T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

ASAL ALT MODÜLLERİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Nejma UGLJANIN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2025

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

ASAL ALT MODÜLLERİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Nejma UGLJANIN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZİRAN 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ASAL ALT MODÜLLERİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Nejma UGLJANIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 26/06/2025 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Prof. Dr. Seçil ÇEKEN GÜNEŞ

Doç. Dr. Ortaç ÖNEŞ

ÖZET

ASAL ALT MODÜLLERİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Nejma UGLJANIN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Haziran 2025, 55 sayfa

Bu tez çalışmasında, asal idealler ve asal alt modüller kuramsal bir çerçevede ele alınmış; bu yapıların özellikleri ile genelleştirilmiş biçimleri detaylı biçimde incelenmiştir. Çalışmanın ilk bölümünde, ilgili literatürde yer alan temel tanımlar, ön bilgiler ve mevcut yaklaşımlar sistematik biçimde sunularak kavramsal bir temel oluşturulmuş; devamında, modül kavramının bazı genişlemeleri araştırılmıştır. İkinci bölümde, ϕ-asal, S-asal, güçlü asal ve tam asal alt modül gibi yapılara dayanan teoremler temel alınarak, tezdeki bulgular bölümünde kullanılacak olan ispat teknikleri incelenmiştir. Tezin özgün katkısı, literatürde daha önce tanımlanmamış yeni bir asal ideal ve asal alt modül sınıfının tanıtılmasıdır. Bu bağlamda, *A-asal ideal. A-bölge, A-yarıasal ideal, A-radikal* ve *A-asal alt modül* olarak adlandırılan yapılar tanımlanmış; bu yapıların varlık koşulları belirlenmiş, temel yapısal özellikleri ortaya konmuş ve uygun matematiksel örneklerle desteklenmiştir. Ayrıca, A-asal yapıların klasik asal yapılarla olan ilişkileri derinlemesine analiz edilmiş; bu iki kavram arasındaki benzerlikler ve ayrışan yönler sistematik olarak karşılaştırılmıştır. Elde edilen bulgular, modül ve ideal teorisine katkı sağlamakla birlikte, bu alanda yapılacak ileri düzey çalışmalara da kuramsal bir zemin hazırlamaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Asal ideal, Asal alt modül, A-asal ideal, A-asal alt modül, İdeal teorisi, Modül teorisi

JÜRİ: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Seçil ÇEKEN GÜNEŞ
Doç. Dr. Ortaç ÖNEŞ

ABSTRACT

GENERALIZATION OF PRIME SUBMODULES

Nejma UGLJANIN

MSc Thesis in MATHEMATICS
Supervisor: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
June 2025, 55 pages

In this thesis, prime ideals and prime submodules are examined within a theoretical framework, and their properties as well as generalized forms are studied in detail. In the first part of the study, the fundamental definitions, preliminary concepts, and existing approaches found in the relevant literature are systematically presented to establish a conceptual foundation; subsequently, certain extensions of the module concept are explored. In the second part, proof techniques based on theorems concerning structures such as ϕ-prime, S-prime, strongly prime, and completely prime submodules are analyzed. These techniques are employed in the findings section of the thesis. The original contribution of this thesis is the introduction of a new class of prime ideals and prime submodules that has not been previously defined in the literature. In this context, structures named *A-prime ideal, A-domain, A-semiprime ideal, A-radical,* and *A-prime submodule* are introduced; the conditions for their existence are identified, their fundamental structural properties are established, and these are supported by appropriate mathematical examples. Furthermore, the relationships between A-prime structures and classical prime structures are thoroughly analyzed, and similarities and differences between the two concepts are systematically compared. The findings of this study not only contribute to module and ideal theory but also provide a theoretical basis for future advanced research in this field.

KEYWORDS: A-prime Ideal, A-prime Submodule, Ideal Theory, Module Theory, Prime Ideal, Prime Submodule

COMMITTEE: Prof. Dr. Mustafa ALKAN
Prof. Dr. Seçil ÇEKEN GÜNEŞ
Assoc. Prof. Dr. Ortaç ÖNEŞ

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, cebirsel yapıların temel unsurlarından olan asal idealler ve asal alt modüller kavramları kapsamlı bir biçimde incelenmiştir. Asal idealler, halka teorisinin temel taşlarından biri olarak, halkaların iç yapısını anlamada kritik bir rol oynarken; asal alt modüller, modül teorisinde bu kavramın doğal bir genelleştirmesi olarak ortaya çıkmaktadır. Her iki yapı da cebirsel sistemlerin derinlemesine analizinde ve modül-halka ilişkilerinin çözümlemesinde önemli araçlar sunmaktadır.

Tezde, asal ideallerin ve asal alt modüllerin klasik tanımları ve temel özellikleri detaylı olarak ele alınmış; ardından kapsamlı şekilde incelenmemiş olan A-asal ideal ve A-asal alt modül kavramları tanıtılmıştır. Bu yeni sınıflandırmalar için gerekli ve yeterli koşullar dikkatle belirlenmiş, yapıların temel özellikleri teorik olarak incelenmiş ve matematiksel örneklerle desteklenmiştir. Böylece, klasik asal yapılarla yeni tanımlanan A-asal yapılar arasındaki benzerlikler ve farklar sistematik olarak ortaya konmuştur.

Bu tez, Giriş, Kaynak Taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma, Sonuçlar olmak üzere beş ana bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, halka kavramının tarihsel gelişimi ve soyut cebir içindeki önemi ortaya konulmuş; bu yapının içinde yer alan ideal ve modül gibi alt yapılarla birlikte nasıl evrildiği açıklanmıştır. Özellikle asal ideallerin ve asal alt modüllerin, cebirsel yapıların anlaşılmasındaki rolü vurgulanmış; bu kavramların modül teorisinde nasıl karşılık bulduğu ve genelleştirildiği ele alınmıştır. Ayrıca, tez kapsamında incelenecek olan A-asal ideal ve A-asal alt modül gibi yeni yapıların tanıtımı yapılarak, çalışmanın kuramsal çerçevesi ve katkı sağlamayı hedeflediği alanlar özetlenmiştir.

Kaynak Taraması bölümünde, tez boyunca kullanılan halka ve modül teorisine ilişkin çalışmamızın sonraki bölümünde kullanılacak olan temel bilgiler ve önemli sonuçlar verilmiştir. Ardından, asal alt modüller üzerine yapılmış önceki çalışmalar incelenmiş; özellikle bu kavramın modül teorisinde nasıl genelleştirildiğine dair önerilen yaklaşımlar ve bu yaklaşımların teoride oynadığı roller ele alınmıştır.

Materyal ve Metot bölümünde, literatürde yer alan ve asal alt modül kavramının çeşitli genelleştirmelerine ilişkin ortaya konmuş temel teoremler detaylı biçimde ele alınmıştır. Bu teoremler, yalnızca sonuçlarıyla değil, aynı zamanda taşıdıkları ispat teknikleriyle de öne çıkmakta olup, çalışmanın metodolojik altyapısını oluşturmaktadır. İlgili ispatlar aracılığıyla, ϕ-asal, S-asal, güçlü asal ve tam asal alt modül gibi yapıların analitik çerçevesi ortaya konmuş ve bu yöntemler, tezin Bulgular ve Tartışma bölümünde yapılacak değerlendirmelere kuramsal zemin hazırlamıştır.

Bulgular ve Tartışma Bulgular ve Tartışma bölümünde, literatürde henüz tanımlanmamış yeni bir asal ideal ve asal alt modül sınıfı olan A-asal yapılar tanımlanmış ve bu yapıların temel özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Tanımlanan A-asal idealler ve alt modüller için gerekli ve yeterli koşullar ortaya konmuş, klasik asal kavramlarıyla olan ilişkileri ve aralarındaki farklar kapsamlı şekilde analiz edilmiştir. Ayrıca, A-asal yapılar üzerine elde edilen sonuçlar çeşitli örneklerle desteklenmiş ve modül teorisi ile ideal teorisi bağlamında bu yapıların önemi vurgulanmıştır.

Tezin Sonuçlar bölümünde, çalışmanın genel bir değerlendirmesi yapılmış, asal alt modüller üzerine yapılan bu çalışmanın modül teorisine katkıları vurgulanmış ve gelecekte yapılabilecek çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Tezin diğer bölümleri ise Kaynaklar ve Özgeçmiş bölümleri olup, bu tez çalışması Özgeçmiş ile bitmektedir.

Yüksek lisans yolculuğum boyunca her adımda yanımda olan; bilgisini, zamanını ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Mustafa ALKAN'a gönülden teşekkür ederim. Kendisi, bu süreçte yalnızca bir danışman değil, aynı zamanda yol gösterici ve ilham kaynağı olmuştur.

Türkiye'de eğitim alma fırsatını sağlayan ve kişisel gelişimime katkıda bulunan Yurtdışı Türkler ve Akraba Topluluklar Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Sevgileri, sabırları ve fedakârlıklarıyla beni her daim destekleyen kıymetli aileme; başta annem ve babam olmak üzere, her zaman yanımda olan kardeşlerime ve neşeleriyle hayatıma renk katan beş sevgili yeğenime gönülden teşekkür ederim. Varlıkları bana güç ve cesaret verdi.

Ayrıca, artık aramızda olmasa da hayatımdaki etkisi ve manevi desteği her zaman hissedilen sevgili ağabeyim Sulejman Ugljanin'i saygı, özlem ve rahmetle anıyorum. Onun hatırası bu çalışmanın her aşamasında benimleydi.

.

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Asal Alt Modüllerin Genelleştirilmesi" adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

26/06/2025

Nejma UGLJANIN

İmza

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
A/B	: Bölüm modülü
$B \leq A$	: B, A nin alt modülü
$Hom_H(A, B)$	: A dan B ye H-homomorfizmaların kümesi
$End_H(A)$	: A nın H-homomorfizmalar halkası
htP	: P nin yüksekliği
$Kerf$	: f homomorfizmasının çekirdeği
Imf	: f homomorfizmasının görüntüsü
$T(A)$	: A modülünün torsion alt modülü
$rad(I)$	: I idealinin radikali
$\Lambda(H)$	: H nin ideallerinin kümesi
I_N^P	: Güçlü asal alt modül
$Min(I)$	: I idealini kapsayan minimal asal ideallerin kümesi
$Spec(H)$	: H halkasının tüm asal ideallerinin kümesi
$S(A)$	: A nın alt modüllerinin kümesi

1. GİRİŞ

Soyut cebirin temel yapı taşlarından biri olan halka kavramı, tarihsel süreç içerisinde farklı matematiksel ihtiyaçların ve problemlerin bir sonucu olarak şekillenmiştir. Başlangıçta sayılarla ve cebirsel ifadelerle ilgili somut problemleri çözmeye yönelik olarak geliştirilen bu yapı, zamanla soyutlanarak bağımsız bir matematiksel kavram hâline gelmiştir.

20. yüzyılın başlarında halka, iki işlemli soyut bir yapı olarak tanımlanmış; bu tanıma göre, toplama işlemi altında bir grup, çarpma işlemi altında ise birleşmeli ve toplama üzerine dağılmalı olması beklenmiştir. Özellikle çarpma işleminin kapalı olması, toplama ile belirli bir şekilde etkileşime girmesi ve bazı durumlarda birim eleman içermesi, bu yapının temel niteliklerindendir.

Halka kavramı ile birlikte onun içinde yer alan özel alt yapılar da önem kazanmıştır. Bunlardan biri olan ideal kavramı, sayıların çarpanlara ayrılabilirliği gibi problemler üzerinde çalışılırken ortaya çıkmıştır. İdeal, halkalar içinde belirli kapalı koşulları sağlayan alt kümeler olarak tanımlanmış; daha sonra asal ve yarı asal idealler gibi kavramlarla zenginleştirilmiştir. Bu yapıların, özellikle halkaların faktörleme özelliklerini anlamada kilit rol oynadığı anlaşılmıştır.

Benzer şekilde, modül kavramı da halkaların daha genel bir bağlamda ele alınmasını mümkün kılmıştır. Vektör uzaylarının halka üzerindeki genellemesi olarak düşünülebilecek modüller, hem soyut kavramsal çalışmalarda hem de temsiller teorisi gibi uygulamalarda önemli bir yer edinmiştir. Modüller sayesinde halkalar üzerinde tanımlı yapıların daha esnek biçimde incelenmesi mümkün olmuş; alt modül, doğrudan toplam, homomorfizma gibi birçok kavram bu çerçevede yeniden tanımlanarak soyut cebirin temel araçlarından biri hâline gelmiştir.

Tüm bu gelişmeler, cebirin yalnızca sayısal işlemlerle sınırlı kalmadığını; yapıların kendi iç mantığına göre sistematik biçimde incelenebileceğini göstermiş ve soyut cebirin modern biçimini kazanmasına katkı sağlamıştır.

Bu tez çalışmasında, asal alt modül kavramının farklı perspektiflerden genelleştirilmesi ele alınacaktır. Öncelikle, asal idealler ve asal alt modüllerin klasik tanımları ve temel özellikleri detaylı bir biçimde ortaya konacak, bu kavramların halka ve modül teorisi bağlamındaki rolü kapsamlı şekilde incelenecektir. Ayrıca, literatürde halihazırda yer alan çeşitli genelleştirmeler ve uzantılar ele alınarak, asal idealler ve asal alt modüllerin daha geniş yapı ve sınıflar içindeki işlevselliği ve önemi tartışılacaktır. Bu çerçevede, asal ideal kavramının modül teorisine yansımaları ve karşılıkları üzerinde durulacak, asal ideallerin modüller üzerindeki izdüşümü olarak görülen asal alt modüller arasındaki yapısal paralellikler irdelenecektir.

Bunun ardından, özellikle asal ideal kavramının farklı yönlerden genişletilmesiyle ortaya çıkan A-asal idealler tanıtılacaktır. Bu bağlamda, A-asal ideallerin temel özellikleri, klasik asal ideallerle olan ilişkileri ve halkalar teorisindeki yeri detaylı biçimde ele alınacaktır. Devamında, modül teorisine yeni bir genişleme olarak sunulan A-asal alt modül kavramı incelenecek; bu yapının tanımı, yapısal özellikleri ve diğer modül sınıflarıyla olan ilişkileri kapsamlı şekilde analiz edilecektir. A-asal alt modüllerin teorik çerçevesi ve potansiyel uygulama alanları, örnekler ve ispatlarla desteklenerek ortaya konacaktır.

Bu çalışma, asal idealler ve asal alt modüllerin modül teorisi içindeki yerini derinlemesine kavramayı hedeflerken, aynı zamanda modül yapılarının soyutlanması ve genellenmesi yoluyla cebirsel yapıların daha geniş bir perspektiften anlaşılmasına katkı sunmayı amaçlamaktadır. Böylece, hem asal ideallerin hem de asal alt modüllerin genellenmiş versiyonlarının teorik zenginliği ile modül teorisine kazandırılacak yeni kavramsal araçlara odaklanılacaktır. Bu çalışma, halka ve modül teorisine yönelik ileride yapılacak araştırmalara sağlam bir teorik zemin oluşturmayı hedeflemektedir.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak temel tanımların yanı sıra, bu kavramların farklı yönlerden nasıl genelleştirildiğine ilişkin literatürdeki yaklaşımlar değerlendirilecektir. Özellikle klasik asal alt modül kavramının zayıf asal, ϕ-asal, S-asal, güçlü asal ve tam asal alt modül gibi çeşitli genelleştirmeleri incelenecek. Bu bölümde yer alan temel ifadeler ve teorik çerçeve, Atiyah ve Macdonald (1969), Rowen (1988), Watkins (2007) ile Çallıalp ve Tekir (2009) kitaplarından, Azizi (2011), Zamani (2010), Sevim, Arabacı, Tekir ve Koç (2019), Behboodi, Karamzadeh ve Koohy (2004), Naghipour (2009) ve Beachy ile Medina-Bárcenas (2020) makalelerinden yararlanılmıştır.

2.1. Değişmeli Halkalar ve İdealler

Halkalar, cebirin temel yapı taşları arasında yer alır. Özellikle değişmeli halkalar, cebirsel yapıların incelenmesinde önemli bir rol oynar. Bu bölümde, değişmeli halkaların tanımı yapılacak ve bu yapılar içinde yer alan ideallerin özellikleri ele alınacaktır.

Tanım 2.1. *H kümesi, "$+$" ve "." işlemlerine göre aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa halka olarak adlandırılır.*

(1) $(H, +)$ bir değişmeli gruptur,

(2) Her $h_1, h_2, h_3 \in H$ için, çarpma işlemi birleşmelidir:

$$(h_1 \cdot h_2) \cdot h_3 = h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3)$$

(3) Her $h_1, h_2, h_3 \in H$ için çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliği:

$$h_1 \cdot (h_2 + h_3) = h_1 \cdot h_2 + h_1 \cdot h_3.$$

Eğer her $h_1, h_2 \in H$ için $h_1 \cdot h_2 = h_2 \cdot h_1$ ise H halkasına değişmeli ve eğer her $h \in H$ için $h \cdot 1_H = 1_H \cdot h = h$ olacak şekilde bir $1_H \in H$ varsa H halkasına birimli halka denir (Atiyah ve Macdonald 1969).

Bir $h \in H$ için $h \cdot a = a \cdot h = 1$ olacak şekilde $a \in H$ var ise h elemanına birimsel eleman denir. Dolayısıyla tersi mevcut elemanlar birimsel elemanlardır. Birimli değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanının tersi mevcut ise halkaya cisim denir (Çallıalp ve Tekir 2009).

Bu tezde yalnızca birimli değişmeli halkalar ele alınacaktır.

Bir $h \in H$ için $h^n = 0$ olacak şekilde bir pozitif n tam sayısı var ise h elemanına H nin nilpotent elemanı denir (Atiyah ve Macdonald 1969).

Eğer bir halka H içinde $h \in H \setminus \{0\}$ elemanı için $hf = 0$ olacak şekilde $f \in H \setminus \{0\}$ elemanı bulunabiliyorsa, h elemanına sıfır böleni denir. Sıfırdan farklı hiçbir sıfır böleni içermeyen halkalara ise tamlık bölgesi denir (Atiyah ve Macdonald 1969).

H tamlık bölgesi olmak üzere, birimselden farklı her elemena indirgenemez elememanların çarpımı şeklinde tek türlü yazılabiliyorsa halkaya tek türlü çarpanlara ayrılma bölgesi (TAÇ) denir (Watkins 2007).

Tanım 2.2. *H bir tamlık bölgesi ve A, H nin kesir cismi olsun. Eğer her $a \in A$ için $a \in H$ veya $a^{-1} \in H$ ise H halkasına valuation halka denir (Atiyah ve Macdonald 1969).*

Tanım 2.3. *H bir değişmeli halka ve $I \subseteq H$, boş olmayan bir altküme olsun. Eğer I aşağıdaki iki özelliği sağlıyorsa, bu durumda I, H halkasının bir ideali olarak adlandırılır:*

1. *Her $u, v \in I$ için, $u - v \in I$ ve*

2. *Her $u \in I$ ve her $h \in H$ için, $hu \in I$*

(Atiyah ve Macdonald 1969).

Her halka için $\{0_H\}$ ve H nin kendisi ideal oluşturur. Bu yüzden, sıfırdan farklı her halkada en az iki ideal mutlaka bulunur.

Önerme 2.4. *Bir halkanın bir cisim olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, yalnızca $\{0\}$ ve kendisi olmak üzere iki ideale sahip olmasıdır (Atiyah ve Macdonald 1969; Watkins 2007).*

Tanım 2.5. *H bir halka ve $h \in H$ olmak üzere,*

$$(h) = \{rh \mid r \in H\}$$

kümesine temel ideal denir (Watkins 2007).

Eğer bir halkadaki her ideal, tek eleman ile üretiliyorsa, bu halka temel ideal halkası olarak adlandırılır. Ayrıca, eğer bu halka aynı zamanda bir tamlık bölgesi ise, bu durumda halka bir temel ideal bölgesi (TİB) olarak adlandırılır. Her temel ideal bölgesi bir TAÇ bölgesidir (Watkins 2007).

Tanım 2.6. *H bir halka ve I onun bir ideali olsun. Her $h_1, h_2 \in H$ için,*

$$h_1 \equiv h_2 (mod\, I) \Leftrightarrow h_1 - h_2 \in I$$

şeklinde tanımlanan denklik bağıntısına göre H/I kümesi oluşturulur.
Burada $h_1, h_2 \in H$ olmak üzere bölüm sınıfları üzerinde şu işlemler tanımlanır:

$$(h_1 + I) + (h_2 + I) = (h_1 + h_2) + I$$

$$(h_1 + I) \cdot (h_2 + I) = (h_1 \cdot h_2) + I$$

Bu işlemlerle H/I bir halka olur. Bu şekilde elde edilen halkaya, I idealine göre bölüm halkası denir (Atiyah ve Macdonald 1969; Watkins 2007).

2.1.1. Maksimal ve asal idealler

Tanım 2.7. *H bir halka ve A sıfırdan farklı bir öz ideal olsun. A yı kapsayan başka bir ideal yoksa A ya maksimal ideal denir (Atiyah ve Macdonald 1969).*

Önerme 2.8. *A, H halkasından farklı bir ideali olsun. A idealinin maksimal olması için gerek ve yeter koşul H/A bölüm halkasının bir cisim olmasıdır (Atiyah ve Macdonald 1969).*

Tanım 2.9. *H bir halka ve I, H halkasının kendinden farklı bir ideali olsun.*
Eğer $h_1, h_2 \in H$ için

$$h_1 \cdot h_2 \in I \Rightarrow h_1 \in I \;\; veya \;\; h_2 \in I$$

koşulu sağlanıyorsa, I idealine asal ideal denir (Atiyah ve Macdonald 1969).

Bir halka H nin tüm asal ideallerinin oluşturduğu küme $\mathrm{Spec}(H)$ ile gösterilir.

Örnek 2.10. *Tam sayılar halkası $\mathbb{Z}$ de, bir asal sayı p ile oluşturulan ideal, yani*

$$(p) = \{pk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

asal bir idealdir. Örneğin, (5) asal bir idealdir. Çünkü eğer ab sayısı 5'e bölünüyorsa, o zaman a ya da b 5'e bölünmek zorundadır.

Teorem 2.11. *H ve H' değişmeli halkalar ve $f : H \to S$ bir örten halka homomorfizması olsun. Aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(i) I, H halkasının bir asal ideali ve $\ker(f) \subseteq I$ *ise $f(I)$, S halkasının bir asal idealidir.*

(ii) J, S halkasının bir asal ideali ise, $f^{-1}(J)$ da H halkasının bir asal idealidir

(Çallıalp ve Tekir 2009).

Tanım 2.12. *H bir tamlık bölgesi olmak üzere her öz ideali, sonlu sayıda asal idealin çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa H ye Dedekind bölgesi (Çallıalp ve Tekir 2009).*

Örnek 2.13. *H bir temel ideal bölgesi olsun. H halkasının sıfırdan farklı her I ideali, $0 \neq x \in H$ olmak üzere, $I = Hx$ şeklindedir. H bir TAÇ bölge olduğundan, $p_1, p_2, ..., p_n$ ler H nin indirgenemez elemanları olmak üzere, $x = p_1, p_2, ..., p_n$ şeklindedir. Şu halde*

$$I = Hx = Hp_1p_2...p_n = \prod_{i=1}^{n} Hp_i$$

olmak üzere asal ideallerin bir çarpımıdır. Böylece, H bir temel ideal bölgesi ise Dedekind bölgesindir (Çallıalp ve Tekir 2009).

Tanım 2.14. *Bir değişmeli halka H de bir ideal $I \subseteq H$, aşağıdaki koşulu sağlıyorsa yarıasal ideal olarak adlandırılır:*

$$\textit{Her } \ h \in H, \ \ \textit{ve } \ k \in \mathbb{N} \ \ \textit{için}, \ \ h^k \in I \Rightarrow h \in I.$$

Başka bir deyişle, bir elemanın herhangi bir doğal sayı kuvveti idealin içindeyse, o elemanın kendisi de idealde yer almak zorundadır (Rowen 1988).

Önerme 2.15. *I, H halkasının bir ideali olsun. I idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul H/I bölüm halkasının bir tamlık bölgesi olmasıdur (Atiyah ve Macdonald 1969).*

Sonuç 2.16. *Her maksimal ideal asaldır (Atiyah ve Macdonald 1969).*

Tanım 2.17. *Bir değişmeli halka H de, I_1 ve I_2 idealleri için, I_1 nın I_2 ye göre ideal bölüntüsü şu şekilde tanımlanır:*

$$(I_1 : I_2) = \{x \in H \mid x \cdot I_2 \subseteq I_1\}$$

Bu küme bir idealdir. Özellikle,

$$(0 : I_2) = \{x \in H \mid x \cdot I_2 = 0\}$$

kümesi I_2 idealinin sıfırlayıcı (annihilator) olarak adlandırılır ve $\mathrm{Ann}(I_2)$ ile gösterilir (Rowen 1988).

Tanım 2.18. *H bir halka ve I, H halkasının bir ideali olsun. I nın radikali şu şekilde tanımlanır:*

$$Rad(I) = \{x \in I \mid x^n \in I \textit{ bazı } n > 0 \textit{ için}\}$$

(Atiyah ve Macdonald 1969).

Önerme 2.19. *Bir idealin radikali, onu kapsayan tüm asal ideallerin kesişimine eşittir:*

$$\mathrm{Rad}(I) := \bigcap_{\substack{I \subseteq \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p} \textit{ asal}}} \mathfrak{p}$$

(Atiyah ve Macdonald 1969).

Teorem 2.20. *H bir birimli değişmeli halka ve I_1, I_2 bu halkadaki idealler olsun. O zaman idealin radikali aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

(1) $I_1 \subseteq \mathrm{Rad}(I_1)$

(2) $\mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}(I_1)) = \mathrm{Rad}(I_1)$

(3) $I_1 \subseteq I_2 \Rightarrow \mathrm{Rad}(I_1) \subseteq \mathrm{Rad}(I_2)$

(4) $\mathrm{Rad}(I_1 \cap I_2) = \mathrm{Rad}(I_1) \cap \mathrm{Rad}(I_2)$

(5) $\mathrm{Rad}(I_1 I_2) = \mathrm{Rad}(I_1 \cap I_2)$

(6) $\mathrm{Rad}(I_1 + I_2) = \mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}(I_1) + \mathrm{Rad}(I_2))$

(7) $\mathrm{Rad}(0) = \mathrm{Nil}(H)$

(Atiyah ve Macdonald 1969).

2.2. Modül Kavramı

Günümüzde değişmeli cebir çalışmalarında modüller önemli bir yer tutmaktadır. Modüller, ideallerin ötesine geçerek daha genel bir bakış açısı sunar. Örneğin, bir ideal I ve bölüm halkası H/I, modül olarak düşünülebilir ve benzer yöntemlerle incelenebilir. Bu bölümde, modül kavramı tanıtılacak ve temel özellikleri açıklanacaktır.

Tanım 2.21. *$(A, +)$ bir değişmeli grup ve H bir halka olsun. Eğer A kümesindeki elemanlarla H halkasındaki elemanlar arasında tanımlanan $H \times A \to A$ biçimindeki skaler çarpım aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, A kümesine H halkası üzerinde bir modül ya da kısaca H-modül denir.*

1. *Her $h \in H$, her $a_1, a_2 \in A$ için, $h(a_1 + a_2) = ha_1 + ha_2$,*
2. *Her $h_1, h_2 \in H$, her $a \in A$ için, $(h_1 + h_2)a = h_1a + h_2a$,*
3. *Her $h_1, h_2 \in H$, her $a \in A$ için, $(h_1h_2)a = h_1(h_2a)$,*
4. *Her $a \in A$ için, $1_Ha = a$.*

(Atiyah ve Macdonald 1969).

Eğer H bir cisim ise, H üzerinde tanımlı her H-modül aslında bir vektör uzayıdır. Bunun nedeni, cisimlerde sıfırdan farklı her elemanın çarpma işlemine göre tersi olmasıdır. Bu özellik sayesinde, modül üzerindeki skaler çarpım işlemi vektör uzayı tanımındaki tüm koşulları sağlar.

Tanım 2.22. *H bir halka ve A, bir H-modül olsun. $B \subseteq A$ kümesi, aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa, B ye, A nın bir alt modülü veya H-alt modülü denir*

1. *B, A nın toplama işlemine göre bir alt grubudur;*
2. *Her $h \in H$ ve $b \in B$ için $h \cdot b \in B$*

(Atiyah ve Macdonald 1969).

Bir modül A nın tüm alt modüllerin oluşturduğu küme $S(A)$ ile gösterilir.

Yukarıda özel olarak tanımlanan ideal ve alt modüllerin bazı durumları için kısaltılmış gösterimler kullanılmaktadır. Örneğin, B, A nin bir alt modülü ve $\emptyset \neq K \subseteq A$ olmak üzere,

$$(B : K) = \{h \in H : hK \subseteq B\}$$

şeklinde tanımlanan ideal, halka açıkça biliniyorsa $(B : K)$ biçiminde kısaltılabilir. Özellikle, $(0 :_H A)$ ideali genellikle Ann(A) ile gösterilir.
Ayrıca, $s \in H$ için

$$(P :_A Hs) = \{a \in A : sa \in P\}$$

biçimindeki alt modül, kısaca $(P :_A s)$ şeklinde yazılır.
Benzer şekilde, $s \in H$ ve $a \in A$ için

$$(0 :_H Ha) = \text{Ann}_H(a) \text{ ve } (0 :_A Hs) = \text{Ann}_A(s)$$

olarak ifade edilir. Eğer $\text{Ann}(A) = 0$ ise, A modülüne sadık modül denir (Rowen 1988).

Verilen $\emptyset \neq S \subseteq H$ kümesi için, eğer $0 \notin S$, $1 \in S$ ve her $u, v \in S$ için $uv \in S$ koşulları sağlanıyorsa, S kümesine çarpımsal kapalı altküme denir.
Şimdi S, H halkasının çarpımsal kapalı bir altkümesi olsun. $H \times S$ kartezyen çarpımı üzerinde aşağıdaki şekilde bir bağıntı tanımlanır:

$$(h, u) \sim (h', u') \iff \text{bir } s \in S \text{ için } s(hu' - h'u) = 0.$$

Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Her $(h, u) \in H \times S$ çifti, bu bağıntıya göre bir denklik sınıfı belirler ve bu sınıflar genellikle kesir biçiminde $\frac{h}{u}$ olarak gösterilir (Watkins 2007).

Tanım 2.23. *Tüm bu kesirlerin oluşturduğu küme*

$$S^{-1}H = \left\{\frac{h}{u} : h \in H, u \in S\right\}$$

bir halka yapısı taşır. Bu yapıya, H halkasının S ye göre yerelleştirmesi ya da kesir halkası denir (Watkins 2007).

Önerme 2.24. *$S \subseteq H$ çarpımsal kapalı bir küme ve A bir H-modül olsun. O hâlde, A nın kesir modülü*

$$S^{-1}A = \left\{\frac{a}{u} : a \in A, u \in S\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu yapı, hem bir H-modül hem de bir $S^{-1}H$-modül yapısına sahiptir (Atiyah ve Macdonald 1969).

I, H halkasının bir asal ideali ise $S_I = H \setminus I$ kümesi *çarpımsal kapalıdır*.

Genel olarak, bir $S \subseteq H$ çarpımsal kapalı kümesinin *doyurulmuşu* (*saturation*) aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$S^* = \left\{ h \in H \mid h^{-1}, S^{-1}H \text{ nin birimli elemanı} \right\}.$$

Bu tanım, S^* nin H içinde S yi kapsayan bir çarpımsal kapalı altküme olduğunu gösterir.

Ayrıca, bu küme aşağıdaki eşdeğer biçimde de tanımlanabilir:

$$S^* = \{x \in H \mid \exists\, y \in S \text{ öyle ki } x \mid y\},$$

yani $x \in H$ için S^* ye ait olmanın gerek ve yeter koşulu, x in S deki bir elemanı bölebilmesidir (başka bir deyişle, $y = ax$ olacak şekilde bir $a \in H$ bulunmasıdır).

Eğer $S^* = S$ eşitliği sağlanıyorsa, S kümesine *doyurulmuş çarpımsal kapalı küme* denir (Atiyah ve Macdonald 1969).

2.2.1. Asal alt modülller

Asal alt modüller, modül teorisinin temel yapı taşlarından biridir ve bu kavramın farklı yönlerden genelleştirilmesi literatürde geniş yankı bulmuştur. Bu bölümde, asal alt modül tanımının klasik formundan başlayarak çeşitli genelleştirmeleri ele alan çalışmalara yer verilecektir.

Literatürde, asal ideallerin ve asal alt modüllerin tanımları ve bu tanımların kapsadığı yapıların sınırları hakkında farklı yaklaşımlar bulunmaktadır. Bu farklı tanımlamalar, halkalar teorisi ile modül teorisi arasındaki bağlantıları ve karşılıklı etkileşimleri anlamada önemli bir yer tutmaktadır.

Tanım 2.25. *H değişmeli birimli bir halka, A bir H-modül ve B, A nin öz alt modülü olsun. Eğer her $h \in H$ ve $a \in A$ için*

$$ha \in B \Rightarrow a \in B \text{ veya } h \in (B : A)$$

şartı sağlanıyorsa, o zaman B ye A nın asal alt modülü denir (Çallıalp ve Tekir 2009).

Örnek 2.26. *H bir halka olsun. O zaman H nin her asal ideali, H-modül H nin bir asal alt modülüdür (Çallıalp ve Tekir 2009).*

Çözüm 2.27. *Değişmeli ve birimli bir halka olan H, kendi üzerinde tanımlı bir H-modül olarak ele alınsın; yani $A = H$ olsun. $B \subsetneq H$ asal bir ideal olarak alındığında, B, aynı zamanda A nın bir alt modülüdür. Asal idealin tanımına göre, her $h \in H$ ve $a \in A$ için $ha \in B$ iken $h \in B$ veya $a \in B$ olur.*

Eğer $h \in B$ ise, tanım gereği $hH \subseteq B$ olur. ***Bu da*** *$h \in (B : H)$ anlamına gelir. Böylece*

$$ha \in B \Rightarrow a \in B \text{ veya } h \in (B : H)$$

elde edilir. Bu da asal alt modül tanımını sağlar. Dolayısıyla B, A nın asal alt modülüdür.

□

Örnek 2.28. *c sabit asal sayı olsun.*

$$E(c) = \left\{ \frac{a}{c^n} + \mathbb{Z} \mid \ a \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

kümesi, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ içinde yer alan sıfırdan farklı bir $\mathbb{Z}$ - alt modülüdür. Ancak $E(c)$ modülünün hiçbir asal alt modülü bulunmamaktadır (Çallıalp ve Tekir 2009).

Çözüm 2.29. *$E(c)$ modülünün alt modülleri, her $t \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$G_t = \left\{ \frac{a}{c^t} + \mathbb{Z} : a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Her $t \in \mathbb{N}_0$ için $(G_t : E(c)) = (0)$ olduğu gösterilecektir. Aksi varsayılırsa, yani bazı $t \in \mathbb{N}_0$ için $(G_t : E(c)) \neq 0$ olduğu kabul edilirse, bu durumda bir $(G_t : E(c))$ içinde sıfırdan farklı bir h elemanı bulunur. Böylece,

$$h = c^k a \in (G_t : E(c)) \ (a \in \mathbb{Z}, c \nmid a \ ve \ k \in \mathbb{N}_0)$$

olsun.

Şimdi

$$\alpha = \frac{1}{c^{k+t+1}}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda:

$$h \cdot \alpha = \frac{c^k a}{c^{k+t+1}} + \mathbb{Z} = \frac{a}{c^{t+1}} \in G_t$$

olur. Ancak $c \nmid a$ olduğundan, bu sonuç $h \in (G_t : E(c))$ varsayımla çelişir. Bu çelişki, her $t \in \mathbb{N}_0$ için

$$(G_t : E(c)) = (0)$$

olduğunu gösterir. Dolayısıyla hiçbir G_t, $E(c)$ modülünün asal bir alt modülü olamaz. Daha açık bir ifadeyle, i herhangi pozitif sayı olmak üzere

$$c^i \notin (G_t : E(c)) = (0) \ ve \ \gamma = \frac{1}{c^{i+t}} + \mathbb{Z} \notin G_t$$

olmasına rağmen,

$$c^i \gamma = \frac{c^i}{c^{i+t}} \mathbb{Z} = \frac{1}{c^t} + \mathbb{Z} \in G_t$$

eşitliği sağlanır. Yani çarpım G_t de yer alırken, çarpanlar ayrı ayrı G_t de bulunmamaktadır. Bu da G_t nin asal alt modül olamayacağını doğrular. Sonuç olarak, $E(c)$ modülünün tüm alt modülleri G_t biçiminde olduğundan, bu modül herhangi bir asal alt modül içermez.

Teorem 2.30. *H ve H' değişmeli halkalar ve $f : H \to S$ bir örten halka homomorfizması olsun. Aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(i) *I, H halkasının bir asal ideali ve* $\ker(f) \subseteq I$ *ise $f(I)$, S halkasının bir asal idealidir.*

(ii) *J, S halkasının bir asal ideali ise, $f^{-1}(J)$ da H halkasının bir asal idealidir*

(Çallıalp ve Tekir 2009).

Asal alt modül kavramının bazı önemli sonuçları:

Teorem 2.31. *H bir halka, A bir H-modül ve B, A'nın asal bir alt modülü olsun.*
$a \notin B$ ise,

$$I = (B : a) = \{h \in H : ha \in B\}$$

kümesi, H halkasında asal bir idealdir (Çallıalp ve Tekir 2009).

İspat B, A nın asal bir alt modülü ve $h_1h_2 \in (B : a)$ olsun. Tanım gereği bu, $h_1h_2a \in B$ anlamına gelir.

Eğer $h_1a \in B$ ise, bu durumda $h_1 \in (B : a)$ olur ve istenilen durum sağlanır.

Şimdi $h_1a \notin B$ olduğunu varsayalım. Ayrıca hipotez gereği $a \notin B$ olduğu da biliniyor.

Asal alt modül tanımına göre, eğer $r \in H$, $x \in A$ için $rx \in B$ ve $x \notin B$ ise, bu durumda $r \in (B : A)$ olur.

Burada $r = h_1$ ve $x = h_2a$ alınır. Gerçekten de, $h_1(h_2a) = h_1h_2a \in B$ ve varsayım olarak $h_2a \notin B$ olsaydı, tanıma göre $h_1 \in (B : A)$ yani $h_1a \in B$ olurdu. Ancak bu, varsayımımıza ($h_1a \notin B$) aykırıdır. Dolayısıyla $h_2a \in B$ olmak zorundadır, bu da $h_2 \in (B : a)$ olduğunu gösterir.

Sonuç olarak, her iki durumda da ya $h_1 \in (B : a)$ ya da $h_2 \in (B : a)$ elde edilir. Bu da $(B : a)$ idealinin asal olduğunu gösterir.

□

Önerme 2.32. *H bir halka, A H-modül ve B, A nin asal alt modülü olsun. O zaman*

$$(B : A) = \{h \in H \mid h \cdot a \in B\}$$

H halkasının asal idealidir (Çallıalp ve Tekir 2009).

İspat B, A nın asal alt modülü olsun. $x, y \in H$ olmak üzere $xy \in (B : A)$ ve $y \notin (B : A)$ olsun. Bu durumda $xyA \subseteq B$ ve $yA \nsubseteq B$ olur. Böylece $xyc \in B$ ve $yc \notin B$ olacak şekilde bir $c \in A$ vardır. B, A nın asal alt modülü olduğundan $x \in (B : A)$ olur.
Dolayısıyla, $(B : A)$ bir asal idealdir.

□

Teorem 2.33. *H bir halka, A bir H-modül ve B, A nın bir maksimal alt modülü olsun. O zaman, B asal alt modüldür (Çallıalp ve Tekir 2009).*

İspat B, A nın maksimal alt modülü ve $h \in H$ ve $a \in A$ olmak üzere $ha \in B$ olsun. $a \notin B$ olsun. B maksimal olduğundan iki farklı durum var:

$$B + Ha = B \text{ veya } B + Ha = A.$$

$B + Ha = B$ ise $a \in B$ olur, bu da varsayımla çelişir. Şu halde, $B + Ha = A$ dır.
Böylece, $hA = hB + Hha \subseteq B$, yani $h \in (B : A)$ olur.
Dolayısıyla, B, A nın asal alt modülüdür.

□

Torsion-free modül, modül teorisinde önemli bir kavramdır ve şu şekilde tanımlanır:

Tanım 2.34. *Bir H-modül A, eğer aşağıdaki koşulu sağlıyorsa torsion-free (bükümsüz) olarak adlandırılır:*

Her $h \in H$ ve $a \in A$ için, eğer $h \cdot a = 0$ ise, ya $h = 0$ ya da $a = 0$ olmalıdır.
Başka bir deyişle, eğer bir halka elemanıyla bir modül elemanının çarpımı sıfırsa, bu durumda en az biri sıfır olmalıdır (Rowen 1988).

Teorem 2.35. *H halka, A H–modül ve B, A nın alt modülü olsun.*
B alt modülün asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $P = (B : A)$ bir asal ideal ve A/B bir torsion-free H/P – modül olmasıdır (Rowen 1988).

İspat (⇒): B asal alt modül olduğunda $P = (B : A)$ asal ideal olduğunu Önerme 2.30'de gösterdik.
A/B nin torsion-free H/P–modül olduğunu gösterelim.
A/B nin torsion-free olması şu anlama gelir: Eğer $\overline{a} \in A/B$ ve $h \in H$ ile $h\overline{a} = 0$ ise, o zaman $h = 0$ ya da $\overline{a} = 0$ olur; bu da $a \in B$ anlamına gelir.

Eğer $h \in P$ ise, o zaman $hA \subseteq B$ olur, dolayısıyla $h\overline{a} = 0$. Eğer $\overline{a} \neq 0$, yani $a \notin B$, o zaman $h = 0$ olmalıdır, çünkü P asal olmalı.

Bu nedenle, A/B torsion-free H/P-modüldür.

(⇐): Varsayalım ki $P = (B : A)$ asal ideal ve A/B torsion-free H/P-modüldür. B nin asal alt modül olduğunu göstereceğiz.

$h \in H$ ve $a \in A$ olmak üzere $ha \in B$ ve $h \notin (B : A)$ olsun.
Şu halde,

$$ha + B = (h + P)(a + B)$$

burada

$$h + P \in H/P \text{ ve } a + B \in A/B.$$

A/B torsion-free olduğundan

$$(h + P)(a + B) = 0 \Rightarrow h + P = 0 \text{ veya } a + B = 0$$

yani

$$h \in (B : A) \text{ veya } a \in B$$

olur.
Dolayısıyla, B asal alt modüldür.

□

Tanım 2.36. *A bir H-modül ve $a \in A$ olsun. $\{a\}$ kümesinin ürettiği alt modül*

$$(a) = Ha = \{ha : h \in H\}$$

alt modüle, a ile üretilmiş alt modül denir.

Eğer $A = (a)$ olacak şekilde bir $a \in A$ bulunabiliyorsa, A modülüne devirli modül denir.

Eğer $A = (X)$ olacak şekilde sonlu bir $X \subseteq A$ kümesi varsa, A modülüne sonlu üretilmiş modül denir (Rowen 1988).

Tanım 2.37. *H bir halka ve A bir H-modül olsun. Eğer A nın alt modülleriyle oluşturulan her artan zincir*

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq ...$$

sonlu bir adımda sabitleniyorsa, yani öyle bir $k \in \mathbb{N}$ vardır ki

$$A_k = A_{k+1} = A_{k+2} = \cdots ,$$

bu durumda A modülüne Noetherian modül denir (Rowen 1988).

Önerme 2.38. *H bir halka ve A bir H-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir*

1. *A, modülü Noetherian'dır.*
2. *A nın her alt modülü sonlu üretilmiştir.*
3. *A nın alt modüllerinin, herhangi bir boştan farklı ailesinin bir maksimal elemanı vardır.*

(Çallıalp ve Tekir 2009).

Önerme 2.39. *H bir halka, A sonlu üretilmiş bir H-modül olmak üzere A nın Noetherian olması ile her asal alt modülün sonlu üretilmiş olması denktir (Çallıalp ve Tekir 2009).*

Şimdi, asal alt modüllerin çeşitli genişletilmiş tanımları üzerinde durulacaktır. Literatürde, asal idellerin ve asal alt modüllerin tanımları ve bu tanımların kapsadığı yapıların sınırları hakkında farklı yaklaşımlar bulunmaktadır. Bu farklı tanımlamalar, halkalar teorisi ile modül teorisi arasındaki bağlantıları ve karşılıklı etkileşimleri anlamada önemli bir yer tutmaktadır.

2.2.2. Zayıf asal alt modüller

Zayıf asal altmodül kavramı ilk olarak Behboodi ve Koohy tarafından *"Weakly Prime Modules"* (2004) adlı çalışmada tanıtılmıştır. Bu çalışmada, asal alt modül kavramının bir versiyonu ortaya konmuş ve zayıf asal alt modüllerin yapısı incelenmiştir. Yazarlar, bu kavramı modülün bir faktör modülü aracılığıyla tanımlamış ve çeşitli örnekler ile özelliklerini araştırmışlardır.

Tanım 2.40. *A bir H-modülü ve B, A nın öz bir alt modülü olsun. B ye zayıf asal alt modül denir; eğer her $h_1, h_2 \in H$ ve her $L \leq A$ için*

$$h_1 H h_2 L \subseteq B \Rightarrow h_1 L \subseteq B \text{ veya } h_2 L \subseteq B$$

şartı sağlanıyorsa (Behboodi ve Koohy 2004).

Bu kavram daha sonra Azizi (2006) tarafından yayımlanan “*Weakly Prime Submodules and Prime Submodules*” başlıklı çalışmada ele alınmış ve aynı tanım doğrudan modül üzerinden kullanılarak incelenmiştir. H bir değişmeli birimli halka ve A bir H-modül olmak üzere, çalışmada aşağıdaki tanımlar sunulmuştur:

Tanım 2.41. *A bir H-modülü ve B, A nın öz bir alt modülü olsun. B ye zayıf asal alt modül denir; eğer her $h_1, h_2 \in H$ ve her $L \leq A$ için*

$$h_1 h_2 L \subseteq B \Rightarrow h_1 L \subseteq B \text{ veya } h_2 L \subseteq B$$

şartı sağlanıyorsa (Azizi 2006).

Her iki tanım özdeştir ve yalnızca sunum biçimleri açısından farklılık göstermektedir. Zayıf asal alt modül kavramı, asal alt modül teorisinin doğal bir genellemesi olarak modül teorisine katkıda bulunmaktadır.

Bu tanımlara dayanarak, makalelerde aşağıdaki önemli sonuçlar sunulmuştur:

Sonuç 2.42.

- *Her asal alt modül zayıf asaldır, ancak tersi her zaman geçerli değildir.*
- *Zayıf asal alt modüller lokalizasyona ve düz modüllerle tensör çarpımına karşı korunur.*

- *Eğer* $\dim H < \infty$ *ise, her modül en az bir zayıf asal alt modül içerir.*

- *Noetheryen modüller yalnızca sonlu sayıda zayıf asal alt modül içerir*

(Behboodi ve Koohy 2004).

Sonuç 2.43. • *Zayıf asal olan her alt modül aynı zamanda asal alt modüldür.*

- B *zayıf asal alt modül ise, her* $K \nsubseteq B$ *için* $(B : K)$ *asal idealdir.*

- *Zayıf asal alt modüller,* $(B : a)$ *yapıları üzerinden şu şekilde karakterize edilir:*

$$(B : ab) = (B : a) \text{ veya } (B : ab) = (B : b)$$

- *Eğer* B *indirgenemez ve zayıf asalsa, o zaman* B *asal alt modüldür.*

(Azizi 2006).

Zayıf asal alt modül kavramı, asal alt modül kavramının doğal bir genellemesi olarak ortaya çıkmakta ve modül teorisinin yapısal analizinde yeni bir perspektif sunmaktadır. Behboodi ve Koohy (2004) tarafından tanıtılan bu kavram, Azizi (2006) tarafından daha sistematik biçimde ele alınmış ve asal, asalımsı ve zayıf asal alt modüller arasındaki ilişkiler detaylı biçimde incelenmiştir.

2.2.3. ϕ-asal alt modüller

Zamani'nin (2010) *"ϕ-prime submodules"* başlıklı makalesi, ϕ-asal alt modül kavramını tanıtarak, H-modülleri üzerinde asal alt modül teorisini genelleştiren yeni bir sınıflandırma sunmaktadır. Burada H, sıfırdan farklı birimli değişmeli bir halka olup, A bir H-modülüdür. $S(A)$, A üzerindeki tüm alt modüllerin kümesini belirtmektedir.
Çalışmada $\phi : S(A) \to S(A) \cup \emptyset$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon yardımıyla, aşağıdaki şekilde genelleştirilmiş bir asal alt modül tanımı yapılmıştır:

Tanım 2.44. *B, A nın bir alt modülü olsun. B ye ϕ-asal alt modül denir; eğer her $h \in H$ ve her $a \in A$ için:*

$$ha \in B \setminus \phi(B) \implies h \in (B :_H A) \text{ veya } a \in B$$

şartı sağlanıyorsa (Zamani 2010).

Bu tanım aracılığıyla aşağıdaki özel durumlar elde edilmiştir:

- Eğer $\phi(A) = \emptyset$ ise, ϕ-asal alt modüller klasik asal alt modüllerle eşdeğerdir (Zamani 2010).
- Eğer $\phi(A) = \{0\}$ ise, ϕ-asal alt modüller zayıf asal alt modül olarak adlandırılır (Zamani 2010).

Zamani (2010), ϕ-asal alt modül kavramını ele alarak, bu yapıların belirli koşullar altında klasik asal alt modüllerle nasıl benzerlik gösterdiğini ve aralarındaki ilişkileri sistematik olarak analiz etmiştir.

$$\begin{aligned}
\phi_{\emptyset}(B) &= \emptyset, && \forall B \in S(A),\\
\phi_0(B) &= \{0\}, && \forall B \in S(A),\\
\phi_1(B) &= (B :_H A)B, && \forall B \in S(A),\\
\phi_2(B) &= (B :_H A)^2 B, && \forall B \in S(A),\\
\phi_\omega(B) &= \bigcap_{i=1}^{\infty}(B :_H A)^i B, && \forall B \in S(A)
\end{aligned}$$

(Zamani 2011).

Zamani (2010), $\phi_{\emptyset}$-asal ve ϕ_0-asal alt modüllerin sırasıyla klasik asal ve zayıf asal alt modüllere karşılık geldiğini belirtmiştir. Ayrıca, herhangi bir alt modül ve her pozitif tam sayı n için aşağıdaki ilişkiyi kurmuştur:

$$\text{asal} \Rightarrow \phi_\omega\text{-asal} \Rightarrow \phi_n\text{-asal} \Rightarrow \phi_{n-1}\text{-asal}.$$

Zamani (2011)'ye göre, $\phi \leq \psi$ olacak şekilde iki fonksiyon arasında $\phi(B) \subseteq \psi(B)$ koşulu sağlanıyorsa, her ϕ-asal alt modül aynı zamanda ψ-asal alt modül olur.

Zamani (2010), ϕ-asal alt modül kavramını tanıtarak klasik asal alt modülleri genelleştirmiştir. Çalışma, ϕ-asal alt modüllerin temel özelliklerini incelemiş ve belirli koşullarda klasik yapılarla olan ilişkilerini ortaya koymuştur. Bu yaklaşım, modül teorisinde daha geniş bir inceleme alanı sunmuştur.

2.2.4. S-asal alt modüller

Sevim, Arabacı, Tekir ve Koç'un (2019) *"On S-prime Submodule"* başlıklı çalışması, *S-asal alt modül* ve *S-torsion-free modül* kavramlarını tanıtarak, asal alt modül kavramını daha genel bir çerçevede ele almaktadır. Burada H bir değişmeli birimli halka, A ise bir H-modülüdür. S, A üzerindeki endomorfizmaların ($\mathrm{End}_H(A)$) bir altkümesi olarak alınır.

Çalışmada, S-asal alt modül ile klasik asal alt modül kavramları arasındaki ilişki verilmişti. Ayrıca S-torsion-free modüllerle olan bağlantısı incelenmiş ve bu yeni yapıların bazı temel özellikleri tartışılmıştır. Elde edilen sonuçlar, asal alt modül teorisinin S bağlamında nasıl genelleştirilebileceğini göstermektedir.

Tanım 2.45. *$S \subseteq H$ bir çarpımsal küme ve B, $(B :_H A) \cap S = \emptyset$ şartını sağlayan bir A alt modülü olsun. Eğer her $h \in H$, $a \in A$ ve $s \in S$ için*

$$ha \in B \Rightarrow sh \in (B :_H A) \text{ veya } sa \in B$$

şartı sağlanıyorsa, B ye S-asal alt modül denir.

Ayrıca, bir H-modülü A, $ann(A) \cap S = \emptyset$ koşulunu sağlıyorsa ve her $h \in H$, $a \in A$ için bir $s \in S$ bulunduğunda

$$ha = 0 \Rightarrow sh = 0 \text{ veya } sa = 0$$

şartı sağlanıyorsa, A ya göre S kümesine S-torsion-free denir (Sevim, Arabacı, Tekir ve Koç 2019).

$S \subseteq H$ çarpımsal kapalı bir alt küme ve A bir H-modül olsun. A nın bölüm modülü (quantion module) $S^{-1}A$ ile gösterilir. $S^{-1}A$, hem bir H-modülüdür hem de $S^{-1}H$-modülüdür. Ancak bu bağlamda, yalnızca $S^{-1}A$ nin $S^{-1}H$-modülü olarak incelenmesi esas alınmaktadır

N ve L, A H-modülünün iki alt modülü ve I, H nin bir ideali olsun. Bu durumda, N nin L ve I tarafından kalanı (residual) tekrar hatırlayalim:

$$(N :_H L) = \{h \in H : hL \subseteq N\},$$

$$(N :_A I) = \{a \in A : Ia \subseteq N\}$$

(Sevim, Arabacı, Tekir ve Koç 2019).
S-asal ideallerin kümesi, literatürde genellikle $\mathrm{Spec}_S(H)$ sembolü ile ifade edilir.

Bu tanımlar, basit modüller ve S-Noetheryen modüller gibi klasik modüllerin, S-asal alt modüller ve S-torsion-free modüller bağlamında karakterize edilmesine zemin hazırlar. Ayrıca, çalışmada bu yeni kavramların temel özellikleri ve karakterizasyonları detaylı şekilde incelenerek, değişmeli halkalar üzerindeki modül teorisine katkıda bulunulmuştur.

2.2.5. Belirli alt modülleri asal olan modüller

Behboodi, Karamzadeh ve Koohy (2004), *"Modules Whose Certain Submodules Are Prime"* adlı çalışmalarında, asal alt modül kavramını yeniden ele alarak bazı özel durumlara odaklanmışlardır. Bu çalışma, belirli koşullarda modülün bazı alt modüllerinin asal olup olmadığını karakterize eden yapılar sunar.

Tanım 2.46. *H bir değişmeli birimli halka ve A bir H-modül olsun. Eğer A nın her öz alt modülü asal alt modülse, A ya tam asal modül (fully prime) denir (Behboodi, Karamzadeh ve Koohy 2004).*

Tanım 2.47. *H bir değişmeli birimli halka ve A bir H-modül olsun. Eğer A nın her sıfırdan farklı öz alt modülü asal alt modülse, A ya neredeyse tam asal modül (almost fully prime module) denir (Behboodi, Karamzadeh ve Koohy 2004).*

Tanım 2.48. *H bir değişmeli birimli halka ve A bir H-modül olsun. Eğer A nın her sıfırdan farklı öz doğrudan toplanabilen bileşeni, A içinde asal alt modülse, A neredeyse asal modül (almost prime module) olarak adlandırılır (Behboodi, Karamzadeh ve Koohy 2004 2004).*

Tanım 2.49. *H bir değişmeli birimli halka ve A bir H-modül olsun. A nin öz bir alt modülü B, yarı asal alt modül olarak adlandırılır eğer aşağıdaki koşul sağlanıyorsa:*

$$\textit{Her } h \in H \textit{ ve } a \in A \textit{ için } h^2 a \in B \Rightarrow ha \in B.$$

Buna ek olarak, A modülünün sıfır alt modülü yarı asal ise, A bir yarı asal modül olarak kabul edilir (Behboodi, Karamzadeh ve Koohy 2004).

Tanım 2.50. *Eğer A nın her öz alt modülü yarı asal ise, A ya tam yarı asal modül denir (Behboodi, Karamzadeh ve Koohy 2004).*

Tanım 2.51. *Eğer sadece sıfırdan farklı öz alt modüller yarı asal ise, o zaman A ya neredeyse tam yarı asal denir (Behboodi, Karamzadeh ve Koohy 2004).*

Bu çalışma, modül teorisinde asal alt modül kavramının kapsamlı bir analizini sunmaktadır. Elde edilen sonuçlar, asal alt modüller teorisinin derinlemesine anlaşılmasına katkı sağlamakta ve gelecekteki çalışmalara temel teşkil edecek niteliktedir.

2.2.6. Güçlü asal alt modüller

Naghipour (2009), *"Strongly Prime Submodules"* adlı çalışmasında, klasik asal alt modül tanımını daha da güçlendirerek güçlü asal alt modül kavramını tanıtmıştır. Yazar, bu yeni tanımın modül teorisindeki önemini vurgulamış ve bu yapıların temel özelliklerini ayrıntılı bir şekilde incelemiştir. Ayrıca, güçlü asal alt modüllerin klasik asal alt modüllerle olan ilişkileri değerlendirilmiş ve çeşitli örneklerle desteklenmiştir.

Tanım 2.52. *Bir H-modül A ve $B \subsetneq A$ öz bir alt modül olmak üzere, eğer her $a_1, a_2 \in A$ için*

$$((B + Ha_1) :_H A)\, a_2 \subseteq B \Rightarrow a_1 \in B \text{ veya } a_2 \in B$$

şartı sağlanıyorsa, B ye güçlü asal alt modül denir (Naghipur 2009).

Tanım 2.53. *Bir H-modül A nın öz bir alt modülü B için, eğer her $a \in A$ için*

$$((B + Ha) :_H A)\, a \subseteq B \Rightarrow a \in B$$

şartı sağlanıyorsa, B ye güçlü yarı asal alt modül denir (Naghipur 2009).

Güçlü asal alt modüllerle ilgili bir diğer önemli kavram ise, bir alt modülün kapsandığı tüm güçlü asal alt modüllerin kesişimi ile tanımlanan güçlü asal radikal kavramıdır.

Tanım 2.54. *A bir H-modül ve $B \subseteq A$ öz bir alt modül olsun. B yi kapsayan tüm güçlü asal alt modüllerin kesişimi*

$$s\text{-}rad(B) = \bigcap_{\substack{P \supseteq B \\ P \text{ güçlü asal}}} P$$

olarak tanımlanır. Eğer böyle bir P yoksa, $s\text{-}rad(B) = A$ kabul edilir. Bu ifadeye güçlü asal radikal denir (Naghipur 2009).

Bu tanım, klasik asal radykalin modül kuramındaki güçlü asal alt modüllere genişletilmiş versiyonudur.

Naghipour (2009) ayrıca güçlü asal alt modüllerin karakteristiğini belirlemek üzere bazı özel durumlara da değinmiştir. Bunlardan ilki, her maksimal alt modülün güçlü asal alt modül olmasıdır. Bu özellik, özellikle vektör uzaylarında daha belirgin hale gelir. Vektör uzaylarındaki güçlü asal alt modüllerin tamamının, yalnızca maksimal alt uzaylardan oluştuğu gösterilmiştir.

Yazar, güçlü asal alt modüller üzerine bir yükseklik teorisi geliştirerek, bu kavramın boyut teorisiyle ilişkisini kurmuştur. Bu bağlamda güçlü yükseklik (strong height) kavramı tanımlanmıştır.

Tanım 2.55. *Güçlü asal alt modüller için boyutsal bir ölçü belirlemek amacıyla, aşağıdaki yükseklik kavramları tanımlanır:*

- *B bir güçlü asal alt modül ise:*

$$s\text{-}ht_H(B) = \sup \{b \mid B_0 \subsetneq B_1 \subsetneq \cdots \subsetneq B_n = B,\ B_i \in S\text{-}Spec_H(A)\};$$

- *$B \subsetneq A$ bir öz alt modül için:*

$$s\text{-}ht_H(B) = \min \{s\text{-}ht_H(P) \mid B \subseteq P,\ P \text{ güçlü minimal asal alt modül}\}$$

(Naghipur 2009).

Bu kavram, modüllerde asal yapıların hiyerarşik derinliğini ölçmek için kullanılır ve güçlü asal modüllerin geometrik davranışını anlamada önemli bir araçtır.

Tanım 2.56. *B, A nın güçlü asal (veya güçlü yarı asal) bir alt modülü ve $(B :_H A) = I$ olacak şekilde bir ideal ile ilişkilendirilebiliyorsa, B ye I–güçlü asal (veya I–güçlü yarı asal) alt modül denir (Naghipur 2009).*

Bu tanım, güçlü asal yapının belirli bir idealle olan bağlantısını ifade eder ve modülün iç yapısını daha ayrıntılı analiz etmeye olanak tanır.

2.2.7. Tam asal modüller ve tam yarı asal modüller

Beachy ve Medina-Bárcenas (2020), *"Fully Prime Modules and Fully Semiprime Modules"* adlı çalışmalarında, modül teorisindeki klasik asal ve yarı asal alt modül kavramlarını daha genel bir yapıya taşımak amacıyla yeni tanımlar önermiştir. Çalışmada, tam asal alt modül, tam yarı asal alt modül ve idempotent alt modül gibi kavramlar tanıtılmış ve detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Bu yeni tanımlar, özellikle iz operatörleri (trace) ve redüksiyon (rejeksiyon) işlemleri kullanılarak oluşturulmuş olup, modülün homomorfizma uzayıyla etkileşimini dikkate alır. Bu sayede, klasik asal yapıların iz fonksiyonları ile genelleştirilmiş biçimleri elde edilmiştir.

H bir değişmeli birimli halka ve A sıfırdan farklı bir H-modül olsun. Herhangi bir $B \subseteq A$ alt modülü için, aşağıdaki iki ön-radikal fonksiyonu tanımlanır:

$$\mathrm{iz}_B^A(X) = \sum\{f(B) \mid f \in \mathrm{Hom}_H(A, X)\}$$

ve

$$\mathrm{kes}_B^A(X) = \bigcap\{f^{-1}(B) \mid f \in \mathrm{Hom}_H(X, A)\}$$

(Beachy ve Medina-Bárcenas 2020).

Bu işlemler kullanılarak tanımlanan *modül çarpımı*, A modülü içinde B ve C alt modülleri arasındaki ilişkiyi gösterir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$B_AC = iz_B^A = \sum\{\ f(B)|\ f \in Hom_H(A\ ,\ C)\}$$

(Beachy ve Medina-Bárcenas 2020).

Bu yapılar sayesinde, modül içindeki asal ve yarı asal alt modül kavramları tam değişmezlik açısından yeniden tanımlanmıştır:

Tanım 2.57. *A, bir H-modülü ve Q, A nın öz bir alt modülü ($Q \subsetneq A$) olmak üzere, aşağıdaki kavramlar tanımlanır:*

- *Q, asal alt modül olarak adlandırılır; eğer Q tam değişmez bir alt modül ise ve her tam değişmez alt modül $B, C \subseteq A$ için*

$$B_AC := \sum\{f(B) \mid f \in \mathit{Hom}_H(A, C)\} \subseteq Q$$

  olduğunda, ya $B \subseteq Q$ ya da $C \subseteq Q$ koşulu sağlanıyorsa.

- *Q, yarı asal alt modül olarak adlandırılır; eğer Q tam değişmez bir alt modül ise ve her tam değişmez alt modül $B \subseteq A$ için*

$$B_AB \subseteq Q \Rightarrow B \subseteq Q$$

  şartı sağlanıyorsa.

- *$B \subseteq A$ bir alt modül için $B_AB = B$ eşitliği sağlanıyorsa, B idempotent alt modül olarak adlandırılır.*

- *A modülü, tam asal modül olarak tanımlanır; eğer A nın her öz tam değişmez alt modülü asal alt modülse.*

- *Benzer şekilde, A tam yarı asal modül olarak adlandırılır; eğer her öz tam değişmez alt modülü yarı asal alt modülse.*

- *Halka H, tam asal halka (sırasıyla tam yarı asal halka) olarak adlandırılır; eğer H-modülü ${}_HH$ tam asal (sırasıyla tam yarı asal) modülse.*

- *$P \subsetneq A$ bir tam değişmez alt modül için, eğer $P = ann_A(S)$ olacak şekilde S basit bir H-modül varsa, P primitif alt modül olarak adlandırılır.*

(Beachy ve Medina-Bárcenas 2020)

Makalede, bu tanımlar yardımıyla, modül içinde tam değişmez alt modüllerin idempotentliğini koruyan yapılar araştırılmış ve önemli sonuçlar elde edilmiştir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde literatürde kullanılan ispat yöntemleri incelenecektir. Söz konusu ispatların teknikleri, tezin bulgular ve tartışma kısmında kullanılacaktır. İncelenen yöntemler, kaynak taraması bölümünde ele alınan çalışmalarda yer alan ve asal alt modül kavramının ϕ-asal, S-asal, güçlü asal ve tam asal gibi farklı biçimlerde genelleştirilmesine yönelik olarak ortaya konmuş teoremlere dayanmaktadır. Bu teoremler, yalnızca sonuçlarıyla değil, aynı zamanda kullandıkları ispat teknikleriyle de bu tezin metodolojik temelini oluşturmaktadır.

Bu çerçevede ilk olarak, ϕ-asal alt modül kavramına dair temel sonuçlar ve bu sonuçların ispatında kullanılan yöntemler ele alınacaktır. Zamani (2010) tarafından geliştirilen yaklaşım, klasik asal modül tanımının bir fonksiyon ϕ üzerinden nasıl genişletilebileceğini göstermektedir. Aşağıdaki teorem ve sonuçlar, bu genellemenin hem teorik gücünü hem de ispat tekniklerinin mantıksal yapısını ortaya koymaktadır.

Teorem 3.1. *H değişmeli bir halka ve A bir H-modül olsun. $\phi : S(A) \to S(A) \cup \emptyset$ biçiminde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer B, A nin bir ϕ-alt modülü ve $(B :_H A)B \subseteq \phi(B)$ ise, o hâlde B asal bir alt modüldür (Zamani 2010).*

İspat $h \in H$ ve $a \in A$ olmak üzere $ha \in P$ varsayılsın. Eğer $ha \notin \phi(B)$ ise, B bir ϕ-asal alt modül olduğundan $h \in (B :_H A)$ ya da $a \in B$ olduğu sonucu elde edilir.

Şimdi $ha \in \phi(B)$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, $hB \subseteq \phi(B)$ olduğu da varsayılabilir. Aksi takdirde, $hB \nsubseteq \phi(B)$ olur. Bu durumda, $hb \notin \phi(B)$ olacak şekilde bir $b \in B$ bulunur. O hâlde $h(a+b) \in B \setminus \phi(B)$ olur. B'nin ϕ-asal olması nedeniyle $h \in (B :_H A)$ ya da $a+b \in B$ ve dolayısıyla $a \in B$ olduğu sonucu elde edilir.

Benzer şekilde, $(B :_H A)a \subseteq \phi(B)$ olduğu varsayılabilir. Aksi hâlde, $la \notin \phi(B)$ olacak şekilde bir $l \in (B :_H A)$ bulunur ve bu durumda $(h+l)a \in B \setminus \phi(B)$ olur. Buradan $h+l \in (B :_H A)$ ya da $h \in B$ ve dolayısıyla $h \in (B :_H A)$ ya da $h \in B$ olduğu sonucu çıkar.

Son olarak, $(B :_H A)B \subseteq \phi(B)$ varsayımına rağmen $xa \notin \phi(P)$ olacak şekilde $x \in (P :_H A)$ ve $a \in B$ seçilebildiği varsayılsın. O hâlde $(h+x)(a+b) \in B \setminus \phi(B)$ olur. Bu durumda, $h+x \in (B :_H A)$ ya da $a+b \in B$ olduğu ve dolayısıyla yine $h \in (B :_H A)$ ya da $a \in B$ olduğu sonucu elde edilir.

Bu üç durum birlikte değerlendirildiğinde, her durumda $a \in (P :_H A)$ veya $x \in P$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 3.2. *B bir zayıf asal alt modül olsun ve $(B :_H A)B \notin 0$ olsun. O halde B, A'nin bir asal alt modüldür (Zamani 2010).*

İspat Yukarıdaki teoremi $\phi = \phi_0$ olarak alınsın. Burada $\phi_0(B) = \{0\}$ tanımı gereği, B zayıf asal bir alt modül olduğundan, $ha \in B$ ve $ha \notin \phi_0(B)$ durumunda $h \in (B :_H A)$ veya $a \in B$ olmalıdır.

Zayıf asal alt modül tanımına göre, $ha \in B$ ve $ha \neq 0$ ise, yine $h \in (B :_H A)$ veya $a \in B$ olduğu sonucu elde edilir.

Şimdi, $(B :_H A)B \neq 0$ olduğu varsayılsın. Bu, $(B :_H A)$ kümesinin sıfırdan farklı bir eleman içerdiğini gösterir. Dolayısıyla, $l \in (B :_H A)$ ve $l \neq 0$ olacak şekilde bir eleman seçilebilir. Bu durumda, $b \in B$ için $lb \in B$ elde edilir.

Ayrıca, $lb \neq 0$ olduğundan, B'nin asal bir alt modül olması gerekir. Gerçekten de, eğer $ha \in B$ ve $ha \neq 0$ ise, $h \in (B :_H A)$ olamaz varsayımı altında, $a \in B$ olmak zorundadır.

Bu durumda, $ha \in B$ ve $ha \neq 0$ koşulları altında her zaman $a \in B$ sonucu elde edilir. Bu da, tanım gereği, B'nin asal bir alt modül olduğunu gösterir. $\square$

Sonuç 3.3. *B bir ϕ-asal alt modül olsun ve $\phi(B) \subseteq (B :_H A)^2B$ olsun. O halde, her $h \in H$ ve $a \in A$ için, $ha \in B \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty}(B :_H A)^iB$ ise $h \in (B :_H A)$ veya $a \in B$ sonucunu elde ederiz. Diğer bir deyişle, B ϕ_ω-asal alt modüldür (Zamani 2010).*

İspat Eğer B A nin asal bir alt modülü ise, sonuç açıktır. Dolayısıyla B, A'nin asal bir alt modülü olmadığı varsayılsın. Bu durumda Teorem 3.1'den

$$(B :_H A)B \subseteq \phi(B) \subseteq (B :_H A)^2B \subseteq (B :_H A)B$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan, $\phi(B) = (B :_H A)B = (B :_H A)^2B$ olur. Dolayısıyla, $i \geq 1$ olmak üzere her i için

$$\phi(B) = (B :_H A)^iB$$

eşitliği sağlanır ve böylece istenen sonuç elde edilmiş olur. $\square$

Görüldüğü üzere, ϕ-asal alt modüllerin klasik asal alt modüllerle olan ilişkisi, ϕ fonksiyonunun taşıdığı yapısal özellikler aracılığıyla analiz edilmektedir. Özellikle $(B :_H A)B \subseteq \phi(B)$ gibi içerme koşulları, ispatlarda kilit rol oynamakta ve farklı türde genelleştirmelere geçişi mümkün kılmaktadır.

Sonuç 3.4. *B bir H-modülü ve B A'nin bir ϕ-asal alt modülü olsun. O halde*

$$(B :_H A) \subseteq (\phi(B) :_H A) \quad \textit{veya} \quad (\phi(B) :_H A) \subseteq (B :_H A).$$

Eğer $(B :_H A) \neq (\phi(B) :_H A)$ ise, o zaman B, A nin asal bir alt modülü değildir; eğer $(\phi(B) :_H A) \neq (B :_H A)$ ise, o zaman B asal bir alt modüldür. Eğer $\phi(B)$ A'nin radikal alt modülü ise, ya $(B :_H A) = (\phi(B) :_H A)$ ya da B, A'nin asal bir alt modülüdür (Zamani 2010).

İspat Eğer B, A nin asal bir alt modülü değilse, o zaman Teorem 3.1'den,

$$(B :_H A)B \subseteq \phi(B)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$(B :_H A)^2 \subseteq ((B :_H A)B :_H A) \subseteq (\phi(B) :_H A)$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Buradan da

$$(B :_H A) \subseteq (\phi(B) :_H A)$$

elde edilir.

Diğer yandan, eğer B asal bir alt modül ise, $\phi(B) \subseteq B$ varsayımı altında

$$(\phi(B) :_H A) \subseteq (B :_H A) = (B :_H A)$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla, her iki durumda da korolerde belirtilen tüm sonuçlar geçerli olur. □

Bir diğer önemli genelleme ise, asal alt modül kavramının S kümesi bağlamında yeniden tanımlandığı S-asal alt modül yaklaşımıdır. Bu bağlamda, aşağıda verilen önermeler, S-asal alt modüllerin klasik yapılarla olan ilişkisini ve bu yapının değişmeli halkalar üzerindeki yansımasını göstermektedir:

Önerme 3.5. *$S \subseteq H$ çarpımsal küme ve A bir H-modül olsun. O zaman:*

(i) C asal alt modül ve $(C : A) \cap S =$ ise C, S-asal alt modüldür. Önermenin tersi ise $S \subseteq u(H)$ olduğunda doğru olur. Yani $S \subseteq u(H)$ ise A nın her S-asal alt modülü aynı zamanda asal alt modülü olur;

(ii) S_1 ve S_2, H halkasının çarpımsal alt kümeleri ve $S_1 \subseteq S_2$ olsun. Eğer $C \in Spec_{S_1}(A_H)$ ve $(C : A) \cap S_2 = \emptyset$ ise $C \in Spec_{S_2}(A_H)$ sağlanır;

(iii) $C \in Spec_S(A_H)$ olmasının gerek ve yeter koşulu $C \in Spec_{S^*}(A_H)$ olmasıdır;

(iv) $C \in Spec_S(A_H)$ ise $S^{-1}C$, $S^{-1}A$ nın asal alt modülüdür

(Sevim, Arabacı, Tekir ve Koç 2019).

İspat

(i) ve (ii) açiktir.

(iii) $C \in \mathrm{Spec}_S(A_H)$ olsun. Öncelikle $(C :_H A)$ ile S^* ın ayrık olduğunu göstermek gerekir.

Aksi takdirde, $(C :_H A) \cap S^* \neq \emptyset$ olsun ve $x \in (C :_H A) \cap S^*$ alınsın. $x \in S^*$ olduğundan $\frac{x}{1}$, $S^{-1}H$ nin birim (terslenebilir) elemanıdır. Bu nedenle, öyle $h \in H$ ve $s \in S$ vardır ki $\frac{x}{1}\frac{h}{s} = 1$ olur. Buradan, bir $u \in S$ için $us = uxh$ eşitliği yazılabilir.

Şimdi $s' := us \in S$ olarak tanımlanır. Böylece $s' = uxh \in (C :_H A) \cap S$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu durumda $(C :_H A) \cap S^* = \emptyset$ olduğu görülür. $S \subseteq S^*$ olduğundan ve maddesi kullanıldığında, $C \in \mathrm{Spec}_{S^*}(A_H)$ bulunur.

Tersine $C \in \mathrm{Spec}_{S^*}(A_H)$ ve $ra \in C$ olsun. C, A nın S^*-asal alt modülü olduğundan bir $x \in S^*$ için $xr \in (C :_H A)$ veya $xa \in C$ olmalıdır. Fakat $\frac{x}{1}$, $S^{-1}H$ nin birim elemanı olduğu için $us = uxh$ sağlayan $h \in H$ ve $u, s \in S$ vardır.

O halde $s' := us \in S$ seçilirse $s'h = ush = uhxr \in (P :_R M)$ veya $s'm = uhxm \in C$ elde edilir. Bu durumda C, M nin S-asal alt modülü olur.

(iv) $C \in \text{Spec}_S(A_H)$, $hs \in S^{-1}H$ ve $at \in S^{-1}A$ için $hsat \in S^{-1}C$ olsun. O halde bir $u \in S$ için $uha \in C$ olur.

$C \in \text{Spec}_S(A_H)$ olduğundan $s'uh \in (C :_H A)$ veya $s'a \in C$ sağlayan bir $s' \in S$ bulunabilir. Böylece $hs = \dfrac{s'uh}{s'us} \in S^{-1}(C :_H A) \subseteq S^{-1}(S^{-1}C :_H S^{-1}A)$ veya $at = \dfrac{s'a}{s't} \in S^{-1}C$ sağlanır.

O halde $S^{-1}C$, $S^{-1}A$ nın asal alt modülüdür.

□

Önerme 3.5'ün (i) ve (iv) kısımlarının tersi genellikle doğru değildir. Bunu göstermek için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 3.6. *$A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ bir $\mathbb{Z}$-modül olsun. Alt modül olarak $B = \mathbb{Z} \times 0$ alınsın ve $S = \mathbb{Z} - \{0\}$ çarpımsal küme olsun.*

Bu durumda

$$(B : A) = \{r \in \mathbb{Z} \mid rA \subseteq B\} = \{0\}$$

dır. Şimdi $s \in S$ keyfi bir eleman seçelim ve $\gcd(s,p) = 1$ olacak şekilde bir asal sayı p alalım. Bu durumda:

$$p \cdot \left(\frac{1}{p}, 0\right) = (1,0) \in B$$

Ancak $p \notin (B : A) = \{0\}$ ve $s \cdot \left(\frac{1}{p}, 0\right) = \left(\frac{s}{p}, 0\right) \notin B$, çünkü $\frac{s}{p} \notin \mathbb{Z}$

Dolayısıyla, B alt modülünün S-asal olmadığını gösterir.

Yerelleştirme işlemi uygulandığında, $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ olduğundan bir cisim elde edilir ve $S^{-1}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ ifadesi bir vektör uzayına dönüşür. Bu durumda, B'nin yerelleştirilmiş hali olan $S^{-1}B$, $S^{-1}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ içerisinde asal bir alt modül haline gelir (Sevim, Arabacı, Tekir ve Koç 2019).

Lemma 3.7. *$S \subseteq H$ çarpımsal kapalı bir alt küme ve C, A nın $(C : A) \cap S = \emptyset$ sağlayan bir alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) $C \in Spec_S(A_H)$;

(ii) Bir $s \in S$ olmak üzere, H nin her J ideali ve A nın her B alt modülü için $JB \subseteq C$ iken $sJ \subseteq (C : A)$ veya $sB \subseteq C$ olur (Sevim, Arabacı, Tekir ve Koç 2019).

İspat (i) $\Rightarrow$ (ii): $C \in \text{Spec}_S(A_H)$ olsun. H nın bir J ideali ve A nin bir B alt modülü için $JB \subseteq C$ olsun. C, A nın S-asal alt modülü olduğundan, bir $s \in S$ için $ha \in C$ iken $sh \in (C : A)$ veya $sa \in C$ olur. Şimdi de $sB \nsubseteq C$ varsayalım. O halde bir $b \in B$ için $sb \notin C$ olur. Öte yandan, her $j \in J$ için $jb \in C$ olduğundan, $C \in \text{Spec}_S(A_H)$ olduğu için $sj \in (C : A)$ olmalıdır. Dolayısıyla $sJ \subseteq (C : A)$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $h \in H$ ve $a \in A$ olmak üzere $ha \in C$ varsayılsın. $J = Hh$ ve $B = Ha$ alınsın. Bu durumda, $JB = Hh \cdot Ha = Hha \subseteq C$ olur. (ii) varsayımı altında, bir $s \in S$ için ya $sJ = Hhs \subseteq (C : A)$ ya da $sB = Hsa \subseteq C$ olmalıdır. Bu durumda ya $sh \in (C : A)$ ya da $sa \in C$ elde edilir. Yani C, A nın S-asal alt modülüdür. □

S-asal alt modül tanımı, modül teorisinde asal yapıların daha genel bağlamlarda analiz edilmesine olanak tanımaktadır. Bu bağlamda kullanılan ispat teknikleri, özellikle lokalizasyon, çelişki ve karşılıklı içerme yöntemleriyle zenginleşmektedir.

Ayrıca, güçlü asal alt modül kavramı da incelenmiş; bu yapının klasik asal alt modül tanımıyla ilişkisi çeşitli önermeler ve örnekler aracılığıyla ortaya konmuştur.

Önerme 3.8. *A bir H-modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur:*

1. *A nın her güçlü asal alt modülü aynı zamanda asal bir alt modüldür;*
2. *A nın her maksimal alt modülü güçlü asal bir alt modüldür*

(Naghipour 2009).

İspat

(1) Tersini kabul edelim. P asal olmayan bir alt modül olsun. Bu durumda $x \notin P$ ve $h \in H$ olmak üzere $hx \in P$ ve $hA \nsubseteq P$ olacak şekilde elemanlar vardır. Böylece $hy \notin P$ olacak biçimde bir $y \in A$ seçilebilir. Şimdi

$$I_x^P \cdot hy = h \cdot I_x^P y \subseteq h(P + Hx) \subseteq P$$

elde edilir. Ancak P güçlü asal olduğundan, ya $x \in P$ ya da $hy \in P$ olması gerekirdi. Bu, başlangıç varsayımıyla çelişir.

(2) $x, y \in A$ ve $I_x^P y \subseteq P$ olduğu varsayılsın. Eğer $x \notin P$ ise, o hâlde $P + Hx = A$ olur ve buradan $I_{P,x} = H$ elde edilir. Bu durumda $y \in P$ sonucu çıkar. Dolayısıyla P güçlü asal bir alt modüldür.

□

Örnek 3.9. *H bir halka ve $I \in Spec(H)$ (yani asal bir ideal) olsun. Bu durumda*

$$(I, I) \subseteq H \times H$$

alt modülünün asal olduğu görülür. Ancak bu alt modül, güçlü asal ya da güçlü yarı-asal değildir. Nitekim

$$I_{(1,0)}^{(I,I)}(1,0) \subseteq I(1,0) \subseteq (I, I)$$

olduğu hâlde, $(1,0) \notin I, I$ durumu söz konusudur (Naghipour 2009).

Önerme 3.10. *V, bir cisim W üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Bu durumda*

$$S\text{-}Spec_W(V) = \{G \subsetneq V \mid G \text{ maksimal alt uzaydır}\}$$

yani, V nin güçlü asal alt modülleri tam olarak onun maksimal alt uzaylarıdır (Naghipour 2009).

İspat Önceki önermeye göre, her maksimal alt uzayın güçlü asal olduğu bilinmektedir.

Bunun tersinin geçerli olmadığı varsayılsın; yani $G \subsetneq V$ güçlü asal bir alt uzay olmakla birlikte maksimal olmasın. Bu durumda $x \in V \setminus G$ için $Wx + G \subsetneq V$ olduğu söylenebilir.

Her $y \in V$ için

$$I_x^G y = \{w \in W \mid wV \subseteq Wx + G\} \cdot y = \{0\} \cdot y = \{0\} \subseteq G$$

eşitliği elde edilir. Bu durum, her $y \in V$ için $y \in G$ anlamına gelir. Dolayısıyla $G = V$ olur; bu ise varsayımla çelişir. Sonuç olarak, her güçlü asal alt uzay aynı zamanda maksimaldir.

□

Asal alt modüllerin farklı genelleme biçimleri içinde, özellikle homomorfizma davranışına duyarlı tanımlar da geliştirilmiştir. Bu çerçevede, tam değişmez alt modül (fully invariant submodule) kavramı, bir alt modülün tüm H-modül homomorfizmaları altında kendini koruma özelliğine sahip olup, modül içi yapının daha katı kontrolünü sağlar. Aşağıda, bu yapıyla ilgili teoremler sunulmaktadır.

Lemma 3.11. *Eğer A nın tüm tam değişmez alt modülleri idempotentse, o zaman A nın herhangi bir alt modülü B nin de her tam değişmez alt modülü idempotenttir (Beachy ve Medina-Bárcenas 2020).*

İspat A nin her tam değişmez alt modülü idempontent olsun.
C, B nin tam değişmez bir alt modülü olsun. Bu durumda C, A de de tam değişmez olduğu için idempotenttir:

$$C_AC = \sum \{\ f(C)|\ f \in Hom(A\ ,\ C)\} = C.$$

Ancak, $C_BC = C$ olduğunu gösterelim.
Öncelikle, tanım gereği:

$$C_BC = \sum \{f(C)|f \in Hom(B, C)\} \subseteq C$$

olduğu açiktir.

Her $c \in C$ için, $C = C_AC = \sum\{f(C) \mid f \in \mathrm{Hom}_H(A, C)\}$ olduğundan, c şöyle yazılabilir:

$$c = f_1(c_1) + f_2(c_2) + \cdots + f_n(c_n)$$

burada $f_i \in \mathrm{Hom}_H(A, C)$ ve $c_i \in C$.

Şimdi her f_i fonksiyonunu C ye kısıtlayalım. Bu durumda, $f_{i|_B} : B \to C$ biçiminde bir homomorfizma elde edilir ve $f_{i|_B} = f_i(c_i)$ olur.

Bu şekilde,

$$c = \sum_{i=1}^{n} f_{i|_B}(c_i) \in \sum\{f(C) \mid f \in \mathrm{Hom}_H(B, C)\} = C_BC.$$

Dolayısıyla $c \in C_BC$ ve bu da $C \subseteq C_BC$ anlamına gelir.

Sonuç olarak, $C_BC = C$ elde edilir.

□

A bir H-modül ve B, C A nin alt modülleri olsun. Aşağıdaki ifade tanımlanır:

$$BC^{-1} = \{a \in A \mid f(a) \in B, \forall f \in \mathrm{Hom}_H(A, C)\}.$$

$BC^{-1} = \mathrm{rej}^C_{B\cap C}(A)$ olduğu için BC^{-1}, A nin bir tam değismez alt modülüdur (Beachy ve Medina-Bárcenas 2020).

Lemma 3.12. *Aşağıdaki koşullar A nin B ve C alt modülleri için geçerlidir:*

(a) $(BC^{-1})_A C \subseteq B$;

(b) $K \subseteq A$ *ve* $K_A C = B$ *ise,* $K \subseteq BC^{-1}$;

(c) $(B \cup C)C^{-1} = BC^{-1}$;

(d) $B \subseteq (B_A C)C^{-1}$;

B, A *nin tam değişmez bir alt modülü ise, aşağıdaki koşul geçerlidir*

(e) $B \subseteq BC^{-1}$

(Beachy ve Medina-Bárcenas 2020).

İspat

(a) Bu sonuç BC^{-1} tanımından doğrudan elde edilir.

(b) $K \subseteq A$ olacak şekilde $K_A C \subseteq B$ olsun.
$K_A C = \sum\{f(k) \mid f \in Hom_H(A, C)\} \subseteq B$. Bundan dolayı, her $f \in Hom_H(A, C)$ için $f(K) \in B$. Dolaysıyla, $K \subseteq BC^{-1}$.

(c) BC^{-1} tanımı gereği

$$\begin{aligned}(B \cap C)C^{-1} &= \{a \in A \mid f(a) \in (B \cup C), \forall f \in \text{Hom}_H(A, C)\} \\ &= \{a \in A \mid f(a) \in B \text{ ve } f(a) \in C, \forall f \in \text{Hom}_H(A, C)\} \\ &= BC^{-1}.\end{aligned}$$

(d) Her $g \in \mathrm{Hom}_H(A, C)$ için $g(B) \subseteq B_A C$ olduğundan,

$$(B_A C)C^{-1} = \{a \in A \mid f(a) \in B_A C,\ \forall f \in \mathrm{Hom}_H(A, C)\},$$

dolayısıyla $B \subseteq (B_A C)C^{-1}$ elde edilir.

(e) B tam değişmez bir alt modül olduğundan $B_A C \subseteq B \cap C$ olur. Bu durumda $f(a) \in B$ ve $f(a) \in C$ koşulları sağlanır, dolayısıyla $a \in BC^{-1}$ ve sonuç olarak $B \subseteq BC^{-1}$ elde edilir. Bu, (b)'nin özel durumu olarak da görülebilir.

□

Bu çalışma, klasik asal ve yarı asal alt modül kavramlarını, iz ve rejeksiyon işlemleriyle genelleştirerek modül teorisinde daha soyut ve yapısal bir bakış açısı sunmuştur. Özellikle tam değişmezlik koşulu altında asal alt modül tanımı yeniden ele alınmış ve bu sayede daha güçlü karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Sunulan yöntemler, farklı alt modül türlerinin yapısal analizine olanak tanımakta olup, tez kapsamında geliştirilecek bulguların ispatında doğrudan kullanılacaktır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, bu tez çalışmasında elde edilen tüm sonuçlar verilecektir.

4.1. A-Asal İdaller ve A-Bölgeller

Tanım 4.1. *H bir halka ve I, H halkasının kendinden farklı bir ideali olsun. Eğer her $x, y \in H$ için, $xy \in I$ olması durumunda $cx \in I$ olacak şekilde $c \in H \setminus (I + Hx)$ bir eleman varsa, bu durumda I idealine A-asal ideal denir.*

Tanım 4.2. *H bir halka olsun. H nın sıfır ideali A-asal ise H ya A-bölge (A-domain) denir. Yani, her $x, y \in H$ için $xy = 0$ olması durumunda, bir $c \in H \setminus (Hx)$ elemanı vardır ki $cx = 0$ olur.*

Yukarida verılen Tanım 4.2, her tamlık bölgesinde açık bir şekilde sağlanır; çünkü $xy = 0$ eşitliği $x = 0$ veya $y = 0$, olmasını gerektirir ve dolayısıyla her $c \in H$ için $cx = 0$ olur. Fakat, A-bölge şartı, belirli türde sıfır bölenlerin var olmasına da izin verir, yeter ki bu elemanlar A-asal şartını sağlasın. Bu nedenle, A-bölgeler tamlık bölgelerden daha geniş bir sınıf oluşturur.

Örnek 4.3. *(i) Her asal idealin A-asal bir ideal olduğu açıktır.*

(ii) $\mathbb{Z}$ bir halka ve $I = 6\mathbb{Z}$ bir ideal olsun. $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $ab \in I$ olsun. Varsayalım ki $a = 2t$, $b = 3l$ olacak şekilde bazı $t, l \in \mathbb{Z}$ elemanları vardır. Bu durumda, $c = 3 \in \mathbb{Z} \setminus (6\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \setminus (2\mathbb{Z})$ olduğu görülür; öyle ki $c \cdot 2 \in 6\mathbb{Z}$ olur. Dolayısıyla, I ideal A-asal bir idealdir.

(iii) $\mathbb{Z}$ bir halka ve $I = 16\mathbb{Z}$ bir ideal olsun. O zaman, I bir A-asal ideal değildir; çünkü $4.4 \in I$ ve $c4 \in 16\mathbb{Z}$ olacak şekilde $c \in \mathbb{Z} \setminus (16\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \setminus (4\mathbb{Z})$ yoktur.

A-asal idealler ile yarı-asal idealler arasındaki farkı gösteren bir örnek aşağıda verilmiştir.

Önerme 4.4. *H bir tamlık bölgesi olsun. O zaman $I = a^2H$ bir A-asal ideal değildir.*

İspat H bir bölge olduğundan sıfır böleni içermez. İdealin A-asal olmadığını göstermek için, $xy \in I$ olduğu halde, $cx \in I$ olacak şekilde $c \in H \setminus (I + Hx)$ koşulunu sağlayan hiçbir c bulunamayacağını göstermek yeterlidir.

$a \in H$ alalım. O zaman $a \cdot a = a^2 \in I$ olur. Ancak $I + Ha = a^2H + aH = aH$ olur. Şimdi, $ca \in a^2H$ olması için $c \in aH$ gerekir, yani $c \in I + Ha$ olmalıdır. Bu nedenle, $ca \in I$ olacak şekilde hiçbir $c \in H \setminus (I + Ha)$ bulunamaz. Bu ise A-asal tanımına aykırıdır. Dolayısıyla, $I = a^2H$ ideali A-asal değildir.

□

Örnek 4.5. *k bir cisim olmak üzere,*

$$R = \prod_{n=1}^{\infty} R_n \quad \textit{burada} \quad R_n := k[x]/(x^2)$$

bir halka olsun.

Her R_n nilpotent elemanı $\bar{x}$ olan, değişmeli, lokal, Artinian bir halkadır ve $\bar{x}^2 = 0$ olduğu sağlanır. $x_n := \bar{x} \in R_n$ olsun ve ideal şu şekilde tanımlansın:

$$I = \bigoplus_{n=1}^{\infty}(x_n) = \{(a_1, a_2, \dots) \in R \mid a_n \in (x_n), \textit{ ve yalnızca sonlu sayıda } a_n \neq 0\}.$$

Yani I, çarpım halkasında (x_n) idealinin direkt toplamıdır.

Şimdi $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ R nin elemanları olsun, öyle ki $xy = (x_ny_n) \in I$ dır. $cx \in I$ olacak şekilde $c = (c_n) \in R \setminus (I + Rx)$ elemanını inşa etmeye çalışılır.

Öncelikle

$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid x_ny_n \neq 0\} \quad \textit{(sonlu bir küme)}$$

olsun ve böylece A sonlu bir kümedir. Dolayısıyla, sonlu sayıda n haricindeki tüm $x_ny_n = 0$ olur. Böyle bir R_n de bu, $x_n = 0$ veya $y_n = 0$ anlamına gelir.

Şimdi aşağıdaki sonsuz kümeyi tanımlayalım:

$$B := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = 0 \in R_n\}.$$

Bu küme sonsuz olabilir; çünkü $x_n = 0$ sonsuz birçok n için geçerlidir ve $x_ny_n = 0$ durumu bir noktadan sonra daima sağlanır. Bu nedenle, ilgili pozisyonlardaki y_n değerleri 1 olabilir; zira her R_n halkasında 1 çarpma işleminin birim elemanıdır.

$c = (c_n) \in R$ olacak şekilde c elemanını şöyle tanımlayalım:

$$c_n = \begin{cases} 1 & \textit{eğer } n \in B \\ 0 & \textit{aksi takdirde} \end{cases}$$

Bu durumda, c dizisi, $x_n = 0$ olan pozisyonlarda 1, diğer pozisyonlarda ise 0 olan bir dizidir. Dolayısıyla $cx = 0 \in I$ elde edilir. Şimdi, $c \notin I + Rx$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksini varsayalım:

$$c \in I + Rx \Rightarrow c = i + rx$$

burada $i \in I$ ve $r \in R$ olsun. Öte yandan, I yalnızca sonlu destekli elemanlar içerir ve $Rx = \{rx \mid r \in R\}$, burada rx yalnızca x'in sıfır olmayan bileşenlerinde desteklenir. Dolayısıyla $I + Rx$, yalnızca sonlu sayıda koordinatta ve x in sıfır olmayan koordinatlarında desteklenir.

Oysa, c, $x_n = 0$ olan sonsuz sayıda n pozisyonunda 1 değerine sahiptir. Bu 1'ler, sonlu destekli bir eleman i ile veya herhangi bir rx çarpımı ile (ki rx, $x_n = 0$ olan yerlerde sıfırdır) elde edilemez. Dolayısıyla,

$$c \notin I + Rx$$

sonucuna varıyoruz. Bu da şu anlama gelir: $x, y \in R$ olup $xy \in I$ olduğunda, $c \in R \setminus (I + Rx)$ olacak şekilde bir c bulduk ve aynı zamanda $cx \in I$ elde ettik. Böylece $I = \bigoplus_{n=1}^{\infty}(x_n)$ ideali A-asal olur.

Örnek 4.6. *$H = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ halkası birim elemanı $(1, 1)$ olan değişmeli bir halkadır. Ancak, sıfır bölenler içerdiğinden dolayı bir bölge değildir.*
Nitekim:

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$$

eşitliği sağlanmakta olup, $(1, 0) \neq 0$ ve $(0, 1) \neq 0$ olduğu görülmektedir. Bu nedenle H, tamlık bölgesi değildir.

Şimdi H halkasının bir A-bölge olduğu gösterilecektir; yani, sıfır idealinin $(0, 0)$ A-asal olduğu kanıtlanacaktır.

$xy = 0$ olacak şekilde $x = (a, b), y = (c, d) \in H$ olsun. Bu durumda:

$$xy = (ac, bd) = (0, 0) \Rightarrow ac = 0 \text{ ve } bd = 0$$

eşitliği elde edilir.Buradan, ya $a = 0$ ya da $c = 0$; ayrıca ya $b = 0$ ya da $d = 0$ olmak zorundadır.

$x \neq (0, 0)$ olmak üzere, a veya b sıfırdan farklıdır. $cx = 0$ olacak şekilde $c \in H \setminus Hx$ elemanının varlığı gösterilecektir.

Örneğin $x = (1, 0)$ ve $y = (0, 1)$ alındığında $xy = (0, 0)$ olduğu ve $x \neq 0$ olduğu açıktır. Bu durumda $c = (0, 1) \in H$ seçildiğinde:

$$c \cdot x = (0, 1) \cdot (1, 0) = (0 \cdot 1, 1 \cdot 0) = (0, 0)$$

elde edilir. Ayrıca, $c \notin Hx$, çünkü

$$Hx = \{r \cdot (1, 0) = (r, 0) \mid r \in \mathbb{F}_p\}$$

olduğundan $(0, 1) \notin Hx$ olur. Böylece A-asal koşulu sağlanmaktadır.

Bu durum, $xy = 0$ olacak şekilde seçilen her $0 \neq x \in H$ için geçerli olduğundan, sıfır idealinin A-asal olduğu sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, H bir A-bölgedir.

Lemma 4.7. *H_1 ve H_2 tamlık bölgeleri olsun. O zaman halka $H_1 \times H_2$ bir A-bölgedir.*

İspat $a, b \in H_1$ ve $c, d \in H_2$ olmak üzere $(a, c), (b, d) \in H_1 \times H_2$ olsun. Bu durumda:

$$(a, c)(b, d) = (ab, cd).$$

Eğer $(a, c)(b, d) = 0$ ise, o hâlde $ab = 0$ veya $cd = 0$ olmalıdır.
Eğer $ab = 0$ ise, ya $a = 0$ ya da $b = 0$ olmalıdır; benzer şekilde, $cd = 0$ ise, $c = 0$ veya $d = 0$ olur.
Şimdi, $(a, 0), (0, d) \in H_1 \times H_2$ olmak üzere, $(a, 0) \neq (0, 0)$ ve $(0, d) \neq (0, 0)$ olduğunu ve

$$(a, 0)(0, d) = (0, 0)$$

eşitliğinin sağlandığını varsayalım.
Bu durumda,

$$c = (0, d) \in (H_1 \times H_2) \setminus ((H_1 \times H_2)(a, 0))$$

dır. Dolayısıyla, $H_1 \times H_2$ bir A-bölgedir.

$\square$

Teorem 4.8. *H bir halka ve I, H nin ideali olsun. I idealinin A-asal olması için gerek ve yeter koşul H/I bir A-bölge olmasıdır.*

İspat $(\Rightarrow)$: I, H nin bir A-asal ideali olsun. $\bar{x}, \bar{y} \in H/I$ olmak üzere, $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$ olduğunu varsayalım; yani $xy \in I$. A-asal koşuluna göre, $tx \in I$ olacak şekilde bir $t \in H \backslash (I + Hx)$ vardır; yani H/I bölüm halkasında $\bar{t}\bar{x} = \bar{0}$ ve $\bar{t} \notin (H/I) \cdot \bar{x}$ olur. Dolayısıyla, H/I A-bölge koşulunu sağlar.

$(\Leftarrow)$: H/I bir A-bölge olsun. $x, y \in H$ ve $xy \in I$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, H/I bölüm halkasında $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$ olur. O zaman A-bölge özelliğine göre, $\bar{t}\bar{x} = \bar{0}$ olacak şekilde bir $\bar{t} \in H/I \setminus ((H/I) \cdot \bar{x})$ vardır; yani $tx \in I$ ve $t \notin I + Hx$ dir. Dolayısıyla, I bir A-asal idealdir.

□

Teorem 4.9. *$\alpha : H \to S$ örten bir halka homomorfizması (epimorfizma) olsun. Aşağıdakiler sağlanır.*

(i) I, H nin bir A-asal ideali ve $\ker \alpha \subset I$ *ise $\alpha(I)$, S nin A-asal idealdır.*

(ii) J, S nin bir A-asal ideali ise $\alpha^{-1}(J)$, H nin A-asal idealdır.

İspat

(i) I, H nin bir A-asal ideali ve $\ker \alpha \subset I$ olsun. α örten olduğundan, $\alpha(I) = \{\alpha(x) \mid x \in I\} \subseteq S$ bir idealdir. Her $x', y' \in \alpha(I)$ için, tanım gereği $x' = \alpha(x)$ ve $y' = \alpha(y)$ olacak şekilde $x, y \in I$ vardır. Bu durumda:

$$x' \cdot y' = \alpha(x) \cdot \alpha(y) = \alpha(xy) = \alpha(I).$$

Dolayısıyla $x' \cdot y' \in \alpha(I) \Rightarrow xy \in f^{-1}(\alpha(I))$. Ancak $\ker \alpha \subset I$ olduğundan, $\alpha^{-1}(\alpha(I)) \subseteq I$ sağlanır. Bu durumda $xy \in I$ elde edilir.

Şimdi, I, H halkasında A-asal olduğundan $tx \in I$ olacak şekilde $t \in H/(I + Hx)$ bir eleman vardır. Bu da şunu sağlar:

$$\alpha(tx) = \alpha(t) \cdot \alpha(x)) \in \alpha(I),$$

ancak aynı zamanda:

$$\alpha(t) \notin \alpha(I + Hx) \subseteq \alpha(I) + S\alpha(x).$$

Dolayısıyla, $t' := \alpha(t) \notin \alpha(I) + Sx'$ ve $t'x \in \alpha(I)$. Dolayısıyla, $\alpha(I)$ A-asal idealdir.

(ii) J, S nin bir A-asal ideali olsun. $x, y \in H$ elemanları için $xy \in \alpha^{-1}(J)$ olduğu varsayılsın. Bu durumda,

$$\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y) \in J$$

olur. J, S halkasında A-asal olduğundan $d\alpha(x) \in J$ olacak şekilde $d \notin J + S\alpha(x)$ bir eleman vardır.

α örten olduğundan, $d = \alpha(c)$ olacak şekilde bir $c \in H$ bulunabilir. Bu durumda:

$$\alpha(cx) = \alpha(c)\alpha(x) = d\alpha(x) \in J \Rightarrow cx \in \alpha^{-1}(J).$$

Ayrıca, $c \in \alpha^{-1}(J) + Hx$ varsayımı yapılsaydı, $\alpha(c) \in \alpha(\alpha^{-1}(J) + Hx) = J + S\alpha(x)$ olurdu; bu da $d \in J + S\alpha(x)$ sonucunu verirdi. Bu ise A-asal tanımına aykırıdır.

Dolayısıyla, $c \notin \alpha^{-1}(J) + Hx$ ve $cx \in \alpha^{-1}(J)$ olacak şekilde bir $c \in H$ bulunur. Bu, $\alpha^{-1}(J)$ A-asal ideal olduğunu gösterir.

□

Önerme 4.10. *I, H halkasının asal ideallerinin kesişimi ise I bir A-asal idealdir.*

İspat

I, H halkasının asal ideallerinin kesişimi olarak verilmiş olsun:

$$I = \bigcap_{i \in \Lambda} P_i,$$

burada her P_i asal idealdir. Şimdi, $xy \in I$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, her $i \in \Lambda$ için $xy \in P_i$ olacaktır.

Şimdi, $x, y \notin I$ durumunu ele alalım. Bu durumda, aşağıdaki küme tanımlansın:

$$\Delta = \{i \in \Lambda : x \in P_i \text{ ve } y \notin P_i\}.$$

Şimdi, L kümesini şöyle tanımlayalım:

$$L = \bigcap_{i \in \Delta} P_i.$$

Bu durumda, $y \notin L$ olur. Ayrıca, eğer $y = k + rx$ olsaydı, $k \in I \subseteq L$ ve $x \in L$ olduğundan, $k + rx \in L$ olurdu. Bu ise bir çelişki olurdu. Bu nedenle, $y \in H \setminus (I + Hx)$ dır. Dolayısıyla, $xy \in I$. Bu da I nin A-asal olduğunu gösterir.

□

Bu önerme, A-asal koşulunun asal idealin klasik tanımına kıyasla kesinlikle daha zayıf olduğunu ve A-bölgelerinin, tamlık bölgelerine kıyasla çok daha geniş bir sınıf oluşturduğunu açıkça göstermektedir.

Önerme 4.11. *H bir tek türlü asal çarpanlara ayırlabilen bölge (TAÇ) ve $I = aH$ olacak şekilde $a \in H$ olsun. Eğer a bazı indirgenemez elemanların çarpımıysa, o zaman $I = aH$ bir A-asal idealdir.*

İspat $a = p_1 p_2 \cdots p_n$ olacak şekilde her p_i indirgenemez bir eleman ve

$$S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$$

olsun. Şimdi $x, y \in H$ elemanları için $xy \in aH$, ancak $x \notin aH$ ve $y \notin aH$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, S kümesinden en az bir indirgenemez eleman p_i bulunur ki, koşulları sağlanır. Bu tür bir eleman olarak örneğin p_1 seçilebilir. Daha genel olarak, S kümesinin bir altkümesi S' seçilebilir; bu altkümede yer alan her $p \in S'$, $p \nmid x$ ve $p \mid y$ koşulları geçerlidir. Bu altküme kullanılarak aşağıdaki iki çarpım tanımlanır:

$$q = \prod_{t_i \in S'} t_i \qquad \text{ve} \qquad q' = \prod_{t_i \in S \setminus S'} t_i.$$

Bu durumda $q \mid y$ olduğu görülür. Dolayısıyla $yR \subseteq qH$, ve buradan $aH + yH \subseteq qH$ sonucu elde edilir. Diğer yandan, $q' \notin qH$ olduğu için $q' \in H \setminus (aH + yH)$ olduğu görülür. Bu nedenle, $q'y \in aH$ sonucu elde edilir. Dolayısıyla, $I = aH$ bir A-asal idealdir.

□

Bu kısımda, yerelleştirme altında bir A-asal idealin davranışı ele alınmaktadır. Öncelikle, ilerideki ispatta kullanılacak olan aşağıdaki $(\star)$ özelliği not edilmektedir.

$$\frac{a}{1} \in S^{-1} I \Rightarrow a \in I. \tag{$\star$}$$

Teorem 4.12. *S, H nin çarpımsal kapalı bir altkümesi; I ise $(\star)$ özelliğini sağlayan H nin bir ideali olsun. Ayrıca, $I \cap S \neq \emptyset$ olduğu varsayalsın. I idealinin bir A-asal olması için gerek ve yeter koşul $S^{-1}I$ nın $S^{-1}H$ halkasında bir A-asal ideal olmasıdır.*

İspat $(\Rightarrow)$: I bir A-asal ideal olsun. Diyelim ki $\frac{x}{1}, \frac{y}{1} \notin S^{-1}I$ ve $x, y \notin I$.
$cxy \in I$ olsun. $(cx)y \in I$ ve $cx, y \notin I$ olduğu varsayalsın.
O zaman, $ex \in I$ olacak şekilde bir $e \in R \setminus (I + Hx)$ vardır. Şimdi,

$$\frac{e}{1} \in S^{-1}(I + Hx)$$

olsun. Özellik $(\star)$ gereği,

$$e \in (I + Hx)$$

olduğu sonucuna ulaşılır, ancak bu durum bir çelişki oluşturur. Böylece,

$$\frac{e}{1} \in S^{-1}H \setminus S^{-1}(I + Hx)$$

olduğu sonucu elde edilir. Öte yandan,

$$\frac{e}{1} \cdot \frac{x}{1} \in S^{-1}I$$

olup, dolayısıyla $S^{-1}I$, $S^{-1}H$ de bir A-asal idealdir.

$(\Leftarrow)$: $x, y \notin I$ olmak üzere $xy \in I$ olsun. Bu durumda, $\frac{x}{1}, \frac{y}{1} \notin S^{-1}I$ ve

$$\frac{x}{1} \cdot \frac{y}{1} \in S^{-1}I$$

olur. O zaman,

$$\frac{t}{s} \cdot \frac{x}{1} \in S^{-1}I$$

olacak şekilde bir

$$\frac{t}{s} \in S^{-1}H \setminus (S^{-1}I + S^{-1}Hx)$$

vardır. Bu da, bazı $c \in S$ için $ct \in I$ olduğu anlamına gelir. Eğer

$$ct \in (I + Hx)$$

ise, o zaman

$$\frac{ct}{s} \in S^{-1}I + S^{-1}Hx \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{s} \in S^{-1}I + S^{-1}Hx,$$

bu durum bir çelişkidir. Dolayısıyla,

$$ct \in H \setminus (I + Hx)$$

olduğu sonucuna varılır. Sonuç olarak, I, H nin bir A-asal idealidir.

□

Teorem 4.13. *H bir Dedekind bölgesi olsun ve I, $(\star)$ özelliğini sağlayan H nin bir A-asal ideali olsun. $I = P_1^{n_1} \cdots P_n^{n_n}$ olacak şekilde P_i asal idealleri ve n_i tek sayıları vardır.*

İspat H bir Dedekind bölgesi ve I bir A-asal ideal olsun. O zaman H Noetherian'dır ve bu yüzden I nın asalımsı ayrışmı vardır. $P \subset H$ asal ideal için $Q \subset H$ bir P-asalımsı ideal olduğu varsayılsın, yani $\sqrt{Q} = P$. $S = H \setminus P$ olsun ve bu durumda lokalizasyon $S^{-1}H$ TİB olur.

$I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots Q_n$ olacak şekilde Q_i, P_i-asalımsı idealler vardır.

Asalımsı ayrıştırmada herhangi bir asalımsı ideal T için, Q hariç, $T \cap S \neq \varnothing$ olduğundan $S^{-1}T = S^{-1}R$ elde edilir. Buradan

$$S^{-1}I = S^{-1}Q$$

sonucu elde edilir. Böylece teoreme göre, $S^{-1}I = S^{-1}Q$ olur ve $(\star)$ özelliğinden dolayı bu idealin $S^{-1}H$ de A-asal olduğu elde edilir.

H Dedekind bölgesi olduğundan $Q = P^n$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}$ vardır.

O hâlde,

$$S^{-1}I = S^{-1}Q = S^{-1}P^n = (S^{-1}P)^n$$

elde edilir.

Önerme 4.4.'ten dolayı n tek sayı olmak zorundadır.

□

Önerme 4.14. *Eğer H değerleme (valution) halkası ve A-bölge ise, sıfır böleni nilpotent bir elemandır ve nilpotentlik derecesi 2'dir.*

İspat $x, y \in H$ elemanları verilsin ve $xy = 0$. H A-bölge olduğundan $cx = 0$ olacak şekilde bir $c \in H \setminus (Hx)$ vardır. Şimdi, H valution halka olduğundan, iki durum söz konusudur.

Birinci durum: $\mathrm{Ann}(x) \subseteq Hx$.

Ancak bu durum, c nin seçimiyle çelişir. Dolayısıyla bu durum mümkün değildir.

İkinci durum: $Hx \subseteq \mathrm{Ann}(x)$.

Bu durumda, her $r \in H$ için $rx \in \mathrm{Ann}(x)$; yani $(rx)x = rx^2 = 0$. Bu da $x^2 = 0$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla x nilpotent bir elemandır.

□

4.1.1. A-yarıasal idealler

Tanım 4.15. *H bir halka ve Q, H halkasının bir ideali olsun. Her $x \in H$ için, $x^n \in Q$ olması durumunda $tx \in Q$ olacak şekilde bir $t \in H \setminus (Q + Hx)$ elemanı varsa Q idealine A-yarıasal ideal denir.*

Önerme 4.16. *Her A-asal ideal A-yarıasal idealdir.*

İspat Q bir A-asal ideal olsun. $x^2 \in Q$ olduğu varsayılsın. Bu durumda $x \cdot x = x^2 \in Q$ olur. Q, H halkasında A-asal olduğundan $tx \in Q$ olacak şekilde $t \in H/(Q + Hx)$ bir eleman vardır. Bu da A-yarı asal koşulunu sağlar. Dolayısıyla, Q A-yarıasal idealidir.

□

4.1.2. A-radikal

Tanım 4.17. *I, H nin bir ideali olsun. I nın A*-radikali*,*

$$\text{A-}\mathrm{Rad}(I) := \bigcap_{\substack{I \subseteq \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}\ \text{A-asal}}} \mathfrak{a}$$

şeklinde tanımlanır.

Her asal ideal A-asal olduğundan, A-$\mathrm{Rad}(I) \subseteq \mathrm{Rad}(I)$ kolayca görülür.

Teorem 4.18. *H bir birimli değişmeli halka ve I, J, H halkanın idealleri olsun. O zaman idealin A-radikali aşağıdaki özelliklere sahiptir:*

(1) $I \subseteq \text{A-}\mathrm{Rad}(I)$

(2) $\text{A-Rad}(\text{A-Rad}(I)) = \text{A-Rad}(I)$

(3) $I \subseteq J \Rightarrow \text{A-Rad}(I) \subseteq \text{A-Rad}(J)$

(4) $\text{A-Rad}(I \cap J) \subseteq \text{A-Rad}(I) \cap \text{A-Rad}(J)$

(5) $\text{A-Rad}(IJ) \subseteq \text{A-Rad}(I \cap J)$

(6) $\text{A-Rad}(I + J) \subseteq \text{A-Rad}(\text{A-Rad}(I) + \text{A-Rad}(J))$

(7) $\text{A-Rad}(0) \subseteq \text{Nil}(H)$ *eğer A-asal idealler varsa.*

İspat (1), (3), (5), (6) ve (7), özellikleri A-radikal tanımlarından doğrudan elde edilmiştir.

(2)

$$\Omega = \{P \leq H : I \subseteq P,\ P \text{ A-asal ideal}\}$$

ve

$$\Gamma = \{q \leq H : \text{A-Rad}(I) \subseteq q,\ q \text{ A-asal ideal}\}$$

verilen iki küme olsun.

$I \subseteq \text{A-Rad}(I)$ olduğundan, $\Gamma \subseteq \Omega$ elde edilir.

$P \in \Omega$ olsun. O zaman $I \subseteq P$ ve P bir A-asal idealdir. Dolayısıyla, $\text{A-Rad}(I) \subseteq P$, bu da $P \in \Gamma$ olduğu anlamına gelir. Bu nedenle, $\Gamma = \Omega$ olduğu sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla $\text{A-Rad}(\text{A-Rad}(I)) = \text{A-Rad}(I)$.

(4) Bilindiği üzere $I \cap J \subseteq I \subseteq \text{A-Rad}(I)$ ilişkisi geçerlidir. Bu nedenle,

$$\text{A-Rad}(I \cap J) \subseteq \text{A-Rad}(\text{A-Rad}(I)) = \text{A-Rad}(I)$$

sonucu elde edilir.

$\square$

4.2. A-asal Alt Modüller

Asal alt modül kavramı, modül teorisi içinde temel bir öneme sahiptir ve çeşitli modül sınıflarını tanımlamada kullanılmaktadır. Bu konu üzerinde yıllar içinde birçok araştırma ve genelleme yapılmıştır. Bu bölümde asal alt modüllerin yeni bir genellemesi olarak A-asal alt modüller tanıtılacaktır.

Tanım 4.19. *H bir halka, M bir H-modül ve N, M nin bir öz alt modülü olsun. Her $r \in H$ ve $m \in M$ için, $rm \in N$ olması $m \in N$ veya $0 \neq tr \in (N : M)$ olacak şekilde bir $t \in H \setminus ((N : M) + Hr)$ elemanı varsa N ye A-asal alt modül denir.*

Önerme 4.20. *Her asal alt modül bir A-asal alt modüldür.*

İspat N asal bir alt modül olsun. $r \in H$ ve $m \in M$ için $rm \in H$ olduğu kabul edilsin. N asal bir alt modül olduğundan, aşağıdaki iki durumdan biri geçerlidir:

Birinci durum: $m \in N$ ise, bu durum N nin A-asal alt modül olmasının koşullarından birini sağlar.

İkinci durum: $r \in (N : M)$ ise, $0 \neq tr \in (N : M)$ olacak şekilde $t \in H \setminus ((N : M) + Hr)$ bulunması gerekir. $r \in (N : M)$ olduğuna göre, burada $t = 1$ seçililr.
Bu durumda şu elde edilir:

$$tr = 1 \cdot r = r \in (N : M).$$

Bundan $(N : M) = H$ sonucu elde edilir, bu da $N = M$ anlamına gelir.

Bu nedenle istenilen t bulunmuş olur. Dolayısıyla, N bir A-asal alt modüldür.

□

Örnek 4.21. *$H = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ bir $\mathbb{Z}-$modül ve $N = (2, 4)\mathbb{Z}$ olsun. O zaman N, asal bir alt modül değildir ve A-asal bir alt modül de değildir.*

İspat *İlk olarak, N, M nin asal alt modülü olmadığı gösterilir.*
Verilen modül:

$$N = (2, 4)\mathbb{Z} = \{k(2, 4) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{(2k, 4k) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Burada $rm \in N$ olacak şekilde $r \in H$ ve $m = (1, 2) \in M$ elemanlar alınır. $\mathbb{Z}$ olduğundan dolayı, özellikle $r = 1$ alınabilir.

Bu durumda

$$rm = 1(1,2) \notin N = (2,4)\mathbb{Z}$$

elde edilir. Ancak $(1,2) \in N$ *olmaz, çünkü öyle bir* $k \in \mathbb{Z}$ *bulunmaz. Dolayısıyla,* $rm \notin N$, $r = 1 \notin (N : M)$ *ve* $m = (1,2) \notin N$.

Bu nedenle, tanım gereği N, M *nin asal bir alt modülü olamaz.*

Şimdi N, M *nin A-asal alt modülü olmadığı gösterilir.*

$(2,4) = 2(1,2) \in N = (2,4)\mathbb{Z}$ *olsun. Burada* $r = 2 \in H$ *ve* $m = (1,2) \in M$ *olacak şekilde elemanlar alınır. Bu durumda*

$$rm \in N = (2,4)\mathbb{Z}$$

olduğu görülür. Ancak $(2,4)$ *sıfir elemanı olmaz. Dolayısıyla* $rM \subseteq N$ *koşulunu sağlayan hiçbir sıfırdan farklı tamsayı bulunmaz.*

Bu nedenle

$$(N : M) = \{0\}$$

olduğu sonucuna varılır.

Şimdi A-asal alt modül koşullarını kontrol etmek gerekir. $m \in N$ *olması gerektiği varsayılır, ancak* $(1,2) \notin N = (2,4)\mathbb{Z}$ *çünkü herhangi bir* $k \in \mathbb{Z}$ *için* $k(2,4)$ *şeklinde yazılamaz.*

Şimdi öyle bir $t \in \mathbb{Z} \setminus ((N : M) + 2\mathbb{Z})$ *bulunur mu diye kontrol edilir ki*

$$t2 \in (N : M)$$

şartı sağlansın.

Bilindiği üzere:

$$(N : M) + 2\mathbb{Z} = \{0\} + 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$$

olur. Eğer N *A-asal olsaydı,* $t \cdot 2 \in \{0\}$ *olacak şekilde* $t \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ *olması gerekirdi. Bu ise bir çelişkidir. Bu nedenle* N, M *nin* A*-asal bir alt modülü değildir.*

□

Örnek 4.22. $H = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *bir* $\mathbb{Z}$*-modülü ve* $N = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$ *olsun. O zaman* N *bir asal alt modül değildir ancak A-asal bir alt modüldür.*

İspat *Öncelikle* N, M *nin asal alt modülü olmadığı gösterilir.* $rm \in N$ *olacak şekilde* $r = a \in H$ *ve* $m = (1, b) \in M$ *elemanlar alınır. Böylece*

$$rm = a(1, b) = (a, ab) \in N$$

olur. Ancak $(1, b) \notin N = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$. *Dolayısıyla* $r = a \notin (N : M) =$ *ekok*$(a, b)\mathbb{Z} = ab\mathbb{Z}$. *Sonuç olarak,* N, M *nin asal alt modülü değildir.*

Şimdi N, M *nin A-asal alt modülü olduğunu göstereceğiz.* $(x, y) \in M \setminus N$ *olsun, öyle ki* $a \nmid x$ *ve* $b \nmid y$. *Ayrıca* $r \in H$ *olsun.*

Bu durumda:

$$r(x, y) \in N = (rx, ry) \in a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$$

olur.

Dolayısıyla:

$$a \mid rx \quad \text{ve} \quad b \mid ry$$

olduğu görülür.

Burada iki durum ele alınır:

Birinci durum: $a \mid r$ *ve* $b \mid r$

Bu durumda $ab \mid r$ *olur, dolayısıyla*

$$r \in (N : M) = ab\mathbb{Z}$$

olur. Bu da, A-asal alt modül olması için gereken şartı sağlar.

İkinci durum: $a \mid r$ *ama* $b \nmid r$

Şimdi tersini varsayalım:

$$b \in (N : M) + Hr$$

olsun.

O hâlde:

$$b \in ab\mathbb{Z} + Hr \subseteq ab\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$$

elde edilir.

Bu da şunu gösterir:

$$b \in a\mathbb{Z}.$$

Yani b, a nın katı olur. Fakat bu bir çelişkidir, çünkü b bir asal sayı olarak a ya bölünmez. Dolayısıyla, $b \in H \setminus ((N : M) + Hr)$ ve $br \in ab\mathbb{Z}$ olur. Benzer şekilde, eğer $a \nmid r$ ve $b \mid r$ ise, bir çelişkiye ulaşılır. Bu nedenle, tüm durumlarda, N, M nin A-asal alt modülüdür.

□

Teorem 4.23. *M_1, M_2 H-modül ve $f : M_1 \to M_2$ örten homomorfizması olsun.*

(i) N_1, M_1 nin bir A-asal alt modül ve $Ker(f) \leq N_1$ ise $f(N_1)$, M_2 nin bir A-asal alt modüldür.

(ii) N_2, M_2 nin bir A-asal alt modül ise $f^{-1}(N_2)$, M_1 nin bir A-asal alt modüldür.

İspat

(i) $N_2 = f(N_1)$ olsun. $r \in H$ ve $m_2 \in M_2$ olmak üzere, $rm_2 \in N_2$ olduğu varsayılsın. f örten olduğundan, $f(n_1) = rm_2$ olacak şekilde $n_1 \in N_1$ vardır.

Buradan,

$$rm_1 - a \in \ker(f)$$

elde edilir. Böylece $\ker(f) \leq N_1$ olduğunda $rm_1 \in N_1$ olduğu bulunur.

N_1 A-asal bir alt modül olduğundan, aşağıdaki iki durumdan biri geçerlidir:

i) Eğer $m_1 \in N_1$ ise, $f(m_1) \in f(N_1) = N_2$ olur. Böylece, $m_2 = f(m_1) \in N_2$ olacak şekilde bir $m_2 \in N_2$ bulunur.

ii) Eğer $tr \in (N_1 : M_1)$ ise, her $m_1 \in M_1$ için $trm_1 \in N_1$ olur.
f homomorfizma olduğundan,

$$f(trm_1) = trf(m_1) = trm_2 \in f(N_1) = N_2$$

elde edilir. $N_2 = f(N_1)$ olduğundan $(N_2 : M_2) \subseteq (N_1 : M_1)$ sonucu çıkar.
Bu durumda,

$$t \in H \setminus ((N_1 : M_1) + Hr)$$

olduğundan $t \in H \setminus ((N_2 : M_2) + Hr)$ olur.

Sonuç olarak, $f(N_1)$ modülü M_2 nin bir A-asal alt modülüdür.

(ii) $N_1 = f^{-1}(N_2)$ olsun. $r \in H$ ve $m_1 \in M_1$ olmak üzere, $rm_1 \in N_1 = f^{-1}(N_2)$ olduğu varsayılsın.

Bilindiği üzere: $f(rm_1) = rf(m_1) \in N_2$.
f bir homomorfizma olduğundan,

$$f(rm_1) = rf(m_1) \in N_2.$$

dir.
N_2 A-asal bir alt modül olduğundan, aşağıdaki iki durumdan biri geçerlidir:

i) Eğer $f(m_1) \in N_2$ ise, o zaman $m_1 \in f^{-1}(N_2) = N_1$ olur.

ii) Eğer $t \in H \setminus ((N_2 : M_2) + Hr)$ ve $tr \in (N_2 : M_2)$ ise, her $m_2 \in M_2$ için $trm_2 \in N_2$ olur. Bu durumda,

$$trf(m_1) \in N_2$$

elde edilir.

$tr \in (N_1 : M_1)$ olduğu gösterilmesi gerekir. Çünkü $tr \in (N_2 : M_2)$ olduğu için, her $m_1 \in M_1$ için $trf(m_1) \in N_2$ olduğu görülür.
f homomorfizma olduğundan ve $f(m_1) \in M_2$ olduğu için,

$$trf(m_1) \in N_2$$

olur. Bundan dolayı, $tr \in (N_1 : M_1)$ olduğu gösterilir. Sonuç olarak, öyle bir $t \in H \setminus ((N_1 : M_1) + Hr$ bulunur ki, $tr \in (N_1 : M_1)$ sağlanır. Bu nedenle, $f^{-1}(N_2)$, M_2 nin A-asal bir alt modülüdür.

□

Teorem 4.24. *H bir halka, M nin H-modül ve N, M nin bir asal alt modülü olsun. N, M nin bir A-asal alt modülü ise $(N : M)$, H nin bir A-asal idealidir.*

İspat

$ry \in (N : M)$ olsun. $y \notin (N : M)$ olduğundan, M de bir $m \in M$ vardır ve $ym \notin N$ olur. Bu durumda $r(ym) \in N$ olur. N bir A-asal alt modül olduğundan, bir $t \in H \setminus ((N : M) + Hr)$ vardır ve $tr \in (N : M)$ olur. Sonuç olarak, $(N : M)$ bir A-asal idealdir.

□

Teorem 4.25. *H bir halka, M nin H-modül ve N, M nin bir asal alt modülü olsun. $(N : M)$, H nin bir maximal ideal ise N, M nin bir A-asal alt modüldür.*

İspat

Her maksimal idealin aynı zamanda bir asal ideal olduğu bilindiğinden, $(N : M)$ idealinin asal olduğu sonucuna varılır.

Şimdi, $r \in H$ ve $m \in M$ olmak üzere $rm \in N$ olsun. Eğer $m \in N$ ise ispat tamamlanmış olur. Şimdi $m \notin N$ olduğu varsayılsın. $(N : M) \subseteq (N : m) \subseteq H$ olduğuna göre, $(N : M)$ maksimal bir ideal olduğundan yalnızca iki olasılık vardır: ya $(N : M) = H$ ya da $(N : M) = (N : m)$.

Eğer $(N : M) = H$ ise, bu durumda $1 \in (N : M)$ olur; bu da tanım gereği $m \in N$ anlamına gelir ki bu, varsayımla çelişir.

Öte yandan, eğer $(N : M) = (N : m)$ ise, o hâlde $r \in (N : M)$ olur ve ayrıca $(N : M) + Hr = (N : M)$ eşitliği sağlanır. Bu durumda $1 \in H \setminus (N : M)$ olur. Ancak $1 \cdot r \in (N : M)$. Sonuç olarak, N bir A-asal alt modüldür.

□

Teorem 4.26. *H bir tamlık bölgesi, M bir H-modül ve N, M nin asal bir alt modülü olsun. O hâlde N nin bir A-asal alt modül olması için gerek ve yeter koşul, her $m \in M \setminus N$ için*

$$(N : M) \triangleleft (N : m)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır; yani $(N : m) \subseteq H$ ve her $r \in (N : m)$ için $0 \neq t \in H$ öyle ki $tr \in (N : M)$.

İspat ($\Rightarrow$): N A-asal alt modül olsun. $m \in M \setminus N$ ve $r \in (N : m)$ alınsın, yani $rm \in N$. A-asallık tanımına göre, $m \notin N$ olduğundan, $0 \neq t \in H$ öyle ki $tr \in (N : M)$. Bu da tanıma göre $(N : M) \triangleleft (N : m)$ anlamına gelir.

($\Leftarrow$): Her $m \in M \setminus N$ için $(N : M) \lhd (N : m)$ varsayalım. $rm \in N$ ve $m \notin N$ ise, $r \in (N : m)$ olur. Tanım gereği $0 \neq t \in H$ öyle ki $tr \in (N : M)$, yani $trm \in N$. Bu da N nin A-asal olduğunu gösterir.

$\square$

5. SONUÇLAR

Bu tezde, asal alt modül kavramının genelleştirilmesi üzerinde kapsamlı bir inceleme yapılmıştır. Asal modüller ve asal idealler, cebir teorisinin temel kavramları olarak halkaların yapısal analizlerinde ve modül teorisindeki derinlemesine çalışmalarda kritik bir rol oynamaktadır. Tezin başlangıcında, asal alt modüllerin modül teorisindeki önemi vurgulanmış ve bu kavramın tarihsel gelişimi ele alınmıştır. Ayrıca, asal ideallerin halkalar üzerindeki etkisi ve bu yapıların modül teorisine nasıl adapte olduğu üzerine yapılan önceki çalışmalar incelenmiştir.

Çalışmanın birinci bölümünde, asal alt modüllerin temel özellikleri detaylı olarak açıklanmış ve literatürdeki önemli katkılar değerlendirilmiştir. Bu bağlamda, asal alt modüllerin doğrusal bağımlılık, sadıklık ve benzeri modül özellikleriyle nasıl ilişkilendiği tartışılmıştır. Asal alt modüllerin, halkalar ve modüller arasındaki soyut ilişkilerin daha iyi anlaşılmasını sağlamak için nasıl bir temel oluşturduğu ele alınmıştır. Ayrıca, asal alt modüllerin modül teorisinin diğer kavramlarıyla olan etkileşimi de gözler önüne serilmiştir.

İkinci bölümde, asal alt modüllerin çeşitli genelleştirilmiş formları üzerinde durulmuş ve bu genelleştirmelerin modül teorisindeki yerleri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu genelleştirmelerin, özellikle modüllerin yapısal analizinde nasıl daha güçlü araçlar sunduğu ve hangi yeni özelliklerin ortaya çıktığı üzerinde durulmuştur. Bu aşamada, asal alt modüllerin geleneksel tanımlarının ötesinde, yeni kuramsal yapılar ve ilişkiler önerilmiş, bu yapılar üzerinde yapılan teorik analizlerle modül teorisinin daha geniş bir perspektife taşınması hedeflenmiştir.

Özellikle bu tezde tanıtılan *A-asal* alt modül kavramı, modül teorisine önemli bir yenilik katmaktadır. *A-asal* alt modüllerin teorik özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiş ve bu yapının modüller arasındaki sadıklık, yapısal ilişkiler ve homomorfizmalar ile olan bağlantıları ortaya konmuştur. *A-asal* alt modüller, geleneksel asal alt modül kavramını genelleyerek modül teorisinde daha geniş bir inceleme alanı açmaktadır. Bu genelleme, modüllerin daha karmaşık yapılarının analizine olanak sağlamaktadır.

Bu tez, asal alt modüllerin daha geniş bir teorik çerçevede anlaşılmasına katkı sağlamış ve modül teorisinin gelişimine yeni bir perspektif getirmiştir. Çalışma, asal alt modüllerin modül teorisindeki rolünü derinlemesine ele alarak, bu yapıların daha önceden keşfedilmemiş özelliklerini ortaya koymayı başarmıştır. Ayrıca, bu tezde yapılan teorik genellemeler ve tanımlamalar, modül teorisinin klasik yaklaşımlarının ötesine geçilmesine olanak tanımaktadır. Özellikle, *A-asal* alt modülün modül yapılarındaki yeri ve önemi, modül teorisinin temel kavramlarının daha da derinlemesine anlaşılmasına olanak tanımaktadır.

Sonuç olarak, bu tezde ortaya konan bulgular, asal alt modüllerin sadece modül teorisi değil, aynı zamanda cebirsel yapıların ve matematiksel analizlerin daha geniş bir bağlamda ele alınmasını sağlayan önemli bir katkıdır. Yapılan bu teorik incelemeler, modül teorisinin gelecekteki araştırmalarına ışık tutacak ve yeni yapısal analizlerin geliştirilmesine olanak sağlayacaktır. Ayrıca, bu çalışmanın bulguları, özellikle asal alt modüller ve genellemeleri ile ilgili yapılan sonraki araştırmalarda kullanılabilecek yeni teorik araçlar sunmaktadır.

Tezin sonunda elde edilen sonuçlar, modül teorisindeki çalışmaların daha kapsamlı bir şekilde ele alınmasına olanak tanırken, asal alt modüllerin genelleştirilmiş formlarının modül teorisindeki rolü, bu alanda yapılacak ileri düzey araştırmalar için önemli bir temel teşkil etmektedir. Bu bağlamda, asal alt modüllerin farklı genellemelerinin daha derinlemesine analiz edilmesi, modül teorisinin geleceğinde önemli bir yer tutacak ve cebirsel yapıların daha verimli bir şekilde anlaşılmasını sağlayacaktır. Bu araştırmalar, matematiksel yapılar ve cebirsel sistemler üzerine yapılacak diğer çalışmalara katkı sağlayacak önemli sonuçlar doğuracaktır.

6. KAYNAKLAR

Azizi, A. 2006. Weakly prime submodules and prime submodules. *Glasgow Mathematical Journal*, 48(2): 343–346.

Atiyah, M.F. and Macdonald, I.G. 1969. Introduction to Commutative Algebra. 1. Baskı, CRC Press, Boca Raton, 104 s.

Beachy, J. A. and Medina-Bárcenas, R. 2020. Fully prime modules and fully semiprime modules. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 57(5), 1177–1193.

Behboodi, M., Karamzadeh, O. A. and Koohy, H. 2004. Modules whose certain submodules are prime. *Vietnam Journal of Mathematics*, 32(3), 303–317.

Behboodi, M. and Koohy, H. 2004. Weakly prime modules. *Vietnam Journal of Mathematics*, 32(2), 185–195.

Çallıalp, F. and Tekir, Ü. 2009. Değişmeli Halkalar ve Modüller. 1. Baskı, Birsen Yayınevi, İstanbul, 278 s.

Naghipour, A. R. 2009. Strongly prime submodules. *Communications in Algebra*, 37(7), 2193–2199.

Rowen, L.H. 1988. Ring Theory I. 1. Baskı, Academic Press, San Diego, 531 s.

Sevim, E. Ş., Arabacı, T., Tekir, Ü., and Koç, S. 2019. On S-prime submodules. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(2), 1036–1046.

Watkins, J.J. 2007. Topics in Commutative Ring Theory. 1. Baskı, Princeton University Press, Princeton, 214 s.

Zamani, N. 2010. ϕ-prime submodules. *Glasgow Mathematical Journal*, 52(2), 253–259.

ÖZGEÇMİŞ

Nejma UGLJANIN

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2022–2025	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2017–2021	State University of Novi Pazar Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Sırbistan