

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR
UNIVERSITÉ DE LILLE 1 NORD-DE-FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT

DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES

Espaces Symétriques Compacts,
Quantification et Représentations

Présenté par :
Oğuzhan KAYA

Directeurs :
Johannes HUEBSCHMANN
Gijs TUYNMAN

20 Octobre 2015

Rapporteurs :
Jean-Jacques LOEB
Salah MEHDI

Jury :
Johannes HUEBSCHMANN
Gijs TUYNMAN
Jean-Jacques LOEB
Salah MEHDI
Susumu TANABE

Table des matières

Remerciements	5
Chapitre 1. Introduction	7
Chapitre 2. Formule des caractères de Kirillov	11
2.1. Opérateur de Casimir	11
2.2. Formule intégrale d'Harish Chandra	14
2.3. Volume de Cartan Killing de K/T	25
2.4. La formule de Kirillov	29
Chapitre 3. Quantification des espaces symétriques compacts	37
3.1. Quantification géométrique	37
3.2. Couplage de BKS général	39
3.3. Quantification géométrique et Couplage de BKS pour les espaces symétriques compacts	41
3.4. Couplage dans le cas d'un groupe	57
Chapitre 4. Transformée BKS et théorie des représentations	59
4.1. Décomposition de Peter-Weyl pour les espaces symétriques	59
4.2. Transformée BKS pour les espaces symétriques compacts riemanniens	64
4.3. Le cas des groupes de Lie compacts	67
4.4. Les sphères de dimension impaire $\mathbb{S}^{2k+1}$	69
Annexe A. Discussions sur les systèmes de racines	77
A.1. Décomposition complexe	77
A.2. Décomposition réelle	77
A.3. Espace symétrique dual non compact	78
A.4. Racines restreintes	79
A.5. Deux systèmes de racines	81
Annexe B. Calcul de caractère du groupe $SU(2)$	85
Annexe C. Structure de Lie-Poisson	87
References	90
Annexe. Bibliographie	91

Remerciements

Il me sera vraiment difficile de remercier tout le monde puisque c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme. Je m'excuse dès le début car je suis conscient de ne pas pouvoir mentionner ici toutes les personnes auxquelles je souhaiterais adresser mes remerciements.

Je voudrais tout d'abord remercier grandement mon co-directeur de thèse, Gijs Tuynman, pour toute son aide et sa patience. Je suis ravi d'avoir travaillé en sa compagnie car outre son appui scientifique, il a été toujours là pour me soutenir et me conseiller au cours de la dernière année de ma thèse. Je remercie également mon directeur de thèse, Johannes Huebschmann, pour m'avoir aidé et pour sa patience pendant les 4 premières années de ma thèse ainsi que pour mon année de master. Malgré sa maladie, il a beaucoup fait pour moi.

Je remercie Jean-Jacques Loeb qui m'a fait l'honneur d'être rapporteur de ma thèse, il a pris le temps de m'écouter et de discuter avec moi. Ses remarques m'ont permis d'envisager mon travail sous un autre angle.

Je remercie également Salah Mehdi qui m'a fait l'honneur d'être rapporteur de ma thèse.

Je tiens à remercier Susumu Tanabe pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse.

Je remercie Sigurdur Helgason, Brian Hall et Jacques Faraut pour leurs aides scientifiques.

Je remercie également Muhammed Uludag pour ses encouragements pendant ma thèse.

Je n'oublie pas de remercier Pierre Dèbes qui m'a encouragé et qui m'a aidé beaucoup durant ma thèse.

Je n'oublie pas mes collègues du bureau ainsi que les doctorants pour m'avoir supporté tous les jours depuis plusieurs années : Barnabé, Antonietta, Clément, Karl.

Je remercie beaucoup Cyprienne Kemp qui m'a soutenu et encouragé pendant ma thèse, une personne qui a une place importante dans mon cœur.

Heureusement que ma mère, mon père, mon frère, mes cousines, mes cousins et mes amis sont là pour me changer les idées. Ils ont tous en cru et voilà j'y arrive.

J'en oublie certainement encore et je m'en excuse.

Je dédie cette thèse à ma famille.

CHAPITRE 1

Introduction

Le but de cette thèse est d'étudier certains aspects de la quantification géométrique pour les espaces symétriques compacts riemanniens, et en particulier l'unitarité de la transformée BKS grâce à la théorie de Peter-Weyl.

La quantification géométrique associe à une variété symplectique un espace hilbertien. Lorsqu'on applique la quantification géométrique à un fibré cotangent, nous avons deux choix naturels de polarisation, la polarisation verticale et la polarisation holomorphe. Soit B une variété riemannienne compacte, interprétons B comme sous-espace de l'espace total T^*B du fibré cotangent de B de la façon évidente à l'aide de la section zéro. Étant donnée une variété analytique réelle munie d'une métrique riemannienne analytique réelle, il existe sur le fibré tangent TB au voisinage de la section nulle une structure complexe canonique qui rend kählérienne la forme symplectique standard (transportée du fibré cotangent T^*B au fibré tangent TB via la métrique riemannienne). Ainsi T^*B fournit une complexification de B de telle sorte que T^*B contienne B comme sous-variété totalement réelle, et nous notons cette complexification $B^{\mathbb{C}}$. La variété B et la métrique sont alors nécessairement analytiques, [Gra58], [Shu58], [WB59].

La quantification géométrique sur T^*B par rapport à la polarisation verticale donne l'espace hilbertien $L^2(B, d\lambda)$ des fonctions sur B qui sont de carré intégrable par rapport à la mesure riemannienne $d\lambda$. D'un autre côté, la quantification holomorphe produit une mesure $d\gamma$ sur $B^{\mathbb{C}}$ et donne l'espace hilbertien $\mathcal{H}L^2(B^{\mathbb{C}}, d\gamma)$ des fonctions holomorphes sur $B^{\mathbb{C}}$ qui sont de carré intégrable relativement à $d\gamma$. Le couplage de B(lattner)K(ostant)S(ternberg) entre $\mathcal{H}L^2(B^{\mathbb{C}}, d\gamma)$ et $L^2(B, d\lambda)$ induit un opérateur linéaire entre $\mathcal{H}L^2(B^{\mathbb{C}}, d\gamma)$ et $L^2(B, d\lambda)$ que l'on appelle *transformée de BKS*.

D'autre part, la transformée de Segal-Bargmann est un isomorphisme unitaire

$$(1.0.1) \quad L^2(B, d\lambda) \longrightarrow \mathcal{H}L^2(B^{\mathbb{C}}, d\sigma_t)$$

sur l'espace $\mathcal{H}L^2(B^{\mathbb{C}}, d\sigma_t)$ des fonctions holomorphes de carré intégrable sur $B^{\mathbb{C}}$ relativement à $d\sigma_t$. Cette transformée provient de la théorie de l'équation de la chaleur. La transformée de Segal-Bargmann est donnée par $f \mapsto e^{-t\Delta} f$ où Δ est le Laplacien et $t > 0$ est un paramètre non nul. La fonction f est définie sur B muni de son volume Riemannien, et son image se prolonge en une fonction entière sur le complexifié $B^{\mathbb{C}}$. Stenzel montre que cette transformée est unitaire pour les espaces symétriques compacts pour une certaine mesure sur le complexifié de l'espace symétrique compact, cf. [Ste99].

B. Hall considère le cas où B est un groupe de Lie compact connexe K , muni d'une métrique bi-invariante dans [Hal02]. On rappelle qu'en mécanique, pour un système classique

dont l'espace des configurations est un groupe de Lie compact connexe noté K , l'espace de phases correspond au fibré cotangent T^*K . Les deux quantifications de T^*K avec correction des demi formes relativement aux polarisations verticale et kählérienne aboutissent à deux espaces hilbertiens, $L^2(K)$ et $\mathcal{HL}^2(K^{\mathbb{C}})$ respectivement. Hall a montré que le noyau de BKS est égal, à une constante près, au noyau de la chaleur, d'où les deux mesures qui en résultent $d\sigma_t$ et $d\gamma$ ne se distinguent que par une constante positive ; il en déduit que la transformée de BKS coïncide, à une constante près, avec l'inverse de la transformée de Segal-Bargmann généralisée qu'il a introduite et développée, voir e.g. [Hal94, Hal02]. Ce raisonnement entraîne que le couplage BKS est unitaire (à une constante positive près).

Dans le cas des groupes de Lie compacts, Huebschmann donne dans [Hue08] une autre preuve du résultat de Hall en utilisant un raisonnement géométrique qui repose sur une extension de la formule des caractères de Kirillov sur une algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ d'un groupe de Lie compact K vers une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie complexe réductif G . Pour un groupe de Lie compact K , Huebschmann utilise la méthode des orbites pour montrer que la transformée du couplage de BKS, multipliée par une constante adaptée déterminée par le volume gaussien dans la direction imaginaire du groupe complexifié, est unitaire. Pour cela, Huebschmann établit d'abord un théorème de Peter-Weyl pour les fonctions holomorphes sur $K^{\mathbb{C}}$ par rapport à la mesure qui vient de la quantification de demi-formes, et il démontre ensuite que la transformée de BKS entre l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes sur $K^{\mathbb{C}}$ qui en résulte et l'espace de Hilbert ordinaire des fonctions L^2 sur K , multipliée par une constante près, est unitaire. L'outil principal dans ce raisonnement est la formule des caractères de Kirillov.

L'idée principale est d'établir l'unitarité de la transformée de BKS une fois restreinte aux fonctions représentatives sur K et $K^{\mathbb{C}}$, puis de déduire l'unitarité à toutes les fonctions de $L^2(K)$ et $\mathcal{HL}^2(K^{\mathbb{C}})$ par densité, ceci à l'aide de la formule des caractères de Kirillov. La densité est donnée dans le cas de $L^2(K)$ par le théorème classique de Peter-Weyl pour K et dans le cas de $\mathcal{HL}^2(K^{\mathbb{C}})$ par le théorème de Peter-Weyl holomorphe. Ce dernier est démontré par Huebschmann dans *loc. cit.*. Cette méthode implique que l'unitarité de la transformée de BKS est indépendante de la théorie de l'équation de la chaleur. Ceci résout le mystère de l'unitarité de la transformée de BKS car cette dernière est une incarnation de la formule des caractères.

Nous étudions l'unitarité de la transformée BKS pour les espaces symétriques compacts riemanniens par une méthode qui est légèrement différente de celle de Huebschmann. Nous utilisons la théorie de Peter-Weyl et la formule des caractères de Kirillov pour le cas des groupes de Lie compacts comme dans [Hue08] mais dans le cas d'un espace symétrique compact riemannien, nous ne pouvons pas utiliser la formule de caractères de Kirillov puisque nous tombons sur les fonctions sphériques plutôt que les caractères. Nous montrons ensuite que la transformée BKS pour un espace symétrique compact riemannien quelconque n'est pas toujours unitaire grâce au contre-exemple de la sphère $\mathbb{S}^5$. Lorsqu'on applique la méthode de Hall dans cet exemple (noyau de la chaleur et transformée de Segal-Bargmann), la mesure de la chaleur ne coïncide pas (à une constante près) avec la mesure de la quantification holomorphe.

La première partie de cette thèse est consacrée à une démonstration de l’extension de la formule des caractères de Kirillov vers une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d’un groupe de Lie complexe réductif G . Nous établissons une démonstration complète de la formule des caractères de Kirillov pour une représentation de dimension finie d’un groupe de Lie connexe semisimple complexe telle qu’elle a été utilisée dans [Hue08]. Pour un groupe de Lie connexe réel adapté, dans le cadre de la théorie des orbites, cette formule fournit une expression du caractère d’une représentation unitaire de dimension finie par intégration relativement à la mesure de Liouville sur l’orbite coadjointe qui caractérise la représentation. Cette formule remonte à [Kir68]. Dans le travail cité on trouve, entre autre, une démonstration de la formule pour un groupe de Lie connexe semisimple compact. Cette démonstration repose sur la formule des caractères de Weyl et sur une formule intégrale d’Harish-Chandra [HC57]. Dans [Hue08], pour une représentation de dimension finie d’un groupe de Lie connexe semisimple complexe, la formule des caractères de Kirillov a été déduite de celle pour une représentation unitaire de dimension finie d’un groupe de Lie connexe semisimple compact à l’aide de l’observation qu’un sous-groupe compact maximal d’un groupe de Lie connexe semisimple complexe est Zariski dense. Nous montrons ici que le raisonnement original de Kirillov établit la formule des caractères également pour une représentation de dimension finie d’un groupe de Lie connexe semisimple complexe.

Dans le chapitre 3, nous traitons la quantification géométrique dans le cas d’un fibré cotangent et on applique la théorie à un espace symétrique compact riemannien. Pour un fibré cotangent, la quantification verticale existe toujours. La quantification holomorphe repose sur un choix de structure complexe et nous identifions alors le fibré cotangent avec le complexifié de la variété de base. Nous rappelons quelques résultats sur les espaces symétriques et quelques exemples. Dans le cas des espaces symétriques compacts riemannien, la structure complexe canonique est définie globalement et coïncide avec la structure complexe du complexifié de l’espace symétrique compact riemannien. Nous exprimons un couplage de BKS ainsi qu’une transformée BKS formelle entre les espaces hilbertiens qui viennent de la quantification holomorphe et verticale pour les espaces symétriques compacts riemanniens. Nous rappelons également le cas particulier des groupes de Lie compacts.

Dans le dernier chapitre, nous expliquons notre méthode pour étudier l’unitarité de la transformée BKS pour les espaces symétriques compacts riemanniens. Dans cette méthode, pour un espace symétrique compact riemannien quelconque, nous utilisons la théorie de Peter-Weyl pour réduire le problème aux composantes isotypiques. Le lemme de Schur permet ainsi de réduire le problème aux fonctions sphériques. Pour les groupes de Lie compacts, les fonctions sphériques correspondent aux caractères et on utilise la formule des caractères de Kirillov pour déduire l’unitarité pour les groupes de Lie compact. Nous ne pouvons pas utiliser la formule des caractères de Kirillov pour les espaces symétriques compacts quelconques. Nous rappelons les exemples des sphères $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^3$. Nous montrons ensuite que la transformée BKS n’est pas toujours unitaire pour les espaces symétriques compacts riemanniens par le contre exemple de la sphère $\mathbb{S}^5$. À la fin de ce chapitre, nous nous intéressons également à l’unitarité asymptotique.

Dans les appendices, nous rappelons certains résultats techniques sur les systèmes des racines restreintes. Nous donnons de plus un exemple pour la formule de caractère de Kirillov, le groupe de Lie $SU(2)$.



CHAPITRE 2

Formule des caractères de Kirillov

La méthode des orbites introduite par Kirillov est un paradigme important en théorie des représentations, voir [Kir99]. Elle permet d'établir une correspondance entre les (classes de) représentations irréductibles unitaires d'un groupe de Lie donné et certaines orbites coadjointes. En pratique, cette méthode fonctionne de manière idéale dans le cas des groupes nilpotents, s'adapte au cas des groupes compacts mais pose encore des problèmes avec les groupes semisimples non-compacts, voir [Kir99]. Ce qu'on appelle *formule des caractères de Kirillov* dans la littérature est une façon de réaliser, du moins en partie, la méthode des orbites pour les groupes de Lie compacts connexes. Plus précisément, cette formule permet de déterminer le caractère de la représentation associée à une orbite coadjointe donnée à l'aide d'une certaine intégrale.

L'objet de ce chapitre est de démontrer la formule des caractères de Kirillov, cf. Théorème 2.4.26. On commence par des rappels à propos de l'opérateur de Casimir sur une algèbre de Lie qui va servir dans la démonstration d'une formule intégrale d'Harish-Chandra. Nous rappelons dans la Section 2.2 un énoncé précis de l'intégrale d'Harish Chandra ainsi qu'une démonstration en suivant la mise en forme de Pukánszky [Puk67], voir aussi [Hel84, HC57]. L'idée principale est de regarder l'intégrale d'Harish Chandra comme une intégrale sur une orbite coadjointe. La formule des caractères de Kirillov s'obtient alors en injectant la formule des caractères de Weyl dans l'intégrale d'Harish Chandra, puis en utilisant le fait que sur une orbite coadjointe d'un groupe de Lie compact les mesures de Liouville et de Cartan-Killing coïncident à homothétie près. Il suffit enfin d'ajuster les constantes qui interviennent, c'est l'objet de la Section 2.3. Le raisonnement présenté ici suit à peu de choses près l'original de Kirillov [Kir68].

2.1. Opérateur de Casimir

Dans cette partie nous rappelons l'opérateur de Casimir ainsi que l'élément de Casimir pour un espace vectoriel de dimension finie. On commence par des rappels à propos des opérateurs différentiels invariants à gauche. On travaille en particulier avec une algèbre symétrique $\mathcal{S}(\mathfrak{k})$ sur une algèbre de Lie $\mathfrak{k}$.

PRÉLIMINAIRE 2.1.1. Soient G un groupe de Lie semisimple complexe connexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soient K un sous-groupe compact maximal et $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie. G s'identifie également au complexifié $K^{\mathbb{C}}$ de K et $\mathfrak{g}$ au complexifié $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{k}$. Soit T un tore maximal dans K et $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{k}$ son algèbre de Lie. Alors le complexifié $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{t}$ s'identifie à une algèbre de Cartan dans $\mathfrak{g}$ que nous notons $\mathfrak{h}$. Nous désignons le groupe de Weyl qui en

résulte par W . Notons

$$B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}, \quad B(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g},$$

la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et désignons la forme $-B$ par

$$\cdot : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Puisque $\mathfrak{k}$ est compact et semi-simple la forme de Killing sur $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$ est forcément définie négative.

Choisissons une base $v_1, \dots, v_n$ de $\mathfrak{k}$ et interprétons les v_j comme fonctions linéaires $v_j: \mathfrak{k}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{S}[\mathfrak{k}]$ resp. $\mathcal{S}[\mathfrak{g}]$ l'algèbre symétrique réelle sur $\mathfrak{k}$ resp. l'algèbre symétrique complexe sur $\mathfrak{g}$; ainsi $\mathcal{S}[\mathfrak{k}] \cong \mathbb{R}[v_1, \dots, v_n]$, l'algèbre des polynômes réels en $v_1, \dots, v_n$ et $\mathcal{S}[\mathfrak{g}] \cong \mathbb{C}[v_1, \dots, v_n]$, l'algèbre des polynômes complex en $v_1, \dots, v_n$; ainsi un polynôme s'identifie à une fonction polynomiale sur $\mathfrak{k}^*$ resp. $\mathfrak{g}^*$.

Pour un $X \in \mathfrak{k}$, notons ξ_X le champs de vecteurs invariant à gauche obtenu par translation de X sur K . Notons ∂_X l'opérateur différentiel invariant à gauche défini pour une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(K)$ par la formule suivante :

$$(2.1.2) \quad (\partial_X f)(k) = \mathcal{L}_{\xi_X}(f \circ L_k)(e) = \frac{d}{dt} f(k \exp(tX))|_{t=0}$$

où L_k est la translation à gauche par k et $\mathcal{L}_{\xi_X}$ est la dérivée de Lie par rapport à ξ_X . Par récurrence, nous avons

$$(2.1.3) \quad (\partial_X^m f)(k) = \left(\frac{d}{dt} \right)^m f(k \exp(tX))|_{t=0}.$$

Notons $\mathcal{F}(\mathfrak{k})$ l'algèbre des opérateurs différentiels invariant à gauche (par translation à gauche). Par la définition (2.1.2), il est évident que $\partial_X \in \mathcal{F}(\mathfrak{k})$ et de degré 1. Pour deux champs de vecteurs quelconques ξ, η sur une variété, nous avons

$$\mathcal{L}_{[\xi, \eta]} = \mathcal{L}_\xi \circ \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \circ \mathcal{L}_\xi,$$

et lorsque $X, Y \in \mathfrak{k}$, on constate que ∂ est une représentation d'algèbre de Lie, càd,

$$\partial_{[X, Y]} = \partial_X \partial_Y - \partial_Y \partial_X.$$

On travaille en particulier avec l'algèbre symétrique $\mathcal{S}(\mathfrak{k})$. L'application linéaire

$$\partial: \mathfrak{k} \rightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{k})$$

peut s'étendre à l'algèbre symétrique $\mathcal{S}(\mathfrak{k})$ que l'on appelle la symétrisation d'Harish-Chandra, voir e.g. [JL01] p.38. Lorsque $\partial_{X_1}, \dots, \partial_{X_p}$ commutent, nous avons

$$\mathcal{S}(\partial)(X_1 \dots X_p) = \partial_{X_1} \dots \partial_{X_p}.$$

En particulier, $\mathcal{S}(\partial)(X^m) = \partial_X^m$. Nous avons le théorème suivant qui va nous donner l'opérateur différentiel pour un polynôme $p \in \mathcal{S}(\mathfrak{k})$.

THÉOREME 2.1.4. *L'homomorphisme linéaire d'Harish-Chandra*

$$\mathcal{S}(\partial) = \partial: \mathcal{S}(\mathfrak{k}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathfrak{k})$$

est un isomorphisme. Lorsque $\{X_1, \dots, X_n\}$ constitue une base de $\mathfrak{k}$, et pour $p \in \mathcal{S}(\mathfrak{k})$, nous avons

$$(\partial_p f)(k) = p(\partial_1, \dots, \partial_n) f(k \exp(t_1 X_1 + \dots t_n X_n))|_{(t)=0}$$

où $f \in \mathcal{C}^\infty(K)$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial t_j}$ et $(t) = (t_1, \dots, t_n)$, voir e.g. [JL01, p.38].

Nous allons écrire le polynôme de Casimir pour un espace vectoriel de dimension finie. Ensuite nous allons écrire l'opérateur de Casimir ainsi que le polynôme de Casimir pour une algèbre de Lie.

Soit maintenant V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps de caractéristique zéro. Notons $B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique non singulier sur V . Alors, lorsque B' désigne la transformation suivante

$$(2.1.5) \quad B': V \rightarrow V^*, X \mapsto B'(X)(Y) = B(X, Y) \quad Y \in V,$$

nous obtenons un isomorphisme entre V et le dual V^* et un isomorphisme

$$\mathcal{S}[V] \rightarrow \mathcal{S}[V^*]$$

où $\mathcal{S}[V^*]$ vu comme une algèbre des fonctions polynômes sur V .

Soient $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de V et $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ la base duale associée dans V^* . Nous pouvons ainsi définir la base B -duale $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ de V , telle que

$$B(v_j, v'_k) = \delta_{j,k}$$

où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker.

Rappelons ensuite un isomorphisme unique

$$V \otimes V^* \rightarrow \text{End}(V)$$

tel que pour $v \in V$ et $\lambda \in V^*$, l'élément correspondant $h_{v,\lambda} \in \text{End}(V)$ soit donné par

$$h_{v,\lambda}(w) = \lambda(w)v, \quad w \in V.$$

Dans le produit tensoriel $V \otimes V^* \cong \text{End}(V)$, l'élément correspondant à l'identité dans $\text{End}(V)$ est donné par

$$\sum_k v_k \otimes \lambda_k.$$

Tous les éléments de cette forme sont égaux dans le produit tensoriel $V \otimes V^*$. En utilisant l'isomorphisme linéaire (2.1.5) $B': V \rightarrow V^*$, il s'ensuit que lorsque $\{v_k\}, \{v'_k\}$ et $\{w_k\}, \{w'_k\}$ sont les paires consistant des bases et leurs bases B -duales, nous avons l'égalité suivante dans le produit tensoriel $V \otimes V$

$$\sum_k v_k \otimes v'_k = \sum_k w_k \otimes w'_k.$$

Une base quelconque détermine sa base B -duale uniquement. En particulier, lorsqu'on choisit $w_k = v'_k$ et $w'_k = v_k$, nous obtenons

$$\sum_k v_k \otimes v'_k = \sum_k v'_k \otimes v_k.$$

LEMME 2.1.6. *L'élément dans l'algèbre tensorielle*

$$\sum_k v_k \otimes v'_k$$

est indépendant du choix de base $\{v_j\}$. L'élément de l'algèbre symétrique

$$\mu = \sum_{k=1}^n v_k v'_k$$

ne dépend pas du choix de base. (Voir e.g. p.261 [JL01])

Cet élément μ s'appelle polynôme de Casimir qui représente la forme quadratique associée à B sous l'isomorphisme de V et V^* induit par B' .

Écrivons le polynôme de Casimir dans le cas d'une algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ au lieu de V et en utilisant le négative de la forme de Killing $\cdot$ à la place de la forme bilinéaire B ci-dessus.

Soit maintenant

$$\mu(X) = B(X, X)$$

le polynôme de Casimir. Pour le polynôme de Casimir μ , notons ∂_μ l'opérateur de Casimir qui agit comme le Laplacien complexe, un opérateur différentiel K -invariant, sur K/T .

En utilisant la base de $\mathfrak{k}$ et la base B -duale de $\mathfrak{k}^*$, écrivons l'opérateur de Casimir ∂_μ par :

PROPOSITION 2.1.7. *Pour une base quelconque $\{v_k\}$ de $\mathfrak{k}$ avec la base B -duale $\{v'_k\}$, nous avons*

$$\partial_\mu = \sum \partial_{v_k} \partial_{v'_k}.$$

(Voir e.g. p.262 [JL01])

2.2. Formule intégrale d'Harish Chandra

Dans cette partie, nous démontrons la formule intégrale d'Harish-Chandra suivante :

$$(2.2.1) \quad \zeta(H)\zeta(H') \int_K e^{B(yH, H')} dy = w^{-1} \partial_\zeta(\zeta) \sum_{s \in W} \varepsilon(s) e^{B(sH, H')}.$$

Nous allons expliquer les significations des notations dans la suite.

PRÉLIMINAIRE 2.2.2. Notons S^1 le cercle unité muni de la structure de groupe abélien. Soit T un tore réel et notons $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie. Rappelons qu'un *poids* d'une représentation complexe V de T est un homomorphisme $\vartheta: T \rightarrow S^1$ tel que *l'espace de poids* associé

$$V(\vartheta) = \{v \in V; xv = \vartheta(x)v, x \in T\}$$

soit non trivial. Une application $\mathbb{R}$ -linéaire $\Theta: \mathfrak{t} \rightarrow i\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ est un *poids infinitésimal* lorsque l'espace de poids

$$V(\Theta) = \{v \in V; Xv = \Theta(X)v, X \in \mathfrak{t}\}$$

est non trivial; de même, une application $\mathbb{C}$ -linéaire $\Phi: \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ est un *poids infinitésimal complexe* lorsque l'espace de poids associé

$$V(\Phi) = \{v \in V; Xv = \Phi(X)v, X \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\}$$

est non trivial.

PRÉLIMINAIRE 2.2.3. Rappelons que les *racines* sont les poids infinitésimaux de la représentation adjointe de K resp. G , restreinte à T resp. $T^{\mathbb{C}}$. Nous notons R le système des racines *réelles* déterminées par le choix de T . Nous convenons d'écrire ces racines de telle sorte que, étant donné $Z \in \mathfrak{t}$ et un élément A appartenant à l'espace radiciel $\mathfrak{k}_{\alpha}$ associé à la racine α , la valeur $[Z, A]$ du crochet de Lie s'écrit sous la forme

$$(2.2.4) \quad [Z, A] = i\alpha(Z)A;$$

c'est à dire, l'espace radiciel $\mathfrak{k}_{\alpha} = \{A \in \mathfrak{k} | [Z, A] = i\alpha(Z)A, \text{ pour tout } Z \in \mathfrak{t}\}$. Ainsi la racine α est une forme linéaire réelle sur $\mathfrak{t}$, i. e. appartient à l'espace dual réel $\mathfrak{t}^* = \text{Hom}(\mathfrak{t}, \mathbb{R})$ de $\mathfrak{t}$. Nous choisissons une chambre de Weyl dominante $C^+ \subseteq \mathfrak{t}^*$ et notons R^+ le système de racines positives qui en résulte et

$$(2.2.5) \quad \rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha \in \text{Hom}(\mathfrak{t}, \mathbb{R}) = \mathfrak{t}^*$$

le *vecteur de Weyl* associé au choix de chambre de Weyl dominante.

Dans la suite, $I[\mathfrak{g}]$ désigne la sous-algèbre formée des éléments G -invariants de $S[\mathfrak{g}]$. Lorsque f est une fonction sur $\mathfrak{g}$, notons $\bar{f}$ la projection de f à $\mathfrak{h}$ par rapport à la décomposition radicielle suivante :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R(\mathbb{C})} \mathfrak{g}^{\alpha}$$

où $\mathfrak{g}^{\alpha}$ est l'espace radiciel et la somme est directe, cf. l'Appendice A. Nous avons ainsi

$$\mathfrak{h}^{\perp} = \bigoplus_{\alpha \in R(\mathbb{C})} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

Déterminons la projection de ∂_{μ} à $\mathfrak{h}$. Soit $R(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des racines complexes définie par $\alpha: \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ poids infinitésimal complexe de la représentation adjointe de G restreinte à $T^{\mathbb{C}}$. Pour $\alpha \in R(\mathbb{C})$, notons H_{α} le vecteur dans $\mathfrak{h}$ satisfait à

$$B(H_{\alpha}, H) = \alpha(H) \quad (H \in \mathfrak{h}).$$

Sur l'espace $\mathfrak{t} = \sum_{\alpha \in R(\mathbb{C})} \mathbb{R}H_{\alpha} \subset \mathfrak{h}$, toutes les racines sont à valeurs réelles.

La proposition suivante nous donne la restriction de l'opérateur de Casimir ∂_{μ} à l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.

PROPOSITION 2.2.6. *Nous avons*

$$\overline{\partial}_\mu = \prod_{\alpha \in R^+} \alpha^{-1} \partial_{\overline{\mu}} \circ \prod_{\alpha \in R^+} \alpha.$$

(Voir e.g. [Hel84] p.271-272)

PREUVE. Choisissons un élément $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ ($\alpha \in R(\mathbb{C})$) tel que $B(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$. En utilisant l'invariance de la forme de Killing, nous avons

$$B([X_\alpha, X_{-\alpha}], H) = B(X_\alpha, [X_{-\alpha}, H]) = B(X_\alpha, X_{-\alpha})B(H_\alpha, H)$$

pour tout $H \in \mathfrak{h}$. Ainsi, nous écrivons

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha.$$

Puisque $B(X_\alpha, X_\beta) = 0$ lorsque $\alpha, \beta \in R(\mathbb{C})$, $\alpha + \beta \neq 0$, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\partial_\mu = \partial_{\overline{\mu}} + \sum_{\alpha \in R(\mathbb{C})} X_\alpha X_{-\alpha}.$$

Nous montrons maintenant comment on obtient cette dernière égalité. Considérons une fonction polynôme

$$\xi = \mu - \overline{\mu} - \sum_{\alpha \in R(\mathbb{C})} X_\alpha X_{-\alpha}.$$

À l'aide de la décomposition radicielle, nous pouvons écrire un élément X de $\mathfrak{g}$ sous la forme

$$X = H + \sum_{\alpha \in R^+} (c_\alpha X_\alpha + c_{-\alpha} X_{-\alpha}) \quad (H \in \mathfrak{h}, c_\alpha, c_{-\alpha} \in \mathbb{C}).$$

Ensuite, en utilisant l'orthogonalité $\mathfrak{h}^\perp = \bigoplus_{\alpha \in R(\mathbb{C})} \mathfrak{g}^\alpha$, c'est-à-dire, $B(X_\alpha, H) = 0$ pour $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $H \in \mathfrak{h}$, nous avons

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \text{tr}(\text{ad}_X)^2 = \text{tr}(\text{ad}_{H + \sum_{\alpha \in R^+} (c_\alpha X_\alpha + c_{-\alpha} X_{-\alpha})})^2 \\ &= \text{tr}(\text{ad}_H + \sum_{\alpha \in R^+} (c_\alpha \text{ad}_{X_\alpha} + c_{-\alpha} \text{ad}_{X_{-\alpha}}))^2 \\ &= \text{tr}(\text{ad}_H)^2 + 2 \sum_{\alpha \in R^+} c_\alpha c_{-\alpha} \\ &= \text{tr}(\text{ad}_H)^2 + \sum_{\alpha \in R(\mathbb{C})} c_\alpha c_{-\alpha}. \end{aligned}$$

Si nous restreignons μ à $\mathfrak{h}$, nous avons

$$\overline{\mu}(X) = \text{tr}(\text{ad}_H)^2 \quad X = H \in \mathfrak{h}.$$

Ensuite, pour une racine $\beta \in R$ quelconque, en utilisant le fait que

$$\begin{cases} B(X_\alpha, X_\beta) = 1 & \text{lorsque } \alpha = -\beta \\ B(X_\alpha, X_\beta) = 0 & \text{lorsque } \alpha \neq -\beta \end{cases},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
B(X, X_\beta) &= B(H + \sum_{\alpha \in R^+} (c_\alpha X_\alpha + c_{-\alpha} X_{-\alpha}), X_\beta) \\
&= B(H, X_\beta) + \sum_{\alpha \in R^+} c_\alpha B(X_\alpha, X_\beta) + \sum_{\alpha \in R^+} c_{-\alpha} B(X_{-\alpha}, X_\beta) \\
&= 0 + c_{-\beta}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\xi(X) &= \mu(X) - \bar{\mu}(X) - 2 \sum_{\alpha \in R^+} B(X_\alpha, X) B(X_{-\alpha}, X) \\
&= \text{tr}(\text{ad}_H)^2 + 2 \sum_{\alpha \in R^+} c_\alpha c_{-\alpha} - \text{tr}(\text{ad}_H)^2 - 2 \sum_{\alpha \in R^+} c_\alpha c_{-\alpha} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nous en tirons

$$\mu = \bar{\mu} + \sum_{\alpha \in R(\mathbb{C})} X_\alpha X_{-\alpha}.$$

Ainsi, si nous confondons μ et ∂_μ à l'aide de l'identification par $B(\cdot, \cdot)$, nous écrivons

$$\partial_\mu = \partial_{\bar{\mu}} + 2 \sum_{\alpha \in R^+} X_\alpha X_{-\alpha} = \partial_{\bar{\mu}} + \sum_{\alpha \in R(\mathbb{C})} X_\alpha X_{-\alpha}.$$

D'un autre côté, soit $H \in \mathfrak{h}$ régulier et supposons que f soit une fonction analytique localement invariante dans un voisinage de H dans $\mathfrak{g}$. Alors, pour une racine $\alpha \in R(\mathbb{C})$, nous avons

$$f(e^{\text{ad}_{(sX_\alpha + tX_{-\alpha})}} H) = f(H)$$

pour s et t suffisamment petits. En développant $\exp$ en série entière, nous avons

$$\begin{aligned}
e^{\text{ad}_{(sX_\alpha + tX_{-\alpha})}} H &= (1 + \text{ad}_{(sX_\alpha + tX_{-\alpha})} + \frac{(\text{ad}_{(sX_\alpha + tX_{-\alpha})})^2}{2!} + \dots) H \\
&= H + X(s, t)(H).
\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$f(H + X(s, t)(H)) = f(H),$$

et par la formule de Taylor (6) dans [Hel01, p.105], nous avons

$$(2.2.7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (X(s, t)^n f)(H) = f(H).$$

Le membre de gauche dans (2.2.7) étant une série en s et t , tous les coefficients de $s^k t^l$ sont nuls sauf pour $k = l = 0$. On cherche à remplacer le terme $X_\alpha X_{-\alpha}$ par un terme plus

convenable. C'est pour cela que nous regardons en particulier les coefficients de st dans l'égalité précédente. Écrivons

$$X(s, t)(H) = [sX_\alpha + tX_{-\alpha}, H] + \frac{1}{2}[sX_\alpha + tX_{-\alpha}, [sX_\alpha + tX_{-\alpha}, H]] + \dots$$

Puisque les coefficients de st pour $n > 2$ sont nuls, nous calculons seulement pour $n \leq 2$ dans (2.2.7).

Pour $n = 1$, $X(s, t)$ nous donne le coefficient

$$\frac{1}{2}[X_{-\alpha}, [X_\alpha, H]] + \frac{1}{2}[X_\alpha, [X_{-\alpha}, H]],$$

et pour $n = 2$, $\frac{1}{2}(X(s, t))^2$ nous donne le coefficient

$$[X_\alpha, H][X_{-\alpha}, H].$$

En utilisant ces coefficients dans (2.2.7), nous obtenons

$$((\alpha(H)^2 X_\alpha X_{-\alpha} - \alpha(H) H_\alpha) f)(H) = 0.$$

Ensuite,

$$\alpha(H)^2 X_\alpha X_{-\alpha} = \alpha(H) H_\alpha \text{ (pour } H \in \mathfrak{h} \text{ régulier)}$$

ce qui implique

$$X_\alpha X_{-\alpha} = \alpha^{-1} H_\alpha.$$

Nous en tirons

$$\overline{\partial}_\mu = \partial_{\bar{\mu}} + 2 \sum_{\alpha \in R^+} \alpha^{-1} H_\alpha.$$

Dans la suite, nous considérons ∂_μ comme un opérateur laplacien complexe. En appliquant les deux propriétés suivantes de l'opérateur de Laplace-Beltrami L (qui est valable pour ∂_μ également) et de gradient d'une fonction :

$$(1) \text{ gradu}(v) = \text{grad}v(u) = \langle \text{grad}u, \text{grad}v \rangle$$

$$(2) L(uv) = u(Lv) + 2\langle \text{grad}u, \text{grad}v \rangle + v(Lu)$$

où $u, v \in C^\infty(\mathfrak{g})$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \prod_{\alpha \in R^+} \alpha^{-1} \partial_{\bar{\mu}} \left(\prod_{\alpha \in R^+} \alpha \right) f \\ &= \prod_{\alpha \in R^+} \alpha^{-1} \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \partial_{\bar{\mu}} f + \prod_{\alpha \in R^+} \alpha^{-1} (\partial_{\bar{\mu}} \prod_{\alpha \in R^+} \alpha) f + 2 \prod_{\alpha \in R^+} \alpha^{-1} \text{grad} \left(\prod_{\alpha \in R^+} \alpha \right) f \\ &= \partial_{\bar{\mu}} f + \prod_{\alpha \in R^+} \alpha^{-1} (\partial_{\bar{\mu}} \prod_{\alpha \in R^+} \alpha) f + 2 \text{grad}(\log \prod_{\alpha \in R^+} \alpha) f. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\text{grad}(\log \prod_{\alpha \in R^+} \alpha) &= \sum_{\alpha \in R^+} \text{grad}(\log \alpha) \\
&= \sum_{\alpha \in R^+} \alpha^{-1} H_\alpha.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\partial_{\bar{\mu}}(\prod_{\alpha \in R^+} \alpha) = 0$, nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
\overline{\partial_\mu f} &= \partial_{\bar{\mu}} f + (2 \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha^{-1} H_\alpha) f \\
&= \prod_{\alpha \in R^+} \alpha^{-1} \partial_{\bar{\mu}} (\prod_{\alpha \in R^+} \alpha) f
\end{aligned}$$

pour toute f . Nous obtenons ainsi

$$\overline{\partial_\mu} = \prod_{\alpha \in R^+} \alpha^{-1} \partial_{\bar{\mu}} \circ \prod_{\alpha \in R^+} \alpha$$

ce qui nous donne l'énoncé de la proposition 2.2.6 comme cherché. $\square$

Soient $\mathcal{F}(\mathfrak{g}) \subset \text{Diff}(\mathfrak{g})$ resp. $\mathcal{F}(\mathfrak{h}) \subset \text{Diff}(\mathfrak{h})$ les sous-algèbres G -invariante resp. W -invariante. Étant donnés deux opérateurs différentiels D_1, D_2 , écrivons

$$\{D_1, D_2\} = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1.$$

Considérons les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned}
\mu: \text{Diff}(\mathfrak{g}) &\rightarrow \text{Diff}(\mathfrak{g}), \quad D \mapsto \frac{1}{2} \{\partial_\mu, D\} \\
\bar{\mu}: \text{Diff}(\mathfrak{h}) &\rightarrow \text{Diff}(\mathfrak{h}), \quad d \mapsto \frac{1}{2} \{\overline{\partial_\mu}, d\}.
\end{aligned}$$

Comme la restriction à $\mathfrak{h}$ est un homomorphisme de $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ vers $\mathcal{F}(\mathfrak{h}')$ où $\mathfrak{h}'$ est l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{h}$, nous avons

$$(2.2.8) \quad \overline{\mu(D)} = \bar{\mu}(\overline{D}), \quad D \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}).$$

LEMME 2.2.9. *Soit p un polynôme homogène de degré m sur $\mathfrak{g}$. En considérant p comme un opérateur différentiel $f \mapsto pf$, nous avons*

$$\mu^m(p) = m! \partial_p.$$

PREUVE. La démonstration se fait par récurrence sur m . Pour $m = 1$, un calcul facile nous montre que

$$\mu(p) = \partial_p.$$

Dans le cas où $m = 1$, notons $p = X$ et voyons que pour $D = \partial_X = \frac{d}{dx}$, à l'aide de la proposition (2.1.7), nous obtenons

$$\partial_\mu = DD.$$

Ensuite, calculons la dérivée suivante

$$\begin{aligned} D(D(Xf(x))) &= D(f(x) + X(Df)(x)) \\ &= (Df)(x) + (Df)(x) + X(D(Df))(x) \\ &= 2(Df)(x) + X(DDf)(x). \end{aligned}$$

De cette égalité, nous en tirons

$$(DD(Xf)) - X(DDf) = 2Df$$

et nous avons donc

$$\mu(p) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \circ p - p \circ \partial_\mu) = \partial_p.$$

Soit $p = x_1 \cdots x_m$. Puisque $\mu^2(x_k) = \mu(\mu(x_k)) = \mu(\partial_{x_k}) = 0$, la loi de Leibniz pour les dérivées implique

$$\mu^m(x_1 \cdots x_{m-1}x_m) = \mu^m(x_1 \cdots x_{m-1}) \circ x_m + m\mu^{m-1}(x_1 \cdots x_{m-1}) \circ \mu(x_m).$$

Pour $m-1$, par récurrence, nous avons

$$\mu^{m-1}(x_1 \cdots x_{m-1}) = (m-1)!\partial_{x_1 \cdots x_{m-1}}.$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \mu^m(x_1 \cdots x_{m-1}) \circ x_m &= \mu(\mu^{m-1}(x_1 \cdots x_{m-1})) \circ x_m \\ &= \mu((m-1)!\partial_{x_1 \cdots x_{m-1}}) \circ x_m \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mu^m(x_1, \cdots x_{m-1}x_m) &= m \cdot (m-1)!\partial_{x_1 \cdots x_{m-1}}\partial_{x_m} \\ &= m!\partial_{x_1 \cdots x_m} \end{aligned}$$

comme cherché. □

Lorsque $p \in I(\mathfrak{g}^*)$, l'opérateur différentiel ∂_p est un opérateur différentiel à coefficients constants G -invariant sur $\mathfrak{g}$. Maintenant, généralisons la proposition 2.2.6 pour un polynôme $p \in I(\mathfrak{g}^*)$ qui va servir dans la preuve du Théorème 2.2.17.

THÉORÈME 2.2.10. *Pour $p \in I(\mathfrak{g}^*)$, nous avons*

$$\overline{\partial_p} = \prod_{\alpha \in R^+} \alpha^{-1} \partial_{\bar{p}} \circ \prod_{\alpha \in R^+} \alpha.$$

(Voir e.g. [Hel84] p.326)

PREUVE. La démonstration repose sur un calcul du commutateur avec le Laplacien ∂_μ . Si on applique le Lemme 2.2.9 à l'équation (2.2.8), nous obtenons

$$m!\overline{\partial_p} = \overline{\mu^m(p)} = \bar{\mu}^m(\bar{p}).$$

Maintenant, changeons les notations pour simplifier. Soit A une algèbre associative quelconque et $a \in A$. Posons

$$d_a(b) = \frac{1}{2}(ab - ba).$$

Par récurrence sur k , nous avons

$$d_a^k(b) = 2^{-k} \sum_0^k \binom{k}{r} (-1)^r a^{k-r} b a^r.$$

Supposons que $c \in A$ commute avec b et que c^{-1} soit l'inverse de c . Nous écrivons

$$(d_{c^{-1}ac})^k(b) = c^{-1} d_a^k(b) c.$$

Pour $A = \text{Diff}(\mathfrak{h}')$, $a = \partial_\mu$, $b = \bar{p}$, $c = \prod_{\alpha \in R^+} \alpha$, nous avons

$$c^{-1}ac = \prod_{\alpha \in R^+} \alpha^{-1} \partial_\mu \circ \prod_{\alpha \in R^+} \alpha = \bar{\partial}_\mu.$$

Par le lemme (2.2.9), nous obtenons

$$d_a^k(q) = k! \partial_q$$

lorsque q est un polynôme homogène de degré k sur $\mathfrak{h}$. Ainsi, pour un polynôme $p \in I(\mathfrak{g})$ homogène de degré m ,

$$m! \bar{\partial}_p = \bar{\mu}^m(\bar{p}) = (d_{c^{-1}ac})^m(\bar{p}) = \prod_{\alpha \in R^+} \alpha^{-1} d_a^m(\bar{p}) \prod_{\alpha \in R^+} \alpha = m! \prod_{\alpha \in R^+} \alpha^{-1} \partial_{\bar{p}} \circ \prod_{\alpha \in R^+} \alpha.$$

Ceci prouve le théorème. $\square$

On utilise le Théorème suivant pour la preuve du Théorème 2.2.17 lorsqu'on travaille avec les opérateurs différentiels restreints.

THÉORÈME 2.2.11 (CHEVALLEY). *Étant donnée $p \in I[\mathfrak{g}]$, nous avons $\bar{p} \in I[\mathfrak{h}]$, et $p \rightarrow \bar{p}$ est un isomorphisme de $I[\mathfrak{g}]$ vers $I[\mathfrak{h}]$. (cf. [HC57] p.100)*

Soit J l'idéal dans $I(\mathfrak{h})$ engendré par les éléments homogènes de $I(\mathfrak{h})$ de degré positif. Par rapport à un résultat de Chevalley dans [Che55] (Théorème (B) p.778-779), la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}[\mathfrak{h}]/(J\mathcal{S}[\mathfrak{h}])$ est égal à w puisque W est un groupe fini engendré par des réflexions. Lorsque Q_S resp. Q_I désignent les corps de fractions de $\mathcal{S}[\mathfrak{h}]$ resp. $I[\mathfrak{h}]$, alors $[Q_S : Q_I] = w$ où $[Q_S : Q_I]$ désigne le degré d'extension de corps Q_S/Q_I . Il est évident que lorsqu'un élément de $\mathcal{S}[\mathfrak{h}]$ est contenu dans $I[\mathfrak{h}]$, ceci est vrai pour tout leurs composantes homogènes. Par conséquent, nous pouvons choisir des éléments homogènes $x_1, \dots, x_w \in \mathcal{S}[\mathfrak{h}]$ tels que

$$\mathcal{S}[\mathfrak{h}] = V + J\mathcal{S}[\mathfrak{h}]$$

où V est un espace linéaire engendré par $(x_1, \dots, x_w)$ sur $\mathbb{C}$.

LEMME 2.2.12. *Un élément x de $\mathcal{S}[\mathfrak{h}]$ peut s'écrire d'une façon unique sous la forme*

$$x = y_1 x_1 + \dots + y_w x_w$$

où les $y_k \in I[\mathfrak{h}]$ ($1 \leq k \leq w$) et $x_1, \dots, x_w \in \mathcal{S}[\mathfrak{h}]$ les éléments homogènes. (cf. [HC57] p.101)

PREUVE. En raisonnant par récurrence sur N , nous avons

$$\mathcal{S}[\mathfrak{h}] = I[\mathfrak{h}]V + J^N \mathcal{S}[\mathfrak{h}] \quad N \geq 1.$$

Soit x un élément homogène quelconque de $\mathcal{S}[\mathfrak{h}]$ de degré ν et soit ν_k le degré de x_k . Choisissons $N > \nu$ et les éléments $y'_1, \dots, y'_w \in I[\mathfrak{h}]$ tels que

$$(2.2.13) \quad x - (y'_1 x_1 + \dots + y'_w x_w) \in J^N \mathcal{S}[\mathfrak{h}].$$

Soit y_k désigne la composante homogène de y'_k de degré $\nu - \nu_k$. Alors, en considérant la composante homogène de degré ν dans (2.2.13), il est évident que

$$x - (y_1 x_1 + \dots + y_w x_w) = 0.$$

Cela nous montre que

$$\mathcal{S}[\mathfrak{h}] = I[\mathfrak{h}]x_1 + \dots + I[\mathfrak{h}]x_w$$

et il s'ensuit aisément que

$$Q_S = Q_I \mathcal{S}[\mathfrak{h}] = \sum_{k=1}^w Q_I x_k.$$

Cependant, $[Q_S : Q_I] = w$ et donc $x_1, \dots, x_w$ doivent être linéairement indépendant sur Q_I . Cela nous montre qu'un élément de $\mathcal{S}[\mathfrak{h}]$ peut s'écrire uniquement sous la forme

$$x = y_1 x_1 + \dots + y_w x_w \quad (y_k \in I[\mathfrak{h}])$$

comme cherché. □

LEMME 2.2.14. *Prenons $(x_1, \dots, x_w)$ comme dans le lemme (2.2.12). Soit ϕ une fonction analytique sur un sous-ensemble non vide, ouvert et connexe U de $\mathfrak{t}$. Supposons que ϕ soit une fonction propre de ∂_y pour tout $y \in I[\mathfrak{h}]$. Alors si les $\partial_{x_k} \phi$ ($1 \leq k \leq w$) s'annulent tous au même point de U , ϕ doit être zéro. (Voir e.g. [HC57] p.102)*

PREUVE. Supposons que

$$\partial_{x_k} \phi(H_0) = 0 \quad (1 \leq k \leq w)$$

pour certains $H_0 \in U$. Pour un $x \in \mathcal{S}[\mathfrak{h}]$ quelconque, nous pouvons choisir $y_1, \dots, y_w \in I[\mathfrak{h}]$ tels que $x = \sum_{k=1}^w y_k x_k$. Mais puisque ϕ est la fonction propre pour tout y par l'hypothèse, nous pouvons écrire

$$\partial_{y_k} \phi = c_k \phi \quad (c_k \in \mathbb{C}).$$

Nous avons ainsi,

$$\partial_x \phi(H_0) = \sum_{k=1}^w c_k \partial_{x_k} \phi(H_0) = 0.$$

Cela nous montre que toutes les dérivées de ϕ s'annulent au point H_0 et comme ϕ est une fonction analytique, elle doit être zéro. □

COROLLAIRE 2.2.15. *Supposons que $H' \in \mathfrak{h}'$ et que ϕ soit une fonction analytique sur U satisfaisant au système d'équations différentielles*

$$(2.2.16) \quad \partial_q \phi = q(H') \phi \quad (q \in I[\mathfrak{h}]).$$

Alors, il existe des constantes c_s ($s \in W$) tels que

$$\phi(H) = \sum_{s \in W} c_s \exp B(H, sH') \quad (H \in U).$$

En outre, ils sont déterminés d'une façon unique. (Voir e.g. [HC57] p.102)

PREUVE. Posons

$$\phi_s(H) = \exp B(H, sH') \quad (H \in U).$$

Alors, les ϕ_s ($s \in W$) sont des fonctions analytiques linéairement indépendantes sur U . D'un autre côté, puisque

$$\partial_H \phi_s = B(H, sH') \phi_s \quad (H \in \mathfrak{h})$$

il est évident que

$$\partial_q \phi_s = q(H') \phi_s$$

pour tout $q \in I[\mathfrak{h}]$. Cependant, ϕ_s est une solution de l'équation différentielle (2.2.16). Soit E un espace vectoriel complexe contenant toutes les solutions analytiques de ce système. Il suffit de montrer que ϕ_s ($s \in W$) est une base pour E ou, en équivalent, $\dim E \leq w$.

Choisissons un point $H_0 \in U$. Raisonnons par l'absurde. Soit $\dim E > w$, nous pouvons choisir $\phi \neq 0$ dans E satisfaisant aux w conditions de linéarité

$$(\partial_{v_k} \phi)(H_0) = 0 \quad 1 \leq k \leq w.$$

Mais par rapport au lemme (2.2.14), c'est impossible par l'hypothèse $\phi \neq 0$. $\square$

Maintenant, nous énonçons la formule intégrale d'Harish-Chandra pour le cas compact. Soit K un groupe de Lie compact, semi-simple. Notons $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie. Soit $\mathfrak{t}$ la sous-algèbre de Cartan correspondante ce qui est une algèbre de Lie d'un tore maximal $T \subset K$. Les notations $\mathfrak{g}$ resp. $\mathfrak{h}$ désignent les complexifiées de $\mathfrak{k}$ resp. $\mathfrak{t}$. Pour $y \in K$ et $X \in \mathfrak{k}$, écrivons $yX = \text{Ad}_y X$ et $\zeta = \prod_{\alpha \in R^+} \alpha$ pour simplifier.

THÉORÈME 2.2.17 (FORMULE INTÉGRALE D'HARISH-CHANDRA). *Soit dy la mesure de Haar normalisée sur K . Pour $H, H' \in \mathfrak{h}$, nous avons*

$$(2.2.18) \quad \zeta(H) \zeta(H') \int_K e^{B(yH, H')} dy = w^{-1} \partial_\zeta(\zeta) \sum_{s \in W} \varepsilon(s) e^{B(sH, H')},$$

où w est l'ordre du groupe de Weyl W , le nombre $\varepsilon(s) = \text{sgn}(\det(s))$ et $\partial_\zeta(\zeta)$ est l'expression local de $\partial_\zeta \circ \zeta$ à l'origine. (Voir e.g. [Hel84] p.328 ou [Loe75])

PREUVE. Soit $f \in C^\infty(\mathfrak{k})$. Posons

$$F(X) = \int_K f(yX) dy.$$

Lorsque $p \in I(\mathfrak{k}^*)$, nous avons

$$(\partial_p F)(H) = (\zeta^{-1} \partial_{\bar{p}}(\zeta \bar{F}))(H), \quad \text{pour } H \in \mathfrak{h}'.$$

Alors la fonction

$$\phi_f(H) = \zeta(H) \int_K f(yH) dy \quad (H \in \mathfrak{t})$$

satisfait à l'égalité suivante :

$$\phi_{\partial_p f}(H) = \zeta(H)(\partial_p F)(H) = (\partial_{\bar{p}} \phi_f)(H).$$

Ainsi, nous obtenons

$$(2.2.19) \quad \phi_{\partial_p f} = \partial_{\bar{p}} \phi_f, \quad p \in I(\mathfrak{k}^*).$$

Cela nous dit que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathfrak{k}) & \xrightarrow{\phi} & C^\infty(\mathfrak{t}) \\ \downarrow \partial_p & & \downarrow \partial_{\bar{p}} \\ C^\infty(\mathfrak{k}) & \xrightarrow{\phi} & C^\infty(\mathfrak{t}) \end{array}$$

Maintenant, choisissons $H' \in \mathfrak{h}'$. Posons $f(X) = e^{B(X, H')}$. Il est évident que $\partial_Y f = B(Y, H')f$. Nous écrivons ainsi

$$\partial_q f = q(H')f$$

pour tout $q \in \mathcal{S}[\mathfrak{k}^*]$. Nous avons donc par (2.2.19)

$$\partial_{\bar{p}} \phi_f = \phi_{\partial_p f} = \phi_{p(H')f} = p(H')\phi_f$$

pour tout $p \in I(\mathfrak{k}^*)$. Le Théorème de Chevalley (2.2.11) implique que $\partial_q \phi_f = q(H')\phi_f$ pour tout $q \in I[\mathfrak{h}^*]$. Le Corollaire (2.2.15) nous dit que, nous avons pour H' régulier

$$(2.2.20) \quad \phi_f(H) = \sum_{s \in W} c_s e^{B(sH, H')},$$

où $c_s \in \mathbb{C}$. Vu que $\zeta(sH) = \varepsilon(s)\zeta(H)$, il est évident que $\phi_f(sH) = \varepsilon(s)\phi_f(H)$, et

$$\phi_f(H) = w^{-1} \sum_{s \in W} \varepsilon(s) \phi_f(sH) = w^{-1} c \sum_{s \in W} \varepsilon(s) \exp B(sH, H') \quad (H \in \mathfrak{t}),$$

où $c = \sum_{s \in W} \varepsilon(s) c_s$. Nous pouvons déterminer la constante c en appliquant l'opérateur différentiel ∂_ζ aux deux côtés et en évaluant au point $H = 0$. La définition de ϕ_f nous montre que

$$(\partial_\zeta \phi_f)(0) = \partial_\zeta(\zeta)f(0) = \partial_\zeta \zeta.$$

Écrivons $\psi_s(H) = \exp B(sH, H')$ ($H \in \mathfrak{t}$). Alors $\partial_q \psi_s = q(s^{-1}H')\psi_s$ ($q \in \mathcal{S}[\mathfrak{h}]$), et ainsi $\partial_\zeta \psi_s = \varepsilon(s)\zeta(H')\psi_s$. Par conséquent

$$\partial_\zeta \zeta = (\partial_\zeta \phi_f)(0) = w^{-1} c \zeta(H') w = c \zeta(H').$$

Nous trouvons enfin $c = \partial_\zeta \zeta / \zeta(H')$. Cela nous montre que

$$\zeta(H)\zeta(H') \int_K \exp B(yH, H') dy = \frac{\partial_\zeta \zeta}{w} \sum_{s \in W} \varepsilon(s) \exp B(sH, H')$$

pour $H \in \mathfrak{t}$ et $H' \in \mathfrak{t}$, $H' \neq 0$. Par le théorème du prolongement analytique, pour tous $H, H' \in \mathfrak{h}$ nous avons l'égalité (2.2.18). $\square$

2.3. Volume de Cartan Killing de K/T

PRÉLIMINAIRE 2.3.1. Nous rappelons la construction de la métrique de Cartan-Killing. Considérons la décomposition de Cartan

$$(2.3.2) \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{t} \oplus [\mathfrak{t}, \mathfrak{k}]$$

de $\mathfrak{k}$ qui résulte du choix de tore maximal T dans K . Comme d'habitude nous utilisons la notation $\mathfrak{q} = [\mathfrak{t}, \mathfrak{k}]$ et nous identifions $\mathfrak{q}$ avec l'espace tangent $T_T(K/T)$ à l'espace homogène K/T au point T de K/T .

La restriction de négative de la forme de Killing " $\cdot$ ", à $\mathfrak{k}$ est une forme euclidienne invariante sur $\mathfrak{k}$ et la décomposition de Cartan (2.3.2) est orthogonale par rapport à la forme " $\cdot$ ". En particulier " $\cdot$ " induit une métrique riemannienne sur K/T ; elle s'appelle *métrique de Cartan-Killing*. Notons $d\text{vol}_K$ la forme volume de K/T qui en résulte; nous l'appellerons parfois *forme volume* ou *mesure de Cartan-Killing*.

De même, la restriction de la forme $\cdot$ à $\mathfrak{t}$ est euclidienne sur $\mathfrak{t}$ et invariante par le groupe de Weyl W . Nous l'utilisons pour identifier $\mathfrak{t}$ avec son dual $\mathfrak{t}^*$ et pour munir $\mathfrak{t}^*$ d'une forme euclidienne, que nous notons encore

$$\cdot : \mathfrak{t}^* \times \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

C'est la forme canonique associée au système de racines en discussion.

Le but de cette partie est de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.3.3. *Le volume de Cartan Killing est donné par*

$$(2.3.4) \quad \text{vol}_K(K/T) = \frac{(2\pi)^{|R^+|}}{\prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \rho}.$$

PREUVE. Soient dx la mesure de Haar sur K et dz celle sur T . Rappelons que dx est aussi la mesure de Cartan-Killing. Notons $\zeta = \prod_{\alpha \in R^+} \alpha$; c'est une fonction polynôme homogène sur $\mathfrak{t}$ de degré $m = \frac{1}{2}(n - d)$ où $n = \dim K$, $d = \dim T$. Soit $B : \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire invariante. Notons $|x| = B(x, x)^{1/2}$. Prolongeons cette forme bilinéaire sur $\mathcal{S}^m[\mathfrak{k}]$, l'espace symétrique des polynômes homogènes de degrés m , par la formule

$$(2.3.5) \quad \begin{aligned} B(X_1 \cdots X_m, Y_1 \cdots Y_m) &= \det_S B(X_j, Y_k) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \prod_{j=1}^m B(X_j, Y_{\sigma(j)}) \quad X_j, Y_j \in \mathfrak{k}. \end{aligned}$$

Le côté droit de cette formule, étant linéaire en chacune des variables et symétrique par rapport aux X_j et par rapport aux Y_k séparément, définit bien une forme bilinéaire sur $\mathcal{S}^m[\mathfrak{k}] \times \mathcal{S}^m[\mathfrak{k}]$. Utilisons la formule d'intégrale de Weyl qui se trouve dans [Car55b] (p.5) sous la forme

$$(2.3.6) \quad \text{vol}_C(K)^{-1} \int_K \phi(x) dx = \frac{\text{vol}_C(T)^{-1}}{w} \int_T D(z) \overline{D(z)} \phi(z) dz.$$

où ϕ est une fonction centrale et $D = \prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})$. Un calcul immédiat donne

$$\prod_{\alpha \in R^+} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) = \sum_{s \in W} \varepsilon(s) e^{s\rho}.$$

En comparant les termes de degrés m , nous voyons que

$$(2.3.7) \quad \sum_{s \in W} \varepsilon(s) \frac{(s\rho)^m}{m!} = \zeta.$$

Nous écrivons de nouveau la formule (2.3.6) en substituant $D(z)$ à un multiplicateur équivalent $\zeta(z)$ et nous obtenons ainsi

$$(2.3.8) \quad \text{vol}_C(K)^{-1} \int_K \phi(x) dx = \frac{\text{vol}_C(T)^{-1}}{w} \int_T |\zeta(z)|^2 \phi(z) dz.$$

Le choix de la fonction ϕ

$$\phi(x) = e^{-|x|^2/2}$$

nous permet de calculer l'intégrale $\int_T$. Nous obtenons donc

$$\text{vol}_C(K)^{-1} \int_K e^{-|x|^2/2} dx = \frac{\text{vol}_C(T)^{-1}}{w} \int_T |\zeta(z)|^2 e^{-|z|^2/2} dz.$$

Notre but est maintenant de calculer l'intégrale suivante

$$\int_T |\zeta(z)|^2 e^{-|z|^2/2} dz.$$

Soit $\langle x, y \rangle = \sum x_j y_j$ le produit euclidien sur $\mathbb{R}^d$. Soit γ une mesure (gaussienne) sur $\mathbb{R}^d$ définie par

$$d\gamma(a) = (2\pi)^{-d/2} e^{-|a|^2/2} da$$

où da est la mesure de Lebesgue.

REMARQUE 2.3.9. Lorsqu'on intègre par rapport à une mesure γ , on notera cette dernière $d\gamma$. La notation d ne représente pas ici la dérivée extérieure. Cette remarque restera valable pour les autres mesures avec lesquelles nous intégrerons.

Pour une fonction f sur $\mathbb{R}^d$, définissons

$$(2.3.10) \quad f^*(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) d\gamma(y) = f * \gamma$$

lorsque l'intégrale est définie. Nous voulons montrer pour toute $f \in \mathcal{S}[\mathbb{R}^d]$ l'égalité suivante :

$$(2.3.11) \quad f^* = e^{\Delta/2} f$$

où Δ est l'opérateur de Laplace. Ensuite, nous allons montrer pour toutes $f, g \in \mathcal{S}[\mathbb{R}^d]$

$$(2.3.12) \quad \int_{\mathbb{R}^d} f^*(ix) \overline{g^*(ix)} d\gamma(x) = \langle f, g \rangle.$$

Parce que l'égalité (2.3.11) est linéaire, il suffit de montrer pour f est un monôme x^α , c'est-à-dire le coefficient de $\frac{\xi^\alpha}{\alpha!}$ dans $e^{\langle x, \xi \rangle}$.

Ainsi il suffit de vérifier (2.3.11) lorsque $f(x) = e^{\langle x, \xi \rangle}$. Mais, nous pouvons appliquer facilement le laplacien à cette fonction

$$\Delta e^{\langle x, \xi \rangle} = |\xi|^2 e^{\langle x, \xi \rangle}.$$

Par conséquent

$$e^{\Delta/2} e^{\langle x, \xi \rangle} = e^{|\xi|^2/2} e^{\langle x, \xi \rangle}$$

Nous obtenons donc

$$f^*(x) = e^{|\xi|^2/2} e^{\langle x, \xi \rangle} = e^{\Delta/2} f(x).$$

Nous pouvons vérifier (2.3.12) de manière similaire, en remplaçant $f(x)$ par $e^{\langle x, \xi \rangle}$, $g(x)$ par $e^{\langle x, \eta \rangle}$ et $\langle f, g \rangle$ par $e^{\langle \xi, \eta \rangle}$.

Calculons $f^*(ix)$ et constatons que $g^*(ix)$ est le même calcul. Nous avons donc

$$\begin{aligned} f^*(ix) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle ix-y, \xi \rangle} (2\pi)^{-d/2} e^{-|y|^2/2} dy \\ &= e^{\langle ix, \xi \rangle} (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle y, \xi \rangle} e^{-|y|^2/2} dy \\ &= e^{\langle ix, \xi \rangle} (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle y, \xi \rangle} e^{-|y|^2/2} e^{|\xi|^2/2 - |\xi|^2/2} dy \\ &= e^{\langle ix, \xi \rangle} (2\pi)^{-d/2} e^{|\xi|^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\left(\frac{|\xi|+|y|}{\sqrt{2}}\right)^2} dy. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $\frac{|\xi|+|y|}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{|y|}{\sqrt{2}}$, nous obtenons l'intégrale

$$\begin{aligned} &= e^{\langle ix, \xi \rangle} (2\pi)^{-d/2} e^{|\xi|^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|y|^2/2} dy \\ &= e^{\langle ix, \xi \rangle} (2\pi)^{-d/2} e^{|\xi|^2/2} (2\pi)^{d/2} = e^{\langle ix, \xi \rangle} e^{|\xi|^2/2} \end{aligned}$$

Nous avons de manière similaire

$$g^*(ix) = e^{\langle ix, \eta \rangle} e^{|\eta|^2/2} \text{ et } \overline{g^*(ix)} = e^{\langle -ix, \eta \rangle} e^{|\eta|^2/2}.$$

Nous pouvons maintenant montrer l'égalité (2.3.12)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f^*(ix) \overline{g^*(ix)} d\gamma(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle ix, \xi \rangle} e^{|\xi|^2/2} e^{\langle -ix, \eta \rangle} e^{|\eta|^2/2} e^{-|x|^2/2} (2\pi)^{-d/2} dx \\
&= (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{|\xi|^2/2} e^{|\eta|^2/2} e^{\langle \xi, \eta \rangle} e^{-\langle \xi, \eta \rangle} e^{\langle ix, \xi \rangle} e^{\langle -ix, \eta \rangle} e^{-|x|^2/2} dx \\
&= (2\pi)^{-d/2} e^{\langle \xi, \eta \rangle} \int_{\mathbb{R}^d} e^{(\frac{i|x|}{\sqrt{2}} + \frac{|\xi| - |\eta|}{\sqrt{2}})^2} dx.
\end{aligned}$$

Ce calcul est de même type que précédent, nous avons donc

$$= (2\pi)^{-d/2} (2\pi)^{d/2} e^{\langle \xi, \eta \rangle} = e^{\langle \xi, \eta \rangle}$$

comme cherché. Supposons maintenant que f soit un polynôme homogène harmonique. Alors $f^* = f$ par (2.3.11) et en utilisant (2.3.12), obtenons

$$(2.3.13) \quad \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 d\gamma(x) = \langle f, f \rangle.$$

Le polynôme ζ est antisymétrique par rapport au groupe de Weyl W , et le produit scalaire (sur $\mathfrak{t}$ ou $\mathfrak{t}^*$) est W -invariant. Il s'ensuit que

$$\Delta \zeta = 0.$$

En utilisant (2.3.13), nous écrivons

$$\int_T |\zeta(x)|^2 d\gamma(x) = \int_T |\zeta(x)|^2 (2\pi)^{-d/2} e^{-|x|^2/2} dx = B(\zeta, \zeta).$$

Nous en tirons

$$\int_T |\zeta(x)|^2 e^{-|x|^2/2} dx = (2\pi)^{d/2} B(\zeta, \zeta).$$

En remplaçant ce dernier dans (2.3.8), nous obtenons

$$\frac{\text{vol}_C(K)}{\text{vol}_C(T)} = (2\pi)^{m_w} B(\zeta, \zeta).$$

Montrons que

$$\frac{B(\zeta, \zeta)}{w} = \zeta(\rho).$$

Pour cela, utilisons l'argument de Steinberg. Posons

$$h = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \prod_{\alpha \in R^+} B(\alpha, \sigma(\alpha)).$$

La formule (2.3.5) nous donne l'égalité suivante :

$$h = B(\zeta, \zeta).$$

En utilisant l'égalité (2.3.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} h = B(\zeta, \zeta) &= \frac{1}{m!} B\left(\sum_{s \in W} \varepsilon(s)(s\rho)^m, \prod_{\alpha \in R^+} \alpha\right) \\ &= \frac{1}{m!} w B(\rho^m, \prod_{\alpha \in R^+} \alpha). \end{aligned}$$

Par la formule (2.3.5), nous en déduisons que

$$B(\alpha_1 \cdots \alpha_m, \beta^m) = m! \prod_{j=1}^m B(\alpha_j, \beta).$$

Nous trouvons ainsi

$$B(\zeta, \zeta) = \frac{1}{m!} w m! \prod_{\alpha \in R^+} \alpha(\rho)$$

comme cherché. (Voir e.g. l'appendice dans [Car55a] ou p.454 [Har71])

Il reste à montrer l'égalité

$$(2.3.14) \quad \frac{\text{vol}_C(K)}{\text{vol}_C(T)} = \text{vol}_C(K/T).$$

Celle-ci découle directement de Fubini, voir [Kir68, Lemme 6]. □

2.4. La formule de Kirillov

Soit G un groupe de Lie semisimple complexe connexe qui s'identifie au complexifié du groupe de Lie compact K . Désignons par $\mathfrak{g}$ resp. $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie associée au groupe de Lie G resp. K . Le but de cette partie est de démontrer la formule des caractères de Kirillov suivante qui sert à calculer le caractère d'une représentation irréductible dans la classe d'un plus haut poids λ d'un groupe de Lie semisimple complexe connexe G :

$$(2.4.1) \quad \text{vol}_{\text{symp}}(\mathcal{O}_\rho) j(Y) \chi_\lambda(\exp(Y)) = \int_{\mathcal{O}_{\lambda+\rho}} e^{i\vartheta(Y)} d\sigma(\vartheta) \quad (Y \in \mathfrak{g}).$$

Nous allons expliquer les notations et leurs significations dans la partie qui suit.

PRÉLIMINAIRE 2.4.2. La fonction q définie sur $\mathfrak{g}$ par

$$(2.4.3) \quad q(Y) = \det \left(\frac{\sinh(\text{ad}(Y/2))}{\text{ad}(Y/2)} \right), \quad Y \in \mathfrak{g},$$

est holomorphe. Définissons la fonction holomorphe K -invariante, et donc G -invariante, j sur $\mathfrak{g}$ par

$$(2.4.4) \quad j(Y) = \sqrt{q(Y)} = \det \left(\frac{\sinh(\text{ad}(Y/2))}{\text{ad}(Y/2)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad Y \in \mathfrak{g}, \quad j(0) = 1.$$

La restriction de cette fonction à $\mathfrak{k}$ est analytique réelle. En effet la restriction de cette fonction à $\mathfrak{t}$ est donnée par l'expression

$$(2.4.5) \quad j(Z) = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{\sinh(i\alpha(Z/2))}{i\alpha(Z/2)} = \prod_{\alpha \in R^+} \frac{\sin(\alpha(Z/2))}{\alpha(Z/2)}, \quad Z \in \mathfrak{t}.$$

Cette fonction s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathfrak{h}$, invariante par le groupe de Weyl. L'extension unique en une fonction G -invariante sur $\mathfrak{g}$ est la fonction j cherchée. Les notations q et j sont celles de [Kir99], voir en particulier (2.3.6) (p. 450). Dans la littérature, on trouve également la notation j et $j^{\frac{1}{2}}$ pour q et j respectivement.

PRÉLIMINAIRE 2.4.6. Rappelons que les classes d'équivalences de représentations irréductibles (unitaires) de K resp. les classes d'équivalences de représentations irréductibles de G de dimension finie sont paramétrées par leurs plus hauts poids; ceux-ci sont situés dans l'adhérence $\overline{C^+}$ de la chambre de Weyl. Rappelons que, lorsque λ est un tel plus haut poids, $\lambda + \rho$ appartient à la chambre de Weyl C^+ .

Étant donné un plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{k}^*$, notons $T_\lambda: G \rightarrow \text{End}(V_\lambda)$ une représentation (irréductible) dans la classe de λ et χ_λ le caractère holomorphe de G associé à λ , c'est à dire, la trace de la représentation T_λ ; la restriction de χ_λ à K est le caractère irréductible de K associé à λ . Étant donné $\varphi \in \mathfrak{k}^*$, nous notons $\mathcal{O}_\varphi$ l'orbite $K\varphi \in \mathfrak{k}^*$ de φ dans $\mathfrak{k}^*$; alors nous désignons par ϑ la variable dans $\mathcal{O}_\varphi$, par $d\sigma$ la mesure de Liouville (forme de volume symplectique) de $\mathcal{O}_\varphi$, et par $\text{vol}_{\text{symp}}(\mathcal{O}_\varphi)$ le volume symplectique de $\mathcal{O}_\varphi$.

PRÉLIMINAIRE 2.4.7. Soit ω_ϑ la structure symplectique sur $\mathcal{O}_\vartheta$. Notons $d_\vartheta = \dim(\mathcal{O}_\vartheta)/2$; la mesure de Liouville (ou symplectique) σ sur $\mathcal{O}_\vartheta$ est alors donnée par

$$\sigma = \frac{1}{d_\vartheta!} \omega_\vartheta^{\wedge d_\vartheta}.$$

Cette forme symplectique peut se caractériser par la structure de Lie-Poisson, voir e.g. l'Appendice C.

PRÉLIMINAIRE 2.4.8. Nous exhibons maintenant le lien entre la mesure symplectique et celle de Cartan-Killing. Un élément $\vartheta \in \mathfrak{k}^*$ est dit *régulier* lorsque le stabilisateur de ϑ par rapport à l'action coadjointe de K sur $\mathfrak{k}^*$ est un tore maximal. Soit $\vartheta \in \mathfrak{k}^*$ régulier de telle sorte que son stabilisateur soit égal au tore maximal choisi T . Alors

$$(2.4.9) \quad K \longrightarrow \mathcal{O}_\vartheta = K\vartheta \subseteq \mathfrak{k}^*, \quad y \mapsto (\text{Ad}_y^{-1})^*(\vartheta),$$

induit un difféomorphisme

$$(2.4.10) \quad \Phi_\vartheta: K/T \longrightarrow \mathcal{O}_\vartheta.$$

Constatons que la projection $T_e K = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{q} \rightarrow T_T(K/T)$ induit un isomorphisme canonique $\mathfrak{q} \rightarrow T_T(K/T)$; de même, l'injection $\mathcal{O}_\vartheta \subseteq \mathfrak{k}^* \cong \mathfrak{k}$ induit un isomorphisme canonique $T_\vartheta \mathcal{O}_\vartheta \rightarrow \mathfrak{q}$. Par conséquent, la dérivée

$$(2.4.11) \quad T_T(K/T) \longrightarrow T_\vartheta \mathcal{O}_\vartheta$$

de Φ_ϑ au point $\{T\} \in K/T$ s'identifie à un automorphisme linéaire de $\mathfrak{q}$. On constate que cette dérivée nous donne la représentation coadjointe ad^* appliquée à ϑ .

Le lemme suivant nous donne la relation entre la mesure de Cartan-Killing et la mesure symplectique pour pouvoir écrire l'intégrale sur K/T comme une intégrale sur l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_\vartheta$.

LEMME 2.4.12. *Soit $\vartheta \in C^+ \subseteq \mathfrak{t}^*$ régulier et soit $Z_\vartheta \in \mathfrak{t}$ le vecteur qui correspond à ϑ par rapport à la forme $\cdot$, c.à.d. Z_ϑ est caractérisé par l'identité*

$$\vartheta(X) = Z_\vartheta \cdot X, \quad X \in \mathfrak{t}.$$

La mesure de Cartan-Killing $d\text{vol}_C$ sur K/T et la mesure symplectique $d\sigma$ sur l'orbite $\mathcal{O}_\vartheta = K\vartheta \subseteq \mathfrak{t}^$ sont liées par l'identité*

$$(2.4.13) \quad \Phi_\vartheta^*(d\sigma) = \left(\prod_{\alpha \in R^+} \alpha(Z_\vartheta) \right) d\text{vol}_C.$$

PREUVE. Soit $m = |R^+|$, notons $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les racines, et choisissons une base

$$X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m, Z_1, \dots, Z_r,$$

de $\mathfrak{k}$ jouissant des propriétés suivantes :

- elle est orthonormale relativement à la métrique de Cartan-Killing ;
- $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m$ est une base de $\mathfrak{q}$ ($= [\mathfrak{t}, \mathfrak{k}]$) et $Z_1, \dots, Z_r$ est une base de $\mathfrak{t}$;
- quel que soient $Z \in \mathfrak{t}$ et k , $1 \leq k \leq m$,

$$(2.4.14) \quad \begin{aligned} [Z, X_k] &= \alpha_k(Z) Y_k \\ [Z, Y_k] &= -\alpha_k(Z) X_k. \end{aligned}$$

Nous constatons que $d_\vartheta = m$. Au point T de K/T , la forme volume de Cartan-Killing $d\text{vol}_C$ associe la valeur 1 au $(2m)$ -uplet ordonné $X_1, Y_1, \dots, X_m, Y_m$. Autrement dit,

$$(2.4.15) \quad (d\text{vol}_C)_T(X_1, Y_1, \dots, X_m, Y_m) = 1.$$

Maintenant, on regarde la mesure tiré en arrière $\Phi_\vartheta^* d\sigma$. Dans l'Appendice C, nous avons l'expression explicite pour la forme symplectique ω_ϑ , voir en particulier la Proposition C.0.15. Nous savons que la m -ième puissance extérieur de la 2-forme symplectique est donnée par

$$\omega^{\wedge m} = m! X_1^* \wedge Y_1^* \wedge \dots \wedge X_m^* \wedge Y_m^*$$

où on a noté $\{X_j^*\}, \{Y_k^*\}$ pour la base duale. Nous avons ainsi, au point T de K/T la forme volume $d\sigma = \frac{1}{m!} \omega^{\wedge m}$ associe la valeur 1 au $(2m)$ -uplet ordonné $X_1, Y_1, \dots, X_m, Y_m$. Autrement dit,

$$(2.4.16) \quad (d\sigma)_T(X_1, Y_1, \dots, X_m, Y_m) = 1.$$

Mais, on cherche à calculer $\Phi_\vartheta^* d\sigma$ qui va nous donner les expressions de types $\omega_\vartheta \circ (d\Phi_\vartheta, d\Phi_\vartheta)$ et d'après la Proposition C.0.15, on sait que cela nous donne la 2-forme B_ϑ ou plus explicitement,

$$\omega_\vartheta(d\Phi_\vartheta X_j, d\Phi_\vartheta Y_k) = B_\vartheta(X_j, Y_k) = \vartheta([X_j, Y_k]).$$

Nous pouvons calculer la valeur de $\vartheta([X_j, Y_k])$ comme suit : quels que soient j, k , $1 \leq j, k \leq m$,

$$\begin{aligned}\vartheta([X_j, Y_k]) &= Z_\vartheta \cdot [X_j, Y_k] \\ &= -B(Z_\vartheta, [X_j, Y_k]) = -B([Z_\vartheta, X_j], Y_k) \\ &= -B(\alpha_j(Z_\vartheta)Y_j, Y_k) = \alpha_j(Z_\vartheta)\delta_{j,k}.\end{aligned}$$

D'où, au point T de K/T , la forme $\Phi_\vartheta^* d\sigma$ induite par $\Phi_\vartheta: K/T \rightarrow K\vartheta$, associe la valeur

$$\prod_{\alpha \in R^+} \alpha(Z_\vartheta)$$

au $(2m)$ -uplet ordonné $X_1, Y_1, \dots, X_m, Y_m$. Autrement dit,

$$(2.4.17) \quad (\Phi_\vartheta^* d\sigma)_T(X_1, Y_1, \dots, X_m, Y_m) = \prod_{\alpha \in R^+} \alpha(Z_\vartheta).$$

En comparant (2.4.15) avec (2.4.17), on obtient l'énoncé du lemme. $\square$

PRÉLIMINAIRE 2.4.18. La formule des caractères de Weyl exprime le caractère d'une représentation irréductible unitaires en fonction d'un plus haut poids. Elle s'écrit de la manière suivante

$$(2.4.19) \quad \prod_{\alpha \in R^+} (e^{i\alpha(Y)/2} - e^{-i\alpha(Y)/2}) \text{tr}(T_\lambda(\exp(Y))) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{i(\lambda+\rho)(wY)}, \quad Y \in \mathfrak{h}.$$

Notons dy la mesure de Haar normalisée de K . Elle est égale à la mesure de Cartan-Killing normalisée de K . Soit $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$.

LEMME 2.4.20. *La formule intégrale d'Harish-Chandra (2.2.18) peut s'écrire sous forme suivante :*

$$(2.4.21) \quad \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \varphi \prod_{\alpha \in R^+} \alpha(X) \int_K e^{((\text{Ad}_y^*)^{-1}\varphi)(X)} dy = \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \rho \sum_{s \in W} \varepsilon(s) e^{\varphi(sX)}, \quad X \in \mathfrak{h}, \quad \varphi \in \mathfrak{h}^*$$

où $\cdot = -B$ signifie le négative de la forme de Killing.

PREUVE. En utilisant le négative de la forme de Killing B , c'est à dire $-B = "\cdot"$, nous faisons correspondre $\mathfrak{h}$ avec son dual $\mathfrak{h}^*$, c'est-à-dire, $\varphi \in \mathfrak{h}^*$ correspond à un vecteur $H \in \mathfrak{h}$. Dans la formule (2.2.18), $yH = \text{Ad}_y H$ que l'on avait abrégé. On préfère utiliser la notation $\varphi(H)$ plutôt que $B(\varphi, H)$ lorsqu'on utilise les éléments du dual. On remplace H' par X et en rappelant qu'on applique la représentation coadjointe Ad^* pour les éléments du dual, nous obtenons la version suivante de la formule (2.2.18) :

$$(2.4.22) \quad \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \varphi \prod_{\alpha \in R^+} \alpha(X) \int_K e^{((\text{Ad}_y^*)^{-1}\varphi)(X)} dy = C_0 \sum_{s \in W} \varepsilon(s) e^{\varphi(sX)}, \quad X \in \mathfrak{h} \quad \varphi \in \mathfrak{h}^*$$

où $(\text{Ad}_s^*)^{-1}\varphi(X) = \varphi(sX)$. Dans la formule (2.2.18), on connaît la valeur de C_0 , mais nous allons reformuler cette constante par un terme qui nous convient pour la preuve de la formule des caractères de Kirillov (2.4.26).

Soit maintenant $\varphi \in \mathfrak{t}^*$ et soit $d\vartheta$ la mesure de Cartan-Killing sur l'orbite $\mathcal{O}_\varphi$ normalisée par la condition que le volume de l'orbite $\mathcal{O}_\varphi$ est égal à 1. Puisque la mesure de Haar normalisée de K est égale à la mesure de Cartan-Killing normalisée de K , nous déduisons

$$(2.4.23) \quad \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \varphi \prod_{\alpha \in R^+} \alpha(X) \int_{\mathcal{O}_\varphi} e^{i\vartheta(X)} d\vartheta = C_0 \sum_{s \in W} \varepsilon(s) e^{\varphi(sX)}, \quad X \in \mathfrak{h} \quad \varphi \in \mathfrak{t}^*$$

où on a utilisé l'identification (2.4.9) pour passer de l'intégrale sur K vers l'intégrale sur l'orbite coadjointe $\mathcal{O}_\varphi$. Substituant $iY \in \mathfrak{h}$ à $X \in \mathfrak{h}$, nous avons

$$(2.4.24) \quad \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \varphi \prod_{\alpha \in R^+} \alpha(iY) \int_{\mathcal{O}_\varphi} e^{i\vartheta(Y)} d\vartheta = C_0 \sum_{s \in W} \varepsilon(s) e^{i\varphi(sY)}, \quad Y \in \mathfrak{h} \quad \varphi \in \mathfrak{t}^*.$$

cf. [Kir68] ((30) p. 144).

Pour déterminer la valeur de C_0 , prenons $\varphi = \rho$. La formule des caractères de Weyl avec $\lambda = 0$ donne

$$\begin{aligned} \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \rho \prod_{\alpha \in R^+} \alpha(iY) \int_{\mathcal{O}_\rho} e^{i\vartheta(Y)} d\vartheta &= C_0 \sum_{s \in W} \varepsilon(s) e^{i\rho(sY)} \\ &= C_0 \prod_{\alpha \in R^+} (e^{i\alpha(Y)/2} - e^{-i\alpha(Y)/2}) \\ \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \rho \int_{\mathcal{O}_\rho} e^{i\vartheta(Y)} d\vartheta &= \frac{C_0}{2^{|R^+|}} \prod_{\alpha \in R^+} \frac{e^{i\alpha(Y)/2} - e^{-i\alpha(Y)/2}}{\alpha(iY/2)} \\ &= \frac{C_0}{2^{|R^+|}} \prod_{\alpha \in R^+} \frac{2i \sin(\alpha(Y)/2)}{\alpha(iY/2)} \\ &= \frac{C_0 2^{|R^+|}}{2^{|R^+|}} \prod_{\alpha \in R^+} \frac{i \sin(\alpha(Y)/2)}{i\alpha(Y/2)} \\ &= C_0 \prod_{\alpha \in R^+} \frac{\sin(\alpha(Y)/2)}{\alpha(Y/2)} \\ &= C_0 j(Y) \end{aligned}$$

Évaluant cette identité en $Y = 0$, nous trouvons

$$(2.4.25) \quad C_0 = \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \rho.$$

□

À l'aide de ces préparatifs, nous entamons la démonstration de la formule de Kirillov.

THÉORÈME 2.4.26. *Le caractère χ_λ de la représentation irréductible T_λ avec plus haut poids λ vérifie l'identité holomorphe*

$$(2.4.27) \quad \text{vol}_{\text{symp}}(\mathcal{O}_\rho) j(Y) \chi_\lambda(\exp(Y)) = \int_{\mathcal{O}_{\lambda+\rho}} e^{i\vartheta(Y)} d\sigma(\vartheta) \quad (Y \in \mathfrak{g}).$$

PREUVE. Considérons le difféomorphisme suivant :

$$\Phi_{\lambda+\rho}: K/T \longrightarrow \mathcal{O}_{\lambda+\rho}, \quad yT \longmapsto (\text{Ad}_y^{-1})^*(\lambda + \rho).$$

D'après le Lemme 2.4.12, voir en particulier (2.4.13), nous avons

$$d\sigma(\vartheta) = \left(\prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot (\lambda + \rho) \right) d\text{vol}_C = \left(\prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot (\lambda + \rho) \right) \text{vol}_C(K/T) d\vartheta$$

d'où

$$\int_{\mathcal{O}_{\lambda+\rho}} e^{i\vartheta(Y)} d\sigma(\vartheta) = \text{vol}_C(K/T) \left(\prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot (\lambda + \rho) \right) \int_{\mathcal{O}_{\lambda+\rho}} e^{i\vartheta(Y)} d\vartheta.$$

Dans l'identité (2.4.24), substituons $\lambda + \rho$ à φ . Cela donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}_{\lambda+\rho}} e^{i\vartheta(Y)} d\sigma(\vartheta) &= \frac{\prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \rho \text{vol}_C(K/T)}{\prod_{\alpha \in R^+} \alpha(iY)} \sum_{s \in W} \varepsilon(s) e^{is(\lambda+\rho)(Y)} \\ &= \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \rho \text{vol}_C(K/T) \frac{\prod_{\alpha \in R^+} (e^{i\alpha(Y)/2} - e^{-i\alpha(Y)/2})}{\prod_{\alpha \in R^+} \alpha(iY)} \text{tr}(T_\lambda(\exp(Y))) \\ &= \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \rho \text{vol}_C(K/T) \frac{\prod_{\alpha \in R^+} (2i \sin(\alpha(Y)/2))}{\prod_{\alpha \in R^+} 2\alpha(iY/2)} \text{tr}(T_\lambda(\exp(Y))) \\ &= \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \rho \text{vol}_C(K/T) j(Y) \text{tr}(T_\lambda(\exp(Y))). \end{aligned}$$

D'où

$$j(Y) \text{tr}(T_\lambda(\exp(Y))) = \frac{1}{\text{vol}_C(K/T) \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \rho} \int_{\mathcal{O}_{\lambda+\rho}} e^{i\vartheta(Y)} d\sigma(\vartheta).$$

En particulier, avec $\lambda = 0$ et $Y = 0$ nous en tirons

$$(2.4.28) \quad 1 = \frac{\text{vol}_{\text{symp}}(\mathcal{O}_\rho)}{\text{vol}_C(K/T) \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \rho}$$

ou, de façon équivalente,

$$(2.4.29) \quad \text{vol}_C(K/T) = \frac{\text{vol}_{\text{symp}}(\mathcal{O}_\rho)}{\prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \rho}.$$

Mais le volume $\text{vol}_C(K/T)$ vaut $\frac{(2\pi)^{|R^+|}}{\prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \rho}$, voir (2.3.4), d'où, en particulier,

$$\begin{aligned} \text{vol}_{\text{symp}}(\mathcal{O}_\rho) &= (2\pi)^{|R^+|} \\ \text{vol}_{\text{symp}}(\mathcal{O}_\rho) j(Y) \text{tr}(T_\lambda(\exp(Y))) &= \frac{(2\pi)^{|R^+|}}{\text{vol}_C(K/T) \prod_{\alpha \in R^+} \alpha \cdot \rho} \int_{\mathcal{O}_{\lambda+\rho}} e^{i\vartheta(Y)} d\sigma(\vartheta) \\ &= \int_{\mathcal{O}_{\lambda+\rho}} e^{i\vartheta(Y)} d\sigma(\vartheta). \end{aligned}$$

comme cherché. □

REMARQUE 2.4.30. Pour $Y \in \mathfrak{k}$, la formule (2.4.27) est équivalente à la formule (26) de [Kir68].



CHAPITRE 3

Quantification des espaces symétriques compacts

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord brièvement la construction de la quantification géométrique pour les variétés qui nous intéressent. Ensuite on prend deux polarisations verticale et holomorphe qui sont transverses pour obtenir deux quantifications verticale et holomorphe afin d'obtenir un couplage de BKS entre les espaces L^2 et $\mathcal{HL}^2$ obtenus par la quantification verticale et holomorphe respectivement. Ensuite nous rappelons certains résultats à propos des espaces symétriques compacts riemanniens. Nous appliquons la procédure de la quantification géométrique aux espaces symétriques compacts riemanniens. Puis, on montre que $\tilde{j}(Y) = \eta(Y/2)$ où la fonction $\tilde{j}$ provient du couplage BKS et la fonction η provient de la quantification holomorphe. On rappelle ensuite brièvement le cas particulier pour un groupe de Lie compact. Le produit scalaire peut être modifié par une constante positive arbitraire et le couplage BKS également peut être modifié par une constante arbitraire (non nulle). On va utiliser ceci pour normaliser nos produit scalaires.

3.1. Quantification géométrique

Dans cette Section, nous rappelons les éléments de quantification géométrique qui seront utilisés dans la suite pour la construction du couplage de BKS. La quantification géométrique nous permet d'associer une variété symplectique à un espace hilbertien. Nous énonçons la théorie pour un fibré cotangent. Ce cadre nous permet d'éviter des discussions trop longues sur les fibrés préquantiques d'une part, et simplifie grandement les détails relatifs à la correction métaplectique d'autre part. Nos conventions suivent celles de [Got86], [GS77] (§V.6 p. 273), [Śni83] et [Woo91] (§10.4 p. 234).

PRÉLIMINAIRE 3.1.1 (PRÉQUANTIFICATION ET POLARISATIONS). Soient B une variété lisse et $\tau_B^\bullet: T^*B \rightarrow B$ le fibré cotangent de B . Considérons la variété lisse $M = T^*B$ munie de la structure symplectique tautologique. On note $\theta: TM \rightarrow \mathbb{R}$ la 1-forme tautologique sur $M = T^*B$ et $\sigma = -d\theta \in \mathcal{A}^2(M)$ la forme symplectique tautologique associée. Choisissons le fibré préquantique ζ comme étant le fibré trivial

$$\zeta: M \times \mathbb{C} \longrightarrow M,$$

et on identifie les sections lisses de ζ avec les fonctions lisses sur M . On définit de manière classique un opérateur de dérivée covariante

$$(3.1.2) \quad \nabla: \text{Vect}(M) \times \Gamma(\zeta) \longrightarrow \Gamma(\zeta), \quad (X, s) \longmapsto \nabla_X s$$

par

$$(3.1.3) \quad \nabla_X s = Xs + \frac{i}{\hbar} \theta(X)s$$

où $\hbar$ est la constante de Planck. On considère ensuite une polarisation $P \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ de M , c'est à dire un feuilletage lagrangien de M . Les *sections polarisées* sont les sections s de ζ qui satisfont à la condition $\nabla_X(s) = 0$ lorsque X parcourt les champs de vecteurs tangents à P . On note Γ^{pol} le $C^\infty(M)$ -module des sections polarisées.

3.1.1. Quantification verticale des demi-formes. On utilise la polarisation verticale pour la construction de la quantification verticale. Supposons que B soit orientable, c-à-d, que la puissance extérieure non-triviale la plus haute $\Lambda^{\text{top}} \tau_B^\bullet$ de $\tau_B^\bullet$ soit le fibré en droites réel trivial. On appelle fibré *canonique* sur $M = T^*B$ le fibré en droites réel ω_{vert} sur M qui provient du pull back de $\Lambda^{\text{top}} \tau_B^\bullet$ par rapport à $\tau_B^\bullet: T^*B \rightarrow B$; par conséquent, on écrit

$$\omega_{\text{vert}} = (\tau_B^\bullet)^* \Lambda^{\text{top}} \tau_B^\bullet.$$

Choisissons une orientation de B . Soit δ_{vert} le fibré en droites réel trivial sur M tel que

- $\delta_{\text{vert}}^2 = \omega_{\text{vert}}$ et
- lorsque γ est une section de δ_{vert} , les valeurs de γ^2 sont positives.

Le fibré en droites réel δ_{vert} s'appelle *fibré vertical des demi-formes* réelles sur M . Soit β_B une forme volume positive (forme orientée partout non-nulle sur B et de degré maximal). Il existe une section polarisée de δ_{vert} (unique au signe près) dont le carré vaut $(\tau_B^\bullet)^* \beta_B$. On désigne cette section par $\sqrt{(\tau_B^\bullet)^* \beta_B}$. Les sections polarisées de $\zeta \otimes \delta_{\text{vert}}$ peuvent s'écrire sous forme

$$(3.1.4) \quad s = f \sqrt{(\tau_B^\bullet)^* \beta_B},$$

où f est une fonction lisse sur B , vue comme fonction sur $M = T^*B$ via la projection $\tau_B^\bullet: T^*B \rightarrow B$. Étant données deux sections polarisées (demi-formes) $s_1 = f_1 \otimes \sqrt{(\tau_B^\bullet)^* \beta_B}$ et $s_2 = f_2 \otimes \sqrt{(\tau_B^\bullet)^* \beta_B}$, leur produit scalaire $\langle s_1, s_2 \rangle$ est donné par l'expression

$$(3.1.5) \quad \langle s_1, s_2 \rangle = \int_B \bar{f}_1 f_2 \beta_B.$$

Ainsi, la complétion par rapport au produit scalaire (3.1.5) de l'espace des sections polarisées de $\zeta \otimes \delta_{\text{vert}}$ s'identifie à l'espace hilbertien $L^2(B, \beta_B)$.

3.1.2. Quantification holomorphe des demi-formes. On suppose que $M = T^*B$ soit munie d'une structure complexe qui, combinée à la structure symplectique tautologique, donne une structure kählérienne. Soient $(\tau_M^{\text{hol}})^\bullet$ le fibré cotangent holomorphe de M et $\omega_{\text{hol}} = \Lambda^{\text{top}} (\tau_M^{\text{hol}})^\bullet$ le *fibré canonique* de M (en tant que variété complexe, c'est la puissance extérieur non-triviale la plus haute du fibré cotangent holomorphe). Puisque M est de classe de Chern nulle, le fibré canonique ω_{hol} est topologiquement trivial, voir e.g. [GH78]. Soit ε la forme volume de Liouville de M . On définit une structure hermitienne sur ω_{hol} par l'identité

$$(3.1.6) \quad \bar{\alpha} \wedge \alpha = |\alpha|^2 b \varepsilon;$$

où α parcourt les sections lisses de ω_{hol} . La constante b ayant été choisie telle que $|\alpha|^2$ soit positif et, en suivant [Hal02, §2.3], on prend $b = (2i)^n (-1)^{n(n-1)/2}$, où $n = \dim B$.

On suppose que $\kappa: M \rightarrow \mathbb{R}$ soit un potentiel kählerien global, c-à-d

$$(3.1.7) \quad i\partial\bar{\partial}\kappa = \sigma,$$

où σ est la forme symplectique tautologique. On identifie les sections lisses du fibré préquantique ζ aux fonctions lisses sur M . Ainsi la fonction lisse

$$(3.1.8) \quad s_0 = e^{-\kappa/2\hbar}$$

sur M définit une section polarisée de ζ , c'est à dire qu'elle vérifie $\nabla_{\partial/\partial\bar{z}} s \equiv 0$ en coordonnées locales puisque la polarisation holomorphe est engendrée par les $\partial/\partial z$. Toute section polarisée s de ζ s'écrit sous la forme

$$(3.1.9) \quad s = \Phi s_0,$$

où Φ est une fonction holomorphe sur M .

On suppose que M admette une n -forme partout non nulle holomorphe globale. On choisit une telle n -forme et on la note ϑ , qui est donc une section holomorphe partout non-nulle de ω_{hol} . On choisit de plus une racine carrée δ_{hol} de ω_{hol} telle que δ_{hol} admette une section lisse, notée $\sqrt{\vartheta}$, de carré ϑ . Le choix de $\sqrt{\vartheta}$ est possible vu que le fibré δ_{hol} est trivial. Chaque section polarisée de $\zeta \otimes \delta_{\text{hol}}$ s'écrit alors sous la forme

$$(3.1.10) \quad s = \Phi s_0 \sqrt{\vartheta}$$

où Φ est une fonction holomorphe sur M . Les $2n$ -formes $\bar{\vartheta} \wedge \vartheta$ et ε sont deux formes volumes pour M qui sont non-nulle partout. Il existe donc une fonction lisse $b\eta^2$ sur M telle que

$$(3.1.11) \quad b\eta^2 \varepsilon = \bar{\vartheta} \wedge \vartheta.$$

Par abus de langage, on va dire que η^2 est la densité de la mesure provient de $\bar{\vartheta} \wedge \vartheta$ par rapport à la mesure de Liouville. On définit alors la norme d'une section s polarisée (3.1.10) comme

$$(3.1.12) \quad \|s\|^2 = \int_M |\Phi|^2 e^{-\kappa/\hbar} \eta \varepsilon.$$

Plus généralement lorsque M n'admet pas de forme volume holomorphe globale, la fonction à intégrer dans (3.1.12) n'a alors de sens que localement, cf. [Raw78], [Woo91] (§10.4 p. 230 ff.).

3.2. Couplage de BKS général

DÉFINITION 3.2.1. Un couplage est une application sesquilinéaire $(\cdot, \cdot): \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ sur des domaines $\mathcal{D}_1$ resp. $\mathcal{D}_2$ des espaces hilbertiens H_1 resp. H_2 qui viennent de deux polarisations différentes.

Le couplage BKS est un cas particulier dans la quantification géométrique. On espère que le couplage BKS définit une application linéaire globale $F: H_1 \rightarrow H_2$ que l'on appelle *transformée BKS*. Ici H_1 et H_2 sont deux espaces hilbertiens qui viennent de deux quantifications transverses.

LEMME 3.2.2. *Si l'application F existe et $\mathcal{D}_1$ est dense dans H_1 , alors F est unique.*

On espère que F est un isomorphisme unitaire (à une constante près). Il y a des exemples des transformées de ce types qui sont non-unitaires. On précise que le domaine de définition d'une telle transformée n'est pas toujours l'espace tout entier.

EXEMPLE 3.2.3. Considérons $\mathbb{R}^{2n}$ avec deux polarisations verticale et horizontale. Considérons la polarisation verticale. Une section s est verticalement polarisée lorsque $\nabla_{\partial/\partial p_k} s = 0$ pour les coordonnées $(q, p) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$. Identifions les sections par les fonctions. En utilisant la 1-forme tautologique $\theta = \sum p_k dq_k$ dans la définition (3.1.3), on constate que $\nabla_{\partial/\partial p_k} = \partial/\partial p_k$. Ainsi, les sections polarisées verticalement sont des fonctions $f(q, p)$ qui ne dépendent que de q . De la même façon, les sections polarisées horizontalement sont des fonctions $g(q, p)$ qui ne dépendent que de p . Nous avons donc l'espace hilbertien $L^2(\mathbb{R}^n, dq)$ par la quantification verticale et l'espace hilbertien $L^2(\mathbb{R}^n, dp)$ par la quantification horizontale. Dans ce cas, nous avons $\mathcal{D}_1 = L^2(\mathbb{R}^n, dp) \cap L^1(\mathbb{R}^n, dp)$ qui est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n, dp)$, et nous avons le couplage BKS suivant $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{BKS}} : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle_{\text{BKS}} &= c \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{ipq} \varphi(q) \psi(p) dq dp \\ &= c \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(q) (\mathcal{F}\psi)(q) dq \end{aligned}$$

où $\mathcal{F}\psi$ est la transformée associée à ce couplage qui est la transformée de Fourier de la fonction ψ . Ce couplage est non-dégénéré. Le couplage BKS définit la transformée Fourier de façon unique mais elle n'est pas définie sur tout l'espace.

On garde l'hypothèse que B est orientable et que M admet une n -forme holomorphe globale ϑ . On maintient le choix de forme volume β_B ainsi que l'orientation associée. Sous ces hypothèses, la construction du couplage de BKS qui est un cas particulier de la transformée de BKS énoncée dans [Woo91, §10.3 p. 231] prend la forme suivante. Définissons une application

$$(3.2.4) \quad (\cdot, \cdot) : \Gamma^{\text{pol}}(\delta_{\text{hol}}) \otimes \Gamma^{\text{pol}}(\delta_{\text{vert}}) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{C}), \quad M = T^*(B)$$

comme suit. Étant données une section polarisée β_1 de δ_{hol} et une section polarisée β_2 de δ_{vert} , β_1^2 est polarisée pour ω_{hol} et β_2^2 est polarisée pour ω_{vert} . Alors $\overline{\beta_1}^2 \wedge \beta_2^2$ est une forme de degré maximal ($= \dim M$) et on peut alors définir la fonction $(\beta_1, \beta_2)^2 \in C^\infty(M)$ par l'identité

$$(3.2.5) \quad \overline{\beta_1}^2 \wedge \beta_2^2 = (\beta_1, \beta_2)^2 c\varepsilon.$$

où c est une certaine constante complexe. Suivant [Hal02, §2.5], on prend $c = (-i)^n (-1)^{n(n+1)/2}$ où $n = \dim B$. L'identité (3.2.5) détermine (β_1, β_2) au signe près (il n'y a que deux façons continues de choisir le signe de la racine carrée; ces deux choix diffèrent d'un signe global).

En particulier, si on prend $\beta_1 = \sqrt{\vartheta}$ et $\beta_2 = \sqrt{(\tau^\bullet)_B^* \beta_B}$, on obtient la fonction suivante

$$(3.2.6) \quad \tilde{j} := (\sqrt{\vartheta}, \sqrt{(\tau^\bullet_B)^* \beta_B}) = \sqrt{\frac{\vartheta \wedge (\tau^\bullet_B)^* \beta_B}{c\varepsilon}}$$

sur $M = T^*B$ que l'on utilise dans la formule de BKS. À l'aide de ces préparatifs, le couplage de BKS

$$(3.2.7) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{h,\text{BKS}} : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

où $\mathcal{D}_1$ est dense dans $\mathcal{HL}^2(M, e^{-\kappa/h} \eta \varepsilon)$ et $\mathcal{D}_2$ est dense dans $L^2(B, \beta_B)$ se décrit comme suit : Soient $s_1 = \Phi s_0 \sqrt{\vartheta}$ une section de $\zeta \otimes \delta_{\text{hol}}$, cf. (3.1.10) et $s_2 = f \sqrt{(\tau^\bullet_B)^* \beta_B}$ une section de $\zeta \otimes \delta_{\text{vert}}$, cf. (3.1.4), alors on a

$$(3.2.8) \quad \langle s_1, s_2 \rangle_{t,\text{BKS}} = \langle \Phi s_0 \sqrt{\vartheta}, f \sqrt{(\tau^\bullet_B)^* \beta_B} \rangle_{h,\text{BKS}} = \int_M \bar{\Phi} f e^{-\kappa/2h} \tilde{j} \varepsilon.$$

où f est une fonction lisse de $\mathcal{D}_2$ (on prend en particulier à support compact), vue comme fonction sur $M = T^*B$ via la projection $\tau^\bullet_B : T^*B \rightarrow B$ et Φ est une fonction holomorphe de $\mathcal{D}_1$.

REMARQUE 3.2.9. Les demi-formes et les demi-densités nous donnent deux couplages différents. Lorsqu'on utilise les demi-densités, il faut changer la fonction $\tilde{j}$ et le produit scalaire dans $\mathcal{HL}^2(M, e^{-\kappa/h} \eta \varepsilon)$.

3.3. Quantification géométrique et Couplage de BKS pour les espaces symétriques compacts

Dans cette Section, nous appliquons la procédure de construction explicite du couplage de BKS (3.2.7) pour les espaces symétriques compacts. Nous rappelons d'abord quelques résultats sur les espaces symétriques. On considère $B = U/K$, et on va munir $M = T^*B = T^*(U/K)$ de la structure complexe qui provient du difféomorphisme $T^*(U/K) \rightarrow U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$, cf. (3.3.17). Ensuite, nous allons calculer la fonction $\tilde{j}$ de la quantification définit dans (3.2.6) pour les espaces symétriques. Ainsi, nous allons obtenir le couplage de BKS pour les espaces symétriques. À la fin de cette partie, nous rappelons le cas particulier, un groupe de Lie compact vu comme un espace symétrique compact.

PRÉLIMINAIRE 3.3.1. Considérons une variété lisse M . On note $\tau_M : TM \rightarrow M$ son fibré tangent et $\tau_M^\bullet : T^*M \rightarrow M$ son fibré cotangent. Étant donné un groupe de Lie G , un G -fibré principal $P \rightarrow M$ (avec action à droite) et un G -espace à gauche F , on écrit $P \times^G F \rightarrow M$ le fibré associé de fibre typique F .

3.3.1. Espaces symétriques. Soient U un groupe de Lie, K un sous-groupe fermé de U , $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{k}$ désignent les algèbres de Lie de U et K respectivement, et soit θ un automorphisme involutif de U . Les données (U, K, θ) constituent une paire symétrique lorsque U est stable (ou fixé) par θ de telle sorte que

$$U_e^\theta \subseteq K \subseteq U^\theta$$

où U^θ est l'ensemble des éléments de U qui sont stable par θ et U_e^θ est la composante neutre de U^θ , ou de même, $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}^\theta$.

Considérons une paire symétrique (U, K, θ) . Si $\mathfrak{p}$ désigne l'espace propre de $d\theta$ associé à la valeur propre -1 , c-à-d, $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{u}; d\theta(X) = -X\}$; alors

$$(3.3.2) \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

est une décomposition symétrique dans le sens où

$$(3.3.3) \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k},$$

cf. [Nom54].

Étant donnée une paire symétrique (U, K, θ) , le quotient U/K s'appelle *espace symétrique*. Un *espace symétrique riemannien* est un espace symétrique U/K muni d'une métrique riemannienne U -invariante. Une métrique de ce type est déterminée par un produit scalaire K -invariant sur le facteur $\mathfrak{p}$ de la décomposition symétrique correspondante $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. On va justifier comment un espace symétrique quelconque U/K avec K compact admet une métrique U -invariante : On fixe un produit scalaire K -invariant sur l'espace tangent $T_{eK}(U/K)$ (un tel produit scalaire existe toujours puisque K est compact) et par l'action de U , on obtient une métrique riemannienne U -invariante sur U/K . Donc puisque le produit scalaire est sur $T_{eK}(U/K) \cong \mathfrak{p}$, on choisit le produit scalaire sur $\mathfrak{p}$ et le rend K -invariant.

Notre objet d'études est de travailler avec les espaces symétriques compacts riemannien muni d'une métrique U -invariante.

Un sous-espace de *Cartan* (ou sous-algèbre de *Cartan*) $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ par rapport à la décomposition symétrique (3.3.2) est une sous-algèbre de Lie abélienne de $\mathfrak{u}$ contenue dans $\mathfrak{p}$ et maximale pour cette propriété (le choix d'un sous espace de Cartan $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ est unique modulo l'action adjointe de K sur $\mathfrak{p}$); cf. [Mac79, p.122], [Wol11, §8.6 p.253]. Rappelons qu'une sous-algèbre de Lie quelconque de $\mathfrak{u}$ contenue dans $\mathfrak{p}$ est nécessairement abélienne puisque $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$. La dimension de $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ s'appelle *rang* de l'espace symétrique.

Soit (U, K, θ) une paire symétrique. Lorsque U est compact et connexe, on dit que la paire symétrique (U, K, θ) est compacte. Soit U/K l'espace symétrique compact associé. La décomposition symétrique (3.3.2) s'écrit toujours comme

$$(3.3.4) \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p},$$

et chaque élément u de U peut s'écrire sous la forme

$$u = y \exp(X), \quad y \in K, X \in \mathfrak{p},$$

mais cette écriture n'est pas unique, cf. [Far03].

Soient U un groupe de Lie compact et K un sous-groupe fermé. L'inclusion de K dans U détermine une extension

$$(3.3.5) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{k} \xrightarrow{j} \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{p} \longrightarrow 0$$

de K -représentations, la projection $T_e U \rightarrow T_K(U/K)$ induit un isomorphisme de $\mathfrak{p}$ vers l'espace tangent $T_K(U/K)$ à U/K au point K de U/K , et la trivialisation à gauche $U \times \mathfrak{u} \rightarrow TU$ du fibré tangent de U induit l'isomorphisme suivant

$$(3.3.6) \quad U \times^K \mathfrak{p} \rightarrow T(U/K), \quad [x, Y] \mapsto xY, \quad x \in U, Y \in \mathfrak{p},$$

de fibrés vectoriels au-dessus de U/K où le fibré vectoriel $U \times^K \mathfrak{p}$ est le quotient de $U \times \mathfrak{p}$ par l'action de K définie comme $(x, Y) \mapsto (xk, \text{Ad}_{k^{-1}} Y)$. La notation xY représente l'image de l'action de $x \in U$ sur $Y \in \mathfrak{p} \cong T_K(U/K)$. Ainsi, le fibré tangent $\tau_{U/K}: T(U/K) \rightarrow U/K$ de U/K est associé au K -fibré principal $U \rightarrow U/K$ et à la K -représentation $\mathfrak{p}$. La métrique riemannienne sur U/K induit un isomorphisme U -équivariant

$$(3.3.7) \quad T^*(U/K) \rightarrow T(U/K)$$

de fibrés vectoriels sur U/K . Ainsi, en utilisant cette identification, nous pouvons identifier $T^*(U/K)$ par $U \times^K \mathfrak{p}$.

Comme d'habitude on munit $\mathfrak{u}$ d'un produit scalaire U -invariant $\langle \cdot, \cdot \rangle$. L'expression *complémentaire orthogonal* renvoie désormais à ce produit scalaire.

EXEMPLE 3.3.8. Notre référence pour les notations et la terminologie est [Far03]. Soit K un groupe de Lie compact connexe. On désigne par K_Δ la diagonale de K dans $U = K \times K$. L'association $(x, y) \mapsto xy^{-1}$, où $x, y \in K$, induit un difféomorphisme

$$(K \times K)/K_\Delta \rightarrow K,$$

ainsi qu'une $(K \times K)$ -action sur K , vu en tant qu'espace homogène U/K_Δ , donnée par

$$(3.3.9) \quad (K \times K) \times K \rightarrow K, \quad (x, y, z) \mapsto xzy^{-1}.$$

La paire $(K \times K, K_\Delta)$ est symétrique d'involution θ donnée par $\theta(x, y) = (y, x)$. De plus,

$$(3.3.10) \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{k}_\Delta \oplus \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{k}_\Delta = \{(X, X); X \in \mathfrak{k}\}, \quad \mathfrak{p} = \{(X, -X); X \in \mathfrak{k}\}$$

est une décomposition symétrique. Cet exemple nous dit qu'un groupe de Lie peut être vu comme un espace symétrique sous l'action de $K \times K$. On va utiliser cet exemple dans les parties suivantes avec les mêmes notations.

EXEMPLE 3.3.11. Nous allons expliquer l'un de plus important exemple d'espace symétrique compact de rang 1. Considérons l'espace symétrique U/K avec $U = \text{SO}(n+1)$ et $K = \text{SO}(n)$. Dans ce cas U/K s'identifie à la n -sphère unité $\mathbb{S}^n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Nous avons le point base $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$. L'espace $\mathfrak{p}$ qui vient de la décomposition de Cartan $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est l'ensemble des matrices

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -x^t \\ x & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Nous pouvons donc identifier $\mathfrak{p}$ avec $\mathbb{R}^n$. Le sous-espace maximale abélien $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{p}$ est de dimension 1 et on peut l'écrire par $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \{\theta H_0 \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ avec

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

On peut aussi écrire les sphère $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{S}^3$ comme dans l'exemple précédent puisqu'ils sont des groupes de Lie.

REMARQUE 3.3.12. En utilisant l'application moment, nous pouvons écrire l'identification de $T^*(U/K)$ avec $U \times^K \mathfrak{p}^*$ comme suit aussi : Par trivialisisation à gauche $U \times \mathfrak{u}^* \rightarrow T^*U$ du fibré cotangent de U , l'application moment $\mu: T^*U \rightarrow \mathfrak{k}^*$ de l'action induite de K sur T^*U s'écrit comme la composée

$$(3.3.13) \quad U \times \mathfrak{u}^* \xrightarrow{pr_{\mathfrak{u}}} \mathfrak{u}^* \xrightarrow{j^*} \mathfrak{k}^*.$$

Le lieu des zéros de μ est donné par la sous-variété $U \times \mathfrak{p}^*$ de $U \times \mathfrak{u}^*$. Le quotient symplectique $T^*U//K$ revient donc à l'espace lisse $U \times^K \mathfrak{p}^*$, c'est même une variété analytique réelle.

Espaces symétriques complexifiés. Soient $U^{\mathbb{C}}$ et $K^{\mathbb{C}}$ les complexifiés de U et K respectivement. Une complexification universelle $U^{\mathbb{C}}$ (resp. $K^{\mathbb{C}}$) d'un groupe de Lie U (resp. K) est un groupe de Lie complexe $U^{\mathbb{C}}$ (resp. $K^{\mathbb{C}}$) avec un morphisme continu $\gamma^U: U \hookrightarrow U^{\mathbb{C}}$ (resp. $\gamma^K: K \hookrightarrow K^{\mathbb{C}}$) tel que tout morphisme continu de U (resp. K) dans un groupe de Lie complexe G se factorise uniquement par γ^U (resp. γ^K) en un morphisme holomorphe $U^{\mathbb{C}}$ (resp. $K^{\mathbb{C}}$) dans G , cf. [Las78].

EXEMPLE 3.3.14. Nous allons montrer que pour la sphère unité $\mathbb{S}^1$, le complexifié est $\mathbb{C}^*$. Soient $\varphi: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow G$ où G est un groupe complexe et $X := \frac{1}{2i\pi}d\varphi(1)$. Alors le morphisme $\mathbb{C} \rightarrow G$, $z \mapsto \exp_G(zX)$ est un morphisme de groupes holomorphes, qui est trivial sur $2i\pi\mathbb{Z}$. Ainsi, il se factorise par le quotient $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$ (induit par $z \mapsto e^z$) en un morphisme $\mathbb{C}^* \rightarrow G$ qui prolonge φ si l'on identifie $\mathbb{S}^1$ à $\{z \in \mathbb{C}^*; |z| = 1\}$.

Remarquons que $K^{\mathbb{C}}$ est un sous-groupe fermé de $U^{\mathbb{C}}$. La paire $(U^{\mathbb{C}}, K^{\mathbb{C}})$ acquiert alors une structure de paire symétrique complexe comme suit : Par hypothèse (U, K, θ) est une paire symétrique. Gardons la notation θ pour désigner le prolongement holomorphe de θ à $U^{\mathbb{C}}$. Nous avons l'application polaire suivante : $\phi: U \times \mathfrak{u} \rightarrow U^{\mathbb{C}}, (u, X) \mapsto u \exp(iX)$ qui est un difféomorphisme. Ainsi, pour tout $x = u \exp(iX) \in U^{\mathbb{C}}$ ($u \in U, X \in \mathfrak{u}$), on a

$$\theta(x) = \theta(u) \exp(id\theta X).$$

Ainsi la paire $(U^{\mathbb{C}}, K^{\mathbb{C}}, \theta)$ est symétrique. L'espace homogène $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ possède une structure naturelle de variété analytique complexe. C'est la complexification analytique de U/K , cf. [Las78].

RAPPEL 3.3.15. Par un choix de représentation unitaire fidèle, on réalise U en tant que sous groupe fermé d'un certain groupe unitaire $U(n)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}} \subset M(n, \mathbb{C})$ de $U^{\mathbb{C}}(M(n, \mathbb{C}))$ désigne l'espace des matrices complexes $n \times n$ dispose d'un produit scalaire naturel $(X|Y) = \text{tr}(XY^*)$ (qui est hermitien), lorsque X et Y parcourent $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$. En particulier, la restriction de ce produit scalaire à $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{u}(n)$ vaut $(X|Y) = -\text{tr}(XY)$. Montrons que ce produit scalaire est Ad_U -invariant. Pour tout $z \in U^{\mathbb{C}}$, on a

$$(\mathrm{Ad}_z X | \mathrm{Ad}_z Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{Ad}_z X \mathrm{Ad}_{z^*}^{-1} Y^*);$$

le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ est Ad_U -invariant (mais pas $\text{Ad}_{U^{\mathbb{C}}}$ -invariant) puisqu'on a $z^* = z^{-1}$ pour tout $z \in U$ (mais pas pour tout $z \in U^{\mathbb{C}}$). Plus généralement, un produit scalaire invariant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathfrak{u}$ se prolonge en un produit scalaire Ad_U -invariant sur $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{u} + J(\mathfrak{u})$ par l'expression

$$\langle X_1 + JY_1, X_2 + JY_2 \rangle = \langle X_1, X_2 \rangle + \langle Y_1, Y_2 \rangle;$$

où J signifie l'opérateur de la multiplication par i sur $u^{\mathbb{C}}$, cf. [Hal94, p.114]. Voir également [HZ09, p.288].

On va maintenant introduire une structure kählérienne. Pour cela, supposons désormais que U/K soit un espace symétrique compact riemannien. Nous allons identifier le fibré cotangent de U/K avec le complexifié de U/K . Ensuite, en combinant la structure complexe standard sur $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ avec la structure symplectique standard sur $T^*(U/K)$, nous allons obtenir une structure kählérienne sur les deux côtés, le fibré cotangent $T^*(U/K)$ et le complexifié $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$.

Ici et dans toute la suite, la notation

$$[x, Y] \in U \times^K \mathfrak{p}$$

représente le point associé à $(x, Y) \in U \times \mathfrak{p}$ où $x \in U$ et $Y \in \mathfrak{p}$. Considérons l'application exponentielle dans une fibre

$$\exp_{[x]}: T_{[x]}(U/K) \rightarrow U/K, [x] = xK \in U/K.$$

Lorsque γ est l'unique géodésique avec $\gamma(0) = [x]$ et $\dot{\gamma}(0) = Y$, alors $\exp_{[x]}(Y) = \gamma(1)$. Pour $[x]$ quelconque, l'application $\exp_{[x]}$ admet un prolongement analytique en une application holomorphe

$$\exp_{[x]}: T_{[x]}^{\mathbb{C}}(U/K) \rightarrow U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}, [x] \in U/K.$$

Alors l'application

$$(3.3.16) \quad T(U/K) \rightarrow U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}, ([x], Y) \mapsto \exp_{[x]}(iY), [x] \in U/K, Y \in T_{[x]}(U/K),$$

est un difféomorphisme, voir e.g. [HM05, Proposition 8]. Ce difféomorphisme induit une projection canonique $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}} \rightarrow U/K$. En outre, via l'injection canonique $U/K \rightarrow U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$, on regarde $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ en tant que complexifié de l'espace symétrique U/K de la manière évidente, voir e.g. [Las78].

Du point de vue de la quantification, on veut identifier $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ avec le fibré cotangent $T^*(U/K)$. Mais, puisque U/K est riemannien, on a une identification naturelle de $T^*(U/K)$ avec le fibré tangent $T(U/K)$, cf. (3.3.7). D'où, le difféomorphisme (3.3.16) nous donne une identification de $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ avec $T^*(U/K)$.

On note Π la composée de (3.3.16) avec (3.3.7) qui nous donne un difféomorphisme

$$(3.3.17) \quad \Pi: T^*(U/K) \rightarrow U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}.$$

En combinant la structure symplectique du fibré cotangent du membre gauche de (3.3.17) avec la structure analytique complexe du membre droit, on obtient une structure kählérienne U -invariante sur les deux membres de (3.3.17) lorsque ces deux structures sont compatible. Dans [Ste90], on montre que la structure symplectique et la structure complexe sont compatibles et nous donne une structure kählérienne. De même, le difféomorphisme (3.3.7) munit $T(U/K)$ d'une structure kählérienne U -invariante. On utilisera dorénavant chacun des espaces $U \times^K \mathfrak{p}$, $U \times^K \mathfrak{p}^*$, $T(U/K)$, $T^*(U/K)$, $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ en tant que réalisations concrètes de la même variété kählérienne abstraite.

Les applications polaires $U \times \mathfrak{u} \rightarrow U^{\mathbb{C}}$ resp. $K \times \mathfrak{k} \rightarrow K^{\mathbb{C}}$ nous donnent les difféomorphismes $U \times^K \mathfrak{u} \rightarrow U^{\mathbb{C}}/K$ resp. $K \times^K \mathfrak{k} \rightarrow K^{\mathbb{C}}/K$. Et ces difféomorphismes induisent le difféomorphisme suivant de la façon évident

$$(3.3.18) \quad U \times^K \mathfrak{p} \rightarrow U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}, [x, Y] \mapsto [x \exp(iY)], x \in U, Y \in \mathfrak{p}.$$

La structure kählérienne peut s'exprimer en fonction de cette application.

À l'aide de (3.3.18), on considère la fonction suivante :

$$(3.3.19) \quad \kappa: U \times^K \mathfrak{p} \rightarrow \mathbb{R}, \kappa[x, Y] = \|Y\|^2, x \in U, Y \in \mathfrak{p}.$$

C'est un potentiel kählérien global ([Ste90]).

Considérons l'Exemple 3.3.8. Dans ce cas l'application polaire (3.3.18) revient à l'application polaire ordinaire $K \times \mathfrak{k} \rightarrow K^{\mathbb{C}}$ et le potentiel kählérien est la fonction κ donnée par $\kappa(x \exp(iY)) = \|Y\|^2$ ($x \in K, Y \in \mathfrak{k}$) [Hal02].

REMARQUE 3.3.20. La variété symplectique $T^*(U/K)$ provient de $T^*(U)$ par réduction symplectique, et de plus, la structure kählérienne passe également par le quotient de la réduction symplectique, et cela nous donne une structure kählérienne sur $T^*(U/K)$, cf. e.g. [Bry95, Lecture 8 p.149]. Cela veut dire que l'inclusion

$$\mu^{-1}(0) = U \times \mathfrak{p}^* \rightarrow \mu^{-1}(0)K^{\mathbb{C}} = (U \times \mathfrak{p}^*)K^{\mathbb{C}} = U \times \mathfrak{u}^* \cong U^{\mathbb{C}}$$

induit un difféomorphisme

$$(3.3.21) \quad T^*(U/K) \cong \mu^{-1}(0)/K = U \times^K \mathfrak{p}^* \rightarrow U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}.$$

3.3.2. Quantification géométrique et Couplage de BKS pour les espaces symétriques compacts. Cette partie est consacrée à la construction du couplage de BKS pour un espace symétrique compact. On calcule d'abord la fonction η définie par (3.1.11) pour l'espace symétrique compact U/K . Ensuite nous montrons que $\tilde{j}(Y) = \eta(Y/2)$.

PROPOSITION 3.3.22. *Supposons que U/K soit orientable. Alors $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ admet une k -forme holomorphe. En particulier, lorsque K est connexe, U/K est orientable.*

PREUVE. La K -représentation réelle $\mathfrak{p}^*$ est orthogonale et la plus haute puissance extérieure non-triviale $\Lambda^k \mathfrak{p}^*$ est aussi une K -représentation orthogonale, de dimension 1. Cette dernière est donnée par un homomorphisme $K \rightarrow \mathrm{O}(1) \cong \mathbb{Z}/2$ que nous appelons *caractère d'orientation* de U/K . Alors l'espace symétrique U/K est orientable si et seulement si le caractère d'orientation est trivial. En particulier, lorsque K est connexe, le caractère d'orientation est trivial.

L'espace complexifié à l'identité de l'espace cotangent $T_{[e]}^*(U/K)$ qui est $(T_{[e]}^*(U/K))^{\mathbb{C}} \cong (\mathfrak{p}^*)^{\mathbb{C}}$ peut s'identifier avec $\mathfrak{p}^* \oplus i\mathfrak{p}^*$. Ainsi, chaque élément Z de $(T_{[e]}^*(U/K))^{\mathbb{C}} \cong (\mathfrak{p}^*)^{\mathbb{C}}$ peut s'écrire par $Z = X + iY$ où $X, Y \in T_{[e]}^*(U/K) \cong \mathfrak{p}^*$. Étant donnée une base $X_1, \dots, X_k$ pour la première composante de $\mathfrak{p}^* \oplus i\mathfrak{p}^*$ et la même base notée $Y_1, \dots, Y_k$ pour la deuxième composante, la somme $Z_j = X_j + iY_j$ est de type $(1, 0)$ que l'on appelle composante holomorphe de $(T_{[e]}^*(U/K))^{\mathbb{C}}$ et $\bar{Z}_j = X_j - iY_j$ est de type $(0, 1)$ que l'on appelle composante anti holomorphe de $(T_{[e]}^*(U/K))^{\mathbb{C}}$.

Soient maintenant $Z_1, \dots, Z_k$ des vecteurs linéairement indépendents de type $(1, 0)$ de $(T^*_{[e]}(U/K))^{\mathbb{C}}$. Alors le produit wedge $\Omega_{[e]} = Z_1 \wedge \dots \wedge Z_k$ est une $(k, 0)$ -forme sur $(T_{[e]}(U/K))^{\mathbb{C}}$ en identité, cad une k -forme holomorphe. On prolonge cette k -forme par translation à gauche en une k -forme holomorphe globale non nulle partout sur $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ qui est invariante à gauche sous l'action de $U^{\mathbb{C}}$. On va noter cette k -forme holomorphe $\Omega_{[z]}$ pour $[z] \in U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$. Obtenir une 1-forme globale sur $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ à partir des 1-formes Z_j en identité par la translation à gauche est valable si et seulement si $L_{z^{-1}}^* = L_{(zh)^{-1}}^*$ sur $\Lambda_{\text{top}}^*(U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}})_{[e]}$ pour tout $h \in K^{\mathbb{C}}$ et $z \in U^{\mathbb{C}}$ où L_z signifie la translation à gauche par z . Puisque nous avons $L_{zh} = L_z \circ L_h$, il s'ensuit que la 1-forme globale sur $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ existe si et seulement si L_h^* est l'application identité sur $\Lambda_{\text{top}}^*(U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}})_{[e]}$ pour tout $h \in K^{\mathbb{C}}$. Pour la k -forme holomorphe $\Omega_{[z]}$, nous constatons que L_h^* nous donne la multiplication par le déterminant de l'action coadjointe. Ainsi, pour obtenir la k -forme holomorphe $\Omega_{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}}$ par translation à gauche de $\Omega_{[e]}$, il faut que ce déterminant soit égal à 1 et ceci est vrai puisque U/K est orientable. On choisit pour ϑ de $T^*(U/K)$ la k -forme $\Omega_{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}}$ sur $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ lorsqu'on identifie $T^*(U/K)$ avec $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$.

La $2k$ -forme réelle invariante à gauche $\bar{\vartheta} \wedge \vartheta$ sur $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ nous donne la forme volume sur $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$. $\square$

Soit $\rho_g: U/K \rightarrow U/K$ l'action de U sur U/K qui est un difféomorphisme. Nous constatons que l'action $\rho_g: U/K \rightarrow U/K$ nous donne une action du fibré cotangent par $\rho_{g^{-1}}^*$ qui préserve la forme symplectique naturelle. Cette action préserve en particulier la forme volume de Liouville. Soit $\psi: U \times \mathfrak{p} \rightarrow T^*(U/K)$ donnée par $\psi(g, Y) = \Psi([g, Y])$ où le difféomorphisme $\Psi: U \times^K \mathfrak{p} \rightarrow T^*(U/K)$ est donné par $\Psi([g, Y]) = (\rho_{g*} \pi_* Y)^\sharp \in T^*_{\pi(g)}(U/K)$ avec $\sharp$ signifiant l'identification des éléments du fibré cotangent avec les éléments du fibré tangent via la métrique.

Soient $\{e_j\}$, $1 \leq j \leq l$ une base de $\mathfrak{k}$ et $\{f_j\}$, $1 \leq k \leq l$ une base de $\mathfrak{p}$ telle que $e_1, \dots, e_l, f_1, \dots, f_k$ constitue une base de $\mathfrak{u}$. Choisissons une base duale $\{\eta_j\}$, $1 \leq j \leq k$ de $\mathfrak{p}^*$. Notons $y_j \in \mathbb{R}$ les coordonnées associées d'un point $Y \in \mathfrak{p}$ par rapport à la base $\{f_j\}$. Notons $\vec{e}_j, \vec{f}_j$ et $\vec{\eta}_j$ les champs des vecteurs invariants à gauche et les 1-formes sur U dont leur évaluation en identité $e \in U$ est égal à e_j, f_j et η_j resp.

PROPOSITION 3.3.23. *Il existe une constante non nulle $\lambda \in \mathbb{R}^*$ telle que, lorsqu'on interprète les champs des vecteurs $\vec{f}_j$ sur U (invariante à gauche) et les ∂_{y_i} sur $\mathfrak{p}$ (invariante par translation) comme étant champ des vecteurs sur $U \times \mathfrak{p}$, alors pour tout $(g, Y) \in U \times \mathfrak{p}$, nous avons*

$$\psi^* \varepsilon(\vec{f}_1|_{(g,Y)}, \dots, \vec{f}_k|_{(g,Y)}, \partial_{y_1}|_{(g,Y)}, \dots, \partial_{y_k}|_{(g,Y)}) = \lambda.$$

où l'application $\psi: U \times \mathfrak{p} \rightarrow T^*(U/K)$ est donnée ci-dessus.

PREUVE. L'application ψ nous donne la relation suivante entre l'action à gauche L_g de U avec U -action $\rho_{g^{-1}}^*$ de $T^*(U/K)$

$$\psi \circ L_g = \rho_{g^{-1}}^* \circ \psi \quad \text{avec} \quad L_g(x, Y) = (gx, Y).$$

Nous avons ainsi

$$L_g^* \psi^* \varepsilon = \psi^* \rho_g^* \varepsilon = \psi^* \varepsilon.$$

Cela nous dit que l'évaluation du pull-back de la forme volume de Liouville sur les vecteurs $\vec{f}_j$ et ∂_{y_i} en un point (g, Y) est égale à l'évaluation sur les mêmes vecteurs au point (e, Y) , cad qu'il est indépendant du point $g \in U$. Il faut donc montrer que cette évaluation est indépendante de Y également pour compléter la preuve. Pour cela, nous constatons d'abord que pour la projection $\tau_{U/K}^\bullet: T^*(U/K) \rightarrow U/K$, nous avons $\tau^\bullet(\psi(e, Y)) = \pi(e)$ et ainsi $\psi(e, Y) \in T_{\pi(e)}^*(U/K)$. Ensuite, on choisit un système des coordonnées locales $\{q_j\}$, $1 \leq j \leq k$ sur U/K autour de $\pi(e)$ en l'associant aux coordonnées globales $\{p_j\}$, $1 \leq j \leq k$ pour les fibres du fibré cotangent $T^*(U/K)$. Ensuite on compare la fonction ψ sur ces coordonnées locales et sur les coordonnées standard. C'est à dire, pour la base $\{f_j\}$, $1 \leq j \leq k$ de $\mathfrak{p}$, il existe des constantes A_{ij} telle que

$$\psi(e, f_j) = \sum_{i=1}^k A_{ij} dq_j|_{\pi(e)}.$$

Puisque cette écriture ne dépend pas de f_j et le fait que π_e^* est un difféomorphisme de $\mathfrak{p}^*$ vers $\mathfrak{p}^*$, le $\det(A_{ij})$ est non nulle. Ici on précise que puisque l'application ψ va dans le fibré cotangent, on a regardé l'algèbre duale $\mathfrak{p}^*$ et non pas l'algèbre $\mathfrak{p}$. Puisque $\psi(e, Y) \in T_{\pi(e)}^*(U/K)$, on a

$$\psi(e, Y) = \sum_{i,j=1}^k y_i A_{ij} dq_j|_{\pi(e)}.$$

D'un autre côté, en coordonnées standard (q, p) de $T^*(U/K)$, nous avons

$$\psi(e, Y) = (q, p)$$

avec $p_j = \sum_{i=1}^k y_i A_{ij}$. On va utiliser ce dernier pour pousser les vecteurs $\vec{f}_j$ et ∂_{y_j} vers $T^*(U/K)$ par ψ en (e, Y) . Nous avons pour ∂_{y_j}

$$(3.3.24) \quad \psi_* \partial_{y_j}|_{(e, Y)} = \sum_{i=1}^k A_{ij} \partial_{p_j}|_{\psi(e, Y)}.$$

De l'autre côté, nous utilisons $\tau^\bullet(\psi(e, Y)) = \pi(e)$ pour pousser les vecteurs $\vec{f}_j$ vers $T^*(U/K)$ en (e, Y)

$$\tau_*^\bullet \psi_* \vec{f}_j|_{(e, Y)} = \pi_* \vec{f}_j|_e.$$

Ainsi il existe une matrice carrée avec des coefficients B_{ij} non nulle telle que

$$\tau_*^\bullet \psi_* \vec{f}_j|_{(e, Y)} = \pi_* \vec{f}_j|_e = \sum_{i,j=1}^k B_{ij} \partial_{q_j}$$

puisqu'on a poussé vers U/K via π_* . Mais, si on considère la projection $\tau^\bullet$, on constate qu'il existe des fonctions $C_{ij}(y)$ telles que le push-forward ψ_* appliqué aux vecteurs $\vec{f}_j$ vers

$T^*(U/K)$ en (e, Y) nous donne

$$\psi_* \vec{f}_j|_{(e,Y)} = \sum_{i,j=1}^k B_{ij} \partial_{q_j}|_{\psi(e,Y)} + \sum_{i,j=1}^k C_{ij}(y) \partial_{p_j}|_{\psi(e,Y)}.$$

Nous avons enfin le pull-back de la forme volume de Liouville évalué en ces vecteurs $\vec{f}_j$ et ∂_{y_j} au point (e, Y) est égal à

$$\begin{aligned} \psi^*(\varepsilon)(\vec{f}_1|_{(e,Y)}, \dots, \vec{f}_k|_{(e,Y)}, \partial_{y_1}|_{(e,Y)}, \dots, \partial_{y_k}|_{(e,Y)}) &= \\ &= \varepsilon(\psi_* \vec{f}_1|_{(e,Y)}, \dots, \psi_* \vec{f}_k|_{(e,Y)}, \psi_* \partial_{y_1}|_{(e,Y)}, \dots, \psi_* \partial_{y_k}|_{(e,Y)}) = \det(A_{ij}) \cdot \det(B_{ij}) \end{aligned}$$

ce qui nous donne l'indépendance de Y . D'où on a le résultat énoncé. $\square$

Le théorème suivant nous donne la valeur explicite de la fonction η sur $U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C} \cong U \times^K \mathfrak{p}$ restreinte en sous-algèbre $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$.

THÉORÈME 3.3.25. *Supposons que U/K soit orientable. Alors $M = U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$ admet une forme volume holomorphe, et la fonction η définie par (3.1.11) sur $T^*(U/K) \cong U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$ est U -invariante, provient d'une fonction K -invariante (par rapport à l'action adjointe) sur $\mathfrak{p}$ encore notée η , et se caractérise comme suit.*

Sur $\mathfrak{p}$, la fonction η donnée par l'expression

$$(3.3.26) \quad \eta(Y) = \det \left(\frac{\sin(\text{ad}(2Y))}{\text{ad}(2Y)} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p} \right)^{1/2}, \quad Y \in \mathfrak{p}, \quad \eta(0) = 1.$$

Autrement dit, η est l'unique fonction K -invariante sur $\mathfrak{p}$ dont la restriction à une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{p}$ se lit

$$(3.3.27) \quad \eta(Y) = \prod_{\alpha \in R^+} \left(\frac{\sinh(2\alpha(Y))}{2\alpha(Y)} \right)^{m_\alpha/2}, \quad Y \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p};$$

où on a choisit préalablement une chambre de Weyl dominante, un système $R^+ = R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ de racines restreintes positives dans $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}^$ et où m_α désigne la multiplicité de chaque racine restreinte α .*

PREUVE. Par la Proposition 3.3.22, la mesure donnée sur $U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$ est la forme volume $\overline{\vartheta} \wedge \vartheta$ qui est une $2k$ -forme invariante à gauche sur $U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$. Soit $\psi: U \times \mathfrak{p} \rightarrow T^*(U/K)$ l'application donnée ci-dessus. Sur la variété $U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$, nous avons deux formes volumes, forme volume de Liouville ε et la forme volume $\overline{\vartheta} \wedge \vartheta$. La forme volume de Liouville ε se décrit plus facilement sur $U \times^K \mathfrak{p}$ (par l'identification avec $T^*(U/K)$) et la forme volume $\overline{\vartheta} \wedge \vartheta$ peut se décrire plus facilement en terme de la variété $U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$ comme étant une forme volume invariante par translation à gauche complexe, cf. Proposition 3.3.22. Ces deux formes volumes diffèrent par une fonction puisqu'elles sont de dimension maximale sur $U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$. Notre but est de calculer cette fonction qui est η^2 qu'on cherche. Mais on ne connaît pas le lien entre les bases des variétés $U \times^K \mathfrak{p}$ et $U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$.

Nous allons utiliser un argument similaire à celui dans la preuve du [Hal97, Lemme5]. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$(3.3.28) \quad \begin{array}{ccc} U \times \mathfrak{p} & \xrightarrow{\Phi} & U^{\mathbb{C}} \\ \downarrow a & & \downarrow \pi_{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}} \\ U \times^K \mathfrak{p} & \xrightarrow{\phi} & U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}} \end{array}$$

où Φ est la restriction de l'application polaire à $U \times \mathfrak{p}$, cad $U \times \mathfrak{p} \rightarrow U^{\mathbb{C}}$, $(x, Y) \rightarrow xe^{iY}$, la flèche verticale à gauche est l'application $a: U \times \mathfrak{p} \rightarrow U \times^K \mathfrak{p}$, $(x, Y) \mapsto [x, Y]$, la flèche verticale à droite est la projection $\pi_{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}}: U^{\mathbb{C}} \rightarrow U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ et l'application $\phi: U \times^K \mathfrak{p} \rightarrow U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ est l'application polaire définie ci-dessus.

Supposons que les deux formes volumes soient définies sur $U \times^K \mathfrak{p} \cong T^*(U/K)$. On sait que la dimension de $T^*(U/K)$ est $2k$ et on constate que la dimension de $U \times \mathfrak{p}$ est différente de celle de $T^*(U/K)$. Prenons alors les $2k$ vecteurs $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_k}$ (qu'on les interprète en tant que champs des vecteurs invariant à gauche sur U resp. invariant par translation sur $\mathfrak{p}$) sur $U \times \mathfrak{p}$ qui se projettent sur une base de $T^*(U/K)$. Par la proposition 3.3.23, cette projection est bien une base de $T^*(U/K)$ et de plus, l'évaluation du pull back de la forme volume de Liouville sur cette base ne dépend pas du point choisi. Autrement dit, l'évaluation du pull-back de Liouville sur $U \times \mathfrak{p}$, $\psi^*(\varepsilon)$, sur ces $2k$ vecteurs est une fonction constante sur $U \times \mathfrak{p}$. On va calculer cette fonction η^2 en évaluant les deux formes volumes sur une même base en un point de la variété et ensuite en prenant le quotient. C'est à dire

$$\eta^2 = \frac{\psi^*(\bar{\vartheta} \wedge \vartheta)(\vec{f}_1|_{(g,Y)}, \dots, \vec{f}_k|_{(g,Y)}, \partial_{y_1}|_{(g,Y)}, \dots, \partial_{y_k}|_{(g,Y)})}{\psi^*\varepsilon(\vec{f}_1|_{(g,Y)}, \dots, \vec{f}_k|_{(g,Y)}, \partial_{y_1}|_{(g,Y)}, \dots, \partial_{y_k}|_{(g,Y)})}.$$

Par la Proposition 3.3.23, on sait que $\psi^*\varepsilon$ évaluée sur ces $2k$ vecteurs est une fonction constante. Il nous reste à calculer l'évaluation du pull-back de $\bar{\vartheta} \wedge \vartheta$ sur ces vecteurs. Mais, on ne connaît pas ce pull-back. Pour résoudre ce problème, on utilise le diagramme commutatif 3.3.28 qui nous dit que c'est également le pull-back de $\bar{\vartheta} \wedge \vartheta$ d'abord vers $U^{\mathbb{C}}$ et ensuite vers $U \times \mathfrak{p}$ par l'application Φ . On ne connaît pas ce pull-back non plus, mais on connaît la forme volume $\bar{\vartheta} \wedge \vartheta$ sur $U^{\mathbb{C}}$ comme étant produit wedge des 1-formes invariantes à gauche associées à $\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p}$ et ainsi, on peut calculer l'évaluation de $\bar{\vartheta} \wedge \vartheta$ sur les vecteurs images par Φ_* sur $U^{\mathbb{C}}$. En utilisant ce dernier, on pourra calculer le numérateur du quotient dans la formule pour η^2 . La fonction η^2 peut se calculer alors par le quotient suivant

$$\eta^2(x, Y) = \frac{\bar{\vartheta} \wedge \vartheta(\Phi_*\vec{f}_1|_{(g,Y)}, \dots, \Phi_*\vec{f}_k|_{(g,Y)}, \Phi_*\partial_{y_1}|_{(g,Y)}, \dots, \Phi_*\partial_{y_k}|_{(g,Y)})}{\psi^*\varepsilon(\vec{f}_1|_{(g,Y)}, \dots, \vec{f}_k|_{(g,Y)}, \partial_{y_1}|_{(g,Y)}, \dots, \partial_{y_k}|_{(g,Y)})}.$$

Soit $x \in U$ et $Y \in \mathfrak{u}$. On identifie $T_x U$ avec l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ par translation à gauche et pour chaque point $Y \in \mathfrak{u}$, on identifie $T_Y \mathfrak{u}$ (en tant qu'espace vectoriel) à l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$, et ainsi, l'espace tangent $T_{(x,Y)}(U \times \mathfrak{u})$ avec $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}$. De la même façon, en chaque point $x \exp(iY)$ de $U^{\mathbb{C}}$, l'espace tangent $T_{x \exp(iY)}(U^{\mathbb{C}})$ s'identifie avec l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ par translation à gauche. Et en utilisant le fait que $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ est isomorphe à $\mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$ qui est isomorphe

à $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}$, on identifie l'espace tangent $T_{x \exp(iY)}(U^{\mathbb{C}})$ à $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}$ via translation à gauche. Ainsi, on regarde l'application tangente comme étant une application $\Phi_*: \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u} \rightarrow \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{u}$. Soit $x \in U$ et $Y \in \mathfrak{p} \subseteq T_e U$, et considérons un point (x, Y) de $U \times \mathfrak{p}$, aussi bien que le point $[x, Y]$ de $U \times^K \mathfrak{p}$. L'espace tangent de $U \times \mathfrak{p}$ au point (x, Y) s'identifie avec $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{p}$ comme auparavant (translation à gauche pour U et translation vectorielle pour $\mathfrak{p}$). On connaît la différentielle de Φ par rapport à ces trivialisations comme étant application de $U \times \mathfrak{u} \rightarrow U^{\mathbb{C}}$. Cette différentielle peut s'écrire par la matrice bloc suivante :

$$(3.3.29) \quad \Phi_* = \begin{bmatrix} \cos(\text{ad}_Y) & \frac{1 - \cos(\text{ad}_Y)}{\text{ad}_Y} \\ -\sin(\text{ad}_Y) & \frac{\sin(\text{ad}_Y)}{\text{ad}_Y} \end{bmatrix}$$

Pour $Z \in \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ nous avons

$$\begin{aligned} \cos(\text{ad}_Y)Z &\in \mathfrak{p} \\ \sin(\text{ad}_Y)Z &\in \mathfrak{k} \\ \frac{1 - \cos(\text{ad}_Y)}{\text{ad}_Y}Z &\in \mathfrak{k} \\ \frac{\sin(\text{ad}_Y)}{\text{ad}_Y}Z &\in \mathfrak{p} \end{aligned}$$

où on a utilisé les propriétés $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{p}$ de la décomposition symétrique $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Par abus de langage, on va dire que η^2 est la densité de $\bar{\vartheta} \wedge \vartheta$ par rapport à ε sur $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ après l'avoir identifié avec $T^*(U/K)$. La densité de la mesure de $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ par rapport à la mesure de volume des phases est alors égal à

$$(3.3.30) \quad \det(\cos(\text{ad}_Y)) \det\left(\frac{\sin(\text{ad}_Y)}{\text{ad}_Y}\right) = \det(\cos(\text{ad}_Y) \frac{\sin(\text{ad}_Y)}{\text{ad}_Y}) = \det\left(\frac{\sin(\text{ad}(2Y))}{\text{ad}(2Y)} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}\right).$$

On renvoie le lecteur à l'appendice A pour des rappels à propos de décompositions radicielles correspondantes.

Soit

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit $Y \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$.

— Étant donnée une racine réelle ordinaire $\alpha \in R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$, restreint à $(\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}})_{\alpha} \oplus (\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}})_{\alpha}$,

$$\begin{aligned} \text{ad}(Y) &= \alpha(Y)J \\ (\text{ad}(Y))^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -\alpha(Y) \\ \alpha(Y) & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -\alpha(Y)^2 & 0 \\ 0 & -\alpha(Y)^2 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

— sur $(\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}})_{\alpha} \oplus (\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}})_{\alpha}$,

$$\frac{\sin(\text{ad}(2Y))}{\text{ad}(2Y)} = \frac{\sin(2\alpha(Y)J)}{2\alpha(Y)J} = \frac{\sinh(2\alpha(Y))}{2\alpha(Y)}.$$

Rappelons que $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})} (\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}})_{\alpha}$ (au lieu de $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})} (\mathfrak{q}_{\mathfrak{t}})_{\alpha} \oplus (\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}})_{\alpha}$). Ainsi la valeur de Jacobien que l'on cherche est donnée par l'expression

$$(3.3.31) \quad \eta^2(Y) = \prod_{\alpha \in R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{t}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})} \frac{\sinh(2\alpha(Y))}{2\alpha(Y)}, \quad Y \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}},$$

et d'où,

$$(3.3.32) \quad \eta(Y) = \prod_{\alpha \in R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{t}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})} \sqrt{\frac{\sinh(2\alpha(Y))}{2\alpha(Y)}}, \quad Y \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}},$$

En fonction de racines restreintes réelles positives $R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$, on réécrit (3.3.32) sous forme

$$(3.3.33) \quad \eta(Y) = \prod_{\alpha \in R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})} \left(\frac{\sinh(2\alpha(Y))}{2\alpha(Y)} \right)^{\frac{m_{\alpha}}{2}}, \quad Y \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}.$$

□

La proposition suivante est l'un de résultat de ce chapitre qui nous donne la relation entre la correction métaplectique $\tilde{j}$ et la fonction η sur $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$. On fait une preuve dans le même esprit de Hall dans [Hal02].

PROPOSITION 3.3.34. *La correction métaplectique du couplage de BKS, notée $\tilde{j}$, cf. (3.2.6), est U -invariante et la fonction K -invariante correspondante sur $\mathfrak{p}$, noté toujours $\tilde{j}$ par abus de notation, se lit*

$$(3.3.35) \quad \tilde{j}(Y) = \eta(Y/2), \quad Y \in \mathfrak{p}.$$

PREUVE. Nous allons calculer la fonction $\tilde{j} = \sqrt{\frac{\bar{\vartheta} \wedge (\tau^{\bullet})_{U/K}^* \beta_{U/K}}{c\varepsilon}}$ du couplage BKS définie par (3.2.6). Pour faciliter, on note $(\tau^{\bullet})_{U/K}^* \beta_{U/K} = \alpha$. On a déjà parlé de ϑ dans le Théorème 3.3.25. On va utiliser le même raisonnement que le Théorème 3.3.25. Il nous reste à déterminer l'évaluation de α pour évaluer ces deux formes volumes $\bar{\vartheta} \wedge \alpha$ et ε .

La fonction $\tilde{j}^2$ se calcule par la formule suivante :

$$\tilde{j}^2 = \frac{\psi^*(\bar{\vartheta} \wedge \alpha)(\vec{f}_1|_{(g,Y)}, \dots, \vec{f}_k|_{(g,Y)}, \partial_{y_1}|_{(g,Y)}, \dots, \partial_{y_k}|_{(g,Y)})}{\psi^*\varepsilon(\vec{f}_1|_{(g,Y)}, \dots, \vec{f}_k|_{(g,Y)}, \partial_{y_1}|_{(g,Y)}, \dots, \partial_{y_k}|_{(g,Y)})}.$$

On connaît l'évaluation de $\psi^*\varepsilon$ sur les vecteurs $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_k, \partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_k}$. Pour l'évaluation du pull-back de $\bar{\vartheta} \wedge \alpha$ sur ces vecteurs, on ne connaît pas le pull-back vers $U \times \mathfrak{p}$, il faut donc utiliser le diagramme commutatif 3.3.28 comme dans la preuve du Théorème 3.3.25. On peut voir α comme étant forme sur $U \times \mathfrak{p}$, mais pour $\bar{\vartheta}$, on doit passer par $U^{\mathbb{C}}$ car on le connaît sur $U^{\mathbb{C}}$ comme étant produit wedge des 1-formes invariantes à gauche associées à $\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p}$. On va évaluer le pull-back de $\bar{\vartheta}$ sur les vecteurs images $\Phi_* \partial_{y_j}$ et le pull-back de α sur les vecteurs $\vec{f}_j$. On justifie cela par la preuve de la Proposition 3.3.23 puisque la forme volume $\beta_{U/K}$ est une forme volume sur U/K et le push-forward ψ_* appliqué aux vecteurs ∂_{y_j} en un point (e, Y) nous donne une expression seulement avec des ∂_{p_j} pour les coordonnées

globales $\{p_j\}$ associées des fibres de $T^*(U/K)$ alors que si on l'applique aux vecteurs $\vec{f}_j$, on a à la fois les ∂_{p_j} et les ∂_{q_j} ce qui nous dit qu'on n'aura pas zéro. L'évaluation de pull-back de α est ainsi une fonction constante. On divise donc les $2k$ vecteurs en deux parties et on fait le pull-back séparément pour $\bar{\vartheta}$ et α . Alors la fonction $\tilde{j}^2$ est calculée par

$$\tilde{j}^2 = \frac{\bar{\vartheta}(\Phi_*\partial_{y_1}|_{id}, \dots, \Phi_*\partial_{y_k}|_{id})\psi^*\alpha(\vec{f}_1|_{id}, \dots, \vec{f}_k|_{id})}{\psi^*\varepsilon(\vec{f}_1|_{id}, \dots, \vec{f}_k|_{id}, \partial_{y_1}|_{id}, \dots, \partial_{y_k}|_{id})}.$$

On avait calculé la différentielle Φ_* par la matrice bloc 3.3.29. Nous avons enfin

$$\tilde{j}^2(Y) = \det\left(\frac{\sin \operatorname{ad} Y}{\operatorname{ad} Y}\right).$$

On calcule $\tilde{j}$ en termes des racines restreintes et on a donc

$$(3.3.36) \quad \tilde{j}^2(Y) = \det\left[\frac{\sin \operatorname{ad} Y}{\operatorname{ad} Y}\right]$$

$$(3.3.37) \quad = \prod_{\alpha \in R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{t}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})} \frac{\sinh \alpha(Y)}{\alpha(Y)}$$

$$(3.3.38) \quad = \prod_{\alpha \in R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})} \left(\frac{\sinh \alpha(Y)}{\alpha(Y)}\right)^{m_{\alpha}}.$$

Nous avons enfin

$$\tilde{j}(Y) = \prod_{\alpha \in R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})} \left(\frac{\sinh \alpha(Y)}{\alpha(Y)}\right)^{m_{\alpha}/2}$$

et donc

$$\tilde{j}(Y) = \eta(Y/2)$$

comme cherché. $\square$

Avec tous les ingrédients qu'on a, le couplage (3.2.7) pour les espaces symétriques

$$(3.3.39) \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{h, \text{BKS}} : D_1 \times D_2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

où D_2 est dense dans $L^2(U/K, dxK)$ et D_1 est dense dans $\mathcal{HL}^2(U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}, e^{-\kappa/h}\eta\varepsilon)$ s'écrit par

$$(3.3.40) \quad \langle \Phi, f \rangle_{h, \text{BKS}} = \int_{T^*(U/K)} \bar{\Phi} f e^{-\kappa/2h} \eta(Y/2) \varepsilon.$$

THÉORÈME 3.3.41. *Soient ε la forme volume de Liouville sur $T^*(U/K)$ et dY la forme volume de Lebesgue sur $\mathfrak{p}$. Alors il existe une forme volume invariante à gauche μ (mesure de Haar) sur U telle que nous ayons pour toutes fonctions $f : T^*(U/K) \rightarrow \mathbb{C}$*

$$(3.3.42) \quad \int_{T^*(U/K)} f \varepsilon = \int_{U \times \mathfrak{p}} f \circ \psi \mu \wedge dY$$

lorsque l'un de deux côté a un sens.

PREUVE. On va utiliser les sections locales de $\pi: U \rightarrow U/K$ pour faire une trivialisation de $O \times \mathfrak{p}$ vers $T^*(U/K)$ où $O \in U/K$, i.e. on va d'abord obtenir les formes volumes localement et ensuite on va montrer qu'ils sont globales. Soit donc $s: O \rightarrow U$ une section locale de π . Supposons que U/K admette un système des coordonnées locales $\{q_j\}$. En utilisant cette section, on peut écrire la trivialisation suivante $\sigma_s: O \times \mathfrak{p} \rightarrow T^*(O)$ donnée par

$$\sigma_s(m, Y) = \psi(s(m), Y).$$

Pour une base $\{f_j\}$ de $\mathfrak{p}$, on écrit un élément $Y = \sum_{i=1}^k y_i f_i$. Puisque σ_s va dans $T^*(O)$, en utilisant le système des coordonnées locales de U/K il existe des coefficients A_{ij} non nulle telle que nous ayons des 1-formes locales sur O par

$$A_i(m) = \sigma_s(m, f_i)$$

et par rapport à la base $dq_j|_m$

$$A_i(m) = \sum_{j=1}^k A_{ij}(m) dq_j|_m.$$

En comparant les deux, on constate que la section de trivialisation σ_s s'écrit par

$$\sigma_s(m, Y) = \sum_{i,j=1}^k y_i A_{ij}(m) dq_j|_m.$$

Lorsque les $\{p_j\}$ signifient les coordonnées globales associées aux $\{q_j\}$ pour les fibres de $T^*(U/K)$, on constate qu'en coordonnées (q, p) de $T^*(O)$, nous avons

$$\sigma_s(q, Y) = (q, p) = (q, \sum_{i,j=1}^k y_i A_{ij}(q))$$

cad $p_j = \sum_{i=1}^k y_i A_{ij}(q)$. Maintenant on peut écrire la forme volume de Liouville ε par

$$(3.3.43) \quad \varepsilon|_{\sigma_s(q, Y)} = dq_1 \wedge \dots \wedge dq_k \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_k$$

$$(3.3.44) \quad = \det(A_{ij}(q)) dq_1 \wedge \dots \wedge dq_k \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$$

et si on appelle $V_s = \det(A_{ij}(q)) dq_1 \wedge \dots \wedge dq_k$ on a

$$\varepsilon|_{T^*(O)} = \sigma_s^*(\varepsilon) = V_s \wedge dY.$$

Il faut montrer que cette forme volume est globale. Pour cela on peut appliquer le pull-back des changements de cartes, i.e. $(\sigma_s^{-1} \circ \sigma_t)^*$ à $V_s \wedge dY$ et montrer que $V_s = V_t$ pour deux sections locales quelconque s et t . On peut montrer ceci en utilisant le fait que ces deux sections locales s et t sont liées par une application de changement des cartes k_{st} à valeurs sur K donnée par $t(m) = s(m) \cdot k_{st}(m)$. Nous avons donc une forme volume globale V lorsque le déterminant de l'action adjointe de cette application k_{st} est égal à 1. Puisque Ad_K est orthogonal sur $\mathfrak{p}$, ce déterminant est égal à ± 1 . Pour l'instant on ignore le cas -1 , on va faire la discussion pour ce cas à la fin de la preuve.

Puisqu'on a localement $U/K \times K = U$, on va utiliser une deuxième forme volume sur K et leur produit wedge va nous donner la forme volume sur U . On va montrer que la forme volume qu'on obtient est globale. On prend W la forme volume invariante à gauche sur K de volume 1, cad $\int_K W = 1$. On peut faire les trivialisations de la même façon que précédemment pour $O \times K \rightarrow U$. Définissons alors les sections de trivialisation $\hat{\sigma}_s: O \times K \rightarrow U$ par $\hat{\sigma}_s(m, k) = s(m) \cdot k$. Pour montrer que la forme volume obtenue $V \wedge W = \mu_s$ via cette section de trivialisation $\hat{\sigma}_s$ est globale, il faut montrer qu'il ne dépend pas de s . On peut le montrer par le pull-back $(\hat{\sigma}_t^{-1} \circ \hat{\sigma}_s)^*$ comme la fois dernière. Ici on utilise de plus l'invariance à gauche de la forme volume W . Nous avons ainsi une forme volume globale μ sur U . Il nous reste à montrer que cette forme volume est invariante à gauche. On utilise encore le fait que les deux sections locales s et t sont liées par une application de changement de cartes à valeurs dans K :

$$g \cdot s(m) = t(\rho_g(m))k_g(m).$$

Puisque les deux côtés se projettent vers $\rho_g(m)$, on peut faire ceci. On va calculer les choses suivantes :

$$\sigma_t^{-1} \circ \rho_{g^{-1}}^* \circ \sigma_s = (\rho_g(m), \text{Ad}_{k_g(m)} Y)$$

et

$$\hat{\sigma}_t^{-1} \circ L_g \circ \hat{\sigma}_s = (\rho_g(m), k_g(m) \cdot k).$$

Comme dans la preuve de la Proposition 3.3.23, on sait que le difféomorphisme $\rho_{g^{-1}}^*$ préserve la forme volume de Liouville ε de $T^*(U/K)$. En appliquant le pull-back de $\sigma_t^{-1} \circ \rho_{g^{-1}}^* \circ \sigma_s$ à $V \wedge dY$, on constate que $\rho_g^* V = V$. De la même façon, en appliquant le pull-back de $\hat{\sigma}_t^{-1} \circ L_g \circ \hat{\sigma}_s$ à $V \wedge W$ avec $\rho_g^* V = V$, on constate que $L_g^* \mu = \mu$ ce qui nous dit que la forme volume globale μ est invariante à gauche. Maintenant nous sommes prêts à montrer l'égalité des intégrales.

Soit $f: T^*(U/K) \rightarrow \mathbb{C}$ à support dans $T^*(O)$. Par la définition de ψ , on constate que $f \circ \psi$ à support dans $\pi^{-1}(O) \times \mathfrak{p} \subset U \times \mathfrak{p}$. On a la relation entre les sections de trivialisation σ_s et $\hat{\sigma}_s$ par

$$\psi((\hat{\sigma}_s \times id)(m, k, Y)) = \sigma(m, \text{Ad}_k Y).$$

On a donc

$$\int_{T^*(U/K)} f \varepsilon = \int_{T^*(O)} f \varepsilon = \int_{O \times \mathfrak{p}} \sigma_s^*(f \varepsilon) = \int_{O \times \mathfrak{p}} \sigma_s^*(f) V \wedge dY$$

et par le fait que $\int_K W = 1$, on peut écrire

$$= \int_{O \times K \times \mathfrak{p}} f(\sigma_s(m, Y)) V_s \wedge W_k \wedge dY.$$

En utilisant le fait que le $\det(\text{Ad}_K) = 1$, on peut écrire encore

$$\begin{aligned}
&= \int_{O \times K \times \mathfrak{p}} f(\sigma_s(m, \text{Ad}_k Y)) V_s \wedge W_k \wedge dY \\
&= \int_{O \times K \times \mathfrak{p}} f(\psi(\hat{\sigma}_s \times \text{id})(m, k, Y)) V_s \wedge W_k \wedge dY \\
&= \int_{\pi^{-1}(O) \times \mathfrak{p}} f(\psi(g, Y)) \mu_g \wedge dY \\
&= \int_{U \times \mathfrak{p}} f \circ \psi \mu \wedge dY
\end{aligned}$$

ce qui nous dit que nous avons l'égalité lorsque le support de f est dans $T^*(O)$. En faisant une partition de l'unité, on peut voir que c'est vraie pour toute f .

Maintenant on va regarder le cas où le $\det(\text{Ad}_K) = -1$. Dans ce cas, on va travailler avec les densités plutôt que les formes volumes. Ainsi, cela va nous donner la valeur absolue des Jacobiens pour les transformations de changement des cartes. On va obtenir une densité invariante globale non nulle partout $|V|$ sur U/K et une densité invariante à gauche globale non nulle partout $|\mu|$ sur U . Et l'égalité pour les intégrales est

$$\int_{T^*(U/K)} f|\varepsilon| = \int_{U \times \mathfrak{p}} f \circ \psi |\mu| \otimes |dY|.$$

La densité $|\mu|$ est invariante à gauche et elle est donc la valeur absolue d'une forme volume et après un choix approprié de l'orientation, on peut enlever les valeurs absolues. $\square$

Notons dx la mesure de Haar de U et dY la mesure de Lebesgue de $\mathfrak{p}$, normalisée de telle sorte qu'elle coïncide avec la mesure riemannienne.

THÉORÈME 3.3.45. *Pour $\Phi \in \mathcal{D}_1$ et $f \in \mathcal{D}_2$, le couplage (3.3.39) est donné par la formule*

$$(3.3.46) \quad \langle \Phi, f \rangle_{h, \text{BKS}} = \frac{1}{\text{vol}(U)} \int_U \left(\int_{\mathfrak{p}} \overline{\Phi(x \exp(iY))} f(x) e^{-\frac{\|Y\|^2}{2h}} \eta(Y/2) dY \right) dx.$$

où la fonction η est donné en (3.3.27).

PREUVE. En utilisant l'égalité (3.3.42) du Théorème 3.3.41, nous obtenons l'intégrale sur $U \times \mathfrak{p}$. Ensuite, en utilisant le fait que la fonction $e^{-\|Y\|^2/2h} \eta(Y/2)$ dans l'intégrale est Ad_K -invariante et le fait que la mesure est U -invariante, nous obtenons l'écriture (3.3.46). $\square$

Soit Φ une fonction holomorphe sur $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$. On peut en extraire une application formelle $F: \mathcal{HL}^2(U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}, e^{-\kappa/h} \eta \varepsilon) \rightarrow L^2(U/K, dxK)$, $\Phi \mapsto F_{\Phi}$. Lorsque F_{Φ} existe et $F_{\Phi}([x])$ est bien définie pour tout point $[x] = xK$ de U/K , nous avons

$$(3.3.47) \quad \langle \Phi, f \rangle_{h, \text{BKS}} = \langle F_{\Phi}, f \rangle_{U/K}.$$

LEMME 3.3.48. Soient $d(xK)$ la mesure riemannienne sur U/K et μ est comme dans le Théorème 3.3.41. Alors

$$(3.3.49) \quad \int_{U/K} f d(xK) = \frac{1}{\text{vol}(K)} \int_U (f \circ \pi) \mu$$

où $\pi: U \rightarrow U/K$ est la projection, voir e.g. [BtD95].

On sait qu'on peut écrire les fonctions sur U/K comme des fonctions sur U qui sont invariantes par K . C'est à dire qu'on peut écrire f comme $f(uK) = \tilde{f}(u)$ pour tout $u \in U$ où $\tilde{f}$ est une fonction sur U qui est K -invariante. En utilisant le Lemme 3.3.48, nous avons l'égalité suivante des produit scalaires

$$(3.3.50) \quad \langle f_1, f_2 \rangle_{U/K} = \langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle_U.$$

En utilisant ceci, on constate que les normes sur $L^2(U/K, d(uK))$ et $L^2(U, du)^K$ sont isométriques (à une constante près lorsqu'on considère les volumes non-normalisé). En utilisant le fait que $F_\Phi \in L^2(U/K, d(uK))$, nous pouvons écrire F_Φ comme étant une fonction sur U qui est K -invariante comme ci dessus. Nous avons donc $F_\Phi(uK) = \tilde{F}_\Phi(u)$ où $\tilde{F}_\Phi \in L^2(U, du)^K$. Par le couplage (3.3.46) et l'égalité (3.3.47) combinée avec (3.3.50), nous écrivons F_Φ comme

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F}_\Phi, \tilde{f} \rangle_U &= \langle F_\Phi, f \rangle_{U/K} = \langle \Phi, f \rangle_{h, \text{BKS}} \\ \int_U \overline{\tilde{F}_\Phi}(u) \tilde{f}(u) du &= \int_U \left(\int_{\mathfrak{p}} \overline{\Phi([u \exp(iY)])} f([u]) e^{-\frac{\|Y\|^2}{2\hbar}} \eta(Y/2) dY \right) du \end{aligned}$$

et d'où, nous avons

$$(3.3.51) \quad (\tilde{F}_\Phi)(u) = \int_{\mathfrak{p}} \Phi([u \exp(iY)]) e^{-\frac{\|Y\|^2}{2\hbar}} \eta(Y/2) dY$$

où Φ est une fonction de $\mathcal{HL}^2(U^\mathbb{C}, e^{-\|Y\|^2/\hbar} \eta_\varepsilon)^K$ et $\tilde{f}$ est une fonction de $L^2(U, du)^K$ et est égale à f sur U/K (Nous avons ignoré les volumes pour ne pas avoir trop de notations). Désormais on va confondre la notation f et $\tilde{f}$ etc..

3.4. Couplage dans le cas d'un groupe

Revenons à l'exemple (3.3.8). On trouve le couplage de BKS pour ce cas particulier comme suit : L'application $\phi: \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{k}$, $(X, -X) \mapsto \phi(X, -X) = 2X$ et $\Phi: U/K = (K \times K)/K_\Delta \rightarrow K$, $[x, y] = (x, y)K_\Delta \mapsto \Phi[x, y] = xy^{-1}$ rendent le diagramme suivant

$$(3.4.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{p} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{k} \\ \exp \downarrow & & \exp \downarrow \\ U/K & \xrightarrow{\Phi} & K \end{array}$$

commutatif.

Puisque chaque racine restreinte a la multiplicité 2, le Théorème 3.3.25 nous donne l'expression

$$\eta(Y) = \prod_{\alpha \in R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})} \frac{\sinh(2\alpha(Y))}{2\alpha(Y)}, \quad Y \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}.$$

Par l'application $\phi: \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{k}$, une racine (réelle) ordinaire α va vers la racine restreinte correspondante multipliée par 2. L'application canonique $(K \times K) \times^{K\Delta} \mathfrak{p} \rightarrow K \times \mathfrak{k}$ est un difféomorphisme. En termes des coordonnées sur $K^{\mathbb{C}}$ donnée par l'application polaire $K \times \mathfrak{k} \rightarrow K^{\mathbb{C}}$, la fonction $\eta: U \times^K \mathfrak{p} \rightarrow \mathbb{R}$ pour les espaces symétriques donnée par le Théorème (3.3.25) s'écrit pour le cas de groupe par $\eta_{\mathfrak{k}}: K^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ et donnée par $\eta_{\mathfrak{k}}(x, Y) = \eta_{\mathfrak{k}}(Y)$ et on obtient ainsi l'expression explicite

$$(3.4.2) \quad \eta_{\mathfrak{k}}(Y) = \prod_{\alpha \in R^+(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})} \frac{\sinh \alpha(Y)}{\alpha(Y)}, \quad Y \in \mathfrak{t}.$$

Nous allons confondre la notation $\eta_{\mathfrak{k}}$ pour le cas des groupes de Lie compact avec η . En utilisant l'identification de l'espace symétrique $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ avec le complexifié $K^{\mathbb{C}}$ du groupe de Lie compact K et l'espace symétrique U/K avec K et les fonctions η et κ pour le cas de groupe de Lie, nous avons le couplage BKS suivant $\langle \cdot, \cdot \rangle_{h, \text{BKS}}: \mathcal{HL}^2(K^{\mathbb{C}}, e^{-\kappa/h} \eta \varepsilon) \otimes L^2(K, dx) \rightarrow \mathbb{C}$ donné par l'expression :

$$\langle \Psi, f \rangle_{h, \text{BKS}} = \int_K \int_{\mathfrak{t}} \overline{\Psi(xe^{iY})} f(x) e^{-\kappa/2h} \eta(Y/2) dx dY$$

qui coïncide avec le couplage défini dans [Hal02, Hue08]. Ici, nous avons encore utilisé le difféomorphisme canonique $(K \times K) \times^{K\Delta} \mathfrak{p} \rightarrow K \times \mathfrak{k}$ et l'application polaire $K \times \mathfrak{k} \rightarrow K^{\mathbb{C}}$ ainsi que la translation à gauche pour l'identification de $T^*(K)$ avec $K \times \mathfrak{k}$. Nous avons la transformée de BKS par rapport à ce couplage défini par

$$F: \mathcal{HL}^2(K^{\mathbb{C}}, e^{-\kappa/h} \eta \varepsilon) \rightarrow L^2(K, dx)$$

telle que

$$\langle \Psi, f \rangle_{h, \text{BKS}} = \langle \Psi, (F^*)f \rangle_{\mathcal{HL}^2} = \langle F\Psi, f \rangle_{L^2}$$

pour toutes $f \in L^2(K)$ et $\Psi \in \mathcal{HL}^2(K^{\mathbb{C}}, e^{-\kappa/h} \eta \varepsilon)$. Cette transformée est définie également dans [Hal02, Hue08]. Ici F^* est l'opérateur adjoint de F . La transformée BKS F est donnée par la formule suivante :

$$(3.4.3) \quad (F\Psi)(x) = \int_{\mathfrak{t}} \Psi(xe^{iY}) e^{-\kappa/2h} \eta(Y/2) dY.$$

CHAPITRE 4

Transformée BKS et théorie des représentations

Le but de cette partie est d'étudier l'unitarité de la transformée BKS entre les deux espaces hilbertiens obtenus par deux quantifications différentes dans le chapitre 3. L'outil principal que nous utilisons est la théorie de Peter-Weyl.

Lorsqu'il existe une constante B telle que

$$(4.0.4) \quad B \int_{U/K} \overline{F_{\phi^{\mathbb{C}}}} F_{\phi^{\mathbb{C}}} d(uK) = \int_{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}} \overline{\phi^{\mathbb{C}}} \phi^{\mathbb{C}} e^{-\kappa/h} \eta \varepsilon$$

où la transformée BKS est donnée dans le chapitre 3, on dit que la transformée BKS est unitaire (à une constante près). À l'aide du lemme de Schur, nous avons

$$(4.0.5) \quad B_{h,\lambda} \int_{U/K} F_{\psi_{\lambda}^{\mathbb{C}}} \overline{F_{\psi_{\lambda}^{\mathbb{C}}}} d(uK) = \int_{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}} \psi_{\lambda}^{\mathbb{C}} \overline{\psi_{\lambda}^{\mathbb{C}}} e^{-\kappa/h} \eta \varepsilon$$

où $\psi_{\lambda}^{\mathbb{C}}$ est une fonction représentative dans la composante isotypique V_{λ} de l'espace $\mathcal{HL}^2$ qui vient de la décomposition de Peter-Weyl holomorphe. Cette égalité nous dit que la transformée BKS restreinte aux composantes isotypiques est unitaire (à une constante près). Nous pouvons calculer la constante $B_{h,\lambda}$ en prenant $\psi_{\lambda}^{\mathbb{C}} = \phi_{\lambda}^{\mathbb{C}}$, la fonction sphérique.

En utilisant la théorie des représentations de groupes de Lie compacts, nous pouvons calculer le coefficient $B_{h,\lambda}$ par l'identité

$$(4.0.6) \quad B_{h,\lambda} = \frac{\int_{\mathfrak{p}} \phi_{\lambda}^{\mathbb{C}}(\exp 2iY) e^{-\kappa/h} \eta(Y) dY}{\left| \int_{\mathfrak{p}} \phi_{\lambda}^{\mathbb{C}}(\exp iY) e^{-\kappa/2h} \eta(Y/2) dY \right|^2}.$$

Cette formule simplifie nos raisonnements. L'unitarité de la transformée BKS pour l'espace $\mathcal{HL}^2$ s'obtient en montrant que la constante $B_{h,\lambda}$ ne dépend pas de λ .

Nous montrons que la constante $B_{h,\lambda}$ dépend du choix de fonction sphérique dans le cas de certains espaces symétriques. Plus précisément, nous donnons le contre-exemple de la 5-sphère $\mathbb{S}^5$. Ceci dit que la transformée BKS n'est en général pas unitaire pour tous les espaces symétriques compacts riemanniens.

4.1. Décomposition de Peter-Weyl pour les espaces symétriques

Le but de cette partie est de donner les décompositions de Peter-Weyl pour les espaces symétriques compacts riemanniens et leurs complexifiés.

DÉFINITION 4.1.1 (REPRÉSENTATION SPHÉRIQUE). Soit π une représentation irréductible de U dans un espace vectoriel complexe de dimension finie E . Cette représentation se prolonge en une représentation holomorphe de $U^{\mathbb{C}}$. Notons l'ensemble des vecteurs K -invariants par

$$E^K = \{v \in E : \forall k \in K, \pi(k)v = v\}.$$

Nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1.2. *Pour une représentation irréductible (π, E) de U , nous avons la $\dim E^K = 0$ ou 1 (voir e.g. [Far03, Proposition IV.4.1]).*

Lorsque la dimension $\dim E^K$ est égal à 1, la représentation irréductible (π, E) s'appelle *représentation sphérique*. Lorsqu'on considère une représentation associée à un plus haut poids λ , on va le noter E_λ .

DÉFINITION 4.1.3 (FONCTION REPRÉSENTATIVE). Une fonction continue $f \in \mathcal{C}(G)$ s'appelle *fonction représentative* s'il existe un G -module E de dimension finie et $\varphi \in E^*$, $v \in E$ telle que $f(q) = \varphi(q^{-1}v)$. On note $\mathbb{C}[G]$ l'espace des fonctions représentatives à valeurs complexes.

Pour les espaces symétriques, puisque nous associons les fonctions sur U/K avec des fonctions K -invariantes sur U , nous prenons une fonction représentative comme suit : pour $\varphi \in (E^*)^K$ et $v \in E$, la fonction $f(q) = \varphi(q^{-1}v)$ est une fonction représentative pour l'espace symétrique U/K .

Dans la définition 4.1.3, on voit qu'une fonction représentative ce n'est pas autre chose que composée d'une représentation avec une application linéaire des endomorphismes de l'espace des représentations. D'où le nom "représentative". Les fonctions représentatives viennent des coefficients matriciels des représentations de dimensions finies d'un groupe topologique compact G .

On peut associer l'espace de représentation de dimension finie à son dual en utilisant une forme bilinéaire non-dégénérée. Si on utilise cette association, on peut faire correspondre un élément φ de E^* avec un vecteur u dans E . Nous pouvons donc écrire une fonction représentative de U/K comme suit : Soit π_λ une représentation sphérique. Soit $u \in E_\lambda^K$ un vecteur unitaire qui est invariant par K . Alors une fonction représentative pour U/K peut s'écrire sous forme :

$$gK \mapsto \langle v, \pi_\lambda(g)u \rangle, \quad v \in E_\lambda$$

où $g \in U$.

DÉFINITION 4.1.4. La fonction sphérique ϕ_λ est la fonction à valeurs complexes sur U (sur $U^{\mathbb{C}}$ également) donnée par

$$(4.1.5) \quad \phi_\lambda : g \mapsto \langle u, \pi_\lambda(g)u \rangle.$$

On peut la considérer comme une fonction sur $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ qui est invariante par $K^{\mathbb{C}}$, voir e.g. [Far03].

Ici, nous avons deux fois u alors que pour une fonction représentative, nous avons u et v , voir e.g. [Hel84, p.410].

EXEMPLE 4.1.6. Revenons à l'exemple (3.3.8). Nous avons l'espace symétrique U/K avec $U = K \times K$ et $K = K_\Delta$ la diagonale pour l'involution θ . Puisque $K = K_\Delta$ est la diagonale, les représentations sphériques pour ce cas sont $\pi = \tau \boxtimes \tau^*$, où τ est une représentation irréductible de K , τ^* la représentation duale et $\boxtimes$ signifie le produit tensoriel externe de deux représentations τ et τ^* sur l'espace $F \otimes F^*$ lorsqu'on note F l'espace de la représentation τ . On peut identifier l'espace E de la représentation π à l'espace des endomorphismes de F , muni de la norme de Hilbert-Schmidt, c'est $\sqrt{\text{tr}(u^*u)}$. Le vecteur $u = \frac{1}{\sqrt{d_\tau}} \text{Id}$ est un vecteur unitaire de E qui est invariant par K . La fonction sphérique correspondante est donnée par

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{d_\tau} \chi_\tau(x^{-1}),$$

où $\chi_\tau(x^{-1})$ est le caractère de la représentation τ . Cela est vraie car χ_τ est l'unique fonction centrale sur K vérifiant $\frac{1}{d_\tau} \chi_\tau(e) = 1$. On va utiliser ceci pour étudier l'unitarité de la transformée BKS pour les groupes de Lie compact en tant que cas particulier des espaces symétriques compact riemanniens (voir e.g. [Far03, Hel84, Tak94]).

EXEMPLE 4.1.7. Reprenons l'exemple (3.3.11). Nous avons l'espace symétrique $\mathbb{S}^n = \text{SO}(n+1)/\text{SO}(n)$. Dans ce cas l'espace symétrique complexifié s'identifie à $\mathbb{S}_\mathbb{C}^n = \text{SO}(n+1, \mathbb{C})/\text{SO}(n, \mathbb{C})$ (voir e.g. [Far03, Las78]). Les poids restreint dominants λ sont indexés par $\mathbb{N}$ qui sont les formes linéaires définies sur $\mathfrak{a}_\mathbb{P}$ par $\lambda(\theta H_0) = im\theta$ avec $m \in \mathbb{N}$. Un résultat classique nous dit que pour un plus haut poids restreint λ , nous avons $\frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}^+$ où $\alpha \in \Sigma^+$ une racine restreinte positive. Cela nous dit que les plus hauts poids λ sont indexés par des nombres naturel pour les n -sphères puisque nous avons le système des racines restreintes $\Delta_{\mathbb{S}^n} = \{\alpha, -\alpha\}$. Les fonctions représentative $\psi_\lambda(g) = \langle v, \pi_\lambda(g)u \rangle$ sont donnée dans [Far03] par l'égalité $\psi_\lambda(g) = e^{\lambda(H_{g^{-1}})}$ en utilisant la décomposition d'Iwasawa. Ici on note $H = H_g \in i\mathfrak{a}_\mathbb{P}$ dans la décomposition d'Iwasawa d'un élément g . Et Faraut donne les fonctions sphériques correspondantes par $\phi_\lambda(g) = \int_K e^{\lambda(H_{g^{-1}k})} dk$ où on utilise toujours la décomposition d'Iwasawa. Ainsi, pour la n -sphère unité, nous avons

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(x) &= e^{\lambda(H_{x^{-1}})} = e^{\lambda(\theta H_0)} \\ &= e^{im\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^m. \end{aligned}$$

Soit $A_0 = \{\exp H \cdot e_0 \mid H \in \mathfrak{a}_\mathbb{P}\}$ le tore maximal correspondant. Puisque nous avons

$$\exp H = \exp(\theta H_0) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & & \\ \sin \theta & \cos \theta & & \\ & & & \\ & & & \text{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

où I_{n-1} est la matrice identité, nous avons donc $A_0 = \{\exp H \cdot e_0 \mid H \in \mathfrak{a}_\mathbb{P}\} = \{(\cos \theta, \sin \theta, 0, \dots, 0)\}$. Nous avons ainsi $\psi_\lambda(x) = (x_0 + ix_1)^m$ pour $x = (x_0, \dots, x_n)$. Nous calculons la fonction sphérique correspondante en intégrant la fonction représentative ψ_λ

sur K , on en trouve

$$\begin{aligned}\phi_\lambda(\exp \theta H_0) &= \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi)^m (\sin \varphi)^{n-2} d\varphi \\ &= P_m^\nu(\cos \theta)\end{aligned}$$

où les P_m^ν sont des polynômes ultrasphériques avec $\nu = \frac{(n-1)}{2}$. Les polynômes ultrasphériques sont définis par les conditions suivantes :

- (1) P_m^ν est de degré m .
- (2) $\int_{-1}^1 P_l^\nu(t) P_m^\nu(t) (1-t^2)^{\nu-1/2} dt = 0$ si $l \neq m$.
- (3) $P_m^\nu(1) = 1$

voir e.g. [Far03]. On constate que pour les dimensions impaires, ν est un nombre entier non négatif.

Soit $\widehat{U/K}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de U telles que $E_\lambda^K \neq 0$. Nous identifions l'espace des plus hauts poids λ à $\widehat{U/K}$.

THÉORÈME 4.1.8. *Nous avons la décomposition suivante pour l'espace hilbertien qui vient de la quantification verticale du chapitre 3 :*

$$(4.1.9) \quad L^2(U/K, d(uK)) = \widehat{\bigoplus_{\lambda \in \widehat{U/K}} W_\lambda(U/K)}$$

où les composantes isotypiques $W_\lambda(U/K)$ sont deux à deux distincts et orthogonaux et la notation $\widehat{\bigoplus}$ signifie la complétion de la somme par rapport au produit scalaire. Chaque composante isotypique $W_\lambda(U/K)$ est constituée des fonctions représentatives $gK \mapsto \langle v, \pi_\lambda(g)u \rangle$ pour $u \in E_\lambda^K$ unitaire. De plus, chaque composante isotypique contient une unique fonction sphérique $gK \mapsto \langle u, \pi_\lambda(g)u \rangle$, voir e.g. [Hel84, chapitre IV et V] et [Hel94, chapitre III].

PREUVE. Nous donnons une esquisse de preuve. Considérons $L^2(U/K, d(uK))$ comme étant sous-espace de $L^2(U, du)$ des fonctions K -invariantes à droites. Nous voulons obtenir une décomposition hilbertienne de cet espace en somme directe de U -modules irréductibles $W_\lambda(U/K)$. Notons $\pi_\lambda: U \rightarrow \text{End}(E_\lambda)$ la représentation irréductible dans la classe de λ . Pour un $\psi \in E_\lambda^*$ et un $w \in E_\lambda$, l'association d'un élément $\psi \otimes w$ à une fonction représentative nous donne un morphisme des $(U \times U)$ -représentations, cad, $\iota_\lambda: E_\lambda^* \otimes E_\lambda \rightarrow \mathbb{C}[U]$, $\psi \otimes w \mapsto \psi(q^{-1}w)$ où $q \in U$. L'image de l'application ι_λ nous donne les composantes isotypiques dans la décomposition de Peter-Weyl pour les groupes de Lie, voir e. g. [Hue08]. Par abus de notation on note les $\iota_\lambda(E_\lambda^* \otimes E_\lambda) = W_\lambda(U)$. Les composantes isotypiques $W_\lambda(U)$ sont irréductible sous $U \times U$. Considérons les composantes isotypiques K -invariante (à droite) $W_\lambda(U)^K$. Dans ce cas, nous aurons l'application $\iota'_\lambda: (E_\lambda^*)^K \otimes E_\lambda \rightarrow \mathbb{C}[U]^K$, et puisque nous avons la $\dim(E_\lambda^K) = 1$ pour les espaces symétriques, nous aurons $(E_\lambda^*)^K \otimes E_\lambda \cong E_\lambda$. Ainsi, dans le cas d'espace symétrique, nous allons travailler avec les U -représentations irréductibles plutôt que les $(U \times U)$ -représentations irréductibles. Soit f une fonction continue sur U qui est K -invariante. Par la décomposition

de Peter-Weyl ordinaire pour les groupes de Lie compacts écrivons $f = \sum_{\lambda} f_{\lambda}$ et constatons que chaque f_{λ} est K -invariante. Nous pouvons obtenir ainsi $W_{\lambda}(U)^K$, le sous-espace K -invariant de $W_{\lambda}(U)$. Nous obtenons ainsi une version de la décomposition de Peter-Weyl pour les espaces symétriques. Chaque $W_{\lambda}(U/K)$ contient une unique fonction sphérique ϕ_{λ} qui par définition est biinvariante sous l'action de K et vérifie $\phi_{\lambda}(e) = 1$. Une telle fonction s'obtient en prenant $f \in W_{\lambda}(U/K)$ vérifiant $f(e) = 1$ et $\phi_{\lambda}(u)$ est alors définie par $\int_K f(kuk^{-1})dk$. Les U -modules $W_{\lambda}(U/K)$ sont inéquivalents deux à deux. Ceci signifie que dans la décomposition de $L^2(U, du)$ en $U \times U$ -modules irréductibles $W_{\lambda}(U)$, il existe un seul $W_{\lambda}(U/K)$ inclus dans $W_{\lambda}(U)$. $\square$

REMARQUE 4.1.10. Lorsque U est simplement connexe, on peut aller plus loin. La fonction sphérique ϕ_{λ} détermine un homomorphisme $c_{\lambda}: \mathcal{D}(U/K) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $D\phi_{\lambda} = c_{\lambda}(D)\phi_{\lambda}$ pour tout opérateur différentiel $D \in \mathcal{D}(U/K)$. On obtient ainsi chaque composante isotypique $W_{\lambda}(U/K)$ par

$$W_{\lambda}(U/K) = \{f \in \mathcal{C}^{\infty}(U/K) \mid Df = c_{\lambda}(D)f \quad \text{pour tout } D \in \mathcal{D}(U/K)\}.$$

Nous allons dire que la fonction sphérique ϕ_{λ} détermine la composante isotypique W_{λ} dans ce sens (voir e.g. [Hel84, chapitre V] et [Hel94, chapitre III]).

Notons $\widehat{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de $U^{\mathbb{C}}$ telle que $E_{\lambda}^K \neq 0$. Nous pouvons identifier les plus hauts poids par les éléments de $\widehat{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}}$. Étant donnée un plus haut poids $\lambda \in \widehat{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}}$, on note par abus de notation π_{λ} la représentation irréductible de $U^{\mathbb{C}}$ dont la restriction à U est la représentation sphérique π_{λ} . Nous avons une unique représentation holomorphe du complexifié $U^{\mathbb{C}}$ qui vient de la représentation du groupe de Lie compact U , cf. [BtD95, p.154]. En utilisant ce fait et la définition de la fonction sphérique via les représentations, $\phi_{\lambda}(gK) = \langle u, \pi_{\lambda}(g)u \rangle$ dans la composante isotypique $W_{\lambda}(U/K)$, on peut prolonger cette fonction ϕ_{λ} à la fonction

$$(4.1.11) \quad \phi_{\lambda}^{\mathbb{C}}(z) = \langle u, \pi_{\lambda}(z)u \rangle, \quad z \in U^{\mathbb{C}}$$

par le prolongement analytique de la représentation sphérique π_{λ} . La U -action à gauche sur $W_{\lambda}(U/K)$ se prolonge en une $U^{\mathbb{C}}$ -action à gauche sur les prolongement holomorphes des éléments de $W_{\lambda}(U/K)$ et on va noter $V_{\lambda}(U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}})$ ce prolongement holomorphe des éléments de $W_{\lambda}(U/K)$. La $U^{\mathbb{C}}$ -action à droite ne conserve pas $V_{\lambda}(U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}})$ (ceci est déjà vraie pour la U -action à droite) mais envoie $W_{\lambda}(U/K)$ dans $W_{\lambda}(U)$.

Nous conjecturons en s'inspirant de [Hue08] qu'on peut énoncer une décomposition de Peter-Weyl pour les complexifiés $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ des espaces symétriques compacts riemanniens U/K de la même façon, c'est à dire :

PROPOSITION 4.1.12 (CONJECTURE DE PETER-WEYL HOLOMORPHE SYMÉTRIQUE). *Nous avons la décomposition suivante pour l'espace hilbertien qui vient de la quantification holomorphe du chapitre 3 :*

$$(4.1.13) \quad \mathcal{HL}^2(U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}, e^{-\kappa/\hbar} \eta_{\varepsilon}) = \hat{\oplus}_{\lambda} V_{\lambda}(U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}})$$

où les composantes isotypiques $V_{\lambda}(U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}})$ sont deux à deux distincts et orthogonaux et encore $\hat{\oplus}$ signifie la complétion par rapport au produit scalaire.

PREUVE. Nous allons montrer seulement l'orthogonalité des $V_\lambda(U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C})$. Soit $V_\alpha(U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}) \ni f_\alpha$ et $V_\beta(U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}) \ni f_\beta$ avec $\alpha \neq \beta$. Nous avons donc

$$\int_{U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}} f_\alpha(x) \overline{f_\beta(x)} e^{-\kappa/\hbar} \eta_\varepsilon = \int_{U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}} e^{-\kappa/\hbar} \eta_\varepsilon \int_U f_\alpha(ux) \overline{f_\beta(ux)} du$$

par U -invariance de $e^{-\kappa/\hbar} \eta_\varepsilon$. On fixe x . La fonction $u \mapsto f_\alpha(ux) \in W_\delta(U)$ et $u \mapsto f_\beta(ux) \in W_{\delta'}(U)$. Mais $\delta \neq \delta'$ (preuve de 4.1.8) et donc d'après l'orthogonalité de Schur, l'intégrale $\int_U f_\alpha(ux) \overline{f_\beta(ux)} du = 0$. $\square$

4.2. Transformée BKS pour les espaces symétriques compacts riemanniens

Soient U/K un espace symétrique compact riemannien comme dans le chapitre 3. On considère une fonction sur U/K comme une fonction sur U qui est K -invariante à droite, c'est à dire, f est une fonction sur U/K et $\tilde{f}$ est une fonction sur U qui est K -invariante telle que $f(uK) = \tilde{f}(u)$ pour tout $u \in U$. Et de même pour l'espace symétrique complexifié $U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$. Désormais, on va confondre la notation f et $\tilde{f}$ pour ne pas avoir trop de notation.

Notre but est d'étudier l'unitarité de la transformée BKS pour les espaces symétriques compacts riemanniens définie dans le chapitre 3. Pour un domaine $\mathcal{D} = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{U/K}} V_\lambda(U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C})$, on espère trouver une constante B telle que nous ayons

$$(4.2.1) \quad B \int_{U/K} \overline{F_{\phi^\mathbb{C}}} F_{\phi^\mathbb{C}} d(uK) = \int_{U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}} \overline{\phi^\mathbb{C}} \phi^\mathbb{C} e^{-\kappa/\hbar} \eta_\varepsilon$$

lorsque nous avons l'unitarité (à une constante près). Nous constatons par la définition de la transformée BKS, la fonction $F_{\phi^\mathbb{C}}$ est K -invariante à droite pour $\phi^\mathbb{C} \in \mathcal{D}$. Ceci utilise la Ad_K -invariance de la mesure $e^{\kappa/2t} \eta(Y/2) dY$. On va réduire ce problème d'unitarité aux composantes isotypiques $V_\lambda(U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C})$ en utilisant la théorie de Peter-Weyl.

PROPOSITION 4.2.2. *Nous avons $F_{(V_\lambda(U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}))} \subseteq W_\mu(U/K)$ pour un $\mu \in \widehat{U/K}$.*

PREUVE. On va voir que c'est une conséquence de la définition de la transformée BKS et de la théorie de Peter-Weyl. Pour un $\phi^\mathbb{C} \in \mathcal{H}\mathcal{L}^2(U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}, e^{-\kappa/\hbar} \eta_\varepsilon)$, nous avons $F_{\phi^\mathbb{C}} \in L^2(U/K, d(uK))$. Par la décomposition de Peter-Weyl holomorphe de $\phi^\mathbb{C} = \sum_{\lambda \in \widehat{U/K}} \psi_\lambda^\mathbb{C}$ et par linéarité de F , écrivons $F_{\phi^\mathbb{C}} = \sum_{\lambda \in \widehat{U/K}} F_{\psi_\lambda^\mathbb{C}}$ où les $\psi_\lambda^\mathbb{C} \in V_\lambda(U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C})$. Ce dernier nous dit que chaque $F_{\psi_\lambda^\mathbb{C}}$ est dans une composante $W_\mu(U/K)$ pour un $\mu \in \widehat{U/K}$ par le théorème de Peter-Weyl symétrique car les composantes irréductibles W_λ sont deux à deux distincts. $\square$

Supposons que les fonctions $\psi_\lambda^\mathbb{C}$ de chaque composante isotypique soient de carrée intégrable par rapport à la mesure $e^{\kappa/\hbar} \eta_\varepsilon$. Puisque les U -représentations $V_\lambda(U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C})$ et $W_\lambda(U/K)$ sont irréductibles, les produits scalaires sur $V_\lambda(U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C})$ et sur $W_\lambda(U/K)$ ne se distinguent que par une constante par le lemme de Schur, c'est à dire sur les composantes isotypiques, l'égalité (4.2.1) ne dépend pas de fonction choisie mais dépend de λ .

Nous avons donc

$$(4.2.3) \quad B_\lambda \int_{U/K} |F_{\psi_\lambda^{\mathbb{C}}}([u])|^2 d[u] = \int_{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}} |\psi_\lambda^{\mathbb{C}}([u \exp iY])|^2 e^{-\kappa/\hbar} \eta(Y) \varepsilon$$

où $\psi_\lambda^{\mathbb{C}}$ est une fonction représentative dans $V_\lambda(U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}})$.

PROPOSITION 4.2.4. *Lorsque B_λ de l'égalité (4.2.3) ne dépend pas de λ , cette égalité nous donne l'égalité (4.2.1) en sommant sur λ .*

PREUVE. Par la décomposition Peter-Weyl holomorphe, on écrit la fonction $\phi^{\mathbb{C}} = \sum_\lambda \psi_\lambda^{\mathbb{C}}$. L'orthogonalité de Schur des $V_\lambda(U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}})$ nous donne

$$\int_{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}} \psi_\lambda^{\mathbb{C}}(ue^{iY}) \psi_\mu^{\mathbb{C}}(ue^{iY}) e^{-\kappa/\hbar} \eta(Y) \varepsilon = 0$$

lorsque $\lambda \neq \mu$. On obtient donc

$$(4.2.5) \quad \int_{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}} |\phi^{\mathbb{C}}([u \exp iY])|^2 e^{-\kappa} \eta(Y) \varepsilon = \sum_\lambda \int_{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}} |\psi_\lambda^{\mathbb{C}}([u \exp iY])|^2 e^{-\kappa} \eta(Y) \varepsilon.$$

Nous avons $F_{\phi^{\mathbb{C}}} = \sum_\lambda F_{\psi_\lambda^{\mathbb{C}}}$ par linéarité de F . Par la Proposition (4.2.2), nous savons que $F_{\psi_\lambda^{\mathbb{C}}} \in W_\mu(U/K)$ pour un $\mu \in \widehat{U/K}$. En utilisant l'orthogonalité de Schur des $W_\lambda(U/K)$, on constate que

$$\int_{U/K} F_{\psi_\lambda^{\mathbb{C}}}([u]) F_{\psi_\mu^{\mathbb{C}}}([u]) d[u] = 0 \quad \text{lorsque} \quad \lambda \neq \mu.$$

Ainsi, en utilisant la somme pour BKS, nous avons

$$(4.2.6) \quad \int_{U/K} |F_{\phi^{\mathbb{C}}}([u])|^2 d[u] = \sum_\lambda \int_K |F_{\psi_\lambda^{\mathbb{C}}}([u])|^2 d[u].$$

Enfin, en sommant sur λ , l'égalité (4.2.3) nous donne l'égalité (4.2.1) lorsque B_λ ne dépend pas de λ . $\square$

Par le lemme de Schur, puisque l'égalité (4.2.3) ne dépend pas de fonction choisie, on prend en particulier la fonction sphérique $\phi_\lambda^{\mathbb{C}}$ donnée par (4.1.11). Ainsi, on facilite les calculs dans notre problème. Nous regardons donc l'égalité suivante :

$$(4.2.7) \quad B_\lambda \int_{U/K} |F_{\phi_\lambda^{\mathbb{C}}}([u])|^2 d[u] = \int_{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}} |\phi_\lambda^{\mathbb{C}}([u \exp iY])|^2 e^{-\kappa/\hbar} \eta(Y) \varepsilon.$$

Le choix de la fonction sphérique pour les calculs nous permet de trouver une expression plus simple que (4.2.3) pour B_λ .

PROPOSITION 4.2.8. *Le coefficient B_λ de l'égalité (4.2.7) peut se calculer via la formule suivante :*

$$(4.2.9) \quad B_\lambda = \frac{\int_{\mathfrak{p}} \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(e^{2iY}) e^{-\kappa/\hbar} \eta(Y) dY}{\left| \int_{\mathfrak{p}} \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(e^{iY}) e^{-\kappa/2\hbar} \eta(Y/2) dY \right|^2}.$$

PREUVE. En utilisant la remarque 4.2.2 et le fait que $F_{\phi_\lambda^{\mathbb{C}}}$ est une fonction centrale, nous obtenons $F_{\phi_\lambda^{\mathbb{C}}} = C\phi_\lambda$ avec $C = \int_{\mathfrak{p}} \phi_\lambda(e^{iY})e^{-\kappa/2\hbar}\eta(Y/2)dY$ (où on a utilisé la formule (3.3.51) pour la transformée BKS). Si on utilise ce dernier dans le membre gauche de l'égalité (4.2.7) avec le Lemme 3.3.48, nous obtenons

$$(4.2.10) \quad |C|^2 \int_U |\phi_\lambda(u)|^2 du = \left| \int_{\mathfrak{p}} \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(e^{iY})e^{-\kappa/2\hbar}\eta(Y/2)dY \right|^2 \int_U |\phi_\lambda(u)|^2 du.$$

Pour le membre droit de (4.2.7), nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{p}} \int_U |\phi_\lambda^{\mathbb{C}}(ue^{iY})|^2 e^{-\kappa/\hbar}\eta(Y) du dY &= \int_{\mathfrak{p}} \int_U \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(ue^{iY}) \overline{\phi_\lambda^{\mathbb{C}}(ue^{iY})} e^{-\kappa/\hbar}\eta(Y) du dY \\ &= \int_{\mathfrak{p}} \int_U \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(ue^{iY}) \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(e^{iY}u^{-1}) e^{-\kappa/\hbar}\eta(Y) du dY \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le Théorème 3.3.41. En utilisant la définition de la fonction sphérique via les représentations sphériques, on peut montrer la dernière égalité. Pour l'instant oublions l'intégrale sur $\mathfrak{p}$ et regardons seulement l'intégrale sur U . Nous allons noter $e^{iY} = g \in U^{\mathbb{C}}$. Pour un $g \in U$ fixé, nous avons

$$\int_U \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(ug) \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(gu^{-1}) du = \int_U \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(t^{-1}) \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(g^2 t) dt = \int_U \overline{\phi_\lambda^{\mathbb{C}}(t)} \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(g^2 t) dt$$

où on a fait le changement des variables $ug = t^{-1}$ pour la première et on a utilisé $\overline{\phi_\lambda^{\mathbb{C}}(t)} = \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(t^{-1})$. La première intégrale a un sens lorsque $g \in U^{\mathbb{C}}$ et holomorphe en g . De même, la troisième intégrale a un sens lorsque $g \in U^{\mathbb{C}}$ et holomorphe en g . Et de plus, les deux intégrales coïncident pour $g \in U$, d'où par prolongement holomorphe, nous obtenons l'égalité sur $U^{\mathbb{C}}$ en considérant les deux intégrales comme étant des fonctions sur $U^{\mathbb{C}}$, en particulier, pour $g = e^{iY}$, nous avons

$$\int_U |\phi_\lambda^{\mathbb{C}}(ue^{iY})|^2 du = \int_U \overline{\phi_\lambda^{\mathbb{C}}(u)} \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(e^{2iY}u) du.$$

Notons $H(g) = \int_U \overline{\phi_\lambda^{\mathbb{C}}(u)} \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(gu) du$ où $g \in U^{\mathbb{C}}$. On sait que H est K -biinvariante et dans $W_\lambda(U)$. Nous avons donc une seule fonction satisfaisant cela, la fonction sphérique $\phi_\lambda^{\mathbb{C}}$. Nous obtenons ainsi

$$H(g) = \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(g) \int_U |\phi_\lambda(u)|^2 du$$

et d'où

$$\int_U |\phi_\lambda^{\mathbb{C}}(ue^{iY})|^2 du = \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(e^{2iY}) \int_U |\phi_\lambda(u)|^2 du.$$

Si on substitue ce dernier dans le membre droit de l'égalité (4.2.7), après avoir simplifié, nous obtenons alors

$$B_\lambda = \frac{\int_{\mathfrak{p}} \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(e^{2iY}) e^{-\kappa/\hbar}\eta(Y) dY}{\left| \int_{\mathfrak{p}} \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(e^{iY}) e^{-\kappa/2\hbar}\eta(Y/2) dY \right|^2}$$

comme cherché. □

4.3. Le cas des groupes de Lie compacts

Dans cette partie, nous étudions l'unitarité de la transformée BKS pour les groupes de Lie compact donnée dans la partie 3.4. On considère toujours les groupes de Lie compacts en tant que cas particulier des espaces symétriques compacts, cf. l'exemple 3.3.8. L'unitarité de la transformée BKS dans le cas des groupes de Lie compacts a été déjà traitée dans [Hue08] et [Hal02] par deux méthodes différentes et ils ont montré que la transformée BKS pour ce cas est unitaire. Notre approche ressemble à celle de [Hue08] mais légèrement différente. Puisque les fonctions sphériques pour les groupes de Lie compacts en tant qu'espace symétrique compact sont les caractères, nous allons utiliser la formule des caractères de Kirillov donnée dans le chapitre 2. Avec la théorie de Peter-Weyl donnée dans [Hue08], nous pouvons utiliser ce que nous avons fait pour les espaces symétriques compacts dans la partie précédente.

Soit donc K un groupe de Lie compact semi-simple connexe vu comme l'espace symétrique $(K \times K)/K_\Delta$ comme dans l'exemple (3.3.8) et $T \subset K$ un tore maximal. Nous avons $\mathfrak{p} \cong \mathfrak{k}$ et la fonction sphérique correspondante est le caractère χ_λ . Le complexifié de K est également donné par l'espace symétrique $U^\mathbb{C}/K^\mathbb{C}$ et la fonction sphérique correspondante pour le complexifié est $\chi_\lambda^\mathbb{C}$. Par la formule des caractères de Kirillov évaluée au point e^{iY} , nous écrivons

$$(4.3.1) \quad \chi_\lambda^\mathbb{C}(\exp(iY)) = j^{-1}(iY) \hat{\mu}_\lambda(Y)$$

où

$$\hat{\mu}_\lambda(Y) = \int_{K/T} e^{-(\lambda+\rho)(\text{Ad}_y(Y))} d(yT)$$

par le difféomorphisme $\Phi_{\lambda+\rho}: K/T \rightarrow \mathcal{O}_{\lambda+\rho}$, $(yT) \mapsto (\text{Ad}_y^{-1})^*(\lambda + \rho)$, voir e.g. chapitre 2.

Si on substitue l'expression (4.3.1) dans la formule (4.2.9) pour le calcul de B_λ , nous obtenons

$$B_\lambda = \frac{\int_{\mathfrak{k}} \chi_\lambda^\mathbb{C}(e^{2iY}) e^{-\|Y\|^2/\hbar} \eta(Y) dY}{\left| \int_{\mathfrak{k}} \chi_\lambda^\mathbb{C}(e^{iY}) e^{-\|Y\|^2/2\hbar} \eta(Y/2) dY \right|^2} = \frac{\int_{\mathfrak{k}} j^{-1}(2iY) \hat{\mu}_\lambda(2Y) e^{-\|Y\|^2/\hbar} \eta(Y) dY}{\left| \int_{\mathfrak{k}} j^{-1}(iY) \hat{\mu}_\lambda(Y) e^{-\|Y\|^2/2\hbar} \eta(Y/2) dY \right|^2}.$$

Mais on sait d'après le chapitre 2 qu'on a $j^{-1}(iY) = \eta(Y/2)$ et d'où nous obtenons

$$B_\lambda = \frac{\int_{\mathfrak{k}} \hat{\mu}_\lambda(2Y) e^{-\|Y\|^2/\hbar} dY}{\left| \int_{\mathfrak{k}} \hat{\mu}_\lambda(Y) e^{-\|Y\|^2/2\hbar} dY \right|^2}$$

Nous allons montrer que B_λ ne dépend pas de λ . On peut montrer ceci en quelques étapes. D'abord, si on substitue $\hat{\mu}_\lambda$ par $e^{\langle \lambda, Y \rangle}$, on constate que B_λ ne dépend pas de λ pour le cas d'un seul variable.

LEMME 4.3.2. *Il existe une constante B_λ telle que nous ayons :*

$$(4.3.3) \quad B_\lambda = \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda y} e^{-y^2} dy}{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda y} e^{-y^2/2} dy \right)^2}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$.

PREUVE. On fait d'abord pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et ensuite on fait prolongement analytique pour λ . Nous avons pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$B_\lambda = \frac{e^{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(y-\lambda)^2} dy}{\left(e^{\lambda^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(y-\lambda)^2/2} dy \right)^2}.$$

En faisant le changement des variables $y - \lambda \rightarrow y$, nous obtenons

$$B_\lambda = \frac{e^{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy}{e^{\lambda^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy \right)^2}.$$

et cela nous donne

$$B_\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$$

et d'où, nous trouvons que $B_\lambda = (4\pi)^{-1/2}$. Ensuite par prolongement analytique, nous trouvons le même résultat pour $\lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

On peut généraliser ceci aux plusieurs variables par changement de variables par translation.

NOTATION 4.3.4. Pour la forme bilinéaire, on utilise la notation $(X, Y) = \sum x_j y_j$ sur $\mathbb{C}^n$ où $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ (et pour le produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \sum x_j \bar{y}_j$).

Nous avons le :

LEMME 4.3.5. *Il existe une constante B_λ telle que nous ayons :*

$$(4.3.6) \quad B_\lambda = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\langle \lambda, y \rangle} e^{-\|y\|^2} dy}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \lambda, y \rangle} e^{-\|y\|^2/2} dy \right)^2}$$

valable pour $\lambda \in \mathbb{C}^n$.

PREUVE. La preuve est soit même preuve que dimension 1 ou Fubini. Premier terme va nous donner $e^{\langle \lambda, \lambda \rangle}$ et le deuxième va nous donner $e^{\langle \lambda, \lambda \rangle/2}$. Et on va obtenir le coefficient $(4\pi)^{-n/2}$ dans B_λ car cette fois ci la dimension est égal à n et les intégrales sont sur $\mathbb{R}^n$. $\square$

Ensuite, si on substitue $e^{\langle \lambda, Y \rangle}$ par $e^{\langle \lambda, kY \rangle}$, la valeur de chacune des intégrales de B_λ est la même par le fait que $e^{-\|Y\|^2}$ est K -invariante. Si on moyenne par dk et si on utilise le Théorème de Fubini, on constate que B_λ est indépendant de λ pour le cas de groupe de Lie compact ce qui nous dit que la transformée BKS est unitaire (à une constante près) pour le cas de groupe de Lie compact.

PROPOSITION 4.3.7. *Il existe une constante B_λ telle que :*

$$(4.3.8) \quad B_\lambda = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mu}_\lambda(2y) e^{-\|y\|^2} dy}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\mu}_\lambda(y) e^{-\|y\|^2/2} dy \right)^2}$$

où $\widehat{\mu}_\lambda := \int_K e^{(\lambda, ky)} dk = \int_K e^{(k\lambda, y)} dk$ pour un sous-groupe fermé K du groupe orthogonal $O(n)$.

PREUVE. Considérons l'invariance de la mesure et échangeons les intégrales. Nous avons

$$B_\lambda = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_K e^{2(\lambda, ky)} dk \right) e^{\|y\|^2} dy}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_K e^{(\lambda, ky)} dk \right) e^{\|y\|^2/2} dy \right)^2}.$$

On fait un changement des variables $ky \rightarrow y$ et on considère l'invariance de la mesure. Ensuite, en échangeant l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n}$ avec $\int_K$, on obtient le résultat cherché. $\square$

4.4. Les sphères de dimension impaire $\mathbb{S}^{2k+1}$

Dans cette partie, nous étudions l'unitarité de la transformée BKS pour les sphères qui sont des espaces symétriques de rang un.

Nous allons travailler en particulier avec des sphères de dimension impaire pour ne pas avoir des racines carrées dans la formule explicite de la fonction η et cela facilitera nos calculs. Dans le cas des sphères de dimension $2k + 1$ comme dans l'exemple (3.3.11), on identifie $\mathfrak{p}$ avec $\mathbb{R}^{2k+1}$.

Dans notre formule de comparaison (4.2.9), nous avons les fonctions sphériques $\phi_\lambda^\mathbb{C}$ évaluées au points $\exp(iY)$ et $\exp(2iY)$. Les fonctions sphériques $\phi_\lambda^\mathbb{C}$ pour ce cas sont des fonctions sur $(\mathbb{S}^{2k+1})^\mathbb{C}$ qui sont prolongement analytique des fonctions sphériques ϕ_λ sur $\mathbb{S}^{2k+1}$. Dans le chapitre 3, nous avons vu une identification de $(\mathbb{S}^{2k+1})^\mathbb{C}$ avec le fibré tangent TS^{2k+1} . Écrivons plus explicitement cette identification : Oublions pour l'instant la dimension impaire et faisons pour une dimension quelconque n . Nous avons l'espace symétrique $\mathbb{S}^n = U/K$ avec $U = \text{SO}(n+1)$ et $K = \text{SO}(n)$. L'algèbre de Lie correspondante $\mathfrak{u} = \mathfrak{so}(n+1)$ a une décomposition de Cartan comme dans l'exemple (3.3.11). Dans le chapitre 3, nous avons les identifications suivantes :

$$(4.4.1) \quad \text{SO}(n+1) \times^{\text{SO}(n)} \mathfrak{p} \rightarrow \text{TS}^n \quad [g, Y] \mapsto (ge_0, gYe_0) \in \text{TS}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

et

$$(4.4.2) \quad \text{SO}(n+1) \times^{\text{SO}(n)} \mathfrak{p} \rightarrow (\mathbb{S}^n)^\mathbb{C} \quad [g, Y] \mapsto ge^{iY}e_0 \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Nous avons le diagramme suivant :

$$(4.4.3) \quad \begin{array}{ccc} \text{SO}(n+1) \times^{\text{SO}(n)} \mathfrak{p} & \xrightarrow{a_1} & \text{TS}^n \\ \downarrow b_1 & \swarrow c_1 & \\ (\mathbb{S}^n)^\mathbb{C} & & \end{array}$$

qui nous donne une identification de TS^n avec $(\mathbb{S}^n)^\mathbb{C}$ par c_1 telle que $b_1 = c_1 \circ a_1$. Notre but est d'identifier les coordonnées $(q, p) = (q_0, \dots, q_n, p_0, \dots, p_n)$ de TS^n (où $q \in \mathbb{S}^n$ et $\langle q, p \rangle = 0$) aux coordonnées $z = (z_0, \dots, z_n)$ de $(\mathbb{S}^n)^\mathbb{C}$. Par le diagramme (4.4.3), nous

écrivons $(g, Y) \mapsto (ge_0, gYe_0) \mapsto ge^{iY}e_0$. Explicitement, pour $[g, Y] \in \mathrm{SO}(n+1) \times^{\mathrm{SO}(n)} \mathfrak{p}$, nous avons

$$\begin{aligned} b_1([g, Y]) &= c_1 \circ a_1([g, Y]) \\ ge^{iY}e_0 &= c_1(ge_0, gYe_0). \end{aligned}$$

Notons $(q, p) = (ge_0, gYe_0)$. Rappelons que nous avons $Y = \begin{pmatrix} 0 & -y^t \\ y & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ et $Ye_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. On voit aisément par ces égalités qu'on a $\|y\| = \|p\|$ puisque $g \in \mathrm{SO}(n+1)$. Nous allons calculer l'exponentielle d'un élément Y de $\mathfrak{p}$. Un calcul élémentaire nous donne :

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -y^t \\ y & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\|y\|) & -\frac{\sin(\|y\|)}{\|y\|}y^t \\ \frac{\sin(\|y\|)}{\|y\|}y & \mathbf{1} + \frac{\cos(\|y\|)-1}{\|y\|^2}yy^t \end{pmatrix}.$$

En calculant l'exponentielle pour iY , nous trouvons

$$\exp(iY) = \begin{pmatrix} \cosh(\|y\|) & -i\frac{\sinh(\|y\|)}{\|y\|}y^t \\ i\frac{\sinh(\|y\|)}{\|y\|}y & \mathbf{1} + \frac{\cosh(\|y\|)-1}{\|y\|^2}yy^t \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} ge^{iY}e_0 &= g \cdot \begin{pmatrix} \cosh(\|y\|) & -i\frac{\sinh(\|y\|)}{\|y\|}y^t \\ i\frac{\sinh(\|y\|)}{\|y\|}y & \mathbf{1} + \frac{\cosh(\|y\|)-1}{\|y\|^2}yy^t \end{pmatrix} \cdot e_0 \\ &= g \cdot \begin{pmatrix} \cosh(\|y\|) \\ i\frac{\sinh(\|y\|)}{\|y\|}y \end{pmatrix} = g \cdot \left(\cosh(\|p\|) \cdot e_0 + i\frac{\sinh(\|y\|)}{\|y\|} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \cosh(\|p\|)ge_0 + i\frac{\sinh(\|p\|)}{\|p\|}gYe_0 = \cosh(\|p\|)q + i\frac{\sinh(\|p\|)}{\|p\|}p. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons le difféomorphisme suivant $c_1: \mathrm{TS}^n \rightarrow (\mathbb{S}^n)^\mathbb{C}$, $(q, p) \mapsto \cosh(\|p\|)q + i\frac{\sinh(\|p\|)}{\|p\|}p$. On constate que ce difféomorphisme c_1 est la restriction du difféomorphisme $J: \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, $(q, p) \mapsto \cosh(\|p\|)q + i\frac{\sinh(\|p\|)}{\|p\|}p$. Nous avons donc les coordonnées $z(q, p) = \cosh(\|p\|)q + i\frac{\sinh(\|p\|)}{\|p\|}p \in (\mathbb{S}^n)^\mathbb{C}$ où $z(q, p) = (z_0(q, p), \dots, z_n(q, p))$.

Nous regardons les fonctions sphériques dans cet esprit. La fonction sphérique ϕ_λ sur $\mathbb{S}^n$ (et le prolongement analytique $\phi_\lambda^\mathbb{C}$ sur $(\mathbb{S}^n)^\mathbb{C}$) est invariante par $\mathrm{SO}(n)$ par la définition de la fonction sphérique. Cette propriété nous dit que ϕ_λ ne dépend que de q_0 pour $q = (q_0, \dots, q_n) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ puisque cette coordonnée est la seule invariante par l'action de $\mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{SO}(n+1)$ (par définition). Si on prolonge cette coordonnée comme ci-dessus, le prolongement analytique de cette fonction sphérique, notée $\phi_\lambda^\mathbb{C}$ dépend de $z_0(q, p) = \cosh(\|p\|)q_0 + i\frac{\sinh(\|p\|)}{\|p\|}p_0$ puisque cette coordonnée est le prolongement analytique de la coordonnée q_0 vers $(\mathbb{S}^n)^\mathbb{C}$ par c_1 . Écrivons en détail à l'aide du diagramme (4.4.3) : En

termes de (g, Y) , nous avons

$$\begin{aligned} z_0(g, Y) &= \langle e_0, g e^{iY} e_0 \rangle = \langle e_0, \cosh(\|y\|) g e_0 + i \frac{\sinh(\|y\|)}{\|y\|} g Y e_0 \rangle \\ &= \cosh(\|y\|) \cdot \langle e_0, g e_0 \rangle + i \frac{\sinh(\|y\|)}{\|y\|} \cdot \langle e_0, g Y e_0 \rangle. \end{aligned}$$

Comme on a dit ci-dessus, la fonction $\phi_\lambda^{\mathbb{C}}$ est évaluée aux points e^{iY} et e^{2iY} , ainsi, on cherche la restriction de $\phi_\lambda^{\mathbb{C}}$ en $\{e\} \times \mathfrak{p}$. Pour $g = e$, nous avons $\langle e_0, g e_0 \rangle = 1$ et $\langle e_0, g Y e_0 \rangle = 0$, d'où, la fonction $\phi_\lambda^{\mathbb{C}}(e, Y) = \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(e^{iY})$ ne dépend que de $\|y\|$, c'est à dire qu'elle ne dépend que de la distance. Et de même pour $\phi_\lambda^{\mathbb{C}}(e^{2iY})$.

REMARQUE 4.4.4. On connaît les racines restreintes et leurs multiplicités pour le cas de la sphère. En effet, pour $Y \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, la racine restreinte positive nous donne $\alpha(iY) = \|y\|$. La multiplicité correspondante pour la n -sphère est donnée par $m_\alpha = n - 1$. En utilisant tous ceci dans l'expression (3.3.33), nous obtenons $\eta(Y) = \left(\frac{\sinh 2\|y\|}{2\|y\|} \right)^{\frac{n-1}{2}}$ pour n -sphère. Nous pouvons également calculer $\eta(Y)$ par des calculs directes dans le cas de n -sphère en utilisant la formule $\frac{\bar{\partial} \wedge \partial}{b\varepsilon}$, mais ce sont des calculs encombrants.

Nous avons ainsi les fonctions $e^{-\kappa/2h} \eta(Y/2)$ et $e^{-\kappa/h} \eta(Y)$ pour $\mathbb{S}^{2k+1}$ données par

$$e^{-\kappa/2h} \eta(Y/2) = \left(\frac{\sinh \|y\|}{\|y\|} \right)^k e^{-\|y\|^2/2h} \quad \text{et} \quad e^{-\kappa/h} \eta(Y) = \left(\frac{\sinh 2\|y\|}{2\|y\|} \right)^k e^{-\|y\|^2/h}.$$

Constatons que ces fonctions ne dépendent que de $\|y\|$. Ainsi les fonctions $\phi_\lambda(\exp iY) e^{-\|y\|^2/2h} \eta(Y/2)$ et $\phi_\lambda(\exp 2iY) e^{-\|y\|^2/h} \eta(Y)$ de la formule de comparaison (4.2.9) ne dépendent que de $\|y\|$. Nous avons une formule intégrale pour ce genres des fonctions :

LEMME 4.4.5. Soit $f(|x|)$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$ qui ne dépend que de $|x|$ (où $|\cdot|$ signifie la norme euclidienne). L'identité suivante nous donne une simplification pour l'intégrale de la fonction $f(|x|)$:

$$(4.4.6) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) dx = n V_n \int_0^\infty f(t) t^{n-1} dt$$

où V_n est le volume de la n -sphère et nous avons la formule suivante pour le volume des $2k - 1$ -sphère par

$$V_{2k-1} = \frac{k! 4^k \pi^{k-1}}{(2k)!} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(voir e.g. [Bak99, Str81])

Pour les intégrales de l'égalité (4.2.9) on a donc les égalités suivantes :

$$(4.4.7) \quad \int_{\mathbb{R}^{2k+1}} \phi_\lambda^{\mathbb{C}}(e^{iY}) e^{-\|y\|^2/2} \left(\frac{\sinh \|y\|}{\|y\|} \right)^k dy = (2k+1) V_{2k+1} \int_0^\infty \phi_\lambda(t) e^{-t^2/2} \left(\frac{\sinh t}{t} \right)^k t^{2k} dt$$

et

$$(4.4.8) \quad \int_{\mathbb{R}^{2k+1}} \phi_{\lambda}^{\mathbb{C}}(e^{2iY}) e^{-\|y\|^2} \left(\frac{\sinh 2\|y\|}{2\|y\|} \right)^k dy = (2k+1)V_{2k+1} \int_0^{\infty} \phi_{\lambda}(2t) e^{-t^2} \left(\frac{\sinh 2t}{2t} \right)^k t^{2k} dt$$

On espère trouver un coefficient B_{λ} tel que

$$(4.4.9) \quad (2k+1)V_{2k+1}B_{\lambda} \left| \int_0^{\infty} \phi_{\lambda}(t) e^{-t^2/2} \left(\frac{\sinh t}{t} \right)^k t^{2k} dt \right|^2 = \int_0^{\infty} \phi_{\lambda}(2t) e^{-t^2} \left(\frac{\sinh 2t}{2t} \right)^k t^{2k} dt.$$

En s'inspirant de Takahashi, cf. [Tak63], on constate que les fonctions pour $\lambda = k, k+1, \dots$

$$(4.4.10) \quad \phi_{\lambda}^k(t) = c_k \frac{1}{\lambda^2(\lambda^2-1)\dots(\lambda^2-(k-1)^2)} \left(\frac{1}{\sinh t} \frac{d}{dt} \right)^k [\cosh \lambda t]$$

où $c_k = 1 \cdot 3 \dots (2k-1)$ est une constante absolue¹ sont des polynômes en $\cosh(t)$ de degré $\lambda - k$, càd,

$$\phi_{\lambda}^k(t) = Q_{\lambda}^k(\cosh(t))$$

avec $Q_{\lambda}^k(x)$ polynôme de degré $\lambda - k$. En plus, on constate qu'on a l'égalité

$$Q_{\lambda}^k(x) = P_{\lambda-k}^k(x)$$

où $P_{\lambda-k}^k$ étant polynôme ultra-sphérique.

Pour vérifier l'unitarité, il faut montrer que la constante B_{λ} de (4.4.9) ne dépend pas de λ . Notons

$$I_1(\lambda) = \int_0^{\infty} \phi_{\lambda}(t) e^{-t^2/2} \left(\frac{\sinh t}{t} \right)^k t^{2k} dt$$

et

$$I_2(\lambda) = \int_0^{\infty} \phi_{\lambda}(2t) e^{-t^2} \left(\frac{\sinh 2t}{2t} \right)^k t^{2k} dt.$$

Ainsi, on cherche à calculer

$$(4.4.11) \quad B_{\lambda} = \frac{I_2(\lambda)}{|I_1(\lambda)|^2}$$

où pour l'instant on oublie la constante $(2k+1)V_{2k+1}$ puisqu'elle est indépendante de λ .

Nous allons vérifier les cas particuliers. Dans la suite, nous allons utiliser les intégrales suivantes $\int_0^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\int_0^{\infty} e^{-t^2} t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$, $\int_0^{\infty} e^{-t^2/2} t^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4.4.1. Cas de $k = 0$, sphère $\mathbb{S}^1$. On a la fonction sphérique $\phi_{\lambda}(t) = \cosh \lambda t$ par la formule (4.4.10). Nous avons les mesures suivantes pour la formule (4.4.9) $1 \cdot e^{-t^2/2} dt$ et $1 \cdot e^{-t^2} dt$ puisque la fonction η nous donne 1 dans le cas de 1-sphère. Les calculs élémentaires nous donne

$$I_1(\lambda) = e^{\lambda^2/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad I_2(\lambda) = e^{\lambda^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1. On peut ignorer cette constante puisqu'elle ne dépend pas de λ .

Nous avons enfin la constante $B_\lambda = (\sqrt{\pi})^{-1}$. D'où nous avons l'unitarité (à la constante B_λ) de la transformée BKS pour la 1-sphère puisque B_λ est indépendant de λ .

4.4.2. Pour $k = 1$ le cas $\mathbb{S}^3$. Pour $k = 1$, on a le cas $\mathbb{S}^3 \cong \text{SU}(2)$. Nous avons cette fois-ci $\phi_\lambda(t) = \frac{\sinh(\lambda t)}{\lambda \sinh t}$, et les mesures suivantes : $\frac{\sinh t}{t} e^{-t^2/2} dt$ et $\frac{\sinh 2t}{2t} e^{-t^2} dt$. Nous calculons $I_1(\lambda)$ et $I_2(\lambda)$ de la même façon :

$$I_1(\lambda) = e^{\lambda^2/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad I_2(\lambda) = \frac{e^{\lambda^2}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi, nous trouvons la constante $B_\lambda = (4\pi)^{-1/2}$ et on constate qu'elle est indépendante de λ . Ainsi nous avons l'unitarité (à la constante B_λ) de la transformée BKS pour 3-sphère.

4.4.3. Pour $k = 2$, la sphère $\mathbb{S}^5$. Puisque ce cas n'est pas le cas particulier de groupe de Lie comme les autres, c'est le plus important. Nous avons les fonctions sphériques :

$$\phi_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda(\lambda^2 - 1)} \frac{\lambda \sinh t \cosh(\lambda t) - \cosh t \sinh(\lambda t)}{(\sinh t)^3},$$

et les mesures suivantes :

$$\left(\frac{\sinh t}{t}\right)^2 e^{-t^2/2} dt \quad \text{et} \quad \left(\frac{\sinh 2t}{2t}\right)^2 e^{-t^2} dt.$$

Dans ce cas nous avons :

$$I_1(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda(\lambda^2 - 1)} \frac{\lambda \sinh t \cosh(\lambda t) - \cosh t \sinh(\lambda t)}{(\sinh t)^3} \left(\frac{\sinh t}{t}\right)^2 e^{-t^2/2} t^4 dt$$

$$I_2(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda(\lambda^2 - 1)} \frac{\lambda \sinh 2t \cosh(2\lambda t) - \cosh 2t \sinh(2\lambda t)}{(\sinh 2t)^3} \left(\frac{\sinh 2t}{2t}\right)^2 e^{-t^2} t^4 dt$$

Puisque les calculs sont plus compliqués, nous faisons les calculs pour certaines valeurs de λ et vérifions si la constante B_λ dépend de λ ou non.

Pour $\lambda = 2$. On calcule $I_1(2)$ et $I_2(2)$ pour $\lambda = 2$ par :

$$I_1(2) = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (10e^2 - 2) \quad \text{et} \quad I_2(2) = \frac{1}{12} (9e^4 - 1) \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

En comparant $I_1(2)$ et $I_2(2)$, on trouve :

$$B_2 = \frac{I_2(2)}{|I_1(2)|^2} = \frac{3}{\pi^{1/2}} \frac{(9e^4 - 1)}{(25e^4 - 10e^2 + 1)}$$

Pour voir si la constante dépend de λ ou non, il faut faire ces calculs pour quelques autres cas particulier aussi.

Pour $\lambda = 3$. Nous calculons $I_1(3)$ et $I_2(3)$ pour $\lambda = 3$ et montrons qu'on trouve un résultat différent par rapport au cas $\lambda = 2$ ce qui nous dit que B_λ dépend de λ . Nous avons :

$$I_1(3) = \frac{1}{24} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (20e^{9/2} - 4e^{1/2}) \quad \text{et} \quad I_2(3) = \frac{1}{24} \frac{\sqrt{\pi}}{2} (19e^9 - 3e^1).$$

En comparant $I_1(3)$ et $I_2(3)$, on en trouve :

$$B_3 = \frac{I_2(3)}{|I_1(3)|^2} = \frac{3}{2\pi^{1/2}} \frac{(19e^8 - 3)}{(25e^8 - 10e^4 + 1)}$$

On voit que la constante B_λ dépend de λ dans les cas $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$ puisqu'on a trouvé deux différentes constantes. On n'a pas donc l'unitarité pour un espace symétrique quelconque. C'est un contre exemple. De la même façon, on va faire les calculs pour $\lambda = 4$ et $\lambda = 5$, et on va voir chaque fois que la comparaison dépend de λ et donc on n'a pas l'unitarité pour $\mathbb{S}^5$.

Pour $\lambda = 4$. On va procéder de la même façon que précédemment. On calcule les intégrales $I_1(4)$ et $I_2(4)$ par :

$$I_1(4) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (51e^8 - 10e^2 - 1) \quad \text{et} \quad I_2(4) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} (99e^{16} - 18e^4 - 1).$$

En comparant les intégrales $I_1(4)$ et $I_2(4)$, on en trouve :

$$B_4 = \frac{I_2(4)}{|I_1(4)|^2} = \frac{30(99e^{16} - 18e^4 - 1)}{\pi^{1/2}(51e^8 - 10e^2 - 1)^2}.$$

D'où nous constatons que nous avons la dépendance à λ .

Pour $\lambda = 5$. Les intégrales $I_1(5)$ et $I_2(5)$ sont calculées par :

$$I_1(5) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (104e^{25/2} - 20e^{9/2} - 4e^{1/2}) \quad \text{et} \quad I_2(5) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} (204e^{25} - 38e^9 - 6e^1).$$

En comparant les intégrales $I_1(5)$ et $I_2(5)$, on en trouve :

$$B_5 = \frac{I_2(5)}{|I_1(5)|^2} = \frac{15}{2\pi^{1/2}} \frac{(102e^{25} - 19e^9 - 3e^1)}{(26e^{25/2} - 5e^{9/2} - e^{1/2})^2}.$$

D'où nous constatons que nous avons la dépendance à λ . Par ces calculs avec quatres différentes valeurs de λ , nous constatons la dépendance de B_λ à λ ce qui nous montre que la transformée BKS pour $\mathbb{S}^5$ n'est pas unitaire.

4.4.4. Unitarité Asymptotique. Considérons la constante B_λ donnée par la formule (4.2.9). Dans la partie précédente, nous avons montré que cette constante dépend en général de λ et nous n'avons donc pas l'unitarité en général pour les espaces symétriques compacts riemanniens. Dans cette partie, on va montrer que lorsque la constante de Planck $\hbar$ de la quantification tend vers 0 dans B_λ , nous avons l'indépendance de λ et donc nous avons l'unitarité asymptotique pour les espaces symétriques compacts riemanniens.

On note $I_1 = \int_{\mathfrak{p}} \phi_{\lambda}^{\mathbb{C}}(e^{2iY}) e^{-\kappa/h} \eta(Y) dY$ et $I_2 = \int_{\mathfrak{p}} \phi_{\lambda}^{\mathbb{C}}(e^{iY}) e^{-\kappa/2h} \eta(Y/2) dY$. Dans ces intégrales, on substitue $\hbar$ par v^2 avec $v > 0$. On pose $\phi_{\lambda}^{\mathbb{C}}(e^{iY}) \eta(Y/2) = C_{\lambda}(Y)$ et $\phi_{\lambda}^{\mathbb{C}}(e^{2iY}) \eta(Y) = D_{\lambda}(Y)$.

Ensuite, on fait le changement de variables $Y = vZ$ dans les deux intégrales : L'intégrale I_1 devient : $I_1 = v^d \int D_{\lambda}(vZ) e^{-\kappa(Z)} dZ$ tandis que l'intégrale I_2 nous donne : $|I_2|^2 = v^{2d} \left| \int C_{\lambda}(vZ) e^{-\kappa(Z/2)} dZ \right|^2$ en tenant compte que $\kappa(Y) = |Y|^2$.

Dans la quantification géométrique, on normalise le produit scalaire sur $U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ et le couplage BKS pour U/K (d'où la transformée BKS également) par la constante $\hbar^{-\dim(U/K)/2}$, i.e. nous avons $\hbar^{-\dim(U/K)/2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{U^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}}$ et $\hbar^{-\dim(U/K)/2} \langle \cdot, \cdot \rangle_{BKS}$. Cette constante $\hbar^{-\dim(U/K)/2}$ de normalisation provient du fait qu'on utilise $\frac{\sigma}{\hbar}$ plutôt que σ en tant que forme symplectique en quantification géométrique. On multiplie donc l'intégrale I_1 par v^{-d} et l'intégrale $|I_2|^2$ par v^{-2d} puisque $\hbar = v^2$. On fait tendre v vers 0. Les deux intégrales ont alors comme limite respective pour n'importe quel λ réel ou complexe : pour l'intégrale I_1 : $\lim_{v \rightarrow 0} I_1 = \int_{\mathfrak{p}} e^{-\kappa(Z)} dZ$ et pour l'intégrale $|I_2|^2$: $\lim_{v \rightarrow 0} (|I_2|^2) = \left| \int_{\mathfrak{p}} e^{-\kappa(Z/2)} dZ \right|^2$.

Formellement, par le fait que les fonctions C_{λ} et D_{λ} sont continues à l'origine et de valeur 1 on a ce résultat. La justification de convergence dominée de Lebesgue repose sur la croissance exponentielle de ces deux fonctions, ce qui est connu et simple à vérifier pour $\mathbb{S}^5$. Pour le cas général, on change les notations et on écrit le lemme suivant :

LEMME 4.4.12. *Soit A un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Alors les fonctions suivantes sont à croissance exponentielle :*

$$\|e^{AY}\|, \|\sinh(AY)/AY\|.$$

De plus si la norme d'une application $B(Y)$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ est à croissance exponentielle, il en est de même du module du déterminant de $B(Y)$ ainsi que d'une fonction du type module de $\langle v, B(Y)w \rangle$ avec v, w vecteurs de $\mathbb{C}^n$.

PREUVE. On développe l'exponentielle en série entière et on trouve qu'il est majoré par la somme des normes qui nous dit qu'elle est à croissance exponentielle. De la même façon, le sinus hyperbolique est à croissance exponentielle également.

Pour le déterminant, on utilise le fait que le module de chaque coefficient de la matrice est majorée par la norme et que le module du déterminant est majoré par $n!s^n$ où s est le maximum des modules des coefficients. Pour la dernière assertion, on utilise l'inégalité de Schwarz.

□

On utilise le lemme de la manière suivante : On écrit la fonction sphérique $\phi_{\lambda}^{\mathbb{C}}(e^{iY}) = \langle \pi_{\lambda}(e^{iY})u, u \rangle$. On applique alors le lemme en remarquant que $\pi_{\lambda}(e^{iY}) = e^{d\pi_{\lambda}(iY)}$ avec $A = d\pi_{\lambda}$ la représentation infinitésimale associée à π_{λ} . D'où on a la croissance exponentielle pour la fonction sphérique. Pour la fonction η , on prend pour A la représentation ad_Y de l'algèbre de Lie, et on utilise la partie du lemme sur le déterminant qui nous donne la croissance exponentielle pour la fonction η .

Enfin, nous constatons que le quotient des limites de ces deux intégrales nous donne une constante, nous avons donc l'unitarité asymptotique pour le cas général.

REMARQUE 4.4.13. L'unitarité asymptotique de la transformée BKS dépend du choix du facteur de la normalisation de produit scalaire (et du couplage BKS). On peut choisir d'autres constantes pour normaliser le produit scalaire (et le couplage BKS) mais nous aurons des résultats différents. Notre choix est naturel.



ANNEXE A

Discussions sur les systèmes de racines

A.1. Décomposition complexe

Soient T un tore maximal de U , $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie de T et $T^{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$) le complexifié de T (resp. $\mathfrak{t}$). Alors $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$. Soit $\Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ le système de racines ordinaires de $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ par rapport à $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$. La *décomposition radicielle* par rapport aux racines ordinaires (ou absolues) s'écrit alors

$$(A.1.1) \quad \mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\gamma \in \Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{u}_{\gamma}^{\mathbb{C}};$$

où chaque élément γ est une racine complexe $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$. Après un choix de chambre de Weyl dominante (appelée également positive) dans it , on définit le système $\Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ de *racines complexes positives* correspondantes et on obtient alors

$$(A.1.2) \quad \mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\gamma \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{u}_{\gamma}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\gamma \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{u}_{-\gamma}^{\mathbb{C}}.$$

On utilise la convention suivante. Pour tout $Z \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ et $Y \in \mathfrak{u}_{\gamma}^{\mathbb{C}}$ (l'espace de racines associé à $\gamma: \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$), le crochet $[Z, Y]$ est donné par

$$(A.1.3) \quad [Z, Y] = \gamma(Z)Y.$$

A.2. Décomposition réelle

Pour chaque racine positive $\gamma \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$, l'intersection

$$(A.2.1) \quad \mathfrak{q}_{\gamma} = \mathfrak{u} \cap (\mathfrak{u}_{\gamma}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{u}_{-\gamma}^{\mathbb{C}})$$

est un plan réel dans $\mathfrak{u}$, et même une représentation réelle irréductible de $\mathfrak{t}$, et on a

$$(A.2.2) \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{\gamma \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{q}_{\gamma}.$$

On rappelle également que les racines réelles ordinaires $R(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$ de $\mathfrak{u}$ par rapport à $\mathfrak{t}$ sont caractérisées par la condition que, pour tout $Z \in \mathfrak{t}$ et $A \in \mathfrak{u}_{\alpha} \subseteq \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$, le crochet $[Z, A]$ est donné par

$$(A.2.3) \quad [Z, A] = i\alpha(Z)A$$

de telle sorte que α soit une forme linéaire à valeurs réelles sur $\mathfrak{t}$. Grâce au système de racines réelles ordinaires positives $R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$, on obtient que la décomposition (A.2.2) se réécrit sous la forme

$$(A.2.4) \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha \in R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})} \mathfrak{q}_\alpha.$$

Voir également (A.5.4).

A.3. Espace symétrique dual non compact

L'expression *dual non compact* a le même sens que dans [Hel01, Chap. V.2]. Soit (U, K, θ) une paire symétrique compacte. On note $G = K \exp(i\mathfrak{p}) \subseteq U^\mathbb{C}$. Le sous-groupe G est fermé dans $U^\mathbb{C}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ semi-simple réelle et

$$(A.3.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$$

est une décomposition symétrique. En outre, la composante connexe de l'identité G_0 de G est un sous-groupe $G_0 = K_0 \exp(i\mathfrak{p})$ de G . Par construction, les complexifiés $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ et $\mathfrak{u}^\mathbb{C}$ de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{u}$ respectivement, coïncident.

Comme précédemment et par abus de notation, on note θ l'involution de $U^\mathbb{C}$ qui vient du prolongement holomorphe de celle de U . Pour tout $x \in G$, on a $\theta(x) = (x^*)^{-1}$ où x^* signifie l'adjoint (conjugué transposé) de l'élément x et, par rapport à la restriction de θ à G , la donnée (G, K, θ) est une paire symétrique. Le groupe G est un groupe linéaire réductif (réel) donc on peut appliquer la théorie des systèmes de racines restreintes à la décomposition symétrique $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ de la façon suivante, cf. [Mac79, §II.9 p.122]. Le sous-espace linéaire $i\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ de $i\mathfrak{p}$ est de Cartan par rapport à la décomposition symétrique (A.3.1). Soit $A_{i\mathfrak{p}} = \exp(i\mathfrak{a}_\mathfrak{p}) \subseteq G$ le sous-groupe de Cartan associé. Étant donnée une forme linéaire réelle $\alpha: i\mathfrak{a}_\mathfrak{p} \rightarrow \mathbb{R}$ sur $i\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, on note

$$(A.3.2) \quad \mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}; [H, X] = \alpha(H)X, H \in i\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\}, m_\alpha = \dim \mathfrak{g}_\alpha.$$

Lorsque $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$, la forme linéaire α s'appelle *racine restreinte* pour $\mathfrak{g}$ par rapport à $i\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$. On note $\Delta(\mathfrak{g}, i\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ le système de racines restreintes. Par construction, $\Delta(\mathfrak{g}, i\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ est un sous-ensemble fini de $\text{Hom}(i\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathbb{R})$.

Notons $\mathfrak{l}$ le centralisateur de $i\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{g}$. Les éléments de $\text{ad}_\mathfrak{g}(i\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ constituent une famille d'opérateurs auto-adjoints qui commutent deux à deux, cf. [Mac79, §II.9 p.122]. La *décomposition radicielle associée* s'écrit alors

$$(A.3.3) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, i\mathfrak{a}_\mathfrak{p})} \mathfrak{g}_\alpha,$$

cf. [Mac79, §II.9 p.122]. On rappelle que $\mathfrak{l}$ contient $i\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ par définition mais ne coïncide pas nécessairement avec $i\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$. En notant $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie du centralisateur M de $A_{i\mathfrak{p}} = \exp(i\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ dans K , on a en fait

$$(A.3.4) \quad \mathfrak{l} = \mathfrak{m} \oplus i\mathfrak{a}_\mathfrak{p},$$

cf. [Mac79, §II.9 p.123].

REMARQUE A.3.5. Dans [BtD95](V.1.3 dans la p.185) les $i\alpha$ s'appellent *racines infinitésimales* et sont notées Θ tandis que les *racines réelles* correspondent à nos α divisés par 2π . Ce facteur est intégré dans notre notation des α ce qui a l'avantage de simplifier les formules.

A.4. Racines restreintes

Choisissons un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{p}$ par rapport à la décomposition $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Ce choix est unique modulo l'action adjointe de K sur $\mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{u}$ qui contient $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$. On montre que l'intersection $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}$ est une sous-algèbre du centralisateur $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathfrak{k}$. Ce centralisateur $\mathfrak{m}$ (et ainsi $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$) peut être trivial ou non.

On munit $\mathfrak{u}$ d'un produit scalaire U -invariant $\langle \cdot, \cdot \rangle$. L'expression *complémentaire orthogonal* renvoie désormais à ce produit scalaire. Le produit triple $(\cdot, \cdot, \cdot)$ est alors défini sur $\mathfrak{u}$ par

$$(A.4.1) \quad (X, Y, Z) = \langle [X, Y], Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{u};$$

il est bien connu que ce produit triple vérifie les identités

$$(A.4.2) \quad (X, Y, Z) = (Y, Z, X) = (Z, X, Y), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{u}.$$

Notons $\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}}$ le complémentaire orthogonal de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$ celui de $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathfrak{p}$. Rappelons que la décomposition symétrique $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ de $\mathfrak{u}$ raffine la décomposition standard de $\mathfrak{u} = \mathfrak{t} \oplus [\mathfrak{u}, \mathfrak{t}]$ en $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ -modules de la manière suivante

$$(A.4.3) \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} \oplus [\mathfrak{m}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}] \oplus \mathfrak{q}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}.$$

L'action infinitésimale de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{p}$ induit un isomorphisme linéaire $\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}} \rightarrow \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$. C'est une conséquence de la décomposition radicielle. Soit $R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$ désigne le système de racines réelles positives ordinaires correspondant. Soit $R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{t}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ désigne la famille de racines dans $R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$ qui ne sont pas nulles sur $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$.

Nous avons $\mathfrak{t} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{t}$. En effet, il est immédiat que $\mathfrak{t} \supseteq \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$. En outre, un membre de $\mathfrak{t}$ peut s'écrire uniquement comme $v + w$ où $v \in \mathfrak{k}$ et $w \in \mathfrak{p}$. Ainsi, w est nécessairement un membre de $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ puisque $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ est une sous-algèbre maximale abélienne de $\mathfrak{p}$, d'où, $v \in \mathfrak{k}$ et donc $v \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{t} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$.

La décomposition

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{t} \oplus [\mathfrak{u}, \mathfrak{t}]$$

raffine à

$$(A.4.4) \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{q}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}.$$

De la même façon, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ peut s'écrire sous forme

$$(A.4.5) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{q}_{\mathfrak{k}} \oplus i\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}.$$

PROPOSITION A.4.6. *La composante $\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}$ se décompose comme*

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} = \sum_{\alpha \in R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{t}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})} \mathfrak{q}_{\alpha}.$$

Ainsi, la décomposition radicielle par rapport aux racines réelles restreintes de $\mathfrak{u}$ associée à la décomposition symétrique $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, et le choix de sous-espace de Cartan réel $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{p}$ peut s'écrire sous forme

$$(A.4.7) \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{q}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \oplus \sum_{\alpha \in R^+(\mathfrak{u}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})} \mathfrak{q}_{\alpha}.$$

On va éclairer la situation : Considérons une racine restreinte $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})$ par rapport à la décomposition symétrique $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, et soient $\gamma_1^{\alpha}, \dots, \gamma_{m_{\alpha}}^{\alpha} \in \Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ des racines ordinaires (ou absolues) $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ dont la restriction à $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}}$ coïncide avec α . On note $\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}} = [\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}]$. Comme dans la démonstration de [Far03] IV.1.1 Théorème, choisissons des vecteurs

$$V_{\alpha}^j \in \mathfrak{u}_{\gamma_j^{\alpha}}^{\mathbb{C}}, \quad \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}}), \quad j = 1, \dots, m_{\alpha},$$

tels que la famille

$$Y_{\alpha}^j = \frac{1}{2}(V_{\alpha}^j - V_{-\alpha}^j), \quad \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}}), \quad j = 1, \dots, m_{\alpha},$$

constitue une base de $\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}}$ et tels que la famille

$$X_{\alpha}^j = \frac{1}{2i}(V_{\alpha}^j + V_{-\alpha}^j), \quad \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}}), \quad j = 1, \dots, m_{\alpha},$$

constitue une base de $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} = [\mathfrak{k}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}] = [\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}]$.

Considérons $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})$, par construction, une forme linéaire réelle de type $i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathbb{R}$; maintenant, étant donnée $1 \leq j \leq m_{\alpha}$ et $Z \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$,

$$(A.4.8) \quad [Z, Y_{\alpha}^j] = \frac{1}{2}[Z, V_{\alpha}^j - V_{-\alpha}^j] = \frac{1}{2}\alpha(Z)(V_{\alpha}^j + V_{-\alpha}^j) = -\frac{\alpha}{i}X_{\alpha}^j$$

$$(A.4.9) \quad [Z, X_{\alpha}^j] = \frac{\alpha}{i}Y_{\alpha}^j.$$

Avec les conventions qu'on a choisies, $\frac{\alpha}{i}: \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathbb{R}$ est une racine restreinte réelle.

Alors, étant donnée une racine restreinte positive $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})$, soient $(\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}})_{\alpha}$ désigne l'espace réel engendré par les X_{α}^j et $(\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}})_{\alpha}$ désigne l'espace réel engendré par les Y_{α}^j . Ainsi,

nous avons les décompositions suivantes :

$$(A.4.10) \quad \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} = \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})} (\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}})_{\alpha}, \quad \dim(\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}})_{\alpha} = m_{\alpha},$$

$$(A.4.11) \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})} (\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}})_{\alpha},$$

$$(A.4.12) \quad \mathfrak{q}_{\mathfrak{k}} = \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})} (\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}})_{\alpha}, \quad \dim(\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}})_{\alpha} = m_{\alpha},$$

$$(A.4.13) \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})} (\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}})_{\alpha},$$

$$(A.4.14) \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{m} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})} (\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}})_{\alpha} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})} (\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}})_{\alpha}.$$

On appelle la décomposition (A.4.14) *décomposition radicielle par rapport aux racines restreintes* de $\mathfrak{u}$ associée à la décomposition $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, et au choix de sous-espace de Cartan réel $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{p}$. Par construction,

$$(\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})_{\alpha} \oplus (\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}}^{\mathbb{C}})_{\alpha} = \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}^{\mathbb{C}}, \quad \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}}).$$

REMARQUE A.4.15. Considérons la décomposition suivante :

$$(A.4.16) \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{t} \oplus [\mathfrak{u}, \mathfrak{t}] = \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} \oplus [\mathfrak{k}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}] \oplus [\mathfrak{p}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}] \oplus [\mathfrak{p}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}] \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \oplus [\mathfrak{k}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}].$$

Alors l'identité

$$[\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}] = \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}},$$

raffine à

$$[(\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}})_{\alpha}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}] = (\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}})_{\alpha}, \quad \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}}).$$

Cela implique

$$[(\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}})_{\alpha}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}] = (\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}})_{\alpha}, \quad \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}}).$$

Par exemple, pour le cas où

$$(\mathfrak{u}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}), \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})) = (\mathfrak{su}(2), \mathfrak{u}(1)),$$

en fonction de bases standard e_1, e_2, e_3 telles que $[e_1, e_2] = e_3$ etc.,

$$\mathfrak{m} = 0, \quad \mathfrak{k} = \mathbb{R}\langle e_1 \rangle = \mathfrak{q}_{\mathfrak{k}}, \quad \mathfrak{p} = \mathbb{R}\langle e_2, e_3 \rangle, \quad \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}\langle e_2 \rangle = \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}\langle e_3 \rangle.$$

A.5. Deux systèmes de racines

On garde les notations établies dans les parties précédentes. Pour obtenir un meilleur aperçu des systèmes de racines restreintes (ou relatives) $\Delta^+(\mathfrak{g}, i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$, en suivant [Mac79] §II.10, on compare ce système avec le système de racines absolues de la complexification $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ par rapport à une sous-algèbre de Cartan appropriée. Par soucis d'exposition, on précise que notre notation $i\mathfrak{p}$ (resp. $i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$) correspond à $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$) dans [Mac79] et par conséquent $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ correspond aussi à $i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ dans [Mac79].

Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre maximale (réelle) abélienne de $\mathfrak{g}$ qui contienne $i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$. Alors $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ ($=\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$). Supposons que $\mathfrak{a}$ soit stable par l'involution θ . En outre, on a

$$i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a} \cap i\mathfrak{p}$$

et, avec la notation $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{k}$, on a également la décomposition en somme directe

$$(A.5.1) \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} \oplus i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}.$$

La partie $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ de $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan du centralisateur $\mathfrak{m}$ de $i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathfrak{k}$, voir (A.5.6) ci-dessous.

Le complexifié $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$. Écrivons la décomposition radicielle par rapport aux racines absolues de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$

$$(A.5.2) \quad \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\gamma \in \Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{u}_{\gamma}^{\mathbb{C}}.$$

Soit $\mathfrak{a}^{\mathbb{R}} = i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \oplus i\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$. Les racines $\Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}^{\mathbb{C}})$ sont dans le dual réel $\text{Hom}(\mathfrak{a}^{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$, et la somme

$$(A.5.3) \quad \mathfrak{t} = i\mathfrak{a}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$$

est une sous-algèbre de Cartan de la forme compacte $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$, et $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre maximale abélienne de $\mathfrak{u}$ qui contient $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$. Par construction, $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$ et la décomposition en espaces de racines (absolues) (A.5.2) s'écrit sous la forme

$$(A.5.4) \quad \mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\gamma \in \Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{u}_{\gamma}^{\mathbb{C}}.$$

On remarque qu'au lieu de commencer par une sous-algèbre maximale abélienne $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ contenant $i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, on aurait tout aussi bien pu commencer par une sous-algèbre maximale abélienne $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{u}$ contenant $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$.

EXEMPLE A.5.5. L'intersection $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}$ n'est pas nécessairement une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}$ et il n'y a pas de raison en général que $\mathfrak{t}$ coïncide avec la somme directe $(\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}) \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$. C'est vrai dans le cas particulier $(\mathfrak{u}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{k}, \mathfrak{k}_{\Delta})$ mais faux pour

$$(\mathfrak{u}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}), \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})) = (\mathfrak{su}(2), \mathfrak{u}(1)).$$

Dans ce dernier cas, dans la base standard e_1, e_2, e_3 telle que $[e_1, e_2] = e_3$ etc., on prend $\mathfrak{k} = \mathbb{R}\langle e_1 \rangle$, $\mathfrak{p} = \mathbb{R}\langle e_2, e_3 \rangle$, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}\langle e_2 \rangle = \mathfrak{t}$, d'où $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{k} = \{0\}$. En outre, on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, et $\mathfrak{a} = i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, d'où l'intersection $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{k}$ est nulle. Ainsi l'intersection $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{k}$ n'est pas non-plus nécessairement une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}$.

Considérons maintenant la restriction

$$\text{res}: \text{Hom}(\mathfrak{a}^{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}(i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{R}).$$

Vu la décomposition de la somme directe $\mathfrak{a}^{\mathbb{R}} = i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \oplus i\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$, on peut identifier le noyau de cette restriction avec $\text{Hom}(i\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}, \mathbb{R})$. Pour toute racine

$$\gamma \in \Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}^{\mathbb{C}}) = \Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}) \subseteq \text{Hom}(\mathfrak{a}^{\mathbb{R}}, \mathbb{R}),$$

la restriction de γ à $i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ est soit nulle soit un élément de $\Delta(\mathfrak{g}, i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$.

Le système de racines $\gamma \in \Delta(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}^{\mathbb{C}}) \subseteq \text{Hom}(\mathfrak{a}^{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ s'annulant sur $i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ est dans $\text{Hom}(i\mathfrak{a}_{\mathfrak{t}}, \mathbb{R})$ (sauf qu'il peut engendrer un sous-espace propre de $\text{Hom}(i\mathfrak{a}_{\mathfrak{t}}, \mathbb{R})$) et c'est aussi le système de racines $\Delta(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}}^{\mathbb{C}}) \subseteq \text{Hom}(i\mathfrak{a}_{\mathfrak{t}}, \mathbb{R})$ de la complexification $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ du centralisateur $\mathfrak{m}$ de $i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathfrak{k}$ (l'algèbre de Lie du centralisateur M de $A_{i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}}$ dans K). Ce centralisateur $\mathfrak{m}$ est une algèbre de Lie réductive complexe et se décompose par rapport à $\mathfrak{a}_{\mathfrak{t}}^{\mathbb{C}}$ de la manière suivante

$$(A.5.6) \quad \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\gamma \in \Delta(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{u}_{\gamma}^{\mathbb{C}}.$$

Le système $\Delta(\mathfrak{g}, i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ contient les restrictions à $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}}$ des racines $\gamma: \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ par rapport à $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ (i.e. les racines dans $\Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$) qui sont non-triviales sur $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}}$ et ainsi il est égal au système de racines restreintes $\Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})$. En outre, pour toute racine restreinte (non triviale) $\alpha: \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ par rapport à $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}}$, le nombre $m_{\alpha}^{\mathbb{C}}$ est égal au nombre de racines $\gamma: \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ dans $\Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$ qui peuvent se restreindre à α , et on a alors

$$(A.5.7) \quad \mathfrak{g}_{\alpha} = (\oplus_{\gamma|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}}} = \alpha} \mathfrak{u}_{\gamma}^{\mathbb{C}}) \cap \mathfrak{g}.$$

Grâce à ces notation, on peut réécrire la décomposition en espaces de racines absolues (A.5.4) sous la forme

$$(A.5.8) \quad \mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\gamma \in \Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{u}_{\gamma}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\gamma \in \Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{u}_{\gamma}^{\mathbb{C}}.$$

Pour résumer, nous avons les points suivants

- (1) Les complexifiés de $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{g}$ coïncident, c-à-d, $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$;
- (2) le centralisateur $\mathfrak{l}$ de $i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathfrak{g}$ se décompose comme $\mathfrak{l} = \mathfrak{m} \oplus i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, cf. (A.3.4);
- (3) le système de racines $\Delta(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}}^{\mathbb{C}})$ coïncide avec $\{\gamma \in \Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}); \gamma|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}}} = 0\}$;
- (4) ainsi, cf. (A.5.6),

$$\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\gamma \in \Delta(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{u}_{\gamma}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\gamma \in \Delta(\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{t}}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{u}_{\gamma}^{\mathbb{C}}.$$

Par conséquent, la décomposition (A.5.8) s'écrit aussi

$$(A.5.9) \quad \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{l}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}}.$$

Ici, étant donnée une racine restreinte $\alpha \in \Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}})$,

$$\mathfrak{g}_{\alpha}^{\mathbb{C}} = \sum_{\gamma \in \Delta(\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{u}_{\gamma}^{\mathbb{C}}.$$

La décomposition (A.5.9) est la décomposition en espaces de racines restreintes complexes de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}$ par rapport à la décomposition symétrique

$$(A.5.10) \quad \mathfrak{u}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$$

et le sous-espace de Cartan complexe $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$. Par construction, la décomposition (A.5.9) est la complexification de (A.3.3).



ANNEXE B

Calcul de caractère du groupe $SU(2)$

Calculons le caractère du groupe $SU(2)$ via la formule des caractères de Kirillov. Nous utilisons une version sous la forme :

$$\chi_\lambda(\exp Z) = \frac{1}{j(Z)} \int_{O_{\lambda+\rho}} e^{2\pi i F(Z)} d\beta(F)$$

où $j(Z) = \frac{\sinh(\text{ad } Z/2)}{\text{ad } Z/2}$. Les orbites coadjointes du $SU(2)$ sont les variétés de drapeaux, plus explicitement, les sphères qui sont centrés en $0 \in \mathfrak{su}(2)$. Soit Ω_r une sphère du rayon r , en passant aux coordonnées sphérique, écrivons $\beta = r \sin \phi d\theta d\phi$ (des calculs encombrant). Soit $Z = \begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & -it \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2)$. Ainsi, calculons l'intégrale en faisant le changement de variable :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} e^{2\pi i \langle Z, F \rangle} d\beta(F) &= \frac{r}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{irt \sin \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{r}{4\pi} (\phi) \Big|_0^{2\pi} \left(\frac{e^{irt \sin \theta}}{irt} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{\sin(rt)}{t} \end{aligned} \tag{B.0.11}$$

Pour trouver le caractère, il nous reste à trouver $j(Z)$. Pour calculer $\text{ad } Z$, utilisons la base suivante de $\mathfrak{su}(2)$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et calculons les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \text{ad } \sigma_1(\sigma_2) &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2\sigma_3 \\ \text{ad } \sigma_1(\sigma_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = 2\sigma_2 \\ \text{ad } \sigma_2(\sigma_3) &= \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} = -2\sigma_1 \end{aligned}$$

et si nous les représentons sous forme matricielle, nous voyons facilement que

$$\text{ad } \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous calculons $\text{ad } \sigma_2$ et $\text{ad } \sigma_3$ similairement.

Nous savons que $Z = t\sigma_1$ et d'où, il s'ensuit que $\text{ad } Z = \text{ad}(t\sigma_1) = t(\text{ad } \sigma_1)$. Nous avons donc

$$\frac{\sinh(\text{ad } Z/2)}{\text{ad } Z/2} = \frac{\sinh(t(\text{ad } \sigma_1)/2)}{t(\text{ad } \sigma_1)/2}.$$

Notons $(\text{ad } \sigma_1)/2 = X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ensuite, écrivons $\sinh$ en série entière et nous obtenons ainsi

$$j(Z) = \frac{\sinh(tX)}{tX} = \frac{tX + \frac{t^3 X^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots}{tX}.$$

Alors, en observant $X^3 = -X$, $X^5 = X$, nous avons l'égalité suivante :

$$j(Z) = \frac{X(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots)}{tX} = \frac{\sin(t)}{t}.$$

Pour finir, nous divisons par $j(Z) = \frac{\sin(t)}{t}$ les deux côtés de (B.0.11), et nous en déduisons :

$$\frac{1}{j(Z)} \int_{O_{\lambda+\rho}} e^{2\pi i F(Z)} d\beta(F) = \frac{1}{\frac{\sin(t)}{t}} \cdot \frac{\sin rt}{t} = \frac{\sin rt}{\sin t}.$$

Ainsi, lorsque $r = n + 1$, le côté droit nous donne le caractère de la représentation du $\text{SU}(2)$ correspond au poids n . Nous voyons ici que $\rho \cong 1$. Cela nous dit que nous pouvons associer la représentation irréductible π_n à l'orbite $\Omega_{(n+1)}$.

ANNEXE C

Structure de Lie-Poisson

Soient ϑ un point régulier de $\mathfrak{k}^*$ de telle sorte que son stabilisateur soit égal au tore maximal choisi T et $\mathcal{O}_\vartheta = K\vartheta \subseteq \mathfrak{k}^*$

Notons K_ϑ le stabilisateur de ϑ et $\mathfrak{k}_\vartheta$ son algèbre de Lie. Nous savons que

$$\phi_\vartheta: K \longrightarrow \mathcal{O}_\vartheta = K\vartheta \subseteq \mathfrak{k}^*, \quad y \mapsto (\text{Ad}_y^{-1})^*(\vartheta),$$

induit un difféomorphisme

$$(C.0.12) \quad \Phi_\vartheta: K/T \longrightarrow \mathcal{O}_\vartheta.$$

La dérivée de ϕ_ϑ en l'identité de K s'écrit sous la forme

$$d\phi_\vartheta: \mathfrak{k} \longrightarrow T_\vartheta \mathcal{O}_\vartheta$$

et la dérivée

$$d\Phi_\vartheta: T_T(K/T) \longrightarrow T_\vartheta \mathcal{O}_\vartheta$$

de Φ_ϑ au point $\{T\}$ de K/T s'identifie à un automorphisme linéaire de $\mathfrak{q} = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$. Le noyau de $d\phi_\vartheta$ coïncide avec l'annulateur de la 2-forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{k}$

$$B_\vartheta: \mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$B_\vartheta(X, Y) = \vartheta([X, Y]).$$

LEMME C.0.13. *L'annulateur de B_ϑ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_\vartheta$ du stabilisateur K_ϑ de ϑ .*

PREUVE.

$$\begin{aligned} \text{Ann}(B_\vartheta) &= \{X \in \mathfrak{k} \mid B_\vartheta(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{k}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{k} \mid \vartheta([X, Y]) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{k}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{k} \mid \vartheta(\text{ad}_X Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{k}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{k} \mid \text{ad}_X^* \vartheta(Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{k}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{k} \mid \text{ad}_X^* \vartheta = 0\} = \mathfrak{k}_\vartheta \end{aligned}$$

comme cherché. □

LEMME C.0.14. *La forme B_ϑ est invariante par K_ϑ .*

PREUVE.

$$\begin{aligned}\vartheta([\mathrm{Ad}_y X, \mathrm{Ad}_y Y]) &= \vartheta(\mathrm{Ad}_y[X, Y]) \\ &= \mathrm{Ad}_y^* \vartheta([X, Y]) = \vartheta([X, Y])\end{aligned}$$

pour tout $y \in K_\vartheta$. □

PROPOSITION C.0.15. *Le point ϑ de $\mathfrak{k}^*$ ayant été fixé, la 2-forme B_ϑ sur $\mathfrak{k}$ induit une 2-forme alternée et non dégénérée ω_ϑ sur $T_\vartheta \mathcal{O}_\vartheta$ telle que*

$$(C.0.16) \quad \omega_\vartheta \circ (d\phi_\vartheta \times d\phi_\vartheta) = B_\vartheta,$$

c.a.d. telle que B_ϑ coïncide avec le composé

$$\mathfrak{k} \times \mathfrak{k} \xrightarrow{d\phi_\vartheta \times d\phi_\vartheta} T_\vartheta \mathcal{O}_\vartheta \times T_\vartheta \mathcal{O}_\vartheta \xrightarrow{\omega_\vartheta} \mathbb{R}.$$

PREUVE. Le premier cas est une conséquence immédiate du lemme (C.0.13). Soient ϑ un point de $\mathcal{O}_\vartheta$ et $x \in K$. Notons $\beta = \mathrm{Ad}_x^* \vartheta$. Définissons la 2-forme ω'_β sur $T_\beta \mathcal{O}_\vartheta$ par

$$\omega'_\beta = (x^{-1})^* \omega_\vartheta,$$

c'est-à-dire, pour $U, V \in T_\beta \mathcal{O}_\vartheta$, nous avons

$$\omega'_\beta(U, V) = \omega_\vartheta(x_*^{-1}U, x_*^{-1}V).$$

Étant donnés $X, Y \in \mathfrak{k}$ tels que $d\phi_\beta(X) = U$ et $d\phi_\beta(Y) = V$,

$$\begin{aligned}\omega_\beta(U, V) &= B_\beta(X, Y) = \beta([X, Y]) \\ &= \mathrm{Ad}_x^* \vartheta([X, Y]) = \vartheta([\mathrm{Ad}_x^{-1}(X), \mathrm{Ad}_x^{-1}(Y)]) \\ &= \omega_\vartheta(x_*^{-1}U, x_*^{-1}V) = \omega'_\beta(U, V).\end{aligned}$$

En conséquence $\omega'_\beta = \omega_\beta$.

Montrons que la 2-forme ω_ϑ sur une orbite coadjointe $\mathcal{O}_\vartheta$ est fermée. C'est une conséquence d'un cas plus général : Le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ sur $\mathfrak{k}$ donne un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ sur l'algèbre $C^\infty(\mathfrak{k}^*)$ de fonctions lisses sur $\mathfrak{k}^*$, développé par Sophus Lie. Cette théorie est développée et utilisée également par Kirillov, Arnold, Kostant et Souriau dans le milieu des années 60. Nous pouvons expliquer cette théorie de la manière suivante. Écrivons d'abord que, lorsque f est une fonction lisse sur $\mathfrak{k}^*$, sa différentielle df , évaluée en un point ϑ de $\mathfrak{k}^*$, est une application linéaire $df_\vartheta: \mathfrak{k}^* \rightarrow \mathfrak{k}^{**}$; comme $\mathfrak{k}$ est de dimension finie, l'application canonique de $\mathfrak{k}$ vers $\mathfrak{k}^{**}$ est un isomorphisme, et nous voyons la différentielle au ϑ comme une application linéaire

$$df_\vartheta: \mathfrak{k}^* \rightarrow \mathfrak{k}.$$

De cette façon, le crochet de Poisson $\{f, h\}$ de deux fonctions f et h dans $C^\infty(\mathfrak{k}^*)$ est donné par l'expression

$$(C.0.17) \quad \{f, h\}(\vartheta) = \vartheta([df_\vartheta, dh_\vartheta]), \quad \vartheta \in \mathfrak{k}^*.$$

Étant donné que le crochet de Lie satisfait à l'identité de Jacobi, ce crochet de Poisson y satisfait également.

Soit $\vartheta: \mathfrak{k} \rightarrow \mathbb{R}$ un point de $\mathfrak{k}^*$ et soient $X, Y \in \mathfrak{k}$, considérées comme étant des fonctions linéaires sur $\mathfrak{k}^*$. La formule

$$(C.0.18) \quad \{X, Y\}(\vartheta) = \vartheta([X, Y])$$

caractérise la structure de Lie-Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ de $\mathfrak{k}^*$ et, sur l'orbite $\mathcal{O}_\vartheta = K\vartheta$, cette structure de Poisson est symplectique et définit ainsi une structure symplectique ω_ϑ sur $\mathcal{O}_\vartheta$ qui se nomme forme de Kirillov-Kostant-Souriau.

Pour une orbite coadjointe $\mathcal{O}_\vartheta$, le crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ sur $C^\infty(\mathfrak{k}^*)$ se restreint à un crochet de Poisson sur $C^\infty(\mathcal{O}_\vartheta)$; ce crochet de Poisson est symplectique dont la 2-forme symplectique correspondante est donnée par ω_ϑ . En particulier, la 2-forme ω_ϑ sur $\mathcal{O}_\vartheta$ est fermée.

LEMME C.0.19. *Pour $\vartheta \in \mathcal{O}_\vartheta$, en utilisant la forme symplectique ω_ϑ sur l'orbite, nous avons*

$$X_{f|_{\mathcal{O}_\vartheta}}(\vartheta) = \text{ad}_{df_\vartheta}^*(\vartheta) = d\phi_\vartheta(df_\vartheta).$$

PREUVE. Soit $\xi, \eta \in \mathfrak{k}$. La définition (C.0.16) de ω_ϑ nous donne

$$\begin{aligned} \omega_\vartheta(d\phi_\vartheta(\xi), d\phi_\vartheta(\eta)) &= \vartheta([\xi, \eta]) \\ &= \vartheta(-\text{ad}_\eta \xi) = \text{ad}_\eta^* \vartheta(\xi). \end{aligned}$$

En posant $\xi = df_\vartheta$ et η arbitraire, nous avons

$$\omega_\vartheta(d\phi_\vartheta(df_\vartheta), d\phi_\vartheta(\eta)) = \text{ad}_\eta^* \vartheta(df_\vartheta) = \mathbf{d}f(\vartheta) \cdot \text{ad}_\eta^* \vartheta.$$

Ainsi, en utilisant la définition suivante d'un champ de vecteur hamiltonien

$$\omega_\vartheta(X_H(\vartheta), v) = \mathbf{d}H(\vartheta) \cdot v,$$

nous en tirons que $X_{f|_{\mathcal{O}_\vartheta}}(\vartheta) = \text{ad}_{df_\vartheta}^* \vartheta = d\phi_\vartheta(df_\vartheta)$ q.e.d. $\square$

THÉORÈME C.0.20 (COMPATIBILITÉ DE LA STRUCTURE DE LIE-POISSON ET L'ORBITE COADJOINTE). *Le crochet de Lie-Poisson et la structure symplectique d'orbite coadjointe sont compatibles de la façon suivante : Pour $f, h: \mathfrak{k}^* \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{O}_\vartheta$ une orbite coadjointe dans $\mathfrak{k}^*$,*

$$(C.0.21) \quad \{f, h\}|_{\mathcal{O}_\vartheta} = \{f|_{\mathcal{O}_\vartheta}, h|_{\mathcal{O}_\vartheta}\}$$

où le crochet $\{f, h\}$ est le crochet de Lie-Poisson alors que le côté droit de (C.0.21) est le crochet de Poisson définie par la structure symplectique coadjointe sur $\mathcal{O}_\vartheta$. cf. [MR99] (Théorème 14.4.1 p.475)

PREUVE. Soit $\vartheta \in \mathcal{O}_\vartheta$. Par définition,

$$\{f, h\}(\vartheta) = \vartheta([df_\vartheta, dh_\vartheta]).$$

De l'autre côté,

$$(C.0.22) \quad \{f|_{\mathcal{O}_\vartheta}, h|_{\mathcal{O}_\vartheta}\}(\vartheta) = \omega_\vartheta(X_{f|_{\mathcal{O}_\vartheta}}, X_{h|_{\mathcal{O}_\vartheta}})(\vartheta)$$

où $X_{f|_{\mathcal{O}_\vartheta}}$ resp. $X_{h|_{\mathcal{O}_\vartheta}}$ sont des champs de vecteurs hamiltoniens sur $\mathcal{O}_\vartheta$ engendrés par $f|_{\mathcal{O}_\vartheta}$ resp. $h|_{\mathcal{O}_\vartheta}$, et ω_ϑ est la forme symplectique sur l'orbite coadjointe.

Rappelons qu'un champ de vecteur hamiltonien X_f sur $\mathfrak{k}^*$ est donné par

$$X_f(\vartheta) = \text{ad}_\xi^*(\vartheta) = d\phi_\vartheta(\xi)$$

où $\xi = df_\vartheta \in \mathfrak{k}$.

Pour finir la démonstration du théorème, écrivons l'égalité (C.0.22) et appliquons le lemme (C.0.19). Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} \{f|_{\mathcal{O}_\vartheta}, h|_{\mathcal{O}_\vartheta}\}(\vartheta) &= \omega_\vartheta(X_{f|_{\mathcal{O}_\vartheta}}(\vartheta), X_{h|_{\mathcal{O}_\vartheta}}(\vartheta)) \\ &= \omega_\vartheta(d\phi_\vartheta(df_\vartheta), d\phi_\vartheta(dh_\vartheta)) \\ &= \vartheta([df_\vartheta, dh_\vartheta]) = \{f, h\}(\vartheta) \end{aligned}$$

ce qui nous donne l'énoncé du théorème. □

D'où, nous avons la proposition C.0.15. □

PROPOSITION C.0.23. *Soit $\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{k}^*$ une K -orbite. Lorsque ϑ varie sur $\mathcal{O}$, l'identité (C.0.16) définit une structure symplectique K -invariante $\omega_{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}$ telle que*

$$(\omega_{\mathcal{O}})_\vartheta = \omega_\vartheta, \quad \vartheta \in \mathcal{O}.$$

Pour une orbite coadjointe $\mathcal{O}$ quelconque, la 2-forme $\omega_{\mathcal{O}}$ se nomme *forme de Kirillov-Kostant-Souriau* de $\mathcal{O}$.

Bibliographie

- [Bak99] John A. Baker. Integration of radial functions. *Math. Mag.*, 72(5) :392–395, 1999.
- [Bry95] Robert L. Bryant. An introduction to Lie groups and symplectic geometry. In *Geometry and quantum field theory (Park City, UT, 1991)*, volume 1 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 5–181. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [BtD95] Theodor Bröcker and Tammo tom Dieck. *Representations of compact Lie groups*, volume 98 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. Translated from the German manuscript, Corrected reprint of the 1985 translation.
- [Car55a] P Cartier. Théorie des caractères : I. définition des caractères. *Séminaire Sophus Lie, 1ère année (1954/1955) Théorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie*, 1 :1–8, 1954-1955.
- [Car55b] P Cartier. Théorie des caractères : III. caractères des groupes compacts. *Séminaire Sophus Lie, 1ère année (1954/1955) Théorie des algèbres de Lie. Topologie des groupes de Lie*, 1 :1–9, 1954-1955.
- [Che55] Claude Chevalley. Invariants of finite groups generated by reflections. *Amer. J. Math.*, 77 :778–782, 1955.
- [Far03] Jacques Faraut. Espaces hilbertiens invariants de fonctions holomorphes. In *Analyse sur les groupes de Lie et théorie des représentations (Kénitra, 1999)*, volume 7 of *Sémin. Congr.*, pages 101–167. Soc. Math. France, Paris, 2003.
- [GH78] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [Got86] Mark J. Gotay. Constraints, reduction, and quantization. *J. Math. Phys.*, 27(8) :2051–2066, 1986.
- [Gra58] Hans Grauert. On Levi’s problem and the imbedding of real-analytic manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 68 :460–472, 1958.
- [GS77] Victor Guillemin and Shlomo Sternberg. *Geometric asymptotics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977. Mathematical Surveys, No. 14.
- [Hal94] Brian C. Hall. The Segal-Bargmann “coherent state” transform for compact Lie groups. *J. Funct. Anal.*, 122(1) :103–151, 1994.
- [Hal97] Brian C. Hall. Phase space bounds for quantum mechanics on a compact Lie group. *Comm. Math. Phys.*, 184(1) :233–250, 1997.
- [Hal02] Brian C. Hall. Geometric quantization and the generalized Segal-Bargmann transform for Lie groups of compact type. *Comm. Math. Phys.*, 226(2) :233–268, 2002.
- [Har71] G. Harder. A Gauss-Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 4 :409–455, 1971.
- [HC57] Harish-Chandra. Differential operators on a semisimple Lie algebra. *Amer. J. Math.*, 79 :87–120, 1957.
- [Hel84] Sigurdur Helgason. *Groups and geometric analysis*, volume 113 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions.

- [Hel94] Sigurdur Helgason. *Geometric analysis on symmetric spaces*, volume 39 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [Hel01] Sigurdur Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 34 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Corrected reprint of the 1978 original.
- [HM05] Brian C. Hall and Jeffrey J. Mitchell. The Segal-Bargmann transform for noncompact symmetric spaces of the complex type. *J. Funct. Anal.*, 227(2) :338–371, 2005.
- [Hue08] Johannes Huebschmann. Kirillov’s character formula, the holomorphic Peter-Weyl theorem, and the Blattner-Kostant-Sternberg pairing. *J. Geom. Phys.*, 58(7) :833–848, 2008.
- [HZ09] Joachim Hilgert and Genkai Zhang. Segal-Bargmann and Weyl transforms on compact Lie groups. *Monatsh. Math.*, 158(3) :285–305, 2009.
- [JL01] Jay Jorgenson and Serge Lang. *Spherical inversion on $SL_n(\mathbf{R})$* . Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Kir68] A. A. Kirillov. Characters of unitary representations of Lie groups. *Funkcional. Anal. i Priložen*, 2(2) :40–55, 1968.
- [Kir99] A. A. Kirillov. Merits and demerits of the orbit method. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 36(4) :433–488, 1999.
- [Las78] Michel Lassalle. Séries de Laurent des fonctions holomorphes dans la complexification d’un espace symétrique compact. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 11(2) :167–210, 1978.
- [Loe75] Jean Jacques Loeb. Formule de Kirillov pour les groupes de Lie semi-simples compacts. In *Analyse harmonique sur les groupes de Lie (Sém., Nancy-Strasbourg, 1973–75)*, pages 230–256. Lecture Notes in Math., Vol. 497. Springer, Berlin, 1975.
- [Mac79] I.G. Macdonald. Algebraic structure of lie groups. In G. L. Luke, editor, *Proceedings of the SRC/LMS Research Symposium held in Oxford, June 28–July 15, 1977*, volume 34 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 91–150. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1979.
- [MR99] Jerrold E. Marsden and Tudor S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry*, volume 17 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1999. A basic exposition of classical mechanical systems.
- [Nom54] Katsumi Nomizu. Invariant affine connections on homogeneous spaces. *Amer. J. Math.*, 76 :33–65, 1954.
- [Puk67] L. Pukánszky. On the characters and the Plancherel formula of nilpotent groups. *J. Functional Analysis*, 1 :255–280, 1967.
- [Raw78] J. H. Rawnsley. On the pairing of polarizations. *Comm. Math. Phys.*, 58(1) :1–8, 1978.
- [Shu58] H. B. Shurtrick. Complex extensions. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 9 :189–201, 1958.
- [Śni83] Jędrzej Śniatycki. Constraints and quantization. In *Nonlinear partial differential operators and quantization procedures (Clausthal, 1981)*, volume 1037 of *Lecture Notes in Math.*, pages 301–334. Springer, Berlin, 1983.
- [Ste90] Matthew B. Stenzel. *Kähler structures on cotangent bundles of real analytic Riemannian manifolds*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1990. Thesis (Ph.D.)—Massachusetts Institute of Technology.
- [Ste99] Matthew B. Stenzel. The Segal-Bargmann transform on a symmetric space of compact type. *J. Funct. Anal.*, 165(1) :44–58, 1999.
- [Str81] Karl R. Stromberg. *Introduction to classical real analysis*. Wadsworth International, Belmont, Calif., 1981. Wadsworth International Mathematics Series.
- [Tak63] Reiji Takahashi. Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés. *Bull. Soc. Math. France*, 91 :289–433, 1963.

- [Tak94] Masaru Takeuchi. *Modern spherical functions*, volume 135 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. Translated from the 1975 Japanese original by Toshinobu Nagura.
- [WB59] H. Whitney and F. Bruhat. Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels. *Comment. Math. Helv.*, 33 :132–160, 1959.
- [Wol11] Joseph A. Wolf. *Spaces of constant curvature*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, sixth edition, 2011.
- [Woo91] N. M. J. Woodhouse. *Geometric quantization*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1991. Oxford Science Publications.

