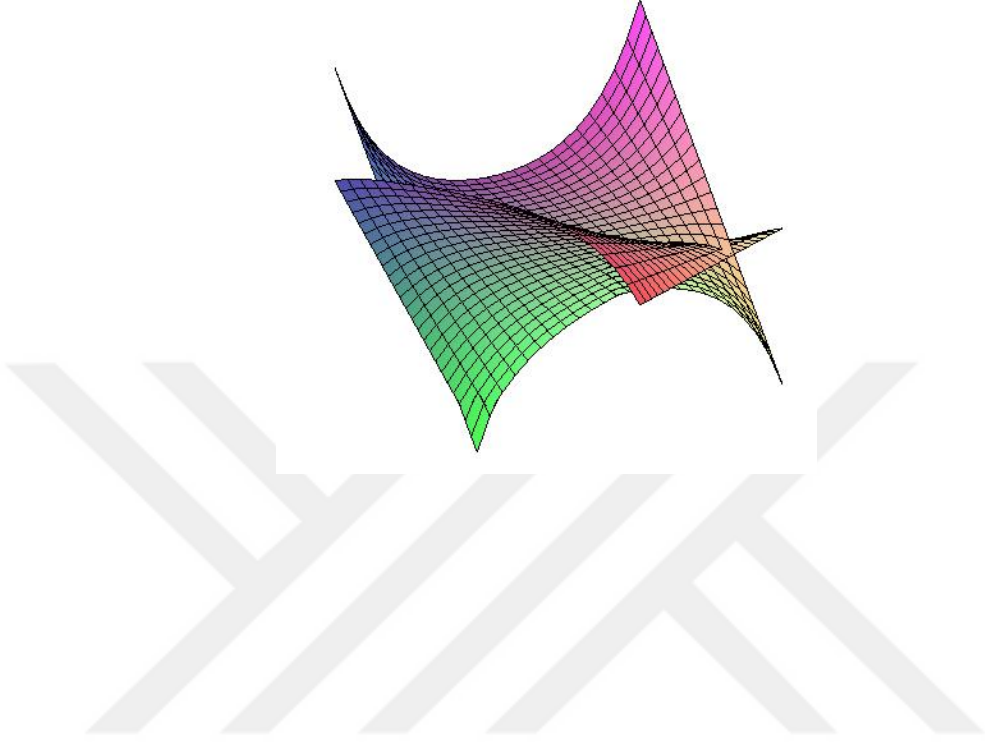
$$\begin{aligned} \varsigma_Y^T(\sigma, v) &= T(\sigma) + vY(\sigma) \\ &= \left(\sinh\left(\frac{s}{2}\right), \cosh\left(\frac{s}{2}\right), 0\right) + v\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cosh\left(\frac{s}{2}\right), \sinh\left(\frac{s}{2}\right), 0\right)\right) \\ \varsigma_T^Y(\sigma, v) &= Y(\sigma) + vT(\sigma) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cosh\left(\frac{s}{2}\right), \sinh\left(\frac{s}{2}\right), 0\right)\right) + v\left(\sinh\left(\frac{s}{2}\right), \cosh\left(\frac{s}{2}\right), 0\right) \end{aligned}$$



Şekil 6.1 TY Regle Yüzey



Şekil 6.2 YT Regle Yüzey



Şekil 6.3 TY Ortak Regle Yüzey

## 7. BULGULAR VE TARTIŞMA

Regle yüzeyler ilk kez Monge (1850) tarafından incelenmiştir. Regle yüzeyler uzayda dayanak eğrisi veya taban eğrisi de denilen bir eğri üzerinde düz bir çizginin sürekli hareketi ile elde edilen , doğrultman ve teğet yüzeylere dayanan yüzeylerdir. Regle yüzeyler mimarlık, mühendislik, mekanik, kinematik ve bilgisayar destekli tasarım, vb. gibi birçok alanda kullanılmasıyla daha da önemli bir yere sahiptir.

Turgut ve Hacısalihoğlu (1997) 3-Boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyleri incelemiştir. Turgut ve Hacısalihoğlu (1998) 3-Boyutlu Minkowski uzayında timelike regle yüzeyleri incelemiştir. Ekici (1998) yarı öklidyen uzaylarda genelleştirilmiş regle yüzeyler üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Hibrit çatısı diferensiyel geometride bir uzay eğrisi boyunca tanımlı olan ortonormal bir vektör çatısıdır. Arbind vd. (2018) Öklid 3-uzayında, iyi bilinen Frenet ve Bishop hareketli çatıların özel durumlarını içeren yeni bir çatı olan hibrit çatısını incelemiştir. Ertuğ Gürbüz (2021a) Minkowski 3-uzayında hibrit çatısına göre üç geometrik fazı elde etmiştir.

Ouarab (2021) regüler bir yüzey üzerinde tanımlanan birim hızlı bir eğrisi için Darboux çatısı kullanarak ortak regle yüzeyleri incelemiştir. Ouara bu çalışmada ortak regle yüzeyler üzerinde aynı anda gelişebilirliğini incelemiş ve örnekler vermiştir. Li vd.(2022) FLC çatısına göre ortak regle yüzeylerin karakterizasyonlarını incelemiştir. Li vd. (2023) Minkowski 3-uzayında Frenet çatısına göre ortak regle yüzeyleri incelemiştir. Bu çalışmalar bulgularımızı anlamak için destek sağlamaktadır.

Bu çalışmada Öklidyen 3 uzay ve Minkowski 3 uzayında hibrit çatısına göre ortak regle yüzeyler incelenmiştir. Aynı zamanda Minkowski 3-uzayında Darboux çatısına göre ortak regle yüzeylere ilişkin teoremler ve örnekler verilmiştir.

## 8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Öklidyen 3 uzayda hibrit çatısına göre  $TC_1$  ortak regle yüzeylerin tanımı yapılmıştır.  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin eş zamanlı olarak açılabilir ve minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.  $\xi_{C_1}^T$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel form katsayıları bulunmuştur.  $\xi_T^{C_1}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları bulunmuştur. Daha sonra  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri bulunmuştur.  $TC_1$  ortak regle yüzeylerinin  $s$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak asimptotik olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.  $TC_1$  ortak regle yüzeylerinin  $s$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak geodezik olmadığı gösterilmiştir.  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $t$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak geodezik ve asimptotik olduğu gösterilmiştir.  $TC_1$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $s$  ve  $t$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart sunulmuştur.

Öklidyen 3 uzayda hibrit çatısına göre  $TC_2$  ortak regle yüzeylerin tanımı yapılmıştır.  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin eş zamanlı olarak açılabilir ve minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.  $\xi_{C_2}^T$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel form katsayıları bulunmuştur.  $\xi_T^{C_2}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları bulunmuştur. Daha sonra  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri bulunmuştur.  $TC_2$  ortak regle yüzeylerinin  $s$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak asimptotik olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.  $TC_2$  ortak regle yüzeylerinin  $s$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak geodezik olmadığı gösterilmiştir.  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $t$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak geodezik ve asimptotik olduğu gösterilmiştir.  $TC_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $s$  ve  $t$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart sunulmuştur.

Öklidyen 3 uzayda hibrit çatısına göre  $C_1C_2$  ortak regle yüzeylerin tanımı yapılmıştır.  $C_1C_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin eş zamanlı olarak açılabilir ve minimal yüzeyler olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.  $\xi_{C_2}^{C_1}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel form katsayıları bulunmuştur.  $\xi_{C_1}^{C_2}$  Öklid hibrit regle yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları bulunmuştur. Daha sonra  $C_1C_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri bulunmuştur.  $C_1C_2$  ortak regle yüzeylerinin  $s$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak asimptotik olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.  $C_1C_2$  ortak regle yüzeylerinin  $s$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak

geodezik olmadığı gösterilmiştir.  $C_1C_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $t$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak geodezik ve asimptotik olduğu gösterilmiştir.  $C_1C_2$  Öklid hibrit ortak regle yüzeylerinin  $s$  ve  $t$  parametre eğrilerinin eş zamanlı olarak eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart sunulmuştur.

Bu çalışmada Minkowski 3 uzayında hibrit çatısına göre ortak regle yüzeyler incelendi. Aynı zamanda Minkowski 3 uzayında Darboux çatısına göre ortak regle yüzeylere ilişkin karakterizasyonlar verildi. Konuya ilişkin teoremler ve örnekler sunuldu.

Farklı çatılar için çalışmanın genişletilmesi önerilmektedir.



## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Akutagawa, K., & Nishikawa, S. (1990). *The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space*. Tohoku Math. J., 42, 67–82.
- Arbind, A., Reddy, J.N., & Srinivasa, A. R. (2018). *A one-dimensional model of 3-D structure for large deformation: a general higher-order rod theory*. Acta Mechanica, 229 (1770), 1803–1831.
- Alegre, P, Arslan, K., Carriazo, A., Murathan, C., & Öztürk, G. (2010). *Some special types of developable ruled surface*. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39(3), 319–325.
- Bishop L. R. (1975). *There is more than one way to frame a curve*. The American Mathematical Monthly, 82(3), 246–251.
- Do Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Eren, K., Ersoy, S., & Khan, M. N. I. (2025). *Simultaneous characterizations of alternative partner-ruled surfaces*. AIMS Mathematics, 10(4): 8891–8906.
- Ertuğ Gürbüz, N., (2021). *The visco modified Heisenberg ferromagnet equation and physical applications*. , Optik , 248 , 167815.
- Ertuğ Gürbüz, N. (2021a). *Three geometric phases with the visco-Da Rios equation for the hybrid frame in  $R_1^3$* . Optik, 248, 168116, 1-12.
- Ekici C., (1998). *Yarı Öklidyen Uzaylarda Genelleştirilmiş Yarı-Regle Yüzeyler* [Doktora Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü]. Yök Ulusak Tez Merkezi.  
<https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/TezGoster?key=r4I1HnmXxFQovUpyAyUmxEq9GT9LcuRDArp-Xa1DY9UMKhAyZqdNLj9qNtKtNCIh>
- Gray, A. (1993). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*. CRC Press.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1998). *Diferensiyel Geometri*. Cilt I, Ankara Üniversitesi.
- Hanson, A. J., & Ma, H. (1995). *Parallel Transport Approach to Curve Framing*. ep. 425,. Indiana University Computer Science Department, 1-20.
- Körpınar, T., & Körpınar, Z. (2021). *Hybrid optical electromotive with Heisenberg ferromagnetic system by fractional approach*. Optik, 247, 167684, 1-16.

## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Körpınar, T., Körpınar, Z. & Demirkol, R.C. (2023). *Solitonic hybrid magnetic parallel transportation and energy distribution flows in minkowski space*. Optical and Quantum Electronics, 55(13), 1146.
- Karacan, M. K. & Bükcü, B. (2008). *Bishop Frame The Timelike Curve In Minkowski 3-Space*. SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi (E-DERĞİ), 3(1), 80-90.
- Kreyszig, E. (1991). *Differential Geometry*. Dover Publications.
- Li, Y., Eren, K., Ayvaci, K.H., & Ersoy, S. (2022). *Simultaneous characterizations of partner ruled surfaces using Flc frame*. AIMS Math., 7 (11), 1-9.
- Li, Y., Eren, K., & Ersoy, S. (2023). *On simultaneous characterizations of partner-ruled surfaces in Minkowski 3-space*. AIMS Mathematics, 8(9), 22256–22273.
- O'Neill (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Department of Mathematics University of California Los Angeles, California.
- Ouarab, S. (2021). *Simultaneous developability of partner-ruled surfaces according to Darboux frame in  $E^3$* . Abstract and Applied Analysis, 2021, 1-9.
- O'Neill, B. (1966). *Elementary Differential Geometry*. Academic Press, New York.
- Ravani, B., & Ku, T.S. (1991). *Bertrand offsets of ruled and developable surfaces*. Computer-Aided Design, 23(2), 145-152.
- Sabuncuoğlu, A. (2004). *Diferensiyel geometri*. Nobel Yayınları, Ankara.
- Şentürk G. Y. & Yüce S. (2015). *Characteristic properties of the ruled surface with Darboux frame*, Kuwait Journal of Science, 42(2), 14–33.
- Turgut A., & Hacısalihoğlu H. (1998). *Timelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space-II*, Turk. J. Math., 22 (1), 33–46.
- Turgut A., Hacısalihoğlu H. (1997). *Spacelike ruled surfaces in the Minkowski 3-space*. Commun. Fac. Sci. Univ. Series A1, 46, 83–91.
- Uğurlu, H., & Kocayigit, H. (1996). *The Frenet and Darboux instantaneous rotation vectors of curves on time-like surface*. Mathematical and Computational Applications, 1(2), 133–41.
- Yu, Y., Liu, H., & Jung, S. (2014). *Structure and characterization of ruled surfaces in Euclidean 3-space*. Applied Mathematics and Computation, 233, 252-259