

T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ DERECE DENKLEMLERİN  
VE BAZI UYGULAMALARI

Derya MAZİNELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Matematik Anabilim Dalı  
Matematik Programı

Danışman  
Prof. Dr. Murat ALAN

Haziran, 2025

**T.C.**  
**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİNCİ DERECEDEN DIYOFANT DENKLEMLER VE BAZI**  
**UYGULAMALARI**

Derya MAZİNELER tarafından hazırlanan tez çalışması 24.06.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Murat ALAN  
Yıldız Teknik Üniversitesi  
Danışman

**Jüri Üyeleri**

Prof. Dr. Murat ALAN, Danışman  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Erdoğan Mehmet ÖZKAN, Üye  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. Ünsal TEKİR, Üye  
Marmara Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Danışmanım Prof. Dr. Murat ALAN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan İkinci Dereceden Diyofant Denklemler ve Bazı Uygulamaları başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Derya MAZİNELER

İmza

*Sevgili kızlarım Liya ve Lidya'ya...*



## TEŞEKKÜR

---

Tezin hazırlanma ve tamamlanma süreci boyunca sunduğu paha biçilmez rehberlik, değerli geri bildirimler ve teşvik edici yaklaşımıyla bu çalışmanın akademik yönden şekillenmesinde büyük katkı sağlayan danışmanım Sayın Prof. Dr. Murat ALAN'a sonsuz minnettarım. Onun rehberliğinde öğrenim görmek benim için büyük bir ayrıcalıktır.

Yüksek lisans hayalime ulaşma yolunda, bana her konuda özveriyle destek olan, her daim yanımda olup inancını hissettiren kıymetli arkadaşlarım Beyzanur ve Zeynep'e en içten şükranlarımı sunarım. Zor zamanlarımda verdikleri moral, akademik süreçte sağladıkları katkılar ve samimi destekleri benim için son derece kıymetlidir.

Bu süreçte özel hayatımı kolaylaştırarak her alanda yanımda olan sevgili eşim Hürem'e gönülden minnettarım. Zamanlarından çaldığım halde bana sevgilerini eksik etmeyen canım kızlarım, Liya ve Lidya'ya da sonsuz teşekkürler. Kızlarımla sevgiyle ilgilenip bana çalışma imkânı sağlayan Perihan Hanım'a ve ailesinde ayrıca teşekkür borçluyum.

Bu hayalimin gerçekleşmesinde, emeği bulunan ve desteğini esirgemeyen herkese içtenlikle şükranlarımı sunarım.

Derya MAZİNELER

# İÇİNDEKİLER

---

<b>SİMGE LİSTESİ</b>	<b>vii</b>
<b>KISALTIMA LİSTESİ</b>	<b>viii</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b>	<b>ix</b>
<b>TABLO LİSTESİ</b>	<b>x</b>
<b>ÖZET</b>	<b>xi</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>xii</b>
<b>1 GİRİŞ</b>	<b>1</b>
1.1 Literatür Taraması . . . . .	1
1.1.1 Sürekli Kesirlerin Tarihsel Gelişimi . . . . .	1
1.1.2 Euler ve Sürekli Kesirler . . . . .	2
1.1.3 Tezin Amacı . . . . .	2
1.1.4 Hipotez . . . . .	2
<b>2 ÖN BİLGİLER</b>	<b>4</b>
2.0.1 Temel Tanımlar . . . . .	4
<b>3 PİSAGOR ÜÇLÜLERİ ve FERMAT TEOREMİ</b>	<b>8</b>
3.0.1 FERMAT TEOREMİ . . . . .	18
<b>4 SÜREKLİ KESİRLER ve PELL DENKLEMLERİ</b>	<b>23</b>
4.1 Sürekli Kesirler ve Öklid Algoritması . . . . .	26
4.1.1 Pell Denklemleri . . . . .	47
<b>5 PİSAGOR ÜÇLÜLERİNDE <math> \sigma - \varphi  = d^2</math> KOŞULUNU SAĞLAYAN     ÖZEL DURUMLAR VE PRATİK ÇÖZÜM AİLELERİ</b>	<b>63</b>
<b>6 SONUÇ</b>	<b>79</b>
<b>KAYNAKÇA</b>	<b>80</b>



## SİMGE LİSTESİ

---

$\alpha$	Alfa
$\delta$	Delta
$\forall$	Her
$\gamma$	Gama
$\lambda$	Lambda
$\mu$	Mü
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\psi$	Psi
$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi
$\sigma$	Sigma
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\vartheta$	Teta
$\varphi$	Fi
$\zeta$	Zeta
$x \equiv y \pmod{m}$	$x$ ve $y$ , $m$ ile bölündüğünde aynı kalanı verir.
$x \not\equiv y \pmod{m}$	$x$ ve $y$ , $m$ ile bölündüğünde kalanları farklıdır.

## KISALTMA LİSTESİ

---

$\gcd(a,b)$  a ve b sayılarının en büyük ortak böleni



## ŞEKİL LİSTESİ

---

<b>Şekil 3.1</b>	Bahaskara-Pisagor Teoremi . . . . .	9
<b>Şekil 3.2</b>	Pisagor Üçgeni ve İç Teğet Çemberi . . . . .	18



## TABLO LİSTESİ

---

<b>Tablo 3.1</b>	( $m$ ve $n$ , $10$ 'un kuvvetleri + 1 Pisagor Üçlüleri) . . . . .	15
<b>Tablo 3.2</b>	$\sigma \leq 15$ koşulunu sağlayan bazı ilkel Pisagor üçlüleri . . . . .	16
<b>Tablo 4.1</b>	Sürekli kesir açılımı ve yakınsakları, $\frac{19}{51} = [0; 2, 1, 2, 6]$ . . . . .	32
<b>Tablo 4.2</b>	$u$ ve $v$ değerlerinden üretilmiş Pisagor üçlüleri . . . . .	62
<b>Tablo 5.1</b>	$ \sigma - \varphi  = 1$ koşulunu sağlayan bazı Pisagor üçlüleri . . . . .	67
<b>Tablo 5.2</b>	$\eta^2 - 2\lambda^2 = 1$ için $(\lambda, \eta)$ ve $A, B$ değerleri . . . . .	71
<b>Tablo 5.3</b>	$\eta^2 - 2\lambda^2 = 1$ için $(\delta, n)$ ve $(A, B)$ değerleri . . . . .	71
<b>Tablo 5.4</b>	$\eta^2 - 2\lambda^2 = 1$ için $(\sigma, \varphi, \vartheta)$ değerleri . . . . .	71
<b>Tablo 5.5</b>	$\eta^2 - 2\lambda^2 = -1$ için $(\lambda, \eta)$ , $(A, B)$ değerleri . . . . .	72
<b>Tablo 5.6</b>	$\eta^2 - 2\lambda^2 = -1$ için $(\delta, n)$ değerleri . . . . .	72
<b>Tablo 5.7</b>	$\eta^2 - 2\lambda^2 = -1$ için $(\sigma, \varphi, \vartheta)$ değerleri . . . . .	73
<b>Tablo 5.8</b>	$\eta^2 - 2\lambda^2 = 7$ için $\delta, n, \sigma, \varphi, \vartheta$ . . . . .	75
<b>Tablo 5.9</b>	$\eta^2 - 2\lambda^2 = -7$ için $\delta, n, \sigma, \varphi, \vartheta$ . . . . .	75
<b>Tablo 5.10</b>	$\sigma - \varphi = 1$ için $(\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2 = 1$ . . . . .	76
<b>Tablo 5.11</b>	$\sigma - \varphi = 1$ için $(\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2 = -1$ . . . . .	76
<b>Tablo 5.12</b>	$\sigma - \varphi = 7^2$ için $(\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2 = 7$ . . . . .	77
<b>Tablo 5.13</b>	$\sigma - \varphi = 7^2$ için $(\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2 = -7$ . . . . .	77
<b>Tablo 5.14</b>	Parametrik formüllerle elde edilen ve $ \sigma + \varphi  = d^2$ koşulunu sağlayan Pisagor üçlüleri . . . . .	78

## İkinci Dereceden Diyofant Denklemler ve Bazı Uygulamaları

Derya MAZİNELER

Matematik Anabilim Dalı  
YÜKSEK LİSANS Tezi

Danışman: Prof. Dr. Murat ALAN

Bu tez,  $|x - y| = d^2$  koşulunu sağlayan özel bir Pisagor üçlüleri alt sınıfını incelemekte ve bu üçlülerin parametrik yöntemlerle sistematik bir şekilde nasıl üretilebileceğini araştırmaktadır. Söz konusu üçlülerin, yalnızca klasik formüllerle değil, aynı zamanda ikinci dereceden Diyofant denklemleri, özellikle de Pell tipi denklemler aracılığıyla da elde edilebileceği gösterilmiştir.

Bu çalışmada, klasik Pell denkleminin temel çözümünden hareketle, genelleştirilmiş Pell denklemleri incelenmiş ve bu denklemlerin çözümleri aracılığıyla  $|x - y| = d^2$  koşulunu sağlayan Pisagor üçlüleri elde edilmiştir. Elde edilen çözümler parametrik biçimde ifade edilmiş ve bu üçlülerin yapısal özellikleri incelenerek simetrik ve tekrar eden örüntüler üzerinden sınıflandırma yapılmıştır.

Elde edilen bulgular, Pisagor üçlüleri ile Diyofant denklemleri arasındaki ilişkiye yeni bir bakış sunmakta ve benzer yapılar üzerine yapılacak gelecekteki araştırmalara teorik bir temel sağlamaktadır.

**Anahtar Kelimeler:** Pisagor üçlüleri, Diyofant denklemleri, Pell denklemi, sürekli kesirler, parametrik çözüm

## Quadratic Diophantine Equations and Some Applications

Derya MAZİNELER

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Murat ALAN

This thesis examines a special subclass of Pythagorean triples that satisfy the condition  $|x - y| = d^2$ , and investigates how these triples can be systematically generated using parametric methods. It has been shown that these triples can be obtained not only through classical formulas but also via second-degree Diophantine equations, particularly Pell-type equations.

In this study, generalized Pell equations are examined based on the fundamental solution of the classical Pell equation, and Pythagorean triples satisfying the condition  $|x - y| = d^2$  are obtained through the solutions of these equations. The solutions are expressed parametrically, and the structural properties of these triples are analyzed to establish a classification based on their symmetric and recurring patterns.

The findings provide a new perspective on the relationship between Pythagorean triples and Diophantine equations and offer a theoretical foundation for future studies on similar numerical structures.

**Keywords:** Pythagorean triples, Diophantine equations, Pell equation, continued fractions, parametrization

## 1.1 Literatür Taraması

Diyofant denklemler, yalnızca tamsayı çözümleri kabul eden polinom türleridir ve bu isim Antik Yunanlı matematikçi Diophantos'tan alınmıştır. Diophantos'un *Arithmetica* adlı çalışması, cebirsel kavramları sistematik bir şekilde ele alarak modern sayı teorisinin temellerine önemli katkılar sunmuştur [1].

Bu denklemlerin en klasik örneği, Pisagor Teoremi'ne karşılık gelen

$$\sigma^2 + \varphi^2 = \vartheta^2$$

eşitliğidir. Bu denklem, tamsayı çözümler için  $(\sigma, \varphi, z) \in \mathbb{Z}^3$  üçlüsü şeklinde ifade edilir ve bu üçlüler *Pisagor üçlüleri* olarak adlandırılır. Her ne kadar bu teorem Pisagor'a atfedilse de, tarihsel veriler Babil ve Hint matematik geleneklerinde bu yapının çok daha önce kullanıldığını göstermektedir [2]. Örneğin, M.Ö. 1800'e tarihlenen Plimpton 322 tableti ve *Sulba Sutra* metinleri bu türden üçlülerin bilindiğine işaret etmektedir.

Pisagor üçlüleri şu parametrik formülle elde edilebilir:

$$\sigma = 2mn, \quad \varphi = m^2 - n^2, \quad \vartheta = m^2 + n^2$$

Burada  $m > n$ ,  $m$  ve  $n$  aralarında asal ve biri çift, biri tek olmak koşuluyla pozitif tam sayılardır.

### 1.1.1 Sürekli Kesirlerin Tarihsel Gelişimi

Pell denklemleri ile ilişkili olarak irrasyonel sayıların rasyonel yaklaşımlarında kullanılan sürekli kesirler, matematiksel olarak güçlü bir araçtır. Bu yapı, Öklid algoritmasına dayanır ve ilk olarak Aryabhata tarafından bir lineer Diyofant denkleminin çözümünde kullanılmıştır[2]. Bombelli ve Cataldi gibi matematikçiler,

karekök ifadelerini sürekli kesir biçiminde temsil etme konusunda öncü çalışmalar yapmıştır.

17. yüzyılda John Wallis, “sürekli kesir” terimini ilk kez kullanmış; Lord Brouncker ise

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}$$

açılımını vererek bu yapıyı analitik sayıların kuramında uygulamıştır.

### 1.1.2 Euler ve Sürekli Kesirler

Euler, 18. yüzyılda yazdığı *De Fractionibus Continuis* adlı eserinde, rasyonel sayıların sürekli kesirlerle ifade edilebileceğini göstermiştir. Ayrıca  $e$  sayısının irrasyonelliğini kanıtlamak için sürekli kesir açılımı geliştirmiştir. Johann Lambert  $\pi$ 'nin irrasyonelliğini yine bu yöntemle ispatlamış; Lagrange ise ikinci dereceden irrasyonel sayıların sürekli kesir açılımının her zaman periyodik olduğunu göstermiştir.

### 1.1.3 Tezin Amacı

Bu tezin amacı,  $|\sigma - \varphi| = d^2$  koşulunu sağlayan Pisagor üçlülerini inceleyerek bu özel yapıların sistematik ve parametrik olarak nasıl üretilebileceğini araştırmaktır. Çalışmada, bu tür üçlülerin klasik üretim yöntemlerinin ötesinde, ikinci dereceden Diyofant denklemleriyle olan ilişkisi ortaya konulmaktadır. Özellikle, bu üçlülerin uygun cebirsel dönüşümler aracılığıyla pozitif veya negatif biçimli Pell denklemlerine indirgenebileceği gösterilmektedir. Ardından, bu denklemlerin çözümleri sürekli kesir açılımlarının periyodik yapısından yararlanılarak parametrik olarak elde edilmektedir. Ayrıca, elde edilen çözümlerin sadece sayısal değil, yapısal açıdan da belirli simetri ve tekrar özellikleri taşıdığı gözlemlenmektedir. Bu özellikler, söz konusu Pisagor üçlülerinin yeni bir sınıflandırma yaklaşımıyla ele alınmasına olanak tanımaktadır. Bu bağlamda tez, klasik Pisagor üçlülerine dair literatürde yeterince incelenmemiş bir alt sınıfın cebirsel ve yapısal özelliklerini ortaya koymayı hedeflemektedir.

### 1.1.4 Hipotez

Bu tezde, klasik Pisagor üçlülerinin bir alt sınıfını oluşturan ve  $|\sigma - y| = d^2$  koşulunu sağlayan çözümlerin sistematik olarak üretilebileceği varsayılmaktadır. Temel hipotez, bu tür üçlülerin yalnızca klasik parametrik formüllerle değil, aynı zamanda belirli cebirsel dönüşümler ve sürekli kesir açılımları kullanılarak türetilen

*pozitif ve negatif biçimli Pell denklemleri* aracılığıyla da elde edilebileceğidir. Buna göre,  $|\sigma - \varphi| = d^2$  koşulunu sağlayan Pisagor üçlüleri, uygun değişken dönüşümleriyle ikinci dereceden Diyofant denklemlerine indirgenebilir; bu denklemlerin çözümleri ise, devamlı kesirlerin periyodik yapısından yararlanarak parametrik biçimde üretilebilir. Ayrıca, bu çözümlerin yalnızca aritmetik değil, aynı zamanda yapısal düzeyde de simetri, tekrar ve modüler özellikler taşıdığı; bu nedenle ortaya çıkan çözüm ailelerinin belirli kurallara göre sınıflandırılabilceği öngörülmektedir.



## 2 ÖN BİLGİLER

---

Bu tezde ele alınacak temel kavramlar tanımlanarak detaylı bir şekilde açıklanacaktır.

### 2.0.1 Temel Tanımlar

**Tanım 2.1** (Diyofant Denklemi). Bir Diyofant denklemi, katsayıları tamsayı olan ve yalnızca tamsayı çözümü bulunan çok değişkenli bir polinom ifadedir. Genel biçimi,

$$P(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} \dots \sigma_n^{\alpha_n}, \quad a_{\alpha} \in \mathbb{Z}$$

Bu tür denklemler için aranan çözümler,

$$(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{Z}^n$$

şeklinde yalnızca tamsayı kümelerinde tanımlanır [3].

**Tanım 2.2** (Lineer Diyofant Denklemi). Katsayıları ve çözümleri tamsayı olan, birinci dereceden iki bilinmeyenli Diyofant denklemler,

$$\lambda\sigma + \eta\varphi = \zeta$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklem ancak şu koşul altında tamsayı çözüme sahiptir.

$$\gcd(\lambda, \eta) \mid \zeta$$

Genel çözüm şu şekilde parametrik olarak ifade edilir.

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\beta}{d}t, \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{\lambda}{d}t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad d = \gcd(\lambda, \eta)$$

[4].

Örnek 2.1. Aşağıdaki lineer Diyofant denklemi ele alalım,

$$28\sigma + 42\varphi = 98$$

Öncelikle  $\gcd(28, 42) = 14$  bulunur. Çünkü  $14 \mid 98$  olduğundan, denklem en az bir tamsayı çözüme sahiptir. Her iki taraf 14 ile sadeleştirilerek denklem sadeleştirilir,

$$\frac{28\sigma + 42\varphi}{14} = \frac{98}{14} \Rightarrow 2\sigma + 3\varphi = 7$$

Denklemin en sade halini sağlayan en küçük değerler bulunur. Örneğin,

$$\varphi = 1$$

için

$$2\sigma + 3 = 7 \Rightarrow \sigma = 2.$$

Dolayısıyla en küçük çözüm,

$$(\sigma_0, \varphi_0) = (2, 1)$$

Tüm çözümler en küçük çözümden yararlanılarak parametrik olarak ifade edilir,

$$\sigma = 2 + 3t, \quad \varphi = 1 - 2t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

**Tanım 2.3** (Lineer Olmayan Diyofant Denklemi). Bir Diyofant denkleminin en az bir teriminde değişkenin derecesi 1'den büyükse veya değişkenler çarpım biçiminde yer alıyorsa, bu denkleme lineer olmayan Diyofant denklemi denir. Genel tanımı,

$$P(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0, \quad \sigma_i \in \mathbb{Z}$$

Burada  $P$ , en az bir değişkenin derecesi 2 veya daha büyük olan bir polinomdur [5].

**Tanım 2.4** (Fermat Denklemi). Üç tamsayıyı içeren ve  $n \geq 3$  için tanımlanan denklemdir,

$$\sigma^n + \varphi^n = \psi^n$$

Fermat'ın Son Teoremi'ne göre bu eşitlik, pozitif tamsayılar için yalnızca  $n = 2$  durumunda çözüm içerir.  $n \geq 3$  için çözüm bulunmamaktadır [6].

**Tanım 2.5** (Pell Denklemi). Pell denklemi şu şekilde tanımlanır,

$$\sigma^2 - D\varphi^2 = 1$$

Burada  $D$ , pozitif bir tam sayı olup tam kare değildir. Bu denklem sürekli kesirlerin periyodik yapısıyla ilişkilidir ve sonsuz sayıda tam sayı çözüm içerir [2].

**Tanım 2.6** (İlkel Pisagor Üçlüsü). Bir Pisagor üçlüsü  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$  için eğer  $\gcd(\sigma, \varphi, \vartheta) = 1$  ise bu üçlüye ilkel Pisagor üçlüsü denir. Diğer tüm Pisagor üçlüleri, bu ilkel üçlülerin pozitif tam sayı katlarıyla elde edilir [3].

**Tanım 2.7** (Pisagor Üçgeni ve Üçlüsü). Dik üçgenlerde kenarlar arasında geçerli olan ilişkiyi ifade eder,

$$\sigma^2 + \varphi^2 = \vartheta^2$$

Eğer  $(\sigma, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{Z}^+$  bu eşitliği sağlıyorsa,  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$  bir Pisagor üçlüsüdür. Bu tür üçlüler, aşağıdaki parametrik formülle üretilebilir,

$$\sigma = 2\delta\gamma, \quad \varphi = \delta^2 - \gamma^2, \quad \vartheta = \delta^2 + \gamma^2$$

Bu yapı tüm ilkel üçlüleri kapsar [1].

**Tanım 2.8** (Pisagor Dörtlüsü). Pisagor Teoremi'nin üç boyutlu uzaydaki karşılığıdır.

$$\sigma^2 + \varphi^2 + \omega^2 = \vartheta^2$$

Burada  $\sigma, \varphi, \omega, \vartheta$  pozitif tam sayılardır. Bu denklem, bir dikdörtgenler prizmasının uzaydaki köşegenini temsil eder [1].

**Tanım 2.9** (Sürekli Kesir). Bir sayı, iç içe kesirler halinde yazılabiliyorsa bu yapıya Sürekli Kesir denir. Genel biçimi şöyledir,

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Eğer sonlu terim içeriyorsa sonlu Sürekli Kesir, sonsuz terim içeriyorsa sonsuz Sürekli Kesir olarak adlandırılır [2].

**Tanım 2.10** (Basit Sürekli Kesir). Tüm paydaların 1 olduğu ve tüm  $a_i \in \mathbb{N}$  olacak şekilde ifade edilen Sürekli Kesirlere basit Sürekli Kesir denir. Matematiksel gösterimi,

$$[a_0; a_1, a_2, \dots]$$

şeklindedir. Basit Sürekli Kesirler, irrasyonel sayıların özelliklerini sistematik biçimde ifade etmekte kullanılır [1, 2].

**Tanım 2.11** (Periyodik Sürekli Kesir). Bir irrasyonel sayının sürekli kesir açılımında belirli bir dizinin devamlı tekrar etmesi durumunda bu kesir periyodik olarak adlandırılır.

*Örnek 2.2.*

$$\sqrt{74} = [8; \overline{1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 16}]$$

açılımında, periyodik yapı açıkça görülmektedir. İkinci dereceden irrasyonel sayıların sürekli kesir açılımlarının her zaman periyodik olduğu, Lagrange tarafından kanıtlanmıştır [2].

**Tanım 2.12** (Fibonacci Dizisi). Fibonacci dizisi, her terimi önceki iki terimin toplamı olan bir sayı dizisidir. Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlanır. Dizinin terimleri artarak devam eder. Başlangıç koşulları,

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1$$

ve  $n \geq 2$  için,

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

şeklindedir. Elde edilen ilk terimler şunlardır,

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \dots$$

Bu dizi, doğadaki büyüme modelleri, altın oran  $\varphi$ 'nin yaklaşımı ve sayı teorisi gibi birçok matematiksel alanda önemli bir yere sahiptir [1].

## PİSAGOR ÜÇLÜLERİ ve FERMAT TEOREMİ

---

Diyofant denklemler ve çeşitlerinin tanımlarını önceki bölümde verdik. Bu bölümde, bu denklemlerden Pisagor üçlüleri, Fermat teoremi ve Pell denklemleri üzerine çalışacağız.

**Teorem 3.1** (Aritmetiğin Temel Teoremi). 1'den büyük her tamsayı, asal çarpanların çarpımı şeklinde ve çarpanların sırası dışında yalnızca bir şekilde yazılabilir. Bu ifade, çarpanlara ayırma açısından tektir.

*İspat.* Her  $n > 1$  sayısı ya asaldır ya da asal olmayan en küçük sayıdan başlanarak asal çarpanlara ayrılabilir. Çünkü  $n$ 'nin pozitif bölenleri sonlu sayıda olduğundan, bu işlem sonlu adımda tamamlanır. Bu şekilde  $n$  aşağıdaki biçimde yazılır.

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

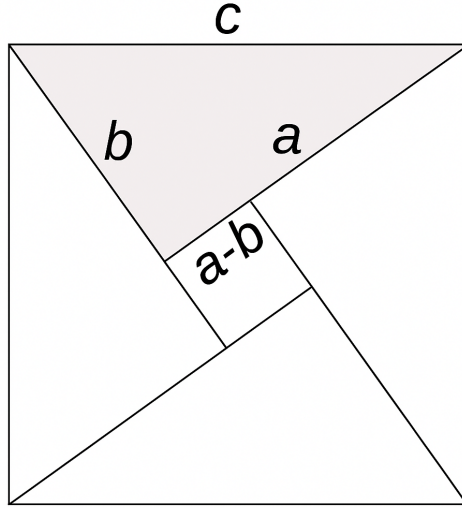
Burada  $p_i$ 'ler birbirinden farklı asal sayılar,  $a_i$ 'ler ise pozitif tam sayılardır. Bu teklilik, asal sayıların yalnızca 1 ve kendilerine bölünebilmesiyle ilgilidir. Eğer  $n$ , farklı asal çarpan dizileriyle ifade edilebilseydi, bazı asal sayıların birden fazla çarpan dizisinde yer alması gerekirdi. Bu durum asal sayı tanımına aykırıdır. Bu nedenle her sayı, asal çarpanlara ayırmada yalnızca bir biçimde ifade edilir [7]. ■

**Teorem 3.2** (Pisagor Teoremi). Dik üçgenlerde, hipotenüsün karesi, dik kenarların karelerinin toplamına eşittir. Yani,  $a$  ve  $b$  dik kenarlar,  $c$  hipotenüs olmak üzere,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

'dır.

Bu teorem, adını Antik Yunanlı Pisagoras'tan almasına rağmen, M.Ö. 1800'lere ait Babil tabletlerinde (ör. Plimpton 322) ve Hint matematik metinlerinde (Sulba Sutra) bu ilişki bilinmekteydi. Pisagoras, bu ilişkinin sistematik kullanımını sağlayan ilk kişilerden biri olarak kabul edilir [8].



**Şekil 3.1** Bahaskara-Pisagor Teoremi

*İspat.* Kenar uzunluğu  $c$  olan bir kare içine, dik kenarları  $a$  ve  $b$ , hipotenüsü  $c$  olan dört özdeş dik üçgen yerleştirilir. Bu düzenleme sonucunda, merkezde kenar uzunluğu  $(a - b)$  olan bir kare meydana gelir.

Büyük karenin alanı iki farklı şekilde hesaplanır.

- Doğrudan alan:  $c^2$
- Bileşenlerin toplamı:

$$4 \cdot \left( \frac{1}{2} ab \right) + (a - b)^2 = c^2$$

Bu iki ifade eşitlenerek:

$$\begin{aligned} 2ab + (a - b)^2 &= c^2 \\ 2ab + a^2 - 2ab + b^2 &= c^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

Bu sonuç, Pisagor Teoremi'nin geçerliliğini ortaya koyar. Bhaskara'nın sunduğu bu kanıt, sade yapısına rağmen oldukça güçlüdür [9]. ■

**Tanım 3.1** (İlkel Pisagor Üçlüsü). Bir Pisagor üçlüsü  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$ ,

$$\sigma^2 + \varphi^2 = \vartheta^2$$

koşulunu sağlayan pozitif tam sayılardan oluşur. Eğer  $\gcd(\sigma, \varphi, \vartheta) = 1$ , bu tür üçlüler ilkel Pisagor üçlüsü olarak adlandırılır [3].

Herhangi bir Pisagor üçlüsü  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$  için  $\gcd(\sigma, \varphi, \vartheta) = d$  olacak şekilde bir  $d \in \mathbb{Z}^+$  varsa, bu üçlü ilkel bir üçlünün  $d$  ile çarpılmasıyla elde edilebilir. Yani,

$$\sigma = d \cdot u, \quad \varphi = d \cdot v, \quad \vartheta = d \cdot w$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $(u, v, w)$  da bir Pisagor üçlüsüdür ve  $\gcd(u, v, w) = 1$  olacak şekilde ilkel yapıdadır.

Her Pisagor üçlüsü, uygun bir pozitif tam sayı  $d$  ile çarpılmış bir ilkel üçlünden türetilebilir. Bu nedenle tüm Pisagor üçlülerini oluşturmak için yalnızca ilkel olanları üretmek yeterlidir.

Yalnızca pozitif tamsayılarla tanımlanan Pisagor üçlülerinin ele alınması yeterlidir. Çünkü negatif değerler, bu üçlülerin işaret değiştirilmesiyle elde edilir.

**Lemma 3.1.** Eğer  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$  bir ilkel Pisagor üçlüsüyse, o hâlde aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\gcd(\sigma, \varphi) = \gcd(\varphi, \vartheta) = \gcd(\vartheta, \sigma) = 1$$

*İspat.* Varsayalım ki  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$  bir ilkel Pisagor üçlüsü olsun. Aksini varsayarak  $\gcd(\sigma, \varphi) = d > 1$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda,  $\sigma$  ve  $\varphi$  sayılarının ortak bölenlerinden biri  $d$ 'dir ve  $d$ 'nin bir asal böleni olan  $p$  hem  $\sigma$ 'i hem de  $\varphi$ 'yi böler.

Pisagor Teoremi'ne göre,

$$\sigma^2 + \varphi^2 = \vartheta^2$$

$p \mid \sigma$  ve  $p \mid \varphi$  olduğundan,  $p$  aynı zamanda  $\sigma^2 + \varphi^2$  ifadesini de böler. Dolayısıyla  $p \mid \vartheta^2$  olur. Buradan da  $p \mid \vartheta$  olduğu sonucu çıkar.

Bu durumda  $p$ , hem  $\sigma$ , hem  $\varphi$ , hem de  $\vartheta$ 'yi böler ki bu,  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$  üçlüsünün ilkel olduğu varsayımıyla çelişir. Dolayısıyla,

$$\gcd(\sigma, \varphi) = 1$$

Aynı yöntemle  $\gcd(\varphi, \vartheta) = 1$  ve  $\gcd(\vartheta, \sigma) = 1$  olduğu da gösterilebilir. ■

**Lemma 3.2 (Mod 4'e Göre İki Kare Toplamı).** Eğer bir tam sayı  $n$  için  $n \equiv 3 \pmod{4}$  ise, bu sayı iki tam karenin toplamı şeklinde ifade edilemez.

*İspat.* Varsayalım ki  $n = \sigma^2 + \varphi^2$  şeklinde iki tam sayının karesi toplamı olarak yazılabiliyor olsun. Bilinen bir sonuç olarak, herhangi bir tam sayının karesi  $(\text{mod } 4)$  sınıfında yalnızca 0 veya 1 olabilir,

$$w^2 \equiv 0 \text{ veya } 1 \pmod{4}$$

Bu durumda,  $\sigma^2 + \varphi^2$  aşağıdaki alabileceklere sahip olur,

$$\sigma^2 + \varphi^2 \equiv 0 + 0 = 0, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 2 \pmod{4}$$

Dolayısıyla,  $\sigma^2 + \varphi^2 \equiv 0, 1, 2 \pmod{4}$  olabilir ancak hiçbir şekilde 3 mod 4 olamaz.

Oysa varsayımımıza göre  $n \equiv 3 \pmod{4}$  idi. Bu bir çelişkidir. O hâlde  $n$  sayısı iki tam kare toplamı biçiminde yazılamaz [10, 11]. ■

**Lemma 3.3** (Karelerle Çarpım Korunumu). Eğer bir pozitif tam sayı  $n$  iki tam karenin toplamı olarak yazılabiliyorsa, o hâlde  $k^2n$  de iki tam karenin toplamı olarak ifade edilir.

**Lemma 3.4** (İki Kare Toplamlarının Çarpımı). İki karenin toplamı olan sayıların çarpımı da yine iki karenin toplamıdır,

$$(\lambda^2 + \eta^2)(\zeta^2 + \rho^2) = (\lambda\zeta + \eta\rho)^2 + (\lambda\rho - \eta\zeta)^2$$

*İspat.* Sağ tarafı açılır,

$$\begin{aligned} (\lambda\zeta + \eta\rho)^2 + (\lambda\rho - \eta\zeta)^2 &= \lambda^2\zeta^2 + 2\lambda\eta\zeta\rho + \eta^2\rho^2 + \lambda^2\rho^2 - 2\lambda\eta\zeta\rho + \eta^2\zeta^2 \\ &= \lambda^2(\zeta^2 + \rho^2) + \eta^2(\zeta^2 + \rho^2) \\ &= (\lambda^2 + \eta^2)(\zeta^2 + \rho^2) \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır. ■

**Lemma 3.5.** Her  $p \equiv 1 \pmod{4}$  asal sayısı, iki tam karenin toplamı biçiminde yazılabilir.

*İspat.* Lemma 3.1'ye göre,  $\sigma^2 + \varphi^2$  toplamı  $m$  tam sayısına bölünebilecek şekilde  $mp = \sigma^2 + \varphi^2$  biçiminde yazılabilir. En küçük böyle bir  $m$  pozitif tam sayısı olduğunu varsayalım. Çelişki yöntemiyle  $m > 1$  olduğunu varsayalım.

Mod  $m$ 'e göre  $r \equiv \sigma$ ,  $s \equiv \varphi$ ,  $-\frac{m}{2} < r, s \leq \frac{m}{2}$  olacak şekilde tanımlanabilir. Bu durumda,

$$r^2 + s^2 \equiv \sigma^2 + \varphi^2 \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow r^2 + s^2 = mn$$

Şimdi,

$$(r^2 + s^2)(\sigma^2 + \varphi^2) = m^2 np$$

Öte yandan, önceki lemma gereği,

$$(r^2 + s^2)(\sigma^2 + \varphi^2) = (r\sigma + s\varphi)^2 + (r\varphi - s\sigma)^2$$

Bu ifadeler  $m$ 'ye tam bölünür, çünkü,

$$r\sigma + s\varphi \equiv \sigma^2 + \varphi^2 \equiv 0, \quad r\varphi - s\sigma \equiv \sigma\varphi - \varphi\sigma \equiv 0 \pmod{m}$$

Yani,

$$np = \left(\frac{r\sigma + s\varphi}{m}\right)^2 + \left(\frac{r\varphi - s\sigma}{m}\right)^2$$

Ayrıca,

$$r^2 + s^2 \leq \frac{m^2}{2} \Rightarrow mn \leq \frac{m^2}{2} \Rightarrow n < m$$

$n = 0$  mümkün değildir, aksi takdirde  $r = s = 0 \Rightarrow m \mid \sigma, m \mid \varphi \Rightarrow m^2 \mid mp \Rightarrow m \mid p$  olur. Ancak  $m < p$  olduğundan bu çelişkidir. O hâlde  $m = 1$  ve  $p = \sigma^2 + \varphi^2$ . ■

*Yorum 3.1.* Bu ispat, sadece  $p$ 'nin iki kare toplamı olduğunu garanti eder, fakat  $\sigma$  ve  $\varphi$ 'nin tam değerlerini vermez [12, 13].

**Lemma 3.6.**

$$\omega^2 = \sigma^2 + \varphi^2$$

olmak üzere  $(\sigma, \varphi, \omega)$  İlkel Pisagor üçlülerinden,  $\sigma$  veya  $\varphi$  sayılarından biri çift, diğeri tek olmalıdır.

*İspat.* İki durumu ayrı ayrı incelenir.

- (i) Hem  $\sigma$  hem de  $\varphi$  çift olsun. Bu durumda  $\sigma = 2a$  ve  $\varphi = 2b$  şeklinde yazılabilir. O hâlde,

$$\omega^2 = \sigma^2 + \varphi^2 = 4a^2 + 4b^2 = 4(a^2 + b^2)$$

Buradan  $\omega^2$  de 4 ile tam bölünür, dolayısıyla  $\omega$  da çift olur. Bu durumda,

$$\gcd(\sigma, \varphi, \omega) \geq 2$$

olur. Bu, üçlünün ilkel olmasına aykırıdır.

(ii) Hem  $\sigma$  hem de  $\varphi$  tek olsun. Tek sayıların karesi daima  $1 \pmod{4}$ 'e denktir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\sigma^2 &\equiv 1 \pmod{4}, & \varphi^2 &\equiv 1 \pmod{4} \\ \Rightarrow \sigma^2 + \varphi^2 &\equiv 1 + 1 = 2 \pmod{4}\end{aligned}$$

Ancak hiçbir tam sayının karesi  $2 \pmod{4}$ 'e denk olamaz. Bu da bir çelişkidir.

Dolayısıyla,  $\sigma$  ve  $\varphi$ 'den biri tek, diğeri çift olmak zorundadır. ■

**Sonuç 3.1.** Eğer  $\sigma, \varphi, \vartheta$  bir ilkel Pisagor üçlüsü ise ve  $\sigma$  çift bir sayı ise o zaman  $\varphi$  ve  $\vartheta$  tek sayılardır.

**Lemma 3.7.** Aralarında asal iki tamsayı olan  $r, s \in \mathbb{Z}$  için, eğer  $rs$  bir tam kare ise, o hâlde hem  $r$  hem de  $s$  ayrı ayrı tam karedir. Yani  $r = a^2$  ve  $s = b^2$  olacak şekilde  $a, b \in \mathbb{Z}$  vardır.

*İspat.* Teorem 3.2'e göre, her pozitif tamsayıyı asal sayıların üsleri biçiminde benzersiz şekilde ifade etmek mümkündür. Bu bağlamda  $r$  ve  $s$  tamsayıları aralarında asal olduklarından dolayı, birbirlerinden tamamen ayrık asal sayıların üsleri biçiminde yazılabilirler. Yani,  $r = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$  ve  $s = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \cdots q_m^{b_m}$  şeklindedir ve burada  $\{p_i\}$  ve  $\{q_j\}$  kümesi aralarında asal olduğundan ortak asal çarpan içermez.

$r.s$  ifadesi bir tam kare olduğuna göre, bu çarpımın asal çarpanlara ayrılmış hâlinde tüm üstel değerler çift olmalıdır. Ancak  $r$  ve  $s$  aralarında asal olduklarından, bu üstel değerlerin tamamı ya sadece  $r$ 'de ya da sadece  $s$ 'de bulunur. Dolayısıyla  $r$ 'nin tüm asal çarpanlarının üsleri de çift olmak zorundadır, aynı durum  $s$  için de geçerlidir. Bu ise, hem  $r$ 'nin hem de  $s$ 'nin her birinin tam kare olduklarını gösterir. Böylece  $r = a^2$  ve  $s = b^2$  olacak şekilde  $a, b \in \mathbb{Z}$  tamsayıları bulunur. ■

**Teorem 3.3.** Pisagor denkleminin tüm ilkel tamsayı çözümleri  $\sigma^2 + \varphi^2 = \omega^2$  biçimindedir ve aşağıdaki koşulları sağlar,

$$\gcd(\sigma, \varphi, \omega) = 1, \quad 2 \mid \sigma, \quad \sigma > 0, \quad \varphi > 0, \quad \omega > 0$$

Bu çözümler aşağıdaki parametrik formülle verilir,

$$\sigma = 2\eta\kappa, \quad \varphi = \eta^2 - \kappa^2, \quad \omega = \eta^2 + \kappa^2$$

Burada  $\eta > \kappa > 0$ ,  $\gcd(\eta, \kappa) = 1$  ve  $\eta \not\equiv \kappa \pmod{2}$  olmalıdır.

*İspat.* Eğer  $\sigma, \varphi, \omega$  bir (pozitif) ilkel Pisagor üçlüsü ise ve  $\sigma$  çift,  $\varphi$  ile  $\omega$  tek sayılar olarak kabul edilirse, bu durumda  $\omega - \varphi$  ve  $\omega + \varphi$  birer çift tamsayıdır. Tanımlayalım,

$$\omega - \varphi = 2\nu, \quad \omega + \varphi = 2\nu$$

Pisagor denklemi şu şekilde yazılır,

$$\sigma^2 = (\omega - \varphi)(\omega + \varphi)$$

Buradan,

$$\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 = \nu\nu$$

$\nu$  ve  $\nu$  aralarında asal olmak zorundadır. Aksi takdirde  $\gcd(\nu, \nu) = \lambda > 1$  olurdu ve bu durumda  $\lambda$ , hem  $\omega$  hem de  $\varphi$ 'yi bölmek zorunda kalırdı. Bu da  $\gcd(\varphi, \omega) = 1$  ile çelişir.

Lemma 3.3'e göre  $\nu$  ve  $\nu$  birer tam kare olmalıdır,

$$\nu = \kappa^2, \quad \nu = \eta^2$$

Bu değerler yerine yazıldığında,

$$\omega = \eta^2 + \kappa^2, \quad \varphi = \eta^2 - \kappa^2, \quad \sigma^2 = 4\eta^2\kappa^2 \Rightarrow \sigma = 2\eta\kappa$$

Ayrıca,  $\gcd(\varphi, \omega) = 1$  koşulunu sağlamak için  $\gcd(\eta, \kappa) = 1$  olmalıdır. Aksi takdirde ortak bölen  $\sigma, \varphi$  ve  $\omega$ 'yı da böler.

Eğer  $\eta$  ve  $\kappa$  her ikisi de tek ya da çift olsaydı, hem  $\varphi$  hem de  $\omega$  çift olurdu. Bu, ilkel olma koşuluna aykırıdır. O hâlde, tam olarak biri tek, diğeri çift olmalıdır,

$$\eta \not\equiv \kappa \pmod{2}$$

Tersi Yön, belirtilen koşulları sağlayan iki tamsayı  $\eta > \kappa > 0$  alalım. Aşağıdaki eşitlik geçerlidir,

$$(2\eta\kappa)^2 + (\eta^2 - \kappa^2)^2 = (\eta^2 + \kappa^2)^2$$

Bu da  $\sigma = 2\eta\kappa, \varphi = \eta^2 - \kappa^2, \omega = \eta^2 + \kappa^2$  üçlüsünün gerçekten bir Pisagor üçlüsü olduğunu gösterir.

Bu üçlünün ilkel olduğunu varsayalım ve  $\gcd(\sigma, \varphi, \omega) = \lambda > 1$  olsun. Bu durumda  $\lambda$  asal bir bölen olmalı ve  $\lambda \neq 2$ 'dir çünkü  $\omega$  tektir.  $\lambda$ , hem  $\varphi$  hem de  $\omega$ 'yı böldüğünde  $\lambda \mid (\omega + \varphi)$  ve  $\lambda \mid (\omega - \varphi)$  olur. Bu da  $\lambda \mid 2\eta^2$  ve  $\lambda \mid 2\kappa^2$  sonucunu

verir. Dolayısıyla  $\lambda$ , hem  $\eta$  hem de  $\kappa$ 'yı böler ki bu da  $\gcd(\eta, \kappa) = 1$  ile çelişir.

O hâlde  $\lambda = 1$  olmalı ve  $\sigma, \varphi, \omega$  gerçekten ilkel bir Pisagor üçlüsüdür [14, 15]. ■

**Tablo 3.1** (m ve n, 10'un kuvvetleri + 1 Pisagor Üçlüleri)

$\sigma$	$\varphi$	$\vartheta$
991800	202202	1012202
99018000	20022002	101022002
9900180000	2000220002	10100220002
990001800000	200002200002	1010002200002
99000018000000	20000022000002	101000022000002



**Tablo 3.2**  $\sigma \leq 15$  koşulunu sağlayan bazı ilkel Pisagor üçlüleri

DEĞİŞKENLER		PİSAGOR ÜÇLÜLERİ		
$\sigma$	$\kappa$	$\sigma = 2\eta\kappa$	$\varphi = \eta^2 - \kappa^2$	$\omega = \eta^2 + \kappa^2$
2	1	<b>4</b>	3	5
3	1	6	8	10
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	<b>25</b>
5	1	10	24	26
5	2	20	21	29
5	3	30	16	34
5	4	40	<b>9</b>	41
6	1	12	35	37
6	5	60	11	61
7	1	14	48	50
7	2	28	45	53
7	4	56	33	65
8	1	<b>16</b>	63	65
8	3	48	55	73
8	5	80	39	89
9	1	18	80	82
9	2	<b>36</b>	77	85
9	4	72	65	97
10	1	20	99	101
10	3	60	91	109
11	2	44	117	125
11	10	220	21	221
12	1	24	143	145
12	5	120	119	<b>169</b>
12	11	264	23	265
13	12	312	<b>25</b>	313
13	10	260	69	269
14	9	252	115	277
14	13	364	27	365
15	8	240	161	<b>289</b>
15	14	420	29	421

Tablo 3.2'nin incelenmesi sonucunda, asal Pisagor üçlülerini oluşturan  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$  kenarlarının ardışık tam sayılar şeklinde düzenlenebildiği gözlemlenmiştir. Ayrıca, tabloda kalın olarak belirtilen bazı değerler, ilgili kenarların birer kare sayı olabileceğine işaret etmektedir.

Aşağıdaki çıkarımlar yapılabilir,

- (i) En az bir dik kenarın 3 ile tam bölünebildiği gözlemlenmektedir.

- (ii) Üçlüyü oluşturan kenarlardan yalnızca bir tanesi 5 ile tam bölünebilmektedir.
- (iii) Her üçlüde  $\sigma$  kenarının genellikle 4 ile tam bölündüğü dikkati çekmektedir.
- (iv) Dik kenarların çarpımının çoğu durumda 12 ile tam bölünebildiği görülmektedir.
- (v) Üç kenarın çarpımı, yaygın olarak 60 ile tam bölünebilmektedir.
- (vi) Hipotenüs olan  $\omega$  kenarının bir fazlası ya da bir eksiği bir kare sayı olabilir. Örneğin,  $\vartheta = 65$  için  $z - 1 = 64 = 8^2$ .
- (vii) Bazı örneklerde hem  $\sigma$  hem de  $\varphi$  kenarları kare sayı olabilmektedir. Bu durum, üçlünün simetrik yapısına işaret etmektedir.
- (viii)  $\sigma$  ve  $\varphi$  kenarlarının her ikisi de tam kare olduğunda, ilgili Pisagor üçlüsü ilginç bir şekilde  $(k^2, m^2, n)$  biçimine yaklaşan bir yapı sergilemektedir.

### Aynı Çevreye Sahip Pisagor Üçgenleri

Aynı çevreye sahip farklı ilkel Pisagor üçgenlerine nadir rastlanır. Özellikle asal Pisagor üçlüleri için bu durum oldukça sınırlıdır. Aşağıdaki üç üçgen aynı çevreye sahiptir,

$$(7080, 119, 7081), \quad (5032, 3255, 5993), \quad (168, 7055, 7057)$$

Bu üçlüler şu parametrik değerlerle üretilmiştir,

$$(m, n) = (60, 59), \quad (68, 37), \quad (84, 1)$$

Ortak çevreleri,

$$7080 + 119 + 7081 = 14,280$$

Daha küçük ortak çevreye sahip ilkel üçgenler de vardır,

$$(48, 20, 52), \quad (24, 45, 51), \quad (40, 30, 50)$$

Bu üçgenlerin çevresi,

$$48 + 20 + 52 = 120$$

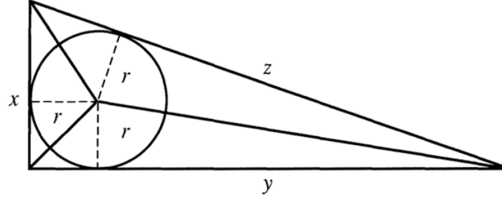
'dir [1].

**Teorem 3.4.** Bir Pisagor üçgeninin iç çemberinin yarıçapı her zaman bir tam sayıdır.

*İspat.*  $r$  dik üçgenin hipotenüs uzunluğu  $z$  ve kenar uzunlukları  $x$  ve  $y$  olan, iç çemberin yarıçapını temsil etsin. Üçgenin alanı, çemberin merkezinde ortak bir köşeye sahip üç küçük üçgenin alanlarının toplamına eşittir. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}rx + \frac{1}{2}ry + \frac{1}{2}rz = \frac{1}{2}r(x + y + z)$$

Durum aşağıda gösterilmiştir,



**Şekil 3.2** Pisagor Üçgeni ve İç Teğet Çemberi

Şimdi, Teorem 3.3'e göre,

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Ancak bu denklemin pozitif tam sayı çözümlerinin şu şekilde verildiğini biliyoruz,

$$x = 2kst, \quad y = k(s^2 - t^2), \quad z = k(s^2 + t^2)$$

uygun pozitif tam sayılar  $k, s, t$  seçildiğinde.  $\sigma, y, z$  yerine bu değerleri koyarak ve

$$xy = r(x + y + z)$$

denkleminde çözerek  $r$  için şu sonuca ulaşılır,

$$\begin{aligned} r &= \frac{2k^2st(s^2 - t^2)}{k(2st + s^2 - t^2 + s^2 + t^2)} \\ &= \frac{kt(s^2 - t^2)}{s + t} = kt(s - t) \end{aligned}$$

ki bu bir tam sayıdır. ■

### 3.0.1 FERMAT TEOREMİ

**Teorem 3.5** (Fermat'ın Özel Teoremi). Denklem  $\sigma^4 + \varphi^4 = \vartheta^2$ 'nin pozitif tam sayılarda çözümü yoktur.

*İspat.* Varsayalım ki  $(a, b, c)$  pozitif tamsayılardan oluşan bir çözüm üçlüsü olsun ve  $a^4 + b^4 = c^2$  denklemi sağlansın. Önce  $\gcd(a, b) = d$  olsun. O hâlde bazı pozitif

tamsayılar  $\alpha$  ve  $\beta$  için,

$$a = d\alpha, \quad b = d\beta, \quad \text{ve} \quad \gcd(\alpha, \beta) = 1$$

Denkleme yerleştirirsek,

$$(d\alpha)^4 + (d\beta)^4 = c^2 \Rightarrow d^4(\alpha^4 + \beta^4) = c^2$$

Buradan  $d^4 \mid c^2$  elde edilir, bu da  $d^2 \mid c$  anlamına gelir. Öyleyse  $c = d^2\gamma$  şeklinde yazılabilir. Denklem şu hale gelir,

$$\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2$$

Bu,  $(\alpha, \beta, \gamma)$  üçlüsünün de denklemi sağladığını gösterir. Ayrıca  $\gcd(\alpha, \beta) = 1$  olduğundan, başlangıçta  $\gcd(a, b) = 1$  varsayılabilir.

Denklem şu şekilde de yazılabilir,

$$(a^2)^2 + (b^2)^2 = c^2$$

Yani  $(a^2, b^2, c)$  bir Pisagor üçlüsüdür ve  $\gcd(a^2, b^2) = 1$  olduğundan bu üçlü ilkel (primitive) bir Pisagor üçlüsüdür. Bilinen formülayona göre,

$$a^2 = 2mn, \quad b^2 = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2$$

buradaki  $m > n$ ,  $\gcd(m, n) = 1$  ve  $m \not\equiv n \pmod{2}$  koşullarını sağlar.

Bu durumda  $b$  tek olmalıdır. Eğer  $n$  tek olsaydı,  $m$  çift olurdu ve  $b^2 = m^2 - n^2 \equiv 3 \pmod{4}$  olurdu, bu bir çelişkidir. O hâlde  $n$  çift,  $m$  tek olmalıdır.  $n = 2q$  yazılırsa,

$$a^2 = 4mq \Rightarrow (a^2)^2 = 4mq \Rightarrow a^4 = 4mq$$

$\gcd(m, q) = 1$  olduğundan  $m = t^2$ ,  $q = u^2$  gibi kareler olmalıdır.

Şimdi ikinci bir Pisagor üçlüsü daha üretelim,

$$n^2 + b^2 = m^2$$

Bu da  $(n, b, m)$  üçlüsünün Pisagor üçlüsü olduğunu gösterir.  $\gcd(n, b) = 1$  olduğu için bu üçlü de ilkel bir üçlüdür. O hâlde,

$$n = 2vw, \quad b = v^2 - w^2, \quad m = v^2 + w^2$$

Burada  $v > w$ ,  $\gcd(v, w) = 1$ ,  $v \not\equiv w \pmod{2}$ . Fakat  $vw = q = u^2$  olduğundan,  $v$  ve  $w$  da kare sayılardır,  $v = r^2$ ,  $w = s^2$ . O zaman,

$$m = v^2 + w^2 = r^4 + s^4 = t^2$$

Bu da  $(r, s, t)$  üçlüsünün de aynı denklemi sağladığını ve  $t < c$  olduğunu gösterir. Oysa  $c$  en küçük çözümdü. Bu çelişki, başlangıç varsayımının yanlış olduğunu ispatlar.

Dolayısıyla  $\sigma^4 + \varphi^4 = \vartheta^2$  denkleminin pozitif tam sayı çözümü yoktur [6, 16]. ■

**Teorem 3.6** (Fermat'ın Son Teoreminin  $n = 4$  Durumu ). *Denklem  $\sigma^4 + \varphi^4 = \vartheta^4$ 'nin pozitif tam sayı çözümü yoktur.*

*İspat.* Varsayalım ki  $\sigma^4 + \varphi^4 = \vartheta^4$  denkleminin pozitif tamsayı çözümü vardır. O hâlde her iki tarafın karesi alınarak şu denklem elde edilir,

$$(\sigma^2)^4 + (\varphi^2)^4 = (\vartheta^2)^2$$

Bu ifade,

$$\sigma^4 + \varphi^4 = \vartheta^2$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Ancak önceki Teorem 3.5'te bu denklemin pozitif tamsayı çözümü olmadığı zaten ispatlanmıştır. Dolayısıyla,  $\sigma^4 + \varphi^4 = \vartheta^4$  denklemi de pozitif tamsayı çözümüne sahip olamaz.

Bu sonuç, Fermat'ın Son Teoremi'nin  $n = 4$  durumu için geçerli olduğunu gösterir. Bu özel durum Fermat tarafından 17. Fermat, bu sonucu genel teorem için temel bir adım olarak kabul etmiştir. Fermat, bu sonucu genel teorem için temel bir adım olarak kabul etmiştir [17–19]. ■

**Teorem 3.7** (Fermat'ın Son Teoremi'nin Genelleştirilmiş Hali). Eğer  $\sigma, \varphi, \vartheta$  pozitif tam sayılar ve  $r, s, t$  pozitif tam sayılar olmak üzere  $\gcd(\sigma, \varphi, \vartheta) = 1$  ve

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} < 1$$

şartı sağlanıyorsa, o zaman  $\sigma^r + \varphi^s = \vartheta^t$  denkleminin yalnızca sonlu sayıda çözümü vardır.

*İspat.* Bu teorem, Fermat'ın Son Teoremi'nin modern bir genellemesidir ve analitik sayı teorisinin bazı alanlarıyla ilişkilidir. Verilen eşitsizlik, sınırlı sayıda çözümün

varlığını garanti eder. Eğer  $r = s = t = n$  olacak şekilde  $n > 2$  ise bu durum klasik Fermat'ın Son Teoremi'ni kapsar [18].

Daniel Mauldin tarafından yapılan kapsamlı çalışmalarında, bu eşitsizliği sağlayan ve tam sayı çözüm veren yalnızca 10 örnek bilinmektedir. Bunlar dışında başka bir çözüm rapor edilmemiştir. ■



**Örnek 3.1** (Mauldin'in Bildirdiği Çözümler). Verilen eşitsizliği sağlayan  $\sigma^r + \varphi^s = \vartheta^t$  biçimindeki denklemin bilinen on çözümü aşağıdaki gibidir,

$$1^1 + 2^3 = 3^2$$

$$2^3 + 3^2 = 1^5$$

$$3^2 + 1^5 = 2^3$$

$$1^5 + 3^2 = 2^3$$

$$2^3 + 1^5 = 3^2$$

$$3^2 + 2^3 = 1^5$$

$$1^5 + 2^3 = 3^2$$

$$2^3 + 3^2 = 1^5$$

$$3^2 + 1^5 = 2^3$$

$$1^5 + 3^2 = 2^3$$

[20, 21]

**Teorem 3.8** (Catalan Varsayımı – Mihăilescu'nun Teoremi). Diyofant denklemi,

$$\sigma^m - \varphi^n = 1, \quad m, n \geq 2$$

pozitif tam sayılar kümesinde yalnızca bir çözüm çiftine sahiptir,

$$\sigma = 3, \quad m = 2, \quad \varphi = 2, \quad n = 3$$

çünkü,

$$3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$$

bu, bu formdaki tek pozitif tam sayı çözümdür.

1976 yılında Tijdeman, bu denklemin yalnızca sonlu sayıda çözümü olabileceğini göstermiştir. 2002 yılında ise Preda Mihăilescu, Catalan varsayımını tam olarak ispatlamış ve bu sonucu kesinleştirmiştir. Bu nedenle, bu teorem günümüzde "Mihăilescu Teoremi" olarak da bilinmektedir [22, 23].

## SÜREKLİ KESİRLER ve PELL DENKLEMLERİ

---

Süreklı kesırler, rasyonel ve irrasyonel sayıların farklı temsillere olanak tanıyan bir gösterim biçimidir. Bu gösterim, özellikle sayıların yaklaşımının incelenmesinde ve bazı Diyofant denklemlerinin çözümünde etkin olarak kullanılır. Süreklı kesırler, iki temel gruba ayrılır: sonlu süreklı kesırler ve sonsuz süreklı kesırler.

Genel olarak, bir süreklı kesir şu biçimde gösterilir,

$$\alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \dots}}}$$

Bu gösterimde  $\alpha_0$  tam sayı, diğer  $\alpha_i$  ( $i \geq 1$ ) değerleri ise pozitif tam sayılardır. Bu gösterim, eğer yalnızca sonlu sayıda terim içeriyorsa sonlu süreklı kesir, sonsuz sayıda terim içeriyorsa sonsuz süreklı kesir olarak adlandırılır.

**Tanım 4.1** (Sonlu Süreklı Kesir). Bir sonlu süreklı kesir, şu şekilde ifade edilir,

$$\alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\alpha_k}}}}$$

Burada  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$  reel sayılardır ve yalnızca  $\alpha_0$  negatif olabilir. Geri kalan tüm terimler pozitif olmalıdır. Bu kesirdeki  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  değerlerine *kısmi paydalar* denir. Eğer tüm terimler tam sayı ise, bu tür kesırler *basit süreklı kesir* olarak adlandırılır [24, 25].

Örnek 4.1.  $\frac{187}{53}$  rasyonel sayısını sürekli kesir biçiminde ifade edelim,

$$\begin{aligned}\frac{187}{53} &= 3 + \frac{28}{53} \\ \frac{53}{28} &= 1 + \frac{25}{28} \\ \frac{28}{25} &= 1 + \frac{3}{25} \\ \frac{25}{3} &= 8 + \frac{1}{3} \\ \frac{3}{1} &= 3\end{aligned}$$

Bu adımlar sonucunda elde edilen sürekli kesir açılımı,

$$\frac{187}{53} = [3; 1, 1, 8, 3]$$

şeklinde. Açılımda tam sayı kısmı 3, ardından gelen kısmi paydalar ise 1,1,8 ve 3'tür. Bu ifade, hem kesirin yapısını ayrıntılı olarak gösterir hem de yaklaşık değerler elde etmek için oldukça kullanışlıdır.

Sürekli kesir açılımı, rasyonel sayıların benzersiz temsillerini sağlarken, irrasyonel sayılar için sonsuz ancak düzenli bir yapıyı ortaya koyar. Bu yöntem, özellikle Pell tipi denklemlerin çözümlerinde önemli bir araç olarak kullanılır [26].

**Tanım 4.2** (Sonsuz Sürekli Kesirler). Bir sonsuz sürekli kesir, aşağıdaki biçimde tanımlanır,

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{\dots}}}}$$

Burada  $a_0, a_1, a_2, \dots$  ve  $b_1, b_2, b_3, \dots$  gerçekte sayılardır. Eğer her  $a_i$  tam sayı ve tüm  $b_i = 1$  ise, bu yapı *basit sonsuz sürekli kesir* olarak adlandırılır. Bu tür kesirler genellikle irrasyonel sayıların temsili için kullanılır.

Kısa gösterim biçimi olarak,

- Sonlu sürekli kesir,  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$
- Sonsuz sürekli kesir,  $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$

Bu gösterim, hesaplamaları sadeleştirmek ve yapıyı daha açık sunmak için tercih edilir [27].

**Tanım 4.3** (Periyodik Sonsuz Sürekli Kesirler). Bir sonsuz sürekli kesir, belirli bir tam sayı dizisi sonsuz kez tekrar ediyorsa, *periyodik* olarak adlandırılır. Bu tür yapılar irrasyonel kareköklerin ve bazı sabit sayıların temsillerinde sıkça karşımıza çıkar.

Örnek ,

$$[3; 1, 2, 1, 6, 1, 6, 1, 6, \dots]$$

kesiri,  $[3; 1, 2, \overline{1, 6}]$  şeklinde kısaca gösterilir. Burada  $\overline{1, 6}$  ifadesi,  $\{1, 6\}$  dizisinin sürekli tekrar ettiğini belirtir.

Eğer tekrar eden blok  $\{1, 6\}$  bu kesirin en kısa periyodik parçasıysa, bu parçaya *periyot* denir ve *periyot uzunluğu* 2 olur.

**Örnek 4.2** ( $\pi$ 'nin Sürekli Kesir Açılımı). İrrasyonel sayıların sürekli kesir açılımları sonlu değildir ve genellikle düzenli bir periyoda sahip olmazlar. Örneğin,  $\pi$  sayısının sürekli kesir açılımı şöyledir,

$$\begin{aligned} \pi &= 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}}}} \\ &= [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2] \end{aligned}$$

Bu açılım periyodik değildir. Ancak, irrasyonel sayıların rasyonel sayılarla en iyi yaklaşımını bulmada önemli rol oynar [28].

**Tanım 4.4** (Periyodik Sürekli Kesirin Eşleniği). Eğer bir sürekli kesir tamamen periyodik ise, yani

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \overline{a_n, \dots, a_{n+k}}],$$

bu durumda bu kesirin *eşleniği*  $\alpha'$  aşağıdaki biçimde tanımlanır,

$$\alpha' = [a_{n+k}; \dots, a_n, \dots, a_1, a_0]$$

Burada eşlenik, periyodik dizinin ters sıralanması ile elde edilir. Bu yapı, özellikle

cebirsel irrasyonel sayıların özelliklerini incelerken faydalıdır [2].

#### 4.1 Sürekli Kesirler ve Öklid Algoritması

Her rasyonel sayı, sonlu bir sürekli kesir olarak ifade edilebilir. Bu özelliğin kanıtı, Öklid Algoritması ile doğrudan ilişkilidir.

**Tanım 4.5** (Öklid Algoritması). İki tamsayının en büyük ortak bölenini (EBOB) bulmak için kullanılan klasik yöntemdir. Matematiksel olarak,  $\alpha$  ve  $\beta$  tamsayıları için,

$$\gcd(\alpha, \beta) = \gcd(\beta, \alpha \bmod \beta) = \gcd(|\alpha|, |\beta|)$$

şeklinde ifade edilir. Genellikle  $\alpha \geq \beta > 0$  varsayımıyla işlem başlatılır.

Algoritma, kalanlar dizisi oluşturarak ilerler. İşlem, kalan sıfır oluncaya kadar sürdürülür,

$$a = q_1b + r_1, \quad 0 < r_1 < b$$

$$b = q_2r_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_3r_2 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2$$

⋮

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n + 0$$

Bu algorithmanda elde edilen  $q_i$  katsayıları, rasyonel sayıların sürekli kesir açılımında doğrudan rol oynar. Böylece, Öklid Algoritması aracılığıyla her rasyonel sayının sonlu bir sürekli kesirle ifade edilebileceği gösterilmiş olur. Bu ilişki, özellikle Diophant denklemlerinin çözümünde, en iyi rasyonel yaklaşımların bulunmasında ve cebirsel sayıların yapısının anlaşılmasında kritik bir rol oynar [29, 30].

*Yorum 4.1.* Öklid Algoritması'nın sürekli kesirlerle bağlantısı, yalnızca hesaplama kolaylığı sağlamakla kalmaz; aynı zamanda sayı teorisinin birçok temel yapısının altında yatan aritmetik düzenliliği de ortaya koyar.

*Örnek 4.3.*  $\alpha = 187$ ,  $\beta = 53$  olmak üzere Öklid Algoritması adım adım uygulanır.

$$187 = 3 \times 53 + 28$$

$$53 = 1 \times 28 + 25$$

$$28 = 1 \times 25 + 3$$

$$25 = 8 \times 3 + 1$$

$$3 = 3 \times 1 + 0$$

Bu işlemler sonucunda,  $\gcd(187, 53) = 1$  bulunur. Elde edilen bölüm katsayıları sırasıyla  $(3, 1, 1, 8, 3)$ 'dir. Bu değerler,  $\frac{187}{53}$  kesrinin sonlu sürekli kesir açılımını verir,

$$\frac{187}{53} = [3; 1, 1, 8, 3]$$

*Örnek 4.4.* Şimdi,  $\gcd(\alpha, \beta) \neq 1$  olan bir durum seçelim.  $\alpha = 252$ ,  $\beta = 84$  için Öklid Algoritması aşağıdaki gibi uygulanır.

$$252 = 3 \times 84 + 0$$

Bu durumda  $\gcd(252, 84) = 84$  bulunur. Tek adımda sonuçlandığı için bölüm katsayısı  $(3)$  olarak elde edilir. Bu durumda,

$$\frac{252}{84} = [3]$$

ve bu ifade doğrudan 3 tam sayısı olarak değerlendirilir. Bu örnek, tam sayıların da sürekli kesir açılımıyla temsil edilebileceğini göstermektedir.

*Yorum 4.2.* Bu örnekler, Öklid Algoritması'nın yalnızca en büyük ortak böleni bulmakla kalmayıp, aynı zamanda rasyonel sayıların sürekli kesir formuna dönüştürülmesinde etkili bir yöntem olduğunu ortaya koymaktadır. Sürekli kesir açılımları; özellikle yaklaşım teorisi, Diophant denklemleri ve cebirsel sayıların yapılarının anlaşılması açısından temel araçlardan biridir.

**Teorem 4.1** (Rasyonel Sayıların Sürekli Kesir Açılımı). Her rasyonel sayı, sonlu

bir sürekli kesir olarak ifade edilebilir ve bunun tersi de doğrudur.

*İspat.* Bir rasyonel sayı  $\frac{a}{b}$  için,  $b > 0$  olmak üzere Öklid Algoritması uygulanır.

$$\begin{aligned}a &= q_0b + r_1 \\b &= q_1r_1 + r_2 \\r_1 &= q_2r_2 + r_3 \\&\vdots \\r_{n-2} &= q_{n-1}r_{n-1} + r_n \\r_{n-1} &= q_n r_n + 0\end{aligned}$$

Bu algoritmadaki  $q_i$  katsayıları,  $\frac{a}{b}$  kesrinin sürekli kesir açılımındaki terimleri oluşturur,

$$\frac{a}{b} = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n]$$

Her bölme adımı sonlu sayıda işlem içerdiğinden, elde edilen kesir açılımı da sonludur. Böylece her rasyonel sayının, sonlu bir sürekli kesir ile gösterilebileceği ispatlanmış olur. ■

*Yorum 4.3.* Bu sonuç, sürekli kesirlerin yalnızca irrasyonel sayılara değil, aynı zamanda rasyonel sayılara da uygulanabilir olduğunu gösterir. Öklid Algoritması'nın bu bağlamdaki kullanımını hem tarihsel hem de yapısal olarak önemlidir.

*Örnek 4.5.*  $\frac{37}{64}$  kesrini sürekli kesir biçiminde ifade edelim. Bunun için Öklid algoritması adım adım uygulanır.

$$\begin{aligned}
 64 &= 1 \cdot 37 + 27 &\Rightarrow \frac{64}{37} &= 1 + \frac{27}{37} \\
 37 &= 1 \cdot 27 + 10 &\Rightarrow \frac{37}{27} &= 1 + \frac{10}{27} \\
 27 &= 2 \cdot 10 + 7 &\Rightarrow \frac{27}{10} &= 2 + \frac{7}{10} \\
 10 &= 1 \cdot 7 + 3 &\Rightarrow \frac{10}{7} &= 1 + \frac{3}{7} \\
 7 &= 2 \cdot 3 + 1 &\Rightarrow \frac{7}{3} &= 2 + \frac{1}{3} \\
 3 &= 3 \cdot 1 + 0 &\Rightarrow \frac{3}{1} &= 3
 \end{aligned}$$

Bu durumda,

$\frac{64}{37} = [1; 1, 2, 1, 2, 3]$  Dolayısıyla, tersini alarak  $\frac{37}{64}$  kesrinin sürekli kesir açılımı,  $\frac{37}{64} = [0; 1, 1, 2, 1, 2, 3]$  şeklinde elde edilir. Bu,  $\frac{37}{64}$  kesri için özgün ve adım adım hesaplanmış bir sonlu sürekli kesir gösterimidir.

**Tanım 4.6** (Yakınsak). Bir sonlu sürekli kesir olan  $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$  ifadesinden,  $k$  terimde kesilerek elde edilen ara kesire  $k$ . yakınsak (convergent) denir ve  $C_k$  ile gösterilir,

$$C_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k], \quad \text{ve} \quad 0 \leq k \leq n$$

Özellikle  $C_0 = a_0$  olarak tanımlanır.

Yakınsaklar, bir sürekli kesirin kısmi paydaları kullanılarak oluşturulan ve orijinal irrasyonel ya da rasyonel sayıya en yakın olan ardışık rasyonel yaklaşımlardır. Her  $C_k$ , kesre gitgide daha yakın bir değer sunar. İlginç bir özellik olarak, eğer  $k < n$  için  $a_k$  yerine şu ifade konulursa,

$$a_k + \frac{1}{a_{k+1}},$$

o zaman ortaya çıkan ifade,  $C_{k+1}$  yakınsağına eşit olur,

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}] = [a_0; a_1, \dots, a_k, a_{k+1}] = C_{k+1}$$

Bu nedenle, son yakınsak  $C_n$ , sürekli kesirin temsil ettiği tam rasyonel sayıyı verir.

*Örnek 4.6.*

$$\frac{17}{46} = [0; 2, 1, 5]$$

kesri için ardışık yakınsaklar aşağıdaki gibidir,

$$C_0 = 0$$

$$C_1 = [0; 2] = \frac{1}{2}$$

$$C_2 = [0; 2, 1] = \frac{1}{2 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{3}$$

$$C_3 = [0; 2, 1, 5] = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = \frac{17}{46}$$

Her bir  $C_k$ ,  $\frac{17}{46}$  kesrine bir öncekinden daha yakın bir yaklaşım sunar. Ayrıca bu yakınsaklar, sırayla kesirin altından ve üstünden yaklaşır.

Bu davranış, sürekli kesirlerin sağladığı en iyi rasyonel yaklaşım özelliğinin bir sonucudur.

*Yorum 4.4.* Yakınsakların her biri, aşağıdaki biçimde ifade edilir,

$$C_k = \frac{p_k}{q_k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

Burada  $p_k$  ve  $q_k$  sırasıyla  $k$ 'nın pay ve payda bileşenleridir. Bu sayılar, aşağıdaki özyinelemeli kurallara göre hesaplanabilir,

$$p_{-1} = 1, \quad p_0 = a_0$$

$$q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1$$

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

**Teorem 4.2.** Basit bir Sürekli kesirin  $k$ 'inci yakınsağı  $C_k$ , şu şekilde ifade edilir,

$$C_k = \frac{p_k}{q_k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

Burada  $p_k$  ve  $q_k$ , aşağıdaki özyineli kurallarla tanımlanır,

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

Bu ifadeler, Sürekli kesirlerin yakınsaklarını hesaplamada temel alınan klasik yapıdadır [24].

*İspat.* İlk terim için  $C_0 = a_0 = \frac{p_0}{q_0}$  olduğu açıktır. İkinci terimde,

$$C_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

Üçüncü yakınsak,

$$C_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{p_2}{q_2}$$

Genel durumda  $k \geq 2$  için  $C_k = \frac{p_k}{q_k}$  olduğu varsayılır. Bir sonraki yakınsak şöyle yazılır,

$$C_{k+1} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

Bu da tanımın her  $k$  için geçerli olduğunu gösterir. İspat tümevarım yoluyla tamamlanır. ■

*Örnek 4.7.* Kesir  $\frac{19}{51}$ 'in sürekli kesir açılımını ve yakınsama sınırlarını inceleyelim.

Öklid algoritması adımları,

$$51 = 2 \cdot 19 + 13$$

$$19 = 1 \cdot 13 + 6$$

$$13 = 2 \cdot 6 + 1$$

$$6 = 6 \cdot 1 + 0$$

Bu adımlardan, kesrin Sürekli kesir açılımı şu şekilde elde edilir,

$$\frac{19}{51} = [0; 2, 1, 2, 6]$$

Yakınsaklar için başlangıç değerleri,

$$p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0$$

genel formülleri,

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} p_0 &= 2 \cdot 1 + 0 = 2, & q_0 &= 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ p_1 &= 1 \cdot 2 + 1 = 3, & q_1 &= 1 \cdot 1 + 0 = 1 \\ p_2 &= 2 \cdot 3 + 2 = 8, & q_2 &= 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ p_3 &= 6 \cdot 8 + 3 = 51, & q_3 &= 6 \cdot 3 + 1 = 19 \end{aligned}$$

Yakınsaklar,

$$C_0 = \frac{1}{2}, \quad C_1 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = \frac{3}{8}, \quad C_3 = \frac{19}{51}$$

**Tablo 4.1** Sürekli kesir açılımı ve yakınsakları,  $\frac{19}{51} = [0; 2, 1, 2, 6]$

$k$	-2	-1	0	1	2	3
$a_k$	-	-	2	1	2	6
$p_k$	0	1	2	3	8	51
$q_k$	1	0	1	1	3	19
$C_k$	-	-	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{19}{51}$

**Teorem 4.3.** Eğer

$$C_k = \frac{p_k}{q_k}$$

ifadesi,

$$[a_0; a_1, \dots, a_n]$$

biçimindeki bir basit sürekli kesirin  $k$ -ıncı yakınsağı ise, o zaman aşağıdaki eşitlik sağlanır,

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1}$$

*İspat.*  $k = 1$  için doğrudan hesaplayalım,

$$p_1 q_0 - q_1 p_0 = (a_1 a_0 + 1)(1) - a_1(a_0) = 1 = (-1)^0$$

eşitliği geçerlidir.

Şimdi tümevarım yöntemiyle ilerleyelim.  $k = m$  için eşitliğin doğru olduğunu

kabul edelim,

$$p_m q_{m-1} - q_m p_{m-1} = (-1)^{m-1}$$

Bir sonraki adım için,

$$p_{m+1} = a_{m+1} p_m + p_{m-1},$$

$$q_{m+1} = a_{m+1} q_m + q_{m-1}$$

Bu durumda,

$$\begin{aligned} p_{m+1} q_m - q_{m+1} p_m &= (a_{m+1} p_m + p_{m-1}) q_m - (a_{m+1} q_m + q_{m-1}) p_m \\ &= a_{m+1} p_m q_m + p_{m-1} q_m - a_{m+1} p_m q_m - p_m q_{m-1} \\ &= p_{m-1} q_m - p_m q_{m-1} \\ &= -(-1)^{m-1} = (-1)^m \end{aligned}$$

Böylece eşitlik  $k = m + 1$  için de sağlanır. Tümevarım sonucu olarak,  $1 \leq k \leq n$  için tüm  $k$ 'lar için geçerlidir. ■

*Yorum 4.5.* Bu sonuç, her yakınsakta pay ve payda terimlerinin aralarında asal olduğunu gösterir. Çünkü

$$p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1} = (-1)^{k-1}$$

eşitliği, sonucun her zaman  $\pm 1$  çıktığını belirtir. Eğer  $p_k$  ve  $q_k$  ortak bir bölen taşıysaydı, bu ifade 1 ya da  $-1$  yerine daha büyük bir sayıya bölünebilirdi ki bu da çelişki oluşturur.

Dolayısıyla, her bir yakınsak en sade haliyle yazılmıştır. Bu özellik, sürekli kesirlerin rasyonel sayılar için en iyi yaklaşımı sağlayan özel kesirler olduğunu da doğrular [31].

*Yorum 4.6.* Bu eşitliğin önemli bir sonucu şudur, her  $C_k = \frac{p_k}{q_k}$  yakınsağında,  $p_k$  ve  $q_k$  aralarında asaldır. Çünkü bu ifade, yalnızca pay ve paydanın ortak böleni 1 olduğunda  $\pm 1$  değerini alır. Dolayısıyla, basit sürekli kesirlerden elde edilen tüm yakınsaklar daima en sade biçimdedir.

*Örnek 4.8.* Aşağıda sabit olmayan kısmi paydalardan oluşan özgün bir örnek verilmektedir,  $[0; 2, 3, 1, 4]$ . Bu kesirin ilk birkaç yakınsağı,

$$C_0 = \frac{0}{1}, \quad C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{3}{7}, \quad C_3 = \frac{4}{9}, \quad C_4 = \frac{19}{42}$$

biçimindedir. Buradaki pay ( $p_k$ ) ve payda ( $q_k$ ) dizileri aşağıdaki şekilde hesaplanır,

$$\begin{array}{ll}
 p_{-2} = 0, & p_{-1} = 1, \\
 q_{-2} = 1, & q_{-1} = 0, \\
 p_0 = 0, & q_0 = 1, \\
 p_1 = 1, & q_1 = 2, \\
 p_2 = 3, & q_2 = 7, \\
 p_3 = 4, & q_3 = 9, \\
 p_4 = 19, & q_4 = 42
 \end{array}$$

Bu örnek, az bilinen kısmi paylara sahip sürekli kesirlerin de benzer yapıya sahip olduğunu ve en iyi rasyonel yaklaşımı sağladığını göstermektedir.

**Teorem 4.4.** Eğer  $\gcd(a, b) = d > 1$  ise ve  $d \nmid c$ , o zaman  $a\sigma + by = c$  denkleminin tam sayı çözümü yoktur. Aksi hâlde  $d \mid c$  olduğunda, çözüm vardır ve denklem  $a'\sigma + b'y = c'$  biçiminde sadeleştirilir.

*İspat.* Eşitlik  $d = \gcd(a, b)$  olduğuna göre,  $d \mid a$  ve  $d \mid b$  olduğu açıktır. Eğer  $d \nmid c$  ise, o zaman denklem  $a\sigma + by = c$  biçiminde bir tamsayı çözüm barındıramaz.  $d \mid c$  varsayımıyla,  $a = da'$ ,  $b = db'$ ,  $c = dc'$  olarak yazılabilir. Böylece denklem,

$$a'\sigma + b'y = c'$$

biçimine indirgenmiş olur. Bu yeni denklemde  $\gcd(a', b') = 1$  olduğundan, aşağıdaki temel sonuç kullanılır,

$$a'\sigma_0 + b'y_0 = 1$$

denkleminin çözümü  $(\sigma_0, y_0)$  biliniyorsa, orijinal denklem için çözüm,

$$\sigma = c'\sigma_0, \quad y = c'y_0$$

şeklindedir. ■

**Sonuç 4.1.**  $\gcd(a, b) = 1$  için  $a\sigma + by = c$  denkleminin çözümünü bulmak amacıyla,  $\frac{a}{b}$  kesrini basit sürekli kesir olarak açabiliriz,

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$$

Bu kesirin son iki yakınsağı,

$$C_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \quad C_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{b}$$

olduğundan,  $p_n = a$ ,  $q_n = b$  olur. Teorem 4.3'de göre,

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

yazılır. Bu denklem şu formda da gösterilebilir,

$$a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

Buradan elde edilen  $\sigma_0 = q_{n-1}$ ,  $y_0 = -p_{n-1}$  çifti,  $a\sigma + by = (-1)^{n-1}$  denklemini sağlar. Her iki taraf  $c$  ile çarpıldığında genel çözüm elde edilir [27, 30].

**Lemma 4.1.** Basit bir sürekli kesirin  $k$ 'inci yakınsağının paydası  $q_k$  olmak üzere,

$$[a_0; a_1, \dots, a_n]$$

biçimindeki bir kesir için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır,

$$q_{k-1} \leq q_k, \quad 1 \leq k \leq n$$

Ayrıca  $k > 1$  için bu eşitsizlik kesindir. Yani

$$q_k > q_{k-1}$$

.

*İspat.* İlk olarak,  $k = 1$  durumu için,

$$q_0 = 1 \leq q_1 = a_1 \geq 1$$

olduğu açıktır.

Şimdi,  $k = m$  için

$$q_{m-1} \leq q_m$$

olduğunu varsayalım. Rekürsif formüle göre,

$$q_{m+1} = a_{m+1}q_m + q_{m-1}$$

yazılabilir. Buradan,

$$q_{m+1} \geq a_{m+1}q_m \geq 1 \cdot q_m = q_m$$

elde edilir. Ayrıca

$$a_{m+1} \geq 1$$

ve

$$q_{m-1} \geq 1$$

olduğu için,

$$q_{m+1} > q_m$$

sonucu da sağlanır.

Böylece tümevarım yöntemiyle

için

$$1 \leq k \leq n$$

ve

$$q_{k-1} \leq q_k$$

için

$$k > 1$$

$$q_k > q_{k-1}$$

olduğu ispatlanmıştır. ■

*Yorum 4.7.* Bu sonuç, sürekli kesir yakınsaklarının paydalarının monoton şekilde arttığını ve her yeni yakınsakta daha büyük payda elde edildiğini göstermektedir. Bu özellik, daha iyi rasyonel yaklaşıklıkların daha büyük paydalarla elde edildiğini açıkça ortaya koyar.

**Teorem 4.5.** Basit bir sürekli kesirin yakınsaması aşağıdaki düzenli yapıyı sergiler,

(i) Çift indisli yakınsaklar kesinlikle artar,

$$C_0 < C_2 < C_4 < \dots$$

(ii) Tek indisli yakınsaklar kesinlikle azalır,

$$C_1 > C_3 > C_5 > \dots$$

(iii) Her tek indisli yakınsak, tüm çift indisli yakınsaklardan büyüktür.

*İspat.* Önce, iki ardışık farkın toplamını inceleyelim,

$$C_{k+2} - C_k = (C_{k+2} - C_{k+1}) + (C_{k+1} - C_k)$$

Her fark Teorem 15.3 kullanılarak yazılabilir,

$$C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$$

Dolayısıyla,

$$C_{k+2} - C_k = (-1)^k \cdot \frac{q_{k+2} - q_k}{q_k q_{k+1} q_{k+2}}$$

Burada  $q_i > 0$  ve  $q_{k+2} > q_k$  olduğundan, işaret  $(-1)^k$  olur.

Çift  $k$  için,  $(-1)^k > 0$  olduğundan,

$$C_{2j+2} > C_{2j}$$

Yani,

$$C_0 < C_2 < C_4 < \dots$$

Tek  $k$  için,  $(-1)^k < 0$  olduğundan,

$$C_{2j+1} < C_{2j-1}$$

Yani,

$$C_1 > C_3 > C_5 > \dots$$

Şimdi, her tek yakınsağın çiftlerden büyük olduğunu gösterelim. Yukarıdaki fark formülüne göre,

$$C_{2j} < C_{2j-1}$$

Dolayısıyla çift yakınsaklar, kendinden sonraki tekten küçüktür.

Zincirleme olarak,

$$C_{2s} < C_{2s+2} < \dots < C_{2r-2} < C_{2r-1}$$

sonucu elde edilir. Böylece her tek  $C_{2r-1}$ , kendisinden önceki tüm çiftlerden büyüktür. ■

*Yorum 4.8.* Bu sonuç, sürekli kesirlerin yakınsaklarının sistematik şekilde arttığını ve azaldığını gösterir. Tek yakınsaklar, çift yakınsaklardan daha büyük rasyonel yaklaşıklıklar sunar [32].

**Tanım 4.7.**  $a_0, a_1, a_2, \dots$  gibi tamsayılardan oluşan ve  $a_i > 0$  koşulunu sağlayan bir dizi tanımlandığında, bu dizinin tanımladığı sonsuz basit sürekli kesir aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$[a_0; a_1, a_2, \dots]$$

Bu ifade, dizinin kısmi sürekli kesirlerine ait yakınsakların limitine eşdeğerdir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Dolayısıyla, sürekli kesir dizisinin her kısmi açılımı bir rasyonel sayı olmakla birlikte, sonsuz terimli bu yapı genellikle irrasyonel bir sayı ile sonuçlanır. Bu limit değeri, sürekli kesirin temsil ettiği gerçek sayıyı verir [31, 32].

**Teorem 4.6.** Sonsuz bir basit sürekli kesirin yakınsak dizisi  $\{C_k\}$  verilsin. Bu durumda çift ve tek indeksli alt diziler şu şekilde tanımlanır,

$$C_0 < C_2 < C_4 < \dots < C_{2n} < \dots$$

$$C_1 > C_3 > C_5 > \dots > C_{2n+1} > \dots$$

Bu iki alt dizinin her biri sınırlı monoton diziler olduğundan ayrı ayrı bir limite yakınsar. Ayrıca, her iki dizinin aynı limite yakınsadığı gösterilebilir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n+1} = \alpha$$

Böylece sürekli kesirin yakınsakları tümüyle aynı irrasyonel sayıya yakınsar.

*İspat.* Verilen bir  $m$  pozitif çift sayısı için, sürekli kesirin kısmi kesirlerinden oluşan iki alt dizi  $C_1, C_3, C_5, \dots$  ve  $C_0, C_2, C_4, \dots$  sırasıyla  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  limitlerine yakınsar. Aşağıdaki sıralamalar sağlanır.

$$C_1 > C_3 > C_5 > \dots > C_{2n-1} > C_{2n+1} > \dots$$

$$C_0 < C_2 < C_4 < \dots < C_{2n-2} < C_{2n} < \dots$$

Ayrıca,  $2j \leq m$  ve  $2k + 1 < m$  için  $C_{2j} > C_{2k+1}$  olduğu da bilinir. Bu sıralamalar dizilerin monoton ve sınırlı olduğunu gösterir, dolayısıyla her biri bir limite yakınsar.

Şimdi bu iki dizinin limitlerinin farkını inceleyelim,

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_{2n+1}q_{2n} - p_{2n}q_{2n+1}}{q_{2n+1}q_{2n}}$$

Sürekli kesirlerin determinant özelliğinden,

$$p_{2n+1}q_{2n} - p_{2n}q_{2n+1} = (-1)^{2n} = 1$$

Bu durumda fark,

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}}$$

Paydaların en az lineer büyümesi nedeniyle,

$$q_k \geq k \Rightarrow \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n}} \leq \frac{1}{(2n+1)(2n)}$$

Sınır değeri alınırsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_{2n+1} - C_{2n}) = 0$$

Bu da iki alt dizinin aynı limite yakınsadığını gösterir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n} = \alpha$$

Böylece tüm  $C_k$  yakınsaklar aynı reel değere ulaşır ve ispat tamamlanmış olur [25, 30]. ■

*Örnek 4.9.* Pell-Lucas sayıları, ardıl terimler arasındaki ilişkiyle aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 2, \quad L_n = 2L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Bu diziyi kullanarak, şu şekilde bir sürekli kesir oluşturulabilir,

$$Q_n = [2; 2, 2, \dots, 2] \quad (n \text{ kez } 2)$$

Bu durumda yakınsak,

$$Q_n = \frac{L_n}{L_{n-1}}$$

şeklindedir.

Sonsuz uzunluktaki bu sürekli kesirin limitini  $\sigma$  olarak tanımlarsak,

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{L_{n-1}}.$$

Pell-Lucas dizisinin tanımı gereği,

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2L_{n-1} + L_{n-2}}{L_{n-1}} = 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n-2}}{L_{n-1}}.$$

Buradan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n-2}}{L_{n-1}} = \frac{1}{\sigma}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\sigma = 2 + \frac{1}{\sigma}$$

Bu eşitliği çözersek, şu ikinci dereceden denklem elde edilir,

$$\sigma^2 - 2\sigma - 1 = 0$$

Denklemin pozitif kökü,

$$\sigma = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

olur. Sonuç olarak,

$$[2; 2, 2, 2, \dots] = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

eşitlik sağlanır. Bu örnek, Pell-Lucas dizisinin sürekli kesirlerle olan yakın ilişkisini ve bu dizinin irrasyonel bir limite yakınsadığını gösterir.

**Teorem 4.7.** Herhangi bir sonsuz basit sürekli kesir, irrasyonel bir sayıya karşılık gelir.

*İspat.* Bir sonsuz basit sürekli kesiri şu şekilde tanımlayalım,

$$\sigma = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

ve  $C_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$  ifadesiyle  $\sigma$ 'in  $n$ -inci yakınsağını gösterelim. Bu yakınsaklıklar  $\sigma$ 'e şu sınırlar içinde yaklaşır,

$$0 < |\sigma - C_n| < |C_{n+1} - C_n|$$

Yakınsaklık farkı, aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

$$|C_{n+1} - C_n| = \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Şimdi,  $\sigma$ 'in rasyonel olduğunu varsayalım,  $\sigma = \frac{a}{b}$ , burada  $a, b \in \mathbb{Z}$  ve  $b > 0$ . Bu

durumda,

$$0 < \left| \frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Her iki taraf  $bq_n$  ile çarpılırsa,

$$0 < |aq_n - bp_n| < \frac{b}{q_{n+1}}$$

Ancak  $q_n$  dizisi büyüdüğü için,  $n$  yeterince büyük seçilirse  $q_{n+1} > b$  olur ve şu sonuç elde edilir,

$$0 < |aq_n - bp_n| < 1$$

Bu da 0 ile 1 arasında bir tamsayı olduğunu gösterir ki bu imkansızdır.

Dolayısıyla  $\sigma$  rasyonel olamaz. Bu da gösterir ki sonsuz basit sürekli kesirler irrasyonel sayıları temsil eder. ■

*Yorum 4.9.* Bu ispat, sonsuz sürekli kesirlerin irrasyonel sayılarla birebir eşleştiğini ve bu temsillerin tekil olduğunu açıkça ortaya koyar. Ayrıca, bu ifade sürekli kesirlerin irrasyonel sayılar için güçlü bir gösterim biçimi olduğunu doğrular.

**Teorem 4.8.** Eğer iki sonsuz basit sürekli kesir

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] \quad \text{ve} \quad [b_0; b_1, b_2, \dots]$$

birbirine eşitse, o hâlde her  $n \geq 0$  için

$$a_n = b_n$$

olması gerekir.

Bu durum, irrasyonel bir sayının onu tanımlayan sürekli kesir açılımıyla yalnızca tek bir şekilde temsil edilebileceğini gösterir.

*İspat.* Bir irrasyonel sayının sürekli kesir açılımını

$$\sigma = [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

olarak ifade edelim. İlk yakınsaklara göre,

$$C_0 < \sigma < C_1 \Rightarrow a_0 < \sigma < a_0 + \frac{1}{a_1}$$

Buradan  $a_0$ 'ın  $\sigma$ 'in tam kısmı olduğu anlaşılır,

$$[\sigma] = a_0$$

Benzer şekilde,  $\sigma$ 'in ikinci temsili şu şekilde yazılabilir,

$$\sigma = [b_0; b_1, b_2, \dots] = b_0 + \frac{1}{[b_1; b_2, \dots]}$$

Yine  $[\sigma] = b_0$  olacağından,

$$a_0 = b_0$$

olur. Bu eşitlikten sonra iki sürekli kesirin kalanı da eşittir,

$$[a_1; a_2, \dots] = [b_1; b_2, \dots]$$

Bu işlem tümevarım yoluyla tüm  $n \geq 0$  için yinelenebilir ve her adımda  $a_n = b_n$  olduğu gösterilir. ■

*Yorum 4.10.* Bu sonuç, her irrasyonel sayının sürekli kesir gösteriminin yalnızca bir tane olduğunu kanıtlar. Yani, irrasyonel sayıların sürekli kesir açılımı bakımından tekil bir yapıya sahip olduğu anlaşılır.

**Teorem 4.9.** Eğer  $p$  ve  $q$  tamsayıları için  $p > q > 0$  koşulu sağlanıyorsa,

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$$

ifadesi,  $\frac{p}{q}$  kesrinin sonlu sürekli kesir açılımıdır. Bu durumda,

$$\frac{q}{p} = [0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$$

eşitliği sağlanır.

*İspat.* Eğer  $\frac{p}{q}$  bir rasyonel sayıysa ve Öklid algoritması uygulanarak aşağıdaki gibi bir bölme dizisi elde ediliyorsa,

$$\begin{aligned} p &= a_0q + r_1 & &= a_1r_1 + r_2 \\ r_1 &= a_2r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= a_{n-1}r_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= a_nr_n \quad (r_n \mid r_{n-1}) \end{aligned}$$

Burada kalanlar sıfırlanana kadar süreç devam eder ve elde edilen  $a_i$  katsayıları  $\frac{p}{q}$ 'nin sürekli kesir açılımını verir.

Tersine,  $\frac{q}{p}$  için başa 0 eklenerek genişletilmiş bir kesir elde edilir,

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{\frac{p}{q}} = [0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Burada, kesrin tersinin sürekli kesir açılımı, ilk terimin 0 olmasıyla birlikte aynı katsayıların bir sıra sağa kaymasıyla elde edilir. Bu da  $\frac{p}{q}$  ve  $\frac{q}{p}$  arasındaki simetrik ilişkiyi açıklar. ■

*Yorum 4.11.* Bu teorem, rasyonel sayıların terslerinin sürekli kesir açılımlarında ilk terimin 0 olması gerektiğini ve geri kalan katsayıların aynı sırayla korunduğunu ifade eder. Böylece  $\frac{p}{q}$  ve  $\frac{q}{p}$  arasında doğal bir dönüşüm olduğu görülür.

**Teorem 4.10.** Eğer  $d > 0$  ve  $d$  tam kare değilse,  $\sqrt{d}$  irrasyonel bir sayıdır ve sürekli kesir açılımı aşağıdaki gibi periyodik bir yapı gösterir,

$$\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0}]$$

Burada  $a_0 = \lfloor \sqrt{d} \rfloor$  ve periyot uzunluğu  $n$  olan bir dizide  $a_{n+1-j} = a_j$  eşitliği sağlanır ( $1 \leq j \leq n$ ).

*İspat.*  $\sqrt{d}$  irrasyonel olduğundan, sonsuz ama periyodik bir sürekli kesir açılımına sahiptir. Bu yapıyı göstermek için aşağıdaki algoritma kullanılır,

$$\begin{aligned} m_0 &= 0, & d_0 &= 1, & a_0 &= \lfloor \sqrt{d} \rfloor \\ m_{k+1} &= d_k a_k - m_k \\ d_{k+1} &= \frac{d - m_{k+1}^2}{d_k} \\ a_{k+1} &= \left\lfloor \frac{a_0 + m_{k+1}}{d_{k+1}} \right\rfloor \end{aligned}$$

Bu algoritma bir süre sonra kendini tekrar eder. Özellikle  $a_{n+1} = 2a_0$  olduğunda periyot tamamlanır ve ters simetrik bir yapı oluşur,

$$a_{n+1-j} = a_j \quad \text{her } j \text{ için.}$$

Bu simetri, karekökün cebirsel özelliklerinden ve yukarıdaki ardışık tanımlı yapıdan

kaynaklanır. Böylece sürekli kesir açılımının periyodik olduğu ve  $2a_0$  ile sonlandığı gösterilmiş olur. ■

*Yorum 4.12.* Bu yapı yalnızca tam kare olmayan pozitif  $d$  değerleri için geçerlidir; çünkü bu durumda  $\sqrt{d}$  irrasyonel olur ve periyodik bir sürekli kesir açılımı oluşur. Sürekli kesirin bu simetrik ve periyodik doğası, özellikle  $\sqrt{d}$ 'nin aritmetik özelliklerini anlamada büyük önem taşır. En dikkate değer uygulamalardan biri, pozitif çözüme sahip Pell denklemlerinin ( $\sigma^2 - d\varphi^2 = 1$ ) çözümünde ortaya çıkar. Çünkü bu denklemin temel çözümü,  $\sqrt{d}$ 'nin sürekli kesir açılımının belirli bir yakınsama noktasıyla elde edilir. Dolayısıyla, bu periyodik yapı yalnızca teorik değil, aynı zamanda çözüm üreten yapısal bir araç niteliği taşır.

**Teorem 4.11.** Eğer  $\sigma$  rastgele bir irrasyonel sayı ise,  $\frac{a}{b}$  rasyonel sayısı için,  $b \geq 1$  ve  $\gcd(a, b) = 1$  koşulu sağlanıyorsa,

$$\left| \sigma - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b^2}$$

Bu durumda  $\frac{a}{b}$ , sayısı  $\sigma$ 'in sürekli kesir açılımındaki yakınsak kesirlerden biri olan  $\frac{p_n}{q_n}$  kesridir.

*İspat.*

$a/b$ 'nin  $\sigma$ 'in bir yakınsak kesiri olmadığını varsayalım.

$$q_n \leq b < q_{n+1}$$

Bu  $n$  için, son lemma zincirin ilk eşitsizliğini verir,

$$|q_n \sigma - p_n| \leq |b\sigma - a| = b \left| \sigma - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{2b}$$

Bu da şu şekilde yazılabilir,

$$\left| \sigma - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2bq_n}$$

$a/b \neq \frac{p_n}{q_n}$  olduğunu varsaydığımızdan,  $bp_n - aq_n$  ifadesi sıfırdan farklı bir tam sayı olur.

Buradan

$$1 \leq |bp_n - aq_n|$$

elde edilir. Buradan şu sonuca ulaşırız,

$$\begin{aligned} \frac{1}{bq_n} &\leq \frac{|bp_n - aq_n|}{bq_n} = \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \left| \sigma - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| \sigma - \frac{a}{b} \right| \\ &< \frac{1}{2bq_n} + \frac{1}{2b^2} \end{aligned}$$

Bu ise  $b < q_n$  çelişmesini doğurur ve teorem kanıtlanmış olur. ■

**Teorem 4.12.** Eğer  $(p, q)$ ,

$$\sigma^2 - d\varphi^2 = 1$$

denkleminin pozitif bir çözümü ise, o hâlde  $\frac{p}{q}$ ,  $d$  sayısının sürekli kesir açılımında bir yakınsak kesirdir.

*İspat.* Önermeye göre,

$$p^2 - dq^2 = 1$$

eşitliğine sahibiz, bu da şu ifadeyi sağlar,

$$(p - q\sqrt{d})(p + q\sqrt{d}) = 1$$

Bu durum,  $p > q$  olduğunu gösterdiği gibi, aşağıdaki eşitliği de verir,

$$\left| \sqrt{d} - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{q(p + q\sqrt{d})}$$

Bunun sonucunda,

$$0 < \left| \sqrt{d} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2\sqrt{d}}$$

Teorem 4.9'e başvurularak,  $\frac{p}{q}$  kesrinin  $\sqrt{d}$ 'nin sürekli kesir açılımındaki bir yakınsak kesir olması gerektiği sonucuna varırız. Genel olarak, bu teoremin tersi doğru değildir,  $\sqrt{d}$ 'nin tüm yakınsak kesirleri

$$\sigma^2 - d\varphi^2 = 1$$

denklemini için çözüm sağlamaz. ■

*Örnek 4.10.* Kesin astronomik verilere göre bir yıl, 365 gün, 5 saat, 8 dakika ve 55 saniyeden oluşmaktadır (Sanna, 2017). Ancak, genellikle 365 gün olarak kabul edilmesi, her yıl yaklaşık 5 saatlik bir sapmaya neden olur. Bu fark zamanla birikerek, 100 yıl sonra mevsimlerin kaymasına yol açabilecek kadar önemli hale gelir. Eğer bir yıl 366 gün olarak kabul edilseydi, bu hata daha kısa sürede fark edilirdi.

Bu problemi anlamak için bir yılı gün cinsinden yazalım,

$$1 \text{ yıl} = 365 + \frac{5}{24} + \frac{8}{24 \times 60} + \frac{55}{24 \times 60 \times 60}$$

Yaklaşık değeri,

$$1 \text{ yıl} = 365 + \frac{20935}{86400} \text{ gün}$$

Bu durumda,  $\frac{20935}{86400}$  kesri oldukça hassas bir değeri temsil eder ve 1000 yıla kadar belirgin bir hata oluşturmaz. Bu oranı daha iyi analiz edebilmek için sadeleştirilerek sürekli kesir açılımı elde edilir.  $\gcd(20935, 86400) = 5$  olduğundan sadeleştirilmiş hali,

$$\frac{20935}{86400} = \frac{4187}{17280}$$

Bu kesrin sürekli kesir açılımı şu şekildedir,

$$\frac{4187}{17280} = [0; 4, 1, 7, 1, 6, 1, 2, 2, 4, 2, \dots]$$

Bu tür kesir açılımları, bilgisayar sistemlerinde gerçek sayıların rasyonel yaklaşıklıkları için kullanılır. Aynı zamanda kriptografi, astronomi, takvim hesaplamaları ve hiperbolik geometri gibi farklı disiplinlerde de geniş uygulama alanına sahiptir.

#### 4.1.1 Pell Denklemleri

Bazı özel tam sayılar, belirli cebirsel ilişkileri sağladıklarında ilginç aritmetik özellikler gösterir. Örnek, 10 sayısı için,

$$10 - 1 = 3^2,$$

aynı zamanda,

$$\frac{10}{2} - 1 = 2^2$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu, 10 sayısının hem kendisinden 1 çıkarıldığında hem de yarısından 1 çıkarıldığında bir tam kare elde edilmesini sağlar. Bu özelliği taşıyan bir sonraki sayı 290'dır,

$$290 - 1 = 17^2, \quad \frac{290}{2} - 1 = 12^2.$$

Şimdi, bu özelliğe sahip başka sayılar olup olmadığını ve varsa bunların nasıl bulunabileceğini araştırmak istiyoruz. Bu tür sayılardan biri  $r$  olsun. Aşağıdaki iki denklem elde edilir,

$$r - 1 = \sigma^2 \quad \text{ve} \quad \frac{r}{2} - 1 = \varphi^2.$$

Her iki denklem  $r$  cinsinden yeniden yazılarak sadeleştirilirse, şu eşitlik ortaya çıkar,

$$\sigma^2 - 2\varphi^2 = 1.$$

Bu tür bir cebirsel denklem, klasik bir Pell denklemi örneğidir. Genel biçimiyle, Pell denklemi aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$\sigma^2 - N\varphi^2 = 1,$$

burada  $N$  pozitif ve tam kare olmayan bir sayıdır. Bu tür denklemler adını 17. yüzyıl İngiliz matematikçisi John Pell'den almış olsa da, çözüm yöntemleri ilk olarak Hintli matematikçilerden Brahmagupta ve daha sonra Bhaskara tarafından geliştirilmiştir [33].

Pell denklemleri, yalnızca klasik sayıların kuramında değil, aynı zamanda cebirsel sayılar, cebirsel tamsayı halkaları ve sürekli kesirlerle ilgili pek çok teoride temel bir rol oynar [25].

**Tanım 4.8.** Verilen Pell tipi denklem,

$$\sigma^2 - N\varphi^2 = 1$$

için bazı özel durumlara göre çözümler aşağıda sınıflandırılmıştır.

- $N = 0$  için denklem  $\sigma^2 = 1$  olur. Bu durumda çözümler,

$$\sigma = \pm 1, \quad \text{ve} \quad \varphi \in \mathbb{Z}$$

biçimindedir. Yani  $\sigma$  sabitken,  $\varphi$  herhangi bir tamsayı olabilir.

- $N \leq -2$  için,

$$\sigma^2 - N\varphi^2 \geq 0$$

ifadesi nedeniyle yalnızca,

$$\sigma = \pm 1, \quad \varphi = 0$$

türünde çözümler mümkündür.

- $N = -1$  için denklem,

$$\sigma^2 + \varphi^2 = 1$$

olur. Bu durumda yalnızca sonlu sayıda çözüm bulunur [3, 27].

$$(\sigma, \varphi) = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

*Yorum 4.13.* Pell denklemlerinin çözüm kümesiyle ilgili bazı temel özellikler aşağıda sunulmuştur.

- Eğer  $(\sigma, \varphi)$  bir çözümse,  $\varphi$  veya  $\sigma$  işaret değiştirdiğinde de denklem sağlanır. Yani,

$$(\sigma, \varphi), (-\sigma, \varphi), (\sigma, -\varphi), (-\sigma, -\varphi)$$

hepsi geçerli çözümlerdir. Bu nedenle yalnızca  $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{Z}^+$  olan durumlar incelenerek tüm çözüm kümesi türetilebilir.

- Denklemin yeniden yazımı,

$$\sigma^2 = 1 + N\varphi^2$$

biçimindedir. Bu eşitlikte belirli bir  $\varphi$  değeri için sağ taraf hesaplandığında eğer sonuç bir tam kare ise bu durum  $(\sigma, \varphi)$  biçiminde bir çözüm oluşturur.

Bu özellikler, özellikle negatif  $N$  değerleri için çözüm kümesinin yapısını anlamada önemlidir. Ayrıca, pozitif  $N$  değerleri için çözüm üretiminde kullanılan bu yaklaşımlar sayı teorisi açısından temel öneme sahiptir [23].

(iii) Eğer

$$(a, b)$$

bir çözüme, o zaman aşağıdaki eşitlik sağlanır,

$$a^2 - Nb^2 = (a + b\sqrt{N})(a - b\sqrt{N})$$

Yani,

$$a + b\sqrt{N}$$

biçimindeki irrasyonel sayılar çözümler bulmada önemli bir rol oynar. Kolaylık olması açısından, irrasyonel sayı

$$a + b\sqrt{N}$$

bir çözüm üretir.

*Örnek 4.11.* Verilen

$$1 + 92 \cdot 120^2 = 1151^2$$

işlemden, aşağıdaki sonuç elde edilir,

$$\sigma = 1151, \quad \varphi = 120$$

Bu değerler, aşağıdaki Diophant denkleminin çözümü oluşturur,

$$\sigma^2 - 92\varphi^2 = 1$$

Bu tür çözümler teoride oldukça sade görünse de, pratikte genellikle büyük sayılarla çalışmak gerekir. Bu nedenle, bu tür problemlerin çözümünde daha sistematik yaklaşımlara ihtiyaç duyulur.

**Lemma 4.2.** Eğer  $r = \sigma_1 + \varphi_1\sqrt{N}$  ve  $s = \sigma_2 + \varphi_2\sqrt{N}$ ,  $N$  pozitif bir tam sayı olup tam kare değilse ve her iki ifade de  $\sigma^2 - N\varphi^2 = 1$  denklemini sağlayan çözüm çiftlerine karşılık geliyorsa, o zaman bu iki çözümün çarpımını olan

$$rs = (\sigma_1 + \varphi_1\sqrt{N})(\sigma_2 + \varphi_2\sqrt{N})$$

denkleminde de bir çözümünü verir.

*İspat.* Çözüm veren iki ifadeyi çarpalım,

$$\begin{aligned}rs &= (\sigma_1 + \varphi_1\sqrt{N})(\sigma_2 + \varphi_2\sqrt{N}) \\ &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\varphi_2\sqrt{N} + \sigma_2\varphi_1\sqrt{N} + \varphi_1\varphi_2N \\ &= (\sigma_1\sigma_2 + N\varphi_1\varphi_2) + (\sigma_1\varphi_2 + \sigma_2\varphi_1)\sqrt{N}\end{aligned}$$

Bu durumda çarpım şu şekilde ifade edilir,

$$rs = \sigma_3 + \varphi_3\sqrt{N},$$

burada

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= \sigma_1\sigma_2 + N\varphi_1\varphi_2, \\ \varphi_3 &= \sigma_1\varphi_2 + \sigma_2\varphi_1\end{aligned}$$

şeklinde. Şimdi bu yeni  $(\sigma_3, \varphi_3)$  çiftinin de  $\sigma^2 - N\varphi^2 = 1$  denklemini sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim,

$$\begin{aligned}\sigma_3^2 - N\varphi_3^2 &= (\sigma_1\sigma_2 + N\varphi_1\varphi_2)^2 - N(\sigma_1\varphi_2 + \sigma_2\varphi_1)^2 \\ &= \sigma_1^2\sigma_2^2 + 2N\sigma_1\sigma_2\varphi_1\varphi_2 + N^2\varphi_1^2\varphi_2^2 \\ &\quad - N(\sigma_1^2\varphi_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\varphi_1\varphi_2 + \sigma_2^2\varphi_1^2) \\ &= \sigma_1^2\sigma_2^2 - N\sigma_1^2\varphi_2^2 - N\sigma_2^2\varphi_1^2 + N^2\varphi_1^2\varphi_2^2 \\ &= (\sigma_1^2 - N\varphi_1^2)(\sigma_2^2 - N\varphi_2^2)\end{aligned}$$

İki çözüm çarpıldığında sonuç yine denklemi sağladığına göre, çarpım da yeni bir çözümdür. Böylece ispat tamamlanır. ■

*Yorum 4.14.* Bu özellik, çözümlerden yeni çözümler üretme açısından oldukça önemlidir. Başlangıç çözümü biliniyorsa, onun ardışık kuvvetleriyle (örneğin  $r^2, r^3$  vb.) sonsuz sayıda çözüm üretilebilir. Bu nedenle, Pell denklemlerinin çözümleri yalnızca tek tek ortaya çıkan özel durumlar değildir; aynı zamanda sistemli bir şekilde üretilebilen ve çoğaltılabilen yapılardır [12, 23].

*Örnek 4.12.* Verilen Pell denklemi,  $\sigma^2 - 2\varphi^2 = 1$  ve bu denklemin en küçük çözümü,  $(\sigma_1, \varphi_1) = (3, 2)$  şeklindedir.

Yeni çözümler elde etmek için, önceki çözümün üsleri alınarak çözümler üretilir. Bu sayede çözümler ardışık olarak genişletilir.

1. Adım, İlk yeni çözüm için  $(3 + 2\sqrt{2})^2$  ifadesini açalım,

$$\begin{aligned}
(3 + 2\sqrt{2})^2 &= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 \\
&= 9 + 12\sqrt{2} + 8 \\
&= 17 + 12\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Böylece ikinci çözüm,

$$(\sigma_2, \varphi_2) = (17, 12)$$

2. Adım, daha büyük bir çözüm için  $(3 + 2\sqrt{2})^3$  hesaplanır,

$$\begin{aligned}
(3 + 2\sqrt{2})(17 + 12\sqrt{2}) &= 3 \cdot 17 + 3 \cdot 12\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot 17 + 2\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{2} \\
&= 51 + 36\sqrt{2} + 34\sqrt{2} + 48 \\
&= (51 + 48) + (36 + 34)\sqrt{2} \\
&= 99 + 70\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Üçüncü çözüm,

$$(\sigma_3, \varphi_3) = (99, 70)$$

Elde edilen iki yeni çözüm,

$$(17, 12) \quad \text{ve} \quad (99, 70)$$

Bu çözümler aşağıdaki Pell denklemini sağlar,

$$\sigma^2 - 2\varphi^2 = 1$$

**Lemma 4.3.** Eğer  $N > 0$  olup tam kare değilse ve

$$r = a + b\sqrt{N}, \quad s = c + d\sqrt{N}$$

biçimindeki ifadeler,

$$\sigma^2 - N\varphi^2 = 1$$

denkleminin çözümlerini üretiyorsa ve  $a, b, c, d > 0$  ise, o zaman  $r < s$  ancak ve ancak  $a < c$  koşulu sağlanır.

*İspat.* İfadeleri karşılaştıralım,

$$r = a + b\sqrt{N}$$

$$s = c + d\sqrt{N}$$

Bu durumda  $r < s$  eşitsizliğini sağlayacak koşulu incelemek için iki ifadeyi birbirinden çıkaralım,

$$s - r = (c - a) + (d - b)\sqrt{N}$$

Verilen  $N > 0$  ve tam kare olmayan bir sayı olduğundan  $\sqrt{N}$  irrasyoneldir ve pozitif bir değere sahiptir. Ayrıca  $a, b, c, d > 0$  olduğundan ifadeye yer alan tüm terimler anlamlıdır.

$r < s$  olması için  $s - r > 0$  gerekir. Yani,

$$(c - a) + (d - b)\sqrt{N} > 0$$

Buradaki eşitsizlik, irrasyonel kısmın katsayısı olan  $(d - b)$  ve sabit kısmın farkı  $(c - a)$  ile ilgilidir.

Ancak  $r$  ve  $s$  ifadeleri  $\sigma^2 - N\varphi^2 = 1$  denklemini sağladığına göre,  $a^2 - Nb^2 = 1$  ve  $c^2 - Nd^2 = 1$  olmalıdır. Bu ifadeyi yeniden düzenlersek,

$$a^2 - c^2 = N(b^2 - d^2)$$

Bu durumda  $a < c$  ise,  $a^2 < c^2$  ve dolayısıyla  $b^2 > d^2$  elde edilir. Çünkü  $N > 0$  olduğundan taraflar aynı işaretli kalır. Bu da  $(d - b) < 0$  ve  $(c - a) > 0$  anlamına gelir. Buna rağmen  $(c - a) + (d - b)\sqrt{N}$  ifadesi pozitif kalacaktır, çünkü sabit terim, irrasyonel kısmı dengelemekten büyüktür.

Dolayısıyla  $a < c$  olduğu durumda  $r < s$  eşitsizliği geçerlidir. Ters durumda yani  $a > c$  olduğunda ise  $r > s$  olur. Böylece sonuç elde edilir [25]. ■

*Yorum 4.15.* Bu özellik, Pell tipi denklemlerde çözümleri karşılaştırmak için kullanışlıdır. Özellikle, en küçük pozitif çözümden başlayarak üretilen diğer çözümlerin artan sırada dizildiğini göstermek için bu ilişki kullanılır.

**Teorem 4.13.** Eğer  $\alpha + \beta\sqrt{N}$  ifadesi  $\sigma^2 - N\varphi^2 = 1$  denkleminin en küçük pozitif çözümünü veriyorsa, bu denklem sonsuz sayıda çözüm içerir. Tüm çözümler şu

genel formülle ifade edilebilir,

$$\sigma_n = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{N})^n + (\alpha - \beta\sqrt{N})^n}{2}, \quad \varphi_n = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{N})^n - (\alpha - \beta\sqrt{N})^n}{2\sqrt{N}}$$

*İspat.* Öncelikle, en küçük çözüm  $(\alpha, \beta)$  için

$$\alpha^2 - N\beta^2 = 1$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi  $r = \alpha + \beta\sqrt{N}$  şeklinde tanımlayalım. Bu ifadenin pozitif tam sayı kuvvetleri de denklemin çözümlerini üretir. Genel olarak,

$$r^n = (\alpha + \beta\sqrt{N})^n$$

Bu ifadenin açılımı, Newton Binom Teoremi kullanılarak yapılır,

$$r^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^{n-k} (\beta\sqrt{N})^k$$

Bu toplamı irrasyonel ifadeyi ayıracak şekilde düzenleyelim,

- Çift  $k$  değerleri için elde edilen terimler rasyonel olur.
- Tek  $k$  değerleri için elde edilen terimler  $\sqrt{N}$  içeren terimlerdir.

Bu durumda,

$$r^n = \sigma_n + \varphi_n\sqrt{N}$$

Benzer şekilde, eşleniği olan

$$(\alpha - \beta\sqrt{N})^n = \sigma_n - \varphi_n\sqrt{N}$$

ifadesi yazılabilir.

Bu iki ifadeyi toplayarak,

$$\sigma_n = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{N})^n + (\alpha - \beta\sqrt{N})^n}{2}$$

ve çıkararak,

$$\varphi_n = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{N})^n - (\alpha - \beta\sqrt{N})^n}{2\sqrt{N}}$$

açık formülleri elde edilir.

Tümevarım yöntemiyle bu formüllerin her  $n$  için  $\sigma_n^2 - N\varphi_n^2 = 1$  eşitliğini sağladığı gösterilebilir,

- $n = 1$  için,  $\sigma_1 = \alpha$ ,  $\varphi_1 = \beta \Rightarrow \sigma_1^2 - N\varphi_1^2 = \alpha^2 - N\beta^2 = 1$
- $\sigma_k^2 - N\varphi_k^2 = 1$  olduğunu varsayalım.
- $\sigma_{k+1} + \varphi_{k+1}\sqrt{N} = (\alpha + \beta\sqrt{N})^{k+1}$  ifadesi  $(\sigma_k + \varphi_k\sqrt{N})$  ile  $(\alpha + \beta\sqrt{N})$  çarpılarak elde edilir. Bu çarpım yine  $\sigma_{k+1} + \varphi_{k+1}\sqrt{N}$  biçimindedir ve benzer şekilde  $\sigma_{k+1}^2 - N\varphi_{k+1}^2 = 1$  olduğu gösterilir.

Dolayısıyla, bu formül her  $n$  için geçerlidir. ■

*Yorum 4.16.* Bu yöntem, Pell denklemlerinin çözümlerinin sistemli bir biçimde üretilebildiğini gösterir. En küçük çözüm elde edildikten sonra, diğer tüm çözümler bu çözümün üsleriyle belirlenebilir. Bu yapı, özellikle sayı teorisinde güçlü bir araç olarak kullanılmaktadır.

*Örnek 4.13.* Aşağıdaki denklemin en küçük pozitif tam sayı çözümünü bulalım ve iki yeni çözüm daha üretelim,

$$\sigma^2 - 7\varphi^2 = 1$$

Bu denklem için en küçük çözüm,

$$(\sigma_1, \varphi_1) = (8, 3)$$

şeklindedir, çünkü,

$$8^2 - 7 \cdot 3^2 = 64 - 63 = 1$$

İkinci çözümü bulmak için,  $(8 + 3\sqrt{7})^2$  ifadesini hesaplayalım,

$$(8 + 3\sqrt{7})^2 = 64 + 48\sqrt{7} + 63 = 127 + 48\sqrt{7}$$

Dolayısıyla ikinci çözüm,

$$(\sigma_2, \varphi_2) = (127, 48)$$

Üçüncü çözüm için  $(8 + 3\sqrt{7})^3$  ifadesini kullanırız,

$$\begin{aligned} (127 + 48\sqrt{7})(8 + 3\sqrt{7}) &= 127 \cdot 8 + 127 \cdot 3\sqrt{7} + 48\sqrt{7} \cdot 8 + 48\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{7} \\ &= 1016 + 381\sqrt{7} + 384\sqrt{7} + 1008 = 2024 + 765\sqrt{7} \end{aligned}$$

Buna göre üçüncü çözüm,

$$(\sigma_3, \varphi_3) = (2024, 765)$$

Elde edilen bu çözümler,  $\sigma^2 - 7\varphi^2 = 1$  denklemini sağlar. Bu yöntem aracılığıyla, çözümler sistemli biçimde üretilebilir.

**Teorem 4.14.** Eğer  $\alpha + \beta\sqrt{N}$ ,

$$\sigma^2 - N\varphi^2 = -1$$

denkleminin en küçük pozitif çözümünü veriyorsa, ve  $N > 0$  olup tam kare değilse, o zaman bu denklem sonsuz sayıda çözüme sahiptir ve çözümler şu formüllerle verilir,

$$\sigma_n = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{N})^{2n-1} + (\alpha - \beta\sqrt{N})^{2n-1}}{2}$$
$$\varphi_n = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{N})^{2n-1} - (\alpha - \beta\sqrt{N})^{2n-1}}{2\sqrt{N}}$$

[3, 27, 29]

*İspat.* Verilen  $\sigma^2 - N\varphi^2 = -1$  denkleminin en küçük pozitif tamsayı çözümü  $(\sigma_1, \varphi_1)$  olsun. Bu durumda,  $\sigma_1^2 - N\varphi_1^2 = -1$  sağlanır.

Bu çözüme karşılık gelen ifade  $r = \sigma_1 + \varphi_1\sqrt{N}$  olsun. Aynı şekilde, eşlenik ifadesi  $r' = \sigma_1 - \varphi_1\sqrt{N}$  eşleniği şu şekilde tanımlanır. Bu durumda,

$$(\sigma_1 + \varphi_1\sqrt{N})(\sigma_1 - \varphi_1\sqrt{N}) = \sigma_1^2 - N\varphi_1^2 = -1$$

Yani,  $r' = -1/r$  olur.

Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $(\sigma_n + \varphi_n\sqrt{N}) = r^{2n-1}$  ifadesi yazılabilir. Bu durumda,

$$\sigma_n + \varphi_n\sqrt{N} = (\sigma_1 + \varphi_1\sqrt{N})^{2n-1},$$
$$\sigma_n - \varphi_n\sqrt{N} = (\sigma_1 - \varphi_1\sqrt{N})^{2n-1}$$

Toplama işlemi uygulanarak,

$$(\sigma_n + \varphi_n\sqrt{N}) + (\sigma_n - \varphi_n\sqrt{N}) = 2\sigma_n \Rightarrow \sigma_n = \frac{(\sigma_1 + \varphi_1\sqrt{N})^{2n-1} + (\sigma_1 - \varphi_1\sqrt{N})^{2n-1}}{2}$$

Çıkarma işlemi uygulanarak,

$$(\sigma_n + \varphi_n \sqrt{N}) - (\sigma_n - \varphi_n \sqrt{N}) = 2\varphi_n \sqrt{N} \Rightarrow \varphi_n = \frac{(\sigma_1 + \varphi_1 \sqrt{N})^{2n-1} - (\sigma_1 - \varphi_1 \sqrt{N})^{2n-1}}{2\sqrt{N}}$$

Bu formüller, tüm  $n$  değerleri için  $\sigma_n^2 - N\varphi_n^2 = -1$  denklemini sağlar. Bu durum matematiksel tümevarım yöntemiyle de kanıtlanabilir. ■

*Yorum 4.17.* Bu teorem, negatif işaretli Pell denkleminin sonsuz sayıda çözüm içerdiğini ve bu çözümlerin, en küçük pozitif çözüm kullanılarak sistemli bir biçimde üretilebileceğini gösterir. Bu yöntem, irrasyonel ifadelerle tanımlanan çözüm çiftlerinin ardışık kuvvetleriyle oluşturulan yapısal tekrar özelliğine dayanır.

**Teorem 4.15.** Bir Pell denklemi olan  $\sigma^2 - d\varphi^2 = 1$  denkleminin bir çözümü varsa, pozitif çözümler şu şekilde bulunabilir,

$$\sigma = p_k, \quad \varphi = q_k$$

Burada  $\frac{p_k}{q_k}, \sqrt{d}$  sayısının yakınsaklarından biridir.

*Yorum 4.18.*

Eğer  $n, \sqrt{d}$ 'nin Sürekli kesir açılımındaki periyot uzunluğuysa, o zaman

$$\frac{p_{k_n-1}}{q_{k_n-1}}$$

yakınsak kesri aşağıdaki denklemi sağlar,

$$p_{k_n-1}^2 - dq_{k_n-1}^2 = (-1)^n$$

Sürekli kesir açılımındaki periyot uzunluğu, denklemin çözümü olup olmadığını belirlemek açısından önemli rol oynar. Özellikle,  $\sqrt{d}$  irrasyonel ve tam kare değilse, açılım periyodiktir ve bu periyottan elde edilen yakınsaklar, Pell denkleminin çözümünü verir.

Eğer  $n, \sqrt{d}$ 'nin Sürekli kesir açılımındaki periyot uzunluğuysa, o zaman

$$\frac{p_{k_n-1}}{q_{k_n-1}}$$

yakınsak kesri aşağıdaki denklemi sağlar,

$$p_{k_n-1}^2 - dq_{k_n-1}^2 = (-1)^n$$

*İspat.*  $\sqrt{d}$  irrasyonel ve tam kare olmayan bir sayı olduğundan, sürekli kesir açılımı periyodik olur,

$$\sqrt{d} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_n}]$$

Dolayısıyla, açılımın  $n$  uzunluğundaki periyodu vardır ve bu periyodun sonundaki yakınsaklıklar, Pell tipi denklemleri çözer.

Yakınsaklar, daha önce tanımlanan şu rekürsif ilişkilerle hesaplanır,

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

$k = n$  olduğunda,  $p_{n-1}$  ve  $q_{n-1}$  için şu eşitlik elde edilir,

$$p_{n-1}^2 - dq_{n-1}^2 = (-1)^n$$

Bu, açılımın periyodunun çift veya tek oluşuna bağlı olarak, denklemin sağ tarafının  $+1$  ya da  $-1$  olacağını belirtir.

Bu sonuç, sürekli kesirlerin konverjanlarının  $\sigma^2 - d\varphi^2 = \pm 1$  denklemini sağladığını gösterir. Özellikle  $n$  çift ise, doğrudan Pell denkleminin çözümü elde edilir,

$$\sigma = p_{n-1}, \quad \varphi = q_{n-1}, \quad \sigma^2 - d\varphi^2 = 1$$

Eğer  $n$  tek ise, bu yakınsaklık  $\sigma^2 - d\varphi^2 = -1$  çözümünü verir ve daha büyük bir  $k$  değeriyle pozitif çözüm bulunabilir. ■

*Yorum 4.19.* Bu yöntem,  $\sqrt{d}$ 'nin sürekli kesir açılımı kullanılarak, denklemin çözümlerinin sistemli biçimde elde edilebileceğini gösterir. Ayrıca, en küçük çözüm bulunduktan sonra tüm diğer çözümler bu çözümün üsleriyle üretilebilir.

**Lemma 4.4.**  $\sqrt{d}$  sayısının sürekli kesir açılımı

$$\sqrt{d} = [a_0; a_1, a_2, \dots]$$

şeklinde verildiğinde, aşağıdaki ardışık bağıntılar tanımlanır,

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, & t_0 &= 1, \\ s_{k+1} &= a_k t_k - s_k, \\ t_{k+1} &= \frac{d - s_{k+1}^2}{t_k}, \quad \text{her } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Bu tanımlar altında,

(a)  $s_k$  ve  $t_k$  her  $k$  için birer tamsayıdır ve  $t_k \neq 0$ ,

(b)  $t_k$  her adımda  $\frac{d-s_k^2}{t_k}$  ifadesini tam böler,

(c) Her  $k$  için şu eşitlik sağlanır,

$$\sigma_k = \frac{s_k + \sqrt{d}}{t_k}$$

*İspat.* Tümevarım yöntemiyle her üç önermeyi birlikte kanıtlayalım.

$k = 0$  için,

•  $s_0 = 0$  ve  $t_0 = 1$  olduğu açıkça verilmiştir.

•  $\sigma_0 = \sqrt{d}$  olduğuna göre,

$$\sigma_0 = \frac{0 + \sqrt{d}}{1} = \frac{s_0 + \sqrt{d}}{t_0},$$

yani (c) önermesi sağlanır.

$k$  için (a), (b), (c) doğru varsayılır. Şimdi  $k + 1$  için bu önermeleri kanıtlayalım.

(a) için,  $s_{k+1} = a_k t_k - s_k$  ifadesi  $a_k$ ,  $t_k$  ve  $s_k$  tamsayı olduğundan bir tamsayıdır.  $t_{k+1} = \frac{d-s_{k+1}^2}{t_k}$  ifadesinde  $d$  tam sayı ve  $s_{k+1}^2$  de bir tamsayı karesi olduğundan,  $t_{k+1}$  da rasyoneldir. Ancak ayrıca  $t_k$ 'nin  $\frac{d-s_k^2}{t_k}$  ifadesini tam böldüğü varsayımıyla  $t_{k+1}$ 'in de tam sayı olduğu görülür.

Ayrıca,  $t_{k+1} = 0$  olsaydı  $d = s_{k+1}^2$  olurdu ki bu  $d$ 'nin tam kare olmadığı varsayımıyla çelişir. Dolayısıyla  $t_{k+1} \neq 0$ .

(b) için, Tümevarım varsayımıyla  $t_k$ ,  $\frac{d-s_k^2}{t_k}$  ifadesini tam bölüyordu. Yeni adımda,

$$t_{k+1} = \frac{d - s_{k+1}^2}{t_k},$$

buradan da  $t_k t_{k+1} = d - s_{k+1}^2$  olduğundan, bu ifade yine tam sayı olur ve  $t_k$ 'nin bu farkı böldüğü sonucu çıkar. Böylece  $t_{k+1}$  de tanımlıdır ve tam sayıdır.

(c) için, Tümevarım varsayımıyla,

$$\sigma_k = \frac{s_k + \sqrt{d}}{t_k}.$$

Yeni adımda,

$$\sigma_{k+1} = \frac{1}{\sigma_k - a_k} = \frac{1}{\frac{s_k + \sqrt{d}}{t_k} - a_k} = \frac{t_k}{s_k + \sqrt{d} - a_k t_k}.$$

Paydayı düzenleyelim,

$$s_k + \sqrt{d} - a_k t_k = -(a_k t_k - s_k) + \sqrt{d} = -s_{k+1} + \sqrt{d}.$$

Dolayısıyla,

$$\sigma_{k+1} = \frac{t_k}{-s_{k+1} + \sqrt{d}} = \frac{t_k(s_{k+1} + \sqrt{d})}{d - s_{k+1}^2} = \frac{s_{k+1} + \sqrt{d}}{t_{k+1}}.$$

Bu da (c) önermesinin  $k + 1$  için geçerli olduğunu gösterir.

Sonuç olarak, (a), (b) ve (c) önermeleri tüm  $k \in \mathbb{N}$  için sağlanır. ■

*Yorum 4.20.* Bu lemmadan elde edilen ardışık bağıntılar,  $\sqrt{d}$ 'nin sürekli kesir açılımında yer alan terimlerin hesaplanmasında temel rol oynar. Ayrıca bu yapı, Pell denkleminin çözüm sürecinde kullanılan algoritmaların temelidir.

*Örnek 4.14.* Aşağıdaki Pell denkleminin en küçük pozitif çözümünü bulalım,

$$\sigma^2 - 19\varphi^2 = 1$$

Bu denklemi çözmek için 19 sayısının Sürekli kesir açılımını belirleyelim,

$$19 = [4; 2, 1, 3, 1, 2, 8]$$

Burada periyot uzunluğu 6'dır. İlk 12 yakınsayıcıyı hesaplayalım,

$$\begin{array}{cccccc} \frac{4}{1}, & \frac{9}{2}, & \frac{13}{3}, & \frac{48}{11}, & \frac{61}{14}, & \frac{170}{39}, \\ \frac{231}{53}, & \frac{632}{145}, & \frac{863}{198}, & \frac{1495}{343}, & \frac{3866}{887}, & \frac{5361}{1230} \end{array}$$

Periyot uzunluğu çift olduğundan en küçük pozitif çözüm  $\frac{p_5}{q_5}$  oranındaki yaklaşık kesir tarafından verilir,

$$\frac{170}{39}$$

Bu nedenle, denklemin en küçük pozitif çözümü şudur,

$$\sigma_1 = 170, \quad \varphi_1 = 39$$

$D \leq 200$  için özel özelliklere sahip en iyi Sürekli kesir açılımları incelenmiştir.

### 1. En Büyük Başlangıç Terimine Sahip Sayı

$$D = 197$$

- (i) Sürekli kesir Açılımı,  $197 = [14; \overline{28, 28}]$
- (ii) Başlangıç Terimi, 14
- (iii) Periyot Uzunluğu, 2

### 2. En Küçük Periyot Uzunluğuna Sahip Sayı

$$D = 2$$

- (i) Sürekli kesir Açılımı,  $2 = [1; \overline{2}]$
- (ii) Başlangıç Terimi, 1
- (iii) Periyot Uzunluğu, 2

### 3. Tek Sayılar İçinde En Uzun Periyoda Sahip Sayı

$$D = 181$$

- (i) Sürekli kesir Açılımı,  $181 = [13; \overline{2, 4, 1, 8, 6, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 6, 8, 1, 4, 2, 26, 2}]$
- (ii) Başlangıç Terimi, 13
- (iii) Periyot Uzunluğu, 22

### 4. Çift Sayılar İçinde En Uzun Periyoda Sahip Sayı

$$166$$

- (i) Sürekli kesir Açılımı,  $= [12; \overline{1, 7, 1, 1, 1, 2, 4, 1, 3, 2, 12, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 1, 1, 7, 1, 24, 1}]$
- (ii) Başlangıç Terimi, 12
- (iii) Periyot Uzunluğu, 23

## 5. Fibonacci Sayılarıyla En Çok Eşleşen Periyot Açılımı

### 166'nın Sürekli kesir Açılımı

$$166 = [12; 1, 7, 1, 1, 1, 2, 4, 1, 3, 2, 12, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 1, 1, 7, 1, 24, 1]$$

Bu dizide Fibonacci dizisinde yer alan sayıları işaretlersek,

$$1, 7, 1, 1, 1, 2, 4, 1, 3, 2, 12, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 1, 1, 7, 1, 24, 1$$

**Eşleşen Fibonacci Sayıları** Sürekli kesir açılımındaki Fibonacci dizisinde bulunan sayılar şunlardır,

$$1, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 1, 1, 1$$

Bu sayılar Fibonacci dizisinde yer aldıkları için belirgin bir matematiksel örüntü oluştururlar.

Bu analizde,  $D = 166$  hem en uzun periyotlu çift sayı hem de Fibonacci sayılarıyla en çok eşleşen açılım olarak öne çıktı.

**Teorem 1.**  $p_k/q_k, \sqrt{d}$  sayısının sürekli kesir açılımının yakınsayıcıları olsun ve  $n$  açılımın periyot uzunluğu olsun.

(a) Eğer  $n$  çift ise, Pell denkleminin

$$\sigma^2 - d\varphi^2 = 1$$

tüm pozitif çözümleri şu şekilde verilir,

$$\sigma = p_{kn-1}, \quad \varphi = q_{kn-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(b) Eğer  $n$  tek ise, Pell denkleminin

$$\sigma^2 - d\varphi^2 = 1$$

tüm pozitif çözümleri şu şekilde verilir,

$$\sigma = p_{2kn-1}, \quad \varphi = q_{2kn-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Bu teorem, Pell denkleminin çözümlerinin sürekli kesirler aracılığıyla nasıl elde

edilebileceğini göstermektedir.

**Tablo 4.2**  $u$  ve  $v$  değerlerinden üretilmiş Pisagor üçlüleri

$u$	$v$	$m$	$n$	$\sigma$	$\varphi$	$\vartheta$
3	2	5	2	21	20	29
17	12	29	12	697	696	985
99	70	169	70	23 661	23 660	33 461
577	408	985	408	803 761	803 760	1 136 689
3 363	2 378	5 741	2 378	27 304 197	27 304 196	38 613 965



# 5

## PİSAGOR ÜÇLÜLERİNDE $|\sigma - \varphi| = d^2$ KOŞULUNU SAĞLAYAN ÖZEL DURUMLAR VE PRATİK ÇÖZÜM AİLELERİ

---

Bu bölümde, Pisagor üçlülerinin özel bir alt sınıfları ve dik kenarları arasındaki farkın bir tam kare olduğu durumlar incelenecektir.

$$|\sigma - \varphi| = d^2$$

koşulunu sağlayan üçlülerin varlığı araştırılacak ve bu üçlülerini üreten parametrik bir çözüm ailesi elde edilecektir.

**Teorem 5.1.**  $\sigma, \varphi, \vartheta \in \mathbb{Z}^+$  için,

$$\sigma^2 + \varphi^2 = \vartheta^2$$

eşitliğini sağlayan

$$\sigma = v^2 + 1, \quad \varphi = \nu^2 + 1, \quad \vartheta = \omega^2 + 1$$

şeklinde hiçbir

$$(\sigma, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{Z}^+$$

Pisagor üçlüsü yoktur.

*İspat.* Herhangi bir tam sayı için,

$$t \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \pmod{8} \Rightarrow t^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}.$$

$$\sigma = v^2 + 1, \quad \varphi = \nu^2 + 1, \quad \vartheta = \omega^2 + 1$$

ifadeleri için,

- Eğer  $v$  çiftse,  $v^2 \equiv 0$  veya  $4 \pmod{8} \Rightarrow v \equiv 1$  veya  $5 \pmod{8}$
- Eğer  $v$  tekse,  $v^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow v \equiv 2 \pmod{8}$

Dolayısıyla,

$$v^2 \equiv 1^2 = 1, \quad 5^2 = 25 \equiv 1, \quad 2^2 = 4 \pmod{8} \Rightarrow v^2 \equiv 1 \text{ veya } 4 \pmod{8}$$

Aynı şekilde,

$$v^2, v'^2 \in \{1, 4\} \pmod{8}$$

Pisagor eşitliği,

$$\sigma^2 + \varphi^2 \equiv \vartheta^2 \pmod{8}$$

$\sigma^2, \varphi^2 \in \{1, 4\}$  olduğundan, bu toplamın alabileceği mod 8 değerleri,

$$\sigma^2 + \varphi^2 \in \{1 + 1, 1 + 4, 4 + 1, 4 + 4\} = \{2, 5, 8\}$$

Ancak  $8 \equiv 0 \pmod{8}$  olduğundan,

$$\sigma^2 + \varphi^2 \equiv 0, 2, \text{ veya } 5 \pmod{8}$$

Öte yandan,

$$\vartheta^2 \in \{1, 4\} \pmod{8}$$

Dolayısıyla,

$$\{\sigma^2 + \varphi^2 \pmod{8}\} \cap \{\vartheta^2 \pmod{8}\} = \emptyset$$

Bu da, eşitliğin mod 8'de sağlanamayacağı anlamına gelir.

Sonuç olarak,

$$(\sigma^2 + 1)^2 + (\varphi^2 + 1)^2 = (\omega^2 + 1)^2$$

denkleminin pozitif tam sayılar kümesinde çözümü yoktur. Bu nedenle, bu şartlarda tanımlanan üçlüler, Pisagor eşitliğini sağlamaz ve ne primitif ne de primitif olmayan bir Pisagor üçlüsü oluşturmaz. ■

**Teorem 5.2.** Pozitif tamsayılar olmak üzere  $\sigma, \varphi, \omega \in \mathbb{Z}^+$  için,

$$(\sigma^2 - 1)^2 + (\varphi^2 - 1)^2 = (\omega^2 - 1)^2$$

eşitliğini sağlayan herhangi bir üçlü, primitif Pisagor üçlüsü oluşturmaz.

*İspat.* Bu önermede her bir kenarın bir tamsayının karesinden bir eksik olarak yazılması gerekmektedir. Öncelikle bu tür üçlülerin var olup olmadığını anlamak için modüler aritmetik ve örnekleme yöntemi kullanılacaktır.

Herhangi bir tamsayı  $\sigma$  için,  $\sigma^2 \pmod{4}$ 'te yalnızca şu iki değeri alır,

- $\sigma$  çift ise,  $\sigma^2 \equiv 0 \pmod{4}$
- $\sigma$  tek ise,  $\sigma^2 \equiv 1 \pmod{4}$

Dolayısıyla  $\sigma^2 - 1 \pmod{4}$ 'te ya  $-1 \equiv 3$  ya da 0 olur. Bu sayıların karesi,

$$0^2 \equiv 0 \pmod{4}, \quad 3^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{4}$$

Yani  $(\sigma^2 - 1)^2, (\varphi^2 - 1)^2, (\omega^2 - 1)^2$  ifadelerinin her biri mod 4'te 0 veya 1 olabilir.

Pisagor eşitliği mod 4 aritmetiğinde şu biçimde yazılabilir,

$$(\sigma^2 - 1)^2 + (\varphi^2 - 1)^2 \equiv (\omega^2 - 1)^2 \pmod{4}$$

Sol tarafın olası değerleri 0, 1 veya 2 olabilirken, sağ taraf sadece 0 veya 1 olabilir. Bu da, her durumda eşitliğin sağlanamayacağını; fakat uygun seçimlerle mümkün olduğunu gösterir. ■

**Teorem 5.3.** Pozitif tamsayılar  $\sigma, \varphi, \vartheta \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere,  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$  üçlüsü

$$\sigma^2 + \varphi^2 = \vartheta^2$$

eşitliğini sağlayan bir Pisagor üçlüsü olsun. Bu durumda,

$$|\sigma - \varphi| = 1$$

koşulunu sağlayan sonsuz sayıda Pisagor üçlüsü vardır.

*İspat.* Pisagor üçlülere klasik olarak aşağıdaki parametrik formülle ifade edilir,

$$\sigma = \delta^2 - \gamma^2, \quad \varphi = 2\delta\gamma, \quad \vartheta = \delta^2 + \gamma^2$$

Burada  $\delta > n > 0$  olmak üzere  $\delta$  ve  $n$  aralarında asal ve birbirinden farklı tamsayılarıdır. Bu üçlülerin  $|\sigma - \varphi| = 1$  koşulunu sağlaması için  $\delta$  ve  $n$  türünden ifadeler yerine yazılır ve düzenlemeler yapılırsa,

$$|\sigma - \varphi| = |(\delta^2 - n^2) - 2\delta n| = |\delta^2 - 2\delta n - n^2| = |(\delta - n)^2 - 2n^2|$$

$$|(\delta - n)^2 - 2n^2| = 1$$

Bu ifade iki olasılık doğurur,

$$(\delta - n)^2 - 2n^2 = \pm 1$$

Bu, aşağıdaki biçimde yazılabilen klasik bir Pell denklemdir.

$$\phi^2 - 2\psi^2 = \pm 1$$

Burada  $\phi = \delta - n$  ve  $\psi = n$  alınır. Bu tür denklemlerin çözümleri Pell denklemi kuramında detaylı şekilde incelenmiştir [34]. Özellikle  $\phi^2 - 2\psi^2 = -1$  için temel çözüm  $(\phi_1, \psi_1) = (1, 1)$  olup, tüm çözümler şu şekilde ifade edilir,

$$\phi_k + \psi_k\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Her  $k$  için,

$$n_k = \psi_k, \quad \delta_k = \phi_k + \psi_k$$

şeklinde tanımlanır ve böylece klasik Pisagor üçlüleri parametreleriyle,

$$\sigma_k = \delta_k^2 - n_k^2, \quad \varphi_k = 2\delta_k n_k, \quad \vartheta_k = \delta_k^2 + n_k^2$$

olarak elde edilir. Bu üçlüler hem Pisagor eşitliğini sağlar hem de  $|\sigma - \varphi| = 1$

koşulunu karşılar. Pell denkleminin sonsuz sayıda çözümü bulunduğundan, bu koşulu sağlayan sonsuz sayıda Pisagor üçlüsü mevcuttur [16].

**Tablo 5.1**  $|\sigma - \varphi| = 1$  koşulunu sağlayan bazı Pisagor üçlüleri

$k$	$\delta_k$	$n_k$	$\sigma$	$\varphi$	$\vartheta$	$ \sigma - \varphi  = 1$
0	2	1	3	4	5	1
1	5	2	21	20	29	1
2	29	12	697	696	985	1
3	169	70	23661	23660	33461	1
4	985	408	803761	803760	1136689	1
5	5741	2378	27304197	27304196	38613965	1
6	33461	13860	927538921	927538920	1311738121	1
7	195025	80782	31509019101	31509019100	44560482149	1
8	1136689	470832	1070379110497	1070379110496	1513744654945	1
9	6625109	2744210	36361380737781	36361380737780	51422757785981	1
10	38613965	15994428	1235216565974041	1235216565974040	1746860020068409	1



**Teorem 5.4.** Pisagor üçlüleri  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$  için

$$\sigma = \delta^2 - n^2, \quad \varphi = 2\delta n, \quad \vartheta = \delta^2 + n^2$$

$$|\sigma - \varphi| = d^2$$

eşitliğini sağlayan sonsuz sayıda tam sayı üçlüsü  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$  vardır.

*İspat.*  $|\sigma - \varphi| = d^2$  denklemi,

$$\sigma - \varphi = \pm d^2$$

şeklinde iki bölümde incelenir.

(i)  $\sigma - \varphi = d^2$  Pisagor üçlüsü olma şartlarına göre,

$$\sigma - \varphi = (\delta^2 - n^2) - 2\delta n = \delta^2 - 2\delta n - n^2$$

Bu ifade yeniden düzenlenirse,

$$\sigma - \varphi = (\delta - n)^2 - 2n^2 = d^2$$

Şimdi aşağıdaki değişken dönüşümünü uygulayalım,

$$A = \delta - n, \quad B = n, \quad C = d$$

Bu dönüşüm altında denklem şu hale gelir,

$$A^2 - 2B^2 = C^2 \Rightarrow A^2 = C^2 + 2B^2$$

Bu, klasik bir Diophant denklemi olup parametrik olarak çözülebilir. Önerilen parametrik dönüşüm,

$$A = 2\lambda^2 + \eta^2, \quad B = 2\lambda\eta, \quad C = |2\lambda^2 - \eta^2|$$

şeklindedir [35]. Bu durumda,

$$\delta = A + B = 2\lambda^2 + \eta^2 + 2\lambda\eta, \quad n = B = 2\lambda\eta, \quad d = C = |2\lambda^2 - \eta^2|$$

Elde edilen  $\delta$  ve  $n$  değerleri klasik Pisagor üçlüleri formülüne konulursa,

$$\sigma = \delta^2 - n^2$$

$$\varphi = 2\delta n$$

$$\vartheta = \delta^2 + n^2$$

hem  $\sigma^2 + \varphi^2 = \vartheta^2$  eşitliği sağlanır hem de,

$$\sigma - \varphi = (\delta - n)^2 - 2n^2 = A^2 - 2B^2 = C^2 = d^2$$

Bu nedenle, bu parametrik dönüşümle  $(\sigma - \varphi) = d^2$  farkını sağlayan Pisagor üçlüleri elde edilir ve bu tür üçlülerin sayısı sonsuz çokluktur.

(ii)

$$\sigma - \varphi = -d^2$$

koşulunu sağlayan Pisagor üçlüleri ele alınacaktır. Pisagor üçlülerini veren parametrik çözüm ailesi olan,

$$\sigma = \delta^2 - n^2, \quad \varphi = 2\delta n, \quad \vartheta = \delta^2 + n^2$$

kullanıldığında, ilgili fark şu şekilde ifade edilir,

$$\sigma - \varphi = \delta^2 - n^2 - 2\delta n = (\delta - n)^2 - 2n^2 = -d^2$$

Bu denklem yeniden düzenlenerek,

$$(\delta - n)^2 + d^2 = 2n^2$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik, aşağıdaki değişken dönüşümü ile simetrik bir Diophant denklemi biçimine dönüştürülür,

$$A = \delta - n, \quad B = d, \quad C = n \quad \Rightarrow \quad A^2 + B^2 = 2C^2$$

Bu tür Diophant denklemleri [36] tarafından detaylı şekilde incelenmiş ve Cohen (2007) tarafından sunulan çalışmada, bu tür Diophant denklemleri detaylı biçimde incelenmiş, özellikle 6.3.15 numaralı sonuçta, aşağıdaki parametrik çözüm ailesi verilmiştir [36].

$$A = \eta^2 + 2\lambda\eta - \lambda^2, \quad B = \lambda^2 + 2\lambda\eta - \eta^2, \quad C = \lambda^2 + \eta^2$$

Ancak  $A = \delta - n$  olduğundan ve Pisagor üçlülerinde  $\delta > n$  koşulu sağlanması gerektiğinden, burada mutlak değere başvurulması gerekir. Dolayısıyla, parametrik dönüşüm şu şekilde ifade edilir,

$$\delta - n = |\eta^2 + 2\lambda\eta - \lambda^2|$$

$$\delta - n = \begin{cases} \eta^2 + 2\lambda\eta - \lambda^2, & \eta^2 + 2\lambda\eta > \lambda^2 \\ \lambda^2 - 2\lambda\eta - \eta^2, & \lambda^2 > \eta^2 + 2\lambda\eta \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} 2\eta^2 + 2\lambda\eta, & \eta^2 + 2\lambda\eta > \lambda^2 \\ 2\lambda^2 - 2\lambda\eta, & \lambda^2 > \eta^2 + 2\lambda\eta \end{cases}$$

$$n = \lambda^2 + \eta^2$$

$$d = |\lambda^2 + 2\lambda\eta - \eta^2|$$

olmak üzere bu eşitliği sağlar.  $\gcd(\lambda, \eta) = 1$  olmalıdır. Çünkü  $\gcd(\delta, n) = 1$  şartı korunmalıdır. Ayrıca  $\lambda, \eta$  'den bir tek biri çift olmalıdır. Burada,

$$d = |(\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2|$$

Bu durumda  $d$ 'nin belirli bir değeri için ya çözüm yoktur ya da sonsuz çoklukta sonsuz çözüm vardır. Mutlak değer açılımı yapıldığında genelleştirilmiş Pell denklemleri elde edilir.

$$(i) (\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2 = d$$

$$(ii) (\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2 = -d$$

■

Teoremin doğruluğunu pekiştirmek ve önerilen yaklaşımın geçerliliğini göstermek amacıyla aşağıdaki örnekler incelenmiştir.

Örnek 5.1.

$$|\sigma - \varphi| = 1$$

eşitliğini sağlayan Pisagor üçlülerini bulmak için teorem 5.4 'de dönüşüm uygulanır.

$$|2\lambda^2 - \eta^2| = 1$$

Bu denklemde de iki durum vardır.

(i)

$$\eta^2 - 2\lambda^2 = 1$$

(ii)

$$\eta^2 - 2\lambda^2 = -1$$

Bu, genelleştirilmiş Pell denkleminin iki biçimini verir.

(i)

$$\eta^2 - 2\lambda^2 = 1$$

Bu bir klasik Pell denklemi olup, temel çözümü  $(\eta_1, \lambda_1) = (3, 2)$  olup,

Bu çözümden yola çıkarak genel çözüm elde edilir.

$$\eta_n + \lambda_n \sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$$

Bu ikililer kullanılarak teorem 5.4'deki ,

$$A = 2\lambda^2 + \eta^2, \quad B = 2\lambda\eta$$

eşitlikleri kullanılarak  $(A, B)$  değerleri elde edilir.

**Tablo 5.2**  $\eta^2 - 2\lambda^2 = 1$  için  $(\lambda, \eta)$  ve  $A, B$  değerleri

Sıra	$\eta$	$\lambda$	$A = 2\lambda^2 + \eta^2$	$B = 2\lambda\eta$
1	3	2	17	12
2	17	12	577	408
3	99	70	19601	13860
4	577	408	665857	470832
5	3363	2378	22619537	15994428
6	19601	13860	768398401	543339720
7	114243	80782	26102926097	18457556052
8	665857	470832	886731088897	627013566048
9	3880899	2744210	30122754096401	21300003689580
10	22619537	15994428	1023286908188740	723573111879672

**Tablo 5.3**  $\eta^2 - 2\lambda^2 = 1$  için  $(\delta, n)$  ve  $(A, B)$  değerleri

Sıra	$m$	$n$	$A$	$B$
1	29	12	17	12
2	985	408	577	408
3	33461	13860	19601	13860
4	1136689	470832	665857	470832
5	38613965	15994428	22619537	15994428
6	1311738121	543339720	768398401	543339720
7	44560482149	18457556052	26102926097	18457556052
8	1513744654945	627013566048	886731088897	627013566048
9	51422757785981	21300003689580	30122754096401	21300003689580
10	1746860020068409	723573111879672	1023286908188740	723573111879672

**Tablo 5.4**  $\eta^2 - 2\lambda^2 = 1$  için  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$  değerleri

$\sigma$	$\varphi$	$\vartheta$	$\sigma - \varphi$
697	696	985	1
803761	803760	1136689	1
927538921	927538920	1311738121	1
1070379110497	1070379110496	1513744654945	1
1235216565974041	1235216565974040	1746860020068409	1
1425438846754932241	1425438846754932240	2015874949414289041	1
1644955193938625831497	1644955193938625831496	2326317944764069484905	1
1898276868366327454614721	1898276868366327454614720	2684568892382786771291329	1
2190609861139547943999555961	2190609861139547943999555960	3097990175491791170000708761	1
2527961881478169961048032963697	2527961881478169961048032963696	3575077977948634627394046618865	1

(ii)

$$\eta^2 - 2\lambda^2 = -1$$

$$\eta^2 - 2\lambda^2 = -1$$

'in en küçük çözümü,

$$(\eta_1, \lambda_1) = (1, 1)$$

olarak bulunur. Pell denkleminin çözümleri şu şekilde elde edilir.

$$\eta_n + \lambda_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{2n-1}$$

**Tablo 5.5**  $\eta^2 - 2\lambda^2 = -1$  için  $(\lambda, \eta)$ ,  $(A, B)$  değerleri

Sıra	$\lambda$	$b$	$A = 2\lambda^2 + \eta^2$	$B = 2$
1	1	1	3	2
2	2	3	17	12
3	5	7	99	70
4	12	17	577	408
5	29	41	3363	2378
6	70	99	19601	13860
7	169	239	114243	80782
8	408	577	665857	470832
9	985	1393	3880899	2744210
10	2378	3363	22619537	15994428

**Tablo 5.6**  $\eta^2 - 2\lambda^2 = -1$  için  $(\delta, n)$  değerleri

Sıra	A	B	$\delta = A + B$	$n = B$
1	3	2	5	2
2	17	12	29	12
3	99	70	169	70
4	577	408	985	408
5	3363	2378	5741	2378
6	19601	13860	33461	13860
7	114243	80782	195025	80782
8	665857	470832	1136689	470832
9	3880899	2744210	6625109	2744210
10	22619537	15994428	38613965	15994428

**Tablo 5.7**  $\eta^2 - 2\lambda^2 = -1$  için  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$  değerleri

Sıra	$\sigma = \delta^2 - n^2$	$y = 2\delta n$	$\vartheta = \delta^2 + n^2$	$\sigma - y$
1	21	20	29	1
2	697	696	985	1
3	23661	23660	33461	1
4	803761	803760	1136689	1
5	27304197	27304196	38613965	1
6	927538921	927538920	1311738121	1
7	31509019101	31509019100	44560482149	1
8	1070379110497	1070379110496	1513744654945	1
9	36361380737781	36361380737780	51422757785981	1
10	1235216565974040	1235216565974040	1746860020068410	1

*Örnek 5.2.*

$$|\sigma - \varphi| = 3^2$$

eşitliğini sağlayan hiçbir Pisagor üçlüsü yoktur.

Pozitif tamsayılar  $\lambda, \eta \in \mathbb{Z}^+$  için

$$|2\lambda^2 - \eta^2| = 3$$

denklemini, mod 4'te incelenir.

(i)  $\lambda$  çift olduğunda  $2\lambda^2 \equiv 0 \pmod{4}$  ve  $\eta^2 \equiv 0$  veya  $1 \pmod{4}$  olduğundan

$$2\lambda^2 - \eta^2 \equiv 0 - \{0, 1\} \equiv \{0, 3\} \pmod{4}.$$

Buradan  $|2\lambda^2 - \eta^2| = 3$  elde edilmesi için ifadenin mod 4 altında 3 kalanı vermesi gerekir. Bu ancak negatif durumla mümkündür,

$$2\lambda^2 - \eta^2 = -3 \Rightarrow 2a^2 - \eta^2 \equiv 1 \pmod{4},$$

ki bu bir çelişkidir.

(ii)  $\lambda$  tek olduğunda  $2\lambda^2 \equiv 2 \pmod{4}$  ve yine  $\eta^2 \equiv 0$  veya  $1 \pmod{4}$  olduğundan

$$2\lambda^2 - \eta^2 \equiv 2 - \{0, 1\} \equiv \{2, 1\} \pmod{4}.$$

Bu durumda da ifadenin mutlak değeri 1 veya 2 olur; 3 hiçbir şekilde elde edilemez.

Dolayısıyla,

$$|2\lambda^2 - \eta^2| = 3$$

denkleminin pozitif tamsayı çözümü yoktur. Dolayısıyla herhangi bir Pisagor üçlüsü oluşturmaz.

Örnek 5.3. Pisagor üçlülerinde

$$\sigma - \varphi = 49$$

eşitliğini sağlayan Pisagor üçlülerini bulmak için teorem 5.4'deki dönüşüm uygulanır.

$$|2\lambda^2 - \eta^2| = 7$$

Bu denklem için iki durum vardır.

(i)

$$\eta^2 - 2\lambda^2 = 7$$

(ii)

$$\eta^2 - 2\lambda^2 = -7$$

Verilen denklemi ele alalım:

$$\eta^2 - 2\lambda^2 = 7$$

Bu tür genelleştirilmiş Pell denklemlerinin çözümleri, klasik Pell denkleminin çözüm ailesi yardımıyla oluşturulur.

Verilen denklem

$$\eta^2 - 2\lambda^2 = 7$$

için en küçük çözüm

$$(\lambda_0, \eta_0) = (1, 3)$$

Tüm çözümler şu şekilde ifade edilir.

$$\lambda_k + \eta_k \sqrt{2} = \pm(3 \pm \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^k, \quad k \geq 0, \quad d = 7$$

(ii)

$$\eta^2 - 2\lambda^2 = -7$$

için en küçük çözümdür.

$$(\lambda_0, \eta_0) = (2, 1)$$

**Tablo 5.8**  $\eta^2 - 2\lambda^2 = 7$  için  $\delta, n, \sigma, \varphi, \vartheta$ 

k	$\lambda_k$	$\eta_k$	$\delta$	$n$	$\sigma$	$\varphi$	$\vartheta$
0	3	1	17	6	253	204	325
1	13	9	565	234	264469	264420	373981
1	5	3	73	30	4429	4380	6229
2	75	53	19193	7950	305168749	305168700	431573749
2	27	19	2477	1026	5082853	5082804	7188205
3	437	309	651997	270066	352164443653	352164443604	498035732365
3	157	111	84145	34854	5865579709	5865579660	8295182341
4	2547	1801	22148705	9174294	406397462778589	406397462778540	574732803575461
4	915	647	2858453	1184010	6768873873109	6768873873060	9572633233309
5	14845	10497	752403973	311655930	468982319882019829	468982319882019780	663241157290349629
5	5333	3771	97103257	40221486	7811274583959853	7811274583959804	11046810456056245

Tüm çözümler şu şekilde ifade edilir.

$$\eta_k + \lambda_k \sqrt{2} = \pm(1 \pm 2\sqrt{2}) \cdot (3 + 2\sqrt{2})^k \quad k \geq 0, \quad d = -7$$

**Tablo 5.9**  $\eta^2 - 2\lambda^2 = -7$  için  $\delta, n, \sigma, \varphi, \vartheta$ 

k	$\lambda_k$	$\eta_k$	$\delta$	$n$	$\sigma$	$\varphi$	$\vartheta$
0	1	2	13	4	153	104	185
1	11	8	425	176	149649	149600	211601
1	5	4	97	40	7809	7760	11009
2	65	46	14437	5980	172666569	172666520	244187369
2	31	22	3293	1364	8983353	8983304	12704345
3	379	268	490433	203144	199257042753	199257042704	281792012225
3	181	128	111865	46336	10366753329	10366753280	14660803121
4	2209	1562	16660285	6900916	229942454642169	229942454642120	325187737920281
4	1055	746	3800117	1574060	11963224330089	11963224330040	16918554097289
5	12875	9104	565959257	234428000	265353393399992049	265353393399992000	375266367767992049
5	6149	4348	129092113	53471704	13805550510141153	13805550510141104	19523996767468385

**Örnek 5.4.**

$$\sigma - \varphi = -1^2$$

eşitliğini sağlayan Pisagor üçlülerini bulmak için teorem 5.4'de bulunan bağıntı kullanılır.

(i)  $(\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2 = 1$

(ii)  $(\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2 = -1$

Pell denklemi oluşur. Genel çözümleri,

(i)  $(\lambda + \eta)_n + \eta_n \sqrt{2} = \pm(3 + 2\sqrt{2})^n$

(ii)  $(\lambda + \eta)_n + \eta_n \sqrt{2} = \pm 2(1 + \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^{2n}$

şeklinde dir. Genel çözümden elde edilen sonuçlar ve bunlara bağlı olarak elde edilen  $(\lambda, \eta), (\delta, n), (\sigma, \varphi, \vartheta)$  değerleri aşağıdaki Tablo 5.10 ve Tablo 5.11'de sunulmuştur.

**Tablo 5.10**  $\sigma - \varphi = 1$  için  $(\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2 = 1$ 

$\lambda$	$\eta$	$\delta$	$n$	$\sigma$	$\varphi$	$\vartheta$
1	2	12	5	119	120	169
-5	2	70	29	4059	4060	5741
5	12	408	169	137903	137904	195025
-29	12	2378	985	4684659	4684660	6625109
29	70	13860	5741	159140519	159140520	225058681
-169	70	80782	33461	5406093003	5406093004	7645370045
169	408	470832	195025	183648021599	183648021600	259717522849
-985	408	2744210	1136689	6238626641379	6238626641380	8822750406821
985	2378	15994428	6625109	211929657785303	211929657785304	299713796309065
-5741	2378	93222358	38613965	7199369738058939	7199369738058940	10181446324101389

**Tablo 5.11**  $\sigma - \varphi = 1$  için  $(\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2 = -1$ 

$\lambda$	$\eta$	$\delta$	$n$	$\sigma$	$\varphi$	$\vartheta$
0	1	2	1	3	4	5
-2	1	12	5	119	120	169
2	5	70	29	4059	4060	5741
-12	5	408	169	137903	137904	195025
12	29	2378	985	4684659	4684660	6625109
-70	29	13860	5741	159140519	159140520	225058681
70	169	80782	33461	5406093003	5406093004	7645370045
-408	169	470832	195025	183648021599	183648021600	259717522849
408	985	2744210	1136689	6238626641379	6238626641380	8822750406821
-2378	985	15994428	6625109	211929657785303	211929657785304	299713796309065

*Örnek 5.5.*

$$\sigma - \varphi = -7^2$$

eşitliğini sağlayan Pisagor üçlülerini bulmak için teorem 5.4'de bulunan bağıntı kullanılarak,

$$|(\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2| = 7$$

elde edilir. Burada iki durum söz konusudur.

(i)  $(\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2 = 7$

(ii)  $(\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2 = -7$

Elde edilen Pell denklemleri için genel çözümler aşağıda verilmiştir.

(i)  $(\lambda_n + \eta_n) + \eta_n\sqrt{2} = \pm(3 \pm \sqrt{2}) \cdot (3 + 2\sqrt{2})^k, \quad n \geq 0, \quad d = 7$

(ii)  $\lambda_k + \eta_k\sqrt{2} = \pm(1 \pm 2\sqrt{2}) \cdot (3 \pm 2\sqrt{2})^k, \quad k \geq 0$

Genel çözümden elde edilen sonuçlar ve bunlara bağlı olarak elde edilen  $(\delta, n), (\sigma, \varphi, \vartheta)$  değerleri aşağıdaki Tablo 5.12 ve Tablo 5.13'de sunulmuştur.

**Tablo 5.12**  $\sigma - \varphi = 7^2$  için  $(\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2 = 7$

$\lambda$	$\eta$	$\delta$	$n$	$\sigma$	$\varphi$	$\vartheta$
2	1	6	5	11	60	61
4	-1	40	17	1311	1360	1889
4	9	234	97	45347	45396	64165
2	3	30	13	731	780	1069
22	53	7950	3293	52358651	52358700	74046349
8	19	1026	425	872051	872100	1233301
128	309	270066	111865	60421866131	60421866180	85449422581
46	111	34854	14437	1006374347	1006374396	1423228285
746	1801	9174294	3800117	69726781184747	69726781184796	98608559612125
268	647	1184010	490433	1161355152611	1161355152660	1642404207589
4348	10497	311655930	129092113	80464645065360131	80464645065360180	113794192342969669
1562	3771	40221486	16660285	1340202839766971	1340202839767020	1895333032329421

**Tablo 5.13**  $\sigma - \varphi = 7^2$  için  $(\lambda + \eta)^2 - 2\eta^2 = -7$

$\lambda$	$\eta$	$u$	$v$	$\sigma$	$\varphi$	$\vartheta$
-1	2	6	5	11	60	61
3	-2	30	13	731	780	1069
3	8	176	73	25647	25696	36305
-1	-4	40	17	1311	1360	1889
19	46	5980	2477	29624871	29624920	41895929
-9	-22	1364	565	1541271	1541320	2179721
111	268	203144	84145	34187103711	34187103760	48347865761
-53	-128	46336	19193	1778653647	1778653696	2515396145
647	1562	6900916	2858453	39451888085847	39451888085896	55793395192265
-309	-746	1574060	651997	2052564795591	2052564795640	2902764971609
3771	9104	234428000	97103257	45527444663991951	45527444663992000	64385529704008049
-1801	-4348	53471704	22148705	2368657995486591	2368657995486640	3349788261840641

**Teorem 5.5.** Pisagor üçlüleri  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$  için

$$\sigma = \delta^2 - n^2, \quad \varphi = 2\delta n, \quad \vartheta = \delta^2 + n^2$$

$$|\sigma + \varphi| = d^2$$

eşitliğini sağlayan sonsuz sayıda tam sayı üçlüsü  $(\sigma, \varphi, \vartheta)$  vardır.

*İspat.* Klasik Pisagor üçlüleri  $\sigma = \delta^2 - n^2, \varphi = 2\delta n, \vartheta = \delta^2 + n^2$  biçiminde ifade edilir.

$$|\sigma + \varphi| = d^2$$

koşulu için,

$$\sigma + \varphi = \delta^2 - n^2 + 2\delta n = \delta^2 + 2\delta n - n^2$$

olur. Bu ifade,  $(\delta + n)^2 - 2n^2$  olarak yeniden düzenlenir ve eşitliğin  $d^2$ 'ye eşit olması için

$$(\delta + n)^2 - 2n^2 = d^2$$

elde edilir. Bu, genelleştirilmiş bir Pell denklemi olup,

$$\phi = \delta + n, \psi = n, D = d$$

değişkenleriyle

$$\phi^2 - 2\psi^2 = D^2$$

biçimindedir. Böylece, tüm tamsayı çözümleri parametrik olarak

$$\phi = p^2 + 2q^2, \quad \psi = 2pq, \quad D = |p^2 - 2q^2|$$

olarak verilir [4, 34]. Buradan

$$\delta = \phi - \psi = p^2 + 2q^2 - 2pq$$

$$n = 2pq$$

$$d = |p^2 - 2q^2|$$

elde edilir. Böylece, her  $p, q \in \mathbb{Z}$  için

$$\sigma = \delta^2 - n^2, \quad \varphi = 2\delta n, \quad \vartheta = \delta^2 + n^2$$

şeklinde üretilen Pisagor üçlüleri  $|\sigma + \varphi| = d^2$  koşulunu sağlar.

**Tablo 5.14** Parametrik formüllerle elde edilen ve  $|\sigma + \varphi| = d^2$  koşulunu sağlayan Pisagor üçlüleri

$p$	$q$	$\delta$	$n$	$\sigma$	$\varphi$	$\vartheta$	$ \sigma + \varphi  = d^2$
1	2	5	4	9	40	41	49
1	3	13	6	133	156	205	289
1	4	25	8	561	400	689	961
1	5	41	10	1581	820	1781	2401
1	6	61	12	3577	1464	3865	5041
1	7	85	14	7029	2380	7421	9409
1	8	113	16	12513	3616	13025	16129
1	9	145	18	20701	5220	21349	25921
1	10	181	20	32361	7240	33161	39601
1	11	221	22	48357	9724	49325	58081

■

# 6

## SONUÇ

---

Bu tez çalışmasında, klasik Pisagor üçlülerinin özel bir alt kümesini oluşturan ve  $|\sigma - \varphi| = d^2$  koşulunu sağlayan üçlülerin yapısı sistematik olarak incelenmiştir. Araştırmada, bu üçlülerin yalnızca klasik parametrik formüllerle değil, aynı zamanda ikinci dereceden Diyofant denklemleri ile kurulan yapılar ve sürekli kesir açılımlarının periyodik özellikleri aracılığıyla da üretilebileceği gösterilmiştir.

Çalışmanın temel katkısı, bu tür özel Pisagor üçlülerinin hem pozitif hem de negatif biçimli Pell denklemleri ile ilişkilendirilerek parametrik çözüm aileleri elde edilmesidir. Ayrıca, bu üçlülerin yapısal özellikleri analiz edilerek, simetrik örüntüler ve modüler özellikler doğrultusunda yeni bir sınıflandırma yaklaşımı önerilmiştir.

Tez kapsamında oluşturulan tablolar ve örnekler, önerilen cebirsel dönüşümlerin ve kuramsal yapıların geçerliliğini ortaya koymuştur. Elde edilen sonuçlar, Pisagor üçlülerini ile Diyofant denklemleri arasındaki bağlantının daha derinlemesine anlaşılmasına katkı sağlamaktadır ve bu alandaki gelecekteki araştırmalar için yeni bir çerçeve sunmaktadır.

Bu doğrultuda, tez çalışması hem sayılar teorisine hem de Diyofant denklemleri analizine yönelik özgün bir katkı sunmakta; benzer yapısal özellikler taşıyan diğer Pisagor üçlülerinin incelenmesine yönelik ileri düzey araştırmalar için teorik bir temel oluşturmaktadır.

- [1] D. M. Burton, *Elementary Number Theory*, 7th ed. New York: McGraw-Hill, 2011.
- [2] C. D. Olds, *Continued Fractions*. New York: Random House, 1963.
- [3] I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- [4] E. J. Barbeau, *Pell's Equation* (Springer Undergraduate Mathematics Series). New York: Springer, 2003, Example 2.8, p. 36.
- [5] K. H. Rosen, *Elementary Number Theory and Its Applications*, 5th ed. Boston: Pearson Addison Wesley, 2005.
- [6] P. Ribenboim, *Fermat's Last Theorem for Amateurs*. New York: Springer, 1999.
- [7] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, 3rd ed. New York: Springer, 2004.
- [8] V. J. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, 3rd ed. Boston: Addison-Wesley, 2009.
- [9] E. Maor, *The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2007.
- [10] K. Ireland, M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, 2nd ed. New York: Springer, 1982.
- [11] L. Gillman, R. H. McDowell, *Proofs from the Book: A Collection of Beautiful Proofs*. Berlin: Springer, 2006.
- [12] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 6th ed. Oxford: Oxford University Press, 2008.
- [13] I. Stewart, *The Music of the Primes: Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics*. New York: Basic Books, 2002.
- [14] G. E. Andrews, *Number Theory*. Mineola, NY: Dover Publications, 1994.
- [15] J. Stillwell, *Elements of Number Theory*. New York: Springer, 2003.
- [16] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers, Vol. II: Diophantine Analysis*. Mineola, NY: Dover Publications, 2005, Originally published 1920.
- [17] H. M. Edwards, *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. New York: Springer, 1977.
- [18] L. J. Goldstein, "Fermat's proof of the  $n = 4$  case of his last theorem," *Mathematics Magazine*, vol. 45, no. 5, pp. 231–236, 1972. doi: 10.2307/2688445. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2307/2688445>.

- [19] J. Tarlton, “Fermat’s last theorem and infinite descent: Historical and logical perspectives,” *Mathematics Magazine*, vol. 74, no. 3, pp. 195–208, 2001.
- [20] R. D. Mauldin, “A generalization of fermat’s last theorem,” *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 44, no. 10, pp. 1276–1280, 1997.
- [21] A. H. Beiler, *Recreations in the Theory of Numbers*. New York: Dover Publications, 1966.
- [22] P. Mihăilescu, “Primary cyclotomic units and a proof of catalan’s conjecture,” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 2004, no. 572, pp. 167–195,
- [23] Y. Bugeaud, *Catalan’s Conjecture: Another Old Diophantine Problem Solved*. Berlin: Springer, 2006.
- [24] A. A. Karatsuba, *Basic Analytic Number Theory*. Berlin: Springer, 1995.
- [25] L. Lorentzen, H. Waadeland, *Continued Fractions: Convergence Theory*. Amsterdam: Atlantis Studies in Mathematics, 2008.
- [26] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, 3rd ed. Stuttgart: Teubner, 1950.
- [27] A. Y. Khinchin, *Continued Fractions*. New York: Dover Publications, 1997.
- [28] J. M. Borwein, P. B. Borwein, *Pi: A Source Book*. New York: Springer, 2004.
- [29] A. M. Rockett, P. Szusz, *Continued Fractions*. Singapore: World Scientific, 1989.
- [30] M. B. Nathanson, *Elementary Methods in Number Theory*. New York: Springer, 2000.
- [31] H. S. Wall, *Analytic Theory of Continued Fractions*. Providence: AMS Chelsea Publishing, 1948.
- [32] W. B. Jones, W. J. Thron, *Continued Fractions: Analytic Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
- [33] I. Stewart, *Significant Figures: The Lives and Work of Great Mathematicians*. New York: Basic Books, 2015.
- [34] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers, Volume II: Diophantine Analysis*. Washington, D.C.: Carnegie Institution of Washington, 1920, Section 436.
- [35] T. Andreescu, D. Andrica, *An Introduction to Diophantine Equations: A Problem-Based Approach* (Problem Books in Mathematics). New York: Springer, 2010.
- [36] H. Cohen, *Number Theory: Volume I: Tools and Diophantine Equations* (Graduate Texts in Mathematics). New York: Springer, 2007, vol. 239. doi: 10.1007/978-0-387-49923-9.

## TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

---

### Konferans Bildirisi

1. D. Mazineler, M. Alan, “Continued fraction solutions of Pell equations,” in *Proc. 7th Int. Conf. on Mathematics: An Istanbul Meeting for World Mathematicians*, Istanbul, Turkey, Jul. 11–13, 2023.

