HAZİRAN 2025

Yüksek Lisans Tezi-Matematik

TALİB ALTALİB

TÜRKİYE CUMHURİYETİ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEMBOLİK PLİTHOGENİC HALKALAR

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TALİB ALTALİB

HAZİRAN 2025

SEMBOLİK PLİTHOGENİC HALKALAR

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek lisans Tezi

Danışman

Prof. Dr. Necati OLGUN

İkinci Danışman

Dr.Öğr.Üyesi Ahmed HATİP

Talib ALTALİB

Haziran 2025

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Talib ALTALİB

ABSTRACT

SYMBOLİC PLİTHOGENİC RINGS

ALTALİB, Talib
M.Sc. in Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Necati OLGUN
Co-Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ahmed HATİP
June 2025
56 pages

Symbolic plithogenic rings extend classical ring theory by integrating symbolic logic and plithogenic set theory to address multi-qualitative uncertainty, contradiction, and heterogeneity. An n-symbolic plithogenic ring, denoted $n-SP_R$, is built over a commutative ring R and expanded with symbolic idempotent elements $P_1, \ldots, P_n$, each representing distinct attributes. These elements satisfy dominance-based idempotency and absorption rules (e.g., ${P_i}^2 = P_i, P_iP_j = P_{\max(i,j)}$) aligned with plithogenic logic. Elements take the form $\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$ ($\lambda_i \in R$), allowing symbolic algebraic modeling. Classical ring operations generalize to symbolic coefficients, maintaining commutativity, associativity, and distributivity. Plithogenic analogs of substructures—such as AH-ideals, kernels, and homomorphisms—have been examined to analyze structural properties and morphisms. Key notions like reducibility, invertibility, and the center are redefined symbolically. This framework offers a rich algebraic structure for systems with multidimensional and often contradictory attributes, deepening ring theory and supporting fields reliant on uncertainty and symbolic computation.

Key Words: Symbolic Plithogenic Rings, Symbolic 2-Plithogenic Ring, AHS-Homomorphism, AHS-Ideal, Isomorphism

ÖZET

SEMBOLİK PLİTHOGENİC HALKALAR

ALTALİB, Talib
Yüksek Lisans Tezi, Matematik
Danışman: Prof. Dr. Necati OLGUN
İkinci Danışman: Dr.Öğr.Üyesi Ahmed HATİP
Haziran 2025
56 sayfa

Sembolik plitogenik halkalar, klasik halka teorisinin ileri bir genellemesi olup, çok nitelikli belirsizlik, çelişki ve heterojenliği ele almak için sembolik mantık ve plitogenik küme teorisini bütünleştirir. n-Sembolik plitogenik halka $(n - SP_R)$, taban değişmeli halka R üzerinde, her biri farklı bir niteliği temsil eden $P_1, P_2, \dots, P_n$ sembolik idempotent elemanlarıyla genişletilerek tanımlanır. Bu elemanlar, plitogenik kombinasyon mantığına uygun olarak ${P_i}^2 = P_i \; ve \; P_i P_j = P_{\max(i,j)}$ ilişkilerini sağlar. Her eleman $\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$ formundadır $(\lambda_i \in R)$ ve sembolik anlam içeren cebirsel ifadelerin modellenmesine olanak verir. Klasik halka işlemleri, sembolik katsayıları kapsayacak şekilde genellenmiş; toplamanın değişmeliği, birleşmeliği ve dağılıcılığı korunmuştur. Ayrıca, AH-idealler, AH-kernel ve AH-homomorfizmler gibi plitogenik yapılar incelenerek yapısal davranış ve morfizmler detaylandırılmıştır. Sıfıra indirgenebilirlik, tersinirlik ve merkez kavramları sembolik bağlamda yeniden tanımlanmıştır. Bu yapı, çok boyutlu ve çelişkili niteliklere sahip sistemlerin ifadesi için zengin ve güçlü bir cebirsel çerçeve sunar; böylece hem halka teorisinin teorik derinliğini artırır hem de belirsizlik, çelişki ve sembolik hesaplamanın merkezi olduğu alanlarda sağlam temel sağlar.

Anahtar Kelimeler: Sembolik Plithogenic halkalar, Homomorphism, AHS-Homomorphism; AHS-Ideal, Isomorphism

’’Canım aileme’’

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Prof. Dr. Necati OLGUN ´e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.

Örneklerin toplanmasında, preparasyonunda ve teşhislerinde desteklerini benden esirgemeyen değerli hocam Dr.Öğr.Üyesi Ahmed HATİP ’e çok teşekkür ederim.

Çalışma süresince beni hep destekleyen ve güvenen çok sevdiğim biricik annem ve tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

$\boldsymbol{L}$	Evrensel küme
$\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{L}$	Alt Küme
$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}$	Elemanlar
$\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\gamma}$	Element bileşikleri
$\boldsymbol{K_{FS}}$	Bulanık Küme
$\boldsymbol{T_K(\alpha)}$	α’in K bulanık kümesine ait olma derecesidir.
$\boldsymbol{K_{IFS}}$	Sezgisel Bulanık Küme
$\boldsymbol{F_K(\alpha)}$	α'in K sezgisel bulanık kümesine üyelik olmama derecesidir.
$\boldsymbol{K_{NS}}$	Tekil-Değerli Nötrosofik Küme
$\boldsymbol{T_K(\alpha)}$	Nötrosofik kümenin doğruluk derecesidir.
$\boldsymbol{I_K(\alpha)}$	Nötrosofik kümenin kararsızlık derecesidir.
$\boldsymbol{F_K(\alpha)}$	Nötrosofik kümenin yanlışlık derecesidir.
$\boldsymbol{N}$	Nötrosofik sayı
$\boldsymbol{N_n}$	Nötrosofik Ayrık Sayı
$\boldsymbol{PN}$	Plithogenic Sayı
$\boldsymbol{SP_K}$	Sembolik n- Plithogenic Grup/halka, K 'ya göre
$\boldsymbol{2-SP_K}$	Sembolik 2-Plithogenic Grup/halka, K 'ya göre
$\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}$	Fonksiyon
$\cong$	Izomorf
$\cup$	Birleşim işlemi
$\cap$	Kesişim işlemi
$\times$	Kartezyen çarpım

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Amacı

Bilim camiası gerçeğin yapısına ilişkin kimi sorulara yüzyıllardır yanıt aramaktadır. Gerçek mutlak mıdır yoksa göreli mi? Sabit midir yoksa değişken mi? soruları yalnızca bilim camiasının değil, ilk insandan günümüze kadar gerçeğe ulaşma yolunu arayan herkesin zihnini meşgul etmiştir. Gerçek, daha fazla bilgi gerektirir mi (araştırma alanlarının genişletilmesi ve onun etrafında dönebilecek tüm nedenlerin ortaya çıkarılması çabalarının artırılması), yoksa gerçek, gözlemcileri ve araştırmacıları tarafından tartışılan bir olgu mudur; zira her taraf kendine uygun olan gerçeği mi görmektedir?. Genel olarak insanlar gerçeği eski çağlardan günümüze kadar gelişen imgeler (semboller-değerler) ile tasvir etmişlerdir ve bu imgeler, gerçeğe ulaşmada izlenen yönteme (felsefe-düşünme tarzı) göre farklılık göstermiştir. Bir önermenin doğruluğunu ya da bir elemanın bir kümeye ait olup olmadığını bilmek için, bu geçerliliği veya aidiyeti ölçebileceğimiz belirli bir standart ya da önceden bilinen aksiyomlar olması gerektiği bilinmektedir. Bu aksiyomlar sabittir fakat önem dereceleri farklılık gösterebilir, örneğin: Başarılı öğrenciler kümesi aşağıdaki kriterlere göre belirlenebilir: Öğrencinin fen bilimlerinde üstün başarı göstermesi, spor ve sosyal faaliyetlerde öne çıkması ve kültürel alanlarda da başarılı olması. Bir öğrenciyi başarılı kılan değer, bir öğretmenden (ya da araştırmacıdan) diğer öğretmene göre farklılık gösterebilir. İnsanlar doğru ve yanlış kavramlarını 0 veya 1 değerleriyle ifade etmişlerdir ve bu anlayış günümüzde hâlâ geçerlidir. Aristoteles'in dışlanmış üçüncü ilkesinden ya da ortadan kaldırılmış orta yasa ilkesinden söz ederiz: Her önerme ya doğrudur ya da onun karşıtıdır, arada başka bir olasılık yoktur. Örneğin, "Ben başarılıyım" ya da "Ben başarısızım" önermeleri birbiriyle çelişir. İlk önerme doğruysa, diğeri yanlıştır ve tersi de geçerlidir, arada üçüncü bir yol yoktur. "Aristoteles'in ifadesi"[1]. Bir önerme ya doğrudur ya da yanlıştır, üçüncü bir seçenek yoktur. Ortadan kaldırılmış. orta ilkesi aynı zamanda bir şeyin kendisi olduğunu ve ne tür değişim ve dönüşümlerden geçerse geçsin başka bir şey olmayacağını ifade eder.

"Aristoteles'in ifadesi". Ancak son dönem araştırmacıları, gerçekliğin yalnızca doğru ve yanlış ile sınırlı kalmadığını fark etmişlerdir. Birçok durumun mutlak doğru olmamakla birlikte belli bir oranda doğru ya da geçerli olduğunu ortaya koymuşlardır. Azerbaycanlı bilim insanı Lutfi Zadeh tarafından bulanık mantık (fuzzy logic) adı verilen yeni bir mantık türü geliştirilmiştir. Bu mantık, Aristoteles'in iki değerli klasik mantığından farklı olarak belirsiz durumlarda çıkarım yapılmasına olanak tanır. Bir durumun doğruluğu yalnızca 0 veya 1 ile değil, $[0,1]$ aralığındaki herhangi bir değerle de ifade edilebilir [2]. Bulanık mantık, uzman sistemlerde ve yapay zekâ uygulamalarında kullanılmış, daha sonra bu uygulamalar geliştirilerek bulanık mantık çipi üretilmiş ve kameralar gibi birçok üründe kullanılmıştır. Zadeh'in bulanık mantığını daha da genelleştiren Bulgar bilim insanı Krassimir Atanassov, 1983 yılında sezgisel bulanık mantık (intuitionistic fuzzy logic) kavramını ortaya koymuştur. Bu mantıkta bir önermenin doğruluğu ya da bir elemanın bir kümeye ait olup olmaması, iki fonksiyon ile tanımlanır: Üyelik fonksiyonu ve üyelik dışı fonksiyon. Her biri $[0,1]$ aralığında değer alır ve birbirlerini 1'e tamamlayacak şekilde tanımlanır. Yani üyelik fonksiyonu m ve üyelik dışı fonksiyon n olmak üzere: $m \in [0,1], n\ [0,1], m = 1 - n, n = 1 - m.$ Böylece, sezgisel mantık belirsizliğe yer bırakmaz. [3] Sonrasında belirsizliği, muğlaklığı, kesin olmayışı matematiksel olarak ifade etmeyi amaçlayan Rumen bilim insanı Florentin Smarandache tarafından nötrosofik mantık geliştirilmiştir. Bu yeni mantık, belirsizliğin hayatımızda var olan gerçek kaynaklardan türediğini kabul eder. Bu kaynaklar arasında rastlantısallık, eksik bilgi (bir şeyin tüm yönlerini bilmemek), bilgi edinimi sürecindeki hatalar (örneğin ölçüm hataları) gibi unsurlar yer alır. Bu nedenle, nötrosofik mantık üç temel bileşene dayanır: Üyelik fonksiyonu T, üyelik dışı fonksiyonu F ve belirsizlik fonksiyonu $I.$ Tüm bu bileşenler $[0,1]$ aralığında değer alır ve bileşenler birbirinden bağımsız ya da kısmen ilişkili olabilir; birbirini tamamlama zorunluluğu yoktur. Bu yönüyle sezgisel bulanık mantıktan daha kapsamlıdır. Nötrosofik mantığı önceki teorilerden ayıran önemli bir özellik, bileşenlerinin birbirinden bağımsız olabilmesidir. Bu bağımsızlığa örnek olarak şu olay verilebilir: Bir takımın Dünya Kupası'nı kazanma olasılığı, beraberinde yenilme ve turnuvadan elenme olasılıklarını da barındırmaktadır. Bu iki olasılıkla birlikte, kazanma ile kaybetme ihtimalini kesin olarak ayırt etmeyi güçleştiren önemli ölçüde bilinmeyen veya tanımsızlık durumu söz konusudur. Bu belirsizlik, her maçın seyrine eşlik eden koşullara bağlıdır; örneğin, kilit oyuncuların sakatlıkları ya da hakem kararları gibi etmenler bu kapsamda değerlendirilebilir. Ortaya çıkan belirsizlik düzeyi oldukça yüksek olup, bu bağlamda kazanma olasılığı, kaybetme olasılığı ve süreci kuşatan belirsizlik birbiriyle tamamen bağımsız olabileceği gibi, kısmen birbirine bağlı da olabilir.Bu yeni mantıkta bileşenlerin değerleri yalnızca oran (sayı) olmakla sınırlı değildir. Aynı zamanda ayrık elemanlara sahip alt kümeler $\{0, 1/2, 3/4, 1 \dots\}$ ya da $[0,1]$ aralığında açık, kapalı, yarı açık, yarı kapalı türde aralıklar olabilir. Çünkü birçok durumda bir olayın doğru veya yanlışlık yüzdesini ya da bir elemanın bir kümeye aitlik derecesini tam olarak belirleyemeyiz. Nötrosofik mantık, $[0,1]$ aralığının ötesine geçen zaman aralıkları ile de bizi şaşırtır. Yani, bu aralıkların üst sınırının üzerinde ya da alt sınırının altında kalan değerlerin de olabileceğini kabul eder, örneğin: Bir sınıfta çalışkan bir öğrenci vardır ancak aynı zamanda arkadaşlarına yardım eden çalışkan bir öğrenci de vardır. Diğer yandan tembel bir öğrenci ve arkadaşlarına zarar verip kafalarını karıştıran tembel bir öğrenci de bulunmaktadır [4]. Smarandache, fikirlerini genelleyerek nötrosofik kuramını oluşturmuştur: nötrosofik küme / nötrosofik mantık / nötrosofik olasılık / nötrosofik istatistik ... vb. Bu kavramlar tıpta teşhis, en kısa yolun bulunması, ulaştırma problemleri, soyut cebir vb. birçok alanda uygulama bulmuştur. Matematikçiler ise nötrosofik mantığı cebirsel yapılarda ele alarak nötrosofik yapılar ve anti-yapılar hakkında konuşur. Klasik cebirsel yapılarda (toplama, çarpma vb.) işlemler, bu küme üzerinde tamamen tanımlıdır. Ancak bu, özel ve sınırlı bir durumdur. Çünkü bilim ve bilgi alanlarında birçok durumda cebirsel işlemler kısmen tanımlı ya da tanımsız olabilir. Aynı durum klasik cebirsel yapılardaki özellikler (değişmeli, birleşmeli vb.) için de geçerlidir. Bulanık mantık, sezgisel bulanık mantık ve nötrosofik mantık gibi kavramların her biri gerçekliğin bir yönünü temsil ettiğinden tüm bu kavramları bir arada içeren ve onları tam bilgiye (hakikate) ulaşmak için kullanan matematiksel bir yapı kaçınılmaz hale gelmiştir. Nötrosofik mantık, zıt çiftleri ve onların nötr unsurlarını birlikte incelemesiyle bilinirken, Rumen bilim insanı Florentin Smarandache 2017 yılında plithogenic mantık veya plithogenic teori kavramını ortaya koyarak bu anlayışı daha da genişletmiştir. Bu kuram, çoklu zıt çiftleri ve onların nötr unsurlarını topluca analiz ederken aynı zamanda zıt olmayan çiftleri ve onların organik bütünleşmesini de inceler. Plithogenic teori, çeşitli alanlarda fikir ve teorilerin birleştirilmesini ve bütünleştirilmesini savunur. Bu bağlamda plithogenic küme, plithogenic mantık, plithogenic olasılık ve plithogenic istatistik kavramları geliştirilmiştir. Son olarak, plithogenic cebirsel yapılara yani yarı gruplar, gruplar, halkalar gibi yapılara kadar genişletilmiştir [5]. Florentin Smarandache'in plithogenic cebirsel yapı kavramını ortaya koymasından sonra, diğer araştırmacılar klasik cebirsel yapıların plithogenic mantık çerçevesinde farklı biçimlerini inceleme fırsatı bulmuşlardır. Merkeci ve arkadaşları, tip 2 sembolik plithogenic halkaları tanımlayarak, elemanlarının ve alt yapıların birçok özelliğini araştırmışlardır. Bu çizgide ilerleyen El-Beşir, tip 3 sembolik plithogenic halkalar üzerinde çalışmış, Ahmed El-hatib ise tip 4 ve 5 sembolik plithogenic halkaları inceleyerek elemanlarının ve alt yapıların özelliklerini, idealleri ve AH homomorfizmlerini araştırmıştır. Diğer araştırmacılar ise bu çalışmaları tip 6 ve 7 halkalara kadar genişletmiştir [6][7][8]. Araştırmacıların çabaları sadece halkalarla sınırlı kalmayıp vektör uzayları, modüller ve daha fazlasına da uzanmıştır. Bu çalışmada özellikle sembolik plithogenic halkalar ele alınmış, bu yapıların elemanlarının özellikleri ve onlara bağlı alt yapıları incelenmiştir.

BÖLÜM II

TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, konumuzun özüne inmeden önce gerekli olan bazı tanımları vereceğiz. Bu tanımlar aşağıdakileri kapsamaktadır:

Küme, bulanık küme, sezgisel bulanık küme, nötrosofik küme, grup, alt grup, halka, idealler, nötrosofik sayı ve plithogenic sayı tanımları.

2.1. Küme

Tanım 2.1.1 [9] Birlikte düzenlenmiş ve tam olarak tanımlanmış nesneler topluluğuna "küme" denir. Kümenin elemanları bu nesnelerdir. Bir kümenin elemanları genellikle süslü parantezler {} içine alınır. Örneğin, $\{a, b, c\}$ kümesinin elemanları a, b ve c'dir.

Örnek 2. 1.2: Bir grubun elemanları açıkça tanımlanmak zorunda olduğundan, bir okul içindeki öğrenci grubu, belirli bir kritere göre tanımlanabilir. Örneğin, yeni bir öğretmenden en yüksek memnuniyet düzeyini gösteren öğrenciler bu gruba dahil edilebilir.

2.2. Bulanık Küme

Tanım 2.2.1 [2] $K \subset L$ olmak üzere, L evrensel küme (tartışma evreni) olmak üzere, K bulanık küme aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$K_{FS} = \{\alpha: (T_K(\alpha)), \alpha \in L\}$$

Burada $T_K: L \rightarrow P([0,1])$ ifadesi, L kümesindeki her α elemanına, $[0,1]$ aralığının kuvvet kümesinde bir üyelik derecesi atayan üyelik fonksiyonunu gösterir. Bu formülasyon, klasik küme teorisini genelleyerek, elemanların yalnızca 0 veya 1 ile tanımlanması yerine, değişen derecelerde üyeliğe sahip olmasına olanak tanır.

Örnek 2.2.2: Örnek 1.2'den yola çıkarsak, bir okulun öğrencilerinin yeni bir öğretmene yönelik kabul değeri, her bir öğrenciye göre 0.3, 0.5 veya 0 ile 1 arasında herhangi bir değer olabilir.

2.3. Sezgisel Bulanık Küme

Tanım 2.3.1 [3] L evrensel küme (evren) olmak üzere, A kümesi L'nin bir altkümesi olsun. Bu durumda, Sezgisel Bulanık Küme (Intuitionistic Fuzzy Set, *IFS)* şu şekilde tanımlanır:

$$K_{IFS} = \{\alpha : (T_K(\alpha), F_K(\alpha)); \alpha \in L\}$$

Burada $T_K(\alpha)$ ve $F_K(\alpha)$: L ⟶ P ([0,1]) fonksiyonları sırasıyla K kümesinin genel elemanı α'nın üyelik ve üyelik dışılık derecelerini temsil eder. $P([0,1])$ ifadesi, [0,1] aralığının kuvvet kümesini göstermektedir. Ayrıca, tüm $\alpha \in L$ için şu koşul sağlanmalıdır: $supT_K\ (\alpha)\ +\ sup\ F_K\ (\alpha)\ <=\ 1$.

Örnek 2.3.2: Örnek 2.1.2'den alınan veriye göre, yeni öğretmene yönelik kabul ve reddetme derecelerini gösteren K kümesi şu şekildedir:

$K = \{(\alpha, 0.3, 0.7)\}$ Burada α, okulun tüm öğrencilerini ifade etmektedir.

2.4. Tekil-Değerli Nötrosofik Küme

Tanım 2.4.1 [10] Tekil-Değerli nötrosofik Küme (Single-Valued Nötrosofik Set, NS) belirsizliğin yönetimi için teorik bir çerçeve sunar. L evrensel küme olmak üzere, $K_{NS} \subseteq L$ altkümesi şu şekilde tanımlanır:

$$K_{NS} = \{\langle \alpha, T_K(\alpha), I_K(\alpha),\ F_K(\alpha)\rangle \mid \alpha \in L\}$$

Burada $T_K(\alpha)$, $I_K(\alpha), F_K(\alpha)$:$L \rightarrow [0,1]$ fonksiyonları sırasıyla doğruluk üyeliği derecesini, kararsızlık (indeterminizm) üyeliği derecesini ve yanlışlık üyeliği derecesini temsil eder. Bu fonksiyonlar aşağıdaki koşulu sağlamalıdır: $0 \leq T_K(\alpha) + I_K(\alpha) + F_K(\alpha) \leq 3$ Ayrıca, $T_K(\alpha), I_K(\alpha)$ ve $F_K(\alpha)$ bileşenleri birbirinden bağımsızdır.

Örnek 2.4.2: Örnek 2.1.2'ye göre, bu durum için nötrosofik küme şu şekildedir: $K = \{x, (0.1, 0.5, 0.9)\}$

0.1, öğrencilerin yeni öğretmenden duyduğu memnuniyet derecesini ifade eder.

0.5, öğretmenleri önemsemeyen ya da öğretmenler arasında fark gözetmeyen öğrencilerin kararsızlık derecesidir.

0.9, öğrencilerin yeni öğretmenden duyduğu memnuniyetsizlik derecesidir.

2.5. Grup

Tanım 2.5.1 [11] Bir grup, K kümesi üzerinde tanımlı ikili bir işlem * ile birlikte aşağıdaki dört temel özelliği sağlayan matematiksel bir yapıdır:

- Kapalılık (Closure): $\forall \alpha, \beta \in K$ için $\alpha * \beta \in K$ olmalıdır.
- Birleşme Özelliği (Associativity): $\forall \alpha, \beta, \theta \in K$ için $(\alpha * \beta) * \theta = \alpha * (\beta * \theta)$ olmalıdır.
- Birim Eleman (Identity Element): $e \in K$ olmak üzere, $\forall \alpha \in K$ için $e * \alpha = \alpha * e = \alpha$ koşulunu sağlayan tek bir eleman vardır.

- Ters Eleman (Inverse Element): $\forall\alpha \in K$ için, $\alpha * \alpha^{-1} = \alpha^{-1} * \alpha = e$ olacak şekilde bir $\alpha^{-1} \in K$ elemanı bulunur (burada e, birim elemandır).

Eğer ayrıca işlem değişmeli (komütatif) ise, yani $\alpha * \beta = \beta * \alpha$ her $\alpha, \beta \in K$ için sağlanıyorsa, bu tür gruplara abelyen (veya değişmeli) grup denir.

Örnek 2.5.2: Tüm tam sayıların kümesi Z, ikili işlem olarak toplama ile bir grup oluşturur. Bu grubun birim (özdeş) elemanı 0'dır ve herhangi bir tam sayının tersi, o sayının negatifidir, yani $-n$. Bu, abelyen (değişmeli) bir gruptur.

Örnek 2.5.3: $Q^* = Q \setminus \{0\}$ kümesi çarpma işlemi altında bir grup oluşturur. Bu grubun birim elemanı 1'dir ve herhangi bir rasyonel sayının tersi q^{-1}'dir. Bu grup da **abelyen** bir gruptur.

Örnek 2.5.4: n elemanın tüm permütasyonlarından oluşan küme, birleşim işlemi altında bir grup oluşturur. Bu gruba simetrik grup Sn denir. $n \geq 3$ için bu grup abelyen değildir.

Örnek 2.5.5: Düzgün n-genin tüm simetrileri (dönmeler ve yansımalar), birleşim işlemi altında bir grup oluşturur. Bu gruba dieder grup D_n adı verilir.

Örnek 2.5.6: Z/nZ kümesi, modulo n toplama işlemi ile n mertebesinde bir çevrimsel grup oluşturur ve Z_n ile gösterilir.

Örnek 2.5.7: n ile aralarında asal olan tam sayıların kümesi, modulo n çarpma işlemi altında bir grup oluşturur ve $(Z/nZ)^*$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.8 [11] K bir grup ve $*$ ikili işlem olmak üzere, $(K,*)$ bir grup olarak verilsin. $H \subseteq K$ boş olmayan bir altküme olmak üzere, eğer H kümesi, K'dan miras alınan işlem * altında bir grup oluşturuyorsa, H kümesine K'nın bir altgrubu denir.

Yani, H, K'nın bir altgrubu ise $H \leq K$ olarak gösterilir ve aşağıdaki koşulları sağlamalıdır:

- Kapalılık: $\forall\alpha, \beta \in H$ için $\alpha * \beta \in H$ olmalıdır.
- Birim Eleman: K'nın birim elemanı $e \in H$ olmalıdır.
- Ters Elemanlar: $\forall\alpha \in H$ için $\alpha^{-1} \in H$ olmalıdır.

Alternatif Tanım (Tek-Adımlı Altgrup Testi): $H \subseteq K$ boş olmayan bir altküme olmak üzere, $\forall\alpha, \beta \in H$ için $\alpha\beta^{-1} \in H$ koşulu sağlanıyorsa, H bir altgruptur.

Bu tanım, H'nin K'nın grup işlemi altında tüm grup aksiyomlarını sağladığını garanti eder: birleşme özelliği (K'den miras alınır), birim elemanın varlığı, ters elemanların varlığı ve kapalılık.

Örnek 2.5.9: $K = (Z, +)$ grubu, toplama işlemi altındaki tam sayılar kümesi olsun. $H = 2Z = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$, yani tüm çift tam sayılardan oluşan altküme olarak tanımlansın. H'nin K'nın bir altgrubu olduğunu göstereceğiz.

Altgrup Özelliklerinin Doğrulanması:

- Boş Olmama: $0 \in 2Z$ olduğundan $H \neq \emptyset$.
- Toplamaya Göre Kapalılık: $\alpha, \beta \in H$ olsun. O halde $\alpha = 2m, \beta = 2n$ olacak şekilde $m, n \in Z$ vardır. $\alpha + \beta = 2m + 2n = 2(m + n) \in 2Z \Rightarrow \alpha + \beta \in H$
- Ters Elemanın Varlığı**:** $\alpha \in H$ olsun. Yani $\alpha = 2m$. O halde $-\alpha = -2m = 2(-m) \in 2Z \Rightarrow -\alpha \in H,$ Sonuç olarak, $H = 2Z \leq Z$. Yani çift tam sayılar kümesi $2Z, (Z, +)$ grubunun bir altgrubudur.

2.6. Halka

Tanım 2.6.1 [11] Soyut cebirde, halka (ring), belirli özellikleri sağlayan iki ikili işlemle donatılmış bir kümeden oluşan cebirsel bir yapıdır. Bu işlemler genellikle toplama ve çarpma olarak adlandırılır.

Biçimsel Tanım: Bir halka $(K, +, \cdot)$, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir küme K ve iki işlemle tanımlanır:

- Toplama (**+**)**:** K kümesi toplama işlemi altında abelyen (değişmeli) grup oluşturur. Yani toplama işlemi değişmelidir, birim (özdeş) eleman [\1] vardır ve her elemanın toplamsal tersi vardır.
- Çarpma $(\cdot)$: Çarpma işlemi birleşmelidir. Yani $\forall \lambda, \delta, \gamma \in K$ için $(\lambda \cdot \delta) \cdot \gamma = \lambda \cdot (\delta \cdot \gamma)$
- Dağılma Özellikleri**:** Çarpma işlemi toplama üzerine dağılır, yani:

$\lambda \cdot (\delta + \gamma) = (\lambda \cdot \delta) + (\lambda \cdot \gamma)$

$(\lambda + \delta) \cdot \gamma = (\lambda \cdot \gamma) + (\delta \cdot \gamma)$

Tanım 2.6.2: Değişmeli Halka (Commutative Ring), Çarpma işlemi değişmeli ise $\lambda \cdot \delta = \delta \cdot \lambda$ tüm $\lambda, \delta \in K$ için.

Tanım 2.6.3: Birimli Halka (Ring with Identity), Çarpma işlemi için birim (özdeş) eleman 1 varsa, yani $\lambda \cdot 1 = \lambda$ tüm $\lambda \in K$ için.

- Tamsayılı Halka (Integral Domain): Eğer halka değişmeli ve birimli ise, ayrıca sıfır bölen içermiyorsa (yani) $\lambda \cdot \delta = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \; veya \; \delta = 0$, bu tür halkalara tamsayılı halka denir.
- Cisim (Field): Birimli ve değişmeli halkalarda, sıfırdan farklı her elemanın çarpmaya göre tersi varsa, bu yapı cisim adını alır.

Örnek 2.6.4: Aşağıda soyut cebirde sıkça karşılaşılan bazı halka örnekleri verilmiştir:

1. Tam Sayılar Kümesi Z: $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ kümesi, standart toplama ve çarpma işlemleri ile bir birimli değişmeli halka oluşturur. Sıfır bölen içermediğinden tamsayılı halkadır.
2. n×n Matrisler Kümesi $Mn(R)$: Bir halka R'den alınan elemanlarla oluşturulmuş tüm n×n matrislerin kümesi, matris toplama ve çarpma işlemleri altında bir halka oluşturur.
   Matris çarpma işlemi genellikle değişmeli olmadığından, bu değişmeli olmayan (noncommutative) bir halkadır. Eğer R birimliyse, bu halkada birim matris I_n bulunur. $n > 1$için sıfır bölenler vardır; bu nedenle bir tamsayılı halka değildir.
3. Polinomlar Halkası $R[x]$**:**R halkasının katsayılarına sahip tüm polinomların kümesi $R[x]$, polinom toplama ve çarpma işlemleri altında bir halka oluşturur. Eğer R değişmeli ise, $R[x]$ de değişmelidir. Eğer R birimliyse, $R[x]$ halkasında da birim eleman (sabit polinom 1) vardır.
4. Gerçel Sayılar (R) ve Karmaşık Sayılar (C) Kümesi**:** R ve C, her ikisi de birimli ve değişmeli halkalardır. Ayrıca her sıfırdan farklı elemanın çarpmaya göre tersi bulunduğundan, bu yapılar aynı zamanda birer cisimdir.
5. n'ye Göre Modulo Tam Sayılar Halkası Z_n**:** $Z_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$kümesi, modüler aritmetik altında bir değişmeli halka oluşturur. Eğer n bir asal sayı ise, Z_n bir cisim olur (çünkü her sıfırdan farklı elemanın tersi vardır).
6. Sürekli Fonksiyonlar Halkası $C(R)$**:** Gerçel sayıdan gerçel sayıya sürekli olan tüm fonksiyonların kümesi, aşağıdaki noktasal işlemlerle bir halka oluşturur:

$$(\psi + \varphi)(x) = \psi(x) + \varphi(x)$$
$$(\psi \cdot \varphi)\,(x) = \psi(x) \cdot \varphi(x)$$

Bu yapı, birim fonksiyon $\psi(x) = 1$ile birimli değişmeli halka oluşturur.

Tanım 2.6.5 [11] R bir halka (değişmeli olması veya birim eleman içermesi gerekmez) olsun. $I \subseteq R$ boş olmayan bir altküme olsun. Bu durumda:

- I, R'nin sol ideali olarak adlandırılır, eğer:

i. $(I, +)$, toplamsal grup $(R, +)$'nin bir alt grubudur,

ii. Tüm $r \in R$ ve $a \in I$ için $r \cdot a \in I$ sağlanır. (Yani R'nin elemanlarıyla soldan çarpma işlemi, I kümesini korur.)

- Benzer şekilde, I, R'nin sağ ideali olur, eğer:

i. $(I,+),(R,+)$'nin bir alt grubudur.

ii. Tüm $r \in R$ ve $a \in I$ için $a \cdot r \in I$sağlanır. (Yani sağdan çarpma da I kümesini korur.)

- Eğer I, hem sol hem de sağ ideal ise, yani $\forall r \in R,\ \forall a \in I$: $r \cdot a \in I\ ve\ a \cdot r \in I,$

o zaman I, çift yönlü ideal (ya da değişmeli halkalar bağlamında yalnızca ideal) olarak adlandırılır.

Örnek 2.6.6: $R = Z$ olsun; burada Z tam sayıların, klasik toplama ve çarpma işlemleri altında bir halka oluşturduğunu biliyoruz. Aşağıdaki altküme tanımlansın:

$$I = 3Z = \{3k \mid k \in Z\}$$

Yani 3 ile tam bölünebilen tüm tam sayılar kümesi.

I'nin ideal olduğunu doğrulayalım:

- Toplamsal alt grup:

i. $0 \in I$ çünkü $3 \cdot 0 = 0,$

ii. $\alpha = 3m, \beta = 3n \Rightarrow \alpha - \beta = 3(m-n) \in I$, Bu nedenle $I \leq (Z,+)$.

- Çarpmaya göre kapanış (soğurma):

i. Her $r \in Z$ ve $\alpha = 3m \in I$ için: $r \cdot \alpha = r \cdot 3m = 3(rm) \in I,$

$\alpha \cdot r = 3m \cdot r = 3(mr) \in I$

ii. Yani hem soldan hem sağdan çarpma işlemi sonucunda yine I kümesine ait bir eleman elde edilir.

Sonuç olarak, $I = 3Z$ halkasının çift yönlü (iki taraflı) bir idealidir. Gerçekte, Z halkasında her ideal asal (principal) idealdir; yani, her ideal nZ biçimindedir ve burada $n \in Z$ sabittir.

2.7. Sembolik Plithogenic Küme

Tanım 2.7.1 [16] K, aşağıdaki tanıma sahip söylem evreni L'ye ait boş olmayan bir küme olsun:

$K = \{\alpha | \alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_n P_n,\ n \geq 1, \lambda_i \in R\ or\ \lambda_i\ C\ or\ \lambda_i$ belirli bir cebirsel yapıya aittir, for $0 \leq i \leq n\}$……(1)

Burada, R reel sayılar kümesini, C kompleks sayılar kümesini temsil eder ve tüm P_i 'ler sembolik (literal) Plithogenic bileşenler (değişkenler) olarak adlandırılan harflerdir (veya değişkenlerdir).

Yukarıda tanımlanan K kümesinin elemanları için temel (baz) $1, P_1, P_2, \ldots, P_n$, dir. λ_0, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ katsayılar olarak adlandırılır.

Bu kümeye "Sembolik Plithogenic Küme" denir. Bu küme üzerinde tanımlanan cebirsel yapılara ise sembolik Plithogenic cebirsel yapılar denir.

Bu küme SP_K ile gösterilir.

Yukarıda bahsedilen Plithogenic bileşenleri (değişkenleri) temsil eden harfler $P_1, P_2, \ldots, P_n$ gibi soyut sembollerin kullanımı, genel olarak sembolik (veya literal) Plithogenic teori olarak adlandırılır.

Eğer n=1ise, Denklem (1) şu şekilde sadeleşir:

$SP_K = \{(\lambda_0, \lambda_1 P_1) \mid \lambda_0, \lambda_1 \in R\ or\ C\ veya\ herhangi\ bir\ cebirsel\ yapı\}$... (2)

Bu durumda, SP_S geleneksel Nötrosofik kümeye karşılık gelir ve burada $P_1 = I$'dir.

Eğer n=3 ise, Denklem (1) şu şekilde sadeleşir:

$SP_K = \{(\lambda_0, \lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \lambda_3 P_3) \mid \lambda_i\ R\ or\ C\ veya\ herhangi\ bir\ cebirsel\ yapı\}$... (3)

Bu durumda, SP_S Nötrosofik Dörtlü kümesini temsil eder ve parametreler sırasıyla şu şekilde atanır: $P_1 = T$ (doğruluk), $P_2 = I$ (belirsizlik) ve $P_3 = F$ (yanlışlık).

Eğer n=2 ise, Denklem (1) şu şekilde sadeleşir:

$SP_K = \{(\lambda_0, \lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2) \mid \lambda_i \in R\ or\ C\ veya\ herhangi\ bir\ cebirsel\ yapı\}$... (4)

Bu yapı, sembolik 2-Plithogenic küme olarak adlandırılır.

Tanım 2.7.2 [16] + ve ·'nin sırasıyla toplama ve çarpmanın standart aritmetik işlemlerini temsil ettiğini ve k'nin sıfırdan farklı bir skaler olduğunu varsayalım. Eğer

$\alpha = (\lambda_0, \lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2)$ ve $\beta = (\delta_0, \delta_1 P_1, \delta_2 P_2)$

sembolik 2-Plithogenic kümesi SP_S'nin keyfi elemanları ise ve $\lambda_i, \delta_i \in R$ veya C ise, aşağıdaki işlemler geçerlidir:

- Toplama: $\alpha + \beta = (\lambda_0 + \delta_0, (\lambda_1 + \delta_1)P_1, (\lambda_2 + \delta_2)P_2)$
- Skalerle Çarpma: $k\alpha = (k\lambda_0, k\lambda_1 P_1, k\lambda_2 P_2)$
- Çarpma: $\alpha \cdot \beta = (\lambda_0\delta_0, (\lambda_0\delta_1 + \lambda_1\delta_0 + \lambda_1\delta_1)P_1, (\lambda_0\delta_2 + \lambda_2\delta_0 + \lambda_2\delta_2 + \lambda_1\delta_2 + \lambda_2\delta_1)P_2)$

Burada, $P_i \,.\, P_j = P_{(max\ i,j)}$'dir.

Eğer $k = 0$ ise, $0\alpha = (0\lambda_0, 0\lambda_1 P_1, 0\lambda_2 P_2) = (0, 0P_1, 0P_2) = (0,0,0)$.

2.8. Sembolik Plithogenic Cebirsel Yapıların Türleri

Tanım 2.8.1: $(K,*)$ keyfi bir cebirsel yapı olsun ve SP_K, buna karşılık gelen sembolik Plithogenic küme olarak tanımlansın.

$(SP_K,*)$ ikilisi, sembolik Plithogenic cebirsel yapı olarak adlandırılır. SP_K'nin tanımı, altında yatan cebirsel yapı K'ye bağlıdır. Özellikle:

- Eğer K bir grup ise, SP_K'ye sembolik Plithogenic grup denir.

- Eğer K bir halka ise, SP_K'ye sembolik Plithogenic halka denir.
- Eğer K bir hipergrup ise, SP_K'ye sembolik Plithogenic hipergrup denir.
- Ve benzeri durumlar da geçerlidir.

2.9. Nötrosofik Sayı

Tanım 2.9.1 [12] Nötrosofik sayılar şu şekilde ifade edilir:

$N = \lambda_0 + \lambda_1 I$ Burada λ_0 ve λ_1 reel veya kompleks sayılar olup, I nötrosofik sayının belirsizlik bileşenini temsil eder. Bu belirsizlik bileşeni aşağıdaki özellikleri sağlar:

$I^2 = I$ ve $\lambda I + \delta I = (\lambda + \delta)I$.

Burada önemli bir nokta, I'nin sanal birim olan $i = \sqrt{-1}$'den farklı olduğudur. Genel olarak, herhangi bir pozitif tam sayı n için $I^n = I$ olurken, $n \leq 0$ durumunda I^n tanımsızdır.

Tanım 2.9.2 [13] Nötrosofik ayrık (refined) sayılar aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$N_n = \lambda_0 + \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \cdots + \lambda_m I_m$ Burada $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ reel veya kompleks sayılar olup, $I_1, I_2, \ldots, I_m$, farklı alt-belirsizlik türlerini temsil eder ve $m \geq 1$ olmalıdır. Nötrosofik cebirsel yapılar, bu sayılar temel alınarak klasik cebirsel yapıların genişletilmesiyle tanımlanmıştır. Bu yapılara örnek olarak nötrosofik gruplar, nötrosofik halkalar, nötrosofik vektör uzayları, nötrosofik matrisler, bimatrisler ve n-matrisler verilebilir.

Tanım 2.9.3: İki ayrık nötrosofik sayı aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$Nn_1 = \lambda_0 + \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \cdots + \lambda_m I_m$

$Nn_2 = \delta_0 + \delta_1 I_1 + \delta_2 I_2 + \cdots + \delta_m I_m$

Toplama**:** $Nn_1 + Nn_2 = (\lambda_0 + \delta_0) + \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \delta_i) I_i$

Çıkarma**:** $Nn_1 - Nn_2 = (\lambda_0 - \delta_0) + \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \delta_i) I_i$

Skaler Çarpma**:** $\alpha . Nn_1 = \alpha . (\lambda_0 + \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \cdots + \lambda_m I_m) = \alpha . \lambda_0 + \alpha . \lambda_1 I_1 + \alpha . \lambda_2 I_2 + \cdots + \alpha . \lambda_m I_m$

Çarpma ve Kuvvet Alma:

$Nn_1 . Nn_2 = (\lambda_0 + \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \cdots + \lambda_m I_m) . (\delta_0 + \delta_1 I_1 + \delta_2 I_2 + \cdots + \delta_m I_m)$

Bu işlemde terim terim çarpma uygulanır ve aşağıdaki kural kullanılır:

$(\lambda_i I_i)(\lambda_j I_j) = \lambda_i . \lambda_j I_{\min\{i,j\}}$ Burada $(\cdot)$ işlemi, klasik çarpma anlamındadır. Özel bir durum olarak: $0. I_i = 0$.

Tanım 2.9.4 [14] Nötrosofik birim sayı: $1 \equiv +1 + 0. I_1 + 0. I_2 + \ldots + 0. I_m$.

Tanım 2.9.5 [14] Kuvvet alma: $(Nn_1)^m = Nn_1 . Nn_1 \ldots\ldots Nn_1$, ($m$ kez, $m \geq 1$)

Negatif tam sayılar için kuvvet alma tanımlı değildir: $(Nn_1)^{-m}$ tanımsızdır.

Örnek 2.9.6: Alalım: $Nn_1 = 4 + 3I_1 + 2I_2, Nn_2 = 2 + 2I_1 + 2I_2$

Toplama: $Nn_1 + Nn_2 = (4 + 2) + (3 + 2)I_1 + (2 + 2)I_2 = 6 + 5I_1 + 4I_2$

Çıkarma: $Nn_1 - Nn_2 = (4 - 2) + (3 - 2)I_1 + (2 - 2)I_2 = 2 + I_1$

Çarpma: $Nn_1.Nn_2 = 4.2 + (4.2 + 3.2 + 3.2 + 2.3 + 2.2)I_1 + (4.2 + 2.2 + 2.2)I_2 = 8 + 30I_1 + 16I_2$

2.10. Plithogenic Sayı

Tanım 2.10.1 [15] Plithogenic sayılar, aşağıdaki biçimde ifade edilen sayılar olarak tanımlanır: $PN = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m$

Burada $\lambda_m P_m$ ifadesi, öncül (dominant) veya baskın terimi temsil eder.

Tanım 2.10.2 [15] Her bir öznitelik/parametrenin (P_i) uygulamaya göre göreli önemine bağlı olarak, uzmanlar bir öncelik sırası (total order) ya da baskınlık düzeni (prevalence order) oluştururlar.

Amaç, sembolik plithogenic bileşenler kümesi $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ arasında belirli ilişkiler (kurallar) kurarak bu bileşenler arasında tam bir sıralama elde etmektir. Bu sıralamayı oluşturmada en yaygın kullanılan ilke absorbsiyon yasasıdır (absorbance law).

Tanım 2.10.3: Basitçe ifade edersek: "Büyük olan küçük olanı yutar." Bu ilkeye Absorbsiyon Yasası denir.

(Bir metaforla ifade edilirse: “Büyük balık küçük balığı yer.”)

Tanım 2.10.4 [16] İki adet plithogenic sayı tanımlayalım:

$PN_1 = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_m P_m$

$PN_2 = \delta_0 + \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2 + \cdots + \delta_m P_m$

Toplama: $PN_1 + PN_2 = (\lambda_0 + \delta_0) + \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \delta_i) P_i.$

Çıkarma: $PN_1 - PN_2 = (\lambda_0 - \delta_0) + \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \delta_i) P_i.$

Skaler Çarpma:

$\alpha.PN_1 = \alpha.(\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_m P_m) = \alpha.\lambda_0 + \alpha.\lambda_1 P1 + \alpha.\lambda_2 P2 + \cdots + \alpha.\lambda_m Pm$

Çarpma ve Kuvvet Alma: $PN_1.PN_2 = (\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_m P_m).(\delta_0 + \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2 + \cdots + \delta_m P_m)$

Bu işlemde, bileşenler terim terim çarpılır ve aşağıdaki kural kullanılır:

$(\lambda_i P_i)(\lambda_j P_j) = \lambda_i.\lambda_j P_{max\{i,j\}}$

Buradaki çarpma işlemi klasik cebirdeki gibi tanımlanmış olup, sembolik plithogenic bileşenler üzerinden yürütülür.

Özel bir durum olarak: $0.P_i = 0$.

Tanım 2.10.5 [16] Plithogenic birim sayı: $1 \equiv +1 + 0.P_1 + 0.P_2 + \ldots + 0.P_n$.

Kuvvet alma işlemi: $(PN_1)^m = PN_1.PN_1 \ldots\ldots PN_1$ (m kez,$m \geq 1$)

Negatif kuvvet alma işlemi tanımsızdır: $(PN_1)^{-m}$.

Örnek 2.10.6: Verilsin: $PN_1 = 4 + 3P_1 + 2P_2, PN_2 = 2 + 2P_1 + 2P_2$

Toplama: $PN_1 + PN_2 = (4+2) + (3+2)P_1 + (2+2)P_2 = 6 + 5P_1 + 4P_2$

Çıkarma: $PN_1 - PN_2 = (4-2) + (3-2)P_1 + (2-2)P_2 = 2 + P_1$

Çarpma**:** $PN_1.PN_2 = 4.2 + (4.2 + 3.2 + 2.3)P_1 + (4.2 + 3.2 + 2.2 + 2.2 + 2.2)P_2 = 8 + 20P_1 + 26P_2$.

BÖLÜM III

PLİTHOGENİC

3.1 Plithogenic Yapı

Tanım 3.1.1 [15] Bir Plithogenic küme, her biri birden fazla değere ve bunlara karşılık gelen aidiyet derecelerine sahip bir veya daha fazla özniteliğe sahip öğelerle karakterize edilir. Doğruluğu artırmak amacıyla, öznitelik değerleri ile baskın değerler arasındaki çelişki dereceleri tanımlanır ve bu dereceler, kesişim ve birleşim gibi birleştirme işleçlerini etkiler. Bu yapı, yalnızca bir ila üç öznitelik değeriyle sınırlı olan klasik, bulanık, sezgisel bulanık ve nötrosofik kümelerin genelleştirilmiş halidir.

L bir evrensel küme (evrensel tartışma kümesi) olmak üzere, $P \subseteq L$ olacak şekilde, P boş olmayan bir altküme olsun.

Tanım 3.1.2 [15] K, boş olmayan bir tek boyutlu öznitelik kümesi olsun ve $K = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$ biçiminde tanımlansın; burada $s \geq 1$. K içindeki herhangi bir λ özniteliği için, onun mümkün değerlerinin kümesi olan R, aşağıdaki biçimlerdeki boş olmayan bir küme olarak tanımlanır:

- Sonlu ayrık küme: $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$, burada $1 \leq m < \infty$;
- Sayılabilir sonsuz küme: $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_\infty\}$;
- Sayılamaz sonsuz (sürekli) küme: $R = [\alpha, \beta]$ biçiminde olup, burada $\alpha < \beta$ ve $]\alpha, \beta[$ reel sayılar kümesinde veya başka bir genelleştirilmiş kümede tanımlı açık, yarı açık ya da kapalı bir aralık olabilir.

Tanım 3.1.3 [15] V, uzmanların mantıksal uygulamalarını gerçekleştirmek için ihtiyaç duyduğu tüm öznitelik değerlerinin kümesini temsil etsin; burada V, R'nin boş olmayan bir altkümesidir. Herhangi bir $n \geq 1$ için, her bir mantıksal önerme P, V kümesindeki her öznitelik değerine göre tanımlanır ve $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ şeklindedir.

Tanım 3.1.4 [15] V kümesi içindeki öznitelik değerleri arasında genellikle uzmanlar tarafından uygulamaya göre belirlenen baskın (dominant) bir öznitelik değeri bulunur. Bu baskın öznitelik değeri, uzmanların ilgilendiği en önemli değerdir. Ancak bazı durumlarda baskın öznitelik değeri tanımlanmaz ya da mevcut olmayabilir.

Ayrıca, birden fazla baskın (önemli) öznitelik değeri de olabilir ve bu durumda alternatif bir yaklaşım benimsenmelidir.

Tanım 3.1.5 [15] Her bir $v \in V$ öznitelik değeri için, P kümesi içindeki herhangi bir α öğesinin belirli kriterlere göre aidiyetini gösteren $d(\alpha, v)$ aidiyet derecesi tanımlanır. Bu aidiyet derecesi, bulanık, sezgisel bulanık veya nötrosofik biçimde olabilir.

Buna göre, öznitelik değeri aidiyet derecesi fonksiyonu şu şekilde tanımlanır: $\forall\alpha \in P, d: P \times V \rightarrow P([0,1]^u)$, burada $d(\alpha, v) \subseteq [0,1]^u$ ve $P([0,1]^u)$, $[0,1]^u$ kümesinin kuvvet kümesini ifade eder. Parametre u şu değerleri alabilir:

- $u = 1$ ise bulanık aidiyet derecesi
- $u = 2$ ise sezgisel bulanık aidiyet derecesi
- $u = 3$ ise nötrosofik aidiyet derecesi.

Tanım 3.1.6 [15] $|\ V\ | \geq 1$ olmak üzere, $V \times V \rightarrow [0,1]$ biçimindeki c fonksiyonu, iki öznitelik değeri arasındaki çelişki derecesini ölçen öznitelik değeri çelişki fonksiyonu olarak tanımlanır. $c(v_1, v_2)$ aşağıdaki aksiyomları sağlar:

(i) $c(v_1, v_2) = 0\ ise\ v_1 = v_2$, yani aynı öznitelik değerleri arasında çelişki yoktur.

(ii) $c(v_1, v_2) = c(v_2, v_1)$, yani komütatiflik özelliği vardır.

Basitlik adına çoğunlukla bulanık öznitelik değeri çelişki derecesi fonksiyonu c_F dikkate alınır. Ancak daha yüksek doğruluk gerektiren uygulamalarda sezgisel bulanık çelişki fonksiyonu $C_{IF}: V \times V \rightarrow [0,1]^2$ya da nötrosofik çelişki fonksiyonu $C_N: V \times V \rightarrow [0,1]^3$de kullanılabilir. Bu alternatifler işlem karmaşıklığını artırsa da doğruluğu da arttırır.

Genellikle çelişki dereceleri tek boyutlu öznitelik değerleri için hesaplanır. Çok boyutlu öznitelik değerleri, her bir bileşeni ayrı ayrı değerlendirilmek üzere tek boyutlu bileşenlerine ayrılır.

Öznitelik değeri çelişki fonksiyonu, Plithogenic birleştirme işleçlerinin ve Plithogenic kapsama (kısmi sıralama) ilişkisinin doğruluğunu artırmada kritik rol oynar. Bu fonksiyon, Plithogenic kümelerin uygulandığı her alan için özel olarak tasarlanır ve uygulama gereksinimlerine uygunluk sağlar. Bu fonksiyon ihmal edilebilir; ancak bu durumda birleştirme işlemlerinden elde edilen sonuçların doğruluğu düşebilir.

Bir Plithogenic küme resmi olarak (P, a, V, d, c) beşlisinde tanımlanır. Burada:

- P, bir kümedir.
- a, genellikle çok boyutlu olan bir özniteliği ifade eder.

- V, öznitelik değerlerinin tanım kümesidir.
- $d, \alpha \in P$ için α'nın öznitelik değerinin belirli bir kritere göre P kümesine aitlik derecesini belirtir.
- d, sırasıyla bulanık (d_F), sezgisel bulanık (d_{IF}) veya nötrosofik (d_N) aidiyet derecelerini gösterebilir.
- c, öznitelik değerleri arasındaki çelişki derecesi fonksiyonunu ifade eder ve bu da sırasıyla bulanık (C_F), sezgisel bulanık (C_{IF}) veya nötrosofik (C_N) biçiminde olabilir.

Aidiyet derecesi fonksiyonu $d(\cdot,\cdot)$ ve çelişki fonksiyonu $c(\cdot,\cdot)$, uzmanların belirlediği özel uygulama ihtiyaçlarına göre tanımlanır.

Bunun için genellikle $(d(\alpha, V))$ gösterimi kullanılır; burada $d(\alpha, V) = \{d(\alpha, v) \mid v \in V\}$ ve $\alpha \in P$.

3.2 Plithogenic Küme Tipleri

Tanım 3.2.1 [16] Tip-k Plithogenic Küme, Tip-k Nötrosofik Küme'nin bir genişlemesini temsil eder.

Bir Tip-2 Plithogenic Küme, her bir parametre P_i $(1 \leq i \leq n)$ alt-parametrelere $P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{im}$ (burada $m_i \geq 1$) bağlı olduğunda elde edilir. Benzer şekilde, Tip-3 Plithogenic Küme, alt-parametreler P_{ij} $(1 \leq i \leq n \, ve \, 1 \leq j \leq m)$ daha ileri düzeyde alt-alt-parametreler $P_{ij1}, P_{ij2}, \dots, P_{ijm}$ (burada $m_j \geq 1$) ile belirlendiğinde oluşturulur.

Bu hiyerarşik yapı, Tip-k Plithogenic Küme'ye kadar özyineli olarak devam eder.

Dereceler bağlamında bu hiyerarşik ilerleme şu şekilde ifade edilebilir:

Tip-1 Plithogenic Küme:

$$PS_1 = \{\alpha(d_1(P_1)d_1(P_2) \dots, d_1(P_n)) \mid \alpha \in L\}$$

Tip-2 Plithogenic Küme:

$$PS_2 = \{\alpha(d_2(d_1(P_1)), d_2(d_1(P_2)), \dots, d_2(d_1(P_n))) \mid \alpha \in L\}$$

Genel Tip-k Plithogenic Küme:

$$PS_K = \{\alpha(d_K(\dots d_2(d_1(P_1)) \dots) d_K(\dots d_2(d_1(P_2)) \dots), \dots, d_K(\dots d_2(d_1(P_n)) \dots)) \mid \alpha \in L\}$$

- Bu biçimsel yapı, her seviyede yeni alt-parametre katmanları eklenerek, küme içerisindeki belirsizlik ve karmaşıklığın daha ayrıntılı biçimde temsil edilmesini sağlayan özyineli (recursive) doğayı yansıtır.

Örnek 3.2.2: Klasik bir küme olan $S = \{Ahmet, Sinan, Aysha\}$ ele alındığında, her bir öğe, çoklu öznitelikler açısından yapılan değerlendirmeleri temsileder:
Fen Bilimleri (C), Edebiyat (L), Sanat (A), Güzellik (B) ve Fiziksel Uygunluk (F).
Her öğrencinin, her bir öznitelikle ilişkili belirli bir dereceye (d) sahip olduğu kabul edilir. Bu dereceler klasik, bulanık ya da herhangi bir bulanık uzantı olabilir. Spesifik olarak, bu dereceler şu şekilde ifade edilir:

$$d(Fen), d(Edebiyat), d(Sanat), d(Guzellik), d(Fiziksel\ Uygunluk).$$

Sonuç olarak, klasik küme, şu şekilde ifade edilen bir Plithogenic Kümeye dönüşür:

$$PS = \{Ahmet[d(C), d(L), d(A), d(B), d(F)], Sinan[d(C), d(L), d(A), d(B), d(F)], Aysha[d(C), d(L), d(A), d(B), d(F)]\}.$$

Sayısal bir örnek olarak, Uzman 1'in verdiği değerlendirmelere göre aşağıdaki Tip-1 Plithogenic Küme elde edilir:

$$PS1 = \{Ahmet(0.5,0.6,0.3,0.1,0.7), Sinan(0.1,0.8,0.3,0.1,0.4), Aysha(0.9,0.4,0.6,0.1,0.2)\}$$

Bu bağlamda, Ahmet'in Fen Bilimleri özniteliğine ilişkin bulanık derecesi 0.5, Edebiyat 0.6, Sanat 0.3, Güzellik 0.1 ve Fiziksel Uygunluk 0.7 olarak tanımlanır. Sinan ve Aysha için de benzer yorumlar yapılabilir.
Bu çerçevede, bulanık, klasik, sezgisel bulanık, nötrosofik, refine nötrosofik ve diğer bulanık uzantılar gibi çeşitli derece türleri kullanılabilir.
Örnek 3.2.3: Önceki örnek temel alınarak, Uzman 2'nin, Uzman 1 tarafından yapılan değerlendirme hakkında belirsizlik yaşadığı varsayılsın. Bu nedenle, Uzman 2, ilk değerlendirmeyi gözden geçirir ve kendi yargısını da katar. Kendi tercihleri ve mevcut kaynaklarına bağlı olarak, Uzman 2 ilk değerlendirmede kullanılan derece türünden farklı bir derece türü kullanmayı seçebilir.
Basitlik açısından, Uzman 2'nin de bulanık (fuzzy) dereceler kullandığı varsayılsın. Bu durumda aşağıdaki şekilde ifade edilen bir Tip-2 Plithogenic Küme oluşur:

$$PS_2 = \{Ahmet[0.5(0.9), 0.6(0.4), 0.3(1.0), 0.1(0.0), 0.7(0.8)], Sinan[0.1(0.3), 0.8(0.4), 0.3(0.5), 0.1(0.7), 0.4(0.9)], Aysha[0.9(0.1), 0.4(0.5), 0.6(0.6), 0.1(0.8), 0.2(0.9)]\}.$$

Parantez içindeki her bir değer, Uzman 2'nin, Uzman 1 tarafından atanan bulanık dereceye olan güven düzeyini ifade eder. Yorumlar aşağıdaki gibidir:

- 0.5(0.9): Uzman 2, Ahmet'in Fen Bilimleri özniteliği için Uzman 1 tarafından atanan 0.5 değerine %90 güvenmektedir.

- 0.6(0.4): Ahmet'in Edebiyat derecesi olan 0.6'ya %40 güven duymaktadır.
- 0.3(1.0): Ahmet'in Sanat derecesi olan 0.3'e %100 güven duymaktadır.
- 0.1(0.0): Ahmet'in Güzellik derecesi olan 0.1'e hiç güvenmemektedir (%0).
- 0.7(0.8): Ahmet'in Fiziksel Uygunluk derecesi olan 0.7'ye %80 güvenmektedir.

Sinan ve Aysha için yapılan değerlendirmelerde de benzer şekilde her ikinci derece değeri, Uzman 2'nin Uzman 1 tarafından atanan ilk bulanık derecelere olan güven düzeyini ifade eder.

Örnek 3.2.4: Değerlendirme süreci, Uzman 3'ün devreye girmesiyle daha da genişletilebilir. Uzman 3, Uzman 2'nin güven düzeylerini değerlendirir. Bu durumda Uzman 3, değerlendirmesini ifade etmek için nötrosofik dereceler kullanır. Böylece aşağıdaki gibi bir Tip-3 Plithogenic Küme elde edilir:$PS_3 =$ $\{Ahmet\{0.5[0.9(0.6,0.7,0.3)],0.6[0.4(0.6,0.7,0.3)],0.3[1.0(0.6,0.7,0.3)],$ $0.1[0.0(0.6,0.7,0.3)],0.7[0.8(0.6,0.7,0.3)]\},$ $\{Sinan\{0.1[0.3(0.4,0.4,0.06)],0.8[0.4(0.9,0.1,0.03)],0.3[0.5(0.9,1.0,0.2)],0.1[0.7$ $(0.7,0.3,0.6)],0.4[0.9(0.1,0.0,0.4)]\},$ $\{Aysha\{0.9[0.1(0.2,0.3,0.4)],0.4[0.5(0.7,0.8,0.7)],0.6[0.6(1.0,0.0,0.0)],0.1[0.8$ $(0.1,0.4,0.6)],0.2[0.9(0.0,0.0,0.0)]\}\}.$

Kümede yer alan her bir öğe, hiyerarşik değerlendirme yapısını izler ve üç temel bileşeni içeren nötrosofik dereceler ile tanımlanır:

- Gerçeklik (T - Truth)
- Belirsizlik (I - Indeterminacy)
- Yanlışlık (F - Falsity)

Örneğin, $0.5[0.9(0.6,0.7,0.3)]$ ifadesi aşağıdaki şekilde yorumlanır:

- Uzman 1 tarafından Ahmet'in Fen Bilimleri özniteliği için atanan bulanık derece 0.5'tir.
- Uzman 2, bu dereceye %90 güvenmektedir.
- Uzman 3 ise, bu %90'lık güven derecesini nötrosofik olarak değerlendirir:

✓ Gerçeklik derecesi $(T) = 0.6$

✓ Belirsizlik derecesi $(I) = 0.7$

✓ Yanlışlık derecesi $(F) = 0.3$

Sinan ve Aysha için yapılan değerlendirmeler de aynı biçimde yorumlanır. Bu yapı, Tip-3 Plithogenic Kümelerin katmanlı değerlendirme yapısını yansıtır; her ardışık uzman, değerlendirmeyi daha fazla belirsizlik ve güvenlik düzeyi katarak detayla.

BÖLÜM IV

SEMBOLİK PLİTHOGENİC YAPI

4.1 Sembolik Plithogenic Grup

Teorem 4.1.1 [16] $(K,*)$ bir grup olsun ve 2-SP_K buna karşılık gelen sembolik 2-Plithogenic grup olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $K \subseteq 2 - SP_K$, yani orijinal grup K, sembolik Plithogenic grup SP_K'nin bir alt kümesidir.
2. $(2 - SP_K,*)$ bir yarıgrup (semigroup) oluşturur.
3. $(2 - SP_K,*)$ bir grup oluşturmaz.

İspat: Kapsama Özelliği:

$K \subseteq 2 - SP_K$ kapsaması, sembolik Plithogenic grup $2 - SP_K$'nin tanımından doğrudan elde edilir.

Yarıgrup Özelliği**:** Aşağıdaki elemanları göz önünde bulunduralım:

$\alpha = (\lambda, \lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2), \beta = (\delta, \delta_1 P_1, \delta_2 P_2), \theta = (\gamma, \gamma_1 P_1, \gamma_2 P_2)$

Bunlar $2 - SP_K$ 'nın keyfi elemanlarıdır. O halde işlem * şu şekilde tanımlanır:

$\alpha * \beta = (\lambda\delta, (\lambda\delta_1 + \delta_1\lambda + \lambda_1\delta_1)P_1, (\lambda\delta_2 + \lambda_1\delta_2 + \lambda_2\delta_2 + \lambda_2\delta + \lambda_2\delta_1)P_2) \in SP_K.$

Şimdi, birleşme (associativity) özelliğini inceleyelim: $(\alpha * \beta) * \theta = (\lambda\delta\gamma, (\lambda\delta\gamma_1 + \lambda\delta_1\gamma + \lambda_1\delta\gamma + \lambda_1\delta_1\gamma + \lambda\delta_1\gamma_1 + \lambda_1\delta\gamma_1 + \lambda_1\delta_1\gamma_1)P_1, (\lambda\delta\gamma_2 + \lambda\delta_2\gamma + \lambda\delta_2\gamma_2 + \lambda\delta_1\gamma_2 + \lambda\delta_2\gamma_1 + \lambda_2\delta\gamma + \lambda_2\delta\gamma_2 + \lambda_2\delta_2\gamma + \lambda_2\delta_2\gamma_2 + \lambda_1\delta_1\gamma_2 + \lambda_1\delta_2\gamma_1 + \lambda_1\delta\gamma_2 + \lambda_1\delta_2\gamma + \lambda_1\delta_2\gamma_2 + \lambda_2\delta\gamma_1 + \lambda_2\delta_1\gamma + \lambda_2\delta_1\gamma_1 + \lambda_2\delta_1\gamma_2 + \lambda_2\delta_2\gamma_1)P_2).$

Benzer şekilde α*(β*θ)'yı hesapladığımızda şunu elde ederiz: $\alpha * (\beta * \theta) = (\lambda\delta\gamma, (\lambda\delta\gamma_1 + \lambda\delta_1\gamma + \lambda_1\delta\gamma + \lambda_1\delta_1\gamma + \lambda\delta_1\gamma_1 + \lambda_1\delta\gamma_1 + \lambda_1\delta_1\gamma_1)P_1, (\lambda\delta\gamma_2 + \lambda\delta_2\gamma + \lambda\delta_2\gamma_2 + \lambda\delta_1\gamma_2 + \lambda\delta_2\gamma_1 + \lambda_2\delta\gamma + \lambda_2\delta\gamma_2 + \lambda_2\delta_2\gamma + \lambda_2\delta_2\gamma_2 + \lambda_1\delta_1\gamma_2 + \lambda_1\delta_2\gamma_1 + \lambda_1\delta\gamma_2 + \lambda_1\delta_2\gamma + \lambda_1\delta_2\gamma_2 + \lambda_2\delta\gamma_1 + \lambda_2\delta_1\gamma + \lambda_2\delta_1\gamma_1 + \lambda_2\delta_1\gamma_2 + \lambda_2\delta_2\gamma_1)P_2).$

Hesaplamalar sonucu $(\alpha * \beta) * \theta = \alpha * (\beta * \theta)$ eşitliği sağlandığı için birleşme özelliği geçerlidir.

Grup Olmama Durumu**:** Bir yapının grup olabilmesi için her elemanın tersine sahip olması gerekir. Ancak, $(P_1)^{-1}$ ve $(P_2)^{-1}$ mevcut olmadığından dolayı her $\alpha \in 2 - SP_K$ için bir ters eleman α^{-1} bulunamaz. Dolayısıyla, $(2 - SP_K,*)$ bir grup değildir.

Açıklama 4.1.2: Eğer $(K, +)$ bir grup ise, o zaman sembolik 2-Plithogenic grup $(2 - SP_K,+)$ de bir grup oluşturur. Burada + işlemi, standart toplama işlemidir.

Örnek 4.1.3:

$(2 - SP_R, +), (2 - SP_Z, +), (2 - SP_C, +)$ ve $\left(2 - SP_Q, +\right)$ yapıları abelyen gruplardır. Burada R, Z, C ve Q sırasıyla gerçel sayılar, tam sayılar, kompleks sayılar ve rasyonel sayılar kümesini ifade etmektedir.

Teorem 4.1.4 [18] Her sembolik 2-Plithogenic grup $(2 - SP_K,\cdot)$, en az iki farklı trivial olmayan idempotent elemana sahiptir.

İspat: $2 - SP_K$ yapısı içinde, $P_1.P_1 = P_1, P_2.P_2 = P_2$ eşitlikleri sağlandığı için, teorem doğrudan buradan elde edilir.

Teorem 4.1.5 [18] $(K,*)$ sonlu ve mertebesi n olan bir grup olsun. O hâlde, sembolik 2-Plithogenic grup $(2 - SP_K,*)$ mertebesi n^3 olan bir sonlu gruptur.

Örnek 4.1.6: Z_2, 2'ye göre modüler tam sayı grubunu ifade etsin. O hâlde:

$2 - SP_{Z_2} = \{(0,0,0), (1,0,0), (0, P_1 ,0), (0,0, P_2), (0, P_1 \ , P_2), (1, P_1 ,0), (1,0, P_2),$
$(1, P_1 , P_2)\}$

kümesi, mod 2'ye göre sembolik Plithogenic grup oluşturur.
Bu yapı içinde:

$(0, P_1 ,0), (0,0, P_2)$ ve $(1, P_1 , P_2)$ elemanları trivial olmayan idempotent elemanlardır.

Tanım 4.1.7 [18] ψ: $2 - SP_K \rightarrow 2 - SP_H$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon, sembolik 2-Plithogenic gruplar $(2 - SP_K$, *) ile $(2 - SP_H, \star)$ arasında bir homomorfizma olarak adlandırılır; eğer aşağıdaki koşulları sağlıyorsa:

- İşlem Korunumu**:** Her $\lambda, \delta \in 2 - SP_K$ için: $\psi(\lambda * \delta) = \psi(\lambda) \star \psi(\delta)$.
- Plithogenic Bileşen Korunumu**:** $i = 1,2$ için $\psi(P_i) = P_i$.

ψ fonksiyonunun çekirdeği (kernel) aşağıdaki gibi tanımlanır:

$ker\psi$={ $\lambda \in 2 - SP_K \mid \psi(\lambda) = e_H \in 2 - SP_H$}

Burada e_H 'nin birim (identite) elemanıdır.

Örnek 4.1.8: $K = Z$ olsun ve $2 - SP_K$, tam sayıların sembolik 2-Plithogenic grubunu göstersin.

Ayrıca, $K(I)$, nötrosofik tam sayılar grubunu ifade etsin.
Aşağıdaki şekilde tanımlı olan fonksiyona bakalım:

$\psi: 2 - SP_K \rightarrow K(I), \psi(\alpha) = (\lambda, (\delta + \gamma)I)$. Burada $\alpha = (\lambda, \delta P_1 \ , \gamma P_2\ ) \in 2 - SP_K$

Bu durumda ψ bir grup homomorfizmasıdır ve çekirdeği şu şekilde tanımlanır:

$ker\psi = \{(0, nP_1 \ , -nP_2) \mid n \in Z\}$

Bu küme, $2 - SP_K$'nın bir altgrubunu oluşturur.

Örnek 4.1.9: $(K, +)$ bir grup olsun ve aşağıdaki şekilde bir fonksiyon tanımlayalım:

$\psi: 2 - SP_K \times 2 - SP_K \rightarrow 2 - SP_K, \psi(\alpha, \beta) = \alpha$

Bu durumda ψ, sembolik 2-Plithogenic grup homomorfizmasıdır.

Eğer $K = Z_2$ ise, ψ'nin çekirdeği: $ker\psi = \left\{\left((0,0,0), (\alpha)\right) \mid \alpha \in 2 - SP_{Z_2}\right\}$, Yani:

$$Ker\psi = \{((0,0,0), (0,0,0)), ((0,0,0), (1,0,0)), ((0,0,0), (0, P_1, 0)), ((0,0,0), (0,0, P_2)), ((0,0,0), (0, P_1, P_2)), ((0,0,0), (1, P_1, 0)), ((0,0,0), (1,0, P_2)), ((0,0,0), (1, P_1, P_2))\}.$$

Bu küme, $2 - SP_{(Z_2)} \ \times 2 - SP_{(Z_2)}$ kümesinin bir altgrubunu oluşturur.

Tanım 4.1.10 [19] K çarpımsal bir grup olsun. SP_K üzerindeki grup işlemi şu şekilde tanımlanır: İki eleman verilsin:

$\alpha = (\lambda_0, \lambda_1 P_1, \dots, \lambda_n P_n)$ ve $\beta = (\delta_0, \delta_1 P_1, \dots, \delta_n P_n)$ O hâlde, bu iki elemanın çarpımı:

$$\alpha\beta = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_n)$$

şeklindedir; burada:

$$\rho_s = \prod_{i,j=0}^{n} (\alpha_i \beta_j) P_i P_j$$

ve koşullar:

- $P_0 = e_G$ (grubun birim elemanı)
- $P_i P_j = P_s$

Ayrıca, $P_i P_j = P_{\max(i,j)}$

yani iki bileşenin çarpımı, indekslerin maksimumuna karşılık gelen bileşene eşittir.

Not: SP_K, $n + 1$ adet K'nın doğrudan çarpımıyla izomorfik değildir; bu nedenle klasik grup yapısı oluşturmaz.

Tanım 4.1.11 [18] $(SP_K, *)$ bir sembolik n-Plithogenic grup olsun. Eğer herhangi iki $\alpha, \beta \in (SP_K, *)$ için işlem: $\alpha * \beta = \beta * \alpha$

şartını sağlıyorsa, bu grup abelyen olarak adlandırılır.

Sembolik n-Plithogenic grubun merkezi, aşağıdaki altküme ile tanımlanır:

$Z(SP_K) = \{\alpha \in (SP_K) \mid \beta * \alpha = \alpha * \beta for\ all\ \beta \in SP_K\}$.

Teorem 4.1.12 [18] SP_K bir sembolik n-Plithogenic grup olsun. O hâlde:

1) Eğer K abelyen bir grupsa, SP_K da abelyendir.

2) SP_K'nin abelyen olması, ancak ve ancak $SP_K = Z(SP_K)$ şartı sağlandığında mümkündür.

Tanım 4.1.13 [20] H, SP_K'nın bir altkümesi olsun ve SP_K bir sembolik n-Plithogenic grup olsun. Eğer H, K'nın bir altgrubunu içeriyorsa, H kümesi SP_K'nın bir sembolik n-Plithogenic altgrubu olarak adlandırılır.

Örnek 4.1.14: $K = Z_2$olsun; yani 2'ye göre modüler toplamsal tam sayılar grubu. Buna karşılık gelen sembolik 2-Plithogenic grup SP_{Z_2}ile gösterilir.

Aşağıdaki küme:

$H = \{(0,0,0), (1,0,0), (1, P_1, 0), (1,0, P_2)\}$

SP_{Z_2}'nin sembolik 2-Plithogenic altgrubunu oluşturur. Çünkü $h = \{(0,0,0), (1,0,0)\}$ altkümesi, K'nın bir altgrubuna izomorfiktir. Dolayısıyla h, K'nın bir altgrubu olarak kabul edilebilir.

Tanım 4.1.15 [21] SP_K bir sembolik n-Plithogenic grup olsun. SP_K'daki eleman sayısı O(SP_K) ile gösterilir.

Eğer SP_Ksonluysa, O(SP_K) = m; eğer sonsuzsa, O(SP_K) =∞. Bu değer, SP_K sembolik n-Plithogenic grubunun mertebesi olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.16 [7] K sonlu bir grup olsun ve SP_K ona karşılık gelen sembolik n-Plithogenic grup olsun. Eğer $O(K) = m$ ise, o zaman: O(SP_K) = m^{n+1}

İspat: Şöyle ki: $SP_K = (\langle K \cup \{P_1, \dots, P_n\}\rangle, *)$

Dolayısıyla: $SP_K = \{ (\lambda_0, \lambda_1 P_1, \dots, \lambda_n P_n) \mid \lambda_i \in K \}$.

Buradan: $O(SP_K) = O(K) \times O(K) \times \cdots \times O(K)(n + 1\ times) = m^{n+1}$.

Tanım 4.1.17 [7] $SP_K = \{(\lambda_0, \lambda_1 I_1, \dots, \lambda_n I_n) \mid \lambda_i \in K\}$ bir sembolik n-Plithogenic grup olsun. $SP_H = \{(\delta_0, \delta_1 I_1, \dots, \delta_n I_n) \mid \delta_i \in H_i\}$ şeklindeki bir altküme, eğer her H_i K'nın bir altgrubunu oluşturuyorsa, bir AH-altgrup olarak adlandırılır.

Ayrıca, eğer $H_i \cong H_j$ (tüm i≠j için), o zaman SP_H yapısı bir AHS-altgrup olarak sınıflandırılır.

Her bir H_i grubu abelyen ise, SP_H yapısı AH-abelyen; her bir H_i grubu çevrimsel ise, SP_H yapısı AH-çevrimsel(cyclic) altgrup olarak adlandırılır.

Örnek 4.1.18: $K = S_3$, yani mertebesi 6 olan abelyen olmayan simetrik grup olsun. Bu grup içinde izomorf olmayan iki altgrup vardır: $N \cong Z_2$ ve $S \cong Z_3$.

SP_K, K'nın sembolik 3-Plithogenic grubu olsun. Şu şekilde bir AH-altgrup tanımlanır: $SP_H = (N, SI_1, NI_2, SI_3) = \{(\lambda_0, \lambda_1 I_1, \lambda_2 I_2, \lambda_3 I_3) \mid \lambda_0, \lambda_2 \in N \, and \lambda_1, \lambda_3 \in S\}$ Bu yapı, SP_K'nın bir AH-altgrub**u**dur. Ayrıca N ve S çevrimsel **(cyclic)** gruplar olduklarından, SP_H aynı zamanda bir AH-çevrimsel altgruptur.

Tanım 4.1.19 [20] SP_K bir sembolik n-Plithogenic grup olsun. SP_K'nın merkezi (center), $C(SP_K)$ ile gösterilir ve şöyle tanımlanır:

$C(SP_K) = \{\alpha \in SP_K \mid \alpha.\beta = \beta.\alpha \, for \, all \, \beta \in SP_K\}$.

Bu küme, SP_K içindeki tüm elemanlarla değişmeli (komütatif) olan elemanlardan oluşur.

Taım 4.1.20 [20] SP_K ve SP_H iki sembolik n-Plithogenic grup olsun. Bunların kartezyen çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$SP_K \times SP_H = \{(k, h) \mid k \in SP_K, \, h \in SP_H\}$.

Bu küme, birinci bileşeni SP_K'ya ve ikinci bileşeni SP_H'ye ait olan tüm sıralı ikilileri içerir.

Tanım 4.1.21 [18] SP_K ve SP_H iki sembolik n-Plithogenic grup olsun ve $\psi: SP_K \rightarrow SP_H$ şeklinde iyi tanımlanmış bir fonksiyon olsun. Eğer ψ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bu fonksiyona Sembolik Plithogenic Homomorfizma denir:

- Tüm $\alpha, \beta \in SP_K$ için işlem korunur: $\psi: \psi(\alpha * \beta) \; = \psi(\alpha) * \psi(\beta)$.
- SP_K ve SP_H gruplarının birim elemanları aşağıdaki şekilde birbirine gönderilir:

$\psi(e_K, e_K, \dots, P_N, e_K, \dots, e_K) = (e_H, e_H, \dots, P_N, e_H, \dots, e_H)$

Örnek 4.1.22: $K = Z$ ve $H = Z_4$olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanan fonksiyonu ele alalım: $\psi(\lambda_0, \lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2) = ((\lambda_0 mod \; 4), (\lambda_1 mod \; 4)P_1, (\lambda_2 mod \; 4) \, P_2)$,

burada $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in Z$.

$\alpha \; = (\lambda_0, \lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2)$ ve $\beta \; = (\delta_0, \delta_1 P_1, \delta_2 P_2)$, $2 - SP_K$ kümesinden rastgele iki eleman olmak üzere: $\psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$. Ayrıca, fonksiyon aşağıdaki eşlemeleri sağlar:

$\psi(P_1) = (0{,}1 \cdot P_1, 0 \cdot P_2) = (0, P_1, 0),), \psi(P_2) = (0{,}0 \cdot P_1, 1 \cdot P_2) = (0{,}0, P_2)$.

Dolayısıyla, ψ bir sembolik Plithogenic homomorfizmadır.

Tanım 4.1.23 [22] $\psi: SP_K \rightarrow SP_H$ bir sembolik Plithogenic homomorfizma olsun. Eğer ψ birebir ve örten (bijektif) ise, bu fonksiyona sembolik Plithogenic izomorfizma denir. Bu, iki grup arasında yapısal bir eşdeğerlik olduğunu ve sembolik Plithogenic özelliklerin korunduğunu ifade eder.

Örnek 4.1.24: $K = Z$ olsun ve buna karşılık gelen sembolik 3-Plithogenic grup aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$3 - SP_K = \{\lambda, \delta P_1, \gamma P_2, \zeta P_3 \mid \lambda, \delta, \gamma, \zeta \in Z\}$.

Aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$\psi: 3 - SP_K \rightarrow 3 - SP_K, \psi(\lambda, \delta P_1, \gamma P_2, \zeta P_3) = (-\lambda, \delta P_1, \gamma P_2, \zeta P_3)$.

Bu fonksiyonun bijektif ve Plithogenic yapıyı koruduğu açıktır. Bu nedenle, ψ bir sembolik Plithogenic izomorfizmadır.

Tanım 4.1.25 [20] SP_K ve SP_H iki sembolik Plithogenic grup olsun ve $\psi: SP_K \rightarrow SP_H$ bir sembolik Plithogenic homomorfizma olsun. Bu durumda ψ fonksiyonunun çekirdeği ve görüntüsü aşağıdaki gibi tanımlanır:

- Çekirdek (kernel): $ker\ (\psi) = \{\alpha \in SP_K \mid \psi(\alpha) = e_{SPH}\}$.

Yani, SP_K'daki ψ fonksiyonu altında SP_H'nin birim elemanına giden tüm elemanların kümesidir.

- Görüntü (image): $Im\ (\psi) = \{\beta \in SP_H \mid \exists \alpha \in SP_K$ öyle ki $\psi(\alpha) = \beta\}$

Yani, SP_K'nın en az bir elemanı tarafından ψ aracılığıyla SP_H'ye eşlenen elemanların kümesidir.

Teorem 4.1.26 [18] SP_K ve SP_H iki Sembolik Plithogenic Grup olsun ve $\psi: SP_K \rightarrow SP_H$bir sembolik Plithogenic homomorfizma olsun. O hâlde:

- $ker\ (\psi)$, SP_K'nın bir sembolik Plithogenic alt grubudur.
- $Im\ (\psi)$, SP_H'nin bir sembolik Plithogenic alt grubudur.

İspat

(a) $ker\ (\psi)$, SP_K'nın bir sembolik Plithogenic alt grubudur:

Tanım gereği, ψ fonksiyonunun çekirdeği: $ker\ (\psi) = \{\alpha \in SP_K \mid \psi(\alpha) = e_{SPH}\}$. şeklinde tanımlanır.

ψ bir sembolik Plithogenic homomorfizma olduğundan grup işlemini korur, bu da $ker\ (\psi)$ kümesinin SP_K altındaki işleme göre kapalı olduğunu gösterir.

Şimdi ψ'nin SP_K'nın klasik alt grubu K üzerindeki kısıtlamasını ele alalım:

$\psi_K: K \rightarrow H$ burada K ve H, sırasıyla SP_K ve SP_H'nin altında yatan klasik gruplardır. ψ_K klasik gruplar arasında bir homomorfizma olduğundan, çekirdeği $ker\ (\psi_K)$, K'nın bir alt grubudur. Tanım gereği 3.16, bu alt grup $ker\ (\psi)$ kümesinin içinde yer alır ve böylece $ker\ (\psi)$, sembolik Plithogenic grup yapısı içerisinde alt grup özelliklerini sağlar.

Dolayısıyla, $ker\ (\psi)$, SP_K'nın bir sembolik Plithogenic alt grubudur.

(b) $Im\ (\psi)$, SP_H'nin bir sembolik Plithogenic alt grubudur:

Tanım gereği, ψ fonksiyonunun görüntüsü:

$Im\ (\psi) = \{\beta \in SP_H \mid \exists\alpha \in SP_K\ such\ that\ \psi(\alpha) = \beta\}$. şeklindedir.

ψ bir homomorfizma olduğundan, SP_K'daki grup işleminin ψ altındaki görüntüsü SP_H'de işlem altında kapalıdır.

Aynı şekilde, ψ fonksiyonunun SP_K'nın klasik alt grubu K üzerindeki kısıtlaması $\psi_K: K \to H$, klasik H grubunun bir alt grubu olan $Im\ (\psi_K)$'yı verir. Bu da ψ_K kümesinin içinde yer alır. Dolayısıyla, ψ_K sembolik Plithogenic grup yapısında alt grup özelliklerini sağlar.

Sonuç 4.1.27 [18]

Hem $ker\ (\psi)$ hem de $Im\ (\psi)$ sembolik Plithogenic alt grup olma koşullarını sağladığından, ispat tamamlanmıştır.

Örnek 4.1.28: $K = Z$ ve $H = Z_4$kümesi olsun.

Aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım: $\psi: 2 - SP_K \to 2 - SP_H$:

$\psi(\alpha, \beta P_1, \theta P_2) = (\alpha mod\ 4, \beta mod\ 4P_1, \theta mod\ 4P_2)$, burada $\alpha, \beta, \theta \in Z$.

ψ fonksiyonunun çekirdeği:

$ker\ (\psi) = (4Z, 4ZP_1, 4ZP_2) = \{4\lambda, 4\delta P_1, 4\gamma P_2 \mid \lambda, \delta, \gamma \in Z\}$. şeklindedir.

Bu çekirdek, $L = 4Z$ kümesini içerdiğinden, bir sembolik 2-Plithogenic alt grup oluşturur. Aynı şekilde, ψ'nin görüntüsü:

$Im\ (\psi) = \{(\acute{\lambda}, \acute{\delta} P_1, \acute{\gamma} P_2) \mid \acute{\alpha}, \acute{\delta}, \acute{\gamma} \in Z_4\} = 2 - SP_H$. şeklindedir. Görüntü kümesi $S = Z_4$ kümesini içerdiğinden, bu da bir sembolik 2-Plithogenic alt gruptur.

Tanım 4.1.29 [20] SP_K sembolik bir Plithogenic grup olsun:

$SP_K = \{(\lambda_0, \lambda_1 P_1, \dots, \lambda_n P_n) \mid \lambda_i \in K\}$.

SP_K'nın bir AH-altgrubu, şu şekilde tanımlanan bir altkümeyle gösterilir:

$SP_H = \{(\delta_0, \delta_1 P_1, \dots, \delta_n P_n) \mid \delta_i \in H_i;\ H_i\ K$'nın her i için bir alt grubudur$\}$.

Eğer $H_i \cong H_j$ (i ≠ j için izomorf ise), bu altgruba AHS-altgrubu denir. Ayrıca, eğer her H_i abelyen ise, SP_H'ye AH-abelyen altgrubu denir. Benzer şekilde, her H_i döngüsel (cyclic) ise, altgruba AH-döngüsel (cyclic) altgrubu adı verilir.

Örnek 4.1.30: $K = S_3$ olsun, yani 6 elemanlı, abelyen olmayan simetrik grup. Bu grup içerisinde, izomorf olmayan iki alt grup vardır: $H \cong Z_2$ ve $S \cong Z_3$.

İlgili sembolik 3-Plithogenic grup aşağıdaki gibi tanımlanır:

$3 - SP_K = (H, SP_1, HP_2, SP_3) = \{(\lambda_0, \delta_0 P_1, \lambda_1 P_2, \delta_1 P_3) \mid \lambda_0, \lambda_1 \in H,\ \delta_0, \delta_1 \in S\}$.Bu yapı, $3 - SP_K$'nın bir AH-altgrubudur. Ayrıca, H ve S grupları döngüsel (cyclic) olduğundan, bu alt grup AH-döngüsel (cyclic) altgrup olarak sınıflandırılır.

Tanım 4.1.31 [20] [7] K ve G iki grup olsun ve SP_K ile SP_G, bunlara karşılık gelen sembolik Plithogenic grupları göstersin. Aşağıdaki klasik homomorfizma ailesini ele alalım:

$\psi_i: K \to G,\ 0 \leq i \leq n$. Buna göre:

- AH-Homomorfizma:

$\psi: SP_K \to SP_G\ , \psi(\lambda_0, \lambda_1 P_1, \ldots, \lambda_n P_n) = (\psi_0(\lambda_0), \psi_1(\lambda_1) P_1, \ldots, \psi_n(\lambda_n) P_n)$

fonksiyonu bir AH-homomorfizma olarak tanımlanır.

- AH-İzomorfizma: Eğer her ψ_i bir izomorfizma ise, ψ bir AH-izomorfizmadır.
- AHS-Homomorfizma: Eğer tüm $i \neq j$ için $\psi_i = \psi_j$ ise, ψ bir AHS-homomorfizmadır.
- AH-Çekirdek: $AH - Ker(\psi) = (ker\ (\psi_0), ker\ (\psi_1) P_1, \ldots, ker\ (\psi_n) P_n)$.
- AH-Görüntü: $AH - Im(\psi) = (\psi_0(K), \psi_1(K) P_1, \ldots, \psi_n(K) P_n)$.

$\psi: SP_K \to SP_G$ AH-homomorfizması, şu şekilde de gösterilebilir:

$\psi = (\psi_0, \psi_1 P_1, \ldots, \psi_n P_n)$.

Örnek 4.1.32: $K = (Z, +)$ ve $H = (Z_6, +)$ iki grup olsun. Bunlara karşılık gelen sembolik 2-Plithogenic gruplar $2 - SP_K$ ve $2 - SP_H$ şeklindedir. Şu tanımlamaları yapalım:

Klasik Homomorfizmalar: $\psi_0: K \to H, \psi_0(\lambda) = \lambda mod\ 6, \psi_1: K \to H, \psi_1(\lambda) = 2\lambda mod\ 6$.

AH-Homomorfizma:

$\psi: 2 - SP_K \to 2 - SP_H, \psi(\lambda_0, \lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2) = (\psi_0(\lambda_0), \psi_0(\lambda_1) P_1, \psi_1(\lambda_2) P_2)$

Açık haliyle: $\psi(\lambda_0, \lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2) = (\lambda_0 mod\ 6, \lambda_1 mod\ 6P_1, 2\lambda_2 mod\ 6P_2)$, Bu yapı bir AH-homomorfizmanın tüm koşullarını sağlar.

AH-Çekirdek: $AH - Ker(\psi) = (\ker(\psi_0), \ker(\psi_0) P_1, \ker(\psi_1) P_2)$,

Dolayısıyla: $AH - Ker(\psi) = (6Z, 6ZP_1, 3ZP_2)$.

AH-Görüntü: $AH - Im(\psi) = (Im(\psi_0), Im(\psi_0) P_1, Im(\psi_1) P_2)$,

$Im(\psi_0) = Z_6, Im(\psi_0) P_1 = Z_6 P_1, Im(\psi_1) P_2 = \{0,2,4\} P_2$.

Dolayısıyla: $AH - Im(\psi) = (Z_6, Z_6P_1, \{0,2,4\}P_2)$. Bu yapı, sembolik 2-Plithogenic yapı çerçevesinde AH-homomorfizmanın, çekirdeğinin ve görüntüsünün formal yapısını sunar.

Tanım 4.1.33 [18] K herhangi bir grup olsun ve SP_K bu gruba karşılık gelen sembolik Plithogenic grup olsun. SP_K'nın iki AH-altgrubu:

$SP_H = (H_0, H_1P_1, \dots, H_nP_n), SP_S = (S_0, S_1P_1, \dots, S_nP_n),$

şeklinde tanımlansın. Burada her $H_i, S_i \leq K$ olacak şekilde tanımlanmıştır. Bu AH-altgrupları arasında aşağıdaki işlemler tanımlanır:

- Kesişim (Intersection): $SP_H \cap SP_S = (H_0 \cap S_0, (H_1 \cap S_1)P_1, \dots, (H_n \cap S_n)P_n)$.
- Çarpım (Product): $SP_H \cdot SP_S = (H_0.S_0, (H_1.S_1)P_1, \dots, (H_n.S_n)P_n)$.

Burada altgrupların çarpımı klasik anlamda altgrup tarafından üretilen grup anlamına gelir.

- Doğrudan Çarpım (Direct Product):

$SP_H \times SP_S = (H_0 \times S_0, (H_1 \times S_1)P_1, \dots, (H_n \times S_n)P_n)$.

Bu işlemler, sembolik Plithogenic çerçevede AH-altgruplar arasındaki yapısal ilişkileri kurmak için kullanılır.

Örnek 4.1.34: Basit bir grup seçelim:

$K = Z_4 = \{0,1,2,3\}$ (mod 4 toplama işlemine göre tanımlanmış sonlu döngüsel grup). Bu grup 4 elemanlıdır.

Sembolik 2-Plithogenic grup tanımı: $SP_K = \{(\lambda_0, \lambda_1P_1, \lambda_2P_2) \mid \lambda_i \in Z_4\}$

İki AH-altgrup tanımlayalım:

Alt Gruplar:

- $H_0 = \{0,2\}$ (2 elemanlı alt grup)
- $H_1 = \{0,2\}$
- $H_2 = \{0\}$

Bu durumda:

$SP_H = (H_0, H_1P_1, H_2P_2) = \{(\delta_0, \delta_1P_1, \delta_2P_2) \mid \delta_0, \delta_1 \in \{0,2\}, \delta_2 = 0\}$

Diğer altgruplar:

- $S_0 = \{0,1\}$
- $S_1 = \{0,1\}$
- $S_2 = \{0,2\}$

Bu durumda:

$SP_S = (S_0, S_1P_1, S_2P_2)$

İşlemler:

1. Kesişim:

$SP_H \cap SP_S = (H_0 \cap S_0, (H_1 \cap S_1)P_1, (H_2 \cap S_2)P_2)$

- $H_0 \cap S_0 = \{0\}$
- $H_1 \cap S_1 = \{0\}$
- $H_2 \cap S_2 = \{0\}$

Sonuç:

$SP_H \cap SP_S = (\{0\}, \{0\}P_1, \{0\}P_2)$

Bu, trivial sembolik altgruptur.

2. Çarpım:

$SP_H \cdot SP_S = (H_0 \cdot S_0, (H_1 \cdot S_1)P_1, (H_2 \cdot S_2)P_2)$

Abelyen bir grup olan $\mathbb{Z}_4$'te iki altgrubun çarpımı, bunların ürettiği altgrubu verir:

- $H_0 \cdot S_0 = \langle\{0,1,2\}\rangle = Z_4$
- $H_1 \cdot S_1 = Z_4$
- $H_2 \cdot S_2 = \{0\} \cdot \{0,2\} = \{0,2\}$

Sonuç: $SP_H \cdot SP_S = (Z_4, Z_4P_1, \{0,2\}P_2)$

3. Doğrudan Çarpım:

$SP_H \times SP_S = (H_0 \times S_0, (H_1 \times S_1)P_1, (H_2 \times S_2)P_2)$

- $H_0 \times S_0 = \{(0,0), (0,1), (2,0), (2,1)\}$
- $H_1 \times S_1$=$\{(0,0), (0,1), (2,0), (2,1)\}$
- $H_2 \times S_2 = \{(0,0), (0,2)\}$

Sonuç:

$SP_H \times SP_S = (\{(0,0), (0,1), (2,0), (2,1)\}, aynı\ P_1, \{(0,0), (0,2)\}P_2)$.

BÖLÜM V

SEMBOLİK PLİTHOGENİC HALKALAR

5.1. Plithogenic Sembolik Halkalara Giriş

Tanım 5.1.1: Sezgisel olarak, sembolik Plithogenic halka, klasik bir halkaya çeşitli öznitelik değerlerinin (ya da benzer şekilde, üyelik bileşenlerinin) varlığını temsil eden yeni sembolik elemanların eklenmesiyle inşa edilen genişletilmiş bir yapıdır. Başlangıçta elimizde bir halka R (komütatif ya da değil, aksi belirtilmedikçe birim eleman 1'e sahip) vardır ve bu halkaya $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ biçiminde semboller eklenir. Bu semboller, n adet "Plithogenic" bileşeni göstermek için idempotent belirteçler olarak işlev görür.

Buradaki $\boldsymbol{n}$, temel üyelikten öteye geçerek kodlamak istediğimiz ayırt edici özniteliklerin veya kriterlerin sayısını ifade eder. Pratikte, n sayısı, bir nötrosofik ya da Plithogenic kümede dikkate alınan bağımsız üyelik değerlerinin sayısına karşılık gelebilir. Örneğin:

- $n = 1$ → klasik bulanık ya da nötrosofik halkaya benzer bir yapı elde edilir.
- Daha büyük n → birden fazla bağımsız üyelik benzeri bileşenlerin ele alınmasına olanak tanır.

Biçimsel Tanım:

Sabit pozitif bir tamsayı n için, R halkası üzerinde tanımlı sembolik n-Plithogenic halka aşağıdaki gibi tanımlanır:

- Temel Küme (Underlying Set):

$n\text{–}SP_R := \{\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n \mid \lambda_i \in R \; for \; 0 \le i \le n\}$.

Burada:

- P_0, dışarıdan eklenmiş bir sembol değil, yalnızca "λ_0" terimini biçimsel olarak işaretlemek için kullanılır.
- P_0, halka birim elemanı 1 ile özdeş kabul edilebilir.
- Bir eleman genellikle şu şekilde ifade edilir: $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n$

Burada $\lambda_0 P_0$=λ_0 olarak Kabul edilir. Her P_i, Plithogenic anlamda i. öznitelik değerinin varlığını belirten idempotent bir etiket olarak düşünülebilir.

Tanım 5.1.2 [18] Toplama işlemi, benzer terimlerin bileşen bazlı olarak toplanmasıyla tanımlanır. İki eleman için:

$\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_n P_n,$

$\beta = \delta_0 + \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2 + \cdots + \delta_n P_n,$

Toplamları: $\alpha + \beta = (\lambda_0 + \delta_0) + (\lambda_1 + \delta_1)P_1 + \cdots + (\lambda_n + \delta_n)P_n,$

Buradaki tüm işlemler R halkasında gerçekleştirilir. Bu toplama işlemi, bileşenlerin birbirine karışmaması nedeniyle vektör toplamasına benzer; bu nedenle toplama komütatif ve birleşmeli (associative) özelliklere sahiptir.

Tanım 5.1.3 [18] Çarpma işlemi, aşağıdaki kurallar altında dağıtmalı olarak tanımlanır:

1. Her sembol idempotenttir: ${P_i}^2 = P_i$; $(i = 0,1, \dots, n)$
2. Çarpma için emilim (absorbans) yasası uygulanır: P_i . P_j=$P_{\max(i,j)}$, $(i, j \geq 1)$

Ayrıca: $P_0 . P_j = P_j$veP_i . P_0 = P_i Yani P_0, nötr eleman gibi davranır.

Bu, öncelik sırasına göre emilim yasası olarak yorumlanır: büyük indeksli sembol küçük olanı baskılar. Plithogenic mantıkta, birden fazla özniteliğe sahip bir elemanda, en baskın öznitelik sonucu belirler. Daha büyük indeks = daha baskın öznitelik.

İki genel eleman için: $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . P_i, \beta = \sum_{j=1}^{n} \delta_i . P_j$

olmak üzere çarpımları: $\alpha \cdot \beta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i . \delta_i (P_i . P_j)$. =$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i . \delta_i P_{\max(i,j)}$

Bu işlem R'deki işlemler ve P sembolleriyle biçimsel olarak gerçekleştirilir.

Tanım 5.1.4: Eğer taban halka R komütatifse ve sembolik bileşenler de çarpım altında değişme özelliğini sağlıyorsa, $n\text{–}SP_R$ komütatif olur.

Tanım 5.1.5 [18], [7] R komütatif değilse veya sembolik çarpım asimetrik absorbans yasası ile tanımlanmışsa, halka komütatif olmaz.

5.2. Sembolik 2-Plithogenic Halka

Tanım 5.2.1 [6] R bir halka (ring) olmak üzere, sembolik 2-Plithogenic halka, , $2\text{–}SP_R$ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$2\text{–}SP_R = \{\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \mid \lambda_i \in R,\ {P_j}^2 = P_j,\ P_1 \cdot P_2 = P_{\max(1,2)} = P_2\}$

Burada:

P_0, halkanın çarpma işlemi için birim elemanı temsil eder.

P_1 ve P_2, baskınlık ilişkisi altında emilim yasasına uyan sembolik idempotent elemanlardır.

Smarandache tarafından $2\!-SP_R$ üzerinde aşağıdaki cebirsel işlemler tanımlanmıştır:

Toplama (+), bileşen bazında tanımlanır:

$(\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) + (\delta_0 + \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2) = (\lambda_0 + \delta_0) + (\lambda_1 + \delta_1)P_1 + (\lambda_2 + \delta_2)P_2$.

Çarpma $(\cdot)$, sembolik çarpma kuralları kullanılarak dağılmalı şekilde tanımlanır:

$(\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(\delta_0 + \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2) = \lambda_0\delta_0 + (\lambda_0\delta_1 + \lambda_1\delta_0 + \lambda_1\delta_1)P_1 + (\lambda_0\delta_2 + \lambda_1\delta_2 + \lambda_2\delta_0 + \lambda_2\delta_1 + \lambda_2\delta_2)P_2$.

Bu işlemler altında, $2\!-SP_R$ bir halka yapısı oluşturur. Ayrıca:

- Eğer temel halka R komütatifse, o zaman $2\!-SP_R$ de komütatiftir.
- Eğer R birim elemana sahipse, $2\!-SP_R$ bu birimi korur.

Örnek 5.2.2: $R = Z_4 = \{0,1,2,3\}$ mod 4 altında tanımlı tam sayı halkası olsun. Bu durumda tanımlanan ikinci dereceden semigrup polinom halkası:

$2 - SP_R = \{\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \mid \lambda_i \in Z_4\}$.

Aşağıdaki iki elemanı inceleyelim: $\alpha = 1 + 2P_1 + 3P_2$ve $\beta = P_1 + 2P_2$

Toplam: $\alpha + \beta = (1 + 2P_1 + 3P_2) + (P_1 + 2P_2) = 1 + 3P_1 + P_2$,

Fark: $\alpha - \beta = (1 + 2P_1 + 3P_2) - (P_1 + 2P_2) = 1 + P_1 + P_2$.

Çarpım:

$\alpha \cdot \beta = (1 + 2P_1 + 3P_2)(P_1 + 2P_2) = P_1 + 2P_2 + 2P_1 + 4P_2 + 3P_2 + 6P_2 = 3P_1 + 3P_2$,

Z_4 altında tüm işlemler mod 4 olarak yapılırsa: $\Rightarrow\ \alpha \cdot \beta = 3P_1 + 3P_2$

Teorem 5.2.3 [18] $(R, +, \cdot)$ sonlu ve mertebesi n olan bir halka olsun. O hâlde, bu halkaya karşılık gelen sembolik 2-Plithogenic halka olan $(2\!-SP_R, +, \cdot)$ bir sonlu sembolik Plithogenic halkadır ve mertebesi: $|2\!-SP_R| = n^3$ olur. [18]

Örnek 5.2.4: Z_2, mod 2 altında tanımlı tam sayı halkası olsun. Bu durumda Z_2 üzerinde tanımlı sembolik 2- Plithogenic halka, $2 - SP_{Z_2}$ olarak adlandırılır ve şu şekilde ifade edilir:

$$2 - SP_{Z_2} = \{(0,0,0), (1,0,0), (0, P_1, 0), (0,0, P_2), (0, P_1, P_2), (1, P_1, 0), (1,0, P_2), (1, P_1, P_2)\}.$$

Bu yapı, Z_2 halkasının elemanları ve sembolik parametreler P_1 ve P_2 temel alınarak tanımlanmış sembolik bir Plithogenic halkadır.

Teorem 5.2.5 [18] $2 - SP_R$, çarpma birim elemanına sahip bir sembolik 2-Plithogenic halka olsun.

Herhangi bir $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in 2 - SP_R$ elemanı için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

Terslenebilirlik Kriteri: $\alpha \in 2 - SP_R$ elemanı terslenebilir (çarpma işlemine göre bir tersi varsa), ancak ve ancak aşağıdaki elemanlar temel halka R içinde terslenebilirse: $\lambda_0, \lambda_0 + \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$.

Tersinin İfadesi: Eğer α terslenebilirse, tersi α^{-1} şu şekilde verilir:

$\alpha^{-1} = \lambda_0{}^{-1} + [(\lambda_0 + \lambda_1)^{-1} - \lambda_0{}^{-1}]P_1 + [(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^{-1} - (\lambda_0 + \lambda_1)^{-1}]P_2$. .

İspat: α terslenebilir olsun. O halde, öyle bir $\beta = \delta_0 + \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2 \in 2 - SP_R$ elemanı vardır ki: $\alpha \cdot \beta = 1$

Bu çarpım açıldığında aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

(1) $\lambda_0 \delta_0 = 1,$

(2) $\lambda_0 \delta_1 + \lambda_1 \lambda_0 + \lambda_1 \delta_1 = 0,$

(3) $\lambda_0 \delta_2 + \lambda_2 \delta_0 + \lambda_2 \delta_2 + \lambda_1 \delta_2 + \lambda_2 \delta_1 = 0.$

(1) numaralı denklemden, $\lambda_0 \in R$ terslenebilir olmalıdır.

(1) ve (2) denklem toplandığında: $(\lambda_0 + \lambda_1)(\delta_0 + \delta_1) = 1$, da terslenebilir.

(1), (2), (3) toplamı: $(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)(\delta_0 + \delta_1 + \delta_2) = 1$, da terslenebilir.

Tersi için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$\delta_0 = \lambda_0{}^{-1}, \delta_0 + \delta_1 = (\lambda_0 + \lambda_1)^{-1}, \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^{-1}$

Buradan: $\delta_1 = (\lambda_0 + \lambda_1)^{-1} - \lambda_0{}^{-1}, \delta_2 = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^{-1} - (\lambda_0 + \lambda_1)^{-1}$.

Sonuç olarak:

$\alpha^{-1} = \lambda_0{}^{-1} + [(\lambda_0 + \lambda_1)^{-1} - \lambda_0{}^{-1}]P_1 + [(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^{-1} - (\lambda_0 + \lambda_1)^{-1}]P_2$.

Örnek 5.2.6: $R = Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ mod 5 altında tanımlı tam sayı halkası olsun.

İlgili sembolik 2-Plithogenic halka: $2 - SP_{Z_5}$ Verilen eleman: $\alpha = 2 + 4P_1 + 2P_2 \in 2 - P_{Z_5}$.

- Sabit terim $\lambda_0 = 2, Z_5$ içinde terslenebilir, ters: $\lambda_0{}^{-1} = 3$
- $\lambda_0 + \lambda_1 = 2 + 4 = 6 \equiv 1$ (mod 5), ters: $1^{-1} = 1$
- $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 4 + 2 = 8 \equiv 3\ (mod\ 5), ters: 3^{-1} = 2$

Ters formülüne göre: $\alpha^{-1} = 3 + (1 - 3)P_1 + (2 - 1)P_2 = 3 + 3P_1 + P_2$.

Tanım 5.2.7 [6] Halka kuramında, birim elemana sahip herhangi bir halka R için aşağıdaki alt küme tanımlıdır:

$U(R) = \{\alpha \in R \mid \alpha\ terslenebilir\}$ Bu küme çarpma işlemi altında bir grup oluşturur ve halkanın birim elemanlar grubu (group of units) olarak adlandırılır.

Yukarıda gösterildiği gibi, $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in 2 - SP_R$ elemanı yalnızca $\lambda_0, \lambda_0 + \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \in R$ terslenebilir olduğunda terslenebilir olur, yani:

$\alpha \in U(2\text{–}SP_R) \Leftrightarrow \lambda_0, \lambda_0 + \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \in U(R)$

Aşağıda, $U(2\text{–}SP_R)$ grubunun sınıflandırılması verilecektir.

Örnek 5.2.8 [20] Sembolik 2-Plithogenic halka:

$2 - SP_{Z_3} = \{\lambda_0 + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i P_i \mid \lambda_0,\ \lambda_i \in Z_3,\ P_i\ .\ P_j = P_{\max(i,j)}\}$ Bu halkadaki bir eleman:

$\alpha = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i P_i \in 2 - SP_{Z_3}$ ancak ve ancak $2 - SP_{Z_3}$ içinde terslenebilir ise bir birim eleman (unit) olarak adlandırılır.

Tartışma:

Varsayalım ki $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in 2 - SP_{Z_3}$ bir birim elemandır. O hâlde aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

$\lambda_0 \in \{1,2\}$, çünkü Z_3 içinde yalnızca bu elemanlar birimdir.

$\lambda_0 + \lambda_1 \in \{1,2\}$

$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \in \{1,2\}$

Bu kısıtlamalar altında, $2 - SP_{Z_3}$ halkasında tam olarak sekiz farklı birim eleman elde edilir. Bunlar aşağıdaki şekilde listelenebilir:

- Eğer $\lambda_0 = 1, \lambda_0 + \lambda_1 = 1, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\ ise: \ \rightarrow \alpha = 1$
- Eğer $\lambda_0 = 1, \lambda_0 + \lambda_1 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\ ise: \ \rightarrow \alpha = 1 + P_1 + 2P_2$
- Eğer $\lambda_0 = 1, \lambda_0 + \lambda_1 = 1, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2\ ise: \ \rightarrow \alpha = 1 + P_2$
- Eğer $\lambda_0 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 = 1, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\ ise: \ \rightarrow \alpha = 2 + 2P_1$
- Eğer $\lambda_0 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2\ ise: \ \rightarrow \alpha = 2$
- Eğer $\lambda_0 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\ ise: \ \rightarrow \alpha = 2 + 2P_2$
- Eğer $\lambda_0 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 = 1, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2\ ise: \ \rightarrow \alpha = 2 + 2P_1 + P_2$
- Eğer $\lambda_0 = 1, \lambda_0 + \lambda_1 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2\ ise: \ \rightarrow \alpha = 1 + P_1$

Sonuç olarak, $2 - SP_{Z_3}$ halkası yukarıdaki koşullar altında tam olarak sekiz birim eleman içerir.

Tanım 5.2.9 [20] $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in 2\text{–}SP_R$ olsun. Ancak ve ancak $\alpha^2 = \alpha$ eşitliği sağlanıyorsa, α elemanına idempotent denir.

Teorem 5.2.10 [20] $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in 2 - SP_R$ bir eleman olsun. O hâlde, α idempotenttir (yani $\alpha^2 = \alpha$), ancak ve ancak aşağıdaki elemanlar temel halka R içinde idempotent ise: λ_0, $\lambda_0 + \lambda_1$, $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$

İspat: α'nın karesi alınır: $\alpha^2 = (\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = {\lambda_0}^2 + (\lambda_0\lambda_1 + \lambda_1\lambda_0 + {\lambda_1}^2)P_1 + (\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_0 + \lambda_2\lambda_1 + {\lambda_2}^2)P_2$

Bu ifade α ile eşitlenerek aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

(1) ${\lambda_0}^2 = \lambda_0,$

(2) $\lambda_0\lambda_1 + \lambda_1\lambda_0 + {\lambda_1}^2 = \lambda_1,$

(3) $\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_0 + \lambda_2\lambda_1 + {\lambda_2}^2 = \lambda_2.$

- (1) nolu denklem, λ_0'nin idempotent olduğunu gösterir.
- (1) ve (2) denklemleri toplanırsa:

${\lambda_0}^2 + \lambda_0\lambda_1 + \lambda_1\lambda_0 + {\lambda_1}^2 = \lambda_0 + \lambda_1 \Rightarrow (\lambda_0 + \lambda_1)^2 = \lambda_0 + \lambda_1,$

$\rightarrow \lambda_0 + \lambda_1$ de idempotenttir.

- (1), (2) ve (3) denklemlerinin toplamı alınırsa:

${\lambda_0}^2 + \lambda_0\lambda_1 + \lambda_1\lambda_0 + {\lambda_1}^2 + \lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_0 + \lambda_2\lambda_1 + {\lambda_2}^2 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow$
$(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^2 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2, \rightarrow \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$ de idempotenttir.

Dolayısıyla, α ancak ve ancak $\lambda_0, \lambda_0 + \lambda_1\ ve\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2\ R$ içinde idempotent olduğunda idempotent olur. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 5.2.11: R=$Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ halkası olsun ve $2 - SP_{Z_6}$, bu halkaya ait sembolik 2-Plithogenic halka olsun.

Aşağıdaki elemanı inceleyelim: $\alpha = 3 + P_1 + 5P_2 \in 2 - P_{Z_6}$.

Karesi hesaplanır: $\alpha^2 = (3 + P_1 + 5P_2)^2 = 9 + 6P_1 + P_1 + 30P_2 + 25P_2 + 10P_2$

Z_6 moduna göre sadeleştirme yapılır: $\alpha^2 = 3 + P_1 + 5P_2$. Bu durumda: α^2= α

Sonuç: α, 2–SP_{Z_6} içinde idempotent bir elemandır.

Teorem 5.2.12 [18] Her sembolik Plithogenic halka $(2 - SP_R, +, \cdot)$ yapısı en az iki adet önemsiz olmayan (nontrivial) idempotent eleman içerir.

İspat: $2 - SP_R$ yapısında, sembolik bileşenler ${P_1}^2 = P_1$ve ${P_2}^2 = P_2$ koşullarını sağlar. Dolayısıyla, hem P_1 hem de P_2 bu halkada önemsiz (trivial olmayan) idempotent elemanlardır. Bu da her sembolik 2-Plithogenic halkada en az iki önemsiz idempotent elemanın varlığını doğrular.

Teorem 5.2.13 [6] $2-SP_R$ bir değişmeli (komütatif) sembolik 2-Plithogenic halka olsun. O hâlde, herhangi bir $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in 2-SP_R$ elemanı ve her pozitif tam sayı $n \in Z^+$için aşağıdaki özdeşlik sağlanır:

$\alpha^n = {\lambda_0}^n + [(\lambda_0+\lambda_1)^n - {\lambda_0}^n]P_1 + [(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^n - (\lambda_0+\lambda_1)^n]P_2$.

İspat. Matematiksel tümevarım yöntemi ile gösterilecektir.

Başlangıç Durumu ($n = 1$): $\alpha^1 = \alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$,

Bu, şu şekilde yazılabilir:

$\alpha = \lambda_0 + [(\lambda_0 + \lambda_1) - \lambda_0]P_1 + [(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_0 + \lambda_1)]P_2$

Dolayısıyla özdeşlik sağlanır.

Tümevarım Adımı**:** Varsayalım ki özdeşlik $n = k$ için doğrudur:

$\alpha^k = {\lambda_0}^k + [(\lambda_0+\lambda_1)^k - {\lambda_0}^k]P_1 + [(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^k - (\lambda_0+\lambda_1)^k]P_2$

Gösterilecek olan: $n = k+1$ için de geçerlidir. $\alpha^{k+1} = \alpha \cdot \alpha^k$

Yani: $\alpha^{k+1} = \alpha \cdot \alpha^k = (\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(a{\lambda_0}^k + [(\lambda_0+\lambda_1)^k - {\lambda_0}^k]P_1 + [(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^k - (\lambda_0+\lambda_1)^k]P_2$

Dağıtma işlemi ve halka R'nin değişmeli oluşu kullanıldığında aşağıdaki terimler elde edilir:

- P_1’nin katsayısı: $(\lambda_0+\lambda_1)^{k+1} - \alpha^{k+1}$
- P_2’nin katsayısı: $(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{k+1} - (\lambda_0+\lambda_1)^{k+1}$

Sonuç olarak: $\alpha^{k+1} = {\lambda_0}^{k+1} + [(\lambda_0+\lambda_1)^{k+1} - {\lambda_0}^{k+1}]P_1 + [(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{k+1} - (\lambda_0+\lambda_1)^{k+1}]P_2$.

Bu da tümevarım adımını tamamlar. Böylece bu özdeşlik tüm $n \in Z^+$ için geçerlidir.

Örnek 5.2.14: $R = Z$, yani tamsayılar halkası olsun ve $2-SP_Z$, buna karşılık gelen sembolik 2-Plithogenic halka olsun. Aşağıdaki elemanı inceleyelim:

$\alpha = 1 + 2P_1 + 3P_2 \in 2-SP_Z$

Verilen özdeşlik:

$\alpha^n = {\lambda_0}^n + [(\lambda_0+\lambda_1)^n - {\lambda_0}^n]P_1 + [(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^n - (\lambda_0+\lambda_1)^n]P_2$.

$n = 3$ için:

- $\lambda_0 = 1$
- $\lambda_0 + \lambda_1 = 1 + 2 = 3$
- $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2 + 3 = 6$

Formüle yerleştirilirse: $\alpha^3 = 1^3 + [3^3 - 1^3]P_1 + [6^3 - 3^3]P_2 = 1 + 26P_1 + 189P_2$

Dolayısıyla: $\alpha^3 = 1 + 26P_1 + 189P_2\ in\ 2-SP_Z$.

Tanım 5.2.15 [23] Bir $\alpha \in 2\text{-}SP_R$ elemanına nilpotent denir, eğer pozitif bir tam sayı $n \in Z^+$ için: α^n=0 eşitliği sağlanıyorsa.

Teorem 5.2.16 [23] Bir $\alpha \in 2\text{-}SP_R$ olsun ve R değişmeli (komütatif) bir halka olsun. O hâlde, α nilpotenttir ancak ve ancak $\lambda_0, \lambda_0 + \lambda_1$ *ve* $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$ elemanları R halkasında nilpotent ise.

İspat: $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in 2\text{-}SP_R$ olsun. Tanım gereği, α'nın nilpotent olması demek, pozitif bir tamsayı $n \in Z^+$ var olup α^n= 0 eşitliğinin sağlanması demektir. $2\text{-}SP_R$ yapısında bilinen üs açılımına göre:

$$\alpha^n = {\lambda_0}^n + [(\lambda_0 + \lambda_1)^n - {\lambda_0}^n]P_1 + [(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^n - (\lambda_0 + \lambda_1)^n]P_2$$

Buna göre, α^n= 0 olması ancak ve ancak:

$${\lambda_0}^n = 0, (\lambda_0 + \lambda_1)^n - {\lambda_0}^n = 0, (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^n - (\lambda_0 + \lambda_1)^n = 0.$$

olmasıyla mümkündür. Bu da $\lambda_0, \lambda_0 + \lambda_1$ *ve* $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$ elemanlarının R halkasında nilpotent olmaları gerektiğini gösterir. İspat tamamlanmıştır.

Örnek 5.2.17: $R = Z_4 = \{0,1,2,3\}$ halkası olsun ve $2\text{-}SP_{Z_4}$ buna karşılık gelen sembolik 2-plithogenic halka olsun. Bu halkadaki tüm nilpotent elemanları belirleyelim. $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in 2\text{-}SP_{Z_4}$ olsun.

$2\text{-}SP_{Z_4}$ için nilpotentlik karakterizasyonuna göre, α nilpotenttir ancak ve ancak:

$\lambda_0,\ \lambda_0 + \lambda_1,\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \in \{0,2\}$, çünkü Z_4 halkasında yalnızca 0 ve 2 elemanları nilpotenttir (çünkü $2^2 = 0$ mod 4).

Aşağıda bu koşulu sağlayan tüm kombinasyonlar verilmiştir:

Durum 1: $\lambda_0 = 0, \lambda_0 + \lambda_1 = 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Durum 2: $\lambda_0 = 0, \lambda_0 + \lambda_1 = 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \Rightarrow \alpha = 2P_2$

Durum 3: $\lambda_0 = 0, \lambda_0 + \lambda_1 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \alpha = 2P_1 + 2P_2$

Durum 4: $\lambda_0 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 = 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 + 2P_1$

Durum 5: $\lambda_0 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \Rightarrow \alpha = 2$

Durum 6: $\lambda_0 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \alpha = 2 + 2P_2$

Durum 7: $\lambda_0 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 = 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \Rightarrow \alpha = 2 + 2P_1 + 2P_2$

Durum 8: $\lambda_0 = 0, \lambda_0 + \lambda_1 = 2, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \Rightarrow \alpha = 2P_1$

Sonuç olarak, $2\text{-}SP_{Z_4}$ halkası tam olarak sekiz farklı nilpotent eleman içerir.

Tanım 5.2.18 [20] $(2\text{-}SP_R, +, \cdot)$ sembolik 2-plithogenic halka ve $n \in Z^+$ olsun:

1) Eğer öyle bir en küçük pozitif tamsayı n varsa ki, her $\alpha \in 2\text{–}SP_R$ için $n\alpha = 0$ eşitliği sağlanıyorsa, o hâlde$(2\text{–}SP_R, +,\cdot)$ halkasına karakteristiği n olan sembolik 2-plithogenic halka denir. Burada n, halkanın karakteristiği olarak adlandırılır.
2) Eğer yalnızca $n = 0$ için $n\alpha = 0$ eşitliği sağlanıyorsa, bu durumda halka **sıfır** karakteristiğe sahip olarak kabul edilir.

Örnek 5.2.19: $2 - SP_Z;\ 2 - SP_Q;\ 2 - SP_R;\ 2 - SP_C$ halkaları sıfır karakteristiğe sahip birim elemanlı değişmeli sembolik 2-plithogenic halkalardır.

$2 - SP_{Z_2} = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,P_1,0),(0,0,P_2),(0,P_1,P_2),(1,P_1,0),(1,0,P_2),(1,P_1,P_2)\}$ olsun.

Bu durumda, $\left(2 - SP_{Z_2}, +,\cdot\right)$halkası, karakteristiği 2 olan Z_2'ye göre tanımlı değişmeli sembolik 2-plithogenic tamsayı halkasıdır.

Genel olarak, pozitif bir $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}$ tam sayısı için, $\left(2 - SP_{Z_2}, +,\cdot\right)$ yapısı, karakteristiği n olan sonlu bir değişmeli sembolik 2-plithogenic tamsayı halkasıdır.

Tanım 5.2.20 [6] $(2 - SP_R, +,\cdot)$ sembolik 2-plithogenic halka ve $2 - SP_J \subseteq 2 - SP_R$ olmak üzere, $2 - SP_J$ boş olmayan bir altkümeyse, eğer $(2 - SP_J, +,\cdot)$ kendi başına bir sembolik 2-plithogenic halka oluşturuyorsa, bu yapıya $2 - SP_R$'nin sembolik 2-plithogenic alt halkası denir.

Ayrıca, $2 - SP_J$'nin içinde klasik halka yapısı oluşturan uygun bir altküme bulunması da gereklidir. [6]

Örnek 5.2.21: $(2 - SP_Z;\ +,\cdot)$ sembolik 2-plithogenic tamsayı halkasını ele alalım. Herhangi bir pozitif tamsayı n için, $2 - SP_J = 2 - SP_{nZ}$kümesi, $2 - SP_Z =$ halkasının bir sembolik 2-plithogenic alt halkasını oluşturur.

Tanım 5.2.22 [6] Bir sembolik 2-plithogenic halkanın merkezi, $Z(2 - SP_R)$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$2 - SP_R$ halkasında bulunan her $\alpha = (\lambda_0, \lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2) \in 2 - SP_R$ elemanı için, her $\beta = (\delta_0, \delta_1 P_1, \delta_2 P_2) \in 2 - SP_R$ elemanına karşılık, aşağıdaki koşulu sağlayan tüm α'lar merkeze aittir: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

Yani, sembolik 2-plithogenic çarpma kuralları altında α tüm elemanlarla çarpımda değişme özelliğini sağlıyorsa, bu α elemanı merkezdedir.

Formel olarak:

$$Z(2 - SP_R) = \{(\lambda_0, \lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2) \in 2 - SP_R \mid (\lambda_0, \lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2)(\delta_0, \delta_1 P_1, \delta_2 P_2) = (\delta_0, \delta_1 P_1, \delta_2 P_2)(\lambda_0, \lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2),\ \forall (\delta_0, \delta_1 P_1, \delta_2 P_2) \in 2 - SP_R\}.$$

Yorum:

- Merkez, halkadaki her elemanla değişmeli olan sembolik 2-plithogenic elemanlardan oluşur.
- Sembolik bileşenlerin (P_1, P_2 $gibi$) davranışları bağlama göre değişebileceğinden, çarpımdaki değişme özelliği özel olarak doğrulanmalıdır.

Özellikler 5.2.23 [6]

- $Z(2-SP_R)$,$2-SP_R$'nin bir alt halkasıdır.
- Eğer $2-SP_R$ değişmeli bir sembolik 2-plithogenic halka ise, $Z(2-SP_R) = 2-SP_R$ olur. [6]

Örnek 5.2.24: $Z(2-SP_Z)$; $Z(2-SP_Q)$; $Z(2-SP_R)$ halkalarının merkezleri sırasıyla: $2-SP_Z$; $2-SP_Q$; $2-SP_R$' dir.

Tanım 5.2.25 [6] R halkasında S_0, S_1, S_2 ideal olmak üzere, sembolik 2-plithogenic AH-ideal S aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$S = S_0 + S_1P_1 + S_2P_2 = \{\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \mid \lambda_i \in S_i\}$.

Eğer özel olarak $S_0 = S_1 = S_2$ olacak şekilde tüm alt idealler eşitse, bu ideal AHS-ideal olarak adlandırılır.

Örnek 5.2.26: $R = Z[\lambda]$ olmak üzere, tamsayı katsayılı polinomlar halkasını ele alalım. Şu ideali tanımlayalım:

$S_0 = S_1 = S_2 = (\lambda^2 + 1) \subset R$, yani $\lambda^2 + 1$ polinomu tarafından üretilen asal ideal. P_1 ve P_2 sembolik ifadeler (formel semboller) olmak üzere, buna karşılık gelen sembolik 2-plithogenic AHS-ideal S aşağıdaki gibidir:

$S = S_0 + S_1P_1 + S_2P_2 = \{\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \mid \lambda_i \in (\lambda^2 + 1)\}$.

S'ye ait bir örnek eleman:

$(\lambda^2 + 1)(3\lambda) + (\lambda^2 + 1)(2\lambda - 1)P_1 + (\lambda^2 + 1)(\lambda^3 + 4)P_2$,

Bu ifade sadeleştirildiğinde:

$3\lambda(\lambda^2 + 1) + (2\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)P1 + (\lambda^3 + 4)(\lambda^2 + 1)P_2$.

elde edilir. Her bir katsayı $(\lambda^2 + 1)$ idealine ait olduğundan, S kümesi bir AHS-ideal koşulunu sağlar.

Teorem 5.2.27 [20] S, $2–SP_R$ halkasında bir AHS-ideal olsun. O hâlde S, klasik halka kuramı anlamında bir idealdir.

İspat: Bir AHS-ideal tanımı gereği, S aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$S = S_0 + S_1P_1 + S_2P_2$

burada S_0, temel halka R'nin bir idealidir ve P_1, P_2 formel sembollerdir. $(S,+)$ kümesinin, toplama işlemi altında kapalı olması ve ters elemanlara sahip olması sebebiyle, $(,2\text{–}SP_R,+)$ grubunun bir altgrubunu oluşturduğu açıktır.

Şimdi, $N = n_0 + n_1P + n_2P_2 \in 2\text{–}SP_R$ ve $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1P_1 + \lambda_2P_2 \in S$ olmak üzere (burada $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in S_0$), şu çarpımı inceleyelim:

$N \cdot \alpha = n_0\lambda_0 + (n_0\lambda_1 + n_1\lambda_0 + n_1\lambda_1)P_1 + (n_0\lambda_2 + n_1\lambda_2 + n_2\lambda_0 + n_2\lambda_1 + n_2\lambda_2)P_2$.

Görüldüğü üzere:

$n_0\lambda_0 \in S_0$,

$n_0\lambda_1 + n_1\lambda_0 + n_1\lambda_1 \in S_0$,

$n_0\lambda_2 + n_1\lambda_2 + n_2\lambda_0 + n_2\lambda_1 + n_2\lambda_2 \in S_0$

çünkü S_0, R halkasının bir idealidir ve tüm $n_i \in R$'dir. Dolayısıyla her bir katsayı S_0'de yer alır ve sonuçta: $N \cdot \alpha \in S_0 + S_0P_1 + S_0P_2 = S$. Bu durumda, S kümesi $2\text{–}SP_R$ halkasında çarpma işlemine göre kapalıdır ve böylece klasik anlamda bir ideal olduğu sonucuna varılır.

Tanım 5.2.28 [6] $Q = Q_0 + Q_1P_1 + Q_2P_2$ ve $M = M_0 + M_1P_1 + M_2P_2$ olmak üzere, $2\text{–}SP_R$ halkasında tanımlı iki AH-ideal verilsin. Bu durumda aşağıdaki işlemler tanımlanır:

Kesişim: $Q \cap M = (Q_0 \cap M_0) + (Q_1 \cap M_1)P_1 + (Q_2 \cap M_2)P_2$

Çarpım: $QM = Q_0M_0 + Q_1M_1P_1 + Q_2M_2P_2$

$2 - SP_R/Q = R/Q_0 + R/Q_1P_1 + R/Q_2\,P_2$.

Örnek 5.2.29: $R = Z$ halkası (tamsayılar halkası) olsun. R içinde tanımlı olan $M_0 = 2Z, M_1 = 3Z,$ ve $M_2 = 5Z$ ideallerini ele alalım. Aşağıdaki küme tanımlansın:

$M = M_0 + M_1P_1 + M_2P_2 = \{2\lambda + 3\delta P_1 + 5\gamma P_2 \mid \lambda, \delta, \gamma \in Z\}$,

Bu küme, $2 - SP_Z$ halkasında bir AH-ideal oluşturur.

Şimdi şu küme tanımlansın:

$K = M_0 + M_0P_1 + M_0P_2 = \{2\lambda + 2\delta P_1 + 2\gamma P_2 \mid \lambda, \delta, \gamma \in Z\}$,

Bu yapı, $2 - SP_Z$ halkasında bir AHS-ideal oluşturur.

M ile K kümelerinin kesişimi:

$M \cap K = M_0 \cap M_0 + (M_0 \cap M_1)P_1 + (M_0 \cap M_2)P_2 = \langle 2\rangle + \langle 6\rangle P_1 + \langle 10\rangle P_2$.

Ayrıca, $2 - SP_Z$ halkasının ideal M'ye göre bölüm halkası:

$2 - SP_Z/M = Z/\langle 2\rangle + (Z/\langle 3\rangle)P_1 + (Z/\langle 5\rangle)P_2 = Z_2 + Z_3P_1 + Z_5P_2$.

Tanım 5.2.30 [18] ($2\text{–}SP_R$, +, ·) ve ($2\text{–}SP_T$, +, ·) iki sembolik 2-plithogenic halka olsun.

$\psi: (2 - SP_R, +,\cdot) \rightarrow (2 - SP_T, +,\cdot)$

fonksiyonu, aşağıdaki koşullar sağlandığında bir sembolik 2-plithogenic halka homomorfizması olarak adlandırılır:

- $\forall \alpha, \beta \in 2\text{–}SP_R$ $için: \psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$
- $\forall \alpha, \beta \in 2\text{–}SP_R$ $için: \psi(\alpha \cdot \beta) = \psi(\alpha) \cdot \psi(\beta)$
- $\psi(P_s) = P_s$, $s = 1, 2$ için; burada P_s, halkadaki sembolik parametrelerdir.

ψ fonksiyonunun görüntü kümesi (image):

$Im(\psi) = \{\beta \in 2\text{–}SP_T \mid \beta = \psi(\alpha)\ için\ bazı\ \alpha \in 2\text{–}SP_R\}$

ψ fonksiyonunun çekirdeği (kernel): $Ker(\psi) = \{\alpha \in 2 - SP_R \mid \psi(\alpha) = (0,0,0)\}$.

Epimorfizma, monomorfizma, izomorfizma, endomorfizma ve otomorfizma kavramları klasik halka homomorfizması kuramına benzer şekilde tanımlanır.

Örnek 5.2.31: Aşağıdaki tanımlı fonksiyonu ele alalım:

$\psi: 2 - SP_{Z_2} \times 2 - SP_{Z_2} \rightarrow 2 - SP_{Z_2}; \psi(\alpha, \beta) = \alpha, \forall \alpha, \beta \in 2 - SP_{Z_2}$.

Bu tanım altında ψ, bir sembolik 2-plithogenic halka homomorfizmasıdır.

- ψ'nin görüntüsü:

  $Im(\psi) = \{(0,0,0), (1,0,0), (0, P_1, 0), (0,0, P_2), (0, P_1, P_2), (1, P_1, 0), (1,0, P_2), (1, P_1, P_2)\}$.

- ψ'nin çekirdeği:

  $Ker(\psi) = \{((0,0,0), (0,0,0)), ((0,0,0), (1,0,0)), ((0,0,0), (0, P_1, 0)), ((0,0,0), (0, P_1, P_2)),$
  $((0,0,0), (0,0, P_2)), ((0,0,0), (1, P_1, 0)), ((0,0,0), (1,0, P_2)), ((0,0,0), (1, P_1, P_2))\}$.

Tanım 5.2.32 [6] R ve T iki halka, $2\text{–}SP_R$ ve $2\text{–}SP_T$ de bu halkaların sırasıyla sembolik 2-plithogenic uzantıları olsun.

$\psi_0, \psi_1, \psi_2 : R \rightarrow T$ klasik halka homomorfizmaları olsun.

Bu durumda aşağıdaki şekilde tanımlanan fonksiyon:

$$\psi: 2 - SP_R \rightarrow 2 - SP_T: \psi(\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \psi_0(\lambda_0) + \psi_1(\lambda_1) P_1 + \psi_2(\lambda_2) P_2,$$

bir AH-homomorfizma olarak adlandırılır.

Eğer $\psi_0 = \psi_1 = \psi_2$ ise, ψ fonksiyonu bir AHS-homomorfizma olarak adlandırılır.

Açıklama 5.2.33 [6] Eğer ψ_0, ψ_1, ψ_2 fonksiyonlarının her biri birer izomorfizma ise, ψ fonksiyonu bir AH-izomorfizma olarak adlandırılır.

Örnek 5.2.34: $R = Z$ ve $T = Z_6$ olsun. Aşağıdaki iki homomorfizma tanımlansın:

$\psi_0(\alpha) = \alpha mod 6, \psi_1(\alpha) = 3\alpha mod 6$.

Her iki fonksiyonun da halka homomorfizması olduğu açıktır. Şimdi şu fonksiyonu tanımlayalım:

$\psi: 2 - SP_R \rightarrow \ 2 - SP_T$

$\psi(\alpha + \beta P_1 + \theta P_2) = \psi_0(\alpha) + \psi_1(\beta)P_1 + \psi_2(\theta)P_2 = \alpha mod 6 + \beta mod 6 P_1 +$ $(3\theta mod 6)P_2$, Bu yapı bir AH-homomorfizma oluşturur.

Örneğin, $\zeta \ = \ 15 \ + \ 3P_1 \ + \ 4P_2$ ele alındığında:

$\psi(\zeta) = 15 mod 6 + 3 mod 6 P_1 + 3 \cdot 4 mod 6 P_2 = 3 + 3P_1$.

Tanım 5.2.35 [18] $\psi, \phi: 2 - SP_R \rightarrow 2 - SP_R$ iki sembolik 2-plithogenic homomorfizma olsun. Her biri şu biçimde ifade edilsin:

$\psi = \psi_0 + \psi_1 P_1 + \psi_2 P_2, \phi = \phi_0 + \phi_1 P_1 + \phi_2 P_2$.

Bu durumda, ψ ile φ'nin bileşkesi ya da sembolik çarpımı, aşağıdaki şekilde tanımlanır: $\psi \times \phi = \psi_0 \circ \phi_0 + (\psi_1 \circ \phi_1)P_1 + (\psi_2 \circ \phi_2)P_2$, Burada $\circ$ işareti, ilgili bileşen homomorfizmalarının fonksiyonel bileşkesini ifade eder.

Teorem 5.2.36 [20] $\psi = \psi_0 + \psi_1 P_1 + \psi_2 P_2: 2 - SP_R \rightarrow 2 - SP_T$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. O hâlde:

1. Eğer ψ bir AHS-homomorfizma ise, ψ klasik anlamda bir halka homomorfizmasıdır.
2. Eğer ψ bir AHS-izomorfizma ise, ψ klasik anlamda bir halka izomorfizmasıdır.

İspat.

1. ψ'nin bir AHS-homomorfizma olduğunu varsayalım. Tanım gereği, $\psi_0 \ = \ \psi_1 \ = \ \psi_2$ olmak üzere her biri $\psi_i \ : \ R \ \rightarrow \ T$ şeklinde bir halka homomorfizmasıdır.

$\alpha \ = \ \lambda_0 \ + \ \lambda_1 P_1 \ + \ \lambda_2 P_2 \ ve \ \beta \ = \ \delta_0 \ + \ \delta_1 P_1 \ + \ \delta_2 P_2 \ \in \ 2 - SP_R$ için, ψ'nin toplama ve çarpma işlemlerini koruduğu gösterilir:

Toplama için:

$\psi(\alpha + \beta) = \psi_0(\lambda_0 + \delta_0) + \psi_0(\lambda_1 + \delta_1)P_1 + \psi_0(\lambda_2 + \delta_2)P_2 \ = \psi_0(\lambda_0) +$ $\psi_0(\delta_0) + [\psi_0(\lambda_1) + \psi_0(\delta_1)]P_1 + [\psi_0(\lambda_2) + \psi_0(\delta_2)]P_2 \ = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$.

Çarpma için:

$$\alpha . \beta = (\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(\delta_0 + \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2)$$
$$= \lambda_0 \delta_0 + (\lambda_0 \delta_1 + \lambda_1 \delta_0 + \lambda_1 \delta_1)P_1 + (\lambda_0 \delta_2 + \lambda_2 \delta_0 + \lambda_2 \delta_2 + \lambda_2 \delta_1 + \lambda_1 \delta_2)P_2.$$

ψ uygulandığında:

$$\psi(\alpha.\beta) = \psi_0(\lambda_0\delta_0) + \psi_0(\lambda_0\delta_1 + \lambda_1\delta_0 + \lambda_1\delta_1)P_1 + \psi_0(\lambda_0\delta_2 + \lambda_2\delta_0 + \lambda_2\delta_2 + \lambda_2\delta_1 + \lambda_1\delta_2)P2$$
$$= \psi_0(\lambda_0)\psi_0(\delta_0) + [\psi_0(\lambda_0)\psi_0(\delta_1) + \psi_0(\lambda_1)\psi_0(\delta_0) + \psi_0(\lambda_1)\psi_0(\delta_1)]P_1 + [\psi_0(\lambda_0)\psi_0(\delta_2) + \psi_0(\lambda_2)\psi_0(y0) + \psi_0(\lambda_2)\psi_0(\delta_2) + \psi_0(\lambda_2)\psi_0(\delta_1) + \psi_0(\lambda_1)\psi_0(\delta_2)]P_2$$
$$= [\psi_0(\lambda_0) + \psi_0(\lambda_1)P_1 + \psi_0(\lambda_2)P_2][\psi_0(\delta_0) + \psi_0(\delta_1)P_1 + \psi_0(\delta_2)P_2] = \psi(\alpha)\cdot\psi(\beta).$$

Dolayısıyla, ψ hem toplama hem de çarpma işlemini korur; bu da ψ'nin klasik anlamda bir halka homomorfizması olduğunu gösterir.

2. ψ bir AHS-izomorfizma ise, $\psi_0 = \psi_1 = \psi_2$ izomorfizmalardır. Bu durumda ψ birebir ve örten bir fonksiyon olup hem toplama hem de çarpma işlemlerini korur.
   Dolayısıyla ψ, klasik anlamda bir halka izomorfizmasıdır. İspat tamamlanmıştır.

Tanım 5.2.37 [6] $\psi = \psi_0 + \psi_1 P_1 + \psi_2 P_2 : 2 - SP_R \to 2 - SP_T$ bir AH-homomorfizma olsun. Bu durumda:

- ψ'nin AH-çekirdeği (AH-ker(ψ)) şu şekilde tanımlanır:

$AH - ker(\psi) = ker\ (\psi_0) + ker\ (\psi_1)P_1 + ker\ (\psi_2)P_2.$

- ψ'nin AH-görüntüsü ($AH - Im(\psi)$) şu şekilde tanımlanır:

$AH - Im(\psi) = Im\ (\psi_0) + Im\ (\psi_1)P_1 + Im\ (\psi_2)P_2.$

Eğer $\psi_0 = \psi_1 = \psi_2$ ise, elde edilen çekirdek ve görüntü sırasıyla AHS-ker(ψ) ve AHS-image(ψ)

Örnek 5.2.38: $R = Z_{10}$ olsun ve $\psi_0 : Z \to R$ tanımlansın: $\psi_0(\alpha) = \alpha\ mod\ 10.$ Bu fonksiyonun çekirdeği şudur: $ker\ (\psi_0) = 10Z.$

Buna göre tanımlanan AHS-homomorfizma:

$\psi = \psi_0 + \psi_1 P_1 + \psi_2 P_2 : 2 - SP_Z \to 2 - SP_{Z_{10}}$

ve herhangi bir $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in 2 - SP_Z$ için:

$\psi(\alpha) = \psi_0(\lambda_0) + \psi_1(\lambda_1)P_1 + \psi_2(\lambda_2)P_2 = (\lambda_0 mod\ 10) + (\lambda_1 mod\ 10)P_1 + (\lambda_2 mod\ 10)P_2$. Buna göre AHS-çekirdek şu şekilde verilir:

$AHS - ker(\psi) = 10Z + 10ZP_1 + 10ZP_2 = \{10\lambda + 10\delta P_1 + 10\gamma P_2 \mid \lambda, \delta, \gamma \in Z\}.$

Teorem 5.2.39 [6] $\psi : 2 - SP_R \to 2 - SP_T$ bir sembolik 2-plithogenic AH-homomorfizma olsun. Bu durumda:

1) ψ'nin AH-çekirdeği (AH-ker(ψ)), $2 - SP_R$ halkasında bir AH-idealdir.

2) ψ'nin AH-görüntüsü (AH-Im(ψ)), $2-SP_T$ halkasında bir AH-idealdir.

3) Eğer ψ bir AH-izomorfizma ise, o hâlde AH-ker(ψ) = $\{0\}$ ve AH-Im(ψ) = $2-SP_T$ olur.

İspat:

- Her ψ_i için ($0 \leq i \leq 2$) $ker(\psi_i)$ R halkasında bir ideal olduğundan, AH-$ker(\psi)$ bir AH-idealdir.
- Aynı şekilde, $Im(\psi_\text{i})$ de T halkasında bir ideal olduğundan, AH-$Im(\psi)$ bir AH-idealdir.
- Eğer ψ_i fonksiyonları birebir ve örtense, ψ bir AH-izomorfizma olur ve bu durumda AH-$ker(\psi)$ = $\{0\}$ ve AH-$Im(\psi)$ = $2-SP_T$ olur.

  Bu da AH-homomorfizmanın yapısını doğrular.

Teorem 5.2.40 [6] $2-SP_R$ bir sembolik 2-plithogenic halka olsun.

$S = S_0 + S_1P_1 + S_2P_2 \;\; ve \;\; L = L_0 + L_1P_1 + L_2P_2$

şeklinde iki AH-ideal verilsin. Aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

1. $S \cap L$ ve $S.L$ kesişimi ile çarpımı, $2-SP_R$ içinde AH-idealdir.
2. Eğer S ve L AHS-ideal ise, bu durumda $S \cap L$ ve $S.L$ kesişimi ile çarpımı da AHS-idealdir.
3. Eğer S bir AHS-ideal ise, o hâlde bölüm halka aşağıdaki gibi tanımlanır:

$2-SP_R/S = R/S_0 + (R/S_1)P_1 + (R/S_2)P_2$

İspat:

- Her S_i ve L_i için ($i = 0,1,2$) bu kümeler R halkasında ideal olduklarından,

$S_i \cap L_i$ ve S_iL_i de idealdir. Dolayısıyla:

$S \cap L = S_0 \cap L_0 + (S_1 \cap L_1)P_1 + (S_2 \cap L_2)P_2, SL = S_0L_0 + (S_1L_1)P_1 + (S2L_2)P_2$

ifadeleri birer AH-idealdir.

- Eğer S ve L AHS-ideallerse, yukarıdaki yapı korunur ve sonuçlar AHS-ideal olur.
- S bir AHS-ideal ise ve $S = S_0 + S_1P_1 + S_2P_2$ şeklindeyse, o hâlde bölüm halka:

$2-SP_R/S = R/S_0 + (R/S_1)P_1 + (R/S_2)P_2$. şeklindedir.

Teorem 5.2.41 [6] $\psi, \phi: 2-SP_R \rightarrow 2-SP_R$ iki AH-homomorfizma olsun. Burada:

$\psi = \psi_0 + \psi_1P_1 + \psi_2P_2, \qquad \phi = \phi_0 + \phi_1P_1 + \phi_2P_2$

Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. Sembolik bileşim $\psi \times \phi$ bir AH-homomorfizmadır.
2. Eğer ψ ve ϕ AHS-homomorfizma ise, $\psi \times \phi$ de bir AHS-homomorfizmadır.

3. Eğer ψ ve ϕ AH-izomorfizma ise, $\psi \times \phi$ de bir AH-izomorfizmadır.
4. Eğer ψ ve ϕ AHS-izomorfizma ise, $\psi \times \phi$ de bir AHS-izomorfizmadır. [6]

İspat:

- Bileşim $\psi \times \phi$ şu şekilde tanımlanır:

$\psi \times \varphi = \psi_0 \circ \phi_0 + (\psi_1 \circ \phi_1)P_1 + (\psi_2 \circ \phi_2)P_2.$

Burada her $\psi_i \circ \phi_i$ bir halka homomorfizması olduğundan, $\psi \times \phi$ bir AH-homomorfizmadır.

- Eğer ψ ve ϕ AHS-homomorfizma ise, $\psi_0 = \psi_1 = \psi_2$ ve $\phi_0 = \phi_1 = \phi_2$ olur. Bu durumda bileşim de AHS-homomorfizma yapısını korur.
- 3 ve 4: İzomorfizmaların bileşimi yine izomorfizma olduğundan, sonuç AH ve AHS kategorileri için geçerlidir.

Teorem 5.2.42 [24] $2 - SP_R$ bir sembolik 2-plithogenic halka olsun. O hâlde:

$2 - SP_R \cong R^3.$

İspat: Tanımlayalım: $2 - SP_R = R + RP_1 + RP_2$, ve her $\alpha \in 2 - SP_R$ elemanı aşağıdaki şekilde ifade edilir: $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in R$.

Benzer şekilde, $\beta = \delta_0 + \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2, \delta_0, \delta_1, \delta_2 \in R$. Aşağıdaki şekilde bir fonksiyon tanımlayalım:

$\psi: 2 - SP_R \rightarrow R^3, \psi(\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. ψ'nin halka izomorfizması olduğunu gösterelim:

- İyi tanımlanmışlık**:** $2 - SP_R$'deki her eleman, R^3'te tek bir üçlüye karşılık gelir.
- Toplamsallık: $\psi(\alpha + \beta) = \psi((\lambda_0 + \delta_0) + (\lambda_1 + \delta_1)P_1 + (\lambda_2 + \delta_2)P_2) = (\lambda_0 + \delta_0, \lambda_1 + \delta_1 1, \lambda_2 + \delta_2) = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$.
- Çarpımsallık: $2 - SP_R$'deki çarpma işlemi dağılım yasası ve sembolik kurallarla tanımlanmıştır. $\alpha\beta = (\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(\delta_0 + \delta_1 P_1 + \delta_2 P_2)$

ifadeleri R, RP_1, RP_2 bileşenleriyle genişletilip ψ altında R^3'e doğru şekilde yansıtılır. Bu durumda çarpma ψ altında korunur.

Birebirlik: Eğer $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ ise, $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$ olur, bu da $\alpha = \beta$ anlamına gelir.

Örten: Her $(\lambda, \delta, \gamma) \in R^3$ üçlüsü, $2 - SP_R$ içinde $\lambda + \delta P_1 + \gamma P_2$ elemanına karşılık gelir. Dolayısıyla, ψ bir halka izomorfizmasıdır.

Not 5.2.43 [24] Bu izomorfizmanın tersi şu şekilde tanımlanabilir:

$\psi^{-1}: R^3 \rightarrow 2 - SP_R,$

$\psi^{-1}(c_0, c_1, c_2) = c_0 + (c_1 - c_0)P_1 + (c_2 - c_1)P_2$

Sonuç 5.2.44: $U_2 - SP_R$ sembolik 2-plithogenic halkanın birim elemanlar grubunu, UR ise temel halka R'nin birim elemanlar grubunu göstersin. O hâlde, $2 - SP_R$'nin birim elemanlar grubu UR'nin üç kopyasının direkt çarpımı ile izomorftur; yani:

$$U_2 - SP_R \cong UR^3. \text{ [28]}$$

Örnek 5.2.45: Sembolik 2-plithogenic halka $2 - SP_{Z_7}$'yi, sonlu alan Z_7 üzerine tanımlı olarak ele alalım. Eleman: $\alpha = 2 + P_1 + P_2 \in 2 - SP_{Z_7}$

Çarpımsal tersini hesaplamak için şu halka izomorfizması kullanılır:

$\psi: 2 - SP_{Z_7} \to {Z_7}^3; \psi(\lambda + \delta P_1 + \gamma P_2) = (\lambda, \lambda + \delta, \lambda + \delta + \gamma)$

Uygulandığında: $\psi(\alpha) = (2,3,4)$. Bu elemanın ${Z_7}^3$ içindeki tersi: $[\psi(\alpha)]^{-1} = (4,5,2)$.Ters izomorfizma ψ^{-1} ile geri dönüştürülerek:

$\alpha^{-1} = \psi^{-1}[\psi(\alpha)]^{-1} = \psi^{-1}(4,5,2) = 4 + (5-4)P_1 + (2-5)P_2 = 4 + P_1 - 3P_2 = 4 + P_1 + 4P_2,$ (mod 7 aritmetiği kullanılmıştır.)

Doğrulama için çarpımı hesaplayalım: $\alpha\, \alpha^{-1} = (2 + P_1 + P_2)(4 + P_1 + 4P_2)$,

dağıtılarak: $8 + 2P_1 + 8P_2 + 4P_1 + P_1 + 4P_2 + 4P_2 + P_2 + 4P_2$

Toplanıp mod 7 uygulanınca:

$8 + (2 + 4 + 1)P_1 + (8 + 4 + 4 + 1 + 4)P_2 = 8 + 7P_1 + 21P_2 \equiv 1 + 0 + 0 = 1 mod\ 7.$

Dolayısıyla, $\alpha^{-1} = 4 + P_1 + 4P_2$doğru bir çarpımsal ters elemandır.

Teorem 5.2.46 [25] $R_2(I)$ 2-döngüsel (cyclic) nötrosofik halka ve $2 - SP_R$, R halkası üzerinde iyileştirilmiş sembolik 2-plithogenic halka olmak üzere,

$\psi: R_2(I) \to 2 - SP_R$

şeklinde bir halka homomorfizması vardır.

(Not: n-döngüsel (cyclic) nötrosofik halkada $I_i.I_j = I_{(i+jmodn)}$ tanımı geçerlidir.)

İspat: Tanımlayalım: $\psi(\lambda_0 + \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2) = \lambda_0 + (\lambda_1 + \lambda_2)P_1 - 2\lambda_1 P_2$.

İyi tanımlı: Eğer $\lambda_0 + \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 = \delta_0 + \delta_1 I_1 + \delta_2 I_2$. ise, o zaman λ_i=$\delta_i$olur ve $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$ elde edilir.

Toplamayı korur: $\alpha + \beta = (\lambda_0 + \delta_0) + (\lambda_1 + \delta_1)I_1 + (\lambda_2 + \delta_2)I_2 \Rightarrow$

$\psi(\alpha + \beta) = (\lambda_0 + \delta_0) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \delta_1 + \delta_2)P_1 - 2(\lambda_1 + \delta_1)P_2$

$= [\lambda_0 + (\lambda_1 + \lambda_2)P_1 - 2\lambda_1 P_2] + [\delta_0 + (\delta_1 + \delta_2)P_1 - 2\delta_1 P_2] = \psi(\alpha) + \psi(\beta)$,

Çarpmayı korur:

$R_2(I)$'de:

$\alpha \cdot \beta = \lambda_0\delta_0 + (\lambda_0\delta_1 + \lambda_1\delta_0 + \lambda_1\delta_2 + \lambda_2\delta_1)I_1 + (\lambda_0\delta_2 + \lambda_2\delta_0 + \lambda_2\delta_2 + \lambda_1\delta_1)I_2.$

Bunu ψ ile uyguladığımızda:

$$\psi(\alpha \cdot \beta) = \lambda_0\delta_0 + (\lambda_0\delta_1 + \lambda_1\delta_0 + \lambda_1\delta_2 + \lambda_2\delta_1 + \lambda_0\delta_2 + \lambda_2\delta_0 + \lambda_2\delta_2 + \lambda_1\delta_1)P_1 - 2(\lambda_0\delta_1 + \lambda_1\delta_0 + \lambda_1\delta_2 + \lambda_2\delta_1)P_2.$$

Öte yandan, $\psi(\alpha)$ ile $\psi(\beta)$'nin çarpımını hesapladığımızda aşağıdaki sonucu elde ederiz: $\psi\,(\alpha)\ \cdot \psi\,(\beta) = [\lambda_0 + (\lambda_1 + \lambda_2)P_1 - 2\lambda_1 P_2][\delta_0 + (\delta_1 + \delta_2)P_1 - 2\delta_1 P_2]$.

Terimleri açıp benzer terimleri gruplayarak elde edilir:

$$\lambda_0\delta_0 + (\lambda_0\delta_1 + \lambda_1\delta_0 + \lambda_1\delta_2 + \lambda_2\delta_1 + \lambda_0\delta_2 + \lambda_2\delta_0 + \lambda_2\delta_2 + \lambda_1\delta_1)P_1 - 2(\lambda_0\delta_1 + \lambda_1\delta_0 + \lambda_1\delta_2 + \lambda_2\delta_1)P_2,$$

Dolayısıyla, ψ bir halka homomorfizmasıdır.

Teorem 5.2.47 [26] ψ: $R_2(I)\ \rightarrow\ 2 - SP_R$ homomorfizması için:

1) $ker\ (\psi) = \{\delta I_1 - \delta I_2 \mid 2\delta = 0,\ \delta\ \in\ R\}$;
2) $ker(\psi)\ \{\ bir\ sıfır\ halkadır\}$.

İspat:

Tanıma göre: $\psi(\lambda + \delta I_1 + \gamma I_2) = \lambda + (\delta + \gamma)P_1 - 2\delta P_2$. Ve

$\ker(\psi) = \{\ \lambda + \delta I_1 + \gamma I_2 \in R_2(I) \mid \psi(\lambda + \delta I_1 + \gamma I_2) = 0\ \} \Rightarrow$

$\lambda + (\delta + \gamma)P_1 - 2\delta P_2 = 0$ olmalı. O hâlde: $\lambda = 0, \delta + \gamma = 0, -2\delta = 0$

Bunlardan $\gamma\ =\ -\delta\ ve\ 2\delta\ =\ 0$ eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla, çekirdek (kernel) aşağıdaki gibidir:

$ker\ (\psi) = \{\delta I_1 - \delta I_2 \mid 2\delta = 0,\ \delta\ \in R\}$.

Sıfır halka**:** İki eleman alalım: $\alpha = \lambda I_1 - \lambda I_2$ ve $\beta = \theta I_1 - \theta I_2 \in ker\ (\psi)$,

Halkanın devresel (çevrimsel) olduğu ve $I_1 . I_1\ =\ I_2$ ile $I_1 . I_2\ =\ I_1$ eşitliklerinin sağlandığı dikkate alındığında, $R_2(I)$ yapısında ilişki şu şekilde sadeleşir:

Çarpalım: $\alpha\beta = (\lambda I_1 - \lambda I_2)(\theta I_1 - \theta I_2) = \lambda\theta {I_1}^2 - \lambda\theta I_1 I_2 - \lambda\theta I_2 I_1 + \lambda\theta {I_2}^2$.

Ancak $2\lambda\theta\ =\ 0$ olduğundan, $\alpha\beta\ =\ 0$. Bu da $ker(\psi)$'nin bir sıfır halka olduğunu gösterir.

Not 5.2.48: Sembolik 2-plithogenic halka üzerine incelediğimiz özelliklerin ve teorilerin büyük bir kısmı araştırmacılar tarafından sembolik 3-plithogenic halka, sembolik 4-plithogenic halka, sembolik 5-plithogenic halka, sembolik 6-plithogenic halka ve sembolik 7-plithogenic halka yapılarına genellenmiştir ve hâlen daha yüksek seviyelere genellenebilirliğini ispat etme çalışmaları sürmektedir.

Aşağıda, bu üst düzey yapılardaki bazı özellikleri inceleyeceğiz:

5.3. Sembolik n-Plithogenic Halkalar

Teorem 5.3.1 [7] Birim elemanı 1 olan sembolik 3-plithogenic halka $3-SP_R$ olsun. Herhangi bir eleman**:** $\alpha=\lambda_0+\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3$

şeklinde ifade edilsin. O hâlde aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

1. Terslenebilirlik Kriteri**:** Eleman α, $3-SP_R$ içinde terslenebilirdir $\Leftrightarrow$

$\lambda_0, \lambda_0+\lambda_1, \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2, \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, ifadelerinin her biri R halkasında terslenebilirdir.

2. Ters Eleman İfadesi**:** Eğer α terslenebilirse, ters eleman α^{-1} aşağıdaki gibi verilir:

$$\alpha^{-1}={\lambda_0}^{-1}+[(\lambda_0+\lambda_1)^{-1}-{\lambda_0}^{-1}]P_1+[(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{-1}-(\lambda_0+\lambda_1)^{-1}]P_2+[(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^{-1}-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{-1}]P_3.$$

İspat: α'nın terslenebilir olduğunu varsayalım. O hâlde, $3-SP_R$ içerisinde bir eleman $\beta=\delta_0+\delta_1P_1+\delta_2P_2+\delta_3P_3$, bulunur ki $\alpha\cdot\beta=1$ eşitliği sağlansın. Bu çarpım genişletildiğinde ve sembolik temel bileşenlere göre terimler gruplandırıldığında şu eşitlik sistemi elde edilir:

(i) $\lambda_0\delta_0=1,$

(ii) $\lambda_0\delta_1+\lambda_1\delta_0+\lambda_1\delta_1=0,$

(iii) $\lambda_0\delta_2+\lambda_2\delta_0+\lambda_2\delta_2+\lambda_1\delta_2+\lambda_2\delta_1=0,$

(iv) $\lambda_0\delta_3+\lambda_1\delta_3+\lambda_2\delta_3+\lambda_3\delta_3+\lambda_3\delta_0+\lambda_3\delta_1+\lambda_3\delta_2=0.$

Denklem (i)'den, λ_0'ın tersinir olduğu sonucuna varılır.

Denklem (i) ve (ii)'yi topladığımızda elde ederiz:

$(\lambda_0+\lambda_1)(\delta_0+\delta_1)=1\Rightarrow\lambda_0+\lambda_1$ terslenebilir.

(i), (ii) ve (iii) denklemleri toplarsak:

$(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)(\delta_0+\delta_1+\delta_2)=1\Rightarrow\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2$ terslenebilir.

Tüm dört denklem toplanırsa:

$(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(\delta_0+\delta_1+\delta_2+\delta_3)=1\Rightarrow\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ terslenebilir.

Bu durum, α'nın terslenebilirliğinin, ardışık katsayı toplamlarının terslenebilirliğine bağlı olduğunu gösterir.

Tersi durum: Eğer $\lambda_0, \lambda_0+\lambda_1, \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2, \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ terslenebilir ise, şu şekilde δ_i'ler hesaplanarak ters $\beta\in 3-SP_R$ elde edilir:

$\delta_0={\lambda_0}^{-1},$

$\delta_0+\delta_1=(\lambda_0+\lambda_1)^{-1}\Rightarrow\delta_1=(\lambda_0+\lambda_1)^{-1}-{\lambda_0}^{-1},$

$\delta_0+\delta_1+\delta_2=(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{-1}\Rightarrow\delta_2=(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)^{-1}-(\lambda_0+\lambda_1)^{-1},$

$\delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{-1} \Rightarrow \delta_3 = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{-1} - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^{-1}$.

Bu durumda:

$$\alpha^{-1} = \beta = {\lambda_0}^{-1} + [(\lambda_0 + \lambda_1)^{-1} - {\lambda_0}^{-1}]P_1 + [(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^{-1} - (\lambda_0 + \lambda_1)^{-1}]P_2 + [(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{-1} - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^{-1}]P_3.$$

ifadesi α'nın çarpımsal tersidir.

Örnek 5.3.2: $R = Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$ olsun ve $3 - SP_{Z_5}$, Z_5 üzerinde tanımlı sembolik 3-plithogenic halkayı göstersin.

Aşağıdaki elemanı ele alalım:

$\alpha = 2 + 4P_1 + 2P_2 + P_3 \in 3 - SP_{Z_5}$.

α'nın terslenebilirliğini belirlemek için katsayılarının ardışık toplamlarını inceleyelim:

- $\lambda_0 = 2$ terslenebilir, ${\lambda_0}^{-1} = 3$,
- $\lambda_0 + \lambda_1 = 2 + 4 = 6 \equiv 1\ (mod\ 5) \Rightarrow (\lambda^0 + \lambda^1)^{-1} = 1$,
- $\lambda^0 + \lambda^1 + \lambda^2 = 2 + 4 + 2 = 8 \equiv 3\ (mod\ 5) \Rightarrow (\lambda^0 + \lambda^1 + \lambda^2)^{-1} = 2$,
- $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + 4 + 2 + 1 = 9 \equiv 4\ (mod\ 5) \Rightarrow$

$(\lambda^0 + \lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3)^{-1} = 4$.

Tüm bu kısmi toplamlar Z_5 içinde terslenebilir olduğundan, α, $3 - SP_{Z_5}$ halkasında terslenebilir bir elemandır.

Bir önceki teoremde verilen formüle göre, ters eleman:

$$\begin{aligned}\alpha^{-1} = {\lambda_0}^{-1} + [(\lambda_0 + \lambda_1)^{-1} - {\lambda_0}^{-1}]P_1 + [(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^{-1} - (\lambda_0 + \lambda_1)^{-1}]P_2 \\ + [(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^{-1} - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^{-1}]P_3 \\ = 3 + (1 - 3)P_1 + (2 - 1)P_2 + (4 - 2)P_3 \\ = 3 + 3P_1 + P_2 + 2P_3 (modulo\ 5).\end{aligned}$$

Dolayısıyla, α^{-1}=$3 + 3P_1 + P_2 + 2P_3$.

Teorem 5.3.3 [8] $\alpha \in 4 - SP_R$ olsun ve R değişmeli (komütatif) bir halka olsun. Bu durumda, α elemanı ancak ve ancak aşağıdaki ifadelerin her biri R'de nilpotent ise nilpotenttir:

$\lambda_0, \lambda_0 + \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$.

İspat: $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4$ olsun. α nilpotenttir $\Leftrightarrow$

$\exists\ n \in Z^+, \alpha^n = 0$. Bilinmektedir ki:

${\lambda_0}^n = 0 \Leftrightarrow {\lambda_0}^n = 0$

$(\lambda_0 + \lambda_1)^n - {\lambda_0}^n = 0 \Leftrightarrow (\lambda_0 + \lambda_1)^n = 0$

$(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^n - (\lambda_0 + \lambda_1)^n = 0 \Leftrightarrow (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^n = 0$

$(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^n - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)^n = 0 \Leftrightarrow (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^n = 0$

$(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^n - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^n = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^n = 0$

Bu durum, α'nın nilpotentliği için tüm ardışık kısmi toplamların nilpotent olmasının gerekli ve yeterli olduğunu gösterir.

Örnek 5.3.4: $R = Z_4 = \{0,1,2,3\}$ olsun. $4 - SP_{Z_4}$ içinde tüm nilpotent elemanları belirleyelim. $\alpha = \lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4 \in 4 - SP_{Z_4}$

α nilpotenttir $\Leftrightarrow \lambda_0, \lambda_0 + \lambda_1, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \in \{0,2\}$. Bazı olası durumlar:

Durum 1:

Tüm toplamlar = 0 ⇒ $\alpha = 0$.

Ayrıca aşağıdaki örnek nilpotent elemanlar bulunur:

$\alpha = 2 + 2P_1$, $\alpha = 2P_1 + 2P_2$, $\alpha = 2P_2 + 2P_3$, $\alpha = 2P_3 + 2P_4$, $\alpha = 2P_4$, $\alpha = 2 + 2P_2$, $\alpha = 2 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3$, $\alpha = 2 + 2P_1 + 2P_3 + 2P_4$, $\alpha = 2 + 2P_1 + 2P_4$, $\alpha = 2P_1 + 2P_3$, $\alpha = 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 + 2P_4$, $\alpha = 2P_1 + 2P_2 + 2P_4$, $\alpha = 2P_2 + 2P_4$, $\alpha = 2P_2 + 2P_3 + 2P_4$, $\alpha = 2P_3$, $\alpha = 2 + 2P_3$, $\alpha = 2 + 2P_2 + 2P_3 + 2P_4$, $\alpha = 2 + 2P_2 + 2P_4$, $\alpha = 2P_2$, $\alpha = 2P_1 + 2P_2 + 2P_3$, $\alpha = 2P_1 + 2P_3 + 2P_4$, $\alpha = 2P_1$, $\alpha = 2 + 2P_1 + 2P_2$, $\alpha = 2 + 2P_2 + 2P_3$, $\alpha = 2 + 2P_3 + 2P_4$, $\alpha = 2 + 2P_4$, $\alpha = 2$, $\alpha = 2 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_4$, $\alpha = 2 + 2P_1 + 2P_3$, $\alpha = 2 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 + 2P_4$

Teorem 5.3.5 [27] $7 - SP_R$ sembolik 7-plithogenic halka olsun ve $N = N_0 \sum_{i=1}^{7} N_i P_i$, şeklinde tanımlanan N, $7 - SP_R$ içinde bir AHS-ideal (Toplanmış Hiyerarşik Sembolik ideal) olsun. O hâlde, N klasik halka kuramı anlamında da bir idealdir.

İspat: $N \in 7 - SP_R$ içinde iki keyfi eleman: $n = n_0 \sum_{i=1}^{7} n_i P_i$, $n' = n'_0 + \sum_{i=1}^{7} n'_i P_i$ alalım. Bu durumda, farkları: $n - n' = (n_0 - n'_0) \sum_{i=1}^{7} (n_i - n'_i) P_i$

Çünkü N bir AHS-ideal olduğundan çıkarma işlemine göre kapalıdır.

Şimdi keyfi bir eleman: $l = l_0 + \sum_{i=1}^{7} l_i P_i \in 7 - SP_R$.

alalım. Çarpımı: $l \cdot n = l_0 n_0 + \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{7} l_i n_j P_{max(i,j)}$.

Tüm $l_i n_j \in R$ olduğundan, bu toplam da N içinde kalır. Dolayısıyla, N hem çıkarma hem çarpma işlemi altında kapalıdır ve klasik anlamda bir idealdir.

BÖLÜM VI

SONUÇLAR

Sembolik plithogenic halkalar, çoklu öznitelik belirsizliklerini ve çelişkileri, plithogenic küme mantığıyla tutarlı bir şekilde ele alabilmek için titizlikle oluşturulmuş cebirsel bir çerçeve sunar. Bu çalışmada, söz konusu halkaların biçimsel tanımı verilmiş ve şu temel sonuçlar ortaya konulmuştur: Elemanların terslenebilirliği, idempotentliği ve nilpotentliği için gerekli ve yeterli koşullar (hepsi taban halkanın kısmi toplamları üzerinden indirgenebilir biçimdedir) ile halkaların altında yatan yapının R'nin doğrudan toplamı şeklindeki yapısına ilişkin içgörüler sunulmuştur.

Ayrıca, sembolik 2-plithogenic halkalar içerisindeki belirli alt yapılar, AH-idealler, AH-çekirdekler ve AH-izomorfizmalar, detaylı biçimde incelenmiş, her biri bu cebirsel sistemlerin daha derinlemesine yapısal anlaşılması ve sınıflandırılması açısından önemli katkılar sağlamıştır. Her teorem, somut örneklerle desteklenmiş, böylece bu cebirsel yapılarla ilgili sezgisel anlayış da pekiştirilmiştir. Bu sonuçlar göstermektedir ki, motivasyonu yenilikçi olsa da, plithogenic halkalar matematiksel anlamda kontrol edilebilir yapılardır — klasik halka teorisinden çok uzaklaşmazlar, aksine, cebirsel elemanlara mantıksal yapı kazandırmak suretiyle onu zenginleştirirler. Ancak burada vurgulamak istediğim şey şudur: Bir elemana ya da bir önermeye yeni bir tanım getirmek, bu elemanı içeren yapıların tanımının da değişmesine ya da bu elemanın içinde bulunduğu daha büyük yapıların tanımına yeni aksiyomların eklenmesine neden olabilir. Bazı özelliklerle tanımlanan bir eleman ve bu özelliklerin her birinin farklı değerler alması; özellik değerlerinin önem sırasına göre dikkate alınması durumunda, söz konusu elemanın gerçekliğinin algılanması daha güçlü ve mantıklı hale gelir.

Bir özelliğe öncelik verilmesi, bizi genellikten çok detaya ve teoriden çok gerçekliğe yaklaştırır. Çünkü özellik değerleri birbirinden bağımsız olabilir, yani aralarında doğrudan bir ilişki bulunmayabilir. Bu durumda herhangi bir özelliğe önem atfetmek, odağın bu özelliğe yönelmesine ve dolayısıyla elde edilen sonucun daha faydalı ve daha isabetli olmasına yol açar. Elemanın tanımında bir değişiklik söz konusu olduğunda karmaşık cebirsel yapıların incelenmesi kaçınılmaz hale gelir. Ancak burada asıl mesele şudur: Şu anda eleman için kullanılan gösterim olan $\lambda_0 + \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_n p_n$ bizim söz konusu elemanın tanımına dair yürüttüğümüz teorik tartışmanın gerçekliğini ne ölçüde yansıtmaktadır?.

KAYNAKLAR

[1] Aristotle. Metaphysics. Translated by W. D. Ross. Oxford: Clarendon Press, 1924.

[2] ZADEH, Lotfi A. "Fuzzy Sets." Information and Control 8, no. 3 (1965): 338-353.

[3] ATANASSOV, Krassimir. 1986. “Intuitionistic Fuzzy Sets.” Fuzzy Sets and Systems 20 (1): 87–96.

[4] SMARANDACHE, Florentin. Nötrosofik Logic: A Unorthodox View on Paradoxes. Santa Fe: Xiquan, 1999.

[5] SMARANDACHE, Florentin. Plithogenic Set, Logic, Probability, and Statistics. Infinite Study, 2017.

[6] MERKEPCI, Hamiyet, and Mohammad ABOBALA. 2023. “On The Symbolic 2-Plithogenic Rings.” International Journal of Nötrosofik Science 20 (3): 115–122

[7] Al-BASHEER, Othman, Arwa HAHHARI, and Rasha DALLA. 2023. “On The Symbolic 3-Plithogenic Rings and Their Algebraic Properties.” Nötrosofik Sets and Systems 54: 57–67.

[8] HATIP, Ahmed. "Symbolic 4-Plithogenic Rings and 5-Plithogenic Rings." Symmetry 15, no. 8 (2023): 1588.

[9] DEVLIN, Keith. The Joy of Sets: Fundamentals of Contemporary Set Theory. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1993.

[10] WANG, Haibin, Florentin SMARANDACHE, Yanqing Zhang, and Rajshekhar Sunderraman. Single Valued Nötrosofik Sets. In Multispace and Multistructure: Nötrosofik Transdisciplinarity (100 Collected Papers of Science), Vol. IV, edited by Florentin Smarandache, 410–413. Hanko, Finland: North-European Scientific Publishers, 2010.

[11] FRALIEGH, John B. A First Course in Abstract Algebra. 7th ed. Boston: Addison-Wesley, 2002

[12] KANDASAMY, W. B. Vasantha, and Florentin Smarandache. Finite Nötrosofik Complex Numbers. 2011. 89 – 95.
[13] SMARANDACHE, Florentin. "Refined Literal Indeterminacy and the Multiplication Law of Sub-Indeterminacies." Nötrosofik Sets and Systems 9 (2015): 7-9.
[14] Li, QIAOYAN, Yingcang Ma, Xiaohong Zhang, and Juanjuan ZHANG. "Study on the Algebraic Structure of Refined Nötrosofik Numbers." Symmetry 11, no. 8 (2019): 954.
[15] SMARANDACHE, Florentin. "Plithogeny, Plithogenic Set, Logic, Probability, and Statistics." arXiv preprint arXiv:1808.03948 (2018).
[16] SMARANDACHE, Florentin. "Introduction to the Symbolic Plithogenic Algebraic Structures." Nötrosofik Sets and Systems 38 (2020): 1-7.
[17] SMARANDACHE, Florentin. "Single Valued Nötrosofik Sets." Smarandache Notions Journal 10, no. 1-2-3 (2000): 100-104.
[18] AGBOOLA, A.A.A., and M.A. IBRAHIM. "On Symbolic Plithogenic Algebraic Structures and Hyper Structures." Nötrosofik Sets and Systems 56 (2023): 245-250.
[19] SMARANDACHE, Florentin. "Introduction to the Symbolic Plithogenic Algebraic Structures (revisited)." Nötrosofik Sets and Systems 53 (2023): 1-7.
[20] SMARANDACHE, Florentin. "Introduction to the Symbolic Plithogenic Algebraic Structures (revisited)." Nötrosofik Sets and Systems 56 (2023): 245-250.
[21] SMARANDACHE, Florentin. "Introduction to the Symbolic Plithogenic Algebraic Structures (revisited)." Nötrosofik Sets and Systems 53 (2023): 660-664
[22] SMARANDACHE, Florentin. "Introduction to the Symbolic Plithogenic Algebraic Structures (revisited)." Nötrosofik Sets and Systems 53 (2023): 653-665.
[23] PRABAKARAN, P., and Florentin SMARANDACHE. 2023. "On Clean and Nil-Clean Symbolic 2-Plithogenic Rings." Nötrosofik Sets and Systems 59: 298–306.

[24] TAFFACH, Nader MAHMOUD. "An Introduction to Symbolic 2-Plithogenic Vector Spaces Generated from The Fusion of Symbolic Plithogenic Sets and Vector Spaces." Nötrosofik Sets and Systems 48 (2022): 45-54.

[25] ABOBALA, M. "On the Algebraic Homomorphisms Between Symbolic 2-Plithogenic Rings and 2-Cyclic Refined Rings." Nötrosofik Sets and Systems 48 (2022): 45-54.

[26] SANKARI, Hasan, and Mohammad ABOBALA. "On the Algebraic Homomorphisms Between Symbolic 2-Plithogenic Rings and 2-Cyclic Refined Rings." Nötrosofik Sets and Systems 59 (2023): 23-30.

[27] Ben OTHMAN, Khadija, Othman AL-BASHEER, Rama Asad NADWEH, Oliver Von Shtawzen, and Rozina Ali. "On The Symbolic 6-Plithogenic and 7-Plithogenic Rings." Galoitica Journal Of Mathematical Structures And Applications 8, no. 1 (2023): 34-44.

[28] HATIP, Ahmed. "On the Classification of the Group of Units for Some Symbolic m-Plithogenic Rings." Journal of Algebraic Structures and Their Applications 10, no. 2 (2023): 45–58

ÖZGEÇMİŞ

AD	Talib
SOYAD	ALTALİB
YÜKSEK LİSANS	GAZİANTEP
LİSANS	ÜNİVERSİTESİ
LİSE	HALEP ÜNİVERSİTESİ
YAYINLAR:	MÜNBIJ LİSESİ

Olgun, N., Hatip, A., Altalib, T., (2025). symbolic plithogenic groups, Yıldırım Bayezid Uluslararası Bilimsel Araştırma ve İnovasyon Sempozyumu 528-535.

Olgun, N., Hatip, A., Altalib, T., (2025). symbolic plithogenic rings, Yıldırım Bayezid Uluslararası Bilimsel Araştırma ve İnovasyon Sempozyumu 536-545.