

**T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KUADRATİK GENELÇEKİM KURAMINDA KARADELİK
ÇÖZÜMLERİ VE ENTROPİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet HELVA

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

Temmuz 2015

**T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KUADRATİK GENELÇEKİM KURAMINDA KARADELİK
ÇÖZÜMLERİ VE ENTROPİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet HELVA

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

Temmuz 2015

Mehmet HELVA tarafından hazırlanan “KUADRATİK GENELÇEKİM KURAMINDA KARADELİK ÇÖZÜMLERİ VE ENTROPİ” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Fizik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

Üye : Doç. Dr. A. Savaş ARAPOĞLU

Üye : Doç. Dr. V. Nefer ŞENOĞUZ

Bu tez, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince desteğini ve yardımını eksik etmeyen, beni araştırma konusunda teşvik eden, çalışma disiplinini örnek almaya çalıştığım, değerli danışmanım Prof. Dr. Cemsinan Deliduman'a en içten duygularıyla teşekkür ediyorum.

Yüksek lisans süresince desteğini benden esirgemeyen aileme, sıkıntıya düştüğümde her zaman yanımda olan arkadaşlarıma, tez yazma konusunda beni cesaretlendiren İ.Taygun Bulmuş, Serkan Sırt ve Elvan Sayarer'e, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi'ne başlamama vesile olan Prof. Dr. S. Kayhan Ülker'e ve bu bölümün bir parçası olmamı sağlayan bütün hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Bu tez çalışması, 1001-TÜBİTAK-"Bilimsel ve teknolojik araştırma projelerini destekleme programı" dahilindeki "114F239" nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

22 Temmuz 2015

Mehmet Helva

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
TABLO LİSTESİ	iii
SEMBOL LİSTESİ	iv
ÖZET	v
SUMMARY	vi
1 GİRİŞ	1
2 HAREKET DENKLEMLERİ	6
2.1 I. Terim (R 'nin varyasyonu)	7
2.2 II. Terim (R^2 'nin varyasyonu)	10
2.3 III. Terim ($R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ 'nün varyasyonu)	12
3 BİRİNCİ YASA VE WALD FORMALİZMİ	15
3.1 Karadelik Mekaniği Yasaları	15
3.2 Wald Formalizmi	16
4 KÜRESEL SİMETRİK ÇÖZÜMLER VE ENTROPİ	25
4.1 Genel Görelilik Kuramı	25
4.2 R^2 Genelçekim Kuramı	28
4.3 Konformal Genelçekim Kuramı	34
5 SONUÇ	40
KAYNAKLAR	42
A Ricci Tensörünün Varyasyonu	48
B Tensör Eşitlikleri	50
C Formlar ve İntegrasyon	52

TABLO LİSTESİ

1.1 Karadelik yasaları ve termodinamik karşılıkları	3
---	---

SEMBOL LİSTESİ

$g_{\mu\nu}$: Metrik tensör
$g^{\mu\nu}$: Metrik tensörün tersi
g	: Metrik tensörün determinanı
$R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$: Riemann tensörü
$R_{\mu\nu}$: Ricci tensörü
R	: Eğrilik skaleri
$G_{\mu\nu}$: Einstein tensörü
$T_{\mu\nu}$: Enerji-momentum tensörü
δ	: Varyasyon
∂	: Kısmi türev
∇	: Kovaryant türev
$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$: Christoffel sembolü
\square	: d'Alambert operatörü
$C_{\mu\nu\rho\sigma}$: Weyl tensörü
κ	: Yüzey gravite terimi

**KUADRATİK GENELÇEKİM KURAMINDA KARADELİK
ÇÖZÜMLERİ VE ENTROPİ
(Yüksek Lisans Tezi)
Mehmet HELVA**

**MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2015**

Karadelikler sahip oldukları yüksek gravitasyon alandan dolayı genelçekim kuramları için büyük önem taşırlar. Karadeliklerin yarı-klasik olarak incelenmesi sonucunda karadelik mekaniği yasalarının, termodinamik yasalarıyla olan benzerliği keşfedilmiştir. Bu benzerlik enerjiyi kütleyle, sıcaklığı yüzey gravite terimiyle, entropiyi karadelğin yüzey alanıyla ilişkilendirir.

Bu tez çalışmasında, 4-boyuttaki kuadratik genelçekim kuramı için hareket denklemleri elde edilmiş, bu denklemlerin boşluk durumundaki karadelik çözümleri ve karadelik termodinamiğinin birinci yasası üzerinden entropi hesabı çalışılmıştır. İnceleme statik karadelikler üzerinden yapılmıştır. Entropi hesabında R. Wald'un geliştirdiği formalizm kullanılmıştır. Bu formalizmde entropi, Killing ufku üzerinde hesaplanan Noether yüküyle orantılıdır.

Anahtar Kelimeler: Karadelik, entropi.

Sayfa Adedi: 53 Sayfa.

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

BLACK HOLE SOLUTIONS AND ENTROPY IN QUADRATIC GRAVITATION THEORY

(M.Sc. Thesis)

Mehmet HELVA

**MIMAR SINAN FINE ARTS UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

Temmuz 2015

SUMMARY

Owing to their strong gravitation field, black holes are of great importance to theories of gravitation. The semi-classical study of black holes has led to the discovery of the analogy between the laws pertaining to thermodynamics and to black holes mechanics. This analogy associates energy with mass, temperature with surface gravity and entropy with the black hole's surface area.

In this thesis, the field equations of a four dimensional quadratic theory of gravitation is obtained. Black hole solutions to these equations in vacuum and the first law of black hole thermodynamics is used together to study entropy of black holes. In this thesis entropy of static black holes are examined, using the formalism developed by R. Wald. In this formalism, entropy is proportional to Noether charge calculated on the Killing horizon.

Key Words: Black hole, entropy.

Page Number: 53 Pages.

Supervisor: Prof. Cemsinan DELİDUMAN

1 GİRİŞ

“Ubi materia, ibi geometria”

— Johannes Kepler

Nerede madde varsa orada geometri vardır. Genel görelilik kuramı genelçekimi geometri üzerinden açıklar. Hareketin nedeni kütlelerin birbirini çekmesi değil, kütle dağılımının oluşturduğu uzay-zaman geometrisidir. Einstein’ın bu fikri evreni anlamamız konusunda büyük bir devrim yaratmıştır. Einstein alan denklemlerinin,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

ilk tam çözümü 1916 yılında Schwarzschild tarafından yapılmıştır [1]. Kendi üstüne çöken bir yıldızın dış çözümünü ($T_{\mu\nu} = 0$) tarif eden bu ifade, çökme sonunda yıldızın etrafındaki uzay-zamanı çok fazla bükeceğini ve ışığın dahi ondan kaçamayacağı bir bölge oluşturacağını söylemektedir (doğal birimlerde $\hbar = 1, G = 1, c = 1$):

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (1.2)$$

Bugün adına karadelik dediğimiz bu bölgeler kuramsal fizik açısından büyük önem taşımaktadır. $r = 2M$ metriğin tekil noktalarından birisidir ve bu bölge karadelğin olay ufku olarak adlandırılır. Bu bölgenin arkasından gelen hiçbir sinyal karadelik dışındaki bir gözlemci tarafından gözlemlenemez. Schwarzschild çözümünden sonra farklı durumlar için de karadelik çözümleri bulunmuştur. Reisner-Nordström, Einstein-Maxwell alan denklemleri için yüklü karadelik çözümünü bulmuştur (1918) [2]. Kerr dönen bir yıldız için (1963) [3], Newman ise hem dönen hem de yükü olan bir yıldız için karadelik çözümü elde etmiştir. [4]. Bulunan bu çözümlerden sonra tüm karadelik çözümlerinin klasik olarak sadece üç parametreyle (kütle, açısal momentum ve yük) tarif edilebileceği öne sürülmüştür [5].

Karadeliklerin en önemli özelliklerinden birisi, karadelik mekaniği yasalarıyla termodinamik yasaları arasındaki matematiksel benzerliktir. Bu benzerlik Kerr çözümü üzerinden Penrose metodu kullanılarak kurulabilir. Penrose metodu, R. Penrose tarafından

1971 yılında bulunan, dönen bir karadelikten enerji çıkarma işlemidir [6]. Bu metodun dayandığı prensip Killing vektörlerinin olay ufkundan geçerken karakter değiştirmesidir. Killing vektörleri karadelikleri incelemek için kullanılan kavramlardan birisidir. Bu vektörler normu olay ufku üzerinde sıfır olan ve bulunduğu doğrultu üzerinde korunmuş büyüklükleri hesaplamamıza yarayan niceliklerdir. Dönen bir karadeliğin için t zaman yönündeki, φ dönme eksenini yönündeki Killing vektörü olmak üzere enerji ve açısal momentum korunumu,

$$E = -t \cdot p \quad , \quad L = \varphi \cdot p \quad (1.3)$$

olarak yazılabilir. Kerr çözümünde zaman yönündeki Killing vektörü olay ufkundan önce karakter değiştirir. Bu bölgeye ergoküre adı verilir. Karadeliğin dışında zamansal (timelike) olan Killing vektörü ergoküre içinde uzaysal (spacelike) karaktere sahip olur. Bu özellik kullanılarak enerji ifadesi hesaplanırsa ergoküre içine giren bir parçacığın enerjisinin negatif olduğu görülür. Parçacığın enerjisi negatif olamayacağından, parçacık ya olay ufkunu geçip pozitif enerjili hale gelmeli ya da ergoküre içinde karadeliğin dönme enerjisini kullanarak pozitif enerjili hale gelip bu bölgeden ayrılmalıdır.

Bir uzay gemisinin içinde karadeliğe doğru düştüğümüzü düşünelim. Ergoküre içine girdikten sonra uzay gemisi içindeki robotumuzu bir şekilde fırlatıp ergoküre dışına çıkmasını sağlayalım. Bu durum için enerji-açısal momentum korunumu yazılırsa robotun enerjisinin karadeliğe düşen uzay gemisinin enerjisinden yüksek olduğu görülür. Karadeliğin içine düşen uzay gemisi karadeliğin kütleliğini ve açısal momentumunu değiştireceğinden bu değişim ifadesi,

$$\delta J < \frac{\delta M}{\Omega_H} \quad (1.4)$$

olarak hesaplanır. Ω_H olay ufkunun açısal hızıdır. Kerr karadeliğinin yüzey alanı $A = 8\pi(M^2 + M\sqrt{M^2 - a^2})$ şeklindedir. Buradan alanın değişimini $\delta A = \frac{8\pi}{\kappa}(\delta M - \Omega_H \delta J)$ olarak hesaplayabiliriz. κ yüzey gravite terimidir. Bu ifadeyi biraz düzenlersek karadeliğin kütleleriyle açısal momentumu ve alanı arasındaki ilişkiyi,

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_H \delta J \quad (1.5)$$

olarak bulabiliriz [7]. Bu ifadenin termodinamiğin birinci yasasıyla olan benzerliği aşikardır:

$$dE = TdS + PdV. \quad (1.6)$$

Bu benzerlik sayesinde enerjiyi kütleyle, entropi ve sıcaklığı, karadelinin alanı ve yüzey gravite terimiyle ilişkilendirebiliriz. Başlarda benzerlik olarak görülen bu ilişki Hawking'in karadeliklerin termal olarak ışınım yapması ($T = \frac{\kappa}{2\pi}$) gerektiğini bulmasından sonra benzerlik olmaktan çıkmıştır [8]. Bu durumda karadelik entropisi,

$$S = \frac{A}{4} \quad (1.7)$$

olarak hesaplanabilir. Karadelik mekaniğinde alan ve yüzey gravite terimi birer termodinamik fonksiyon olarak davranırlar. Karadelinin entropisi tamamiyle geometrik bir ifadedir. Bu ilişkinin keşfinden sonra diğer termodinamik yasalarının, karadelik mekaniğindeki karşılıkları yazılmıştır [9]. Bu ilişkiler tablo (1.1)'de gösterilmiştir.

Termodinamik yasaları	Karadelik mekaniği yasaları
Denge durumundaki bir cismin sıcaklığı sabittir. $T = \text{sabit.}$	Olay ufku üzerinde yüzey gravite terimi sabittir. $\kappa = \text{sabit.}$
Enerji korunumludur. $dE = TdS + \mu dQ + \Omega dJ.$	Enerji korunumludur. $dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \mu dQ + \Omega dJ.$
Entropi asla azalmaz. $\Delta S \geq 0.$	Alan asla azalmaz. $\Delta A \geq 0.$

Tablo 1.1: Karadelik yasaları ve termodinamik karşılıkları [9]

Yukarıdaki ifadelerin elde edilmesi Einstein denklemlerinin kullanılmasını gerektirir. Bu yüzden daha genel bir formalizm üzerinden hesaplama yapmak mümkün olmalıdır. R. Wald karadelik entropisi için Noether yükü üzerinden bir formalizm geliştirmiştir [10, 11]. Bu yaklaşımda karadelik mekaniğinin birinci yasası,

$$\delta \int_H \mathbf{Q} = \delta \mathcal{E} - \Omega_H \delta \mathcal{J} \quad (1.8)$$

olarak ifade edilir. Bu eşitlikte \mathbf{Q} olay ufku üzerinde hesaplanan Noether yüküdür. \mathcal{E} ve \mathcal{J} ise, asimptotik olarak sonsuzda hesaplanan enerji ve açısal momentum ifadedir [12]. Wald bu eşitlik sayesinde enerji ve açısal momentumu, olay ufku üzerinde hesaplanan Noether yüküyle ilişkilendirmiştir. (1.8) ifadesini (1.5) ile karşılaştırsak entropinin,

$$S = \frac{2\pi}{\kappa} \int_H \mathbf{Q} \quad (1.9)$$

şeklinde hesaplanabileceğini görebiliriz. Burada integral Killing ufku (olay ufku) üzerinden alınmıştır.

Daha sonra Jacobson, Kong ve Myers [13], [14] entropinin,

$$S = -2\pi \int_H \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R_{\mu\nu\alpha\beta}} \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta} dA \quad (1.10)$$

olarak hesaplanabileceğini göstermişlerdir. Bu integral ifadesinde $\epsilon_{\mu\nu}$ yüzeyin binormal tensörünü ifade eder. Bu ifadenin faydalarından birisi verilen genel bir Lagrangian için entropi ifadesine gelecek katkı veya düzeltmeleri göstermesidir.

Einstein'in genelçekim kuramı güneş sistemimiz içinde çok iyi şekilde çalışmaktadır ancak mevcut gözlemleri açıklamak konusunda yetersizdir. Gözlemlerden biliyoruz ki evren hızlanarak genişlemektedir ve Einstein denklemleri baryonik madde dağılımı için bu sonucu vermemektedir. Bilinen verilerin açıklanması için kuramın modifiye edilmesi gerekmektedir. Bunun için değişik yöntemler mevcuttur:

- Kurama farklı durum denklemlerine sahip madde dağılımları (karanlık madde, karanlık enerji) eklenebilir.
- Kurama yüksek mertebeden eğrilik terimleri ($R^2, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$) eklenebilir.
- Veya yüksek mertebeden eğrilik terimleriyle farklı madde dağılımları birlikte kullanılarak kuram modifiye edilebilir.

Ayrıca kuramın renormalize edilememesi, kuramın genişletilmesi konusunda önemli motivasyonlardan biridir [15]. Bu çalışmada genelçekim kuramı eyleme yüksek mertebeden eğrilik terimleri eklenerek modifiye edilmiştir:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}). \quad (1.11)$$

Burada α, β uzunluk kare boyutuna sahip büyüklüklerdir $[\alpha] = [\beta] = L^2$. İlk terim Einstein-Hilbert terimidir. Kuramı modifiye ederken Einstein terimini kuramda tutulmaktadır çünkü bu ifade düşük ölçekte çok iyi çalışmaktadır. Eklenen ekstra terimlerin yüksek enerjilerde kurama düzeltmeler getirmesi beklenmektedir. Ayrıca (1.11) eylemi $3\alpha + \beta = 0$ olduğunda ve Einstein-Hilbert terimi ihmal edildiğinde konformal dönüşümler altında değişmezdir. Bu durum için elimizde konformal genelçekim kuramı

vardır [16, 17]. Einstein-Hilbert teriminin kuramda olmasının bir diğeri nedeni konformal genelçekim kuramının zayıf alan limitinin doğru olmamasıdır. Konformal kuramın zayıf alan limiti Yukawa potansiyeli şeklindedir [18]. Kuramda Einstein-Hilbert terimini tutmak konformal simetriyi bozar ancak doğru zayıf alan limiti için gereklidir.

Einstein kuramının bu şekilde modifiye edilmesinin nedenlerinden bir diğeri kuadratik genelçekim kuramının renormalize edilebilir olmasıdır. Bu kuramın parçacık spektrumunda, genel görelilik kuramından gelen kütesiz spini iki olan graviton dışında, kütleli spini sıfır olan bir parçacık ve spini iki olan negatif kinetik enerjili hayalet parçacık bulunmaktadır [19]. Yukarıdaki nedenlerden dolayı kuadratik terimler içeren genelçekim kuramlarının çalışılmasının önemi artmıştır [20].

Karadelikler genel göreliliğin ilk çözümünde ortaya çıkan ve bir çok farklı durum için çözümleri olan nesnel olduklarından alternatif kuramların incelemesi açısından önemlidirler. Schwarzschild çözümü genel görelilik kuramının çözümü olduğu gibi kuadratik genelçekim kuramının da bir çözümüdür. Cevap aradığımız soru ise Schwarzschild çözümü dışında kuramın bize hangi tip karadelik çözümleri vereceğidir [21]. Karadelikler gerçek anlamda entropiye sahiptir. Genel görelilik kuramındaki karadelik çözümleri için bulunan entropi değeri daima yüzey alanın dörtte biri olarak bulunmuştur. Dolayısıyla kuadratik genelçekim kuramı için karadelik entropisinin hesaplanması, genel görelilik ile bu kuram arasında ne gibi farklar olduğunu anlamak açısından önemlidir.

Bu tez boyunca konular şu sırayla ele alınmıştır. İkinci bölümde kuadratik genelçekim kuramı için hareket denklemlerinin nasıl elde edileceği anlatılacaktır. Üçüncü bölümde karadelik mekaniği yasaları hakkında temel bilgiler verilir, R. Wald'un birinci yasanın elde edilmesi için geliştirdiği formalizm hakkında bilgi verilecek ve Einstein-Hilbert eylemi için Wald formalizmi kullanılarak entropi ifadesinin nasıl hesaplanacağı gösterilecektir. Dördüncü bölümde kuadratik eylemin bazı limit durumları için boşluk durumundaki karadelik çözümleri elde edilmeye çalışılacak ve bu çözümler için entropi ifadesinin nasıl olduğu hesaplanacaktır. Son bölümde elde edilen bulgular tartışılacaktır.

2 HAREKET DENKLEMLERİ

Bu bölümde eylemin varyasyonu alınarak, en genel halde, hareket denklemlerinin nasıl elde edildiği gösterilecektir. Bu yapılırken metrik formalizmi kullanılacaktır. Metrik formalizminde metrik $g_{\mu\nu}$ ve Christoffel sembolü $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ birbiriyle ilişkili nicelikler olarak ele alınır. Hareket denklemlerinin elde edilmesinde kullanılan bir diğer yöntem ise Palatini formalizmidir. Bu formalizmde metrik ve Christoffel sembolü bağımsız alanlar olarak düşünülür [22, 23] ve [24].

Kuadratik gravitasyon kuramının eylemi,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \lambda R^2 + \gamma C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m \quad (2.1)$$

şeklindedir. R skaler eğrilik, $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ Weyl tensörü, λ ve γ uzunluğun karesi boyutuna sahip büyüklüklerdir. n boyutta Weyl tensörünün ifadesi,

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho\sigma} &= R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{(n-1)} [g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho}] \\ &+ \frac{1}{(n-1)(n-2)} [g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}] R \end{aligned} \quad (2.2)$$

olarak yazılabilir [25]. Dört boyutta Weyl tensörünün kendisiyle kontraksiyonu,

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} &= R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{2} (g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho}) \\ &+ \frac{1}{6} (g_{\mu\rho} g_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) R \\ &\times R^{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{2} (g^{\mu\sigma} R^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} R^{\nu\sigma} + g^{\nu\rho} R^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma} R^{\mu\rho}) \\ &+ \frac{1}{6} (g^{\mu\rho} g^{\sigma\nu} - g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu}) R \end{aligned} \quad (2.3)$$

şeklindedir [26]. $g^{\mu\alpha} R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\nu\rho\sigma}^{\alpha}$, $R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} = R_{\mu\nu}$ ve $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{\mu}^{\mu} = R$ eşitliklerini kullanırsak,

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 2R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{1}{3} R^2 \quad (2.4)$$

ifadesini elde ederiz.

Hareket denklemlerini bulmadan önce eylemi Gauss-Bonnet terimine göre tekrar yazabiliriz. Gauss-Bonnet terimi,

$$G = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2 \quad (2.5)$$

olarak ifade edilir. Dört boyutta bu terimden hareket denklemlerine katkı gelmez. Çünkü dört boyut için bu ifadeyi toplam türev olarak yazabiliriz [27]:

$$\sqrt{-g}G = \partial_\alpha D^\alpha \quad (2.6)$$

ve

$$D^\alpha = \sqrt{-g}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\rho\sigma}^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\rho\left(\frac{1}{2}R_{\nu\gamma\delta}^\sigma + \frac{1}{3}\Gamma_{\lambda\gamma}^\sigma\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda\right). \quad (2.7)$$

Bu durumda Weyl tensörünü Gauss-Bonnet terimi cinsinden tekrar yazarsak,

$$C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma} = G + 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{2}{3}R^2 \quad (2.8)$$

elde ederiz. Gauss-Bonnet teriminden hareket denklemlerine katkı gelmediği için kuramın eylemi ($\lambda - \frac{2}{3}\gamma = \alpha$ ve $2\gamma = \beta$ olmak üzere)

$$\mathcal{A} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g}(R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) + \int d^4x \sqrt{-g}\mathcal{L}_m \quad (2.9)$$

olarak yazılabilir. İlk terim Einstein-Hilbert terimidir. Skaler eğriliğin karesi ve Ricci tensörünün kendisiyle kontraksiyonu ise kuramı modifiye etmek için eyleme eklenen kuadratik eğrilik terimleridir. \mathcal{L}_m eylemin madde kısmını temsil eder ve bunun metriğe göre varyasyonu bize enerji-momentum tensörünü verir.

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (2.10)$$

Eylemin geometrik kısmının metriğe göre varyasyonunu üç kısma ayırabiliriz.

$$\delta\mathcal{A}_g = \frac{1}{16\pi} \int d^4x [\delta(\sqrt{-g}R) + \alpha\delta(\sqrt{-g}R^2) + \beta\delta(\sqrt{-g}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})] \quad (2.11)$$

Burada \mathcal{A}_g eylemin geometrik kısmını temsil eder. Sonraki bölümlerde varyasyon yöntemiyle hareket denklemlerinin nasıl bulunduğu gösterilecektir.

2.1 I. Terim (R'nin varyasyonu)

Bu bölümde (2.11) denklemindeki birinci terimi hesaplayacağız. Birinci terimi metriğin determinantının varyasyonu ve Ricci skalerinin varyasyonunun toplamı şeklinde yazabiliriz:

$$\delta\mathcal{A}_{g_1} = \frac{1}{16\pi} \delta \int d^4x \sqrt{g}R = \frac{1}{16\pi} \int d^4x ((\delta\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}\delta R). \quad (2.12)$$

Metriğin determinantının varyasyonu ve Ricci skalerinin varyasyonu $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$,

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

$$\delta R = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

şeklinde yazılabilir [28]. Yukarıdaki ifadeleri (2.12) denleminde yerine yazarsak,

$$\delta\mathcal{A}_{g_1} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + R_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

denklemini elde ederiz. Amacımız varyasyonunu aldığımızda terimleri $\delta g^{\mu\nu}$ parantezine almak. İlk terim halihazırda istediğimiz formda, ikinci terimi de istenilen forma getirmeliyiz. Ricci tensörünün varyasyonunu Christoffel sembolünün varyasyonunun kovaryant türevi şeklinde yazabiliriz (Ek A):

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}). \quad (2.16)$$

(2.16) denklemini (2.15) ifadesinin ikinci teriminde yerine yazarsak ve metriğin kovaryant türevinin sıfır olduğu bilgisini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\lambda(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] \end{aligned} \quad (2.17)$$

ifadesini elde ederiz. Birinci ve ikinci terimdeki serbest indisler değiştirildiğinde $\lambda \rightarrow \sigma$ ve $\nu \rightarrow \sigma$ (2.17) denklemini

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - g^{\mu\sigma} \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}] \quad (2.18)$$

şeklinde yazabiliriz. (2.18) denklemindeki parantezin içini metriğin ve varyasyonunun kovaryant türevleri cinsinden yazmak mümkündür. Bunun için Christoffel sembolünün tanımını kullanabiliriz.

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.19)$$

(2.19) denkleminin varyasyonu alınır, kısmi türevler kovaryant türevler cinsinden yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, Christoffel sembollerinin varyasyonu olan terimler metriğin varyasyonunun kovaryant türevlerini içerecek hale getirilmiş olur (Ek A):

$$\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu \delta g_{\rho\mu} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}). \quad (2.20)$$

Yukarıdaki ifadeyi metriğin tersiyle çarpıp $\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\delta g^{\mu\nu}$ eşitliğini kullanırsak, (2.18) denklemindeki parantez içindeki terimler,

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla^\sigma g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda\delta g^{\lambda\sigma}, \quad (2.21)$$

$$g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda} = -\frac{1}{2}\nabla^\sigma g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (2.22)$$

olarak hesaplanabilir. Bu ifadeleri (2.18) denkleminde yerine yazarsak,

$$\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\sigma [\nabla^\sigma g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda\delta g^{\lambda\sigma}] \quad (2.23)$$

elde edilir. (2.23) ifadesindeki integrali iki yeni tensör tanımları yaparak hesaplamaya çalışalım. $\nabla^\sigma g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = A^\sigma$ ve $\nabla_\lambda\delta g^{\lambda\sigma} = B^\sigma$. Bu durumda Ricci tensörünün varyasyonunun integralini iki kısma ayırabiliriz:

$$\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\sigma A^\sigma + \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\sigma B^\sigma. \quad (2.24)$$

İlk terimi kovaryant türevin tanımını kullanarak,

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\sigma A^\sigma = \int d^4x\sqrt{-g}(\partial_\sigma A^\sigma + \Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu}A^\mu) \quad (2.25)$$

şeklinde yazabiliriz. Birinci integrale kısmi integrasyon uygularsak

$$\int d^4x\sqrt{-g}\partial_\sigma A^\sigma = \int d^4x\partial_\sigma(\sqrt{-g}A^\sigma) - \int d^4x\partial_\sigma(\sqrt{-g})A^\sigma \quad (2.26)$$

olarak yazılabilir. (2.26) denklemindeki ilk terim, metriğin varyasyonu yüzeyde sıfır olduğu için düşer. Dolayısıyla elimizde

$$\int d^4x\sqrt{-g}\partial_\sigma A^\sigma = - \int d^4x\partial_\sigma(\sqrt{-g})A^\sigma \quad (2.27)$$

ifadesi kalır. Metriğin determinantının türevini $\partial_\sigma(\sqrt{-g}) = \sqrt{-g}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\lambda}$ şeklinde yazabiliriz. Bu durumda ilk terim sıfıra eşit olur:

$$\begin{aligned} \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\sigma A^\sigma &= \int d^4x\sqrt{-g}(\Gamma^\sigma{}_{\sigma\mu}A^\mu - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\lambda}A^\sigma) \quad (\sigma \rightarrow \lambda, \sigma \rightarrow \mu) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

(2.24) denklemindeki ikinci terim de benzer şekilde hesaplanabilir:

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\sigma B^\sigma = 0. \quad (2.29)$$

Dolayısıyla Ricci tensörünün varyasyonundan hareket denklemlerine herhangi bir katkı gelmez:

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.30)$$

Eylemin varyasyonunun ilk kısmı

$$\delta \mathcal{A}_{g_1} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (2.31)$$

bize beklediğimiz gibi Einstein alan denklemini verir:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (2.32)$$

2.2 II. Terim (R^2 'nin varyasyonu)

Bu bölümde (2.11) denklemindeki ikinci terimin nasıl hesaplanacağı gösterilecektir.

$$\delta \mathcal{A}_{g_2} = \frac{1}{16\pi} \delta \int d^4x \sqrt{-g} R^2 = \frac{1}{16\pi} \int d^4x [(\delta \sqrt{-g}) R^2 + \sqrt{-g} 2R \delta R] \quad (2.33)$$

2.1'de hesaplanan (2.13) ve (2.14) terimlerini (2.33) denkleminde yerine yazarsak,

$$\delta \mathcal{A}_{g_2} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left[\left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}\right) R^2 + \sqrt{-g} 2R \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} 2R g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right] \quad (2.34)$$

elde edilir. Daha önceden elde ettiğimiz $\delta R_{\mu\nu}$ ifadesini denkleminde yerine yazıp düzenlersek R^2 teriminin varyasyonu,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_{g_2} &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (2R R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2) \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda (\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] \end{aligned} \quad (2.35)$$

şeklini alır. İlk terim istediğimiz formda, ikinci terimi önceki bölümde yaptığımızla benzer bir şekilde hesaplayabiliriz.

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} R g^{\mu\nu} [\nabla_\lambda (\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu (\delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] \quad (2.36)$$

(2.36) denklemini Christoffel sembolleri için bulduğumuz ifadeleri kullanarak,

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} R \nabla_\sigma [\nabla^\sigma g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \delta g^{\lambda\sigma}] \quad (2.37)$$

şeklinde yazabiliriz. İntegralin içini toplam türev şeklinde yazarsak,

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [R (\nabla^\sigma g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \delta g^{\lambda\sigma})] \quad (2.38)$$

$$- \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\sigma R) (\nabla^\sigma g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \delta g^{\lambda\sigma}), \quad (2.39)$$

denklemini elde ederiz. $R(\nabla^\sigma g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \delta g^{\lambda\sigma}) = C^\sigma$ şeklinde bir tanım yaparsak bu durumda (2.38) ifadesini şu şekilde yazabiliriz:

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma C^\sigma. \quad (2.40)$$

(2.40)'deki integrali $\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^\mu)$ [29] özdeşliğini (Ek B) ve Stokes teoremini kullanarak bu terimi,

$$\int d^4x \partial_\sigma (\sqrt{-g} C^\sigma) = \int ds_\sigma \sqrt{-g_3} C^\sigma \quad (2.41)$$

olarak yazabiliriz. Metriğin varyasyonun ve türevlerinin yüzeyde sıfır olmasını istediğimiz için (2.38) ifadesinden katkı gelmez. İkinci terim (2.39),

$$\begin{aligned} & - \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\sigma R) (\nabla^\sigma g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \delta g^{\lambda\sigma}) \\ & = - \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\sigma R g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\sigma R \nabla_\lambda \delta g^{\lambda\sigma}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

şeklinde yazılabilir. İntegral içindeki türevleri toplam türev olarak yazıp ilk terimi hesaplarken yaptığımızı benzer işlemler yaparsak $\nabla^\sigma (\nabla_\sigma R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})$ ve $\nabla_\lambda (\nabla_\sigma R \delta g^{\lambda\sigma})$ terimlerini yüzey terimleri olarak yazıp onlardan kurtulabiliriz. Bu durumda elimizde kalan ifade,

$$\int d^4x \sqrt{-g} (\nabla^\sigma \nabla_\sigma R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \nabla_\sigma R \delta g^{\lambda\sigma}) \quad (2.43)$$

olur. İkinci terimdeki serbest indisleri değiştirecek $\lambda \rightarrow \mu, \sigma \rightarrow \nu$ ve $\nabla^\sigma \nabla_\sigma = \square$ tanımını kullanırsak (2.39) denklemini

$$\int d^4x \sqrt{-g} (\square R g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu R \delta g^{\mu\nu}) = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} (\square R g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu R) \quad (2.44)$$

şeklini alır. (2.44) ve (2.35) denklemlerini birleştirip $\delta g^{\mu\nu}$ parantezinde yazarsak

$$\delta \mathcal{A}_{g_2} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[2R(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R) + 2(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu)R \right] = 0 \quad (2.45)$$

ifadesini elde ederiz. Köşeli parantezin içinin sıfır olması gerektiğinden, R^2 teriminden hareket denklemlerine gelen katkı,

$$H_{\mu\nu} = 2R(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R) + 2(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu)R = 0 \quad (2.46)$$

şeklindedir.

2.3 III. Terim ($R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ 'nün varyasyonu)

Bu bölümde (2.11) denklemindeki son terimden hareket denklemlerine gelen katkı hesaplanacaktır. Diğer iki bölümdeki hesaba benzer şekilde aşağıdaki denklemde

$$\delta\mathcal{A}_{g_3} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x (\delta\sqrt{-g}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta R^{\mu\nu}) \quad (2.47)$$

(2.13) denklemini ve $R^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\alpha\beta}$ ifadesini kullanıp (2.47) denklemini yeniden düzenlersek $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ teriminin varyasyonu,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_{g_3} &= \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{ab}R^{ab} \right) \delta g^{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\alpha\beta} \right] \\ &+ \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left[\sqrt{-g}R_{\mu\nu}g^{\mu\alpha}\delta g^{\nu\beta}R_{\alpha\beta} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta R_{\alpha\beta} \right] \end{aligned} \quad (2.48)$$

halini alır. Ricci tensörünün ve metrik tensörün simetri özelliklerini kullanırsak yukarıdaki denklemi,

$$\delta\mathcal{A}_{g_3} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (2R_{\mu\alpha}R^\alpha_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{ab}R^{ab}) \delta g^{\mu\nu} \quad (2.49)$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad (2.50)$$

şeklinde yazabiliriz. İlk terim yine istediğimiz formda, (2.50) ifadesini de bir önceki bölümde olduğu gibi hesaplayabiliriz:

$$\int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} [\nabla_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}]. \quad (2.51)$$

(2.20) ifadesini bu denklemde yerine yazar ve düzenlersek,

$$\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} [\nabla_\lambda g^{\lambda\rho} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu \delta g_{\rho\mu} - \nabla_\rho \delta g_{\mu\nu}) - \nabla_\nu (g^{\lambda\rho} \nabla_\mu \delta g_{\lambda\rho})] \quad (2.52)$$

ifadesini elde ederiz. $\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\delta g^{\mu\nu}$ ve $g_{\mu\nu}g^{\mu\lambda} = \delta_\nu^\lambda$ eşitliklerini (2.52) denkleminde yerine yazarsak denklemimiz şu hale gelir:

$$\int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla_\mu g_{\nu\alpha} \delta^\lambda_b \delta g^{ab} \quad (2.53)$$

$$- \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla_\nu g_{\mu b} \delta^\lambda_a \delta g^{ab} \quad (2.54)$$

$$+ \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda g_{\mu a} g_{\nu b} \delta g^{ab} \quad (2.55)$$

$$+ \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\mu g_{\lambda a} \delta^\lambda_b \delta g^{ab}. \quad (2.56)$$

Şimdi $R^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\alpha\beta}$ ifadesini kullanıp her bir terimi tek tek hesaplamaya çalışalım. İlk terim (2.53),

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla_\mu g_{\nu\alpha} \delta_b^\lambda \delta g^{ab} &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R_{\sigma\tau} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \nabla_\lambda \nabla_\mu g_{\nu\alpha} \delta g^{a\lambda} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R_{\sigma\tau} \nabla_\lambda \nabla_\mu g^{\mu\sigma} \delta_a^\tau \delta g^{a\lambda} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R_{\sigma\tau} \nabla_\lambda \nabla_\mu g^{\mu\sigma} \delta g^{\tau\lambda} \quad (2.57) \end{aligned}$$

olarak yazıldıktan sonra integral içindeki türevleri sırayla toplam türev olarak yazarsak,

$$-\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda (R_{\sigma\tau} \nabla_\mu g^{\mu\sigma} \delta g^{\tau\lambda}) + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\lambda R_{\sigma\tau}) (\nabla_\mu g^{\mu\sigma} \delta g^{\tau\lambda}) \quad (2.58)$$

elde ederiz. Burada ilk terimi hesaplamak için $R_{\sigma\tau} \nabla_\mu g^{\mu\sigma} \delta g^{\tau\lambda} = D^\lambda$ şeklinde bir tensör tanımlayalım. (2.2) bölümündeki gibi integral içindeki ifadeyi yüzey terimi olarak yazabiliriz. Bu durumda metriğin varyasyonunun ve türevlerinin yüzeyde sıfır olduğu bilgisini kullanırsak,

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\lambda D^\lambda = \int d^4x \partial_\lambda (\sqrt{-g} D^\lambda) = \int ds_\lambda \sqrt{-g_3} D^\lambda = 0 \quad (2.59)$$

elde ederiz. (2.58)'nin ikinci teriminde de türevleri toplam türev olarak yazarsak,

$$\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu (\nabla_\lambda R_{\sigma\tau} g^{\mu\sigma} \delta g^{\tau\lambda}) - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu \nabla_\lambda R_{\sigma\tau} g^{\mu\sigma}) \delta g^{\tau\lambda} \quad (2.60)$$

elde ederiz. Buradaki ilk terim için $\nabla_\lambda R_{\sigma\tau} g^{\mu\sigma} \delta g^{\tau\lambda} = E^\mu$ şeklinde bir tanım yaparsak, onuda yüzey terimi olarak yazıp sıfıra gönderebiliriz. Böylece (2.53) için elimizde kalan ifade,

$$-\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu \nabla_\lambda R_\tau^\mu) \delta g^{\tau\lambda} \quad (2.61)$$

olur. (2.54) ve (2.55) numaralı terimler için de benzer işlem ve tanımlamaları yaparsak elde edeceğimiz sonuç, sırasıyla,

$$-\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\nu \nabla_\lambda R_\sigma^\nu) \delta g^{\sigma\lambda} \quad (2.62)$$

ve

$$\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\lambda \nabla^\lambda R_{\sigma\tau}) \delta g^{\sigma\tau} \quad (2.63)$$

şeklinindedir. Benzer işlemlerle (2.56) terimini de hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R_{\sigma\tau} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \nabla_\nu \nabla_\mu g_{\lambda\alpha} \delta g^{a\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\nu (R_{\sigma\tau} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \nabla_\mu g_{\lambda\alpha} \delta g^{a\lambda}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\nu R_{\sigma\tau}) (g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} \nabla_\mu g_{\lambda\alpha} \delta g^{a\lambda}). \quad (2.64) \end{aligned}$$

Burada ilk terimdeki toplam türevli ifadeyi $R_{\sigma\tau}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\nabla_\mu g_{\lambda a}\delta g^{a\lambda} = E^\nu$ şeklinde bir tensör tanımlayıp, integrali yüzey üzerinden alınan bir integrale dönüştürebiliriz. Bu durumda ilk terim sıfır olur ve (2.56) ifadesi

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu (\nabla_\nu R_{\sigma\tau} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} g_{\lambda a} \delta g^{a\lambda}) \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu \nabla_\nu R_{\sigma\tau}) g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} g_{\lambda a} \delta g^{a\lambda} \end{aligned} \quad (2.65)$$

halini alır. Bu ifadedeki birinci integrali $\nabla_\nu R_{\sigma\tau} g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} g_{\lambda a} \delta g^{a\lambda} = F^\mu$ şeklinde bir tensör tanımlayıp, yüzey terimi haline getirip sıfıra gönderebiliriz. İkinci integrali ise metrik tensörünün ve Ricci tensörünün simetri özelliklerinden dolayı,

$$\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu \nabla_\nu R_{\sigma\tau}) g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} g_{\lambda a} \delta g^{a\lambda} = \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} (\square R g_{\lambda a}) \delta g^{a\lambda} \quad (2.66)$$

olarak yazabiliriz. Bulduğumuz tüm ifadeleri (2.50) integralinde yerine yazıp gerekli indis düzenlemelerini yaparsak,

$$\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\square R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R - \nabla_\lambda \nabla_\mu R^\lambda_\nu - \nabla_\lambda \nabla_\nu R^\lambda_\mu \right] \delta g^{\mu\nu} \quad (2.67)$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadeyi $\delta\mathcal{A}_{g_3}$ 'de yerine yazar ve düzenlersek,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_{g_3} &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\square (R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) - \nabla_\lambda \nabla_\mu R^\lambda_\nu - \nabla_\lambda \nabla_\nu R^\lambda_\mu \right. \\ & \quad \left. + 2R_{\mu\lambda} R^\lambda_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} \right] \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.68)$$

sonucunu buluruz. $\delta\mathcal{A}_{g_3} = 0$ olması gerektiğinden $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ teriminin varyasyonundan hareket denklemlerine gelen katkı,

$$K_{\mu\nu} = \square (R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) - \nabla_\lambda \nabla_\mu R^\lambda_\nu - \nabla_\lambda \nabla_\nu R^\lambda_\mu + 2R_{\mu\lambda} R^\lambda_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.69)$$

şeklindedir. Dolayısıyla (2.9)'deki eylemin varyasyonundan elde ettiğimiz toplam hareket denkleminiz,

$$G_{\mu\nu} + \alpha H_{\mu\nu} + \beta K_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.70)$$

olarak yazılabilir. Sonraki bölümlerde α ve β 'nin genel ve özel değerleri için bazı karadelik çözümleri incelenecektir.

3 BİRİNCİ YASA VE WALD FORMALİZMİ

3.1 Karadelik Mekaniği Yasaları

Karadelik, etrafındaki yüksek gravitasyonel alandan dolayı olay ufkunu geçen hiçbir şeyin ondan kaçamadığı bir uzay-zaman bölgesidir. İlk olarak, boşluk durumundaki Einstein alan denklemlerinin küresel simetrik metrik çözümünde Schwarzschild tarafından bulunmuşlardır (1916). Karadeliklerin en önemli özelliklerinden biri mekanik yasalarıyla termodinamik yasaları arasındaki matematiksel benzerliktir. Kerr karadeligi için kütle, açısal momentum ve olay ufkunun alanı arasındaki ilişki,

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_H \delta J \quad (3.1)$$

şeklinde hesaplanabilir (κ yüzey gravite terimi olarak adlandırılır.) [7]. Bu ifadeye baktığımızda termodinamiğin birinci yasasıyla bir analogi kurulabilir:

$$dE = TdS - PdV. \quad (3.2)$$

Bu iki ifadeyi birbiriyle kıyaslırsak sıcaklık ve entropinin, karadelinin alanı ve yüzey gravite terimiyle ilişkili olduğu söylenebilir. Bu analoginin keşfedilmesinden sonra Bekestein karadeliklerin gerçek anlamda bir entropisi olması gerektiğini öne sürmüştür. Aksi halde termodinamiğin ikinci yasası çok rahat bir şekilde ihlal edilebilir. Çünkü karadelik içine atılan bir cisim klasik olarak uzay-zaman tekiliğinde kaybolacaktır. Dolayısıyla bu evrenin entropisinin azalmasına neden olur. Buradan yola çıkan Bekestein karadeliklerin yüzey alanlarıyla orantılı bir entropisi olması gerektiğini söylemiştir [30, 31]. Ancak klasik fizik açısından karadelikler mutlak sıfır sıcaklığa sahip nesnelere olduklarından bu ilişkinin fiziksel anlamı olmadığı düşünülmüştür. Ancak bu durum kuantum etkiler hesaba katıldığında değişmiştir. 1974 yılında Hawking olay ufku yakınında boşluktan yaratılan parçacık anti-parçacık çiftlerinin, karadeliklerin termal olarak radyasyon yaymasına neden olacağını keşfetmiştir. Bu keşfin ardından karadelikler için makroskopik entropi ifadesi kabul görmeye başlamıştır.

Sıcaklığın yüzey gravite ile ilişkisi ($T = \frac{\kappa}{2\pi}$) bilindikten sonra karadelğin alanıyla entropi arasındaki ilişki yazılabilir:

$$S = \frac{A}{4}. \quad (3.3)$$

Benzer ilişkiler diğer termodinamik yasaları için de kurulmuştur [32].

0. yasa: Yüzey gravite terimi κ , statik, dinamik olmayan karadelikler için olay ufku üzerinde sabittir.

2. yasa: Olay ufkunun alanı zamanla azalmaz $\delta A \geq 0$.

3. yasa: Hiçbir şekilde karadelğin yüzey gravite terimi sıfır yapılamaz.

Karadeliklerin entropisinin olması ve diğer karadelik yasalarının keşfinden sonra Be-kenstein termodinamiğın ikinci yasasının genelleştirilmesi gerektiğini söylemiştir. Bir cisim karadeliğe düştüğünde klasik olarak evrenin entropisi azalır. Dolayısıyla bu gelişkiyi ortadan kaldırmak için genelleştirilmiş ikinci yasayı ortaya atmıştır. S evrenin entropisi ve S_{bh} karadelik entropisi olmak üzere toplam entropi, $S' = S + S_{bh}$, zamanla asla azalmaz.

$$\delta(S') \geq 0 \quad (3.4)$$

Karadelikler yüksek gravitasyon alanına sahip nesnelere olduklarından mikroskopik ölçekte incelenmesi hem kuantum mekaniğini hem de genel göreliliği gerektirir. Karadelikler için mikroskopik ölçekte yapılan entropi hesabı klasik limitte makroskopik sonuçlarla uyumalıdır. Dolayısıyla makroskopik entropi ifadesinin kesin olarak bilinmesi, gravitasyonun kuantum kuramının geliştirilmesinde önemli rol oynayabilir [33].

3.2 Wald Formalizmi

Yukarıdaki ifadeler elde edilirken Einstein alan denklemleri kullanılmıştır. Dolayısıyla başka kuramlarda hesap yapabilmek için karadelik termodinamiğinin daha genel bir formulasyonuna ihtiyaç vardır.

Robert M. Wald diffeomorfizmalar altında değişmez bir Lagrangian'den başlayarak, bu Lagrangian'ın Killing vektörü yönündeki simetrisi üzerinden bulduğu Noether yükünün entropiyle orantılı olduğunu bulmuştur [10].

Bu bölümde Wald'un karadelik entropisinin hesabı için geliştirdiği formalizm anla-

tılacaktır. Konu anlatılırken [34], [35] makalelerindeki matematiksel yapı takip edilecektir. Öncelikle diffeomorfizmalar altında değişmez olma şartını açıklamaya çalışalım. $f : M \rightarrow M$ bir diffeomorfizmadır eğer f gönderimi (map) birebir, örten ve tersi, f^{-1} , tanımlıysa. Eğer böyle bir gönderim tanımlanabiliyorsa $M = M(g_{\mu\nu}, \psi)$ ve $M = M(f^*g_{\mu\nu}, f^*\psi)$ aynı fiziksel durumu temsil eder. Burada $g_{\mu\nu}$ metriği, ψ madde alanını temsil etmektedir. Bu durumda elimizde olan obje diffeomorfizmalar altında değişmezdir. Diffeomorfizmalar altında değişmez olmayı bir nevi koordinat dönüşümü olarak düşünebiliriz. Metriği, madde alanını ve diğer alanları $(g_{\mu\nu}, \psi, \dots) = \phi$ ile gösterirsek, Lagrangian'ın diffeomorfizmalar altında değişmez olma şartını

$$\mathbf{L}[f^*(\phi)] = f^*\mathbf{L}[\phi] \quad (3.5)$$

olarak yazabiliriz. Bu ifade bize şunu söyler, önce \mathbf{L} 'yi hesaplayıp geri çekmek (pull back) ile ϕ 'yi geri çekip \mathbf{L} 'yi hesaplamak aynı şeydir.

Genel görelilikte metrik (g) ve madde alanı (ψ) kovaryant türevle birbirleriyle ilişkilidir. Bu yüzden iki alan da dinamik olarak düşünülmelidir. Elimizde skaler bir Lagrange yoğunluğu olsun ve bunun toplam varyasyonunu inceleyelim. Lagrange yoğunluğunun metriğe, madde alanına ve türevlerine bağlı olduğunu düşünelim¹:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g, \psi, \nabla\psi). \quad (3.6)$$

Genel görelilik çerçevesinden baktığımız için toplam varyasyon metriğe, madde alanına ve Christoffel sembolüne bağlıdır. Ayrıca varyasyon açısından alanlar birbirinden bağımsızdır ($\delta = \delta_g + \delta_\psi$). (3.6) ifadesinin toplam varyasyonu

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g}\delta g + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\psi}\delta\nabla\psi \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g}\delta_g g + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta_\psi\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\psi}(\nabla\delta_\psi\psi - \psi\delta_g\Gamma) \\ &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g}\delta_g g - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\psi}\psi\delta_g\Gamma\right] + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta_\psi\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\psi}\nabla\delta_\psi\psi\right] \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g}\delta_g g + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\psi}\right]\delta_\psi\psi + \nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\psi}\delta_\psi\psi\right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

olarak bulunur. Bu sonuç daha kısa şekilde

$$\delta\mathcal{L} = E_g\delta_g g + E_\psi\delta_\psi\psi + \nabla \cdot \Theta \quad (3.8)$$

¹Yazım kolaylığı açısından indisler yazılmamıştır.

olarak yazılabilir. Bu ifadeyi daha kapalı formda yazmak için $\phi = (g, \psi)$ diyelim. Bu durumda Lagrange yoğunluğunun varyasyonu

$$\delta\mathcal{L} = E_a\delta\phi^a + \nabla_\mu\Theta^\mu \quad (3.9)$$

olur. E_a terimi alanlar için Euler-Lagrange hareket denklemlerini verir. $\nabla_\mu\Theta^\mu$ yüzey terimidir. Her iki tarafın integralini alırsak, elimizde

$$\int_M E_a\delta\phi^a = \int_M \delta\mathcal{L} \quad (3.10)$$

ifadesi olur. İntegral alırken $\delta\phi^a|_{\partial M} = 0$ şartını koyduk, dolayısıyla $\nabla_\mu\Theta^\mu = 0$ olur. Bu durumda elimizde korunumlu bir akım vardır. Amacımız bu akımı karadelik ufku üzerinde tanımlı Noether akımıyla ilişkilendirmektir.

Karadelik mekaniğinin birinci yasasının elde edilmesinde kullanılan bir diğer temel ifade simplektik akım yoğunluğudur. Bunu tanımlamak için Lagrange yoğunluğunun iki farklı varyasyonunu düşünelim δ_1 ve δ_2 . Lagrangian'ın ikinci varyasyonunu

$$\delta_1\delta_2\mathcal{L} = \delta_1E_a\delta_2\phi^a + E_a\delta_1\delta_2\phi^a + \nabla_\mu\delta_1\Theta_2^\mu \quad (3.11)$$

olarak yazabiliriz. Aynı işlemi $\delta_2\delta_1\mathcal{L}$ için de yapıp farklarını alırsak simplektik akım yoğunluğunu

$$\Omega^\mu(\phi, \delta_1, \delta_2) = \delta_1\Theta_2^\mu - \delta_2\Theta_1^\mu \quad (3.12)$$

olarak tanımlarız.

Şimdi herşeyi formlarla yazmaya çalışalım. n boyutlu bir manifold üzerinde, diffeomorfizmalar altında değişmez n -form bir Lagrangian, $\mathbf{L} \in \Lambda^n(M)$, düşünelim. Lagrangian n -form uzayın her noktasında, metriğe, Riemann tensörüne, madde alanına ve diğer alanlara bağlı olabilir. Bu durumda

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\alpha\beta}, \psi\dots) \quad (3.13)$$

yazabiliriz. Kolaylık açısından yine $\phi = (g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\alpha\beta}, \psi\dots)$ diyelim. (3.13) denkleminin birinci mertebeden varyasyonu

$$\delta\mathbf{L} = \mathbf{E}\delta\phi + d\Theta \quad (3.14)$$

şeklinde yazılır [10]. $\mathbf{E} = 0$ bize hareket denklemlerini verir. ($\mathbf{E}\delta\phi = (E_g)^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} + E_\psi\delta\psi + \dots$). $\Theta \in \Lambda^{n-1}(M)$, $(n-1)$ -form, alanlara, ϕ , ve alanların varyasyonuna, $\delta\phi$,

bağlıdır. Θ 'yı kullanarak, yukarıda yazdığımız gibi, $(n - 1)$ -form simplektik akım Ω tanımlayabiliriz [34]:

$$\Omega(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi) = \delta_1[\Theta(\phi, \delta_2\phi)] - \delta_2[\Theta(\phi, \delta_1\phi)]. \quad (3.15)$$

Θ ve Ω seçilen Lagrangian'a bağlı büyüklüklere.

M üzerinde tanımlı bir vektör alanı düşünelim, ξ^α . Bu vektör alanı yönünde alınan Lie türevi, Lagrangian'ın bağlı olduğu alanların varyasyonuna eşittir ($\delta\phi = \mathcal{L}_\xi\phi$) [28]. Bunu kullanarak diffeomorfizmalar altında değişmez olma şartından

$$\delta\mathbf{L} = \mathcal{L}_\xi\mathbf{L} \quad (3.16)$$

yazılabilir [36]. Lie türevinin tanımı kullanarak (Ek C), (3.16) ifadesini,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi\mathbf{L} &= \xi \cdot d\mathbf{L} + d(\xi \cdot \mathbf{L}) \\ &= d(\xi \cdot \mathbf{L}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

olarak yazabiliriz. Birinci satırdaki $d\mathbf{L}$ ifadesi sıfırdır, çünkü n boyutlu bir manifold üzerinde $(n + 1)$ boyutlu form tanımlayamayız. (3.17) bize şunu söyler: Lagrangian'ın ilgili vektör alanı yönündeki değişimini toplam türev olarak yazabiliriz. Bu durumda her bir vektör alanına, ξ^α , karşılık gelen $(n - 1)$ -form Noether akımı, \mathbf{J} , tanımlamak mümkündür:

$$\mathbf{J} = \Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \xi \cdot \mathbf{L}. \quad (3.18)$$

Noether akımının dış türevini aldığımızda

$$\begin{aligned} d\mathbf{J} &= d\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - d(\xi \cdot \mathbf{L}) \\ &= \delta\mathbf{L} - \mathbf{E}\delta\phi - \delta\mathbf{L} \\ &= -\mathbf{E}\delta\phi \end{aligned} \quad (3.19)$$

buluruz. Hareket denklemleri sağlandığından ($\mathbf{E} = 0$), $d\mathbf{J} = 0$ diyebiliriz [37]. Bu durumda formların özelliğini kullanarak ($d^2\mathbf{A} = 0$)

$$\mathbf{J} = d\mathbf{Q} \quad (3.20)$$

şeklinde, ξ^α vektör alanlarına karşılık bir $(n - 2)$ -form Noether yükü bulabiliriz [38]. (3.18) denkleminin geri dönelim. Bu ifadenin keyfi varyasyonunu alırsak ($\delta\xi^\alpha = 0$),

$$\delta\mathbf{J} = \delta[\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi)] - \xi \cdot \delta\mathbf{L} \quad (3.21)$$

elde ederiz. (3.14) ifadesini kullanarak yukarıdaki denklemi

$$\delta\mathbf{J} = \delta[\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi)] - \xi \cdot \mathbf{E}\delta\phi - \xi \cdot d\Theta \quad (3.22)$$

olarak yazabiliriz. Lie türevinin tanımını ve aynı zamanda hareket denklemlerinin sağlandığını düşünürsek (3.22) denklemi

$$\delta\mathbf{J} = \delta[\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi)] - \mathcal{L}_\xi[\Theta(\phi, \delta\phi)] + d(\xi \cdot \Theta) \quad (3.23)$$

şeklini alır. (3.23) denklemindeki ilk iki terim ve (3.15)'deki simplektik akım tanımı kullanılarak

$$\delta[\Theta(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi)] - \mathcal{L}_\xi[\Theta(\phi, \delta\phi)] = \Omega(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) \quad (3.24)$$

yazılabilir. Böylelikle (3.23) denklemi

$$\Omega(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) = \delta\mathbf{J} - d(\xi \cdot \Theta) \quad (3.25)$$

halini alır. Simplektik formlar klasik mekanikte Hamiltonian'le ilişkili büyüklüklerdir. Elimizde diffeomorfizmalar altında değişmez bir kuram varsa, bu kuramın ξ vektör alanı üzerinde sahip olduğu simetrisi kullanarak simplektik akım yoğunluğu ve bu akım yoğunluğu üzerinden bir Hamiltonian tanımlanabilir [39]:

$$\delta\mathbf{H} = \int_C \Omega(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) \quad (3.26)$$

Eğer (3.25) denklemini bir Cauchy yüzeyi (C), üzerinden integre edersek elimizde

$$\delta\mathbf{H} = \delta \int_C \mathbf{J} - \int_C d(\xi \cdot \Theta) \quad (3.27)$$

ifadesi olur. Hareket denklemlerinin sağlandığı durum için ($\mathbf{E} = 0$) Noether akımını $\mathbf{J} = d\mathbf{Q}$ şeklinde yazabiliyorduk. Bu ifadeyi yukarıdaki denklemde yerine yazarsak ve Stokes teoremini kullanırsak Hamiltonian'ın yüzey terimi olarak yazılabildiğini görebiliriz:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{H} &= \delta \int_C d\mathbf{Q} - \int_C d(\xi \cdot \Theta) \\ &= \int_{\partial C} (\delta\mathbf{Q} - \xi \cdot \Theta). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Bu Hamiltonian sayesinde birinci yasada görülen fiziksel büyüklükleri elde edebiliriz. Hamiltonian'ın zaman yönündeki, t^α , öteleme simetrisini enerjiyle \mathcal{E} , dönme yönündeki, φ^α , simetrisini açısal momentumla \mathcal{J} ilişkilendirebiliriz. Bu büyüklükleri elde etmek için $\delta\mathbf{H}$ 'yi sonsuzdaki Cauchy yüzeyinin ($n-2$) boyutlu yüzeyi üzerinden integre

etmeliyiz. Bunu yapmamızın nedeni, genel görelilikte tanımlı kanonik enerji ve kanonik açısal momentum ifadelerinin asimptotik olarak sonsuzda tanımlı olmasıdır [40]. Dolayısıyla enerji ve açısal momentumun varyasyonlarını

$$\delta\mathcal{E} = \int_{\infty} (\delta\mathbf{Q}(t) - t \cdot \Theta), \quad (3.29)$$

$$\delta\mathcal{J} = - \int_{\infty} \delta\mathbf{Q}(\varphi^\alpha) \quad (3.30)$$

olarak yazabiliriz [41]. $\delta\mathcal{J}$ ifadesindeki eksi işareti metriğin seçiminden dolayı gelmektedir. Ayrıca dönme vektörü φ^α bu hiper yüzeye dik olarak alındığından $\int_{\infty} \varphi \cdot \Theta = 0$ olur. Bu yüzden (3.30) denkleminde φ 'li terim yoktur.

Şimdi özel olarak Killing ufkuna, H , sahip durağan bir karadelik çözümü düşünelim. Böyle bir karadelik için Killing vektörünü

$$\xi^\mu = t^\mu + \Omega_H \varphi^\mu \quad (3.31)$$

olarak yazabiliriz. t^μ zaman yönündeki, φ^μ ise dönme yönündeki Killing vektörlerdir. Ω_H ise olay ufkunun açısal hızıdır. Eğer ξ Killing vektör alanıysa, dinamik alanların bu doğrultudaki Lie türevi sıfırdır $\mathcal{L}_\xi \phi = 0$. Bunu kullanarak olay ufku üzerinde

$$\delta\Theta(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi \phi) = \mathcal{L}_\xi \Theta = 0 \quad (3.32)$$

diyebiliriz [42]. Yukarıdaki ifadeyi (3.23) denkleminde yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{J} &= \delta(d\mathbf{Q}) = d(\delta\mathbf{Q}) \\ &= d(\xi \cdot \Theta) \end{aligned} \quad (3.33)$$

bulunur. (3.33) denklemini iç sınırı H olan asimptotik sonsuzda tanımlı bir C hiperyüzeyi üzerinden integre edersek,

$$\begin{aligned} \int_C d(\xi \cdot \Theta) &= \int_{\partial C} \xi \cdot \Theta \\ &= \int_{\infty} \xi \cdot \Theta - \int_H \xi \cdot \Theta \\ &= \int_{\infty} \xi \cdot \Theta \end{aligned} \quad (3.34)$$

elde ederiz. İntegral ifadenin ikinci satırındaki $\xi \cdot \Theta$ terimi Killing vektörü H üzerinde sıfır olduğu için düşer. (3.29), (3.30) denklemlerini birleştirir ve elimizdeki Killing

vektörü için Noether yükünün $\delta\mathbf{Q}(\xi) = \delta\mathbf{Q}(t) + \Omega_H\delta\mathbf{Q}(\varphi)$ şeklinde yazılabildiğini kullanırsak $\delta\mathbf{Q}$ 'nun H üzerinden integralini

$$\delta \int_H \mathbf{Q} = \delta\mathcal{E} - \Omega_H\delta\mathcal{J} \quad (3.35)$$

olarak yazabiliriz. Bu ifade tam olarak karadelik mekaniğinin birinci yasasının karşılığıdır. Genel göreliliğin Hamilton formalizmi kullanılarak elde edilen birinci yasa ifadesi

$$\delta\mathcal{E} - \Omega_H\delta\mathcal{J} = \frac{\kappa}{8\pi}\delta\mathcal{A} \quad (3.36)$$

şeklindedir [43]. Bu iki ifadeyi birbiriyle kıyaslırsak ve Hawking sıcaklığının $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ olduğunu hatırlarsak, entropi ifadesinin karadelik ufku üzerinde hesaplanan Noether yüküyle orantılı olduğunu görebiliriz:

$$S = \frac{2\pi}{\kappa} \int_H \mathbf{Q}(\xi). \quad (3.37)$$

İntegral ifadesinin başındaki κ teriminden kurtulmak mümkündür. Noether yükü \mathbf{Q} Killing vektörüne ve türevlerine bağlıdır. H üzerinde $\xi = 0$ ve türevleri $\nabla_\mu\xi_\nu = \kappa\epsilon_{\mu\nu}$ olarak yazılabilir. Statik karadelikler için yüzey gravite terimi, κ , sabit olduğundan Killing vektörünü normalize edebiliriz ($\xi \rightarrow \tilde{\xi}$). Bu durumda Noether yükü

$$\delta\mathbf{Q} = \kappa\delta\tilde{\mathbf{Q}} \quad (3.38)$$

olarak yazılabilir. Bu ifadeyi kullanırsak entropi,

$$S = 2\pi \int_H \mathbf{Q} \quad (3.39)$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi klasik karadelik entropisi tamamiyle geometrik bir ifadedir. \mathbf{Q} 'nun formu kuramdan kurama değişmektedir.

Örnek olarak Einstein-Hilbert eylemi için \mathbf{Q} 'nun formuna bakalım. Eylem

$$\mathcal{A} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} R = \frac{1}{16\pi} \int R\epsilon \quad (3.40)$$

şeklindedir. Lagrangian 4-form ise $\mathbf{L} = \frac{1}{16\pi}\epsilon R$ olarak yazılabilir. (3.14) ifadesini kullanırsak bu 4-formun varyasyonu

$$\delta\mathbf{L} = \frac{1}{16\pi}\epsilon(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)\delta g_{\mu\nu} + d\Theta \quad (3.41)$$

olur. İlk terim görüldüğü gibi Einstein alan denklemlerini verir. Θ , bir önceki bölümde hesapladığımız yüzey terimidir. Tensör notasyonunda

$$\Theta^\alpha = \sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \quad (3.42)$$

olarak yazıldığını göstermiştik. $\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ tanımını kullanarak Θ^α 'yı,

$$\Theta^\alpha = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\nabla_\nu\delta g_{\beta\mu} - \nabla_\beta\delta g_{\mu\nu}) \quad (3.43)$$

olarak yazabiliriz. Şimdi bu ifadeyi form dilinde yazarak devam edelim. Simplektik potansiyel Θ ,

$$\Theta_{\sigma\rho\delta} = \frac{1}{16\pi}\epsilon_{\alpha\sigma\rho\delta}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\nabla_\nu\delta g_{\beta\mu} - \nabla_\beta\delta g_{\mu\nu}) \quad (3.44)$$

şeklindedir. (3.18) ifadesini kullanarak Noether akımını yazabiliriz:

$$\begin{aligned} J_{\sigma\rho\delta} &= \Theta_{\sigma\rho\delta} - \xi^\alpha L_{\alpha\sigma\rho\delta} \\ &= \frac{1}{16\pi}\epsilon_{\alpha\sigma\rho\delta}[g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\nabla_\nu\delta g_{\beta\mu} - \nabla_\beta\delta g_{\mu\nu}) - \xi^\alpha R]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Bu ifadenin son terimini, $\xi^\alpha R$, Einstein tensörünü kullanarak daha kullanışlı bir formda yazabiliriz:

$$\begin{aligned} G_{\mu\alpha} &= R_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\alpha}, \\ \xi^\alpha G_{\mu\alpha} &= \xi^\alpha R_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\xi^\alpha Rg_{\mu\alpha}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Yukarıdaki ifadeyi soldan $g^{\mu\nu}$ ile çarpıp indisleri düzenlersek,

$$\xi^\alpha R = 2(R_\kappa^\alpha \xi^\kappa - G_\kappa^\alpha \xi^\kappa) \quad (3.47)$$

ifadesini elde ederiz. Bu eşitliği (3.45) denkleminde yerine yazarsak ve metriğin varyasyonu ile Killing vektörleri arasındaki ilişkiyi ($\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$) kullanırsak, Noether akımı ifadesi

$$\begin{aligned} J_{\sigma\rho\delta} &= \frac{1}{16\pi}\epsilon_{\alpha\sigma\rho\delta}[g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\nu(\nabla_\beta\xi_\mu + \nabla_\mu\xi_\beta) - g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\beta(\nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu) \\ &\quad - 2R_\kappa^\alpha \xi^\kappa + 2G_\kappa^\alpha \xi^\kappa] \\ &= \frac{1}{16\pi}\epsilon_{\alpha\sigma\rho\delta}[2\nabla_\nu(\nabla^{[\nu}\xi^{\alpha]}) - g^{\alpha\beta}(\nabla_\beta\nabla_\mu\xi^\mu + \nabla_\beta\nabla_\nu\xi^\nu) \\ &\quad - 2R_\kappa^\alpha \xi^\kappa + 2G_\kappa^\alpha \xi^\kappa] \end{aligned} \quad (3.48)$$

olur. Killing vektörünün Riemann tensörüyle olan ($\nabla_\mu\nabla_\nu\xi^\alpha = R^\alpha_{\nu\mu\lambda}\xi^\lambda$ [44]) ilişkisini kullanırsak bu ifadeyi

$$J_{\sigma\rho\delta} = \frac{1}{8\pi}\epsilon_{\alpha\sigma\rho\delta}[\nabla_\nu(\nabla^{[\nu}\xi^{\alpha]}) + G_\kappa^\alpha \xi^\kappa] \quad (3.49)$$

olarak yazabiliriz. Hareket denklemlerinin sağlandığı durumda $G_{\mu\nu} = 0$ olacağından Noether akımı,

$$J_{\sigma\rho\delta} = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\alpha\sigma\rho\delta} \nabla_\nu \nabla^{[\nu} \xi^{\alpha]} \quad (3.50)$$

ve Noether yükü,

$$Q_{\sigma\rho} = -\frac{1}{16\pi} \epsilon_{\sigma\rho\delta\mu} \nabla^\delta \xi^\mu \quad (3.51)$$

olarak elde edilir [45].

Wald'un karadelik entropisini Noether yüküyle ilişkilendirmesinden sonra Jacobson, Kong ve Myers diffeomorfizmler altında invaryant genel bir Lagrangian

$$L = L(g_{\mu\nu}, \psi, \nabla_\lambda \psi \dots, R_{\mu\nu\alpha\beta}, \nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} \dots) \quad (3.52)$$

olarak entropinin

$$S = -2\pi \int_H (Y^{\mu\nu\alpha\beta} - \nabla_\lambda Z^{\lambda:\mu\nu\alpha\beta}) \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta} \sqrt{h} d^2\Omega \quad (3.53)$$

şeklinde hesaplanabileceğini göstermiştir [13, 14], [46, 47]. H olay ufku üzerindeki bir kesit, \sqrt{h} yüzey metriğinin determinanı, anti-simetrik $\epsilon_{\mu\nu}$ tensörü, yüzeyin bi-normal tensörüdür ve kendisiyle çarpımı $\epsilon_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu} = -2$ şeklindedir.

$$Y^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}}, \quad Z^{\lambda:\mu\nu\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial \nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta}} \quad (3.54)$$

Bu tezde karadelik çözümlerinin entropi hesabı yapılırken bazen Wald'un, bazen de Jacobson, Kong ve Myers'in entropi tanımı üzerinden hesaplama yapılacaktır. Bunun nedeni iki yöntemin de aynı sonucu verdiğini göstermektir.

4 KÜRESEL SİMETRİK ÇÖZÜMLER VE ENTROPİ

Bu bölümde küresel simetrik metrik için boşluk durumunda kuadratik genelçekim kuramının çözümlerine ve entropi hesaplarına bakacağız. α ve β 'nin bazı özel limit durumlarını inceleyeceğiz. Kuadratik genelçekim kuramı metrik fonksiyonunun dördüncü mertebeden türevlerini içerir ve bu lineer olmayan denklemleri analitik yöntemlerle çözmek pek kolay değildir. Denklemlerin çözümünde doğrudan çözüme gitmek yerine metrik fonksiyonunun genel bir halini düşünüp denklemleri sağlayıp sağlamadığını inceleyeceğiz. Daha sonra Wald'un entropi formülünü kullanarak her bir çözüm için entropi ifadesinin nasıl olduğunu hesaplayacağız.

4.1 Genel Görelilik Kuramı

α ve β 'nin sifıra eşit olduğu durumda elimizde olan eylem Einstein-Hilbert eylemidir:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \mathcal{L}_m). \quad (4.1)$$

Bu durumda hareket denklemlerimiz

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

şeklindedir. Bu denklemlerin ilk çözümü statik ve küresel simetrik durum için Schwarzschild tarafından yapılmıştır [48]. Schwarzschild çözümü kendi üstüne çöken bir yıldızın dış çözümüdür. Bu çözümü elde etmek için metrik fonksiyonlarının aynı olduğu küresel simetrik metriği düşünelim:

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -A(r)dt^2 + \frac{1}{A(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.3)$$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \text{diag}[-A(r), A^{-1}(r), r^2, r^2 \sin^2\theta], \\ g^{\mu\nu} &= \text{diag}[-A^{-1}(r), A(r), r^{-2}, r^{-2} \sin^{-2}\theta]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Boşluk durumunda enerji-momentum tensörü sıfır olduğundan elimizde Einstein vakum denklemleri vardır $R_{\mu\nu} = 0$. Bu denklemleri çözmek için Ricci tensörünün bileşenlerini hesaplamalıyız. Christoffel sembolleri cinsinden Ricci tensörünün ifadesi

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \quad (4.6)$$

şeklinindedir. Ricci tensörünü hesaplamak için öncelikle Christoffel sembollerini hesaplamalıyız. (4.3) metriği için sıfır olmayan Christoffel sembolleri ($t = 0, r = 1, \theta = 2, \phi = 3$)

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} &= \frac{1}{2} \frac{A'(r)}{A(r)}, & \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2} A(r) A'(r), & \Gamma^1_{11} &= -\frac{1}{2} \frac{A'(r)}{A(r)}, \\ \Gamma^1_{22} &= -A(r)r, & \Gamma^1_{33} &= -A(r)r \sin^2\theta, & \Gamma^2_{12} &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma^2_{33} &= -\sin\theta \cos\theta, & \Gamma^3_{13} &= \frac{1}{r}, & \Gamma^3_{23} &= \cot\theta, \end{aligned} \quad (4.7)$$

olarak bulunur. (4.7) ifadelerini kullanarak Ricci tensörünün sıfır olmayan bileşenlerini hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{A(r)}{2} \left[A''(r) + \frac{2}{r} A'(r) \right], \\ R_{11} &= -\frac{1}{2A(r)} \left[A''(r) + \frac{2}{r} A'(r) \right], \\ R_{22} &= -A'(r)r - A(r) + 1, \\ R_{33} &= -A'(r)r \sin^2\theta - A(r) \sin^2\theta + \sin^2\theta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

$R_{\mu\nu} = 0$ olduğundan $R_{22} = 0$ ifadesini kullanarak metrik fonksiyonunun çözümünü bulabiliriz. Denklemi radyal koordinata göre integre edersek,

$$\begin{aligned} A'(r)r + A(r) &= 1 \\ \partial_r(rA(r)) &= 1 \\ A(r) &= 1 + \frac{C}{r} \end{aligned} \quad (4.9)$$

C integral sabitidir, kuramın Newtonyen limitinin doğru olması için $C = -2M$ olarak alınmalıdır [49]. Bu durumda metrik çözümümüz

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.10)$$

olarak elde edilir. Metrik ifadesi incelendiğinde $r=2M$ 'de ve $r=0$ 'da metrik fonksiyonlarının sonsuz veya sıfır verdiği görülür. Bu noktalar metriğin tekil noktalarıdır.

$r=0$ gerçek tekillik, $r=2M$ ise bir koordinat tekiliğidir [50]. Koordinat tekiliğinden belli koordinat dönüşümleri yaparak kurtulmak mümkündür [51]. $r=2M$ Schwarzschild metriğinin olay ufku olarak adlandırılır ve hiçbir parçacık bu noktaya geldikten sonra karadeliğin çekim alanından kurtulamaz.

Schwarzschild karadeliğinin entropisini, Wald'un entropi formülünü kullanarak hesaplayabiliriz [9, 52]. Bilinen bir Lagrangian için entropi ifadesi,

$$S = -2\pi \int_H \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R_{\mu\nu\alpha\beta}} \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta} \sqrt{h} d^2 \Omega \quad (4.11)$$

şeklindedir. Einstein-Hilbert eylemi için Lagrangian ve Lagrange yoğunluğu,

$$L = \sqrt{-g} \mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} R \sqrt{-g}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} R = \frac{1}{16\pi} R_{\mu\nu\alpha\beta} g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \quad (4.12)$$

olarak verilir. Lagrange yoğunluğunun Riemann tensörüne göre varyasyonunu

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R_{\mu\nu\alpha\beta}} &:= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}} - \nabla_{\xi_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_{\xi_1} R_{\mu\nu\alpha\beta}} \right) + \dots \\ &+ (-1)^n \nabla_{\xi_1} \dots \nabla_{\xi_n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla_{(\xi_1} \dots \nabla_{\xi_n)} R_{\mu\nu\alpha\beta}} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

şeklinde yazabiliriz. Lagrange yoğunluğu sadece Riemann tensörüne bağlı olduğundan ilk terim dışındakiler sıfırdır. Bu durumda Lagrange yoğunluğunun Riemann tensörüne göre türevi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}} = \frac{1}{32\pi} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta}) \quad (4.14)$$

olur. Yüzeyin bi-normal tensörü $\epsilon_{\mu\nu} = \kappa^{-1} \nabla_{\mu} \xi_{\nu}$ ifadesiyle hesaplanır. Burada κ yüzey gravite terimi, ξ_{μ} Killing vektörüdür. κ ifadesini

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla^{\mu} \xi^{\nu} \nabla_{\mu} \xi_{\nu}) \quad (4.15)$$

eşitliğini kullanarak hesaplayabiliriz [10]. Schwarzschild çözümü için Killing vektörü $\xi^{\mu} = \delta_0^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ şeklindedir, kovaryant ifadesi ise $\xi_{\mu} = \left(-\left(1 - \frac{2M}{r}\right), 0, 0, 0 \right)$ olarak yazılabilir. Bu durumda yüzey gravite terimini hesaplırsak,

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= -\frac{1}{2} (\nabla^0 \xi^1 \nabla_0 \xi_1 + \nabla^1 \xi^0 \nabla_1 \xi_0) \\ &= -\frac{1}{2} [(g^{00} \partial_0 \xi^1 + \Gamma_{0\lambda}^1 \xi^{\lambda}) (\partial_0 \xi_1 - \Gamma_{01}^{\lambda} \xi_{\lambda}) \\ &\quad + (g^{11} \partial_1 \xi^0 + \Gamma_{1\lambda}^0 \xi^{\lambda}) (\partial_1 \xi_0 - \Gamma_{10}^{\lambda} \xi_{\lambda})] \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{16M^2} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{1}{4M} \quad (4.17)$$

olarak bulunur. Sıfır olmayan bi-normal tensör bileşenleri ise

$$\begin{aligned} \epsilon_{01} = -\epsilon_{10} &= \kappa^{-1}(\nabla_0 \xi_1) \\ &= 4M(\partial_0 \xi_1 - \Gamma^\lambda{}_{01} \xi_\lambda) \\ \epsilon_{01} &= 1 \quad \epsilon_{10} = -1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

olduğu görülür. Bulduğumuz ifadeleri (4.11) ifadesinde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} S &= -2\pi \int_H \frac{1}{32\pi} (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta}) \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta} \sqrt{h} d^2 \Omega \\ &= -\frac{1}{16} \int_H (g^{00} g^{11}) 4\sqrt{h} d^2 \Omega \\ &= \frac{1}{4} \int_H \sqrt{h} d^2 \Omega = \frac{A_H}{4} \end{aligned}$$

olarak bulunur [53, 54]. Wald'un entropi formülasyonu Schwarzschild karadeliği için yapılan diğer entropi hesaplarıyla birebir aynı sonucu vermektedir [55].

4.2 R^2 Genelçekim Kuramı

R^2 çözümü için β 'nin sıfır olduğu ve $\alpha \rightarrow \infty$ 'a gittiği limit durumunu inceleyeceğiz.

Bu durumda elimizde olan eylem,

$$\mathcal{A} = \int d^4x \sqrt{-g} (R^2 + \mathcal{L}_m) \quad (4.19)$$

şeklini alır [56]. Bu durum için hareket denklemlerini (2.) bölümde elde etmiştik. Hareket denklemlerimiz;

$$H_{\mu\nu} = 2R(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R) + 2(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu)R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

$H_{\mu\nu}$ tensörünün bir özelliği kovaryant türevinin sıfır olmasıdır ($\nabla^\mu H_{\mu\nu} = 0$) (Ek B).

Aynı zamanda enerji-momentum tensörünün de kovaryant türevi sıfırdır:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (4.21)$$

Dolayısıyla elimizde kovaryant olarak sabit bir denklem takımı var, tıpkı Einstein alan denklemlerinde olduğu gibi. Amacımız boşluk durumu için $H_{\mu\nu}$ denkleminin çözümlerini incelemek.

$$R(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R) + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu)R = 0 \quad (4.22)$$

denkleminin R ve $R_{\mu\nu}$ 'nün değerlerine bağlı olarak iki tip çözümü vardır:

- Skaler eğriliğin sıfır olduğu durum $R = 0$, $R_{\mu\nu} \neq 0$,
- Skaler eğriliğin sıfır olmadığı durum $R_{\mu\nu} = 3\lambda g_{\mu\nu}$, $R = 12\lambda$.

Burada λ sabit değerde olup kozmolojik sabit gibi düşünülebilir. $\lambda = 0$ limit durumunda elimizde klasik Schwarzschild çözümü vardır.

Çözüme geçmeden önce hareket denklemindeki tensör ifadelerini (4.3)'nolu metrik için hesaplayalım.

Eğrilik skaleri R:

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\ &= -A''(r) - \frac{4}{r} A'(r) - \frac{2}{r^2} (A(r) - 1). \end{aligned} \quad (4.23)$$

d'Alembert operatörünü eğrilik skaleri (R) üstüne uygularsak:

$$\begin{aligned} \square R &= g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu R - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda R \\ &= g^{00} \partial_0 \partial_0 R - g^{00} \Gamma_{00}^\lambda \partial_\lambda R + g^{11} \partial_1 \partial_1 R - g^{11} \Gamma_{11}^\lambda \partial_\lambda R \\ &\quad + g^{22} \partial_2 \partial_2 R - g^{22} \Gamma_{22}^\lambda \partial_\lambda R + g^{33} \partial_3 \partial_3 R - g^{33} \Gamma_{33}^\lambda \partial_\lambda R \\ \square R &= A(r) R'' + (A'(r) + \frac{2A(r)}{r}) R'. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Skaler eğriliğin iki defa kovaryant türevi:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu R = \partial_\mu \partial_\nu R - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda R. \quad (4.25)$$

“00” bileşeni:

$$\begin{aligned} \nabla_0 \nabla_0 R &= \partial_0 \partial_0 R - \Gamma_{00}^\lambda \partial_\lambda R \\ &= -\frac{1}{2} A(r) A'(r) R'. \end{aligned} \quad (4.26)$$

“11” bileşeni:

$$\begin{aligned} \nabla_1 \nabla_1 R &= \partial_1 \partial_1 R - \Gamma_{11}^\lambda \partial_\lambda R \\ &= R'' + \frac{1}{2} \frac{A'(r)}{A(r)} R'. \end{aligned} \quad (4.27)$$

“22” bileşeni:

$$\begin{aligned} \nabla_2 \nabla_2 R &= \partial_2 \partial_2 R - \Gamma_{22}^\lambda \partial_\lambda R \\ &= A(r) r R'. \end{aligned} \quad (4.28)$$

“33” bileşeni:

$$\begin{aligned}\nabla_3\nabla_3R &= \partial_3\partial_3R - \Gamma_{33}^\lambda\partial_\lambda R \\ &= A(r)r\sin^2\theta R'.\end{aligned}\quad (4.29)$$

Bulduğumuz ifadeleri (4.22) denkleminde yerine yazarsak ($A(r) = A$), alan denklemlerinin H_{00} bileşeni:

$$\begin{aligned}R(R_{00} - \frac{1}{4}g_{00}R) + (g_{00}\square - \nabla_0\nabla_0)R &= 0 \\ A[R'' + (\frac{A'}{2A} + \frac{2}{r})R'] + \frac{R^2}{4} + R[\frac{A'}{r} + \frac{1}{r^2}(A - 1)] &= 0\end{aligned}\quad (4.30)$$

alan denklemlerinin H_{11} bileşeni:

$$\begin{aligned}R(R_{11} - \frac{1}{4}g_{11}R) + (g_{11}\square - \nabla_1\nabla_1)R &= 0 \\ (\frac{A'}{2} + \frac{2A}{r})R' + \frac{R^2}{4} + R[\frac{A'}{r} + \frac{1}{r^2}(A - 1)] &= 0\end{aligned}\quad (4.31)$$

alan denklemlerinin $H_{22}(=H_{33})$ bileşeni:

$$\begin{aligned}R(R_{22} - \frac{1}{4}g_{22}R) + (g_{22}\square - \nabla_2\nabla_2)R &= 0 \\ A[R'' + (\frac{A'}{A} + \frac{1}{r})R'] - \frac{R^2}{4} - R[\frac{A'}{r} + \frac{1}{r^2}(A - 1)] &= 0\end{aligned}\quad (4.32)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki denklemler dördüncü mertebeden türevler içeren ifadelerdir. Dördüncü mertebe türevlerle uğraşmak yerine

$$H_{00} - H_{22} = \frac{R^2}{2} - 2R[\frac{A'}{r} + \frac{1}{r^2}(A - 1)] + (\frac{A'}{A} - \frac{A'}{2})R' = 0\quad (4.33)$$

denklemine bakabiliriz. Bu ifade $A(r)$ 'nın üçüncü mertebeden türevlerini içerir. Ayrıca $H_{11} = 0$ ifadesini kullanarak,

$$\frac{R^2}{2} - 2R[\frac{A'}{r} + \frac{1}{r^2}(A - 1)] = -2A(\frac{A'}{2A} + \frac{2}{r})R'\quad (4.34)$$

yazabiliriz. Bu durumda elimizde basit bir ifade kalır:

$$R'(rA' + 2A) = 0.\quad (4.35)$$

Bu denklemin çözümlerini $R' = 0$ ve $(rA' + 2A) = 0$ olarak ayırabiliriz. İkinci durum için çözüm $A(r) = \frac{c}{r}$ şeklinde yazılabilir. Bu çözüm bir karadelik çözümü vermediği

için bunu dikkate almayacağız.

Birinci durum için

$$A(r) = 1 + \frac{1}{r}a + \frac{1}{r^2}b + cr^2 \quad (4.36)$$

şeklinde bir çözüm önerisinde bulunalım ve denklemlerin sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim [57,58]. Hesapları kolaylaştırmak için $\Omega(r) = A' + \frac{(A-1)}{r}$ şeklinde bir sadeleştirme yaparsak, bu durumda R ve R' ,

$$\begin{aligned} R &= -\left[\Omega' + \frac{3}{r}\Omega\right] \\ R' &= -\left[\Omega'' + \frac{3}{r}\Omega' - \frac{3}{r^2}\Omega\right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

olur. Ω ifadesini ve türevlerini $A(r)$ cinsinden hesaplırsak,

$$\Omega(r) = -\frac{b}{r^3} + 3cr, \quad \Omega'(r) = \frac{3b}{r^4} + 3c, \quad \Omega''(r) = -\frac{12b}{r^5} \quad (4.38)$$

bulunur. Bunları R' ifadesinde yerine yazarsak,

$$R' = -\left[-\frac{12b}{r^5} + \frac{3}{r}\left(\frac{3b}{r^4} + 3c\right) - \frac{3}{r^2}\left(-\frac{b}{r^3} + 3cr\right)\right] = 0 \quad (4.39)$$

ifadesi sağlanır. Öyleyse (4.36) ifadesi (4.35) için bir çözümdür. (4.22) denkleminin sağlanması için iki farklı şart olduğunu söylemiştik. Çözüm önerisinin bu şartları sağladığı durumları inceleyelim:

- Skaler eğriliğin sıfır olduğu ($R = 0$ ve $R_{\mu\nu} \neq 0$) durumun sağlanması için $c = 0$ olmalıdır. Bilinen çözümlerle uyuşmak için $a = -2M, b = e^2$ olarak alabiliriz. Bu durumda elimizde olan metrik Reissner–Nordström metriğidir [59]. Bu metrik yüklü bir karadeliğin etrafındaki uzay-zamanı tarif eder:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (4.40)$$

- Skaler eğriliğin sıfır olmadığı ($R_{\mu\nu} = 3\lambda g_{\mu\nu}$ ve $R = 12\lambda$) [60] durumunun sağlanması için $b = 0$ olmalıdır. Yine bilinen çözümlerle uyuşmak için $a = -2M$ ve $c = -\frac{1}{3}\lambda$ olarak yazılabilir. Bu durumda elimizde olan metrik Schwarzschild-de Sitter metriğidir. λ 'nın aldığı değere göre, asimptotik olarak de Sitter ($\lambda > 0$) veya anti-de Sitter ($\lambda < 0$) uzay-zamanlarını tarif eder:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\lambda r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\lambda r^2\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (4.41)$$

R^2 kuramının entropi hesabını bir önceki bölümde gösterdiğimiz Noether yükü yöntemi üzerinden hesaplamaya çalışacağız. Elimizde olan Lagrangian 4-formu

$$\mathbf{L} = \frac{1}{16\pi} \epsilon R^2 \quad (4.42)$$

olarak yazılır. Bu ifadenin varyasyonunu alırsak (3.14) denkleminde göre elimizde olan ifade şöyledir:

$$\delta \mathbf{L} = \frac{1}{16\pi} \epsilon (2R(-R_{\mu\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R) - 2(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu)R) \delta g_{\mu\nu} + d\Theta. \quad (4.43)$$

İlk terimin hareket denklemlerine karşılık geldiğini biliyoruz. Θ^σ ise yüzey terimidir. R^2 terimi için hareket denklemlerini hesaplarken yüzey terimi olarak yazılabilecek ifadeleri göstermiştik:

$$\nabla_\sigma \Theta^\sigma = \frac{1}{8\pi} \nabla_\sigma [R(\nabla^\sigma g_{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - \nabla_\lambda g_{\mu\nu} \delta g^{\sigma\lambda}) - (\nabla^\sigma R) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + (\nabla_\lambda R) \delta g^{\lambda\sigma}]. \quad (4.44)$$

Bu ifadeden yüzey terimini

$$\Theta^\sigma = \frac{1}{8\pi} [Rg_{\mu\nu}(\nabla^\sigma \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda \delta g^{\sigma\lambda}) - (\nabla^\sigma R) g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + (\nabla_\lambda R) \delta g^{\lambda\sigma}] \quad (4.45)$$

olarak elde ederiz. $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}$ eşitliğini ve metrik tensörün kovaryant türevinin sıfır olduğunu kullanırsak (4.45) denklemini

$$\begin{aligned} \Theta^\sigma &= \frac{1}{8\pi} [-2Rg_{\mu\nu} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} (\nabla^\sigma \delta_{\alpha\beta}) + 2Rg^{\sigma\rho} g^{\lambda\kappa} (\nabla_\lambda \delta g_{\rho\kappa}) \\ &\quad + g_{\mu\nu} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} (\nabla^\sigma R) \delta g_{\alpha\beta} - g^{\sigma\rho} g^{\lambda\kappa} (\nabla_\lambda R) \delta g_{\rho\kappa}] \end{aligned} \quad (4.46)$$

olarak yazabiliriz. İndisleri düzenleyip ve $g^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} = \delta_\lambda^\nu$ eşitliğini kullandığımızda

$$\Theta^\sigma = \frac{1}{8\pi} g^{\sigma\rho} g^{\lambda\kappa} (R \nabla_\kappa \delta g_{\lambda\rho} - R \nabla_\rho \delta g_{\lambda\kappa} - \nabla_\kappa R \delta g_{\lambda\rho} + \nabla_\rho R \delta g_{\lambda\kappa}) \quad (4.47)$$

olarak elde edilir. Şimdi bu ifadeyi formlar cinsinden yazıp Noether yükünü hesaplamaya çalışalım. 3-form Θ^3 'ü,

$$\Theta_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\sigma\mu\nu\alpha} g^{\sigma\rho} g^{\lambda\kappa} (R \nabla_\kappa \delta g_{\lambda\rho} - R \nabla_\rho \delta g_{\lambda\kappa} - \delta g_{\lambda\rho} \nabla_\kappa R + \delta g_{\lambda\kappa} \nabla_\rho R) \quad (4.48)$$

olarak yazabiliriz. Daha sonra (3.18) ifadesini kullanarak, Noether akımını

$$J_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\sigma\mu\nu\alpha} [g^{\sigma\rho} g^{\lambda\kappa} (R \nabla_\kappa \delta g_{\lambda\rho} - R \nabla_\rho \delta g_{\lambda\kappa} - \delta g_{\lambda\rho} \nabla_\kappa R + \delta g_{\lambda\kappa} \nabla_\rho R) - \xi^\sigma R^2] \quad (4.49)$$

olarak yazabiliriz. $\xi^\sigma R^2$ terimini 3. bölümde yaptığımızı benzer bir hespla hareket denklemlerini kullanarak daha düzgün yazmak mümkündür:

$$\xi^\mu H_{\mu\nu} = 2R\xi^\mu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\xi^\mu g_{\mu\nu} R^2 - 2g_{\mu\nu}\xi^\mu \square R + 2\xi^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu R \quad (4.50)$$

$$\xi^\mu H_\mu^\alpha = 2R\xi^\mu R_\mu^\alpha - \frac{1}{2}\xi^\alpha R^2 - 2\xi^\alpha \square R + 2\xi^\mu \nabla_\mu \nabla^\alpha R \quad (4.51)$$

$$\xi^\sigma R^2 = 4\xi^\beta R_\beta^\sigma - 2\xi^\beta H_\beta^\sigma - 4\xi^\sigma \square R + 2\xi^\beta \nabla_\beta \nabla^\sigma R. \quad (4.52)$$

Bu ifadeyi (4.49) denkleminde yerine yazarsak ve $\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$ eşitliğini kullanırsak akım ifadesi

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu\alpha} = & \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\sigma\mu\nu\alpha} [R \nabla_\kappa (\nabla^\kappa \xi^\sigma + \nabla^\sigma \xi^\kappa) - 2R \nabla^\sigma \nabla_\lambda \xi^\lambda - (\nabla^\kappa \xi^\sigma + \nabla^\sigma \xi^\kappa) \nabla_\kappa R \\ & + 2\nabla_\lambda \xi^\lambda \nabla^\sigma R + 4\xi^\lambda R_\lambda^\sigma - 2\xi^\lambda H_\lambda^\sigma - 4\xi^\sigma \square R + 2\xi^\lambda \nabla_\lambda \nabla^\sigma R \end{aligned} \quad (4.53)$$

olarak elde edilir. Hareket denklemlerinin sağlandığını ve $\nabla_\mu \nabla_\nu \xi^\alpha = R^\alpha_{\nu\mu\lambda} \xi^\lambda$ olduğunu hesaba katarsak Noether akımını

$$J_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{4\pi} \epsilon_{\sigma\mu\nu\alpha} [\nabla_\kappa (R \nabla^{[\kappa} \xi^{\sigma]}) + 2\nabla_\kappa (\xi^{[\kappa} \nabla^{\sigma]} R)] \quad (4.54)$$

şeklinde elde ederiz. Daha sonra Noether yükünü

$$Q_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (R \nabla^\alpha \xi^\beta + 2\xi^\alpha \nabla^\beta R) \quad (4.55)$$

olarak yazabiliriz. Entropi ifadesini bulmak için bu ifadeyi Killing ufku H, üzerinden integre edelim. Killing vektörünün ufuk üzerinde sıfır olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla ikinci terim sıfır olur. Normalize edilmiş Killing vektörü için $\nabla_\mu \xi_\nu = \epsilon_{\mu\nu}$ bağıntısını kullanarak $Q_{\mu\nu}$ ifadesinin integralini alırsak entropi

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_H Q_{\mu\nu} d\Sigma^{\mu\nu} \\ &= \frac{R}{4} \int_H \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta} d\Sigma^{\mu\nu} \\ &= \frac{R}{4} \int_H 2h_{\mu\nu} d\Sigma^{\mu\nu} \\ S &= \frac{A_H R}{2} \end{aligned} \quad (4.56)$$

olarak bulunur¹. R^2 kuramında statik durum için karadelik entropisi yüzey alanının yarısı ve eğrilik skaleriyle orantılıdır [11].

¹İkinci satırda $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ tensörünün binormal tensörle kontraksiyonun $2h_{\mu\nu}$ olduğu kullanılmıştır [51]. $h_{\mu\nu}$ yüzeyin metriğidir.

4.3 Konformal Genelçekim Kuramı

Konformal genelçekim kuramı; eylemde eğrilik skaleri kullanmak yerine Weyl tensörünün karesi kullanılarak yapılan genelçekim modelidir. Konformal ismi Weyl tensörünün konformal (ölçek) dönüşümler altında değişmez olmasından gelir. Metrik,

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu} = \widetilde{g}_{\mu\nu} \quad (4.57)$$

şeklinde dönüştüğünde Weyl tensörü değişmez kalır:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = \widetilde{C}_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (4.58)$$

Konformal genelçekim kuramının eylemi,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \beta C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (4.59)$$

şeklinindedir. Gauss-Bonnet teriminin 4-boyutta hareket denklemlerine katkı getirmediğini hesaba katarsak bu eylem

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} 2\beta (R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2) \quad (4.60)$$

olarak yazılabilir [61]. Dolayısıyla (2.9) eyleminde $\alpha = -\frac{1}{3}\beta$ olarak alırsak ve Einstein-Hilbert terimini hesaba katmazsak elimizde konformal genelçekim kuramı kalır. Bu durum için hareket denklemlerimiz, ²

$$W_\mu^\nu = K_\mu^\nu - \frac{1}{3} H_\mu^\nu = 8\pi T_\mu^\nu \quad (4.61)$$

olarak yazılabilir.

Bir önceki bölümde $H_{\mu\nu}$ denklemlerini elde etmiştik. Öncelikle karışık (mixed) indeks durumu için H_μ^ν tensörünün bileşenlerini (4.3) metriği için yazalım:

$$H_0^0 = 2AR'' + 2A\left(\frac{A'}{2A} + \frac{2}{r}\right)R' + 2R\left(\frac{R}{4} + \frac{A'}{r} + \frac{A-1}{r^2}\right), \quad (4.62)$$

$$H_1^1 = 2A\left(\frac{A'}{2A} + \frac{2}{r}\right)R' + 2R\left(\frac{R}{4} + \frac{A'}{r} + \frac{A-1}{r^2}\right), \quad (4.63)$$

$$H_2^2 = H_3^3 = 2AR'' + 2A\left(\frac{A'}{A} + \frac{1}{r}\right)R' - 2R\left(\frac{R}{4} + \frac{A'}{r} + \frac{A-1}{r^2}\right). \quad (4.64)$$

²Bu bölümde hareket denklemlerini hesap kolaylığı açısından birinci indis kovaryant ikinci indis kontravaryant formda olacak şekilde hesaplayacağız.

Karışık (mixed) indeks durumunda K_μ^ν tensörünü

$$K_\mu^\nu = \square(R_\mu^\nu + \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R) - 2\nabla_\lambda \nabla_\mu R^{\lambda\nu} + 2R_\mu^\lambda R_\lambda^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R_\alpha^\beta R_\alpha^\beta \quad (4.65)$$

şeklinde yazabiliriz. Alan denklemlerinin bileşenlerini bulmak için öncelikle K_μ^ν içindeki bileşenleri hesaplamalıyız. (4.3) metriği için

Ricci tensörü bileşenleri :

$$\begin{aligned} R_0^0 = R_1^1 &= -\left(\frac{A''}{2} + \frac{A'}{r}\right) = \frac{R}{2} + \frac{A'}{r} + \frac{A-1}{r^2} \\ R_2^2 = R_3^3 &= -\left(\frac{A'}{r} + \frac{A-1}{r^2}\right). \end{aligned} \quad (4.66)$$

d'Alambert operatörünü Ricci tensörü üzerine uygularsak,

$$\begin{aligned} \square R_\mu^\nu &= g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta R_\mu^\nu - g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \partial_\sigma R_\mu^\nu \\ &+ 2g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\rho R_\rho^\nu - 2g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\rho}^\nu \Gamma_{\beta\mu}^\sigma R_\sigma^\rho \end{aligned} \quad (4.67)$$

elde ederiz. Bileşenler cinsinden hesaplırsak,

$$\begin{aligned} \square R_0^0 = \square R_1^1 &= A(R_0^0)'' + (R_0^0)'(A' + \frac{2A}{r}) \\ \square R_2^2 = \square R_3^3 &= A(R_2^2)'' + (R_2^2)'(A' + \frac{2A}{r}) \end{aligned} \quad (4.68)$$

elde edilir. Ricci tensörünün iki defa kovaryant türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda \nabla_\mu R^{\lambda\nu} &= \partial_\lambda \partial_\mu R^{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\lambda\rho} \partial_\mu R^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\rho} \partial_\mu R^{\lambda\rho} + (\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\rho}) R^{\rho\nu} \\ &+ \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} \Gamma^\alpha_{\mu\rho} R^{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\alpha} \Gamma^\alpha_{\mu\rho} R^{\lambda\nu} + (\partial_\lambda \Gamma^\nu_{\mu\rho}) R^{\rho\lambda} \\ &+ \Gamma^\nu_{\mu\rho} \partial_\lambda R^{\rho\lambda} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \Gamma^\nu_{\alpha\rho} R^{\lambda\rho} + \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha} \Gamma^\nu_{\mu\rho} R^{\alpha\rho} \end{aligned} \quad (4.69)$$

ifadesi bulunur. Bu ifadeyi bileşenler cinsinden yazarsak,

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda \nabla_0 R^{\lambda 0} &= \frac{A'}{2} (R_0^0)' \\ \nabla_\lambda \nabla_1 R^{\lambda 1} &= A(R_1^1)'' + (R_1^1)' \left(\frac{A'}{2} + \frac{2A}{r}\right) - \frac{2A}{r} (R_2^2)' + \frac{2A}{r^2} (R_2^2 - R_1^1) \\ \nabla_\lambda \nabla_2 R^{\lambda 2} &= \frac{A}{r} (R_1^1)' + (R_1^1 - R_2^2) \left(\frac{A'}{r} + \frac{2A}{r^2}\right) \\ \nabla_\lambda \nabla_3 R^{\lambda 3} &= \frac{A}{r} (R_1^1)' + (R_1^1 - R_3^3) \left(\frac{A'}{r} + \frac{2A}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (4.70)$$

buluruz. Bu ifadeleri kullanarak K_μ^ν tensörünün bileşenlerini hesaplayabiliriz.

“00” bileşeni:

$$\begin{aligned} K_0^0 &= A \left[(R_0^0)'' + \frac{1}{2} R'' \right] + \left(A' + \frac{2A}{r} \right) \left(\frac{1}{2} R' + (R_0^0)' \right) \\ &- A' (R_0^0)' + 2(R_0^0)^2 - \frac{1}{2} \mathcal{P}^2. \end{aligned} \quad (4.71)$$

“11” bileşeni:

$$\begin{aligned} K_1^1 &= A[(R_1^1)'' + \frac{1}{2}R''] + (A' + \frac{2A}{r})(\frac{1}{2}R' + (R_1^1)') + A'(R_1^1)' \\ &+ 2(R_1^1)^2 + \frac{4A}{r}(R_2^2)' - \frac{2A'}{r}(R_0^0 - R_2^2) - \frac{1}{2}\mathcal{P}^2. \end{aligned} \quad (4.72)$$

“22(= 33)” bileşeni:

$$\begin{aligned} K_2^2 &= A[(R_2^2)'' + \frac{1}{2}R''] + (A' + \frac{2A}{r})(\frac{1}{2}R' + (R_2^2)') - \frac{2A}{r}(R_1^1)' \\ &+ 2(R_2^2)^2 + \frac{2A}{r^2}(R_2^2 - R_1^1) - \frac{1}{2}\mathcal{P}^2. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Burada $\mathcal{P}^2 = (R_\mu^\mu)^2 = (R_0^0)^2 + (R_1^1)^2 + (R_2^2)^2 + (R_3^3)^2$. Elde ettiğimiz bu denklemleri kullanarak W_μ^ν denkleminin bileşenlerini yazabiliriz.

Alan denkleminin W_0^0 bileşeni:

$$\begin{aligned} W_0^0 &= A(R_0^0)'' - \frac{1}{6}(AR'' - A'R' + \frac{2A}{r}R') + \frac{2A}{r}(R_0^0)' + 2(R_0^0)^2 \\ &- \frac{1}{6}R^2 - \frac{2}{3}R(\frac{A'}{r} + \frac{A-1}{r^2}) - \frac{1}{2}\mathcal{P}^2. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Alan denkleminin W_1^1 bileşeni:

$$\begin{aligned} W_1^1 &= A(R_1^1)'' - \frac{A}{2}R'' + \frac{1}{6}(A'R' - \frac{2A}{r}R') - \frac{2A}{r}(R_1^1)' + \frac{4A}{r}(R_2^2)' + 2(R_1^1)^2 \\ &- \frac{1}{6}R^2 - \frac{2}{3}R(\frac{A'}{r} + \frac{A-1}{r^2}) - \frac{1}{2}\mathcal{P}^2. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Alan denkleminin $W_2^2(= W_3^3)$ bileşeni:

$$\begin{aligned} W_2^2 &= A(R_2^2)'' - \frac{1}{6}(AR'' + A'R' - \frac{2A}{r}R') - \frac{2A}{r}((R_1^1)' - (R_2^2)') \\ &- \frac{2}{r}(A' + \frac{A}{r})(R_1^1 - R_2^2) + A'(R_2^2)' + 2(R_2^2)^2 + \frac{1}{6}R^2 \\ &+ \frac{2}{3}R(\frac{A'}{r} + \frac{A-1}{r^2}) - \frac{1}{2}\mathcal{P}^2. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Alan denklemlerinin W_0^0 ve W_2^2 bileşenleri dördüncü mertebeden türevler içerirken, W_1^1 bileşeni üçüncü mertebeden türev içerir. Çözümü bu bileşen üzerinden elde etmeye çalışacağız. Bir önceki bölümde yaptığımız gibi $\Omega(r) = A' + \frac{(A-1)}{r}$ şeklinde bir dönüşüm yaparsak, Ricci tensörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} R_0^0 = R_1^1 &= -\frac{1}{2}(\Omega' + \frac{\Omega}{r}) \\ R_2^2 = R_3^3 &= -\frac{\Omega}{r}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

Ricci tensörünün bileşenlerinin türevleri

$$\begin{aligned}
(R_0^0)' &= (R_1^1)' = -\frac{1}{2}\left(\Omega' + \frac{\Omega'}{r} - \frac{\Omega}{r^2}\right) \\
(R_2^2)' &= (R_3^3)' = -\left(\frac{\Omega'}{r} - \frac{\Omega}{r^2}\right) \\
(R_0^0)'' &= (R_1^1)'' = -\frac{1}{2}\left(\Omega''' + \frac{\Omega''}{r} - \frac{2\Omega'}{r^2} + \frac{2\Omega}{r^3}\right) \\
(R_2^2)'' &= (R_3^3)'' = -\left(\frac{\Omega''}{r} - \frac{2\Omega'}{r^2} + \frac{2\Omega}{r^3}\right),
\end{aligned} \tag{4.78}$$

eğrilik skaleri ve türevleri

$$\begin{aligned}
R &= -\left[\Omega' + \frac{3}{r}\Omega\right] \\
R' &= -\left[\Omega'' + \frac{3}{r}\Omega' - \frac{3}{r^2}\Omega\right] \\
R'' &= -\left[\Omega''' + \frac{3}{r}\Omega'' - \frac{6}{r^2}\Omega' + \frac{6}{r^3}\Omega\right],
\end{aligned} \tag{4.79}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeleri kullanarak W_1^1 denklemini yeniden yazarsak

$$W_1^1 = \frac{7A}{3r}\Omega'' - \frac{4A}{r^2}\Omega' + \frac{4A}{r^3}\Omega - \frac{A'}{2}\left(\frac{\Omega''}{3} + \frac{\Omega'}{r} - \frac{\Omega}{r^2}\right) + \frac{1}{12}(\Omega')^2 - \frac{1}{4r^2}(\Omega)^2 + \frac{1}{6r}\Omega\Omega' \tag{4.80}$$

ifadesini elde ederiz. Amacımız boşluk durumundaki ($T_\mu^\nu = 0$) çözümleri incelemek, bu durumda $W_\mu^\nu = 0$ olur. $A(r) = 1 + \frac{1}{r}a + cr^2$ çözümünü önerirsek $\Omega = 3cr$, $\Omega' = 3c$ ve $\Omega'' = 0$ şeklinde elde edilir. Bu ifadeleri $W_1^1 = 0$ denkleminde yerine yazarsak

$$W_1^1 = -\frac{4}{r^2}A3c + \frac{4}{r^3}A3cr - \frac{A}{2}\left(\frac{3c}{r} - \frac{3c}{r}\right) + \frac{3}{4}c^2 - \frac{9}{4}c^2 + \frac{3}{2}c^2 = 0 \tag{4.81}$$

ifadesi sağlanır. a ve c sabitlerini sırasıyla $-2M$ ve $-\frac{1}{3}\lambda$ aldığımızda konformal genelçekim kuramı için boşluk çözümünü,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\lambda r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\lambda r^2\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \tag{4.82}$$

olarak elde ederiz [62]. Bu çözüm Schwarzschild-de Sitter çözümdür. Metriğin tekil noktalarının olay ufku olarak adlandırıldığını daha önce söylemiştik. Bu çözüm için biri iç (r_-) diğeri dış (r_+) olmak üzere iki farklı ufuk vardır. Dış olay ufkunu metriğin g_{00} bileşeninin sıfır olma şartını kullanarak bulabiliriz.

$$M = \frac{1}{6}r_+(3 - \lambda r_+^2) \tag{4.83}$$

Metrik fonksiyonları zamandan bağımsız olduğundan Killing vektörünü $\xi^\mu = \delta_0^\mu = (1, 0, 0, 0)$ olarak yazabiliriz. Kovaryant ifadesi ise $\xi_\mu = \left(-\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\lambda r^2\right), 0, 0, 0\right)$

olarak yazılabilir. Bulduğumuz M değeri için Killing vektörünün olay ufku üzerinde sıfır olduğu açıktır.

Konformal genelçekim kuramının entropi hesabını (4.11) ifadesi üzerinden yapacağız.

Kuramın Lagrangian'ı

$$L = \frac{\beta}{8\pi} \left(-\frac{1}{3} R^2 + R_{\sigma\rho} R^{\sigma\rho} \right) \quad (4.84)$$

şeklindedir. Bu durum için entropi formülü

$$\begin{aligned} S &= -2\pi \int_H \frac{\delta L}{\delta R_{\mu\nu\alpha\beta}} \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta} \sqrt{h} d^2\Omega \\ &= -\frac{\beta}{4} \int_H \frac{\partial}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}} \left(-\frac{1}{3} R^2 + R_{\sigma\rho} R^{\sigma\rho} \right) \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta} \sqrt{h} d^2\Omega \end{aligned} \quad (4.85)$$

şeklinde yazılabilir. İntegrali almadan önce R^2 ve $R_{\sigma\rho} R^{\sigma\rho}$ ifadelerinin Riemann tensörüne göre türevlerini hesaplamalıyız:

$$\frac{\partial R^2}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}} = R(g^{\mu[\alpha} g^{\nu]\beta}), \quad (4.86)$$

$$\frac{\partial R_{\sigma\rho} R^{\sigma\rho}}{\partial R_{\mu\nu\alpha\beta}} = 2(g^{\mu[\alpha} R^{\nu]\beta}). \quad (4.87)$$

İkinci ifadede $R_{\sigma\rho} R^{\sigma\rho} = g^{ab} g^{\sigma c} g^{\rho d} g^{fe} R_{a\sigma b\rho} R_{fced}$ eşitliği kullanılmıştır. Bulduğumuz ifadeleri yerine yazarsak,

$$S = -\frac{\beta}{4} \int_H \left(-\frac{1}{3} R g^{\mu[\alpha} g^{\nu]\beta} + 2g^{\mu[\alpha} R^{\nu]\beta} \right) \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta} \sqrt{h} d^2\Omega \quad (4.88)$$

elde ederiz. Schwarzschild-de Sitter çözümü için yüzey gravite terimini ve bi-normal tensörün bileşenlerini (4.16) denklemini kullanarak hesaplayabiliriz.

Yüzey gravite terimi:

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= -\frac{1}{2} (\nabla^0 \xi^1 \nabla_0 \xi_1 + \nabla^1 \xi^0 \nabla_1 \xi_0) |_{r=r_+} \\ \kappa^2 &= \left(\frac{1 - \lambda r_+^2}{2r_+} \right)^2 \Rightarrow \kappa = \frac{1 - \lambda r_+^2}{2r_+}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Sıfır olmayan bi-normal tensör bileşenleri ise $\epsilon_{01} = -\epsilon_{10} = 1$ olarak elde edilir. Elde ettiklerimizi (4.88) ifadesinde yerine yazarsak

$$S = -\frac{\beta}{4} \int_H \left(-\frac{2}{3} R g^{00} g^{11} + 4g^{00} R^{11} \right) (\epsilon_{01})^2 \sqrt{h} d^2\Omega \quad (4.90)$$

olarak bulunur. İntegral içindeki metrik bileşenleri, eğrilik skaleri ve Ricci tensörü bileşeni sırasıyla,

$$g^{00} = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\lambda r^2\right)^{-1} \quad , \quad g^{11} = \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3}\lambda r^2\right)$$

$$R = 4\lambda \quad , \quad R^{11} = -\frac{\lambda}{3r}(\lambda r^3 + 6M - 3r) \quad (4.91)$$

şeklindedir. Dolayısıyla entropi ifademiz

$$S = -\frac{\beta}{4} \int_H \left(\frac{2}{3}4\lambda - 4\lambda\right)(-1)^2 \sqrt{h} d^2\Omega$$

$$= -\frac{\beta}{3} \lambda A_H \quad (4.92)$$

olarak elde edilir. Schwarzschild çözümünde olduğu gibi entropi olay ufkunun alanıyla orantılıdır.

5 SONUÇ

Bu tez çalışmasında farklı genelçekim modelleri için statik, dinamik olmayan karadelik çözümleri incelenmiştir. R^2 kuramında elde edilen çözümler eğrilik skalerinin aldığı değere göre “Reissner–Nordström” veya “Schwarzschild-de Sitter” çözümlerine karşılık gelir. Konformal ve R^2 genelçekim kuramlarının çözümlerinde, kozmolojik sabit gibi davranan bir terim gelmektedir. Dolayısıyla bu kuramlar mevcut gözlemleri açıklamak için kozmolojik sabite ihtiyaç duyulan kuramların yerine kullanılabilir.

Bu çalışmada ayrıca incelenen karadelik çözümlerinin entropi hesapları yapılmıştır. Hesaplar, Wald formalizmi kullanılarak, yüzey gravite teriminin sıfır olmadığı, $\kappa \neq 0$, statik karadelik çözümleri için yapılmıştır. Bu formalizmde entropi S , Killing vektörü yönünde hesaplanan Noether yüküyle orantılıdır. Wald formalizmi kullanılarak genel görelilik çerçevesinde entropi hesaplanmış, sonucun bilinen değerle, $S = \frac{A_H}{4}$, uyuştuğu görülmüştür.

Farklı genelçekim kuramları aynı karadelik çözümü için farklı entropi sonuçları vermektedir. Dolayısıyla entropi ifadesinin çözüme değil kullandığımız kurama bağlı olduğunu söyleyebiliriz. R^2 genelçekim kuramında sonuç $S = \frac{A_H}{2}R$ olarak bulunmuştur. Entropi ifadesi sadece yüzey alanıyla orantılı değil aynı zamanda eğrilik skalerine de bağlıdır. Eğrilik skalerinin sıfır olduğu, $R = 0$, çözümler için entropi değeri sıfır olur. Entropinin sıfır olması, karadelğin mümkün olan en kararlı durumda olması olarak düşünülebilir. Ayrıca kuram eğrilik skalerinin sıfır olmadığı durumda, $R \neq 0$, R 'nin işaretine bağlı olarak negatif entropi durumuna da izin vermektedir. Pek fiziksel olmayan bu sonuç genelleştirilmiş ikinci yasa tarafından kurtarılabilir. Genelleştirilmiş ikinci yasa bize şunu söyler; “Karadelik entropisi ve evrenin entropisinin toplam değişimi daima sıfırdan büyüktür:”

$$\delta(S_{bh} + S_u) \geq 0. \quad (5.1)$$

Konformal genelçekim kuramında entropi yine yüzey alanıyla orantılı, $S = \frac{\beta}{3}(-\lambda)A_H$, olarak elde edilmiştir. Karadelik çözümünde gelen ve kozmolojik sabit gibi davranan

λ parametresinin işaretine bağı olarak entropi negatif veya pozitif olabilir. Entropinin pozitif tanımlı olabilmesi için λ parametresinin negatif seçilmesi gerekmektedir. Bu durumda elimizde Schwarzschild-anti de Sitter uzay zamanı vardır.

Farklı topolojiler için karadelik çözümleri ve dinamik karadelikler için entropi hesabı açık bir problem olarak durmaktadır ve gelecek çalışmalara bırakılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] K. Schwarzschild (translation and foreword by S. Antoci and A. Loinger), “On the gravitational field of a mass point according to Einstein’s theory”, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math.Phys.) 189-196 (1916).
- [2] G. Nordström, “On the Energy of the Gravitation field in Einstein’s Theory”, Proceedings Series B Physical Sciences 20:1238-1245 (1918).
- [3] R. P. Kerr, “Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics”, Phys. Rev. Lett v11, 237 (1963).
- [4] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash ve R. Torrence, “Metric of a Rotating, Charged Mass”, J. Math. Phys. 6, 918 (1965).
- [5] C. W. Misner, K. S. Thorne ve J. A. Wheeler, “Gravitation”, W. H. Freeman and Company (1973).
- [6] R. Penrose ve R. M. Floyd, “Extraction of Rotational Energy from a Black Hole”, Nature Physical Science 229, 177 (1971).
- [7] P. K. Townsend, “Black Holes Lecture Notes”; [arXiv:9707012v1 [gr-qc]].
- [8] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes”, Commun. Math. Phys. 43 199-220 (1975).
- [9] A. Dabholkar ve S. Nampuri, “Lectures on Quantum Black Holes“, Lect. Notes Phys. 851(2012)165-232; [arXiv:1208.4814v1 [hep-th]].
- [10] R. M. Wald, “Black Hole Entropy is Noether Charge”, Phys. Rev. D48 3427-3431, (1993); [arXiv:9307038v1 [gr-qc]].
- [11] F. Briscese ve E. Elizalde, ”Black hole entropy in modified gravity models“, Phys. Rev. D77 044009 (2008); [arXiv:07080432 [hep-th]].

- [12] R. Arnowitt, S. Deser ve C. W. Misner, "The Dynamics of General Relativity", "Gravitation: an introduction to current research", Louis Witten ed. (Wiley 1962).
- [13] T. Jacobson, G. Kang ve R. C. Myers, "On Black Hole Entropy", *Phys. Rev. D* 49 6587-6598 (1994); [arXiv:9312023 [gr-qc]].
- [14] T. Jacobson, G. Kang ve R. C. Myers, "Black Hole Entropy in Higher Curvature Gravity", McGill/95-04; UMDGR-95-092; [arXiv:9502009 [gr-qc]].
- [15] K. Stelle, "Renormalization of higher-derivative quantum gravity", *Phys. Rev. D* 16 953-969 (1977).
- [16] K. Lanczos, "A remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four dimensions", *Ann. Math.* 39 842-850 (1938).
- [17] H. Weyl, "Gravitation und Elektrizität", *Sitzungsber. Preuss. Akad. d. Wiss. Teil.1* 465-480 (1918).
- [18] P. D. Mannheim ve D. Kazanas, "Newtonian limit of conformal gravity and the lack of necessity of the second order Poisson equation", *General Relativity and Gravitation*, Volume 26, Issue 4, pp 337-361 (1994).
- [19] H. Lü, A. Perkins, C. N. Pope ve K. S. Stelle, "Spherically Symmetric Solutions in Higher-Derivative Gravity"; [arXiv: 1508.00010 [hep-th]].
- [20] H.-J. Schmidt, "Fourth Order Gravity: Equations, History, and Applications to Cosmology", *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* 4:209-248 (2007); [arXiv: 0602017 [gr-qc]].
- [21] H. Lü, A. Perkins, C. N. Pope ve K. S. Stelle, "Black Holes in Higher-Derivative Gravity", *Phys. Rev. Lett.* 114, 171601 (2015); [arXiv: 1502.01028v2 [hep-th]].
- [22] S. Capozziello ve M. De Laurentis, "Extended Theories of Gravity", *Phys. Rep.* Vol. 509 (2011); [arXiv:1108.6266v2 [gr-qc]].
- [23] M. Borunda, B. Janssen ve M. Bastero-Gil, "Palatini versus metric formulation in higher-curvature gravity", arXiv:0804.4440v2 [hep-th].

- [24] S. Capozziello ve V. Faraoni, “Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics”, Springer, 2011.
- [25] S. W. Hawking ve G. F. R. Ellis, “The Large Scale Structure of Space-Time”, Cambridge University Press, 1973.
- [26] Ø. Grøn ve S. Hervik, “Einstein’s General Theory of Relativity”, Springer 2007.
- [27] C. Cherubini, D. Bini, S. Capozziello ve R. Ruffini, “Second Order Scalar Invariants of The Riemann Tensor: Applications to Black Hole Spacetime”, *Int. J. Mod. Phys. D* 11, 827 (2002).
- [28] S. Carroll, "Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity", Addison Wesley Press, 2003.
- [29] T. Padmanabhan, "Gravitation Foundations and Frontiers", Cambridge University Press, 2010.
- [30] J. D. Bekenstein, “Black Holes and Entropy”, *Phys. Rev. D* 7, 2333 (1973).
- [31] J. D. Bekenstein, “Do We Understand Black Hole Entropy?”; [arXiv: 9409015v2 [gr-qc]].
- [32] J. M. Bardeen, B. Carter ve S. W. Hawking, “The Four Laws of Black Hole Mechanics”, *Commun. Math. Phys.* 31, 161-170 (1973).
- [33] R. M. Wald, “The Thermodynamics of Black Holes”, *Living Rev. Rel.* 4:6 (2001); [arXiv:9912119 [gr-qc]].
- [34] J. Lee ve R. M. Wald, “Local Symmetries and Constraints”, *J. Math. Phys.* 31, 725 (1990).
- [35] V. Iyer ve R. M. Wald, “Some Properties of Noether Charge and a Proposal for Dynamical Black Hole Entropy”, *Phys. Rev. D* 50 846-864 (1994); [arXiv:9403028v1 [gr-qc]].
- [36] D. Brown, “Black Hole Entropy and the Hamiltonian Formulation of Diffeomorphism Invariant Theories”, *Phys. Rev. D* 52 7011-7026 (1995); [arXiv: 9506085 [gr-qc]].

- [37] R. M. Wald, "On identically closed forms locally constructed from a field", *J. Math. Phys.* 31, 2378 (1990).
- [38] V. Iyer ve R. M. Wald, "A comparison of Noether charge and Euclidean methods for Computing the Entropy of Stationary Black Holes", *Phys. Rev. D* 52 4430-4439 (1995); [arXiv:9503052v1 [gr-qc]].
- [39] R. M. Wald ve A. Zoupas, "A General Definition of "Conserved Quantities" in General Relativity and Other Theories of Gravity", *Phys. Rev. D* 61 084027 (2000); [arXiv:9911095 [gr-qc]].
- [40] D. V. Fursaev, "Energy, Hamiltonian, Noether Charge, and Black Holes", *Phys. Rev. D* 59 064020 (1999); [arXiv: 9809049 [hep-th]].
- [41] S. Gao ve R. M. Wald, "The "physical process" version of the first law and the generalized second law for charged and rotating black holes", *Phys. Rev. D* 64 084020 (2001); [arXiv: 0106071v1 [gr-qc]].
- [42] S. Mukohyama, "On the Noether charge form of the first law of black hole mechanics", *Phys. Rev. D* 59 064009 (1999); [arXiv: 9809050 [gr-qc]].
- [43] R. M. Wald, "The First Law of Black Hole Mechanics", *Directions in General Relativity*, vol.1, Cambridge University Press (1993); [arXiv:9305022 [gr-qc]].
- [44] R. M. Wald, "General Relativity", University of Chicago Press, 1984.
- [45] M. C. Ashworth ve S. A. Hayward, "Boundary Terms and Noether Current of Spherical Black Holes", *Phys. Rev. D* 60 084004 (1999); [arXiv:9811076v1 [gr-qc]].
- [46] R. Brustein, D. Gorbonos, M. Hadad ve A. J. M. Medved, "Evaluating the Wald Entropy from two-derivative terms in quadratic actions", *Phys. Rev. D* 84, 064011 (2011); [arXiv: 1106.4394v1 [hep-th]].
- [47] T. Jacobson, G. Kang ve R. C. Myers, "Increase of Black Hole Entropy in Higher Curvature Gravity", *Phys. Rev. D* 52 3518-3528 (1995); [arXiv:9503020 [gr-qc]].
- [48] J. B. Griffiths ve J. Podolsky, "Exact Space-Times in Einstein's General Relativity", Cambridge Press, 2009.

- [49] D. N. Vollick, “Noether Charge and Black Hole Entropy in Modified Theories of Gravity”, *Phys. Rev. D* 76 124001 (2007); [arXiv:07101859v2[gr-qc]].
- [50] P. Fromholz, E. Poisson ve C. M. Will, “The Schwarzschild metric:It’s the coordinates, stupid! “, *Am. J. Phys.* 82, 295 (2014); [arXiv:1308.0394v1 [gr-qc]].
- [51] E. Poisson, "A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics", Cambridge Press, 2004.
- [52] N. Bodendorfer ve Y. Neiman, “The Wald entropy formula and loop quantum gravity“, *Phys. Rev. D* 90, 084054 (2014); [arXiv:1304.3025v2 [gr-qc]].
- [53] R. Brustein, D. Gorbonos ve M. Hadad, ”Wald’s entropy is equal to a quarter of the horizon area in units of the effective gravitational coupling“, *Phys. Rev. D* 79:044025 (2009); [arXiv: 0712.3206v3 [hep-th]].
- [54] B. R. Majhi, ”Noether current of the surface term of Einstein-Hilbert action, Virasoro algebra and entropy“; [arXiv:1210.6736v2 [gr-qc]].
- [55] T. Mohaupt, “Black Hole Entropy, Special Geometry and Strings”, *Fortsch. Phys.* 49 (2001); [arXiv:0007195 [hep-th]].
- [56] A. Kehagias, C. Kounnas, D. Lust ve A. Riotto, “Black Hole Solutions in R^2 Gravity“, LMU-ASC 06/15, MPP-2015-21, CERN-PH-TH-2015-026, LPTENS-15/01; [arXiv:1502.04192v2 [hep-th]].
- [57] A. de la Cruz-Dombriz, A. Dobado ve A. L. Maroto ”Black holes in modified gravity theories“; [arXiv: 1001.2454v1 [gr-qc]].
- [58] A. de la Cruz-Dombriz ve D. Saez-Gomez, ”Black holes, cosmological solutions, future singularities, and their thermodynamical properties in modified gravity theories“; [arXiv: 1207.2663v2 [gr-qc]].
- [59] S. Deser ve B. Tekin, ”Shortcuts to high symmetry solutions in gravitational theories“, *Class. Quant. Grav.* 20 4877-4884 (2003); [arXiv: 0306114v1 [gr-qc]].
- [60] T. Multamäki ve I. Vilja, “Spherically symmetric solutions of modified field equations in $f(R)$ theories of gravity“, *Phys.Rev. D* 74 064022 (2006); [arXiv:0606373v2 [astro-ph]].

- [61] P. D. Mannheim ve D. Kazanas, "Exact Vacuum Solution to Conformal Weyl Gravity and Galactic Rotation Curves", *Ap. J.* 342:635-638 (1989).
- [62] H. Lü, Y. Pang, C. N. Pope ve J. F. Vázquez-Portiz, "AdS and Lifshitz Black Holes in Conformal and Einstein-Weyl Gravities", *Phys. Rev. D* 86 044011 (2012); [arXiv:1204.1062v2 [hep-th]].

A Ricci Tensörünün Varyasyonu

Riemann tensörü:

$$R^{\lambda}_{\mu\alpha\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} \quad (\text{A.1})$$

şeklindedir. Birinci ve üçüncü indisin kontraksiyonunu alırsak $R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = R_{\mu\nu}$ Ricci tensörünü elde ederiz.

Ricci tensörü:

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \quad (\text{A.2})$$

şeklindedir. Bu ifadenin metrik tensöre göre varyasyonu, Christoffel sembollerinin metriğe göre varyasyonu üzerinden hesaplanabilir.

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \delta\Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \quad (\text{A.3})$$

Amacımız Ricci tensörünün varyasyonunu kovaryant türevler cinsinden yazmak. Bunun için Christoffel sembolünün metriğe göre varyasyonunun kovaryant olarak dönüşüğünü göstermeliyiz. Christoffel sembolünün varyasyonu:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \delta(g^{\lambda\delta}\Gamma_{\delta\mu\nu}) \\ &= \delta g^{\lambda\delta}\Gamma_{\delta\mu\nu} + g^{\lambda\delta}\delta\Gamma_{\delta\mu\nu}, \quad \delta g^{\lambda\delta} = -g^{\rho\lambda}g^{\sigma\delta}\delta g_{\rho\sigma} \\ &= -g^{\rho\lambda}g^{\sigma\delta}\delta g_{\rho\sigma}\Gamma_{\delta\mu\nu} + g^{\lambda\rho}\delta\Gamma_{\rho\mu\nu} \\ &= -g^{\rho\lambda}\delta g_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + g^{\lambda\rho}\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\delta g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}\delta g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}\delta g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}\delta g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}\delta g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}\delta g_{\mu\nu} - 2\delta g_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

halini alır. Parantez içini $\delta g_{\mu\nu}$ 'nin kovaryant türevleri cinsinden yazabiliriz:

$$\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\rho} = \partial_{\mu}\delta g_{\nu\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta g_{\sigma\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\delta g_{\sigma\nu}, \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla_{\nu}\delta g_{\nu\rho} = \partial_{\nu}\delta g_{\rho\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu}\delta g_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta g_{\sigma\rho}, \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla_{\rho}\delta g_{\nu\rho} = \partial_{\rho}\delta g_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}\delta g_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho}\delta g_{\sigma\mu}. \quad (\text{A.7})$$

(A.5) ve (A.6) toplanıp (A.7)'in çıkarılması bize parantez içini verir. Bu durumda Christoffel sembolünün varyasyonunu,

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\nabla_\mu\delta g_{\nu\rho} + \nabla_\nu\delta g_{\rho\mu} - \nabla_\rho\delta g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.8})$$

olarak yazabiliriz. $\delta g_{\mu\nu}$ kovaryant şekilde dönüştüğünden, onun kovaryant türevleri üzerinden yazdığımız $\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ ifadesi de kovaryant olarak dönüşür. Dolayısıyla $\delta R_{\mu\nu}$ 'yi kovaryant türevlerin farkı cinsinden yazabiliriz:

$$\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) = \partial_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (\text{A.9})$$

İndisleri yeniden tanımlarsak,

$$\nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) = \partial_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\delta\Gamma^\lambda_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \quad (\text{A.10})$$

elde ederiz. Bu iki kovaryant türev ifadesinin farkı alınırsa (A.3) eşitliği elde edilir.

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \quad (\text{A.11})$$

Bu ifade Palatini eşitliği olarak adlandırılır.

B Tensör Eşitlikleri

Bir vektörün kovaryant türevi

$$\nabla_{\mu} A^{\mu} = \partial_{\mu} A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\nu} A^{\nu} \quad (\text{B.1})$$

şeklindedir. Bu ifadeyi soldan $\sqrt{-g}$ ile çarparsak

$$\sqrt{-g} \nabla_{\mu} A^{\mu} = \sqrt{-g} \partial_{\mu} A^{\mu} + \sqrt{-g} \Gamma^{\mu}_{\mu\nu} A^{\nu} \quad (\text{B.2})$$

elde ederiz. $\sqrt{-g} \Gamma^{\mu}_{\mu\nu}$ terimini $\sqrt{-g} \Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \partial_{\nu} \sqrt{-g}$ şeklinde yazmak mümkündür. Bunun için öncelikle Christoffel sembolünü yazalım.

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \quad (\text{B.3})$$

$\sigma \rightarrow \mu$ şeklinde indisleri değiştirirsek elimizde

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} \quad (\text{B.4})$$

ifadesi olur. Tekil olmayan matrisler için $\ln(\det g_{\mu\nu}) = \text{Tr}(\ln g_{\mu\nu})$ şeklinde bir eşitlik yazmak mümkündür. Bu ifadenin kısmi türevini alırsak

$$\partial_{\nu} g = g g^{\mu\lambda} \partial_{\nu} g_{\mu\lambda} \quad (\text{B.5})$$

elde ederiz ($\det g_{\mu\nu} = g$). Bu ifadeyi (B.4)'de yerine yazarsak

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial_{\nu} g}{g} \quad (\text{B.6})$$

buluruz. $\sqrt{-g}$ 'nin kısmi türevini

$$\frac{\partial_{\nu} \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2} \frac{\partial_{\nu} g}{g} \quad (\text{B.7})$$

yazabiliriz. Yukarıdaki iki ifadeyi eşitlersek

$$\sqrt{-g} \Gamma^{\mu}_{\mu\nu} = \partial_{\nu} \sqrt{-g} \quad (\text{B.8})$$

bulunur. Bu ifadeyi (B.2)'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\nabla_{\mu}A^{\mu} &= \sqrt{-g}\partial_{\mu}A^{\mu} + \partial_{\mu}\sqrt{-g}A^{\mu} \\ \nabla_{\mu}A^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}A^{\mu})\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

ifadesi elde edilir.

Einstein alan denklemlerinin kovaryant olarak sabit olmasını kullanarak

$$\nabla^{\mu}G_{\mu\nu} = \nabla^{\mu}T_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{B.10})$$

yazabiliriz. $G_{\mu\nu}$ tensörünün açık ifadesini kullanarak Ricci tensörünün türevi için şöyle bir eşitlik elde edilebilir.

$$\begin{aligned}\nabla^{\mu}G_{\mu\nu} &= \nabla^{\mu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = 0 \\ \nabla^{\mu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla^{\mu}g_{\mu\nu}R &= 0 \\ \nabla^{\mu}R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\nabla_{\nu}R\end{aligned}\quad (\text{B.11})$$

Riemann tensörü, bir vektörün iki farklı yoldan yapılan paralel ötelenmesinin farkı şeklinde tanımlanır. A_{μ} herhangi bir vektör olmak üzere,

$$\nabla_{\sigma}\nabla_{\rho}A_{\mu} - \nabla_{\rho}\nabla_{\sigma}A_{\mu} = -R^{\nu}_{\mu\sigma\rho}A_{\nu} \quad (\text{B.12})$$

şeklindedir. Skaler eğrilik, R , vektör değil skaler bir fonksiyondur. Skaler bir ifadenin türevi vektör olacağından (potansiyelin divergence'nın kuvvete eşit olması gibi $-\nabla \cdot V = \vec{F}$) benzer ifadeyi eğrilik skalerinin türevi için de yazabiliriz:

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\nabla_{\lambda}R - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\lambda}R = -R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu}\nabla_{\sigma}R. \quad (\text{B.13})$$

Bu ifadeleri kullanarak $H_{\mu\nu}$ tensörünün kovaryant olarak sabit olduğunu göstermek mümkündür:

$$\begin{aligned}\nabla^{\mu}H_{\mu\nu} &= \nabla^{\mu}(RR_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\nabla^{\mu}(R^2g_{\mu\nu}) - \nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}R + g_{\mu\nu}\nabla^{\mu}\square R \\ &= (\nabla^{\mu}R)R_{\mu\nu} + R\nabla^{\mu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\nabla_{\nu}R + \nabla_{\nu}\square R - \square\nabla_{\nu}R \\ &= \nabla^{\mu}RR_{\mu\nu} + \nabla_{\nu}\square R - \square\nabla_{\nu}R \\ &= 0.\end{aligned}\quad (\text{B.14})$$

C Formlar ve İntegrasyon

Formlar dual vektör uzayının elemanlarıdır. Genel bir p-form

$$\omega = \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \quad (\text{C.1})$$

olarak yazılır ve $\omega \in \Lambda^p(M)$ olarak gösterilir. dx^μ 'ler aralarında anti-simetrikler.

Dış türev, p-formu (p+1)-form yapan diferansiyel işlemdir. Elimizde $x = x_\mu dx^\mu$ şeklinde bir 1-form varsa bunun dış türevi

$$dx = \frac{\partial x_\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \wedge dx^\mu \quad (\text{C.2})$$

2-form olur. Bir formun iki defa dış türevi sıfırdır $d^2\omega = 0$. Bunun nedeni türev işleminin simetrik, kama (wedge) çarpımının anti-simetrik olmasıdır.

İki formun çarpımının dış türevi, ω p-form, α q-form olmak üzere

$$d(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^p \omega \wedge d\alpha \quad (\text{C.3})$$

olarak yazılır.

Herhangi bir formun, bir vektör alanı yönündeki Lie türevi

$$\mathcal{L}_x \omega = x \cdot d\omega + d(x \cdot \omega) \quad (\text{C.4})$$

şeklinindedir. Lie türevi ile dış türev sıra değiştirebilir (komütatifdir):

$$d(\mathcal{L}_x \omega) = \mathcal{L}_x d\omega. \quad (\text{C.5})$$

Stokes teoremi: (n-1)-boyutlu kapalı yüzeye sahip n-boyutlu bir manifold düşünelim.

n üzerinde $d\omega$ şeklinde tanımlı bir formun integrali

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega \quad (\text{C.6})$$

olarak alınabilir. Bu eşitliği vektör dilinde yazmak istersek

$$\int_{\Omega} \sqrt{-g} \nabla_{\mu} A^{\mu} d^n x = \int_{\partial\Omega} \sqrt{-g} A^{\mu} d^{n-1} x \quad (\text{C.7})$$

veya hacim elemanı kullanarak

$$\int_{\Omega} \nabla_{\lambda} A^{\lambda} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \wedge dx^{\rho} \wedge dx^{\sigma} = \int_{\partial\Omega} A^{\lambda} \epsilon_{\lambda\nu\rho\sigma} dx^{\nu} \wedge dx^{\rho} \wedge dx^{\sigma} \quad (\text{C.8})$$

olarak yazabiliriz. Hacim formu

$$\epsilon = \frac{1}{n!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} = \sqrt{-g} d^n x \quad (\text{C.9})$$

şeklinde tanımlanır. Bu ifadeyi kullanarak skaler fonksiyonların integrallerini form dilinde yazabiliriz:

$$\int \sqrt{-g} f(x) d^n x = \int f(x) \epsilon = \int f. \quad (\text{C.10})$$