BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN NİTELİKSEL ANALİZİ

HÜSNA AKAN

HAZİRAN 2025

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN NİTELİKSEL ANALİZİ

HÜSNA AKAN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

HAZİRAN 2025

DİYARBAKIR

BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN NİTELİKSEL ANALİZİ

Hüsna AKAN tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Danışman, **Matematik Bölümü**

Sınav Jürisi:

Prof. Dr. Mahmut MODANLI(*)
Matematik Bölümü, Harran Üniversitesi

Prof. Dr. Erhan PİŞKİN (**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Mustafa MIZRAK
Matematik Bölümü, Şırnak Üniversitesi

ONAY

Savunma Tarihi: 27 / 06 / 2025

(*) Jüri Başkanı
(**) Tez Danışmanı

Canım Kızıma…

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılayıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Hüsna AKAN

İmza: ………………………….

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmam süresince bana destek olan, bilgi ve deneyimleriyle yol gösteren değerli tez danışmanım Prof. Dr. Erhan PİŞKİN hocama en içten teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım boyunca bana sabırla rehberlik etmiş, eleştirileri ve önerileri ile bana katkı sağlamıştır. Ayrıca tez sürecinde fikirleri, yardımları, manevi destekleri ile yanımda olan doktora yapan arkadaşlarım; Ayşe FİDAN'a, Nebi YILMAZ'a, Muhteşem DEMİR'e, Gülistan BUTAKIN'a ve Ayşe DEMİRHAN'a minettarım. Çalışmam sürecindeki yardımları için ve her konuda bana güvenip beni destekleyen kıymetli arkadaşım Evrim AKKURT'a ve bu zorlu süreçte sabır, anlayış ve sevgisiyle daima yanımda olan en büyük motivasyon kaynağım sevgili eşime çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
R^n	n-boyutlu Euclid Uzayı
Ω	R^n de sınırlı bir bölge
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$L^p(\Omega)$	p. mertebeden Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	Sobolev Uzayı
$H^m(\Omega)$	Hilbert Uzayı
∇	Nabla operatörü (Gradiyent)
Δ	Laplace operatörü
$\overline{W}$	W kümesinin kapanışı

ÖZET

BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN NİTELİKSEL ANALİZİ

AKAN, Hüsna

Yüksek lisans, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
Haziran 2025, 63 sayfa

Bu çalışmada, logaritmik kaynak terimi içeren hiperbolik tipten bir kısmi diferansiyel denklemin çözümlerinin davranışı incelenmiştir. Özellikle, başlangıç koşulları yeterince büyük seçildiğinde çözümün zamana bağlı olarak üstel büyüme gösterdiği ispatlanmıştır. Enerji yöntemleri ve uygun test fonksiyonları kullanılarak, çözümün belirli normlarda alt ve üst sınırları elde edilmiştir. Bu sonuçlar, logaritmik kaynağın, denklemin dinamiğinde belirleyici bir rol oynadığını ve klasik polinomsal kaynak terimlerinden farklı olarak çözümlerde hızlı büyümeye neden olabileceğini göstermektedir. Elde edilen bulgular, ilgili denklemin matematiksel yapısına dair daha derin bir anlayış sunmakta ve benzer nitelikteki denklemler için genelleştirilebilir sonuçların kapısını aralamaktadır. Tezin ikinci bölümünde literatür bilgisi verilmiştir. Üçüncü bölümünde ise tezimizin sonraki kısımlarında kullanılacak olan bazı önemli tanım, teorem, lemma, eşitsizlik ve metodlar verilmiştir. Dördüncü bölümde tezin esas bölümünü oluşturan problem tanıtılmış ve bu problemin çözümlerinin varlığı ve patlaması potansiyel kuyu metodu ile çalışılmıştır. Potansiyel kuyu metodu, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığını ve patlama durumunu analiz etmek için güçlü bir araçtır. Bu yöntem, sistemin enerjisini ve potansiyel kuyularını analiz ederek çözümlerin zaman içindeki davranışlarını öngörmeye yardımcı olur. Bu analiz, özellikle çözümün kararlılığını ve patlama durumunu anlamak için önemlidir. Yüksek mertebeden hiperbolik tipteki denklemlerin çözümlerinin varlığı potansiyel kuyu metodu ile incelenmesi dolayısıyla, bu çalışma evolüsyon denklemlerin daha geniş bir çerçeve içinde önemini ve uygulamalarını derinlemesine araştırmayı amaçlamaktadır. Tezin beşinci bölümünde logaritmik kaynak terim içeren yüksek mertebeden hiperbolik tipten bir denklemin çözümlerinin büyüme kestirimi yardımıyla patlaması incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Global varlık, Logaritmik kaynak terim, Patlama, Potansiyel kuyu, Üstel büyüme, Yüksek mertebeden denklem

ABSTRACT

QUALITATIVE ANALYSIS OF THE SOLUTIONS OF A SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

AKAN, Hüsna
Master's degree, Department of Mathematics
Advisor: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN
June 2025, 63 pages

In this study, the behavior of the solutions of a hyperbolic type partial differential equation with a logarithmic source term is examined. In particular, it has been proven that when the initial conditions are chosen sufficiently large, the solution exhibits exponential growth over time. By using energy methods and appropriate test functions, lower and upper bounds of the solution in certain norms have been obtained. These results show that the logarithmic source plays a decisive role in the dynamics of the equation and, unlike classical polynomial source terms, may cause rapid growth in the solutions. The findings provide a deeper understanding of the mathematical structure of the related equation and open the door to generalizable results for similar types of equations. In the second chapter of the thesis, a literature review is presented. In the third chapter, some important definitions, theorems, lemmas, inequalities, and methods that will be used in the following parts of the thesis are given. In the fourth chapter, the main problem of the thesis is introduced, and the existence and blow-up of the solutions to this problem are studied using the potential well method. The potential well method is a powerful tool to analyze the existence and blow-up of solutions to partial differential equations. This method helps to predict the time- dependent behavior of the solutions by analyzing the energy and potential wells of the system. This analysis is especially important for understanding the stability and blow-up behavior of the solution. Since the existence of solutions to higher-order hyperbolic type equations is examined via the potential well method, this study aims to explore the importance and applications of evolution equations in a broader framework. In the fifth chapter of the thesis, the blow-up of the solutions of a higher-order hyperbolic type equation with a logarithmic source term is investigated through growth estimates.

Keywords: Blow-up, Exponential growth, Global existence of solutions, Higher-order equation, Logarithmic source term, Potential well

1. GİRİŞ

Dünyanın her yerinde olduğu gibi ülkemizde de bilim ve teknoloji alanında değişim ve gelişim hız kesmeden devam etmektedir. Bu değişime ayak uydurabilmek, orijinal düşünceler üreten bireylerin yetiştirilmesiyle mümkün olmaktadır. Problemler karşısında çözümler üretebilen ve öğrendiklerini günlük yaşama uygulayabilen bireylerin yetiştirilmesinde matematiğin rolü oldukça önemlidir.

Matematik bilgisinin günlük hayata aktarılmasındaki en etkili yöntemlerinden biri de matematiksel modellemelerdir. Fen ve mühendislik gibi uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan problemler, çoğunlukla cebirsel denklemler ile modellenememektedir. Matematiksel modellerin oluşturulabilmesi için, genel olarak bir bilinmeyenli bir fonksiyon ile bu fonksiyonun türevlerini içeren bir denkleme ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tür denklemler, diferansiyel denklem olarak adlandırılmaktadır. Bir bağımlı değişkenin iki veya daha fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemler ise kısmi diferansiyel denklem olarak bilinmektedir.

Bağımsız değişkenlerden biri zaman (t) olduğunda, bu tür kısmi türevli denklemler evolüsyon denklemler olarak adlandırılmakta olup genel olarak parabolik tipten ve hiperbolik tipten denklemler olarak ikiye ayrılmaktadır.

Diferansiyel denklemler kuramında, özellikle logaritmik kaynak terimli hiperbolik denklemlerin çözümlerinin global varlığı ve patlaması önemli bir araştırma alanı oluşturmaktadır. Bu tezde, bu tür denklemler için enerji yöntemleri kullanılarak çözümün global varlığı ve patlaması çalışılmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu tezde amacımız, logaritmik kaynak terimli

$$\begin{cases} z_{tt} + \mathcal{A}z = |z|^p \ln|z| & x \in \Omega, \ \ t > 0, \\ \frac{\partial^i z(x,t)}{\partial \nu^i} = 0, \ i = 0, 1, ..., m-1, & x \in \partial\Omega, \ \ t > 0, \\ z(x,0) = z_0(x), \ z_t(x,0) = z_1(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} z_{tt} + \mathcal{A}z = z \ln|z|^k, & x \in \Omega, \ \ t > 0, \\ \frac{\partial^i z(x,t)}{\partial \nu^i} = 0, \ i = 0, 1, ..., m-1, & x \in \partial\Omega, \ \ t > 0, \\ z(x,0) = z_0(x), \ z_t(x,0) = z_1(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

problemlerinin çözümlerinin global varlığını, patlamasını ve üstel büyümesini sınırlı bir Ω bölgesinde çalışmaktır. Burada $\mathcal{A} = (-\Delta)^m$, $m \geq 1$ bir tam sayı, $k > 1$ ve p

$$\begin{cases} 1 < p < \infty, & n \leq 2m, \\ 2 < p < \frac{4}{n-2m}, & n > 2m \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Matematik ve mühendislik uygulamaları bağlamında logaritmik kaynak terimi içeren denklemler üzerine yapılan çalışmalar önemli bir yere sahiptir. Bu tür denklemler fizik ve mühendislikte çeşitli olayları modellemek amacıyla kullanılmaktadır. (Bialynicki-Birula ve Mycielski 1975, 1976)

Şimdi literatürde logaritmik kaynak terimli denklemler üzerine yapılan bazı önemli çalışmaları ifade edelim:

Bialynicki-Birula ve Mycielski (1975,1976)

$$u_{tt} - u_{xx} + u = \varepsilon u \ln|u|^2 \tag{2.1}$$

denklemini çalışmışlardır.

Cazenave ve Haraux (1980), R^3uzayında aşağıdaki formdaki denklemin

$$u_{tt} - \Delta u = u \ln|u|^k \tag{2.2}$$

çözümlerinin varlık ve teklik durumlarını incelemişlerdir. Daha güncel çalışmalarda ise Ma ve Fang (2018) güçlü sönüm terimli

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t = u \ln|u|^k$$

diferansiyel denkleminin çözümlerinin varlığını ve zamanla azalma (decay) davranışını araştırmışlardır.

Lian ve Xu (2019) ise (2.2) denklemine güçlü ve zayıf sönüm terimleri ekleyerek

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_t + u_t = u \ln |u|^k \tag{2.3}$$

denklemini elde etmiş ve bu denklemin lokal ve global çözüm varlığını, asimptotik davranışlarını ve patlama durumlarını incelemişlerdir. Özellikle $E(0) < d$ ve $E(0) = d$ koşulları altında çözümün davranışını ve bu çözümün sonsuz zamanda patlayıp patlamayacağını ortaya koymuşlardır. Ayrıca, denklemin başlangıçta pozitif enerjiye sahip olması durumunda çözümün patlaması da çeşitli çalışmalarla ortaya konmuştur.

Hiramatsu ve ark. (2010) Q-ball dinamiğini teorik fizikte ele almak ve numerik çalışmalar yapmak için

$$u_{tt} - \Delta u + u + u_t + |u|^2 u = u \ln |u| \tag{2.4}$$

modelini elde etmişlerdir.

Chen ve Tian (2015)

$$u_t - \Delta u - \Delta u_t = u \ln |u| \tag{2.5}$$

denkleminin çözümlerinin büyüme davranışını ispat etmişlerdir.

Pişkin ve Irkıl (2019c)

$$u_{tt} - \Delta u + \Delta^2 u + u_t = ku \ln |u| \tag{2.6}$$

denkleminin çözümlerinin lokal ve global varlığı ile azalmasını çalışmışlardır.

Pişkin ve Çalışır (2020)

$$u_{tt} + \Delta^2 u + \Delta^2 u_t = 2u \ln |u| \tag{2.7}$$

denkleminin çözümlerinin azalmasını ve sonsuz zamandaki patlamasını çalışmışlardır.

Cao ve Liu (2018) ise $1 < p < 2$ için aşağıdaki denklemi ele alarak

$$u_t - div\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) - \Delta u_t = |u|^{p-2} u \ln |u| \tag{2.8}$$

çözümlerin global sınırlılığını ve patlama davranışlarını göstermişlerdir.

Xu ve ark. (2019)

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|u_{x_i}|^{m-2} u_{x_i} \right) = u \ln |u| \tag{2.9}$$

denkleminin çözümlerinin lokal ve global varlığını ayrıca patlamasını çalışmışlardır.
Pişkin ve Irkıl (2019b)

$$u_{tt} - div \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) - \Delta u_t + u_t = u \ln |u| \tag{2.10}$$

denkleminin lokal varlığını göstermişlerdir.
Pişkin ve Irkıl (2019a) altıncı mertebeden logaritmik kaynak terimi içeren

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxtt} + u_{xxxxtt} + u_{xxxx} - u_{xxxxxx} + \left(u_x \log |u_x|^k \right)_x = 0 \tag{2.11}$$

Boussinesq tipi denklemi ele alarak çözümün global varlığını, sonsuz zaman içinde patlamasını ve azalmasını analiz etmişlerdir.
Lian ve ark. (2020)

$$u_{tt} - \Delta u = |u|^p \ln |u| \tag{2.12}$$

denkleminin çözümlerinin global varlığını ve patlamasını çalışmışlardır.
Pişkin ve Okutmuştur (2021)

$$u_{tt} - div \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) + |u|^{p-2} u + u_t = |u|^{p-2} u \ln |u| \tag{2.13}$$

logaritmik kaynak terim içeren hiperbolik tip p-Laplasyen denklemi incelemişlerdir. Bu çalışmada çözümlerin davranışı ele alınmıştır.
Pişkin ve Cömert (2022)

$$u_t - M \left(\|\nabla u\|^2 \right) \Delta u - \Delta u_t = |u|^{q-2} u \ln |u| \tag{2.14}$$

Kirchhoff tipi logaritmik kaynak terim içeren diferansiyel denklemi incelemiş global varlığın yanı sıra sonlu zamanda patlama durumu ortaya konmuştur.
Han ve ark. (2023)

$$u_{tt} - \Delta u = u \ln |u|^k \tag{2.15}$$

denkleminin çözümlerinin üstel büyümesini çalışmışlardır.

Şimdi potansiyel kuyu yönteminin kullanıldığı bazı çalışmaları ifade edelim:
Sattinger (1968)

$$u_{tt} - \Delta u = -f(x, u) \tag{2.16}$$

denklemi için global zayıf çözümlerin varlığını potansiyel kuyu yöntemini kullanarak araştırmıştır. Bu çalışma potansiyel kuyu yönteminin literatürde ilk kez kullanıldığı çalışma olarak bilinmektedir.
Payne ve Sattinger (1975)

$$u_{tt} - \Delta u = f(u) \tag{2.17}$$

denkleminin zayıf çözümlerinin sonlu zamanda patlamasını potansiyel kuyu metodu aracılığıyla incelemişlerdir.
Nakao ve Ono (1993)

$$u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^p u \tag{2.18}$$

denkleminin çözümlerinin global varlık durumunu araştırmışlardır.
Ikehata (1996)

$$u_{tt} - \Delta u + \delta |u_t|^{m-1} u_t = |u|^{p-1} u \tag{2.19}$$

denklemi üzerinde çözümlerin davranışı, varlığı ve sonlu zamanda patlaması koşullarını incelemiştir.
Todorova (1999)

$$u_{tt} - \Delta u + q^2(x) u + u_t |u_t|^{p-1} = u|u|^{q-1} \tag{2.20}$$

denklemi için çözümlerin davranışı, sonlu zamanda patlama, global varlık ve enerji azalımı gibi konular üzerinde çalışmıştır.
Yacheng (2003)

$$u_{tt} - \Delta u = |u|^{p-1} u \tag{2.21}$$

denkleminin global çözümlerinin varlığını araştırmıştır.
Liu ve Xu (2008)

$$u_{tt} - u_{xx} + (u_{xx} + f(u))_{xx} = 0 \tag{2.22}$$

denklemi için çözümlerinin global varlığı, yokluğu ve sonlu zamanda patlama davranışını incelemişlerdir.
Wang ve Xue (2008)

$$u_{tt} - u_{xxtt} + u_{xxxxtt} + \alpha u_{xxxx} - u_{xx} = f(u_x) \tag{2.23}$$

denkleminin çözümlerinin global varlığı ve sonlu zamanda patlama özelliklerini araştırmışlardır.
Taşkesen ve ark.(2012)

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + u_{xxxxtt} = (f(u))_{xx} \tag{2.24}$$

Boussinesq tipi denklemler için süperkritik başlangıç enerjisi altında global zayıf çözümler üzerine çalışmışlardır.
Xu ve Su (2013)

$$u_t - \Delta u_t - \Delta u = u^p \tag{2.25}$$

denkleminin çözümlerinin davranışı, varlığı, yokluğu ve sonlu zamanda patlama durumlarını incelemişlerdir.

2.1 Yüksek Mertebeden Denklemler

Bazı matematiksel modellerde, yüksek mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerle karşılaşırız. Örneğin, bu denklemler akışkanlar dinamiği, mekanik, elektromanyetizma, biyoloji ve görüntü işleme gibi alanlarda bulunabilir. Üç boyutlu problemler genellikle yüzeyler üzerinde temsil edilir; örneğin, ince geometriler durumunda orijinal alanın yapısına bağlı olarak zarlar, plakalar veya kabuklar şeklinde modellenir. Bu durum, genellikle yüksek mertebeden diferansiyel operatörler içeren yüzey kısmi diferansiyel denklemlerinin tanımlanmasına yol açar (Shahrouzi, 2023; Pişkin, 2025).

2.2 Logaritmik Kaynak Terimli Denklemler

1975 yılında Bialynicki-Birula ve Mycielski tarafından kuantum teorisi ile mikro dünyadan makro dünyaya geçişte tutarlı şartlar ortaya koymak amaçlanmıştır. Buna bağlı olarak logaritmik terime sahip doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin atom fiziğine uygulanabileceği önerilmiştir. Logaritmik kaynak terime sahip doğrusal olmayan Schrödinger denkleminin, Gauss formunun soliton benzeri kararlı çözümlere sahip olduğu görülmüştür. Bunun sonucunda logaritmik kaynak terime sahip denklemler kuantum mekaniği, nükleer fizik, enflasyon kozmolojisi ve süpersimetrik alan teorileri gibi fiziğin birçok farklı alanında ortaya çıkmıştır (Bialynicki-Birula ve Mycielski, 1975, 1976; Barrow ve Parsons, 1995; Enqvist ve McDonald, 1998; Zloshchastiev, 2010; Yan ve Yang, 2018). Bu tür doğrusal olmayan kaynak terimler, rölativistik dalga denklemlerinde dönmeyen parçacıkları tanımlamak için kullanılmıştır (Hu ve Yin, 1995; Pişkin, 2025).

3. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezimizde kullanacağımız bazı temel kavramlara ve ön bilgilere değinilecektir. Fonksiyonel analiz ve diferansiyel denklemlerle ilgili bazı önemli tanım ve teoremler verilecek, Lebesgue uzayı, Sobolev uzayı, bazı önemli eşitsizlikler açıklanacaktır (Adams ve Fournier, 2003; Brezis, 2011; Pişkin, 2017; Pişkin, 2021; Pişkin, 2022; Pişkin ve Okutmuştur, 2021; Soykan, 2016).

3.1 Diferansiyel Denklemler ile İlgili Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1 Bir fonksiyon ile türevlerinin yer aldığı denklemlere diferansiyel denklem denir.

Tanım 3.1.2 Bir diferansiyel denklemde yalnızca bir bağımlı değişkenin bir bağımsız değişkene göre türevleri bulunuyorsa bu denkleme adi diferansiyel denklem denir. Bu tür denklemler genel olarak

$$f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(k)}\right) = 0$$

şeklinde gösterilir.

Eğer $y^{(k)}$ terimi yalnız bırakılırsa denklem

$$y^{(k)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(k-1)}\right)$$

şeklinde yazılır.

Tanım 3.1.3 Bir diferansiyel denklem, bir bağımlı değişkenin birden fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeriyorsa, bu tür denklemler kısmi diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Bu denklemler genellikle

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, ...\right) = 0$$

şeklinde gösterilir ya da

$$f(x, y, z, z_x, z_y, ...) = 0$$

biçiminde yazılır.

Örneğin;

$$y' = 6xy$$

denklemi bir adi diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

denklemi ise bir kısmi diferansiyel denklemdir.

Tanım 3.1.4 Bir diferansiyel denklemde bulunan türevler arasında en yüksek mertebeli türev, denklemin mertebesini belirler. Bu mertebe, ilgili türevin cebirsel üssüne karşılık gelir. Ancak bu belirleme yapılırken türevlerin polinom formunda yazılmış olması gerekir. Örneğin;

$$(y''')^2 + 2x^5(y')^4 - 3y = \cos x$$

denklemi üçüncü mertebe, ikinci dereceden bir denklemdir.

Bir başka örnek olarak

$$(y''')^3 = (1 + y')^{\frac{2}{3}}$$

biçimindeki denklemin derecesini belirlemek için önce denklem türevlere göre polinom olarak yazılmalıdır. Bunun için denklemin her iki taraf da üçüncü kuvvet ile genişletilirse

$$(y''')^9 = (1 + y')^2$$

denklemi elde edilir. Bu dönüşüm sonrası, denklemin dokuzuncu dereceden olduğu açıktır.

Tanım 3.1.5 Eğer bir diferansiyel denklemde, bağımlı değişken ve onun türevleri yalnızca birinci dereceden ve birbirlerine çarpım olmadan yer alıyorsa bu tür denklemler denkleme doğrusal (lineer) denklem olarak adlandırılır. Aksi durumda doğrusal olmayan (nonlineer) bir yapıdadır.

p. mertebeden en genel doğrusal adi diferansiyel denklem

$$a_p(x)y^{(p)} + a_{p-1}(x)y^{(p-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = n(x)$$

şeklindedir. $n(x) = 0$ ise homojen, $n(x) \neq 0$ ise homojen olmayan denklem olarak tanımlanır.

Ayrıca denklemde yer alan katsayılar sabit bir değere sahipse ise sabit katsayılı diferansiyel denklem, katsayıların bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlar olması durumunda değişken katsayılı diferansiyel denklem olarak ifade edilir.

3.1.2 Diferansiyel denklemlerin çözümü

Tanım 3.1.2.1 k. mertebeden

$$G\left(x, y, y', y'', ..., y^{(k)}\right) = 0$$

adi diferansiyel denklemi için;

i) g bir I reel aralığında $\forall x$ için tanımlanmış ve $k.$ mertebeden türeve sahip bir reel fonksiyon olsun. Eğer g, aşağıdaki koşulları sağlarsa $y = g(x)$, I aralığında diferansiyel denklemin bir açık çözümü olarak adlandırılır;

a) $G(x, g(x), g^{'}(x), ...g^{(k)}(x))$, $\forall x \in I$ için tanımlı ve

b) $\forall x \in I$ için $y = g(x)$ ve türevleri diferansiyel denklemde yerine yazıldığında denklemi sağlar.

ii) Bir $h(x, y) = 0$ kapalı fonksiyonun bir I aralığında diferansiyel denklemi sağlarsa buna diferansiyel denklemin kapalı çözüm adı verilir.

Açık ve kapalı çözümlere basit çözümler denir.

Örnek:

$$y = 2e^x + 3e^{2x}$$

fonksiyonu $\forall x \in R$ için

$$y'' - 3y' - 2y = 0$$

diferansiyel denkleminin bir açık çözümüdür.

Örnek:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

kapalı fonksiyonu

$$yy' + x = 0$$

diferansiyel denkleminin bir kapalı çözümüdür.

Tanım 3.1.2.2

$$g\left(x, y, y', y'', ..., y^{(k)}\right) = 0$$

diferansiyel denklemine karşılık olarak, c_1,c_2,...,c_k birbirinden bağımsız keyfi sabitleri içeren

$$G\left(x, y, c_1, c_{2,}..., c_k\right) = 0$$

bağıntısı, k parametreli bir fonksiyon ailesi tanımlar. Eğer bu fonksiyon ailesindeki her bir üye diferansiyel denklemi sağlıyorsa, bu fonksiyon ailesi o denklemin genel çözümünü temsil eder.

Tanım 3.1.2.3 Keyfi sabitlere özel değerler vererek genel çözümden elde edilen çözümlere özel çözüm denir.

Tanım 3.1.2.4 Genel çözümde keyfi sabitlere özel değerler vererek elde edilemeyen çözümlere tekil (singüler) çözüm denir.

Tanım 3.1.2.5 Bir özel çözümün grafiğine integral eğrisi, genel çözümün grafiğine ise integral eğriler ailesi (integral eğriler kümesi) denir.

3.1.3 Başlangıç ve sınır değer problemleri

Tanım 3.1.3.1 Uygulamalı bilimlerde genellikle diferansiyel denklemin genel çözümünden çok, belirli ek koşulları karşılayan çözümler aranır. Eğer bu koşullar tek bir noktada verilmişse başlangıç-değer problemi, en az iki farklı noktada verilmişse sınır-değer problemi olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.3.2 Bir bağımlı değişkenin iki veya daha fazla bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemlere kısmi diferansiyel denklem (kısmi türevli denklem) denir. z bağımlı, x ve y bağımsız değişkenleri için en genel kısmi türevli denklem

$$G\left(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, ...\right) = 0,$$
$$G\left(x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, ...\right) = 0$$

dır.

Örnek.

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

kısmi türevli denklemi $\partial\Omega$ sınırına sahip Ω bölgesinde tanımlansın.

Bu durumda $\partial\Omega$ da

i.

$$z = f(s)$$

verilirse Dirichlet sınır koşulu,

ii.

$$\frac{\partial z}{\partial n} = f(s)$$

verilirse Neumann sınır koşulu,

iii.

$$\frac{\partial z}{\partial n} + z = f(s)$$

verilirse karışık sınır koşulu,

iv.

$$\begin{aligned} z &= f_1(z)\,; \quad \partial\Omega_1, \\ \tfrac{\partial z}{\partial n} &= f_2(z)\,; \quad \partial\Omega_2 \end{aligned}$$

verilirse Robin sınır koşuludur.

3.1.4 (Hadamard şartları) Bir problemde, aşağıda verilen üç şart sağlanıyorsa problem iyi konulmuş (well posed) kabul edilir. Eğer bu şartlardan biri sağlanmıyorsa kötü konulmuş (ill posed) problem olur. Bu şartlara Hadamard şartları denir.

i. Çözümün varlığı: Problem için en az bir çözüm bulunmalıdır.

ii. Çözümün tekliği: Bulunan çözüm, verilen koşullara göre tek olmalıdır.

iii. Kararlılık: Problemin girdilerindeki küçük değişiklikler, çözümde küçük değişikliğe yol açmalıdır, yani çözüm verilere hassas biçimde bağlı olmalıdır.

3.2 Normlu Uzaylar

Tanım 3.2.1 Bir vektör uzayı X üzerinde tanımlı olan $\overrightarrow{v} \in X$ vektörünü $\|\overrightarrow{v}\|$ reel sayısına dönüştüren

$$\|.\| : X \to R$$

fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir.

Norm Aksiyomları

$\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z} \in X$ ve $\forall \beta \in R$ için

n$_1$) Pozitiflik(ve tanımlılık)

$\|\overrightarrow{v}\| \geq 0$ ve $\|\overrightarrow{v}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = 0$

n$_2$) Homojenlik (skalerle çarpma)

$\|\beta v\| = \beta \|\overrightarrow{v}\|$

n$_3$) Üçgen Eşitsizliği

$\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{z}\| \leq \|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{z}\|$ dır.

Bu üç koşulu sağlayan herhangi bir fonksiyon $\|.\|$, X üzerinde bir norm tanımlar. Böylece X normlu bir uzaya dönüşür. Ayrıca $\|\overrightarrow{v}\|$ gösterimine de $\overrightarrow{v}$ nin normu denir.

Tanım 3.2.2 (b_n), $(X, \|.\|)$ normlu vektör uzayında bir dizi olsun.

a) $b \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_0$ için

$$\|b_n - b\| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in N$ varsa (b_n) dizisi $b \in X$ ye yakınsar (ya da (b_n) dizisi yakınsaktır) denir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b \text{ veya } (b_n) \to b$$

yazılır.

b) Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $m, n \geq n_0$ için

$$\|b_n - b_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in N$ varsa (b_n) dizisine Cauchy dizisi denir. Burada $n \to \infty$ için $\|b_n - b\| \to 0$ ve $m, n \geq n_0$ için $\|b_n - b_m\| \to 0$ ifadelerine denktir.

Tanım 3.2.3 (Banach uzayı)

Bir normlu uzaydan alınan her Cauchy dizisinin yakınsadığı değer yine bu uzayda ise bu normlu uzaya tam normlu uzay denir. Tam normlu uzaya Banach uzayı denir.

Tanım 3.2.5 $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normları X vektör uzayı üzerinde tanımlı olsun. Eğer her $v \in X$ için

$$k\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq K\|v\|_1$$

olacak biçimde k, $K > 0$ sayıları varsa $\|.\|_2$ ve $\|.\|_1$ normları birbirine denktir.

Tanım 3.2.6 (Dual uzay)

X normlu uzayı üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin kümesine X uzayının dual uzayı denir. X uzayının dual uzayı X' veya X^* ile gösterilir. Bu uzay

$$\|f\|_{X'} = \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} < \infty$$

normu ile bir Banach uzayıdır. X' uzayının duali $(X')' = X''$ şeklindeki lineer vektör uzayıdır ve X'' ye, X in ikinci duali denir.

Tanım 3.2.7 (Güçlü ve zayıf yakınsaklık)

X bir normlu vektör uzayı ve (b_n), X içinde bir dizi olsun.

a) X in normu içindeki yakınsaklığa *güçlü yakınsaklık* denir. Yani

$$\|b_n - b\| \to 0$$

ise (b_n), b ya yakınsar denir ve $(b_n) \to b$ ile gösterilir.

$$(b_n) \to b \Leftrightarrow \|b_n - b\| \to 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|b_n - b\| = 0$$

dır.

b) Eğer her $g \in X'$ için

$$g(b_n) \to g(b)$$

yani

$$\lim_{n\to\infty} g(b_n) = g(b)$$

özelliği sağlanırsa (b_n) dizisi $b \in X$ e *zayıf yakınsar* denir ve $b \in X$ elemanına (b_n) dizisinin *zayıf limiti* denir. Bu durum $(b_n) \rightharpoonup b$ veya $(b_n) \xrightarrow{z} b$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} b_n \rightharpoonup b &\Leftrightarrow \forall g \in X' \text{ için } g(b_n) \to g(b) \\ &\Leftrightarrow \forall g \in X' \text{ için } |g(b_n) - g(b)| \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall g \in X' \text{ için } \lim_{n\to\infty} g(b_n) = g(b) \end{aligned}$$

dır.

3.3 İç Çarpım Uzayı

Tanım 3.3.1 Y bir reel vektör uzayı olsun.

$\langle .,. \rangle : Y \times Y \to R$

fonksiyonu

i) $\langle v, v \rangle \geq 0$ ve $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

ii) $\langle v, z \rangle = \langle z, v \rangle$

iii) $\langle z + v, w \rangle = \langle z, w \rangle + \langle v, w \rangle$

iv) $\langle cz, v \rangle = \langle z, cv \rangle = c\langle z, v \rangle$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım denir.

3.4 Lebesgue Uzayları ($L^p\left(\Omega\right)$)

Tanım 3.4.1 $\Omega \subset R^n$ kümesi ölçülebilir ve $1 \leq p < \infty$ olacak şekilde z ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $|z(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilirse, yani

$$\int_\Omega |z(x)|^p \, dx < \infty$$

ise z fonksiyonları p. kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır ve bu sınıf $L^p\left(\Omega\right)$ veya L^p ile gösterilir. Bu şartı sağlayan bütün z fonksiyonlarının uzayına L^p Lebesgue uzayı adı verilir.

Bu uzaydaki norm

$$\|z\|_{L^p(\Omega)} = \|z\|_p = \left[\int_\Omega |z(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

3.5 Sobolev Uzayı ($W^{m,p}(\Omega)$)

Tanım 3.5.1 Ω, R^nde bir bölge m negatif olmayan herhangi bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}\left(\Omega\right) = \left\{z \in L^p\left(\Omega\right) : D^\alpha z \in L^p\left(\Omega\right),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Yani kendisi ve m. mertebeye kadar bütün genelleştirilmiş türevleri $L^P\left(\Omega\right)$ uzayında olan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir.

Sobolev uzayında normlar: $1 \leq p < \infty$ için

$$\|z\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|z\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} z\|_{L^{p}(\Omega)}^{p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ durumunda ise norm,

$$\|z\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} z\|_{L^{\infty}(\Omega)}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.5.2 Eğer $p = 2$ ise

$$\|z\|_{H^{m}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} z\|_{L^{2}(\Omega)}^{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

olur.

Tanım 3.5.3 $1 \leq p \leq \infty$ ve $m \geq 0$ için

$$W_0^{m,p}(R^n) = W^{m,p}(R^n)$$

dır.

3.5.4 (Gömülme) A ve B iki normlu uzay olsun. Eğer

i. X in bütün elemanları Y de ise $(X \subset Y)$ ve

ii. v den bağımsız bir c sabiti ve her $v \in X$ için

$$\|v\|_{Y} \leq c \|v\|_{X}$$

oluyorsa X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ şeklinde gösterilir.

3.5.5 (Sobolev gömülme teoremi) Açık bir $\Omega \subset R^n$ için $m \geq 1$, $j \geq 0$ tam olan sayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak koşuluyla aşağıdaki gömülmeler geçerlidir;

i. Eğer $n < mp$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

sürekli gömülmesi sağlanır.

ii. Eğer $mp = n$ ise

$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ p \leq q < \infty$

ve $j = 0$ için

$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q,\ p \leq q < \infty$

gömülmesi elde edilir. Özellikle $p = 1$ olarak alındığında

$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$

gömülmesi elde edilir.

iii. Eğer $n < mp$ ise

$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ p \leq q \leq p^*$

geçerlidir. $j = 0$ için

$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q,\ p \leq q \leq p^*$

gömülmesi elde edilir.

Yukarıda verilen gömülmelerde $W^{m,p}$ uzayı alınırsa, $W_0^{m,p}(\Omega)$ alınırsa Ω bölgesinde gömülmeler aynı şekilde geçerli olur.

Teorem 3.5.6 (Yüksek mertebe için Sobolev Poincaré eşitsizliği)

$$\begin{cases} 2 \leq p < \infty, & n \leq 2m, \\ 2 \leq p < \frac{2n}{n-2m}, & n > 2m \end{cases}$$

olsun. Bu durumda her $z \in H_0^m(\Omega)$ için

$\|z\|_p \leq \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|_2$

dır. Burada $\mathcal{A} = (-\Delta)^m$, $m \geq 1$ ve $c = c(\Omega, p)$ dır.

3.6 Bazı Önemli Eşitlikler ve Eşitsizlikler

Lemma 3.6.1 (Young eşitsizliği) $c, d \geq 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$cd \leq \dfrac{c^p}{p} + \dfrac{d^q}{q}$

dır.

Not. $\delta > 0$ bir reel sayı olmak üzere, Young eşitsizliğinde $c = \delta X$ ve $d = \frac{Y}{\delta}$ alınırsa

$$XY \leq \frac{\delta^p X^p}{p} + \frac{\delta^{-q} Y^{-q}}{q}$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 3.6.2 (ε lu young eşitsizliği)

Eğer $\varepsilon > 0$ ve c,$d \in R$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise

$$|cd| \leq \frac{|c|^p}{p} + \frac{|d|^q}{q}$$

eşitsizliği veya

$$|cd| \leq \varepsilon \, |c|^p + K(\varepsilon) d^q$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $K(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$ olur.

Lemma 3.6.3 (Hölder eşitsizliği)

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $z \in L^p(\Omega)$, $w \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $zw \in L(\Omega)$ ve

$$\|zw\|_1 \leq \|z\|_p \, \|w\|_q$$

dır.

Lemma 3.6.4 (Minkowski eşitsizliği)

$p \geq 1$, $z, v \in L^p(\Omega)$ için $z + v \in L^p(\Omega)$ ve

$$\|z + v\|_p \leq \|z\|_p + \|v\|_p$$

dır.

Lemma 3.6.5 (Cauchy-Schwarz eşitsizliği)

m_1,m_2,...,m_k, n_1,n_2,...,$n_k \in R$ için

$$(m_1 n_1 + m_2 n_2 + ... + m_k n_k)^2 \leq \left(m_1^2 + m_2^2 + ... + m_k^2\right)\left(n_1^2 + n_2^2 + ... + n_k^2\right)$$

dır.

3.7 Green Özdeşlikleri

Şimdi bazı notasyonları verelim, kolaylık olması açısından R^3 ten alalım. $u = u(x, y, z)$ bir fonksiyon ve $F = (F_1, F_2, F_3)$ vektör olsun.

$\nabla u =$grad$u = (u_x, u_y, u_z)$,

$\nabla.F =$div$F = F_{1x} + F_{2y} + F_{3z}$,

$\Delta u =$div grad $u = \nabla.\nabla u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$,

$|\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$.

$\nabla.\nabla = \nabla^2 = \Delta$ dır.

Teorem 3.7.1 (Green özdeşliği) $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ olsun. O halde

$$\int_\Omega v\Delta u dx = \int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int_\Omega \nabla v\nabla u dx$$

dır. n dıştan birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n\nabla u$ dır.

3.8 Konkavlık Metodu

Lemma 3.8.1 $\beta > 0$ ve $t > 0$ sabitleri için, $L(t)$ iki defa türevlenebilen aşağıdaki eşitsizliği sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun.

$$L''(t)L(t) - (1+\beta)(L'(t))^2 \geq 0$$

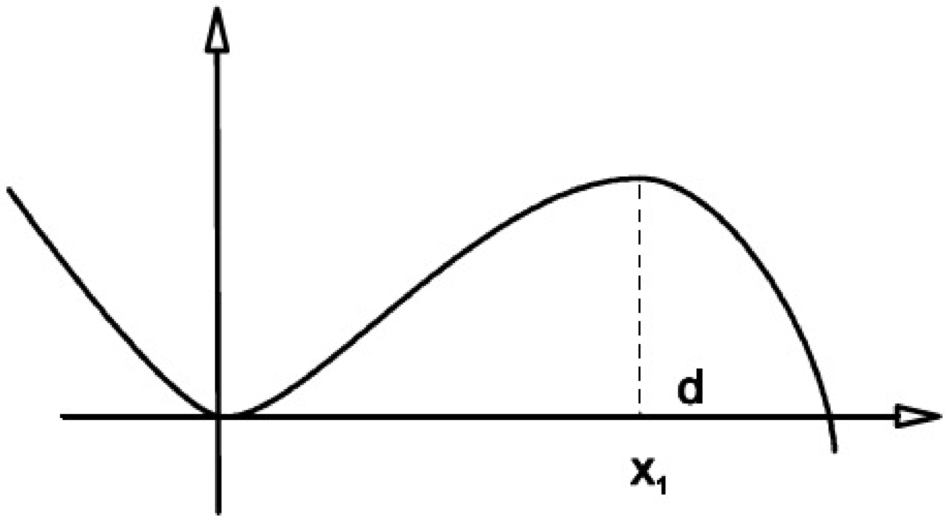
dır. Bu durumda $L(t) > 0$ ve $L'(t) > 0$ olduğunu düşünelim. Bu koşullar altında $L(t)$ fonksiyonunun zamanla sınırsızlaştığı bir $T^* \leq \frac{L(t)}{\beta L'(t)}$ zamanı bulunabilir. Yani, $\lim\limits_{t\to T^*} \mathrm{L}(t) = \infty$ olur (Levine, 1974; Kalantarov ve Ladyzhenskaya, 1978).

3.9 Çözümlerin Varlığı ile İlgili Bazı Lemmalar

Lemma 3.9.1 (Potansiyel kuyu metodu) Genel olarak bu metot denklem çözümlerinin varlığının ispatında kullanılan önemli bir metottur. Potansiyel kuyu metodu, Sattinger tarafından (1968) deki çalışmasında

$$z_{tt} - \Delta z + f(x, z) = 0$$

denkleminde ele alınmıştır. Buradaki amaç, problemin global çözümlerinin varlığını ispatlamaktır. Sattinger, denklemin, doğrusal olmayan $f(x, z)$ fonksiyonuna bazı ek koşullar ekleyerek global zayıf çözümün varlığını elde etmiştir.



Fonksiyonun davranışı incelendiğinde, $x = 0$ konumunda lokal minimum ve $x = x_1$ konumunda ise lokal maksimum noktası içerdiği anlaşılmaktadır.
Potansiyel kuyu, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$W = \{x : \ V(x) < d, \ x < x_1\}$$

Bu küme, orijini de içeren bir bölgeyi ifade eder ve sistemin toplam enerjisinin bu sınırları aşmamasını sağlar. Burada d, $\mathbb{R}^N$ içinde düzgün sınırlandırılmış bir bölgeyi temsil eder. Şimdi $J(z)$ fonksiyonelinin minimum noktasını baz alarak bir potansiyel kuyu tanımlayalım. Tüm $z \in H_0^1(\Omega)$ için tanımlı olan bir fonksiyonel $J(z)$ ele alınsın. Fonksiyonelin $z = 0$ noktasında minimum değerini aldığı varsayılırsa, $J(\lambda z)$ fonksiyonu, orijin civarındaki küçük ve pozitif λ değerleri için artan özellik gösterir. Bu artışın sona erip fonksiyonun azalmaya başladığı ilk pozitif değer $\lambda_1 > 0$ olarak tanımlansın. Bu durumda potansiyel kuyunun derinliği, aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$d = \inf_{z \in H_0^1(\Omega)} J(\lambda_1 z).$$

Bu değer, $z_0 = 0$ bulunduğu bölgenin dışındaki en küçük enerji düzeyini temsil eder. Doğal olarak $d \in [0, \infty]$ aralığındadır. Eğer $d > 0$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda potansiyel kuyu W kümesi şu şekilde tanımlanabilir:

$$W = \left\{z : z \in H_0^1(\Omega), \ 0 \leq J(\lambda z) < d, \ 0 \leq \lambda \leq 1\right\}.$$

Bu tanım altında $z \in W$ olacak şekilde her bir $J(z) < d$ dır. Ayrıca $[0, 1]$ aralığındaki her λ için λz biçimindeki noktalar da bu enerji düzeyinin altındadır. Böylece, bu yaklaşımla sistemin global çözümlerinin varlığı garanti altına alınabilir.

4. LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ YÜKSEK MERTEBEDEN HİPERBOLİK TİPTEN BİR DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN GLOBAL VARLIĞI VE PATLAMASI

Bu bölümde

$$\begin{cases} z_{tt} + \mathcal{A}z = |z|^p \ln|z|, & x \in \Omega,\ t > 0 \\ \frac{\partial^i z(x,t)}{\partial \nu^i} = 0,\ i = 0, 1, ..., m-1, & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ z(x,0) = z_0(x),\ z_t(x,0) = z_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

problemini çalışacağız. Burada $\mathcal{A} = (-\Delta)^m$, $m \geq 1$ (m bir tam sayı), ν dış birim normal vektördür ve p

$$\begin{cases} 1 < p < \infty, & n \leq 2m, \\ 2 < p < \frac{4}{n-2m}, & n > 2m \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

(4.1) probleminin $E(t)$ enerji fonksiyonelini bulalım:

(4.1) probleminin her terimi z_t ile çarpılır ve Ω bölgesinde integrallenirse

$$\underbrace{\int_\Omega z_t z_{tt} dx}_{1.terim} + \underbrace{\int_\Omega z_t \mathcal{A}z dx}_{2.terim} = \underbrace{\int_\Omega z_t |z|^p \ln|z| \, dx}_{3.terim} \tag{4.2}$$

1.Terim:

$$\begin{aligned} \int_\Omega z_t z_{tt} dx &= \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(z_t^2\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega z_t^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z_t\|^2 \end{aligned}$$

olur.

2.Terim: Green özdeşliğinden

$$\int_\Omega z_t \mathcal{A}z dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2$$

olur.

3.Terim:

$$\frac{d}{dt}\left(|z|^{p+1}\ln|z|\right)=(p+1)\,z^{p}z_t\ln|z|+z^{p+1}\frac{z_t}{z},$$

$$(p+1)\,z_t\,|z|^{p}\ln|z|=\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\left(z^{p+1}\right)-\frac{d}{dt}\left(|z|^{p+1}\ln|z|\right)$$

eşitliğin her iki tarafı $\frac{1}{p+1}$ ile çarpılıp Ω bölgesinde integrallenirse

$$\int_{\Omega} z_t\,|z|^{p}\ln|z|\,dx=\frac{1}{(p+1)^2}\frac{d}{dt}\|z\|_{p+1}^{p+1}-\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} z^{p+1}\ln|z|\,dx$$

olur.

Elde edilen terimler (4.2) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z_t\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2=\frac{1}{(p+1)^2}\frac{d}{dt}\|z\|_{p+1}^{p+1}-\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} z^{p+1}\ln|z|\,dx$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|z_t\|^2+\frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2+\frac{1}{(p+1)^2}\frac{d}{dt}\|z\|_{p+1}^{p+1}-\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} z^{p+1}\ln|z|\,dx\right]=0$$

olur. Böylece (4.1) probleminin enerji fonksiyoneli

$$E(t)=\frac{1}{2}\|z_t\|^2+\frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2+\frac{1}{(p+1)^2}\frac{d}{dt}\|z\|_{p+1}^{p+1}-\frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} z^{p+1}\ln|z|\,dx \quad (4.3)$$

dır. Yani $E'(t)=0$ olur. Buradan

$$\frac{d}{dt}(E(t))=0$$

ifadesinin $(0,t)$ için integrallenirse

$$\int_0^t \frac{d}{dt}E(t)=\int_0^t 0dt,$$

$$E(t)-E(0)=0,$$

$$E(t)=E(0)$$

elde edilir.

4.1 Potansiyel Kuyu

Potansiyel enerji ve Nehari fonksiyoneli sırasıyla

$$J(z)=\frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2-\frac{1}{p+1}\int_{\Omega} z^{p+1}\ln|z|\,dx+\frac{1}{(p+1)^2}\|z\|_{p+1}^{p+1}, \quad (4.4)$$

$$I(z) = \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 - \int_\Omega z^{p+1} \ln|z| \, dx \tag{4.5}$$

olarak tanımlansın. Burada aşağıdaki ifade açıkça görülebilir:

$$J(z) = \frac{p-1}{2(p+1)} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 + \frac{1}{(p+1)^2} \|z\|_{p+1}^{p+1} + \frac{1}{(p+1)} I(z) \tag{4.6}$$

Ayrıca enerji fonksiyoneli

$$\begin{aligned} E(t) =& \frac{1}{2} \|z_t\|^2 + J(z) \\ =& \frac{1}{2} \|z_t\|^2 + \frac{p-1}{2(p+1)} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 + \frac{1}{(p+1)^2} \|z\|_{p+1}^{p+1} + \frac{1}{(p+1)} I(z) \end{aligned} \tag{4.7}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Ayrıca burada

$$\mathcal{N} = \left\{ z \in H_0^m(\Omega) \mid I(z) = 0, \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\| \neq 0 \right\} \tag{4.8}$$

Nehari manifoldudur.

$$d = \inf_{z \in \mathcal{N}} J(z) \tag{4.9}$$

potansiyel kuyunun derinliğini,

$$W = \{ z \in H_0^m(\Omega) \mid J(z) < d, \ I(z) > 0 \} \cup \{0\} \tag{4.10}$$

potansiyel kuyunun içini,

$$V = \{ z \in H_0^m(\Omega) \mid J(z) < d, \ I(z) < 0 \} \tag{4.11}$$

potansiyel kuyunun dışını gösterir. Şimdi yukarıda tanımladığımız potansiyel kuyuyu $\delta > 0$ için potansiyel kuyu ailesine genişletelim:

$$J_\delta(z) = \frac{\delta}{2} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 - \frac{1}{p+1} \int_\Omega z^{p+1} \ln|z| \, dx + \frac{1}{(p+1)^2} \|z\|_{p+1}^{p+1},$$

$$I_\delta(z) = \delta \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 - \int_\Omega z^{p+1} \ln|z| \, dx, \tag{4.12}$$

$$\mathcal{N}_\delta = \left\{ z \in H_0^m(\Omega) \mid I_\delta(z) = 0, \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 \neq 0 \right\} \tag{4.13}$$

ve

$$d(\delta) = \inf_{z \in \mathcal{N}_\delta} J(z) \tag{4.14}$$

olsun. Ayrıca kuyunun içi

$$W_\delta = \{z \in H_0^m(\Omega) \mid J(z) < d(\delta),\ I_\delta(z) > 0\} \cup \{0\} \tag{4.15}$$

ve kuyunun dışı

$$V_\delta = \{z \in H_0^m(\Omega) \mid J(z) < d(\delta),\ I_\delta(z) < 0\} \tag{4.16}$$

olur.

(4.1) probleminin kritik bir durumda çalışmak için

$$V' = \{z \in H_0^m(\Omega) \mid I(z) < 0\} \tag{4.17}$$

kümesini tanımlayabiliriz.

Lemma 4.1.1

Herhangi bir $z \in H_0^m(\Omega)$, $\|z\| \neq 0$ için $g(\lambda) = J(\lambda z)$ alınırsa aşağıdaki durumlar elde edilir:

i) $\lim_{\lambda \to 0} J(\lambda z) = 0$, $\lim_{\lambda \to \infty} J(\lambda z) = -\infty$

ii) $0 < \lambda < \infty$ aralığında tek bir $\lambda = \lambda^*(z)$ vardır ve

$$\frac{d}{d\lambda} J(\lambda z)\,|_{\lambda=\lambda^*} = 0$$

olur.

iii) $J(\lambda z)$, $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$ için artan, $\lambda^* \leq \lambda \leq \infty$ için azalan, $\lambda = \lambda^*$ için maksimum değerini almaktadır.

iv) Diğer bir ifadeyle $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$ aralığında $I(\lambda^* z) = 0$, $I(\lambda z) = \lambda \frac{d}{d\lambda} J(\lambda z) > 0$ ve $\lambda^* \leq \lambda \leq \infty$ için $I(\lambda z) < 0$ olur.

İspat.

i) $z \in H_0^m(\Omega)$ için $g(\lambda) = J(\lambda z)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
J(\lambda z) =& \frac{\lambda^2}{2} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 - \frac{1}{p+1} \int_\Omega \lambda^{p+1} z^{p+1} \ln(\lambda z)\, dx \\
& + \frac{1}{(p+1)^2} \|\lambda z\|_{p+1}^{p+1} \\
=& \frac{\lambda^2}{2} \left\| \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z \right\|^2 - \frac{\lambda^{p+1}}{p+1} \int_\Omega z^{p+1} \ln|z|\, dx \\
& - \frac{\lambda^{p+1}}{p+1} \ln|\lambda| \, \|z\|_{p+1}^{p+1} + \frac{\lambda^{p+1}}{(p+1)^2} \|z\|_{p+1}^{p+1}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

olur. Burada $\|z\| \neq 0$ için $g(0) = 0$ ve $g(\infty) = -\infty$ olur.

ii) $g(\lambda)$ fonksiyonun türevi alınıp sıfıra eşitlenirse

$$
\begin{aligned}
g'(\lambda) =& \frac{d}{d\lambda}\left(J(\lambda z)\right) \\
=& \frac{d}{d\lambda}\left[\begin{array}{c} \frac{\lambda^2}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - \frac{\lambda^{p+1}}{p+1}\int_\Omega z^{p+1}\ln|z|\,dx \\ -\frac{\lambda^{p+1}}{p+1}\ln|\lambda|\,\|z\|_{p+1}^{p+1} + \frac{\lambda^{p+1}}{(p+1)^2}\|z\|_{p+1}^{p+1} \end{array}\right] \\
=& \lambda\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - \lambda^p\int_\Omega z^{p+1}\ln|z|\,dx - \lambda^p\ln|\lambda|\,\|z\|_{p+1}^{p+1} \\
& -\frac{\lambda^{p+1}}{p+1}\frac{1}{\lambda}\|z\|_{p+1}^{p+1} + \frac{1}{p+1}\lambda^p\|z\|_{p+1}^{p+1} \\
=& \lambda\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - \lambda^p\int_\Omega z^{p+1}\ln|z|\,dx - \lambda^p\ln|\lambda|\,\|z\|_{p+1}^{p+1} \\
=& \lambda\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - \lambda^p\left[\int_\Omega z^{p+1}\ln|z|\,dx + \ln|\lambda|\,\|z\|_{p+1}^{p+1}\right] = 0
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 = \lambda^{p-1}\left[\int_\Omega z^{p+1}\ln|z|\,dx + \ln|\lambda|\,\|z\|_{p+1}^{p+1}\right]
$$

yazılabilir. Buradan

$$
l(\lambda) = \lambda^{p-1}\left[\int_\Omega z^{p+1}\ln|z|\,dx + \ln|\lambda|\,\|z\|_{p+1}^{p+1}\right] \tag{4.19}
$$

alınırsa $0 < \lambda < \infty$ aralığında $l(\lambda)$ fonksiyonunun artan olduğu görülür. Ayrıca

$$
\lim_{\lambda\to 0} l(\lambda) = -\infty \text{ ve } \lim_{\lambda\to\infty} l(\lambda) = \infty
$$

olur.

Bu nedenle $l(\lambda_0) = 0$; $0 < \lambda < \lambda_0$ ise $l(\lambda) < 0$ ve $\lambda_0 < \lambda < \infty$ ise $l(\lambda) > 0$ olacak şekilder λ_0 vardır. Dolayısıyla $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 > 0$ için (4.19) ifadesini sağlayacak tek bir $\lambda^* > \lambda_0$ olduğu görülür.

iii)

$$
\frac{d}{d\lambda}\left(J(\lambda z)\right) = \lambda\left(\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - l(\lambda)\right)
$$

olduğundan Lemma 4.1.1 (ii) ifadesinin ispatından

$$
\begin{cases}
0 < \lambda \leq \lambda_0 \text{ ise } l(\lambda) \leq 0; \\
\lambda_0 < \lambda < \lambda^* \text{ ise } 0 < l(\lambda) < \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2; \\
\lambda^* < \lambda < \infty \text{ ise } l(\lambda) > \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2
\end{cases}
$$

dır. Eğer $0 < \lambda \leq \lambda_0$ ise $l(\lambda) \leq 0$; $\lambda_0 < \lambda < \lambda^*$ ise $0 < l(\lambda) < \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2$; eğer $\lambda^* < \lambda < \infty$ ise $l(\lambda) > \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2$. Dolayısıyla

$$\begin{cases} 0 < \lambda < \lambda^* \text{için } \frac{d}{d\lambda}\left(J(\lambda z)\right) > 0, \\ \lambda^* < \lambda < \infty \text{ için } \frac{d}{d\lambda}\left(J(\lambda z)\right) < 0 \end{cases}$$

sonucuna ulaşırız. Buradan ispat tamamlanmış olur.

iv) Lemma 4.1.1 (iii) ispatından

$$\begin{aligned} l(\lambda z) =& \lambda^2 \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - \lambda^{p+1}\int_\Omega |z|^{p+1}\ln|z|\,dx \\ =& \lambda\frac{d}{d\lambda}J(\lambda z) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Lemma 4.1.1 ayrıca $\mathcal{N} \neq 0$ olduğunu ifade eder.

Şimdi $I_\delta(z)$ ile ilgili bazı özellikleri verelim:

Lemma 4.1.2 $\delta > 0$ için aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

i) Eğer $0 < \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\| \leq r(\delta)$ ise $I_\delta(z) > 0$,

ii) Eğer $I_\delta(z) < 0$ ise $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\| > r(\delta)$,

iii) Eğer $I_\delta(z) = 0$ ise $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\| > r(\delta)$ veya $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\| = 0$ dır.

Burada $r(\delta)$, $\phi(r) = \delta$ denkleminin tek reel köküdür ve

$$\phi(r) = C^{p+2}r^p,\ C = \sup_{z\in H_0^m(\Omega)} \frac{\|z\|_{p+2}}{\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|}. \tag{4.20}$$

dır.

İspat.

i) $0 < \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\| \leq r(\delta)$ ise $\|z\|_{p+2} > 0$ ve

$$\begin{aligned} \int_\Omega |z|^{p+1}\ln|z|\,dx \leq& \|z\|_{p+2}^{p+2} \\ \leq& C^{p+2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^{p+2} \\ =& \phi\left(\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|\right)\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 \\ \leq& \delta\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 \end{aligned}$$

olduğundan $I_\delta(z) > 0$ sonucu elde edilir.

ii) $I_\delta(z) < 0$ ise

$$\delta\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 < \int_\Omega |z|^{p+1}\ln|z|\,dx$$
$$< \|z\|_{p+2}^{p+2}$$
$$\leq \phi\left(\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|\right)\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 \tag{4.21}$$

olur. (4.21) ifadesinden $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\| > r(\delta)$ ifadesi elde edilir.

iii) Eğer $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\| = 0$ olursa $I_\delta(z) = 0$ olur. Eğer $I_\delta(z) = 0$ ve $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\| \neq 0$ ise bu durumda

$$\delta\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 = \int_\Omega |z|^{p+1}\ln|z|\,dx$$
$$< \|z\|_{p+2}^{p+2}$$
$$\leq \phi\left(\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|\right)\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2$$

olur. Böylece $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\| > r(\delta)$ olur.

Aşağıda verilen lemma potansiyel kuyunun derinliğini (the depth of the potential well) ya da dağ geçidi seviyesini (mountain pass level) göstermektedir.

Lemma 4.1.3

$$d(\delta) = \inf_{z\in\mathcal{N}_\delta} J(z)$$

için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

i) $0 < \delta < \frac{p+1}{2}$ için $d(\delta) = a(\delta)\,r^2(\delta) > 0$ ve $a(\delta) = \frac{1}{2} - \frac{\delta}{p+1}$ dır.

ii) $0 < \delta < \delta_0$ için $d(\delta) > 0$ ve $\delta_0 > \frac{p+1}{2}$ için $d(\delta) = 0$ olacak şekilde tek bir δ_0 vardır.

iii) $0 < \delta < 1$ için $d(\delta)$ azalırken $1 \leq \delta \leq \delta_0$ da $\delta = 1$ için $d = d(1)$ maksimum değerini alır.

İspat.

i) Eğer $I_\delta(z) = 0$ ve $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\| \neq 0$ ise Lemma 4.1.2 (iii) ye göre $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\| > r(\delta)$ ifadesini kullanarak

$$J(z) = \frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega z^{p+1}\ln|z|\,dx + \frac{1}{(p+1)^2}\|z\|_{p+1}^{p+1}$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\delta\right)\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \frac{1}{p+1}I_\delta(z) + \frac{1}{(p+1)^2}\|z\|_{p+1}^{p+1}$$
$$> \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{p+1}\right)\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \frac{1}{p+1}I_\delta(z)$$
$$> a(\delta)\,r^2(\delta)$$

elde edilir.

ii) Herhangi bir $z \in H_0^m(\Omega)$, $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\| \neq 0$ ve $\delta > 0$ için $\lambda = \lambda(\delta)$ olarak tanımlansın.

$$\delta\lambda^2 \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2 = \lambda^{p+1} \int_\Omega |z|^{p+1} \ln|\lambda z|\, dx \tag{4.22}$$

ve $I_\delta(\lambda z) = 0$ için

$$\delta \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2 = \lambda^{p-1} \int_\Omega |z|^{p+1} \ln|\lambda z|\, dx + \lambda^{p-1} \ln|\lambda|\, \|z\|_{p+1}^{p+1} \tag{4.23}$$

olur. Lemma 4.1.1 e göre $J(\lambda z)$, $(0, \lambda^*)$ da artmakta, $[\lambda^*, \infty)$ da azalmakta, Lemma 4.1.1 (i) e göre $\left(0, \frac{p+1}{2}\right)$ aralığında $d(\delta) > 0$ olur. Bu ifadeye göre $(0, \infty)$ aralığında $\lambda(\delta)$ artan, ve bazı a sayıları için (bir sonraki adımda $a = 1$ olduğu kanıtlanacaktır.) $d(\delta)$ nın $(0, a)$ da arttığı ve $[a, 0)$ da azaldığı görülür.

iii) $d(\delta') < d(\delta'')$ olduğunu kanıtlayacağız. Bunun için herhangi bir $0 < \delta' < \delta'' < 1$ ya da $1 < \delta'' < \delta' < \delta_0$ için kanıtlamak yeterlidir. Herhangi bir $z_0 \in H_0^m(\Omega)$, $I_{\delta''}(z) = 0$ ve $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\| \neq 0$ da bir $v \in H_0^m(\Omega)$ ve $\varepsilon(\delta', \delta'') > 0$ olur. Böylece $I_{\delta'}(v) = 0$, $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} v\right\| \neq 0$ ve $J(v) < J(z) - \varepsilon(\delta', \delta'')$. Ayrıca yukarıdaki z için $\lambda(\delta)$ yı (4.22) ile tanımlayabiliriz. Öyle ki $I_\delta(\lambda(\delta) z) = 0$, $\lambda(\delta'') = 1$ ve (4.23) geçerlidir. Daha sonra $g(\lambda) = J(\lambda z)$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} J(\lambda z) =& \frac{1}{\lambda} I(\lambda z) \\
=& \frac{1}{\lambda}(1-\lambda) \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} \lambda z\right\|^2 + I_\delta(\lambda z) \\
=& (1-\lambda)\lambda \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2
\end{aligned}$$

ve $v = \lambda(\delta') z$ alındığında $I_{\delta'}(v) = 0$, $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} v\right\| \neq 0$ olur.

$0 < \delta' < \delta'' < 1$ aralığında δ için $\lambda(\delta)$ artan olduğundan

$$\begin{aligned}
J(z) - J(v) =& g(1) - g(\lambda(\delta')) \\
=& g(\lambda(\delta'')) - g(\lambda(\delta')) \\
=& (\lambda(\delta'') - \lambda(\delta'))\, g'(\lambda) \\
=& (1-\delta)\lambda(1 - \lambda(\delta')) \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} \lambda z\right\|^2 \\
>& (1-\delta'')\lambda(\delta') r^2(\delta'')(1 - \lambda(\delta')) \\
\equiv& \varepsilon(\delta', \delta'') > 0
\end{aligned}$$

olur.

$1 < \delta'' < \delta' < \delta_0$ olursa

$$
\begin{aligned}
J(z) - J(v) =& g(1) - g(\lambda(\delta')) \\
& > (\delta'' - 1)\lambda(\delta'') r^2(\delta'')(\lambda(\delta') - 1) \\
& \equiv \varepsilon(\delta', \delta'') > 0
\end{aligned}
$$

olur.

Değişmez Kümeler

Değişmez kümeleri elde etmek için aşağıdaki lemma kullanılacaktır.

Lemma 4.1.4 $z \in H_0^m(\Omega)$ için $J(z) < d$ olsun. δ_1 ve δ_2 sayıları $d(\delta) = J(z)$ denkleminin $\delta_1 < \delta < \delta_2$ olacak şekilde kökleri olsun. Bu durumda $\delta_1 < \delta < \delta_2$ için $I_\delta(z)$ nin işareti değiştirilemezdir.

İspat. Öncelikle $J(z) > 0$ ve $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\| \neq 0$ olsun. Çelişki yöntemi ile $I_\delta(z)$ nin işareti $\delta_1 < \delta < \delta_2$ için değiştirilebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda $I_{\delta^*}(z) = 0$ olacak şekilde $\delta^* \in (\delta_1, \delta_2)$ vardır. Dolayısıyla $d(\delta)$ tanımına göre elimizdeki $J(z) \geq d(\delta^*)$ varlığından

$$
\begin{aligned}
J(z) =& d(\delta_1) = d(\delta_2) \\
<& d(\delta^*)
\end{aligned}
$$

ifadesi ile çelişir.

Teorem 4.1.5 (Değişmez kümeler) $z_0 \in H_0^m(\Omega)$ ve $z_1(x) \in L^2(\Omega)$ olsun. $0 < e < d$, $\delta_1 < \delta_2$ nin $d(\delta) = e$ denkleminin iki kökü olduğunu varsayalım. O zaman,
i) (4.1) probleminin $0 < E(0) \leq e$ olan tüm çözümleri $I(z_0) > 0$ veya $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_0\right\| = 0$ olması koşuluyla $\delta_1 < \delta < \delta_2$ için W_δ ye aittir.
ii) (4.1) probleminin $0 < E(0) \leq e$ olan tüm çözümleri $I(z_0) < 0$ olması koşuluyla $\delta_1 < \delta < \delta_2$ için V_δ ye aittir.
İspat.
i) $z(t)$, (4.1) probleminde $E(0) = e$, $I(z_0) > 0$ veya $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_0\right\| = 0$ olan herhangi bir çözümü ve T, $z(t)$ nin varlık zamanı olsun. $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_0\right\| = 0$ ise o zaman $0 < \delta < \delta_0$

için $z_0(x) \in W_\delta$ olur. $I(z_0) > 0$ olduğundan Lemma 4.1.4 e göre $I_\delta(z)$ nin işareti $\delta_1 < \delta < \delta_2$ için değişmez olduğundan $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$ için $I_\delta(z_0) > 0$ olur. Enerji eşitliğinden

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|z_t\|^2 + J(z_0) =& E(0) \leq d(\delta_1) \\ =& d(\delta_2) < d(\delta) \end{aligned} \tag{4.24}$$

ifadesi elde edilir. $J(z_0) < d(\delta)$ olur böylece $z_0(x) \in W_\delta$ vardır. Daha sonra, $z(t) \in W_\delta$ olduğu görülür ve burada T, $z(t)$'nin maksimum varlık zamanıdır. Çelişkiye düşerek, bazı $\delta \in (\delta_1, \delta_2)$ için $z(t_0) \in \partial W_\delta$ olacak şekilde bir $t_0 \in (0, T)$ olması gerektiğini varsayıyoruz, yani $I_\delta(z(t_o)) = 0$ ve $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z(t_0)\right\| \neq 0$ veya $J(z(t_0)) = d(\delta)$ dır. $E(t) \leq E(0)$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|z_t\|^2 + J(z) \leq& E(0) \\ \leq& d(\delta) \end{aligned} \tag{4.25}$$

olur. Bu durumda $J(z(t_0)) = d(\delta)$ nın imkansız olduğunu görürüz. Öte yandan, eğer $I_\delta(z(t_o)) = 0$ ve $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z(t_0)\right\| \neq 0$ ise $d(\delta)$ nın tanımı gereği $J(z(t_0)) \geq d(\delta)$ olur bu ifade de (4.25) ile çelişir.

ii) (i) şıkkına benzerdir.

Teorem 4.1.6

$E(0) = 0$ için (4.1) probleminin aşikar olmayan tüm çözümleri

$$B_{r_o}^c = \left\{ z \in H_0^m(\Omega) \mid \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\| \geq r_0 = \left(\frac{1}{C^{p+2}}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

kümesinin elemanıdır.

İspat.

$E(0) = 0$ için $z(t)$, (4.1) probleminin çözümü ve T, $z(t)$ nin varlık zamanı olsun. $E(t) \leq E(0)$ eşitsizliğinden

$$\frac{1}{2}\|z_t\|^2 + J(z) \leq E(0) = 0$$

ifadesini elde ederiz. Yani $0 \leq t < T$ için $J(z) \leq 0$ olur. Böylece

$$\frac{p-1}{2(p+1)}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2 + \frac{1}{p+1} I(z) + \frac{1}{(p+1)^2}\|z\|_{p+1}^{p+1} \leq 0$$

olur. Bu da $I(z) \leq 0$ anlamına gelir. $I(z)$ nin tanımından $0 \leq t < T$ için

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2 \leq & \int_\Omega |z|^{p+1} \ln |z| \, dx \\ \leq & \|z\|_{p+2}^{p+2} \\ \leq & C^{p+2} \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^p \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2\end{aligned}$$

olur. Bundan dolayı $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\| = 0$ veya $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\| \geq r_0$ olmalıdır. Eğer, $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_0\right\| = 0$ olursa $0 \leq t < T$ aralığında $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\| = 0$ olur. Öteki durumda $t_0 \in (0, T)$ için $0 < \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z(t_0)\right\| < r_0$ olur. Benzer olarak $0 \leq t < T$ için $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_0\right\| \geq r_0$ olduğunu görürüz.

Teorem 4.1.7

$z_0(x) \in H_0^m(\Omega)$ ve $z_1(x) \in L^2(\Omega)$ olsun. Ayrıca $E(0) < 0$ veya $E(0) = 0$, $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_0\right\| \neq 0$ olsun. Bu durumda $0 < \delta < \frac{p+1}{2}$ aralığı için (4.1) probleminin bütün çözümleri V_δ ya aittir.

İspat.

$E(0) = 0$ için $z(t)$, (4.1) probleminin herhangi bir çözümü olsun. T, $z(t)$ nin varlık zamanı olsun. $0 < \delta < \frac{p+1}{2}$ aralığında enerji eşitliği

$$\frac{1}{2}\|z_t\|^2 + a(\delta)\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2 + \frac{1}{p+1} I_\delta(z) \leq \frac{1}{2}\|z_t\|^2 + J(z) = E(0) \tag{4.26}$$

ifadesini verir. (4.26) dan eğer, $E(0) < 0$ ise o zaman $I_\delta(z) < 0$, $J(z) < 0 < d(\delta)$ olur. Çünkü Lemma 4.1.3 e göre $0 < \delta < \frac{p+1}{2}$ için $d(\delta) > 0$ olur. Eğer $E(0) = 0$, $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_0\right\| \neq 0$ ise Teorem 4.1.2 ye göre $0 \leq t < T$ için $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_0\right\| \geq r_0$ ifadesini elde ederiz. Yine (4.26) ile $0 < \delta < \frac{p+1}{2}$ için $I_\delta(z) < 0$, $J(z) < 0 < d(\delta)$ olur. Dolayısıyla yukarıdaki iki durum için $0 < \delta < \frac{p+1}{2}$, $0 \leq t < T$ için her zaman $z(t) \in V_\delta$ ifadesine sahip olduğu görülür.

4.2 $E(0) < d$ için Global Varlık ve Patlama

Teorem 4.2.1 (**$E(0) < d$ için Global Varlık**) $z_0(x) \in H_0^m(\Omega)$ ve $z_1(x) \in L^2(\Omega)$ olsun. Ayrıca $0 < E(0) < d$ ve $I(z_0) > 0$ veya $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_0\right\| = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.1) probleminin $0 \leq t < \infty$ için $z(t) \in L^\infty(0, \infty; H_0^m(\Omega))$ ve $z(t) \in W$, $0 \leq t < \infty$ için zayıf global çözümü vardır.

İspat. (4.1) problemi için potansiyel kuyu metodunu kullanarak $0 \leq t < \infty$ için yaklaşık çözümler oluşturalım:

$$\frac{1}{2}\left\|z_{mt}\right\|^2 + J\left(z_m\right) = E_m\left(0\right) < d \tag{4.27}$$

eşitsizliğini kullanabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} J\left(z_m\right) =& \frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_m\right\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\Omega}\left|z_m\right|^{p+1}\ln\left|z_m\right| dx + \frac{1}{(p+1)^2}\left\|z_m\right\|_{p+1}^{p+1} \\ \geq& \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_m\right\|^2 + \frac{1}{p+1} I\left(z_m\right) \\ \geq& \frac{p-1}{2\left(p+1\right)}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_m\right\|^2 \end{aligned}$$

ifadesini yazabiliriz. Buradan $0 \leq t < \infty$ için

$$\frac{1}{2}\left\|z_{mt}\right\|^2 + \frac{p-1}{2\left(p+1\right)}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_m\right\|^2 < d$$

Bu da aşağıdaki eşitsizliği ifade eder:

$$\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_m\right\|^2 < \frac{2\left(p+1\right)}{p-1} d, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} \left\|z_m\right\|_{p+1}^2 \leq& C^2\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_m\right\|^2 \\ <& C^2\frac{2\left(p+1\right)}{p-1} d, \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega}\left|z_m\right|^{p+1}\ln\left|z_m\right| dx < \left\|z\right\|_{p+2}^{p+2} & \\ \leq& C^{p+2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_m\right\|^{p+2} \\ <& C^{p+2}\left(\frac{2\left(p+1\right)}{p-1} d\right)^{\frac{p+2}{2}} \end{aligned} \tag{4.30}$$

ve

$$\left\|z_{mt}\right\|^2 < 2d \tag{4.31}$$

dır.

(4.28)-(4.31) den ve kompaktlık metodundan $z\left(t\right) \in L^{\infty}\left(0, \infty; H_0^m\left(\Omega\right)\right)$ olan bir çözüm elde ederiz. Buradan $z\left(t\right) \in W$ sonucu elde edilir.

Teorem 4.2.2 (Patlama) $z_0(x) \in H_0^m(\Omega)$ ve $z_1(x) \in L^2(\Omega)$ olsun. Ayrıca $E(0) < d$ ve $I(z_0) < 0$ olsun. Bu durumda (4.1) problemi için zayıf çözüm

$$\lim_{t \to T^-} \|z(.,t)\| = \infty$$

olacak şekilde sonlu zamanda patlar.

İspat.

$E(0) < d$ ve $I(z_0) < 0$ için $z(t)$, (4.1) probleminin çözümü olsun. $M(t) : [0,\infty) \to R^+$,

$$M(t) = \|z\|^2 \tag{4.32}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan türev alınırsa

$$M'(t) = 2(z, z_t) \tag{4.33}$$

olur. Tekrar türev alınırsa

$$\begin{aligned} M''(t) =& 2\|z_t\|^2 + 2(z, z_t) \\ =& 2\|z_t\|^2 + 2\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \int_\Omega |z|^{p+1}\ln|z|\,dx \\ =& 2\|z_t\|^2 - 2I(z) \end{aligned} \tag{4.34}$$

olur. $E(t) \leq E(0)$ eşitsizliğinden

$$\frac{1}{2}\|z_t\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |z|^{p+1}\ln|z|\,dx + \frac{1}{(p+1)^2}\|z\| \leq E(0) \tag{4.35}$$

ifadesi elde edilir.Bunun sonucunda

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega |z|^{p+1}\ln|z|\,dx \geq& (p+1)\|z_t\|^2 + (p+1)\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 \\ &+ \frac{2}{p+1}\|z\|_{p+1}^{p+1} - 2(p+1)E(0) \\ \geq& (p+1)\|z_t\|^2 + (p+1)\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - 2(p+1)E(0) \end{aligned} \tag{4.36}$$

eşitsizliği yazılır. (4.34) ve (4.36) ifadelerinden

$$\begin{aligned} M''(t) \geq& 2\|z_t\|^2 - 2\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + (p+1)\|z_t\|^2 \\ &+ (p+1)\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - 2(p+1)E(0) \\ =& (p+3)\|z_t\|^2 + (p-1)\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - 2(p+1)E(0) \\ \geq& (p+3)\|z_t\|^2 + (p-1)\lambda_1 M(t) - 2(p+1)E(0) \end{aligned} \tag{4.37}$$

yazılır. Burada $\lambda_1 > 0$ dır.

i) Eğer $E(0) \leq 0$ ise o zaman (4.37) ifadesi

$$M''(t) \geq (p+3)\|z_t\|^2 \tag{4.38}$$

eşitsizliğini sağlar.

ii) Eğer $0 < E(0) < d$ ise Teorem 4.1.5 den $z_t \in V_\delta$ olur. Burada $1 < \delta < \delta_2$ ve $t > 0$ dır. Ayrıca δ_2 Teorem 4.1.5 de yer alan parametre ile aynıdır. Lemma 4.1.2 (ii) ye göre $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 > r(\delta_2)$ ifadesi sağlanır. Dolayısıyla $t > 0$ için $I_{\delta_2}(z) \leq 0$ ve $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 > r(\delta_2)$ elde edilir.

$$M'(0) = 2(z_0, z_1) \geq 0$$

ve (4.34) ifadesinden

$$\begin{aligned} M''(t) \geq& 2(\delta_2 - 1)\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - 2I_{\delta_2}(z) \\ \geq& 2(\delta_2 - 1) r^2(\delta_2) > 0 \end{aligned}$$

ifadesini elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} M'(t) \geq& 2(\delta_2 - 1) r^2(\delta_2) t + M'(0) \\ \geq& 2(\delta_2 - 1) r^2(\delta_2) t \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} M(t) &\geq (\delta_2 - 1) r^2(\delta_2) t^2 + M(0) \\ &\geq (\delta_2 - 1) r^2(\delta_2) t^2 \end{aligned}$$

olur. Böylece yeterince büyük t için

$$(p-1)\lambda_1 M(t) > 2(p+1)E(0)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ifadeyi (4.37) de kullanarak (4.38) ifadesini elde ederiz. Sonuç olarak (4.38) ifadesinden

$$\begin{aligned} & M(t)M''(t) - \frac{p+3}{4}(M'(t))^2 \\ \geq& (p+3)\left(\|z\|^2\|z_t\| - (z, z_t)^2\right) \geq 0 \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\left(M^{-\alpha}(t)\right)'' = -\frac{\alpha}{M^{\alpha+2}}\left(M(t)\,M''(t) - (\alpha+1)\left(M'(t)\right)^2\right) \leq 0$$

dır. $\alpha = \frac{p-1}{4}$ için $M^{-\alpha}(t) \leq 0$ dır. Bu yüzden $M^{-\alpha}(t)$ yeterince büyük t ler için konkavdır ve $M^{-\alpha}(t) \to 0$ için bir sonlu T zamanı vardır. Diğer bir ifadeyle

$$\lim_{t\to T^-} M(t) = \infty$$

dır.

4.3 $E(0) = d$ için Global Varlık ve Patlama

Teorem 4.3.1 ($E(0) = d$ için Global Varlık ve Patlama) $z_0(x) \in H_0^m(\Omega)$ ve $z_1(x) \in L^2(\Omega)$ olsun. $E(0) = d$ ve $I(z_0) \geq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $0 \leq t < \infty$ için (4.1) probleminin $z(t) \in L^\infty(0,\infty; H_0^m(\Omega))$, $z(t) \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega))$ ve $z(t) \in W \cup \partial W$ olacak şekilde zayıf global çözümü vardır.

İspat.

Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki iki durumu ele alalım:

i)

$$\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_m\right\| \neq 0$$

dır.

$\lambda_m = 1 - \frac{1}{m}$ ve $z_{0m} = \lambda_m z_0$, $m = 2, 3, ...$ olsun. Başlangıç koşulları

$$z(x,0) = z_{0m}(x)\,,\ z_t(x,0) = z_1(x)$$

dır. Aşağıdaki problemi

$$\begin{cases} z_{tt} + \mathcal{A}z = |z|^p \ln|z|\,, & x \in \Omega,\ \ t > 0 \\ \frac{\partial^i z(x,t)}{\partial \nu^i} = 0,\ i = 0, 1, ..., m-1, & x \in \partial\Omega,\ \ t > 0 \\ z(x,0) = z_{0_m}(x)\,,\ z_t(x,0) = z_1(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

ele alalım. $I(z_0) \geq 0$ ve Lemma 4.1.1 den $\lambda^* = \lambda^*(z_0) \geq 1$ olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla $I(z_{0m}) > 0$ ve $J(z_{0m}) = J(\lambda_m z_0) < J(z_0)$ dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} 0 <& E_m(0) = \frac{1}{2}\|z_1\|^2 + J(z_{0m}) \\ <& \frac{1}{2}\|z_1\|^2 + J(z_0) = E(0) = d \end{aligned}$$

dır. Teorem 4.2.1 için her m için problemin ve $z_m(t) \in W$ olacak şekilde $0 \leq t < \infty$ için global bir çözümü $z_m(t)$ olur. Ve

$$(z_{mt}, v) + \int_0^t (\nabla z_m, \nabla v)\, d\tau = \int_0^t (f(z_m), v)\, d\tau + (z_1, v) \tag{4.39}$$

her $v \in H_0^m(\Omega)$, $0 \leq t < \infty$ için

$$\frac{1}{2}\|z_{mt}\|^2 + J(z_m) = E_m(0) \tag{4.40}$$

dır. İspatın geri kalanı Teorem 4.2.1 ispatı ile benzerdir.

ii)

$$\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_0\right\| = 0$$

dır.

$\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_0\right\| = 0$ ise $J(z_0) = 0$ ve $\frac{1}{2}\|z_1\|^2 = E(0) = d$ olur. $\lambda_m = 1 - \frac{1}{m}$ ve $z_{1m}(x) = \lambda_m z_1$, $m = 2, 3, ...$ ve

$$z(x,0) = z_0(x),\ z_t(x,0) = z_{1m}(x)$$

$$z(x,0) = z_0(x),\ z_t(x,0) = z_{1m}(x)$$

başlangıç koşullarını göz önüne alalım. Aşağıdaki problem için

$$\begin{cases} z_{tt} + \mathcal{A}z = |z|^p \ln|z|, & x \in \Omega,\ t > 0 \\ \frac{\partial^i z(x,t)}{\partial \nu^i} = 0,\ i = 0, 1, ..., m-1, & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ z(x,0) = z_0(x),\ z_t(x,0) = z_{1m}(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{4.41}$$

$$\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z_0\right\| = 0,\ 0 < E_m(0) = \frac{1}{2}\|z_{1m}\|^2 + J(z_0) = \frac{1}{2}\|\lambda_m z_1\|^2 < 0 = d$$

ve Teorem 4.2.1 den her m için (4.41) probleminin, $z(t) \in L^\infty(0, \infty; H_0^m(\Omega))$ ve $z_m(t) \in W$ olacak şekilde $0 \leq t < \infty$ aralığında global bir çözümü $z_m(t)$ vardır. İspatın geri kalanı bu teoremin (i) kısmına benzerdir.

Lemma 4.3.2 (Değişmez Küme V'**)** $z_0(x) \in H_0^m(\Omega)$ ve $z_1(x) \in L^2(\Omega)$ olsun. Eğer, $E(0) = d$, $I(z_0) < 0$ ve $(z_0, z_1) \geq 0$ ise V' kümesi değişmezdir.

Teorem 4.3.3 ($E(0) = d$ için Patlama) $z_0(x) \in H_0^m(\Omega)$ ve $z_1(x) \in L^2(\Omega)$ olsun. $E(0) = d$, $I(z_0) < 0$ ve $(z_0, z_1) \geq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda çözüm sonlu zamanda patlar ve

$$\lim_{t \to T^-} \|z(.,t)\| = \infty$$

dır.

İspat. (4.36) ifadesinden

$$\begin{aligned} M''(t) &\geq (p+3)\|z_t\|^2 + (p-1)\lambda_1 M(t) - 2(p+1)E(0) \\ &= (p+3)\|z_t\|^2 + (p-1)\lambda_1 M(t) - 2(p+1)d \end{aligned} \tag{4.42}$$

yazılır.

(4.39) dan ve Lemma 4.3.2 den $M''(t) > 0$ olduğundan $M'(t)$, $0 \leq t < \infty$ da artan olduğu açıktır. Ayrıca $M'(0) = (z_0, z_1) \geq 0$ olduğundan herhangi bir $t_0 > 0$ için $t \geq t_0$

$$M'(t) \geq M'(t_0) > 0$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} M(t) \geq & M'(t_0)(t - t_0) + M(t_0) \\ > & M(t)(t - t_0) \end{aligned}$$

olur. Yeterince büyük t için

$$(p-1)\lambda_1 M(t) > 2(p+1)d$$

sonucunu elde ederiz. Buradan ve (4.42) ifadesinden

$$M''(t) \geq (p+3)\|z_t\|^2$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece,

$$M(t)M''(t) - \frac{p+3}{4}(M'(t))^2 \geq (p+3)\left(\|z\|^2\|z_t\| - (z, z_t)^2\right) \geq 0$$

olur. İspatın geri kalanı Teorem 4.2.2 ile benzerdir.

4.4 $E(0) > 0$ için Patlama

Bu bölümde yüksek başlangıç enerjisi için patlama sonucunu ispatlayacağız.

Teorem 4.4.1 (**$E(0) > 0$ için Global Varlık**) Başlangıç verileri $(z_0, z_1) \in H_0^m(\Omega) \times L^2(\Omega)$ için

i) $E(0) < 0$,

ii) $(z_0, z_1) > 0$,

iii) $\|z_0\|^2 > \frac{2(p+1)}{\lambda_1(p-1)} E(0)$,

iv) $I(z_0) < 0$,

koşullarını sağlıyorsa o zaman (4.1) probleminin çözümleri sonlu zamanda patlar.

İspat. Bu sonucu iki adımda ispatlayacağız:

1.Adım

Bu adımda $I(z) < 0$ ve $\|z(t)\|^2 > \frac{2(p+1)}{\lambda_1(p-1)} E(0)$ eşitsizliğini her $t \in (0, T)$ için göstereceğiz. $I(z) < 0$ olduğunu kanıtlamak için çelişki yöntemini kullanalım. $I(z(t_0)) = 0$ ve $I(z) < 0$ eşitsizliğinin $t \in [0, t_0)$ için sağlandığını ancak t_0 anında bu eşitsizliğinin bozulduğunu varsayalım. Yine, önceden tanımladığımız $M(t)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun birinci türevi

$$M'(t) = 2(z, z_t)$$

ve ikinci türevi

$$M''(t) = 2\|z_t\| - 2I(z)$$

şeklindedir. $I(z) < 0$ olduğundan $M''(t) > 0$ olur. Yani, her $t \in (0, t_0)$ için $M'(t) > 0$ olur. Bu durumda $M(t)$ fonksiyonu kesinlikle artandır. Herhangi bir $t \in (0, t_0)$ için

$$M(t_0) > \frac{2(p+1)}{\lambda_1(p-1)} E(0) \tag{4.43}$$

olur. Ayrıca

$$J(z(t_0)) \leq E(t_0) \leq E(0)$$

eşitsizliğini de biliyoruz. Bunun açılımı

$$\frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z(t_0)\right\|^2 - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |z(t_0)|^{p+1} \ln|z(t_0)|\, dx + \frac{1}{(p+1)^2}\|z(t_0)\|_{p+1}^{p+1}$$
$$\leq E(t_0) \leq E(0) \tag{4.44}$$

şeklindedir. Ek olarak $I\left(z\left(t_0\right)\right)=0$ eşitliğinden

$$\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\left(t_0\right)\right\|^2=\int_\Omega\left|z\left(t_0\right)\right|^{p+1}\ln\left|z\left(t_0\right)\right|dx$$

sonucuna ulaşırız. Şimdi (4.44) ifadesini

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\left(t_0\right)\right\|^2-\frac{1}{p+1}\int_\Omega\left|z\left(t_0\right)\right|^{p+1}\ln\left|z\left(t_0\right)\right|dx+\frac{1}{\left(p+1\right)^2}\left\|z\left(t_0\right)\right\|_{p+1}^{p+1}\\
=&\frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\left(t_0\right)\right\|^2-\frac{1}{p+1}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\left(t_0\right)\right\|^2+\frac{1}{\left(p+1\right)^2}\left\|z\left(t_0\right)\right\|_{p+1}^{p+1}\\
\geq&\frac{p-1}{2(p+1)}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\left(t_0\right)\right\|^2\\
\geq&\frac{\lambda_1\left(p-1\right)}{2(p+1)}\left\|z\left(t_0\right)\right\|^2 \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

(4.44) ve (4.45) ifadelerinden

$$\frac{\lambda_1\left(p-1\right)}{2(p+1)}\left\|z\left(t_0\right)\right\|^2\leq E\left(0\right),$$

elde edilir. Yani

$$M\left(t_0\right)\leq\frac{2\left(p+1\right)}{\lambda_1\left(p-1\right)}E\left(0\right)$$

dır. Bu ifadede de (4.43) ile çelişir. Dolayısıyla her $t\in(0,T)$ için $I\left(z\right)<0$ ve

$$M\left(t\right)>\frac{2\left(p+1\right)}{\lambda_1\left(p-1\right)}E\left(0\right) \qquad (4.46)$$

olur.

2.Adım

Bu adımda çözümün sonlu zamanda patladığını ispatlayacağız.

$$M''\left(t\right)\geq\left(p+3\right)\left\|z_t\right\|^2$$

olduğundan

$$M\left(t\right)M''\left(t\right)-\frac{p+3}{4}\left(M'\left(t\right)\right)\geq\left(p+3\right)\left(\left\|z\right\|^2\left\|z_t\right\|-\left(z,z_t\right)^2\right)\geq 0$$

ifadesi elde edilir. İspatın geri kalanı Teorem 4.2.2 ile benzerdir.

5. LOGARİTMİK KAYNAK TERİMLİ YÜKSEK MERTEBEDEN HİPERBOLİK TİPTEN BİR DENKLEMİN ÇÖZÜMLERİNİN ÜSTEL BÜYÜMESİ

Bu bölümde

$$\begin{cases} z_{tt} + \mathcal{A}z = z\ln|z|^k, & x \in \Omega, \ \ t > 0 \\ \frac{\partial^i z(x,t)}{\partial \nu^i} = 0, \ i = 0, 1, ..., m-1, & x \in \partial\Omega, \ \ t > 0 \\ z(x,0) = z_0(x), \ z_t(x,0) = z_1(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

başlangıç sınır değer problemini ele alacağız.

Burada Ω, R^n de bölge $\mathcal{A} = (-\Delta)^m$, $m \geq 1$ (m bir tam sayı) ve $k > 1$ dır.

(5.1) probleminin çözümü için önce $E(t)$ enerji fonksiyonelini bulalım.

Lemma 5.1. $E(t) = E(0)$ dır. Yani enerji korunumludur.

İspat. (5.1) probleminin ilk denklemi z_t ile çarpılır Ω bölgesinde integrallenirse

$$\int_\Omega z_t z_{tt} dx + \int_\Omega z_t \mathcal{A}z dx = \int_\Omega z_t z \ln|z|^k dx$$

elde edilir. Şimdi terimleri tek tek elde edelim:

$$\int_\Omega z_t z_{tt} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z_t\|^2,$$

$$\int_\Omega z_t \mathcal{A}z dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2,$$

$$\int_\Omega z_t z \ln|z|^k dx = \frac{k}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega z^2 \ln|z|\, dx - \frac{k}{4}\frac{d}{dt}\|z\|^2$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak tüm terimler yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|z_t\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \frac{k}{4}\|z\|^2 - \frac{k}{2}\int_\Omega z^2 \ln|z|\, dx\right] = 0$$

olur. Böylece (5.1) probleminin enerji fonksiyoneli

$$E(t) = \frac{1}{2}\|z_t\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \frac{k}{4}\|z\|^2 - \frac{k}{2}\int_\Omega z^2 \ln|z|\, dx \tag{5.2}$$

olarak elde edilmiş olur. (5.2) ifadesi integrallenirse

$$\int_0^t \frac{d}{dt}E(t) = \int_0^t 0dt,$$

$$E(t) = E(0)$$

elde edilir.

Burada, potansiyel enerji fonksiyoneli

$$J(z) = \frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \frac{k}{4}\|z\|^2 - \frac{k}{2}\int_{\Omega} z^2 \ln|z|\,dx \tag{5.3}$$

ve Nehari fonksiyoneli

$$I(z) = \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - k\int_{\Omega} z^2 \ln|z|\,dx \tag{5.4}$$

olarak tanımlansın. Ayrıca

$$\mathcal{N} = \left\{z \in H_0^m(\Omega) \mid I(z) = 0, \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\| \neq 0\right\}$$

Nehari manifoldudur.

$$d = \inf_{z\in\mathcal{N}} J(z)$$

potansiyel kuyunun derinliğini,

$$V = \{z \in H_0^m(\Omega) \mid J(z) < d,\ I(z) < 0\}$$

potansiyel kuyunun dışını gösterir.

Potansiyel kuyu ailesi için $\delta > 0$ alarak

$$I_\delta(z) = \delta\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - k\int_{\Omega} z^2 \ln|z|\,dx,$$

$$\mathcal{N}_\delta = \left\{z \in H_0^m(\Omega) \mid I_\delta(z) = 0, \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\| \neq 0\right\},$$

$$d(\delta) = \inf_{z\in\mathcal{N}_\delta} J(z),$$

ve

$$V_\delta = \{z \in H_0^m(\Omega) \mid J(z) < d(\delta),\ I_\delta(z) < 0\}$$

ifadeleri yazılabilir.

Teorem 5.2 $z_0 \in H_0^m(\Omega),\ z_1 \in L^2(\Omega)$ olsun.

i) Başlangıç enerjisi $E(0) < 0, t > 0$ için

$$\|z(t)\|^2 \geq \|z_0\|^2 e^{\left(\frac{2(z_0,z_1)}{\|z_0\|^2}t + \frac{k}{2}t^2\right)} \tag{5.5}$$

dır.

ii) $E(0) \geq 0$ ve $t > t_0$ için aşağıdaki üç varsayımlardan biri sağlanırsa

(a) $0 < E(0) < d$ ve $I(z_0) < 0$

(b) $E(0) = d$, $I(z_0) < 0$ ve $(z_0, z_1) > 0$

(c) $E(0) > 0,\ I(z_0) < 0$, $\|z_0\|^2 > \frac{4}{k}E(0)$ ve $(z_0, z_1) > 0$

bu durumda

$$\|z(t)\|^2 \geq \|z(t_0)\|^2 e^{\left(\frac{2\left(z(t_0),\, z_t(t_0)\right)}{\|z(t_0)\|^2}(t-t_0)+\frac{k}{4}(t-t_0)^2\right)} \tag{5.6}$$

ifadesi geçerli olur. Ayrıca $t > t_0$ sayısı

$$\frac{k}{2}\|z(t)\|^2 > 4E(0) \tag{5.7}$$

ifadesini yeterince büyük yapar.

İspat

i) (5.1) probleminin çözümü $z(x,t)$ olsun. $E(0) < 0$ ve $M(t) : [0,\infty) \to R^+$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$M(t) = \int_\Omega z^2 dx = \|z\|^2 \tag{5.8}$$

$M(t)$ fonksiyonunun diferansiyeli alınırsa

$$M'(t) = 2\int_\Omega z z_t dx \tag{5.9}$$

olur. Daha sonra tekrar diferansiyellenirse

$$\begin{aligned} M''(t) =& 2\left(\int_\Omega z_t z_t dx + \int_\Omega z z_{tt} dx\right) \\ =& 2\left(\|z_t\|^2 + \int_\Omega z\left(z \ln|z|^k - \mathcal{A}z\right)dx\right) \\ =& 2\|z_t\|^2 + 2\int_\Omega z^2 \ln|z|^k - 2\int_\Omega z\mathcal{A}z dx \end{aligned} \tag{5.10}$$

olur.

$$M''(t) = 2\|z_t\|^2 - 2\left[\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 - k\int_\Omega z^2 \ln|z|\, dx\right] \tag{5.11}$$

(5.4) ifadesi (5.11) ifadesinde yerine yazılırsa

$$M''(t) = 2\|z_t\|^2 - 2I(z) \tag{5.12}$$

elde edilir. Enerji eşitliği ve (5.2) ifadesinden

$$E(t) = E(0)$$

$$E(0) = \frac{1}{2}\|z_t\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}z\right\|^2 + \frac{k}{4}\|z\|^2 - \frac{k}{2}\int_\Omega z^2 \ln|z|\,dx,$$

$$E(0) = \frac{1}{2}\|z_t\|^2 + \frac{1}{2}I(z) + \frac{k}{4}\|z\|^2,$$

$$4E(0) = 2\|z_t\|^2 + 2I(z) + k\|z\|^2,$$

$$2I(z) = 4E(0) - 2\|z_t\|^2 - k\|z\|^2 \tag{5.13}$$

elde edilir. (5.13) ifadesi (5.12) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} M''(t) =& 2\|z_t\|^2 - \left(4E(0) - 2\|z_t\|^2 - k\|z\|^2\right) \\ =& 4\|z_t\|^2 + k\|z\|^2 - 4E(0) \end{aligned} \tag{5.14}$$

olur. (5.7) eşitsizliği (5.14) ifadesinde yazılırsa

$$M''(t) = 4\|z_t\|^2 + kM(t) - 4E(0) \tag{5.15}$$

elde edilir. Burada $E(0) < 0$ olduğundan

$$M''(t) > 4\|z_t\|^2 + kM(t) \tag{5.16}$$

olur. (5.15) ifadesi ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & M(t)M''(t) - (M'(t))^2 \\ >& \|z\|^2\left(4\|z_t\|^2 + kM(t)\right) - 4(z, z_t)^2 \\ =& \|z\|^2 4\|z_t\|^2 + \|z\|^2 kM(t) - 4(z, z_t)^2 \\ =& 4\left(\|z\|^2\|z_t\|^2 - (z, z_t)^2\right) + \|z\|^2 k(M(t))^2 \\ \geq& k(M(t))^2 \end{aligned} \tag{5.17}$$

elde edilir. Şimdi

$$H(t) = \ln(M(t))$$

fonksiyonu seçilir ve bu fonksiyonun diferansiyeli alınırsa

$$H'(t) = \frac{M'(t)}{M(t)}$$

elde edilir. Tekrar diferansiyeli alınırsa

$$H''(t) = \left(\frac{M'(t)}{M(t)}\right)' = \frac{M''(t)\,M(t) - (M'(t))^2}{(M(t))^2}$$

olur. Bu ifade (5.17) ifadesinde yazılırsa

$$H''(t) = \left(\frac{M'(t)}{M(t)}\right)' > k \tag{5.18}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı Ω bölgesinde integrallenirse

$$\begin{aligned} H'(t) =& \frac{M'(t)}{M(t)} \\ =& \frac{M'(0)}{M(0)} + \int_0^t \left(\frac{M'(\lambda)}{M(\lambda)}\right)' d\lambda \\ \geq& \frac{M'(0)}{M(0)} + \int_0^t k d\lambda \\ =& \frac{M'(0)}{M(0)} + kt \end{aligned} \tag{5.19}$$

olur. (5.19) eşitliğine göre

$$\begin{aligned} H(t) - H(0) = \int_0^t H'(\lambda)\, d\lambda \geq \int_0^t \left(\frac{M'(0)}{M(0)} + k\lambda\right) d\lambda \\ = \frac{M'(0)}{M(0)} + \frac{k}{2}t^2 \end{aligned} \tag{5.20}$$

elde edilir. Bu da (5.5) ifadesini verir.

ii) $E(0) \geq 0,\ t_0 > 0$ ve $t > t_0$ için Teorem 5.2 (ii) nin (a), (b) ve (c) koşullarından birinin geçerli olduğunu varsayıp (5.7) ifadesini elde ederiz.

(a) durumunun geçerli olması durumunda $0 \leq E(0) < d$, $I(z_0) < 0$ ve tezimizin dördüncü bölümündeki Lemma 4.2 nin (ii) ifadesine göre $z_t \epsilon V_\delta$, $1 \leq \delta \leq \delta_2$ ve $t > 0$ dır. Böylece $I_\delta(z_t) < 0$, $1 \leq \delta \leq \delta_2$ ve $t > 0$ olduğunu biliyoruz. Lemma 4.2 (ii)' ye göre $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(t)\right\| > r(\delta)$, $1 \leq \delta \leq \delta_2$ve $t > 0$ anlamına gelir. Burada $r(\delta)$, pozitif sabit sayıdır. Böylece $I_{\delta_2}(z_t) \leq 0$ ve $\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}(t)\right\| > r(\delta_2)$ olur. (5.12) ifadesinden ve yukarıdaki bilgilerden

$$
\begin{aligned}
M''(t) =& 2\left\|z_t\right\|^2 - 2I(z) \\
\geq & -2I(z) \\
=& 2\delta_2 \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2 - 2I_2(z) - 2\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2 \\
=& 2\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2 (\delta_2 - 1) - 2I_2(z) \\
\geq & 2\left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{2}} z\right\|^2 (\delta_2 - 1) \\
=& 2(\delta_2 - 1) r^2 \delta_2 > 0
\end{aligned}
$$

ifadesini elde ederiz.

$$M''(t) \geq 2(\delta_2 - 1) r^2 (\delta_2)$$

eşitsizliğin her iki tarafı Ω bölgesinde iki defa integrallenirse

$$M(t) \geq (\delta_2 - 1) r^2 (\delta_2) t^2 + M'(0) t + M(0) \tag{5.21}$$

olur.

(b) durumunun geçerli olması durumunda, $E(0) = d$, $I(z_0) < 0$ ve $(z_0, z_1) \geq 0$, tezimizin dördüncü bölümünde yer alan Lemma 4.1.4 ifadesine göre $t > 0$ için $I(z_t) < 0$.

(5.12) ifadesine göre $M''(t) > 0$ olur. Buradan $M'(t)$ fonksiyonun artan olduğunu görürüz. $(z_0, z_1) \geq 0$ koşulundan $M(0) \geq 0$ ve herhangi bir $t_1 > 0$ için

$$
\begin{aligned}
M'(t_1)(t - t_1) =& M(t) - M(t_1) \\
M(t) \geq & M'(t_1)(t - t_1) + M'(t_1) \\
> & M'(t_1)(t - t_1)
\end{aligned} \tag{5.22}
$$

ifadesi elde edilir.

(c) durumunun geçerli olması durumunda, $E(0) > 0$, $I(z_0) < 0$, $\left\|z_0\right\|^2 > \frac{4}{k} E(0)$ ve $(z_0, z_1) > 0$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $I(z_t) < 0$ ifadesinin $t > 0$ için sağlandığını da biliyoruz; bu ifade tezimizin bir önceki bölümünde yer alan Lemma 4.1 kanıtında ispat edilmişti. Böylece (5.12) den $M''(t) > 0$ sonucunu çıkarırız. Bu duruma göre $(z_0, z_1) > 0$ yani $M'(0) > 0$ olduğundan

$$M'(t) > M'(0) > 0$$

dır. Yani $t > 0$ için

$$\begin{aligned} M(t) \geq & M'(0)t + M(0) \\ > & M'(0)t \end{aligned} \tag{5.23}$$

olur.

$t > t_0$ için (5.21)-(5.23) ifadelerinden herhangi biri geçerli olduğunda $t_0 > 0$ olacak kadar büyük bir t seçilebilir ve böylece (5.7) için sağlanmış olur. Bu (5.14) ifadesinin

$$\begin{aligned} M''(t) \geq & 4\|z_t\|^2 + \frac{k}{2}\|z\|^2 + \left(\frac{k}{2}\|z\|^2 - 4E(0)\right) \\ > & 4\|z_t\|^2 + \frac{k}{2}\|z\|^2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceğini gösterir. İspatın geri kalan kısmı Teorem 5.2 (i) ile benzerdir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu çalışmada $\mathcal{A} = (-\Delta)^m$, $m \geq 1$, $k > 1$ ve p

$$\begin{cases} 1 < p < \infty, & n \leq 2m, \\ 2 < p < \frac{4}{n-2m}, & n > 2m \end{cases}$$

olmak üzere

$$z_{tt} + \mathcal{A}z = |z|^p \ln |z|$$

probleminin global varlığı ve patlaması;

$$z_{tt} + \mathcal{A}z = z \ln |z|^k$$

probleminin de üstel büyümesi çalışılmıştır.

6.2 Öneriler

İncelenen problemin çözümlerinin varlığı farklı koşullar altında veya farklı metodlar kullanılarak çalışılabilir. Ω bölgesinde ele aldığımız bu problemler daha karmaşık bölgeler veya farklı tipte sınır koşulları incelenerek sonuçların genellenebilirliği araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Adams, R.A. and Fournier, J.J.F. (2003). *Sobolev spaces* , New York: Elsevier.

Barrow, J. D. Parsons, P. (1995). Inflationary models with logarithmic potentials. *Physical Review D*, *52*(10), 5576-5587.

Białynicki-Birula, I., Mycielski, J., (1975). Wave equations with logarithmic nonlinearities. *Bull. Acad. Pol. Sci. Cl*, *3*(23), 461-466.

Białynicki-Birula, I., Mycielski, J., (1976) Nonlinear wave mechanics, Annalen der Physik,100 , 62-93

Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, New York: Springer.

Cao, Y., Liu, C. (2018). Initial boundary value problem for a mixed pseudo-parabolic p-Laplacian type equation with logarithmic nonlinearity. Electronic Journal of Differential Equations, 116 (2018): 1-19.

Cazenave T., Haraux A. (1980). Equations d'evolution avec non linéarité logarithmique. Annales de la Facultedes Sciences de Toulouse, 2 (1): 21–51.

Chen, X., Jüngel, A. and Liu, J. G. (2014). A note on Aubin-Lions-Dubinskiĭ lemmas. Acta Applicandae Mathematicae, 133(1), 33-43. doi: 10.48550/arXiv.1305.6235

Chen, H., Tian, S. (2015). Initial boundary value problem for a class of semilinear pseudo-parabolic equations with logarithmic nonlinearity. Journal of Differential Equations, 258 (12): 4424-4442.

Enqvist, K., McDonald, J. (1998). Q-balls and baryogenesis in the MSSM. *Physics Letters B*, *425*(3-4), 309-321.

Evans, L. C. (1998). *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19(2).

Han, J., Xu, R., & Yang, C. (2023). Improved growth estimate of infinite time blowup solution for a semilinear hyperbolic equation with logarithmic nonlinearity. *Applied Mathematics Letters*, *143*, 108670.

Hiramatsu, T., Kawasaki, M., & Takahashi, F. (2010). Numerical study of Q-ball formation in gravity mediation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, *2010*(06), 008.

Hu, B., Yin, H. M. (1995). Semilinear parabolic equations with prescribed energy. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, *44*, 479-505.

Ikehata, R. (1996). Some remarks on the wave equations with nonlinear damping and source terms. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 27(10), 1165-1175.

Kelley, W. G. and Peterson, A. C. (2010). The theory of differential equations. Springer. New York: Springer-Verlag.

Kesevan, S. (2003). *Topics in functional analysis and applications*, India, John Wiley Sons.

Levine, H. A. (1974). Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $(Pu)_{tt} = -Au + F(u)$. Transactions of the American mathematical society, 192, 1-21.

Levine, H. A. (1974). Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 5(1), 138-146. doi: 10.1137/0505015

Levine, H. A. (1974). A note on a nonexistence theorem for nonlinear wave equations. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 5(4), 644-648. doi: 10.1137/0505064

Lian, W. and Xu, R. (2019). Global well-posedness of nonlinear wave equation with weak and strong damping terms and logarithmic source term. Advances in Nonlinear Analysis, 9(1), 613-632. doi:10.1515/anona-2020-0016

Lian, W., Wang, J. ve Xu, R. (2020). Tekil potansiyele sahip psödo-parabolik denklem için çözümlerin küresel varlığı ve patlaması. *Diferansiyel Denklemler Dergisi* , *269* (6), 4914-4959.

Lions, J. L. (1969). *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris.

Liu, Y. and Xu, R. (2008). Global existence and blow up of solutions for Cauchy problem of generalized Boussinesq equation. Physica D: Nonlinear Phenomena, 237(6), 721-731. doi:10.1016/j.physd.2007.09.28

Ma, L., Fang, Z. B. (2018). Energy decay estimates and infinite blow-up phenomena for a strongly damped semilinear wave equation with logarithmic nonlinear source. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41 (7): 2639-2653.

Moussa, A. (2016). Some variants of the classical Aubin–Lions lemma. Journal of Evolution Equations, 16, 65-93. doi:10.1007/s00028-015-0293-3

Musayev, B. and Alp, M. (2000). *Fonksiyonel analiz*, Ankara: Balcı yayınları.

Nakao, M. and Ono, K. (1993). Existence of global solutions to the Cauchy problem for the semilinear dissipative wave equations. Mathematische Zeitschrift, 214, 325-342. doi: 10.1007/bf02572407

Payne, L. E. and Sattinger, D. H. (1975). Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations. Israel Journal of Mathematics, 22(3-4), 273-303.doi: 10.1007/BF02761595

Pişkin, E. (2017). *Sobolev Uzayları*, Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Pişkin, E. (2021). *Evolüsyon Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması*, Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Pişkin, E. (2024). *Diferansiyel Denklemler,* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Pişkin, E. (2025) *Evolüsyon Denklemlerinin Çözümlerinin Azalması*, Ankara:Pegem Akademi Yayıncılık.

Pişkin, E. and Irkıl, N. (2019a). Well-posedness results for a sixth-order logarithmic Boussinesq equation. Filomat, 33(13), 3985-4000. doi: 10.2298/FIL1913985P

Pişkin, E. and Irkıl, N. (2019b). Mathematical behavior of p-Laplacian equation with logarithmic source term. Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences, 10(2), 213-220

Pişkin, E., & Irkıl, N. (2019c). Mathematical behavior of solutions of fourth-order hyperbolic equation with logarithmic source term. In *Conference Proceedings of Science and Technology* (Vol. 2, No. 1, pp. 27-36).

Pişkin, E., & Çalişir, Z. (2020). Decay and blow up at infinite time of solutions for a logarithmic Petrovsky equation. *Tbilisi Mathematical Journal*, *13*(4), 113-127.

Pişkin, E., and Okutmuştur, B. (2021). *An introduction to Sobolev spaces*. Sharjah, Bentham Science Publishers

Pişkin, E. and Cömert, T. (2022). Existence and decay of solutions for a parabolic type Kirchhoff equation with logarithmic nonlinearity. Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal, 15(1), 111-128. doi: 10.32513/asetmj/19322008208

Sattinger, D. H. (1968). Stability of nonlinear hyperbolic equations. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 28, 226-244. doi: 10.1007/BF00250928

Sattinger, D. H. (1968). On global solution of nonlinear hyperbolic equations. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 30, 148-172. doi:10.1007/BF00250942

Shahrouzi, M. (2023) Asymptotic behavior of solutions for a nonlinear viscoelastic higher-order *p(x)*-Laplacian equation with variable exponent logarithmic source term, Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, 29, 1-20.

Soykan, Y. (2016). *Fonksiyonel Analiz,* Ankara: Nobel akademik yayıncılık.

Taşkesen, H., Polat, N. and Ertaş, A. (2012). On global solutions for the Cauchy problem of a Boussinesq-type equation. In Abstract and Applied Analysis, 2012(1), 1-10). Hindawi. doi:10.1155/2012/535031

Todorova, G. (1999). Stable and unstable sets for the Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 239(2), 213-226. doi:10.1006/jmaa.1999.6528

Wang, S. and Xue, H. (2008). Genelleştirilmiş bir Boussinesq denkleminin global çözümü. Uygulamalı matematik ve hesaplama, 204 (1), 130-136. doi:10.1016/j.amc.2008.06.059

Xu, R. and Su, J. (2013). Global existence and finite time blow-up for a class of semilinear pseudo-parabolic equations. Journal of Functional Analysis, 264(12), 2732-2763. doi: 10.1016/j.jfa.2013.03.010

Xu, R., Chen, Y., Yang, Y., Chen, S., Shen, J., Yu, T., Xu, Z. (2018). Global well-posedness of semilinear hyperbolic equations, parabolic equations and Schrodinger equations. 2018(55), 1-52.

Xu, R., Lian, W., Kong, X., Yang, Y. (2019). Fourth order wave equation with nonlinear
strain and logarithmic nonlinearity. Applied Numerical Mathematics, 141: 185-
205.

Yan, L., & Yang, Z. (2018). Blow-up and non-extinction for a nonlocal parabolic equation with logarithmic nonlinearity. *Boundary Value Problems*, *2018*, 1-11.

Yacheng, L. (2003). On potantiel wells and vacuum isolating of solutions for semilinear wave equations. Journal of Differential Equations, 192(1), 155-169. doi: 10.1016/S0022-0396(02)00020-7

Zloshchastiev, K. G. (2010). Logarithmic nonlinearity in theories of quantum gravity: Origin of time and observational consequences. *Gravitation and Cosmology*, *16*(4), 288-297.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad	AKAN, Hüsna
Web sayfası (Research Gate, Academia, vs.)	

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans		
Lisans	Dicle Üniversitesi	2012
Lise	Atatürk Lisesi	2005

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2020-	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

Yayınlar

Erhan Pişkin and Hüsna Akan, "Global existence and blow up solutions for a higher-order wave equation with logarithmic nonlinearity", 5th İnternational Conference on Engineering, Natural and Social Sciences İCENSOS 2025 April 15-16 in 2025 at Konya/Türkiye

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Hüsna AKAN		
Öğrenci No	22804024		
Ana Bilim Dalı	Matematik		
Program Türü	Proje☐	Yüksek Lisans☒	Doktora ☐
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Erhan PİŞKİN		
(Varsa)II. TezDanışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)			
Tez Başlığı	Bazı Kısmi Türevli Denklemlerin Niteliksel Analizi		
RAPORBİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	63		
Raporlama Tarihi	03/07/2025		
Benzerlik Oranı(%)	%14		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 63 sayfalık kısmına ilişkin, 03/07/2025 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %14 olarak tespit edilmiştir. Uygulanan filtrelemeler:

☒Başlangıç Bölümleri(Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract)hariç

☒Kaynaklar hariç

☐ Alıntılar hariç/dâhil

☐ Diğer(Açıklayınız)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Benzerlik oranım üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir,
Gereğini arz ederim.

Öğrenci: Hüsna AKAN
Tarih: 03/07/2025
İmza:

Danışman: Prof. Dr. Erhan PİŞKİN Tarih: 03/07/2025	İmza:
Ana Bilim Dalı Başkanı: Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY Tarih: 03/07/2025	İmza: