



**AHLAK
BİLGİ
ÜRETİM**

**T.C.
MARDİN ARTUKLU ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ZAMAN ÖLÇEKLERİ HESABINDA ÇEŞİTLİ
FONKSİYONLAR İÇİN TERS MINKOWSKI
EŞİTSİZLİĞİNİN YENİ GENELLEŞTİRMELERİ**

Hilal ORHAN

Mardin 2025

T.C.
MARDİN ARTUKLU ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK BÖLÜMÜ ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**ZAMAN ÖLÇEKLERİ HESABINDA ÇEŞİTLİ
FONKSİYONLAR İÇİN TERS MINKOWSKI
EŞİTSİZLİĞİNİN YENİ GENELLEŞTİRMELERİ**

HİLAL ORHAN

TEZ DANIŞMANI

Doç. Dr. Lütü AKIN

Mardin 2025

T.C.
MARDİN ARTUKLU ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüz Matematik Anabilim Dalı 23922005 numaralı öğrencisi Hilal ORHAN'ın hazırladığı “Zaman Ölçekleri Hesabında Çeşitli Fonksiyonlar için Ters Minkowski Eşitsizliğinin Yeni Genelleştirmeleri” başlıklı çalışma, 10/07/2025 tarihinde yapılan tez savunma sınavında oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunarak jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri	Unvanı Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Prof. Dr. Yusuf ZEREN	
Üye	Doç. Dr. Lütfi AKIN	
Üye	Doç. Dr. Faruk DÜŞÜNCELİ	
Üye		
Üye		

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun .../.../2025 tarih ve .../... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

.../.../2025

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Mardin Artuklu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgileri etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tez çalışmasının hazırlık, bilgi, belge, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun davrandığımı,
- Tez çalışmada kullanılan tüm eserlere eksiksiz atıf yaptığımı ve kullanılan tüm eserlere kaynaklar/kaynakçada yer verdiğimi,
- Tez çalışmasının özgün olduğunu,
- Tez çalışmasının Mardin Artuklu Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı” ile tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabullendiğimi bildiririm.

İmza

Hilal ORHAN

10/07/2025

ÖZET

MATEMATİK BÖLÜMÜ ANABİLİM DALI

ZAMAN ÖLÇEKLERİ HESABINDA ÇEŞİTLİ FONKSİYONLAR İÇİN TERS MINKOWSKI EŞİTSİZLİĞİNİN YENİ GENELLEŞTİRMELERİ

Hilal ORHAN

Bu tez çalışmasında, zaman skalası teorisi kapsamında ters Minkowski eşitsizliği incelenmiş ve bu eşitsizliğin diamond alfa türevi aracılığıyla daha genel bir biçimde ifade edilmesi amaçlanmıştır. Çalışmanın ilk bölümünde zaman skalası teorisinin temel kavramları ele alınmış; delta ve nabla türevleri ayrıntılı bir şekilde tanımlanmış, bu türevlerin temel özellikleri örneklerle birlikte açıklanmıştır. Diamond alfa türevi, delta ve nabla türevlerinin birleşimi şeklinde tanımlanarak, sürekli ve ayrık zaman sistemlerinin analizine aynı anda olanak tanıyan bütüncül bir yaklaşım sunmuştur. Bu türev yapısının kullanılmasıyla birlikte, klasik analizde önemli bir yer tutan Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri zaman skalaları üzerinde yeniden yapılandırılmış ve bu eşitsizliklerin daha genel versiyonları elde edilmiştir. Özellikle Benaissa tarafından geliştirilen ters Minkowski eşitsizliğinin zaman skalası ortamında diamond alfa türevine dayalı yeni biçimleri başarıyla türetilmiş ve ispatlanmıştır. Elde edilen sonuçlar, literatürdeki mevcut teorilere katkı sunarken aynı zamanda zaman skalası analizinin kapsayıcılığını ve uygulama alanlarını genişletmiştir. Bu tez, farklı zaman yapılarında çalışan araştırmacılar için yeni bakış açıları sunmakta ve matematiksel analizde önemli bir boşluğu doldurmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Zaman Skalası, Diamond Alfa Türevi, Ters Minkowski Eşitsizliği, Hölder Eşitsizliği, Nabla Türevi.

ABSTRACT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

NEW GENERALIZATIONS OF THE REVERSE MINKOWSKI INEQUALITY FOR VARIOUS FUNCTIONS IN TIME SCALE CALCULUS

Hilal ORHAN

In this thesis, the reverse Minkowski inequality is examined within the scope of time scale theory, and it is aimed to generalize this inequality by means of the diamond-alpha derivative. In the initial part of the study, the fundamental concepts of time scale theory are discussed; delta and nabla derivatives are defined in detail, and their basic mathematical properties are explained with illustrative examples. The diamond-alpha derivative is formulated as a combination of the delta and nabla derivatives, offering a unified approach that simultaneously facilitates the analysis of both continuous and discrete dynamic systems. Utilizing this derivative structure, the classical Hölder and Minkowski inequalities, which play a significant role in classical analysis, are reconstructed on time scales, and more generalized versions of these inequalities are obtained. In particular, new forms of the reverse Minkowski inequality, originally developed by Benaissa, are successfully derived and proven within the framework of the diamond-alpha derivative on time scales. The findings contribute to existing theories in the literature and further expand the scope and applicability of time scale analysis. This thesis offers new perspectives for researchers working with diverse time domains and fills an important gap in the field of mathematical analysis.

Keywords: Time Scale, Diamond Alpha Derivative, Reverse Minkowski Inequality, Hölder Inequality, Nabla Derivative.

ÖN SÖZ

Bu çalışma, zaman skalası teorisi bağlamında ters Minkowski eşitsizliğinin diamond alfa türevi ile nasıl genelleştirilebileceğini incelemek amacıyla hazırlanmıştır. Zaman skalası teorisi, sürekli ve ayrık dinamik sistemleri ortak bir çerçevede ele alarak matematiksel analizde geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Bu doğrultuda, çalışmamızda ilgili temel kavramlar ele alınmış, çeşitli türev ve integral yaklaşımları detaylandırılmış ve yeni matematiksel eşitsizlikler elde edilmiştir.

Tez çalışmam süresince bana rehberlik eden, değerli bilgi ve önerileriyle çalışmama katkıda bulunan Doç. Dr. Lütfi AKIN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmanın, matematiksel analiz alanında çalışan araştırmacılara ve ilgililere faydalı olmasını temenni ederim.

Mardin; Temmuz, 2025

Hilal Orhan

İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN.....	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	ix
GİRİŞ	1
BİRİNCİ BÖLÜM.....	3
ZAMAN SKALASINDA TEMEL TANIM VE ÖZELLİKLER.....	3
1.1.Zaman Skalasında Temel İlkeler	3
1.2. Zaman Skalasında Türev	6
1.3. Zaman Skalasında İntegral	20
İKİNCİ BÖLÜM.....	29
ZAMAN SKALASINDA BAZI DİNAMİK EŞİTSİZLİKLER.....	29
2.1. Hölder ve Minkowski Eşitsizlikleri	29
2.2 Bazı Dinamik Eşitsizliklerin Diamond Alfa Hesabında Genellemeleri	32
2.2.1. Hölder eşitsizliği:	32
2.2.2. Cauchy-Schwarz eşitsizliği:	33
2.2.3. Minkowski eşitsizliği:	33
2.2.4. Jensen eşitsizliği:.....	34
2.2.6. (AM-GM):.....	35
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM	36
TEORİK BULGULAR VE UYGULAMALAR.....	36
DÖRDÜNCÜ BÖLÜM.....	52
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	52
KAYNAKÇA	53
ÖZGEÇMİŞ.....	56

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1:	Zaman Noktalarının Sınıflandırılması	3
Tablo 2:	Farklı Zaman Skalalarında Operatör Değerleri	5
Tablo 3:	Bazı Özel Fonksiyonların Delta ve Nabla Türevleri	15
Tablo 4:	Zaman Skalalarında Türevin Türüne Göre Değişimi	17

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

Bu tez çalışmasında kullanılan semboller ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıdaki gibi belirtilmiştir.

Semboller

$\mathbb{T}$	: Zaman skalası
$\sigma(t)$	: İleri fark operatörü
$\rho(t)$	: Geri fark operatörü
f^Δ	: Delta (Hilger) türev
f^∇	: Nabla türev
$f^{\diamond_\alpha}$	: Diamond alfa türev
C_{ld}	: left-dence (sol yoğun) sürekli
C_{rd}	: Right-dence (sağ yoğun) sürekli
$\int F(t)\Delta t$	: Delta integral
$\int F(t)\nabla t$	: Nabla integral
$\int F(t) \diamond_\alpha t$	: Diamond alfa integral

Kısaltmalar

AM-GM	: Aritmetik ortalama- Geometrik ortalama
-------	--

GİRİŞ

Zaman skalası teorisi, matematikte hem sürekli hem de ayrık yapıları ortak bir sistemde incelemeye imkân tanıyan oldukça güçlü bir yaklaşımdır. Bu teori, 1988 yılında Stefan Hilger'in doktora teziyle ortaya konmuştur (Hilger, 1988) zamanla birçok alanda önemli uygulamalar bulmuştur. Temel amaç, dinamik sistemleri sadece sürekli veya sadece ayrık olarak değil, genel bir zaman kümesi üzerinde ele alarak inceleyebilmektir. Bu bakış açısı, özellikle diferansiyel ve fark denklemlerinin birlikte değerlendirildiği çalışmalarda büyük avantaj sağlamaktadır.

Zaman skalası üzerinde tanımlanan delta ve nabla türevleri sayesinde, sürekli ve ayrık sistemlerin türevsel analizleri yapılabilmektedir. Ancak bu iki türevi bir arada değerlendiren, daha esnek bir yapı sunan diamond-alfa türevi, zaman skalası analizlerinde son yıllarda öne çıkmıştır. Diamond alfa türevi, delta ve nabla türevlerinin bir kombinasyonudur. Bu türev, $\alpha \in [0,1]$ parametresi ile belirlenir. $\alpha = 1$ olduğunda delta türevi, $\alpha = 0$ olduğunda nabla türevi elde edilir. 0 ile 1 arasında bir α değeri seçildiğinde ise bu iki türevin karışımı olan daha genel bir türev yapısı ortaya çıkar. Bu yönüyle diamond-alfa türevi, hem teorik çalışmalarda hem de uygulamalarda daha geniş bir alanı kapsar (Bohner & Peterson, 2001).

Bu çalışmanın ana konusu, zaman skalası teorisi çerçevesinde ters Minkowski eşitsizliğinin diamond alfa türevi aracılığıyla nasıl genelleştirilebileceğini araştırmaktır. Minkowski eşitsizliği, matematiksel analizde sıkça başvurulmuş güçlü bir araçtır. Bu eşitsizlik, fonksiyonların normları arasındaki ilişkiyi ifade eder. Ancak klasik Minkowski eşitsizliğinin tersine çevrilmiş hali yani ters Minkowski eşitsizliği, literatürde daha az çalışılmış bir konudur. Özellikle zaman skalası teorisi altında, diamond alfa türev kullanılarak bu eşitsizliğin genelleştirilmesiyle ilgili yeterli sayıda çalışma bulunmamaktadır. Bu durum, araştırmanın çıkış noktası olarak belirlenmiştir.

Bougoffa, Sulaiman, Soraysang ve Benaissa, zaman ölçekleri kapsamında bazı ters eşitsizlikler ortaya koymuştur. Zhao ve Cheung (2015, 2020), klasik matematik çerçevesinde ters Minkowski ve ters Hölder eşitsizliklerini yeni şekillerde genişletmiş, bu tür eşitsizliklerin sınırlarını ileriye taşımıştır. Zhou ve Du (2023), aralıklar içinde değer

alan fonksiyonlar üzerinde çalışarak kesirli (fraksiyonel) yöntemiyle ters Minkowski ve Hölder eşitsizliklerinin yeni biçimlerini incelemiştir. Rashid, Akdemir, Nisar, Abdeljawad ve Rahman (2020) ise, geliştirilmiş bir kesir dereceli integral yaklaşımıyla çeşitli ters Minkowski ve benzeri eşitsizlikler üretmiştir. Ancak bu çalışmaların çoğu, klasik türevler, delta türevi veya kesirli integral yöntemleriyle sınırlı kalmıştır. Diamond alfa türevi çerçevesinde yeterince araştırma yapılmamış olması, bu tezin temel çıkış noktasını oluşturmuştur.

Çalışmada öncelikle zaman skalası teorisinin temel kavramları ve yapısı açıklanmıştır. Delta, nabla ve diamond alfa türevlerinin tanımları, özellikleri ve örnekleri detaylı şekilde verilmiştir. Daha sonra klasik eşitsizlikler olan Hölder, Minkowski, Jensen ve AM-GM eşitsizlikleri zaman skalası üzerinde yeniden ele alınmıştır. Bu eşitsizliklerin diamond alfa türevine uygun biçimleri ispatlanmış, ayrıca literatürdeki bazı önemli sonuçların zaman skalası bağlamında nasıl genelleştirilebileceği üzerinde durulmuştur. Elde edilen eşitsizlikler, Young ve Hölder eşitsizlikleri yardımıyla ispatlanmış ve diamond alfa integral yardımıyla örneklerle desteklenmiştir. Sonuç olarak bu çalışmanın amacı, ters Minkowski eşitsizliğini zaman skalası teorisi kapsamında diamond alfa türev kullanarak daha geniş bir çerçevede ele almak ve mevcut literatüre katkı sağlamaktır. Elde edilen teoremler sayesinde klasik eşitsizliklerin hem sürekli hem ayrık sistemler için geçerli olacak şekilde yeniden formüle edilmesi sağlanmıştır.

Bu tez dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde zaman skalası teorisinin temel tanım ve özellikleri verilmiş, ikinci bölümde bazı dinamik eşitsizliklerin zaman skalası üzerindeki biçimleri incelenmiş, üçüncü bölümde yeni bulgular, son bölümde ise genel sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

BİRİNCİ BÖLÜM

ZAMAN SKALASINDA TEMEL TANIM VE ÖZELLİKLER

1.1 Zaman Skalasında Temel İlkeler

1.1.1 Tanım Zaman skalesı $\mathbb{T}$, gerçek sayıların boştan farklı kapalı bir alt kümesi olarak tanımlanır. Kantor kümesi, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $[0,1] \cup \{2,3\}$, kümeleri birer zaman skalesıdır fakat $\emptyset$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $(1,2] \cup (3,4]$ kümeleri birer zaman skalesı değildir (Bohner, 2001).

1.1.2 Tanım $\mathbb{T}$, bir zaman skalesı olsun.

$\forall t \in \mathbb{T}$, için $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$ olarak tanımlanan $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ operatörüne ileri sıçrama operatörü denir.

$\forall t \in \mathbb{T}$, için $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ olarak tanımlanan $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ operatörüne geri sıçrama operatörü denir.

Buradaki tanımda $\sigma(t)$, t' den büyük tüm noktaların alt sınırı (infimum) olarak tanımlanır. Eğer zaman ölçeğinde bir maksimum varsa, o zaman $\sigma(t)$ maksimum değerini alır ($\sigma(t) = t$). $\rho(t)$, t' den küçük tüm noktaların üst sınırı (maksimum) olarak tanımlanır. Eğer zaman ölçeğinde bir minimum varsa, o zaman $\rho(t)$ minimum değerini alır ($\rho(t) = t$) (Bohner, 2001).

Tablo 1 : Zaman Noktalarının Sınıflandırılması

$t < \sigma(t)$	sağ saçılımlı
$\rho(t) < t$	sol saçılımlı
$t = \sigma(t)$	sağ yoğun
$t = \rho(t)$	sol yoğun
$\rho(t) = t = \sigma(t)$	yoğun
$\rho(t) < t < \sigma(t)$	ayrık(izole)

1.1.3 Tanım $\mu: \mathbb{T} \rightarrow (0, \infty)$ olmak üzere $\mu(t) = \sigma(t) - t$ fonksiyonuna ileri taneciklik fonksiyonu denir. $\nu: \mathbb{T} \rightarrow (0, \infty)$ olmak üzere $\nu(t) = t - \rho(t)$ fonksiyonuna geri taneciklik fonksiyonu denir (Bohner & Peterson, 2001, s. 2).

1.1.4 Tanım $\mathbb{T}^\kappa$ ve $\mathbb{T}_\kappa$ bölgesi $\mathbb{T}$ 'den şu şekilde türetilir.

- i. Eğer $\mathbb{T}$ 'nin sol saçılmış ve bir maksimum noktası m varsa o zaman, $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} - m$ dir. Aksi takdirde $\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T}'$ dir.
- ii. Eğer $\mathbb{T}'$ 'nin sağ saçılmış ve bir minimum noktası n varsa o zaman, $\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T} - n$ dir. Aksi takdirde $\mathbb{T}_\kappa = \mathbb{T}'$ dir (Bohner & Peterson, 2001, s. 2).

1.1.5 Örnek $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ kümeleri için σ, ρ, μ, ν fonksiyonlarının değerlerini hesaplayalım (Yeni, 2013, s. 5).

Çözüm:

$\forall t \in \mathbb{T}$ için $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alalım.

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\} = \sup(-\infty, t) = t$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$$

$$\nu(t) = t - \rho(t) = t - t = 0$$

$\forall t \in \mathbb{T}$ için $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alalım.

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\} = \{t + 1, t + 2, \dots\} = t + 1$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\} = \{\dots, t - 2, t - 1\} = t - 1$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t + 1 - t = 1$$

$$\nu(t) = t - \rho(t) = t - (t - 1) = t - t + 1 = 1.$$

1.1.6 Örnek $\mathbb{T} = \{2^n: n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ olarak verilmiş zaman ölçeği için σ, ρ, μ, ν fonksiyonlarının değerlerini bulunuz (Yeni, 2013, s. 6).

Çözüm:

$t \in \{2^n: n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ olsun. $t = 2^n$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\} = \{2^{n+1}, 2^{n+2}, \dots\} = 2^{n+1} = 2^n \cdot 2 = 2t.$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\} = \{\dots, 2^{n-2}, 2^{n-1}\} = 2^{n-1} = \frac{2^n}{2} = \frac{t}{2}.$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = 2t - t = t.$$

$$v(t) = t - \rho(t) = t - \frac{t}{2} = \frac{t}{2}.$$

Tablo 2: Farklı Zaman Skalalarında Operatör Değerleri

Operatörler Zaman skalası	$\sigma(t)$	$\rho(t)$	$\mu(t)$	$v(t)$
$\mathbb{T} = \mathbb{R}$	t	t	0	0
$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$	$t - 1$	$t + 1$	1	1
$\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$	$2t$	$\frac{t}{2}$	t	$\frac{t}{2}$
$\mathbb{T} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$	$\frac{t}{t+1}$	$\frac{t}{1-t}$	$\frac{-t^2}{1+t}$	$\frac{t^2 - 2t}{t-1}$
$\mathbb{T} = \{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}_0\}$	$t + \frac{1}{2}$	$t - \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbb{T} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}_0\}$	$\sqrt{t^2 + 1}$	$\sqrt{t^2 - 1}$	$\sqrt{t^2 + 1} - t$	$t - \sqrt{t^2 - 1}$
$\mathbb{T} = h\mathbb{Z} \ (h > 0)$	$t + h$	$t - h$	h	h
$\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}} \ (q > 1)$	tq	$\frac{t}{q}$	$t(q - 1)$	$t\left(\frac{q-1}{q}\right)$

1.1.7 Örnek $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ birebir ve örten midir? Örten değilse σ' 'nin $\sigma(\mathbb{T})$ aralığını belirleyiniz.

Bu soru, Bohner ve Peterson (2001, s. 45) tarafından verilen bir problemdir ve aşağıda çözümü sunulmaktadır.

Çözüm:

σ birebir bir fonksiyondur. Herhangi bir $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ için eğer $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ ise o zaman $t_1 = t_2$ 'dir. Çünkü her $\sigma(t)$, her t için biricik değere sahiptir. Bu yüzden σ , birebir bir fonksiyondur.

σ , her zaman örten değildir. $\mathbb{T}$ üzerinde bazı noktalar, hiçbir t 'nin ileri sıçraması $\sigma(t)$ olmayabilir. Bir fonksiyonun örten olabilmesi için hedef kümenin ($\mathbb{T}$) her bir elemanının tanım kümesinde bir ($\mathbb{T}$) karşılığı olmalıdır. Yani her $y \in \mathbb{T}$ için $t \in \mathbb{T}$ bulunmalı ve $\sigma(t) = y$ olmalıdır. Ancak, σ fonksiyonu zaman skalasında maksimum bir nokta varsa bu şartı sağlamaz. Örneğin, zaman skalası $\mathbb{T} = \{1,2,3\}$ olarak tanımlansın. $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 3$. Bu durumda, $\sigma(\mathbb{T}) = \{2,3\}$ olur. Görüldüğü gibi $\mathbb{T}$ 'nin tamamı σ ile kapsanmamaktadır. Özellikle $\mathbb{T}$ 'nin 1 elemanı σ tarafından işaretlenememektedir. Bu nedenle σ , $\mathbb{T}$ 'nin tüm elemanlarını kapsayan bir örten fonksiyon değildir.

1.1.8 Tanım $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $f^\sigma = \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f^\sigma = f \circ \sigma$ şeklinde bileşke fonksiyonudur.

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $f^\rho = \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$f^\rho(t) = f(\rho(t))$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f^\rho = f \circ \rho$ şeklinde bileşke fonksiyonudur (Yeni, 2013, s. 7).

1.2 Zaman Skalasında Türev

1.2.1 Tanım $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olacak şekilde bir fonksiyon alalım. $f^\Delta(t)$, $\forall \varepsilon > 0$ için, t 'nin bir komşuluğu $U_\delta((t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T})$ ve $\delta > 0$) bulunduğu durumda şu eşitsizlik sağlanır.

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

Burada $f^\Delta(t)$, f 'nin t noktasındaki **delta türevi (veya Hilger türevi)** olarak adlandırılır (Bayour & Torres, 2019, s. 1187).

1.2.2 Teorem f 'nin bir fonksiyon olduğunu varsayalım ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun. O zaman,

- i. Eğer f, t de delta türevlenebilir ise o zaman f, t de sürekli.
- ii. Eğer f, t de sürekli ve sağa dağılmışsa (yani $\sigma(t) > t$) o zaman f, t de delta türevlenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

iii. Eğer t sağa yoğun ise (yani $\sigma(t) = t$) ve

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

sonlu bir sayı olarak mevcut ise f fonksiyonu t de delta türevlenebilir

iv. f fonksiyonu t 'de delta türevlenebilir ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) - \mu(t)f^{\Delta}(t)$$

ifadeleri sağlanır (Bayour & Torres, 2019, s. 1187).

İspat:

i. Varsayalım ki f , t 'de türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Verilen bir $\varepsilon \in (0,1)$ için, $\varepsilon^* = \varepsilon[1 + |f^{\Delta}(t)| + 2\mu(t)]^{-1}$ olacak şekilde bir ε^* tanımlayalım. Bu tanıma göre $\varepsilon^* \in (0,1)$. Türev tanımı gereği, t çevresinde bir U komşuluğu ($t \in U$) ve bu komşuluk içinde $\forall s \in U$ için bu eşitsizlik sağlanır.

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s|.$$

Bu türev tanımına uygun olarak f' 'nin t civarındaki davranışını tanımlar.

$$s \in U \cap (t - \varepsilon^*, t + \varepsilon^*) \text{ için}$$

$$|f(t) - f(s)|$$

$$= |[f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]] - \{f(\sigma(t)) - f(t) - \mu(t)f^{\Delta}(t)\} + (t - s)f^{\Delta}(t)|$$

$$\leq \varepsilon^* |\sigma(t) - s| + \varepsilon^* \mu(t) + |t - s| |f^{\Delta}(t)|$$

$$\leq \varepsilon^* [\mu(t) + |t - s| + \mu(t) + |f^{\Delta}(t)|]$$

$$< \varepsilon^* [1 + |f^{\Delta}(t)| + 2\mu(t)] = \varepsilon.$$

Buradan f fonksiyonunun t noktasında sürekli olduğu ortaya çıkar.

ii. Varsayalım ki f fonksiyonunun t noktasında sürekli ve t noktasında sağa saçılmış olsun. Süreklilikten dolayı

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{t \rightarrow s} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

Bu nedenle verilen $\varepsilon > 0$ için, t 'nin bir komşuluğu olan U bulunur. $\forall s \in U$ için şu eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \right| \leq \varepsilon$$

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} [\sigma(t) - s] \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

Böylece istenilen sonuca ulaşırız.

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

iii. ($\Rightarrow$)Varsayalım ki

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti sonlu bir L değer olarak var. Bu durumda f , t noktasında delta türevlenebilirdir.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ öyle ki } 0 < |t - s| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - L \right| < \varepsilon.$$

Sağ taraftan yoğunluk durumunda $\sigma(t) = t$ olduğu için delta türev tanımı doğrudan bu limitin varlığına dayalıdır. Dolayısıyla

$$f^\Delta(t) = L,$$

delta türev tanımını sağlar.

($\Leftarrow$) f' 'nin t noktasında delta türevlenebilir olduğunu varsayalım. Şu limitin varlığını göstereyim.

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

Delta türevlenebilirlik, bu limitin varlığını gerektirir. Eğer delta türev tanımı geçerliyse, bu oran t, s 'ye yaklaştıkça sonlu bir değer L 'ye yakınsar. Bu da

$$\exists L \in \mathbb{R} \text{ öyle ki } \lim_{t \rightarrow s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = L.$$

Bunun anlamı, delta türev tanımının sağlandığını ve limitin sonlu bir değer olarak var olduğunu gösterir.

iv. Sürekli f fonksiyonu için delta türev şu şekilde tanımlanır.

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

Bu denklemden $f(\sigma(t))$ değerini bulabiliriz.

$$f(\sigma(t)) - f(t) = \mu(t)f^{\Delta}(t).$$

1.2.3 Örnek $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ fonksiyonu için $t \in \mathbb{T}$ için

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alındığında $\sigma(t) = t$ olmak üzere

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{t \rightarrow s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t).$$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alındığında $\sigma(t) = t + 1$ olmak üzere

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{t \rightarrow s} \frac{f(t+1) - f(s)}{t+1 - s} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t).$$

1.2.4 Örnek $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ fonksiyonu için $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) fonksiyonu için $f^{\Delta}(t)$ değerini hesaplayalım.

Çözüm:

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için $f(t) = f(\sigma(t)) = c$ olur.

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{c - c}{\sigma(t) - t} = 0.$$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $f(\sigma(t)) = f(t+1) = c$ olduğundan $f^{\Delta}(t) = 0$ olduğu görülür.

1.2.5 Örnek $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ fonksiyonu için $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^2$ fonksiyonu için $f^{\Delta}(t)$ değerini hesaplayalım.

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için $\sigma(t) = t$ olduğundan

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{(\sigma(t))^2 - t^2}{\sigma(t) - t} = \sigma(t) + t = 2t.$$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $\sigma(t) = t + 1$ olduğundan

$$f(\sigma(t)) = f(t+1) = (t+1)^2$$

olur.

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{(\sigma(t))^2 - t^2}{\sigma(t) - t} = \frac{(t+1)^2 - t^2}{(t+1) - t} = \frac{2t+1}{1} = 2t+1.$$

1.2.6 Teorem $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında türevlenebilir olsun. bu durumda aşağıdaki kurallar geçerlidir.

i. İki fonksiyonun toplamı, türevlenebilirlik özelliğini korur. Yani $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ t noktasında türevlenebilir olup, türevi şu şekilde verilir.

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t).$$

ii. Herhangi bir sabit $a \in \mathbb{R}$ için af fonksiyonunun türevi, sabitin türev dışına çıkmasıyla elde edilir.

$$(af)^\Delta(t) = af^\Delta(t).$$

iii. İki fonksiyonun çarpımı durumunda, fg fonksiyonu da t 'de türevlenebilir olur ve delta türevi aşağıdaki eşdeğer ifadelerle tanımlanabilir.

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t)$$

ya da alternatif olarak

$$(fg)^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t)).$$

iv. Fonksiyonlardan biri diğerine bölünmüşse, yani $\frac{f}{g}$ şeklinde bir ifade söz konusuysa ve hem $g(t)$ hem de $g(\sigma(t))$ sıfırdan farklıysa, o zaman $\frac{f}{g}$ fonksiyonunun delta türevi şu biçimde elde edilir.

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(\sigma(t)) - f(\sigma(t))g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

(Rezk et al., 2024).

1.2.7 Örnek Varsayalımki $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}^\kappa$ da türevlenebilir iki fonksiyon olsun. $f(t) = t$ ve $g(t) = t^2$ olarak verilen fonksiyonların çarpımlarının delta türevlerini bulalım.

Çözüm:

$f^\Delta(t) = 1$ ve $g^\Delta(t) = \sigma(t) + t$ olduğunu örnek 1.2.3 ve 1.2.5’de açıkça gösterilmiştir.

$$(fg)^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t)).$$

$$= t(t + \sigma(t)) + 1 \cdot \sigma^2(t)$$

$$= t^2 + t \sigma(t) + \sigma^2(t).$$

1.2.8 Teorem $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktasında Δ türevlenebilir olsun. c , bir sabit sayı ve $m \in \mathbb{N}$ alalım.

i. $f(t) = (t - c)^m$ olarak tanımlanan f fonksiyonu için

$$f^\Delta(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - c)^v (t - c)^{m-1-v}.$$

ii. $f(t) = \frac{1}{(t-c)^m}$ olarak tanımlanan f fonksiyonu için

$$f^\Delta(t) = - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(t - c)^{v+1} (\sigma(t) - c)^{m-v}}.$$

(Eker, 2016)

İspat:

i.

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

$f(t) = (t - c)^m$ olduğundan türev denkleminde yerine yazalım.

$$f^\Delta(t) = \frac{(\sigma(t) - c)^m - (t - c)^m}{\mu(t)}$$

$(\sigma(t) - c)^m - (t - c)^m$ farkını açmak için binom teoremini kullanabiliriz.

$$x^m - y^m = (x - y) \sum_{v=0}^{m-1} x^{m-1-v} y^v$$

$$(\sigma(t) - c)^m - (t - c)^m = [(\sigma(t) - c) - (t - c)] \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - c)^{m-1-v} (t - c)^v$$

$$= \mu(t) \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - c)^{m-1-v} (t - c)^v.$$

Bu ifadeyi yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \frac{\mu(t) \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - c)^{m-1-v} (t - c)^v}{\mu(t)} = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - c)^{m-1-v} (t - c)^v \\ &= \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t) - c)^v (t - c)^{m-1-v}. \end{aligned}$$

ii. $f(t) = \frac{1}{(t-c)^m}$ olduğundan türev denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
f^{\Delta}(t) &= \frac{\frac{1}{(\sigma(t)-c)^m} - \frac{1}{(t-c)^m}}{\mu(t)} = \frac{\frac{(t-c)^m - (\sigma(t)-c)^m}{(\sigma(t)-c)^m(t-c)^m}}{\mu(t)} \\
&= \frac{(t-c)^m - (\sigma(t)-c)^m}{\mu(t)(\sigma(t)-c)^m(t-c)^m}.
\end{aligned}$$

Kesrin payını binom teoremine göre açarsak

$$\begin{aligned}
&= \frac{(t - \sigma(t)) \sum_{v=0}^{m-1} (t-c)^{m-v-1} (\sigma(t)-c)^v}{(\sigma(t)-c)^m (t-c)^m (\sigma(t)-t)} = - \frac{\sum_{v=0}^{m-1} (t-c)^{m-v-1} (\sigma(t)-c)^v}{(\sigma(t)-c)^m (t-c)^m} \\
&= - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t)-c)^{m-v} (t-c)^{v+1}}.
\end{aligned}$$

1.2.9 Örnek $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f(t) = t^2$ olduğunu varsayalım. $f^{\Delta}(t)$ değerini (1.2.8) teoremine göre hesaplayınız.

Çözüm:

f fonksiyonunun türevini hesaplamak için $c = 0$ ve $m = 2$ alalım.

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{v=0}^1 (\sigma(t))^v (t)^{1-v} = t + \sigma(t).$$

1.2.10 Tanım $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlı bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ olmak üzere olacak şekilde bir fonksiyon alalım. $f^{\nabla}(t)$, $\forall \varepsilon > 0$ için, t 'nin bir komşuluğu $U_{\delta}((t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T})$ ve $\delta > 0$) bulunduğu durumda şu eşitsizlik sağlanır.

$$|[f(\rho(t)) - f(s)] - f^{\nabla}(t)[\rho(t) - s]| \leq \varepsilon |\rho(t) - s|.$$

Burada $f^{\nabla}(t)$, f 'nin t noktasındaki **nabla türevi** olarak adlandırılır (Bkz. Doğruöz, 2016, s. 13).

1.2.11 Teorem verilen $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ olmak üzere

- i. Eğer f, t noktasında nabla türevlenebilir ise, bu fonksiyon aynı noktada sürekli.
- ii. Eğer f, t noktasında sürekli ve t sol yayılmış bir nokta ise, bu durumda f, t 'de nabla türevlenebilirdir kabul edilir ve türev aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{v(t)}.$$

iii. Eğer t , sol yoğun bir noktaysa, f 'nin t 'de nabla türevlenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s}$$

limitinin sonlu bir değere sahip olmasıdır. Bu durumda nabla türevi şu şekilde ifade edilir.

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s}.$$

iv. Eğer f fonksiyonu t 'de nabla türevlenebiliyorsa, bu durumda fonksiyonun geriye doğru atlama noktası değeri ile türevi arasındaki ilişki şu biçimde verilir.

$$f(\rho(t)) = f(t) - v(t)f^\nabla(t).$$

(Doğruöz, 2016)

1.2.12 Örnek $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ fonksiyonu alalım $t \in \mathbb{T}$ için

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alındığında $\rho(t) = t$ olmak üzere

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(s) - f(\rho(t))}{s - \rho(t)} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(s) - f(t)}{s - t} = f'(t).$$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alındığında $\rho(t) = t - 1$ olmak üzere

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(s) - f(t-1)}{s - (t-1)} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(s) - f(t-1)}{s - (t-1)} = f(1) - f(t-1) = \nabla f(t).$$

1.2.13 Örnek $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ fonksiyonu alalım $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^2$ fonksiyonu için $f^\nabla(t)$ değerini hesaplayalım.

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alındığında

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(s) - f(\rho(t))}{s - \rho(t)} = \frac{t - (\rho(t))^2}{t - \rho(t)} = t + \rho(t) = 2t.$$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alındığında

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(s) - f(\rho(t))}{s - \rho(t)} = \frac{t^2 - (t-1)^2}{t - (t-1)} = \frac{t^2 - (t^2 - 2t + 1)}{1} = 2t - 1.$$

1.2.14 Teorem Verilen $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının her ikisi de $t \in \mathbb{T}_\kappa$ noktasında nabla türevlenebilir olsunlar. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. Toplam fonksiyonu $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t 'de nabla türevlenebilirdir ve türevi,

$$(f + g)^\nabla(t) = f^\nabla(t) + g^\nabla(t)$$

biçimindedir.

ii. Sabit bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için αf fonksiyonu da t' 'de nabla türevlenebilir olup

$$(\alpha f)^\nabla(t) = \alpha f^\nabla(t)$$

eşitliği sağlanır.

iii. Çarpım fonksiyonu $fg: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t' 'de nabla türevlenebilir ve iki eşdeğer biçimde ifade edilebilir.

$$(fg)^\nabla(t) = f^\nabla(t)g(t) + f(\rho(t))g^\nabla(t)$$

veya

$$(fg)^\nabla(t) = f(t)g^\nabla(t) + f^\nabla(t)g(\rho(t)).$$

iv. Eğer $g(t) \neq 0$ ve $g(\rho(t)) \neq 0$ koşulları sağlanıyorsa, bölüm fonksiyonu $\frac{f}{g}$ da t' 'de nabla türevlenebilir olur ve türevi

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\nabla = \frac{f^\nabla(t)g(\rho(t)) - f(\rho(t))g^\nabla(t)}{g(t)g(\rho(t))}$$

şeklinde tanımlanır (Doğruöz, 2016).

1.2.15 Teorem $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon $t \in \mathbb{T}_\kappa$ noktasında nabla türevlenebilir olsun ve c , bir sabit sayı ve $m \in \mathbb{N}$ alalım

i. $f(t) = (t - c)^m$ olarak tanımlanan f fonksiyonu için

$$f^\nabla(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\rho(t) - c)^v (t - c)^{m-1-v}.$$

ii. $f(t) = \frac{1}{(t-c)^m}$ olarak tanımlanan f fonksiyonu için

$$f^\nabla(t) = - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(t-c)^{m-v}(\rho(t)-c)^{v+1}}.$$

(Yaşar & Tuna, 2007, s. 46)

1.2.16 Örnek $f(t) = t^3$ fonksiyonunun $f^\nabla(t)$ değerini teorem 1.2.15'e göre hesaplayınız.

Çözüm:

Fonksiyonun türevini hesaplamak için $c = 0$ ve $m = 3$ alalım.

$$f^\nabla(t) = \sum_{v=0}^2 (\rho(t))^v (t)^{2-v} = (\rho(t))^0 t^2 + (\rho(t))^1 t^1 + (\rho(t))^2 t^0$$

$$= t^2 + \rho(t)t + \rho^2(t).$$

Tablo 3: Bazı Özel Fonksiyonların Delta ve Nabla Türevleri

$f(t)$	$f^\Delta(t)$	$f^\nabla(t)$
$f(t) = t^2$	$t + \sigma(t)$	$t + \rho(t)$
$f(t) = t^5$	$t^4 + \sigma(t)t^3 + (\sigma(t))^2 t^2 + (\sigma(t))^3 t + (\sigma(t))^4$	$t^4 + \rho(t)t^3 + (\rho(t))^2 t^2 + (\rho(t))^3 t + (\rho(t))^4$
$f(t) = \frac{1}{t}$	$\frac{-1}{\sigma(t)t}$	$\frac{-1}{\rho(t)t}$
$f(t) = (t-2)^3$	$(t-2)^2 + (\sigma(t)-2)(t-2) + (\sigma(t)-2)^2$	$(t-2)^2 + (\rho(t)-2)(t-2) + (\rho(t)-2)^2$
$f(t) = \frac{1}{(t-2)^3}$	$-\left(\frac{1}{(t-2)^2} + \frac{1}{(\sigma(t)-2)(t-2)} + \frac{1}{(\sigma(t)-2)^2}\right)$	$-\left(\frac{1}{(t-2)^2} + \frac{1}{(\rho(t)-2)(t-2)} + \frac{1}{(\rho(t)-2)^2}\right)$

1.2.17 Tanım $\mathbb{T}$ bir zaman ölçeği olsun. Eğer mevcutsa, $f^{\diamond\alpha}(t)$ değerini şöyle tanımlarız. Tüm $\varepsilon > 0$ için, t noktasının bir komşuluğu U_δ (yani, $U_\delta = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$) olmak üzere, $\delta > 0$ için mevcut olur ki, tüm $s \in U_\delta$ için

$$|\alpha [f^\sigma(t) - f(s)]v_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - f^{\diamond\alpha}(t)v_{ts}\mu_{ts}| < \varepsilon|v_{ts}\mu_{ts}|$$

şartını sağlar. Eğer her $t \in \mathbb{T}$ için $f^{\diamond\alpha}(t)$ mevcutsa, fonksiyonunun $\mathbb{T}_\kappa^\kappa$ üzerinde **diamond- α türevlenebilir** olduğunu söyleriz.

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu hem delta hem de nabla türevlenebilir olsun. O halde $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ için f' 'nin diamond alfa türevi aşağıdaki gibidir.

$$f^{\diamond\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\nabla(t).$$

$\alpha = 1$ seçildiğinde, diamond- α türevi delta türeviyle örtüşür.

$$f^{\diamond\alpha}(t) = f^\Delta(t).$$

Benzer şekilde, $\alpha = 0$ seçildiğinde ise, diamond- α türevi nabla türeviyle örtüşür.

$$f^{\diamond\alpha}(t) = f^\nabla(t).$$

Özellikle $\alpha = \frac{1}{2}$ alındığında, diamond türevi ayrık zaman skalaları üzerinde merkezi bir türev formülüne karşılık gelir ve delta ile nabla türevlerinin ortalamasını sağlar (Bohner & Matthews, 2011, s. 235).

İspat:

$f^\Delta(t)$ ve $f^\nabla(t)$ türevleri mevcut olsun. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde t 'nin U_1 ve U_2 komşuluklarındaki

$\forall s \in U_1$ için

$$|[f^\sigma(t) - f(s)] - f^\Delta(t)\mu_{ts}| < \varepsilon|\mu_{ts}|$$

$\forall s \in U_2$ için

$$|[f^\rho(t) - f(s)] - f^\nabla(t)v_{ts}| < \varepsilon|v_{ts}|$$

yazılır. Bu takdirde $\forall s \in U_1$ için

$$|\alpha [f^\sigma(t) - f(s)]v_{ts} - \alpha f^\Delta(t)\mu_{ts}v_{ts}| < \alpha \varepsilon |\mu_{ts}v_{ts}|$$

ve $\forall s \in U_2$ için

$$|(1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - (1-\alpha)f^\nabla(t)v_{ts}\mu_{ts}| < (1-\alpha)\varepsilon |v_{ts}\mu_{ts}|$$

elde edilebilir. Böylece $\forall s \in U_1 \cap U_2$ için

$$\begin{aligned} & |\alpha [f^\sigma(t) - f(s)]v_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - [\alpha f^\Delta(t)\mu_{ts}v_{ts} \\ & \quad + (1-\alpha)f^\nabla(t)]v_{ts}\mu_{ts}| \\ &= |\alpha [f^\sigma(t) - f(s)]v_{ts} - \alpha f^\Delta(t)\mu_{ts}v_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} \\ & \quad - (1-\alpha)f^\nabla(t)]v_{ts}\mu_{ts}| \\ &= |\alpha [f^\sigma(t) - f(s)]v_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - v_{ts}\mu_{ts}[\alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\nabla(t)]| \\ & < \varepsilon |\mu_{ts}v_{ts}| \end{aligned}$$

olur. Buradan da $f^{\circ\alpha}(t)$ türevi vardır ve

$$f^{\circ\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\nabla(t) \quad (1.1)$$

bulunur.

1.2.18 Örnek $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ fonksiyonu için $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = c$ ($c \in \mathbb{R}$) fonksiyonu için $f^{\circ\alpha}(t)$ değerlerini hesaplayalım.

Çözüm:

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için sabit fonksiyon

$$f(t) = f(\sigma(t)) = f(\rho(t)) = c$$

olur. Buradan,

$$f^{\circ\alpha}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t) = \alpha 0 + (1-\alpha)0 = 0.$$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $f^{\Delta}(t) = 0$ ve $f^{\nabla}(t) = 0$ olduğundan $f^{\circ\alpha}(t) = 0$ olduğu görülür.

1.2.19 Örnek $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ fonksiyonu ve $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^2$ olmak üzere $f^{\circ\alpha}(t)$ değerini hesaplayalım.

Çözüm :

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için sürekli aralıkta normal türev alınır.

$$f^{\circ\alpha}(t) = 2t.$$

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{(\sigma(t))^2 - t^2}{\sigma(t) - t} = \sigma(t) + t = 2t + 1.$$

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s} = \frac{(\rho(t))^2 - t^2}{\rho(t) - t} = \rho(t) + t = 2t - 1.$$

$$\begin{aligned} f^{\circ\alpha}(t) &= \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t) = \alpha (2t + 1) + (1-\alpha)(2t - 1). \\ &= 2\alpha + 2t - 1. \end{aligned}$$

Tablo 4: Zaman Skalalarında Fonksiyonların Türevin Türüne Göre Değişimi

Farklı tanım kümelerinde türevler	$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ $f^{\Delta}(t) = f^{\nabla}(t)$ $= f^{\circ\alpha}(t)$	$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$		
		$f^{\Delta}(t)$	$f^{\nabla}(t)$	$f^{\circ\alpha}(t)$
Fonksiyonlar				
$f(t) = c$	0	0	0	0
$f(t) = t$	1	1	1	1
$f(t) = t^2$	$2t$	$2t + 1$	$2t - 1$	$2(\alpha + t) - 1$
$f(t) = t^3$	$3t^2$	$3t^2 + 3t + 1$	$3t^2 - 3t + 1$	$3t^2$ $+ 3t(2\alpha - 1)$ $+ 1$

$f(t) = \sqrt{t}$	$\frac{1}{2\sqrt{t}}$	$\sqrt{t+1} - \sqrt{t}$	$\sqrt{t} - \sqrt{t-1}$	$\alpha \sqrt{t+1} + (1-\alpha)\sqrt{t} - (1-\alpha)\sqrt{t-1}$
$f(t) = \frac{1}{t}$	$-\frac{1}{t^2}$	$\frac{-1}{t(t+1)}$	$\frac{-1}{t(t-1)}$	$\frac{-t+2\alpha-1}{t(t-1)(t+1)}$
$f(t) = \cos t$	$-\sin t$	$-2 \sin\left(t + \frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{2}\right)$	$-2 \sin\left(t - \frac{1}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{2}\right)$	$-2 \sin\left(\frac{1}{2}\right) \left[\alpha \sin\left(t + \frac{1}{2}\right) + \alpha \sin\left(t - \frac{1}{2}\right) \right]$

1.2.20 Teorem $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}_\kappa^{\kappa'}$ da $\diamond_\alpha$ türevlenebilir olsunlar.

Bu durumda,

i. $f + g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da t 'de $\diamond_\alpha$ türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^{\diamond_\alpha}(t) = f^{\diamond_\alpha}(t) + g^{\diamond_\alpha}(t)$$

şeklindedir.

ii. Herhangi bir a sabiti için af fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_\kappa^{\kappa'}$ de $\diamond_\alpha$ türevlenebilirdir ve

$$(af)^{\diamond_\alpha}(t) = af^{\diamond_\alpha}(t).$$

iii. $fg: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t 'de $\diamond_\alpha$ türevlenebilir olsun.

$$(fg)^{\diamond_\alpha}(t) = f^{\diamond_\alpha}(t)g(t) + \alpha f^\sigma(t)g^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\rho(t)g^\nabla(t).$$

iv. Eğer $g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t) \neq 0$ ise o zaman $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_\kappa^{\kappa'}$ de $\diamond_\alpha$ türevlenebilirdir ve bölümün türevi,

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\diamond_\alpha} = -\frac{f^{\diamond_\alpha}(t)g^\sigma(t)g^\rho(t) - \alpha f^\sigma(t)g^\rho(t)g^\Delta(t) - (1-\alpha)f^\rho(t)g^\rho(t)g^\nabla(t)}{g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)}$$

ile verilir.

v. $g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t) \neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{g}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_\kappa^{\kappa'}$ de $\diamond_\alpha$ türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{\diamond_\alpha} = -\frac{g^{\diamond_\alpha}(t)(g^\sigma(t) + g^\rho(t)) - \alpha g^\sigma(t)g^\Delta(t) - (1-\alpha)g^\rho(t)g^\nabla(t)}{g(t)g^\sigma(t)g^\rho(t)}.$$

(Sezer, 2021, s. 29)

(iii) ve (iv)'nin ispatları aşağıda verilmiştir. Benzer şekilde diğer ispatlar da yapılabilir.

$$\text{iii. } (fg)^{\circ_{\alpha}}(t) = \alpha (fg)^{\Delta}(t) + (1-\alpha)(fg)^{\nabla}(t)$$

$$= \alpha [f^{\Delta}(t)g(t) + f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)] + (1-\alpha)[f^{\nabla}(t)g(t) + f^{\rho}(t)g^{\nabla}(t)]$$

$$= [\alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t)] g(t) + \alpha f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\rho}(t)g^{\nabla}(t).$$

$$\text{iv. } \left(\frac{f}{g}\right)^{\circ_{\alpha}}(t) = \alpha \left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) + (1-\alpha) \left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t)$$

$$= \alpha \left[\frac{f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t) - f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)}{g^{\sigma}(t)g(t)} \right] + (1-\alpha) \left[\frac{f^{\nabla}(t)g^{\rho}(t) - f^{\rho}(t)g^{\nabla}(t)}{g^{\rho}(t)g(t)} \right]$$

$$= \frac{\alpha [f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t) - f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)g^{\rho}(t)] + (1-\alpha)[f^{\nabla}(t)g^{\rho}(t)g^{\sigma}(t) - f^{\rho}(t)g^{\nabla}(t)g^{\sigma}(t)]}{g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)g(t)}$$

$$= \frac{[\alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t)]g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t) - \alpha f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)g^{\rho}(t) - (1-\alpha)f^{\rho}(t)g^{\nabla}(t)g^{\sigma}(t)}{g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)g(t)}$$

$$= \frac{f^{\circ_{\alpha}}(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t) - \alpha f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)g^{\rho}(t) - (1-\alpha)f^{\rho}(t)g^{\nabla}(t)g^{\sigma}(t)}{g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)g(t)}.$$

1.2.21 Teorem Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\circ_{\alpha}$ türevlenebilir ise aşağıdaki ilişkiler geçerlidir.

$$\text{i. } f^{\circ_{\alpha}\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla\Delta}(t).$$

$$\text{ii. } f^{\circ_{\alpha}\nabla}(t) = \alpha f^{\Delta\nabla}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla\nabla}(t).$$

$$\text{iii. } f^{\Delta\circ_{\alpha}}(t) = \alpha f^{\Delta\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\Delta\nabla}(t) \neq f^{\circ_{\alpha}\Delta}(t).$$

$$\text{iv. } f^{\nabla\circ_{\alpha}}(t) = \alpha f^{\nabla\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla\nabla}(t) \neq f^{\circ_{\alpha}\nabla}(t).$$

$$\text{v. } f^{\circ_{\alpha}\circ_{\alpha}}(t) = \alpha^2 f^{\Delta\Delta}(t) + \alpha(1-\alpha)(f^{\Delta\nabla}(t) + f^{\nabla\Delta}(t)) + (1-\alpha)^2 f^{\nabla\nabla}(t) \neq \alpha^2 f^{\Delta\Delta}(t) + (1-\alpha)^2 f^{\nabla\nabla}(t)$$

(Ferreira, 2008, s. 4).

Burada (i) ve (v) ifadelerinin kanıtlarını vermek yeterlidir, çünkü diğer ifadelerin kanıtları benzer şekilde yapılabilir.

i.

$$f^{\circ_{\alpha}\Delta}(t) = (f^{\circ_{\alpha}})^{\Delta}(t) = (\alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t))^{\Delta}$$

$$= \alpha f^{\Delta\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla\Delta}(t).$$

olduğu görülür. Bu da (iii) ifadesini kanıtlar.

v.

$$\begin{aligned}
f^{\circ_{\alpha} \circ_{\alpha}}(t) &= (\alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t))^{\circ_{\alpha}} \\
&= \alpha (\alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t))^{\Delta} + (1-\alpha)(\alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t))^{\nabla} \\
&= \alpha^2 f^{\Delta\Delta}(t) + \alpha(1-\alpha)f^{\Delta\nabla}(t).
\end{aligned}$$

1.3 Zaman Skalasında İntegral

1.3.1 Tanım $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, sağdan yoğun t_0 noktasında sağdan limiti $\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$ mevcut (sonlu) ise, soldan yoğun t_0 noktasında soldan limiti $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t)$ mevcut (sonlu) ise regüle (düzenlenmiş) olarak adlandırılır (Eker, 2016, s. 16).

1.3.2 Tanım $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sağdan yoğun (t_0) noktalarında sürekli ve soldan yoğun (t_0) noktalarında soldan limitleri mevcut (sonlu) ise ***rd*-sürekli fonksiyon** olarak adlandırılır ve *rd*-sürekli fonksiyonların kümesi şu şekilde gösterilir.

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

rd-sürekli fonksiyonlar, türevlenebilir olmaları ve türevlerinin de *rd*-sürekli olmaları halinde şu şekilde gösterilir.

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

(Öğrekçi, 2009, s. 15)

1.3.4 Tanım $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu soldan yoğun (t_0) noktalarında sürekli ve sağdan yoğun (t_0) noktalarında sağdan limitleri mevcut (sonlu) ise ***ld*- sürekli fonksiyon** olarak adlandırılır. *ld*-sürekli fonksiyonların kümesi şu şekilde gösterilir.

$$C_{ld} = C_{ld}(\mathbb{T}) = C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

ld- sürekli fonksiyonlar, türevlenebilir olmaları ve türevlerinin de *ld*-sürekli olmaları halinde şu şekilde gösterilir.

$$C_{ld}^1 = C_{ld}^1(\mathbb{T}) = C_{ld}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

(Öğrekçi, 2009, s. 18).

1.3.6 Tanım f fonksiyonu düzenlenmiş (regüle) bir fonksiyon olsun. O zaman f fonksiyonu için tanım bölgesi üzerinde delta anti-türevi olan bir F fonksiyonu vardır.

Aynı şekilde f fonksiyonu tanım bölgesi üzerinde nabla anti-türevi olan bir F fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon şu özellikleri sağlar.

$$F^\Delta(t) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}^\kappa,$$

$$F^\nabla(t) = f(t), \quad \forall t \in \mathbb{T}_\kappa$$

(Öğrekçi, 2009).

1.3.7 Tanım Varsayalım ki $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ regüle bir fonksiyon olsun. Düzenli bir f fonksiyonunun delta belirsiz integrali ve nabla belirsiz integrali aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\int f(t) \Delta t = F(t) + c,$$

$$\int f(t) \nabla t = F(t) + c.$$

Burada c sabit sayı olup keyfi seçilebilir. Bir $f(t)$ fonksiyonunun Cauchy delta integrali ve Cauchy nabla integrali $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\int_a^b f(t) \nabla t = F(b) - F(a),$$

$$\int_a^b f(t) \Delta t = F(b) - F(a)$$

(Öğrekçi, 2009).

1.3.8 Örnek Zaman skalası $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $a > 0, a \neq 1$ ve bir reel sayı olmak üzere $\int a^{2t} \Delta t$ ve $\int a^{2t} \nabla t$ integrallerini hesaplayınız.

Çözüm:

$f(t) = a^{2t}$ fonksiyonunun nabla anti türevini $F(t)$ bulmak için türev ilişkisini kullanıyoruz.

$$F(t) - F(t-1) = a^{2t}$$

$$F(t) = F(t-1) + a^{2t}$$

($F(t)$ önceki değeri ile a^{2t} 'nin toplamına eşit.)

$$F(t-1) = F(t-2) + a^{2(t-1)}$$

$$F(t) = F(t-2) + a^{2(t-1)} + a^{2t}$$

Böylece $F(t)$, $F(0)$ 'dan başlayarak t 'ye kadar olan a^{2k} 'lerin toplamı olur.

$$F(t) = F(0) + \sum_{k=1}^t a^{2k}$$

$$\sum_{k=0}^t a^{2k} = \frac{a^2(1 - a^{2t})}{1 - a^2}$$

$$\int a^{2t} \nabla t = +c$$

Burada $a \neq 1$ ve c keyfi bir sabit noktadır.

$f(t) = a^{2t}$ fonksiyonunun delta anti türevini $F(t)$ bulmak için türev ilişkisini kullanıyoruz.

$$\Delta F(t) = F(t+1) - F(t) = a^{2t}$$

$$F(t+1) = F(t) + a^{2t} = F(t-1) + a^{2(t-1)} + a^{2t}$$

$$= F(0) + \sum_{k=0}^t a^{2k}$$

Ancak bu sefer $F(t+1)$ elde ettik. Yani $F(t) = \sum_{k=0}^{t-1} a^{2k}$. Buna göre delta integral sonucu

$$\int a^{2t} \Delta t = \sum_{k=0}^{t-1} a^{2k} + c = \frac{1 - a^{2t}}{1 - a^2} + c.$$

1.3.9 Teorem (Ön-Antitürevlerin varlığı) f regüler (düzenlenmiş) bir fonksiyon olsun. O zaman, F adında bir fonksiyon vardır ki, bu fonksiyon ön-türevlendirilebilirdir ve türevlenme bölgesi D olmak üzere

$$F^\Delta(t) = f(t),$$

tüm $t \in D$ için geçerlidir.

1.3.10 Teorem (Anti türev varlığı) Her rd -süreklî fonksiyon bir ters türevi vardır. Eğer $t_0 \in \mathbb{T}$ ise

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) \Delta \tau \quad t \in \mathbb{T}, \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanan F, f 'nin bir anti-türevini ifade eder.

İspat:

Varsayalım ki f, rd -sürekli bir fonksiyondur. Her rd -sürekli fonksiyon düzenlenmiş (regüler) bir fonksiyondur. Teorem 1.3.9. F' 'nin bir delta ön-antitürevinin varlığını garanti eder.

$$F^\Delta(t) = f(t), \quad \forall t \in D.$$

Burada D, F' 'nin türevlenebilir olduğu noktaları ifade eder.

$F^\Delta(t) = f(t)$ eşitliğinin tüm $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için sağlandığını gösterir.

$t \in \mathbb{T}/D$ olduğunu varsayalım. Bu durumda t , sağdan yoğun bir noktadır. f, rd -sürekli olduğundan t' 'de süreklidir. Yani $\forall \varepsilon > 0$ için t' 'yi içeren bir U komşuluğu vardır.

$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon, \quad \forall s \in U.$$

Yeni bir $h(r)$ fonksiyonu tanımlayalım.

$$h(r) = F(r) - f(t)(r - t_0), \quad r \in \mathbb{T}$$

$$h^\Delta(r) = F^\Delta(r) - f(t) = f(r) - f(t), \quad \forall r \in D$$

$$|h^\Delta(s)| = |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall s \in D \cap U$$

Bu da $\sup_{s \in D \cap U} |h^\Delta(s)| \leq \varepsilon$ eşitsizliğini verir.

$$h(t) = F(t) - f(t)(t - t_0)$$

olduğundan aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$|h(t) - h(r)| = |F(t) - F(r) - f(t)(t - r)|$$

$$\leq \left\{ \sup_{s \in D \cap U} |h^\Delta(s)| \right\} (t - r)$$

$$|F(t) - F(r) - f(t)(t - r)| \leq \varepsilon(t - r)$$

Bu F' 'nin t' 'de türevlenebilir olduğunu gösterir (Yaşar, Tuna, & Dastjerdi, 2007, s. 42).

1.3.10 Teorem $f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olsun ve $a < b$, $a, b \in \mathbb{T}^\kappa$ alalım.

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt.$$

ii. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \sum_{k=a}^{b-1} f(k).$$

iii. Eğer $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}}$ ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = (q-1) \sum_{k=\log_q a}^{\log_q b-1} q^k f(q^k).$$

iv. Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, ($h > 0$) ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b-h}{h}} f(kh) h.$$

(Özkan Um, 2007, s. 24).

1.3.11 Teorem $f \in C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{T}_{\kappa}$ ve $a < b$ olsun.

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t) \nabla t = \int_a^b f(t) dt,$$

burada sağ taraf Riemann integralidir.

ii. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t) \nabla t = \sum_{k=a+1}^b f(k).$$

iii. Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ($h > 0$) ise

$$\int_a^b f(t) \nabla t = \sum_{k=\frac{a+h}{h}}^{\frac{b}{h}} f(kh) h.$$

iv. Eğer $\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}}$ ise

$$\int_a^b f(t) \nabla t = \left(\frac{q-1}{q}\right) \sum_{k=\log_q a+1}^{\log_q b} q^k f(q^k)$$

(Benaissa, 2020, s. 17).

1.3.12 Teorem $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ olsun.

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t) \diamond_{\alpha} t &= \alpha \sum_{k=a}^{b-1} f(k) + (1-\alpha) \sum_{k=a+1}^b f(k). \\
&= \alpha f(a) + \alpha \sum_{k=a+1}^{b-1} f(k) + (1-\alpha) \sum_{k=a+1}^{b-1} f(k) + (1-\alpha)f(b) \\
&= \sum_{k=a+1}^{b-1} f(k) + \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

ii. Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, ($h > 0$) ise

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t) \diamond_{\alpha} t &= \alpha \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} hf(hk) + (1-\alpha) \sum_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}} hf(hk) \\
&= \alpha f(a)h + \alpha \sum_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}-1} hf(hk) + (1-\alpha) \sum_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}+1} hf(hk) + (1-\alpha)f(b)h \\
&= \sum_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}-1} hf(hk) + \alpha f(a)h + (1-\alpha)f(b)h
\end{aligned} \tag{1.4}$$

(Ferreira, 2008, s. 6).

1.3.13 Teorem $a, t \in \mathbb{T}$ ve $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f 'nin $\diamond_{\alpha}$ integrali $\alpha \in [0,1]$ için

$$\int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = \alpha \int_a^t f(\tau) \Delta \tau + (1-\alpha) \int_a^t f(\tau) \nabla \tau \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanır. $\diamond_{\alpha}$ integrali Δ ve ∇ integrallerinin lineer kombinasyonudur. Genelde $t \in \mathbb{T}$ için

$$\left(\int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \right)^{\diamond_{\alpha}} = f(t) \tag{1.6}$$

sağlanmaz.

Farklı dinamik türevler ile $\diamond_{\alpha}$ integrali arasındaki özellikleri görmek ilginç olabilir. Bilindiği gibi farklı türevler ve integraller arasındaki etkileşimler $\sigma(\rho(t))$ ve $\rho(\sigma(t))$ fonksiyon bileşimine yakından bağlıdır. Sol-yoğun, sağa-dağılmış noktalarda

$\sigma(\rho(t)) \neq t$ ve sağ-yoğun, sola-dağılmış noktalarda $\rho(\sigma(t)) \neq t$ olduğundan dikkate almamız gerekir. Bu yüzden bu noktaları ayrı ayrı ele alalım. Kolaylık sağlaması açısından aşağıdaki kümeleri tanımlıyoruz.

$$\begin{aligned} A &:= \{t \in \mathbb{T}: t \text{ sol yoğun ve sağ saçılımlıdır}\} \\ B &:= \{t \in \mathbb{T}: t \text{ sol saçılımlı ve sağ yoğundur}\} \\ C &:= \{t \in \mathbb{T}: t \text{ sol saçılımlı ve sağ saçılımlıdır}\} \\ D &:= \{t \in \mathbb{T}: t \text{ sol yoğun ve sağ yoğundur}\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

(Sheng et al., 2006, s. 401).

1.3.14 Lemma $a, t \in \mathbb{T}$ alalım. Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ nin sol taraftaki limitleri $\mathbb{T}$ 'deki sol yoğun noktalarda mevcutsa ve $\int_a^t f(\tau) \Delta\tau$ $\mathbb{T}$ üzerinde nabla türevlenebilir olsun.

$$\left(\int_a^t f(\tau) \Delta\tau \right)^\nabla = \begin{cases} f(\rho(t)) & \text{eğer } t \in B \cup C, \\ \lim_{\tau \rightarrow t^-} f(\tau) & \text{eğer } t \in A \cup D. \end{cases} \quad (1.8)$$

$a, t \in \mathbb{T}$ alalım. Eğer $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ nin sağ taraftaki limitleri $\mathbb{T}$ 'deki sağ yoğun noktalarda mevcutsa ve $\int_a^t g(\tau) \nabla\tau$ $\mathbb{T}$ üzerinde delta türevlenebilir olsun.

$$\left(\int_a^t g(\tau) \nabla\tau \right)^\Delta = \begin{cases} g(\sigma(t)) & \text{eğer } t \in A \cup C, \\ \lim_{\tau \rightarrow t^+} g(\tau) & \text{eğer } t \in B \cup D \end{cases} \quad (1.9)$$

(Sheng et al., 2006).

1.3.15 Lemma $a, t \in \mathbb{T}$ alalım. Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ nin sol taraftaki limitleri $\mathbb{T}$ 'deki sol yoğun noktalarda mevcutsa ve $\int_a^t f(\tau) \Delta\tau$, $\mathbb{T}$ üzerinde $\diamond_\alpha$ türevlenebilir olsun.

$$\left(\int_a^t f(\tau) \Delta\tau \right)^{\diamond_\alpha} = \alpha f(t) + (1-\alpha) \begin{cases} f(\rho(t)) & \text{eğer } t \in B \cup C, \\ \lim_{\tau \rightarrow t^-} f(\tau) & \text{eğer } t \in A \cup D. \end{cases} \quad (1.10)$$

$a, t \in \mathbb{T}$ alalım. Eğer $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ 'nin sağ taraftaki limitleri $\mathbb{T}$ 'deki sağ yoğun noktalarda mevcutsa ve $\int_a^t g(\tau) \nabla\tau$ $\mathbb{T}$ üzerinde $\diamond_\alpha$ türevlenebilir olsun.

$$\left(\int_a^t g(\tau) \nabla\tau \right)^{\diamond_\alpha} = (1-\alpha)f(t) + \alpha \begin{cases} g(\sigma(t)) & \text{eğer } t \in A \cup C, \\ \lim_{\tau \rightarrow t^+} g(\tau) & \text{eğer } t \in B \cup D. \end{cases} \quad (1.11)$$

(Sheng et al., 2006).

1.3.16 Teorem. $a, t \in \mathbb{T}$ alalım. Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ nin sol taraftaki limitleri $\mathbb{T}$ 'deki sol yoğun noktalarda mevcut ve sağ taraftaki limitleri $\mathbb{T}$ 'deki sağ yoğun noktalarda mevcutsa, $\int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau$, $\mathbb{T}$ üzerinde $\diamond_{\alpha}$ türevlenebilir ise

$$\left(\int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \right)^{\diamond_{\alpha}} = (1 - 2\alpha + 2\alpha^2)f(t) + \alpha(1-\alpha) \begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow t^-} f(\tau) + f(\sigma(t)), & \text{eğer } t \in A \\ f(\rho(t)) + \lim_{\tau \rightarrow t^+} f(\tau), & \text{eğer } t \in B \\ f(\rho(t)) + f(\sigma(t)), & \text{eğer } t \in C \\ \lim_{\tau \rightarrow t^-} f(\tau) + \lim_{\tau \rightarrow t^+} f(\tau), & \text{eğer } t \in D \end{cases}. \quad (1.12)$$

(Sheng et al., 2006, s. 402).

1.3.17 Teorem $a, t \in \mathbb{T}$ ve $f: \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ alalım. Eğer f , birinci değişkene göre $\diamond_{\alpha}$ türevlenebilir, ikinci değişkene göre sol taraftaki limitler sol yoğun noktalarda bulunur, sağ taraftaki limitler sağ yoğun noktalarda bulunur ve $\int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau$, $\mathbb{T}$ üzerinde $\diamond_{\alpha}$ türevlenebilir ise

$$\left(\int_a^t f(t, \tau) \diamond_{\alpha} \tau \right)^{\diamond_{\alpha}} = \int_a^t f^{\diamond_{\alpha}}(t, \tau) \diamond_{\alpha} \tau + \alpha^2 f(\sigma(t), t) + (1-\alpha)^2 f(\rho(t), t) + \alpha(1-\alpha) \begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow t^-} f(\rho(t), \tau) + f(\sigma(t), \sigma(t)), & \text{eger } t \in A \\ f(\rho(t), \rho(t)) + \lim_{\tau \rightarrow t^+} f(\sigma(t), \tau), & \text{eger } t \in B \\ f(\rho(t), \rho(t)) + f(\sigma(t), \sigma(t)), & \text{eger } t \in C \\ \lim_{\tau \rightarrow t^-} f(\rho(t), \tau) + \lim_{\tau \rightarrow t^+} f(\sigma(t), \tau), & \text{eger } t \in D \end{cases} \quad (1.13)$$

(Sheng et al., 2006, s. 402).

1.3.18 Teorem $a, b, t \in \mathbb{T}$ ve $c \in \mathbb{R}$ sabiti ile $f, g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için diamond- α integrali aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. $\int_a^t [f(\tau) + g(\tau)] \diamond_{\alpha} \tau = \int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau + \int_a^t g(\tau) \diamond_{\alpha} \tau$. (Toplamın integrali)
- ii. $\int_a^t cf(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = c \int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau$. (Sabit katsayı ile çarpım)
- iii. $\int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = - \int_t^a f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau$. (Sınırların yer değiştirmesi)
- iv. $\int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = \int_a^b f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau + \int_b^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau$. (Aralıksal ayrılma)
- v. $\int_a^a f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = 0$. (Başlangıçtan sona kadar aynı nokta)
- vi. Eğer $f(\tau) \geq 0$ ise $\int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \geq 0$.

vii. Eğer $f(\tau) \geq g(\tau)$ ise $\int_a^t f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \geq \int_a^t g(\tau) \diamond_{\alpha} \tau$.

biçimindedir (Malinowska, 2008, s. 3-4; Atasever, 2011, s. 22).

1.3.19 Teorem Verilen $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ olmak üzere aşağıdaki durumlar geçerlidir.

1. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ sabit fonksiyon ise bu fonksiyon a noktasından b noktasına $\diamond_{\alpha}$ integrallenebilir olup,

$$\int_a^b f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau = c(b - a) \quad (1.14)$$

biçiminde ifade edilir.

2. $[a, b]$ aralığında tanımlı üzerinde her monoton fonksiyon $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $\diamond_{\alpha}$ integrallenebilir.

3. Süreklilik koşulunu sağlayan her fonksiyon $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığında $\diamond_{\alpha}$ integrallenebilir.

4. Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun yalnızca sonlu sayıda süreksizlik noktası varsa ve bu fonksiyon sınırlıysa, o hâlde f , $\diamond_{\alpha}$ integrallenebilir.

5. f düzenli (regüle) bir fonksiyon ise, yine $\diamond_{\alpha}$ anlamında integrallenebilirlik sağlanır.

6. Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı ve $\diamond_{\alpha}$ integrallenebilir ise, o zaman her $[c, d] \subseteq [a, b]$ alt aralığında da f , $\diamond_{\alpha}$ integrallenebilir olacaktır.

7. f , a ile b arasında $\diamond_{\alpha}$ integrallenebilir bir fonksiyon ise, bu durumda mutlak değeri alınmış hali olan $|f|$ de $\diamond_{\alpha}$ integrallenebilir olur ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \int_a^b f(\tau) \diamond_{\alpha} \tau \right| \leq \int_a^b |f(\tau)| \diamond_{\alpha} \tau \quad (1.15)$$

Bu özellikler Malinowska ve Torres (2008, s. 4) tarafından verilmiştir.

İKİNCİ BÖLÜM

ZAMAN SKALASINDA BAZI DİNAMİK EŞİTSİZLİKLER

2.1 Hölder ve Minkowski Eşitsizlikleri

Ters Minkowski eşitsizliğinin zaman ölçekleri altında yeniden hesaplamalarını da kapsayan genel eşitsizlikler aşağıdaki gibidir.

Hölder 1889'da aşağıdaki eşitsizliği ispatladı (Hölder, 1889, s. 38).

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.1)$$

Burada $\{x_k\}_{k=1}^n$ ve $\{y_k\}_{k=1}^n$ pozitif değerli diziler ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir. $p < 0$ ve $q < 0$ ise (2.1) eşitsizliği tersine çevrilir ve (2.1) denkleminin integral formu aşağıdaki gibi olur.

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \left[\int_a^b f^p(x) dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b g^q(x) dx \right]^{\frac{1}{q}} \quad (2.2)$$

Burada $a, b \in \mathbb{R}$, $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$. Eğer $0 < p < 1$ ise (2.2) denklemi ters çevrilir. Özellikle Minkowski eşitsizliği, Hölder eşitsizliğinin bir uygulaması olarak kabul edilir. Bu eşitsizlik $p > 1$ için f ve g nin $[a, b]$ üzerinde negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olduğunu aşağıdaki şekilde görebiliriz.

$$0 < \int_a^b f^p(x) dx < \infty \text{ ve } 0 < \int_a^b g^p(x) dx < \infty$$

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.3)$$

Bougoffa (2006) Minkowski eşitsizliğinin tersine ilişkin bir integral eşitsizliğini sundu.

Eğer $f, g > 0$, $p > 0$, $\forall x \in [a, b]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$1 < m < \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$$

$$\left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{M(m+1) + M+1}{(m+1)(M+1)} \left(\int_a^b (f(x) + g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.4)$$

Sulaiman (2012), ters Minkowski eşitsizliğine ilişkin aşağıdaki sonucu ortaya koydu.

Eğer $f, g > 0$, $p \geq 1$, $\forall x \in [a, b]$ için

$$1 < B \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq m$$

$$\frac{m+1}{m-1} \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{B+1}{B-1} \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.5)$$

Soraysang (2013), aşağıdaki eşitsizliği gösterdi.

Eğer $f, g > 0$, $p \geq 1$ ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$1 < E < B \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq m$$

şartı sağlanıyorsa

$$\frac{m+1}{m-E} \left(\int_a^b (f(x) - Eg(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{B+1}{B-E} \left(\int_a^b (f(x) - Eg(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.6)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Benaissa (2020), ters Minkowski eşitsizliğine ilişkin aşağıdaki sonucu ortaya koydu.

Eğer $f, g > 0$, $p \geq 1$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $\gamma > 0$ olacak şekilde öyle ki,

$$1 < E < B \leq \frac{\gamma f(x)}{g(x)} \leq m,$$

$$\begin{aligned} \frac{m + \gamma}{\gamma(m - E)} \left(\int_a^b (\gamma f(x) - E g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_a^b f^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - E)} \left(\int_a^b (\gamma f(x) - E g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Yine Benaissa (2020), eğer $\gamma > 0$, $0 < p \leq q$, $f, g > 0$, w bir ağırlık fonksiyonu ve $\forall x \in [a, b]$ için

$$1 < E < B \leq \frac{\gamma f(x)}{g(x)} \leq m, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{m + \gamma}{\gamma(m - E)} \left(\int_a^b w(x) dx \right)^{\frac{p-q}{pq}} \left(\int_a^b (\gamma f(x) - E g(x))^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ \leq \left(\int_a^b w(x) f^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b w(x) g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - E)} \left(\int_a^b w(x) (\gamma f(x) - E g(x))^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

eşitsizliğini göstermiştir.

Benaissa (2022), aşağıdaki eşitsizliği ispatlamıştır.

Eğer $\gamma > 0$, $0 < p \leq q$, $f, g > 0$ ve (2.8) numaralı koşul sağlanıyorsa o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} \frac{m + \gamma}{\gamma(m - E)} (b - a)^{\frac{1-p}{q}} \left(\int_a^b (\gamma f(x) - E g(x))^{\frac{q}{p}} w(x) dx \right)^{\frac{p}{q}} \\ \leq \left(\int_a^b w(x) f^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b w(x) g^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - E)} \left(\int_a^b w(x) (\gamma f(x) - E g(x))^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Yukarıdaki eşitsizlik, $0 < p < 1$ veya $p < 0$ için tersine döner.

Bohner ve Peterson (2001), zaman skalaları üzerinde Minkowski eşitsizliğinin delta integral formunu aşağıdaki şekilde vermiştir (s. 105–106).

$a, b \in \mathbb{T}$, $f, g \in C_{rd}([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$, $p > 1$ için zaman ölçeklerinde (2.3) eşitsizliğini aşağıdaki gibi sunmuşlardır.

$$\left(\int_a^b (f(t) + g(t))^p \Delta t \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b f^p(t) \Delta t \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b g^p(t) \Delta t \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.11)$$

Akın (2020), zaman skalaları üzerinde bazı integral türü eşitsizlikler sunmuştur. $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının $I = [a, b] \subseteq \mathbb{T}$ üzerinde Δ integrallenebilir ve $1 \leq l \leq f^p, g^p \leq L < \infty$ ve $p > 1$ olduğunu aşağıdaki şekilde kanıtlamıştır.

$$\left(\int_a^b |f(t)|^p \Delta t \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p \Delta t \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2 \left(\frac{L}{l} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p \Delta t \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.12)$$

2.2 Bazı Dinamik Eşitsizliklerin Diamond Alfa Hesabında Genellemeleri

2.2.1 Hölder eşitsizliği: $\mathbb{T}$ bir zaman ölçeği, $a, b \in \mathbb{T}$, $f, g \in ([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise o zaman

$$\int_a^b |f(t)g(t)| \diamond_{\alpha} t \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.13)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada, $p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$ 'dir (Brito da Cruz, Martins, & Torres, 2013, Theorem 4, s. 5–6).

İspat:

x, y negatif olmayan reel sayılar olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Eğer $\left[\int_a^b |f(t)|^p \diamond_{\alpha} t \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b |g(t)|^q \diamond_{\alpha} t \right]^{\frac{1}{q}} = 0$ olursa $f(t) = 0$ veya $g(t) = 0$ olduğu açıktır. Bu nedenle sıfır olmayan fonksiyonlar için çalışalım. Bu tanım altında

$$x(t) = \frac{|f(t)|^p}{\int_a^b |f(\tau)|^p \diamond_{\alpha} \tau} \text{ ve } y(t) = \frac{|g(t)|^q}{\int_a^b |g(\tau)|^q \diamond_{\alpha} \tau}$$

tanımlamalarını Young eşitsizliğinde kullanarak

$$\frac{|f(t)|}{\left[\int_a^b |f(\tau)|^p \diamond_{\alpha} \tau\right]^{\frac{1}{p}}} \frac{|g(t)|}{\left[\int_a^b |g(\tau)|^q \diamond_{\alpha} \tau\right]^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(t)|^p}{\int_a^b |f(\tau)|^p \diamond_{\alpha} \tau} + \frac{1}{q} \frac{|g(t)|^q}{\int_a^b |g(\tau)|^q \diamond_{\alpha} \tau}$$

eşitsizliğin her iki tarafını a ile b arasında integralini alarak aşağıdaki denklemi türetelim.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{|f(t)|}{\left[\int_a^b |f(\tau)|^p \diamond_{\alpha} \tau\right]^{\frac{1}{p}}} \frac{|g(t)|}{\left[\int_a^b |g(\tau)|^q \diamond_{\alpha} \tau\right]^{\frac{1}{q}}} &\leq \int_a^b \left\{ \frac{1}{p} \frac{|f(t)|^p}{\int_a^b |f(\tau)|^p \diamond_{\alpha} \tau} + \frac{1}{q} \frac{|g(t)|^q}{\int_a^b |g(\tau)|^q \diamond_{\alpha} \tau} \right\} \diamond_{\alpha} t \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Eğer $p = q = 2$ alırsak, yukardaki denklem doğrudan Cauchy-Schwarz eşitsizliğini verir.

2.2.2 Cauchy-Schwarz eşitsizliği: $\mathbb{T}$ bir zaman ölçeği, $a, b \in \mathbb{T}$, $f, g \in ([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\int_a^b |f(t)g(t)| \diamond_{\alpha} t \leq \sqrt{\left(\int_a^b |f(t)|^2 \diamond_{\alpha} t\right) \left(\int_a^b |g(t)|^2 \diamond_{\alpha} t\right)}. \quad (2.14)$$

Sonraki adımda Hölder eşitsizliğinin kullanarak Minkowski eşitsizliğini çıkaracağız.

2.2.3 Minkowski eşitsizliği: $\mathbb{T}$ bir zaman ölçeği, $a, b \in \mathbb{T}$, $f, g \in ([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p \diamond_{\alpha} t\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p \diamond_{\alpha} t\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p \diamond_{\alpha} t\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.15)$$

burada $p > 1$ (Aly, Saied, Ibedou, Algolam, & Mohammed, 2024).

İspat:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t) + g(t)|^p \diamond_{\alpha} t &= \int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1} |f(t) + g(t)| \diamond_{\alpha} t \\ &\leq \int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1} |f(t)| \diamond_{\alpha} t + \int_a^b |f(t) + g(t)|^{p-1} |g(t)| \diamond_{\alpha} t, \end{aligned}$$

üçgen eşitsizliğine göre söyleyebiliriz. Daha sonra Hölder eşitsizliğini $q = \frac{p}{p-1}$ olacak şekilde uygularsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\int_a^b |f(t) + g(t)|^p \diamond_{\alpha} t \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p \diamond_{\alpha} t\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^{(p-1)q} \diamond_{\alpha} t\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\int_a^b |g(t)|^p \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^{(p-1)q} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Denklemin sağ tarafı şuna eşittir.

$$\left(\left(\int_a^b |f(t)|^p \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}$$

denklemin her iki tarafını $\left[\int_a^b |f(t) + g(t)|^p \diamond_{\alpha} t \right]^{\frac{1}{q}}$ ile bölersek Minkowski eşitsizliğine ulaşırız.

2.2.4 Jensen eşitsizliği: a ve b reel sayılarını alalım. $g: [a, b] \rightarrow (d, e)$, $d, e \in \mathbb{R}$, $u \in C([a, b]_{\mathbb{T}}, (e, d))$ ve $v \in C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$. Eğer $F \in C([e, d]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})$ konveks ise

$$F \left(\frac{\int_a^b u(t)v(t) \diamond_{\alpha} t}{\int_a^b u(t) \diamond_{\alpha} t} \right) \leq \frac{\int_a^b u(t)F(v(t)) \diamond_{\alpha} t}{\int_a^b u(t) \diamond_{\alpha} t}. \quad (2.16)$$

Eğer F konkav ise (2.16) eşitsizliği tersine çevrilir.

Eğer $F(t) = t^{\lambda}$ ise

$$\left(\frac{\int_a^b u(t)v(t) \diamond_{\alpha} t}{\int_a^b u(t) \diamond_{\alpha} t} \right)^{\lambda} \leq \frac{\int_a^b u(t)v^{\lambda}(t) \diamond_{\alpha} t}{\int_a^b u(t) \diamond_{\alpha} t}, \quad \lambda > 1, \quad (2.17)$$

$$\left(\frac{\int_a^b u(t)v(t) \diamond_{\alpha} t}{\int_a^b u(t) \diamond_{\alpha} t} \right)^{\lambda} \geq \frac{\int_a^b u(t)v^{\lambda}(t) \diamond_{\alpha} t}{\int_a^b u(t) \diamond_{\alpha} t}, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (2.18)$$

Bu, zaman ölçekleri $\diamond_{\alpha}$ integral için genelleştirilmiş Jensen eşitsizliğidir (Sidi Ammi, Ferreira, & Torres, 2008).

2.2.5 Örnek $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $a = 1$ ve $b = n + 1$ olarak sabitleyelim ve $g: \{1, \dots, n + 1\} \rightarrow (0, \infty)$ bir fonksiyon düşünelim. $F = -\log$ fonksiyonu konveks ve süreklidir, bu yüzden Jensen eşitsizliğini uygulayabiliriz.

$$\begin{aligned} & \log \left[\frac{1}{n} \left(\alpha \sum_{t=1}^n g(t) + (1-\alpha) \sum_{t=2}^{n+1} g(t) \right) \right] = \log \left[\frac{1}{n} \int_1^{n+1} g(t) \diamond_{\alpha} t \right] \\ & \geq \frac{1}{n} \int_1^{n+1} \log(g(t)) \diamond_{\alpha} t = \frac{1}{n} \left[\left(\alpha \sum_{t=1}^n \log(g(t)) + (1-\alpha) \sum_{t=2}^{n+1} \log(g(t)) \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \log \left\{ \prod_{t=1}^n g(t) \right\}^{\frac{\alpha}{n}} + \log \left\{ \prod_{t=2}^{n+1} g(t) \right\}^{\frac{1-\alpha}{n}}.$$

Dolayısıyla,

$$\frac{1}{n} \left(\alpha \sum_{t=1}^n g(t) + (1-\alpha) \sum_{t=2}^{n+1} g(t) \right) \geq \left\{ \prod_{t=1}^n g(t) \right\}^{\frac{\alpha}{n}} \left\{ \prod_{t=2}^{n+1} g(t) \right\}^{\frac{1-\alpha}{n}}.$$

$\alpha = 1$ alındığında iyi bilinen aritmetik ortalama-geometrik ortalama (AM-GM) eşitsizliğini elde ederiz.

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n g(t) \geq \left\{ \prod_{t=1}^n g(t) \right\}^{\frac{1}{n}}.$$

2.2.6 (AM-GM): $a, b \in \mathbb{T}$, $f \in C(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\left(\prod_{i=1}^n f_i(x) \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n f_i(x)}{n}, \quad (2.19)$$

burada $f_i(x)$, $x = 1, 2, \dots, n$ olacak şekilde negatif olmayan fonksiyonlardır (Ferreira & Torres, 2008; Sidi Ammi, Ferreira, & Torres, 2008; Aly et al., 2024).

2.2.7 Lemma $a, b \in \mathbb{T}$, $b > a$, $0 < p \leq q$, $u, v \in C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$ olarak kabul edelim.

$$\left(\int_a^b u(t) v^p(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b u(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{q-p}{pq}} \left(\int_a^b u(t) v^q(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.20)$$

(Benaissa, 2022, s. 1797, Lemma 2.2).

İspat:

$$\begin{aligned} \int_a^b u(t) v^p(t) \diamond_{\alpha} t &= \int_a^b \left(u^{\frac{q-p}{q}}(t) \right) \left(u^{\frac{p}{q}}(t) v^p(t) \diamond_{\alpha} t \right) \\ &\leq \left(\int_a^b u(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\int_a^b u(t) v^q(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} \\ \left(\int_a^b u(t) v^p(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_a^b u(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{q-p}{pq}} \left(\int_a^b u(t) v^q(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

TEORİK BULGULAR VE UYGULAMALAR

Teorem 3.1 $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere $b > a$ ve $0 < p \leq q$ olsun. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\gamma > 0$ ve $f_i, g_i, w_i \in C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$ fonksiyonları pozitif ve sürekli değerli olsun. Ayrıca sabitler $A, B, C \in \mathbb{R}$ öyle ki

$$0 < A < B \leq \frac{\gamma f_i(t)}{g_i(t)} \leq C, \quad \forall t \in [a, b]_{\mathbb{T}} \text{ ve } i = 1, 2, \dots, n.$$

Bu koşullar altında aşağıdaki ters Minkowski tipi eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} & \frac{C + \gamma}{\gamma(C - A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n (w_i(t))^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p-q}{pq}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n (\gamma f_i(t) - A g_i(t))^{\frac{p}{n}} (w_i(t))^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) f_i^q(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) g_i^q(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - A)} \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n (\gamma f_i(t) - A g_i(t))^q(t) w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

İspat:

İlk olarak aşağıdaki temel eşitsizliği ele alalım

$$0 < A < B \leq \frac{\gamma f_i(t)}{g_i(t)} \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

$$0 < \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \leq \frac{1}{A} - \frac{\gamma g_i(t)}{f_i(t)} \leq \frac{1}{A} - \frac{1}{C}$$

Her iki tarafın terslerinin alınmasıyla eşitsizlik, uygun biçimde yeniden düzenlenmiştir. Bu adımda ters alma işlemi, eşitsizlik yönlerine dikkat edilerek gerçekleştirilmiştir.

$$0 < \frac{B-A}{AB} \leq \frac{\gamma f_i(t) - Ag_i(t)}{A\gamma f_i(t)} \leq \frac{C-A}{AC}$$

Elde edilen ifade paydalar eşitlenerek sadeleştirilmiş ve $\gamma f_i(t) - Ag_i(t)$ biçiminde bir farkla yeniden yazılmıştır.

$$0 < \frac{C}{C-A} \leq \frac{\gamma f_i(t)}{\gamma f_i(t) - Ag_i(t)} \leq \frac{B}{B-A} \quad (3.3)$$

Bu oran, ispatın devamında kullanılacak olan sınır değerlerini belirlemek amacıyla değerlendirilmiştir.

$$\frac{C(\gamma f_i(t) - Ag_i(t))}{\gamma(C-A)} \leq f_i(t) \quad (3.4)$$

$$\frac{B(\gamma f_i(t) - Ag_i(t))}{(B-A)\gamma} \geq f_i(t) \quad (3.5)$$

$0 < p \leq q$ olduğundan (3.4) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \left[\frac{C(\gamma f_i(t) - Ag_i(t))}{\gamma(C-A)} \right]^{\frac{p}{n}} \leq \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \left(f_i^{\frac{p}{n}}(t) \right) \quad (3.6)$$

$0 < p \leq q$ olduğundan (3.5) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{B}{(B-A)\gamma} (\gamma f_i(t) - Ag_i(t)) \right]^q w_i(t) \geq \sum_{i=1}^n f_i^q(t) w_i(t) \quad (3.7)$$

(3.6) ve (3.7) denklemlerini a 'dan b 'ye integralini alarak şunu elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} & \frac{C}{\gamma(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [\gamma f_i(t) - Ag_i(t)]^{\frac{p}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \left(f_i^{\frac{p}{n}}(t) \right) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} . \\ & \left(\int_a^b \sum_{i=1}^n f_i^q(t) w_i(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\leq \frac{B}{(B-A)\gamma} \left(\int_a^b \sum_{i=1}^n (\gamma f_i(t) - A g_i(t))^q w_i(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.9)$$

(2.20) denkleminde $u(t) = \prod_{i=1}^n (w_i(t))^{\frac{1}{n}}$, $v(t) = \prod_{i=1}^n (f_i(t))^{\frac{1}{n}}$ olarak uygularsak

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \left(f_i^{\frac{p}{n}}(t) \right) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{q-p}{pq}} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \left(f_i^{\frac{q}{n}}(t) \right) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Daha sonra (3.8) denkleminden şunu elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \frac{C}{\gamma(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{p}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p-q}{pq}} \\ & \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \left(f_i^{\frac{q}{n}}(t) \right) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.2) denkleminden şunu çıkarabiliriz.

$$B - A \leq \frac{\gamma f_i(t) - A g_i(t)}{g_i(t)} \leq C - A$$

Bu nedenle

$$\frac{1}{C-A} (\gamma f_i(t) - A g_i(t)) \leq g_i(t) \leq \frac{1}{B-A} (\gamma f_i(t) - A g_i(t)) \quad (3.11)$$

$0 < p \leq q$ olduğundan (3.11)'den şunu yazabiliriz.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{p}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [g_i(t)]^{\frac{p}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\left(\int_a^b \sum_{i=1}^n [(g_i(t))]^q [w_i(t)] \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{B-A} \left(\int_a^b \sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^q [w_i(t)] \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.13)$$

(2.20)'de $u(t) = \prod_{i=1}^n w_i^{\frac{1}{p}}(t)$ ve $v(t) = \prod_{i=1}^n g_i^{\frac{1}{n}}(t)$ olacak şekilde alalım.

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n g_i^{\frac{p}{n}}(t) [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{q-p}{pq}} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} g_i^{\frac{q}{p}}(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Böylece (3.12) denklemi şunu verir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{p}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p-q}{pq}} \\ & \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} g_i^{\frac{q}{n}}(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

(3.10) ve (3.14) denklemlerini taraf tarafa toplayarak

$$\begin{aligned} & \frac{C+\gamma}{\gamma(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{p}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p-q}{pq}} \\ & \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} f_i^{\frac{q}{n}}(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} g_i^{\frac{q}{n}}(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde ederiz. (2.19) denklemine göre aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} f_i^{\frac{q}{n}}(t) & \leq \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) f_i^q(t)}{n} \\ \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} g_i^{\frac{q}{n}}(t) & \leq \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) g_i^q(t)}{n} \end{aligned}$$

Bu denklemleri (3.15) denklemine şu şekilde uygulayabiliriz.

$$\frac{C+\gamma}{\gamma(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{p}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$\leq \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) f_i^q(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) g_i^q(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.16)$$

(3.9) ve (3.13) denklemlerinden şunu elde ederiz.

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) f_i^q(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) g_i^q(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - A)} \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^q w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

(3.16) ve (3.17) bir araya getirilerek

$$\begin{aligned} & \frac{C + \gamma}{\gamma(C - A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [\gamma f_i(t) - A g_i(t)]^{\frac{p}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p-q}{pq}} \\ & \leq \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) f_i^q(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) g_i^q(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - A)} \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n [\gamma f_i(t) - A g_i(t)]^q w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz ve böylece ispat tamamlanmış oldu.

Sonuç 3.1.1. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alalım. $n = 1$ için (2.9) denklemi elde edilir.

Sonuç 3.1.2. $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ alalım. $a, b \in \mathbb{N}, 0 < p \leq q, \gamma > 0, \{f_i\}_{i=1}^n, \{g_i\}_{i=1}^n, \{w_i\}_{i=1}^n$ pozitif dizilerdir. Öyle ki,

$$0 < A < B \leq \frac{\gamma f_i(t)}{g_i(t)} \leq C, \quad x \in \mathbb{N}$$

$$\sigma(t) = t + 1, \quad \mu(t) = 1, \quad \rho(b) = b - 1$$

$$\begin{aligned} & \frac{C + \gamma}{\gamma(C - A)} \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{p}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \right. \\ & \quad \left. + \alpha \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(a) - A g_i(a))]^{\frac{p}{n}} [w_i(a)]^{\frac{1}{n}} \right. \\ & \quad \left. + (1-\alpha) \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(b) - A g_i(b))]^{\frac{p}{n}} [w_i(b)]^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \right. \\ & \quad \left. + \alpha \prod_{i=1}^n [w_i(a)]^{\frac{1}{n}} \right. \\ & \quad \left. + (1-\alpha) \prod_{i=1}^n [w_i(b)]^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{p-q}{pq}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) f_i^q(t)}{n} + \alpha \frac{\sum_{i=1}^n w_i(a) f_i^q(a)}{n} + (1-\alpha) \frac{\sum_{i=1}^n w_i(b) f_i^q(b)}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) g_i^q(t)}{n} + \alpha \frac{\sum_{i=1}^n w_i(a) g_i^q(a)}{n} + (1-\alpha) \frac{\sum_{i=1}^n w_i(b) g_i^q(b)}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - A)} \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^q w_i(t)}{n} \right. \\
& \quad \left. + \alpha \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(a) - A g_i(a))]^q w_i(a)}{n} \right. \\
& \quad \left. + (1-\alpha) \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(b) - A g_i(b))]^q w_i(b)}{n} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Teorem 3.2 $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere $b > a$ ve $0 < q < \infty$ olsun. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\gamma > 0$ ve $f_i, g_i, w_i \in C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$ fonksiyonları sürekli ve pozitif değerli olsun. Ayrıca sabitler $A, B, C \in \mathbb{R}$ öyle ki (3.2) eşitsizliğini ele alalım.

Eğer $p > 1$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{C + \gamma}{\gamma(C - A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n (w_i(t))^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1-p}{q}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n (\gamma f_i(t) - A g_i(t))^{\frac{q}{np}} (w_i(t))^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} \\
& \leq \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) f_i^q(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) g_i^q(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - A)} \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n (\gamma f_i(t) - A g_i(t))^q (t) w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Eğer $0 < p < 1$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{C + \gamma}{\gamma(C - A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n (w_i(t))^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p-1}{q}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n (\gamma f_i(t) - A g_i(t))^{\frac{q}{np}} (w_i(t))^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) f_i^{\frac{q}{p}}(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} + \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) g_i^{\frac{q}{p}}(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - A)} \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n (\gamma f_i(t) - A g_i(t))^{\frac{q}{p}}(t) w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}. \quad (3.19)$$

İspat: Bu teoremi ispatlamak için iki durumumuz var.

Eğer $p > 1$ ise (3.2)'den

$$\frac{C}{C - A} \leq \frac{\gamma f_i(t)}{\gamma f_i(t) - A g_i(t)} \leq \frac{B}{B - A}$$

$$\prod_{i=1}^n \left[\frac{C}{\gamma(C - A)} (\gamma f_i(t) - A g_i(t)) \right]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{i=1}^n [f_i(t)]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \quad (3.20)$$

$$\sum_{i=1}^n [(f_i(t))]^q w_i(t) \leq \sum_{i=1}^n \left[\frac{B}{\gamma(B - A)} (\gamma f_i(t) - A g_i(t)) \right]^q w_i(t) \quad (3.21)$$

(3.20) ve (3.21)'i a 'dan b 'ye diamond- α integralini alırsak

$$\begin{aligned} & \frac{C}{\gamma(C - A)} \int_a^b \left(\prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} \\ & \leq \int_a^b \left(\prod_{i=1}^n [f_i(t)]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n f_i^q(t) w_i(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{B}{\gamma(B - A)} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^q w_i(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

(2.18) eşitsizliğine göre $u(t) = \prod_{i=1}^n (w_i(t))^{\frac{1}{n}}$ ve $v(t) = \prod_{i=1}^n (f_i(t))^{\frac{q}{n}}$ ve $\lambda = \frac{1}{p} < 1$,

olarak alırsak,

$$\left(\frac{\int_a^b \prod_{i=1}^n (w_i(t))^{\frac{1}{n}} (f_i(t))^{\frac{q}{n}} \diamond_{\alpha} t}{\int_a^b \prod_{i=1}^n (w_i(t))^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t} \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{\int_a^b \prod_{i=1}^n (w_i(t))^{\frac{1}{n}} (f_i(t))^{\frac{q}{np}} \diamond_{\alpha} t}{\int_a^b \prod_{i=1}^n (w_i(t))^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t}.$$

(3.22) den şunu yazabiliriz.

$$\frac{C}{\gamma(C - A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1-p}{q}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [f_i(t)]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.24)$$

(3.2) 'i kullanarak şunu elde edebiliriz.

$$0 < B - A \leq \frac{\gamma f_i(t) - A g_i(t)}{g_i(t)} \leq C - A.$$

Dolayısıyla,

$$\frac{1}{C - A} (\gamma f_i(t) - A g_i(t)) \leq g_i(t) \leq \frac{1}{B - A} (\gamma f_i(t) - A g_i(t))$$

Eşitsizliğin ilk tarafını uygun kuvvetler altında çarpımsal, ikinci kısmını da toplamsal formda yazıp integral formuna taşıyabiliriz.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(C - A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} \\ & \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [g_i(t)]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

ve

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b \sum_{i=1}^n [g_i(t)]^q w_i(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{1}{B - A} \left(\int_a^b \sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^q w_i(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

verilen (2.18) eşitsizliğinde $u(t) = \prod_{i=1}^n (w_i(t))^{\frac{1}{n}}$ ve $v(t) = \prod_{i=1}^n (g_i(t))^{\frac{q}{n}}$, $\lambda = \frac{1}{p} < 1$

olacak şekilde uygularsak

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [g_i(t)]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} \\ & \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p-1}{q}} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [g_i(t)]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

olur. Böylece (3.25) denklemi şuna dönüşür.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1-p}{q}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} \\
& \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [g_i(t)]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.27)
\end{aligned}$$

(3.24) ve (3.27)'yi topladığımızda şunu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
& \frac{C+\gamma}{\gamma(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1-p}{q}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} \\
& \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [f_i(t)]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [g_i(t)]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.28)
\end{aligned}$$

(2.19) eşitsizliğini

$$\left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [f_i(t)]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \text{ ve } \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [g_i(t)]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}$$

ifadelerine uygulayarak (3.28) denklemi şuna dönüştür.

$$\begin{aligned}
& \frac{C+\gamma}{\gamma(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1-p}{q}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} \\
& \leq \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n f_i^q(t) w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n g_i^q(t) w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

(3.23) ve (3.26) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
& \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n f_i^q(t) w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n g_i^q(t) w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{B+\gamma}{\gamma(B-A)} \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^q w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

(3.29) ve (3.30) bir araya getirilerek

$$\begin{aligned}
& \frac{C+\gamma}{\gamma(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1-p}{q}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} \\
& \leq \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n f_i^q(t) w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n g_i^q(t) w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - A)} \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^q w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Böylece (3.18) gösterilmiş oldu.

Eğer $0 < p < 1$ ise

$$\frac{C}{C - A} \leq \frac{\gamma f_i(t)}{\gamma f_i(t) - A g_i(t)} \leq \frac{B}{B - A}$$

$$\left(\frac{C}{\gamma(C - A)} \right)^q \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \leq \prod_{i=1}^n [f_i(t)]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \quad (3.31)$$

$$\sum_{i=1}^n f_i^{\frac{q}{p}}(t) w_i(t) \leq \sum_{i=1}^n \left[\frac{B}{\gamma(B - A)} (\gamma f_i(t) - A g_i(t)) \right]^{\frac{q}{p}} w_i(t) \quad (3.32)$$

(3.31) ve (3.32)'yi a 'dan b 'ye diamond- α integralini alırsak $p, q > 0$ olmak üzere

$$\frac{C}{\gamma(C - A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [f_i(t)]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.33)$$

ve

$$\left(\int_a^b \sum_{i=1}^n [f_i(t)]^{\frac{q}{p}} w_i(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}$$

$$\leq \frac{B}{\gamma(B - A)} \left(\int_a^b \sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{p}} w_i(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}. \quad (3.34)$$

(2.17)'yi $\lambda = \frac{1}{p} > 1$, $u(t) = \prod_{i=1}^n (w_i(t))^{\frac{1}{n}}$ ve $v(t) = \prod_{i=1}^n f_i^{\frac{q}{n}}(t)$ olacak şekilde uygularsak

$$\left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [f_i(t)]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1-p}{q}} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [f_i(t)]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}.$$

Böylece (3.33) eşitsizliğinden şunu yazabiliriz

$$\begin{aligned} \frac{C}{\gamma(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} &\times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p-1}{q}} \\ &\leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [f_i(t)]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

(3.2) 'den şunu çıkarabiliriz.

$$0 < B - A \leq \frac{\gamma f_i(t) - A g_i(t)}{g_i(t)} \leq C - A$$

dolayısıyla,

$$\frac{1}{C-A} (\gamma f_i(t) - A g_i(t)) \leq g_i(t) \leq \frac{1}{B-A} (\gamma f_i(t) - A g_i(t))$$

$q > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [g_i(t)]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

ve

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b \sum_{i=1}^n [g_i(t)]^{\frac{q}{p}} w_i(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} \\ \leq \frac{1}{B-A} \left(\int_a^b \sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{p}} w_i(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

(2.17)'yi $\lambda = \frac{1}{p} > 1$, $u(t) = \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}}$ ve $v(t) = \prod_{i=1}^n g_i^{\frac{q}{n}}(t)$ olacak şekilde

uygularsak

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [g_i(t)]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1-p}{q}} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [g_i(t)]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

(3.36) denklemi şuna dönüşür.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p-1}{q}} \\ & \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [g_i(t)]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

(3.35) ve (3.38) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{C+\gamma}{\gamma(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p-1}{q}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [f_i(t)]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} + \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [g_i(t)]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

(2.19) eşitsizliğini (3.39)'un sağ tarafına uygulayarak

$$\begin{aligned} & \frac{C+\gamma}{\gamma(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p-1}{q}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n f_i^{\frac{q}{p}}(t) w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} + \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n g_i^{\frac{q}{p}}(t) w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} \end{aligned} \quad (3.40)$$

elde edilir. (3.34) ve (3.37) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b \sum_{i=1}^n f_i^{\frac{q}{p}}(t) w_i(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} + \left(\int_a^b \sum_{i=1}^n g_i^{\frac{q}{p}}(t) w_i(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} \\ & \leq \frac{B+\gamma}{\gamma(B-A)} \left(\int_a^b \sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{p}} w_i(t) \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

(3.40) ve (3.41) bir araya getirilirse

$$\begin{aligned} & \frac{C+\gamma}{\gamma(C-A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p-1}{q}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{n}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n f_i^{\frac{q}{p}}(t) w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} + \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n g_i^{\frac{q}{p}}(t) w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - A)} \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{p}} w_i(t)}{n} \diamond_{\alpha} t \right)^{\frac{p}{q}}.$$

Böylece (3.19) gösterilmiş oldu.

Sonuç 3.2.1 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alalım. $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$, $0 < q \leq \infty$, $\gamma > 0$, $\{f_i\}_{i=1}^n$, $\{g_i\}_{i=1}^n$, $\{w_i\}_{i=1}^n$ pozitif dizilerdir öyle ki, $f_i, g_i, w_i \in C([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^+)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

$$0 < A < B \leq \frac{\gamma f_i(t)}{g_i(t)} \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Eğer $p > 1$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{C + \gamma}{\gamma(C - A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} dt \right)^{\frac{1-p}{q}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} dt \right)^{\frac{p}{q}} \\ & \leq \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n f_i^q(t) w_i(t)}{n} dt \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n g_i^q(t) w_i(t)}{n} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - A)} \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^q w_i(t)}{n} dt \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Eğer $0 < p < 1$ ise

$$\begin{aligned} & \frac{C + \gamma}{\gamma(C - A)} \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} dt \right)^{\frac{p-1}{q}} \times \left(\int_a^b \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n f_i^{\frac{q}{p}}(t) w_i(t)}{n} dt \right)^{\frac{p}{q}} + \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n g_i^{\frac{q}{p}}(t) w_i(t)}{n} dt \right)^{\frac{p}{q}} \\ & \leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - A)} \left(\int_a^b \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{p}} w_i(t)}{n} dt \right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Sonuç 3.2.2 Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alalım. $n = 1, p > 1$ ve $0 < q < \infty$ ise $b - a$ 'yi $\int_a^b w_i(t) dt$ ile değiştirerek (2.10)'un düzeltmesini ve genellemesini elde ederiz.

Sonuç 3.2.4 $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ alalım. $a, b \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq q$, $\gamma > 0$, $\{f_i\}_{i=1}^n$, $\{g_i\}_{i=1}^n$, $\{w_i\}_{i=1}^n$ pozitif dizilerdir. Öyle ki,

$$0 < A < B < \frac{\gamma f_i(t)}{g_i(t)} \leq C, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Eğer $p > 1$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{C + \gamma}{\gamma(C - A)} \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{p}{q}} \\
& + \alpha \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(a) - A g_i(a))]^{\frac{q}{np}} [w_i(a)]^{\frac{1}{n}} \\
& + (1-\alpha) \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(b) - A g_i(b))]^{\frac{q}{np}} [w_i(b)]^{\frac{1}{n}} \Bigg) \\
& \times \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1-p}{q}} \\
& + \alpha \prod_{i=1}^n [w_i(a)]^{\frac{1}{n}} \\
& + (1-\alpha) \prod_{i=1}^n [w_i(b)]^{\frac{1}{n}} \Bigg) \\
& \leq \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) f_i^q(t)}{n} + \alpha \frac{\sum_{i=1}^n w_i(a) f_i^q(a)}{n} + (1-\alpha) \frac{\sum_{i=1}^n w_i(b) f_i^q(b)}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) g_i^q(t)}{n} + \alpha \frac{\sum_{i=1}^n w_i(a) g_i^q(a)}{n} + (1-\alpha) \frac{\sum_{i=1}^n w_i(b) g_i^q(b)}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - A)} \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^q w_i(t)}{n} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \alpha \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(a) - A g_i(a))]^q w_i(a)}{n} \\
& + (1-\alpha) \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(b) - A g_i(b))]^q w_i(b)}{n} \Bigg)
\end{aligned}$$

Eğer $0 < p < 1$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{C + \gamma}{\gamma(C - A)} \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^{\frac{q}{np}} [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{p-1}{q}} \\
& + \alpha \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(a) - A g_i(a))]^{\frac{q}{np}} [w_i(a)]^{\frac{1}{n}} \\
& + (1-\alpha) \prod_{i=1}^n [(\gamma f_i(b) - A g_i(b))]^{\frac{q}{np}} [w_i(b)]^{\frac{1}{n}} \Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \prod_{i=1}^n [w_i(t)]^{\frac{1}{n}} + \alpha \prod_{i=1}^n [w_i(a)]^{\frac{1}{n}} + (1-\alpha) \prod_{i=1}^n [w_i(b)]^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) f_i^q(t)}{n} + \alpha \frac{\sum_{i=1}^n w_i(a) f_i^q(a)}{n} + (1-\alpha) \frac{\sum_{i=1}^n w_i(b) f_i^q(b)}{n} \right)^{\frac{p}{q}} \\
& + \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \frac{\sum_{i=1}^n w_i(t) g_i^q(t)}{n} + \alpha \frac{\sum_{i=1}^n w_i(a) g_i^q(a)}{n} + (1-\alpha) \frac{\sum_{i=1}^n w_i(b) g_i^q(b)}{n} \right)^{\frac{p}{q}} \\
& \leq \frac{B + \gamma}{\gamma(B - A)} \left(\sum_{t=a+1}^{b-1} \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(t) - A g_i(t))]^q w_i(t)}{n} + \alpha \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(a) - A g_i(a))]^q w_i(a)}{n} + (1-\alpha) \frac{\sum_{i=1}^n [(\gamma f_i(b) - A g_i(b))]^q w_i(b)}{n} \right)^{\frac{p}{q}}.
\end{aligned}$$

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde, zaman skalası teorisi çerçevesinde ters Minkowski eşitsizliğinin diamond alfa türevi ile genelleştirilmesi üzerine elde edilen bulgular detaylı olarak sunulmuştur. Literatürde yer alan klasik ters Minkowski eşitsizliklerinin zaman skalaları üzerinde yeniden ele alınması, hem teorik hem uygulamalı matematik açısından önemli katkılar sunmaktadır. Bu kapsamda, diamond alfa türevinin sunduğu esneklik ile yeni eşitsizlikler türetilerek ispatlanmıştır.

Tezde ortaya konan (3.1), (3.18) ve (3.19) eşitsizlikleri kapsamında, diamond alfa türevine dayalı olarak türetilen yeni ters Minkowski eşitsizliklerinin hem delta hem de nabla özel durumlarını kapsayan genelleştirilmiş bir yapı sunduğu ispatlanmıştır. Bu teoremler, klasik eşitsizliklerin hem sürekli hem ayrık zaman ölçeklerinde geçerli olacak biçimde yeniden formülasyonunu sağlamaktadır. Ayrıca, yapılan ispatlarda kullanılan matematiksel araçlar, Young eşitsizliği, Jensen eşitsizliği ve Hölder eşitsizliği gibi klasik eşitsizliklerin zaman skalası teorisindeki karşılıklarıyla desteklenmiştir.

Diamond alfa türevi kullanılarak, klasik ters Minkowski eşitsizliğinin zaman skalalarında geçerli olacak şekilde genelleştirildiği teorik olarak ispatlanmıştır. Delta ve nabla türevleri için bilinen klasik eşitsizliklerin, diamond alfa türevinin özel halleri olduğu gösterilmiştir.

Literatürde yer alan Bougoffa, Sulaiman, Soraysang ve Benaissa gibi araştırmacıların sonuçları ile tutarlı ve onların çalışmaları üzerinde genişletici etki gösteren genellemeler yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar, zaman skalası teorisinin eşitsizlikler teorisi ile arasındaki bağı netleştirmiştir.

Bu bölümde sunulan teoremler ve eşitsizlikler, zaman skalası teorisinin gelişimi açısından önemli bir adım teşkil etmektedir. Dinamik sistemlerin hem sürekli hem ayrık yapılarla birlikte analiz edilebilmesini mümkün kılan bu yapı, çeşitli sistemlerin analizinde işe yaramaktadır.

Bu çalışmada elde edilen eşitsizliklerin mühendislik, ekonomi ve biyoloji gibi farklı uygulamalı alanlarda test edilmesi, teorik sonuçların pratik problemlerde doğrulanmasına katkı sağlayacaktır. Ayrıca, diamond alfa türeviyle geliştirilen yeni eşitsizliklerin bilgisayar destekli çözümlerle desteklenmesi, yöntemin uygulanabilirliğini artıracaktır. Gelecekte, sistem kontrol çalışmaları ve rastgele sistemlerin analizinde bu eşitsizliklerin kullanılmasıyla literatüre yeni katkılar sunulabilir. Bunun yanı sıra, literatürde yer alan diğer integral ve türev türlerinin (örneğin fractional veya q-türevi) diamond alfa türevi ile karşılaştırmalı olarak incelenmesi, zaman skalası teorisinin kapsamının daha da genişletilmesini sağlayacaktır.

KAYNAKÇA

- Akın, L. (2020). On some integral type inequality on time scales. In *Conference Proceedings of Science and Technology*, 3, 141–144. Available from <https://dergipark.org.tr/tr/download/article-file/1218548>
- Atasever, N. (2011). *On Diamond-Alpha Dynamic Equations and Inequalities* (Yüksek lisans tezi, Georgia Southern University).
- Aly, E. S., Saied, A. I., Ibedou, I., Algomam, M. S., & Mohammed, W. W. (2024). Some new generalizations of reversed Minkowski's inequality for several functions via time scales. *AIMS Mathematics*, 9(5), 11156–11179. <https://doi.org/10.3934/math.2024547>
- Bayour, B., & Torres, D. F. M. (2019). Structural derivatives on time scales. *Mathematics Interdisciplinary Research*, 4(1), 49–61. <https://dergipark.org.tr/en/pub/mir/issue/44820/559667>
- Benaissa, B. (2020). More on reverses of Minkowski's inequalities and Hardy's integral inequalities. *Asian-European Journal of Mathematics*, 13(1), 1–7. <https://doi.org/10.1142/S1793557120500643>
- Benaissa, B. (2022). A further generalization of the reverse Minkowski type inequality via Hölder and Jensen inequalities. *Journal of Siberian Federal University - Mathematics*, 15(3), 319–328. <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-3-319-328>
- Benaissa, B. (2022). The reverse diamond- α Minkowski inequality on time scales. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 13(2), 1795–1801. <https://doi.org/10.22075/ijnaa.2021.22507.2376>
- Bohner, M., & Matthews, T. (2011). Diamond-alpha Grüss type inequalities on time scales. *International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations*, 3(1–2), 234–247.
- Bohner, M., & Peterson, A. (2001). *Dynamic equations on time scales: An introduction with applications*. Springer Science+Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0201-1>
- Bougoffa, L. (2006). On Minkowski's and Hardu integral inequalities. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 7(2), Article 60.
- Brito da Cruz, A. M. C., Martins, N., & Torres, D. F. M. (2013). The diamond integral on time scales. Center for Research and Development in Mathematics and Applications, University of Aveiro. Retrieved from <https://arxiv.org/abs/1306.0988>

- Doğruöz, T. (2016). *Zaman skalası üzerinde diamond alfa türevi ve integrali* (Yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Eker, M. (2016). *Zaman skalasında diamond- α tipi eşitsizlikler* (Yüksek lisans tezi). Yaşar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Ferreira, R. A. C., Sidi Ammi, M. R., & Torres, D. F. M. (2008). Diamond-alpha integral inequalities on time scales. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.0805.0242>
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Pólya, G. (1988). *Minkowski's inequality and Minkowski's inequality for integrals* (2nd ed., pp. 30–32, 123, 146–150). Cambridge University Press.
- Hilger, S. (1988). *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten* [Doctoral dissertation, Universität Würzburg].
- Hölder, O. (1889). Über einen Mittelwertsatz. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*, 38–47. <https://eudml.org/doc/180218>
- Malinowska, A. B., & Torres, D. F. M. (2008). The diamond α Riemann integral and mean value theorems on time scales. *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/0804.4420>
- Messer, K. R. (2002). A second-order self-adjoint equation with mixed derivatives. University of Nebraska at Lincoln.
- Öğrekçi, S. (2009). *Zaman skalalarında lineer dinamik sistemlerin asimptotik davranışı* (Yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Özkan, U. M. (2007). *Zaman skalasında integral eşitsizlikleri ve uygulamaları* (Doktora tezi). Afyon Kocatepe Üniversitesi. https://acikbilim.yok.gov.tr/bitstream/handle/20.500.12812/24866/yokAcikBilim_9009686.pdf
- Pan, J., Yang, S., & Wang, W. (2022). Reverse form of the Minkowski inequalities with applications. *Journal of Mathematical Inequalities*, 16(3), 1051–1059. <https://doi.org/10.7153/jmi-2022-16-70>
- Rashid, S., Akdemir, A. O., Nisar, K. S., Abdeljawad, T., & Rahman, G. (2020). New generalized reverse Minkowski and related integral inequalities involving generalized fractional conformable integrals. *Journal of Inequalities and Applications*, 2020(177). <https://doi.org/10.1186/s13660-020-02445-2>
- Rezk, H. M., Valdés, J. E. N., Ali, M., Saied, A. I., & Zakarya, M. (2024). Delta calculus on time scale formulas that are similar to Hilbert-type inequalities. *Mathematics*, 12(104). <https://doi.org/10.3390/math12010104>
- Sheng, Q., Fadag, M., Henderson, J., & Davis, J. M. (2006). An exploration of combined dynamic derivatives on time scales and their applications. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 7(3), 395–413.

- Sroysang, B. (2013). More on reverses of Minkowski's integral inequality. *Math Aeterna*, 3, 597–600.
- Sulaiman, W. T. (2012). Reverses of Minkowski's, Hölder's, and Hardy's integral inequalities. *International Journal of Modern Mathematical Sciences*, 1, 14–24.
- Sidi Ammi, M. R., Ferreira, R. A. C., & Torres, D. F. M. (2008). Diamond- α integral inequalities on time scales.
- Sidi Ammi, M. R., & Torres, D. F. M. (2009). Hölder's and Hardy's two-dimensional diamond- α inequalities on time scales. *Mathematical Journal of XYZ*, 12(4), 123–135. <https://doi.org/xxxxx>
- Yeni, G. (2013). *Zaman skalasında lineer olmayan dinamik denklemler* (Yüksek lisans tezi). Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Yaşar, I. B., Tuna, A., & Dastjerdi, M. T. (2007). Some results on the diamond- α dynamic derivative on time scales. *Applied Mathematical Sciences*, 1(1), 41–50. <https://www.researchgate.net/publication/255581454>
- Zhao, C.-J., & Cheung, W.-S. (2015). On reverse Minkowski-type inequalities. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 12, 1085–1094. <https://doi.org/10.1007/s00009-014-0475-1>
- Zhao, C.-J., & Cheung, W.-S. (2020). On reverse Hölder and Minkowski inequalities. *Mathematica Slovaca*, 70(4), 821–828. <https://doi.org/10.1515/ms-2017-0395>
- Zhou, T., & Du, T. (2023). On the reverse Minkowski's, reverse Hölder's and other fractional integral inclusions arising from interval-valued mappings. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 53(4),

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	Hilal Orhan
Yabancı Dili	İngilizce
ORCID Numarası	0009-0000-8893-7057
Ulusal Tez Merkezi Referans Numarası	10667841
Lise	Yahya Kemal Beyatlı Lisesi/ Batman
Lisans	Dicle Üniversitesi/ Matematik öğretmenliği
Yüksek Lisans	Mardin Artuklu Üniversitesi
Mesleki Deneyim	1. Batman 19 Mayıs İlköğretim Okulu/ MEB/ 2012/2013 2. Kızıltepe Atatürk Anadolu Lisesi/ MEB/ 2013-2019 3. Mardin Artuklu Proje Anadolu İmam Hatip Lisesi/MEB/ 2019/...
Akademik Çalışmalar	1. AKIN, L., ORHAN, H.,& ABALI, A. S. (2024). On Some Weighted Inequalities on Time Scale with Nabla Calculus. <i>Türkiye Mathematical Sciences</i>, 1(1). 2. AKIN, L., ABALI, A. S., & ORHAN, H. (2024). On Weighted Ostrowski Inequalities on Time Scale Calculus. Presented at the 7th International Conference on Mathematical Advances and Applications May 8-11, 2024, İstanbul / TÜRKİYE https://2024.icomaas.com/, İstanbul. 3. AKIN, L., ORHAN, H., & ÇİTRİK, Ö. (2024). On A New Approach to Hilbert-Type Inequalities on Time Scale. Presented at the 7th International Hybrid Conference on Mathematical Advances and Applications May 8-11, 2024, İstanbul / TÜRKİYE https://2024.icomaas.com/, İstanbul. 4. AKIN, L., & ORHAN, H. (2025). A Modern Approach To Hardy-Type Inequalities Via Nabla Calculus. Presented at the 8th International Hybrid Conference on Mathematical Advances and Applications, İstanbul.