T.C

ERCİYES ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SERBEST GRUPLAR VE ALTGRUPLARIN SERİLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan

Mehmet ÇETİNKAYA

Danışman

Prof. Dr. Himmet CAN

Eylül 2015

KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Mehmet ÇETİNKAYA

İmza:

YÖNERGEYE UYGUNLUK

Serbest gruplar ve altgrupların serileri adlı Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan	Danışman
Mehmet ÇETİNKAYA	Prof. Dr. Himmet CAN

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Prof. Dr. Himmet CAN danışmanlığında **Mehmet ÇETİNKAYA** tarafından hazırlanan **'Serbest Gruplar ve Altgrupların Serileri'** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

…/…/…

JÜRİ:

Danışman : ………………………………………. …………………….

Üye : ……………………………………….
…………………….

Üye : ……………………………………….
…………………….

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitümüz Yönetim Kurulunun ………………… tarih ve ………………...

sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Kazım KEŞLİOĞLU

ÖNSÖZ / TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım, insani değerleri ile de örnek aldığım ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu sabır ve hoşgörüden dolayı kıymetli hocam Prof. Dr. Himmet CAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bugünlere gelmemde bana maddi manevi desteğini esirgemeyen aileme ve eşime şükranlarımı sunarım.

Mehmet ÇETİNKAYA

Kayseri, Eylül 2015

SERBEST GRUPLAR VE ALTGRUPLARIN SERİLERİ

Mehmet ÇETİNKAYA

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Haziran 2015

Danışman: Prof. Dr. Himmet CAN

ÖZET

Bu tezin temel amacı Serbest Gruplar ve Alt Grupların Serileri'ni incelemektir.

Serbest gruplar ilk olarak hiperbolik geometri çalışmalarıyla ortaya çıktı. 1882 yılında yayımlanan bir makalede, Walther von Dyck serbest grupların mümkün olan en basit temsiline dikkat çekti.

Serbest grupların cebirsel çalışması bu gruba isimlerini veren ve bu grupların temel özelliklerini inşa eden Jakob Nielsen tarafından 1924 yılında başlatıldı. Max Dehn bu grupların topolojiyle bağlantısını farketti ve Nielsen-Schreier teoreminin tamamının ilk ispatını elde etti. Otto Schreier 1927 yılında bu sonucun bir cebirsel ispatını yayımladı ve Kurt Reidemeister kombinsyonal topoloji üzerine 1932'de yayımladığı kitapta serbest grupları etraflı bir yaklaşımla ele aldı. 1930 ların sonlarında, Wilhelm Magnus serbest grupların ikinci derece merkezi serileri ve serbest Lie cebirleri arasındaki bağlantıyı keşfetti.

Bu tez üç bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde, grup teorisine ait temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, n tane üreteç ve üreteçler arasındaki m tane bağıntı vasıtasıyla inşa edilen sonlu bir G grubunun cebirsel yapısı detayları ile ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, Jordan-Hölder teoremi yardımıyla sonlu bir grubun normal altgruplarının kompozisyon serilerinin nasıl inşa edildiği üzerinde durulmuştur.

FREE GROUPS AND SERIES OF SUBGROUPS

Mehmet ÇETİNKAYA

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis , June 2015

Supervisor: Prof. Dr. Himmet CAN

ABSTRACT

The main objective of this thesis is to study the structure of free groups and series of subgroups.

Free groups first arose in the study of hyperbolic geometry. In an 1882 paper, Walther von Dyck pointed out that these groups have the simplest possible presentations.

The algebraic study of free groups was initiated by Jakob Nielsen in 1924, who gave them their name and established many of their basic properties. Max Dehn realized the connection with topology, and obtained the first proof of the full Nielsen-Schreier theorem. Otto Schreier published an algebraic proof of this result in 1927, and Kurt Reidemeister included a comprehensive treatment of free groups in his 1932 book on combinatorial topology. Later on in the 1930s, Wilhelm Magnus discovered the connection between the lower central series of free groups and free Lie algebras.

This thesis consist of three chapters. In the first chapter, some basic knowledge of group theory is given.

In the second chapter, a finite group G that is structered by n generator and m relations between generators has been analyzed.

In the third chapter, how to structure by with the aid of Jordan-Hölder theorem a finite group of normal subgroups of composition series has been analyzed.

İÇİNDEKİLER

SERBEST GRUPLAR VE ALTGRUPLARIN SERİLERİ

Sayfa

3. BÖLÜM

ALT GRUPLARIN SERİLERİ

GİRİŞ

Bu çalışmada amacımız verilen bir sonlu grubu incelemektir. Burada ele alacağımız gruplar genel olarak Abeliyan olmayan gruplar olacaktır. Bu gruplar için sonlu üreteçler seçilerek bu grupların nasıl inşa edildiği gösterilecek, üreteç kümeleri arasındaki ilişkiler ortaya konulacaktır. Daha sonra bu grupların kompozisyon serileri olarak adlandırılan normal altgruplarının inşası üzerinde durulacaktır.

Burada n tane üreteç ve üreteçler arasındaki m tane bağıntı vasıtasıyla inşa edilen bir sonlu G grubunun cebirsel yapısı detayları ile tartışılacaktır. Grubun elemanları indirgenmiş kelime olarak adlandırılacak ve grup üzerindeki işlem de bileşke işlemi olacaktır. Bu tip gruplar genel olarak serbest gruplar olarak adlandırılırlar. İkinci olarak, sonlu bir grubun normal altgruplarının kompozisyon serilerinin Jordan-Hölder Teoremi yardımıyla nasıl inşa edildiği gösterilecektir.

Bu çalışmanın önemi, n tane üreteç ve üreteçler arasındaki m tane bağıntı vasıtasıyla inşa edilen bir sonlu G grubunun nasıl elde edildiğini göstermek ve ayrıca sonlu bir grubun normal altgruplarının kompozisyon serilerini Jordan-Hölder Teoremi yardımıyla inşa etmektir.

Çalışmayı daha açık kılmak adına ilk bölümde gruplarla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiş ve bu vesileyle okuyucunun bu çalışmayı bir bütün olarak ele alması amaçlanmıştır.

İkinci ve üçüncü bölümler de ise sırasıyla serbest grupların tanımı ve bunla ilgili teoremlere ve alt grupların serilerine ve konuyla ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Bu çalışmada kullanılan metotlar diğer sonsuz elemanlı gruplara da uygulanabilir. Elbette akılda tutulmalıdır ki bu sadece bir inceleme çalışmasıdır.

BÖLÜM 1

GRUP TEORİSİ İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan grup teorisi ile ilgili temel kavramlar ele alınacaktır. Daha açık bir ifade ile önce grup kavramı tanıtılacak, daha sonra koset, normal alt grup, homomorfizm, bölüm grubu gibi temel kavramlar üzerinde durulacaktır. Bu bölümde kullanılan temel kaynaklar [1,2,4] dür.

Tanım 1.1.1. A boş olmayan bir cümle olmak üzere, AxA dan A ya tanımlı bir

$$* : A\text{x}A \rightarrow A \,,\ (a,b) \rightarrow a*b$$

fonksiyonuna A üzerinde bir *ikili işlem* denir. Eğer $*$, A üzerinde bir ikili işlem ise $(A, *)$ ifadesine A da *bir cebirsel yapı* denir.

Tanım 1.1.2. G boş olmayan bir cümle ve G üzerinde bir $*$ işlemi tanımlı olsun.

Eğer, $*$ işlemi birleşme özelliğini sağlarsa; yani,

$\forall\ a,b,c \in G$ için

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

ise,

$\forall a \in G$ için

$a*e = e*a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa (e ye G nin birim elemanı denir),

$\forall a \in G$ için

$$a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$$

olacak biçimde bir $a^{-1} \in G$ varsa (a^{-1} e a nın bir ters elemanı denir), o zaman $(G, *)$ sıralı ikilisine bir *grup* denir.

Eğer $(G, *)$ grubunda, $\forall a,b \in G$ için

$$a*b = b*a$$

ise, bu gruba bir *Abelyen* (*değişmeli*) *grup* denir.

Genellikle grup çarpımsal ise işlem olarak ab notasyonunun grup toplamsal ise işlem olarak $a+b$ notasyonunu kullanacağız. Gruplar ile ilgili özellikler incelenirken, aksi belirtilmedikçe grup çarpımsal olarak ele alınacaktır. Bir $(G, *)$ grubu sadece G ile gösterilecektir.

Önerme 1.1.3. G bir grup ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) G nin bir tek birim elemanı vardır.

2) $\forall a \in G$ elemanının bir tek a^{-1} inversi (ters elemanı) vardır.

3) $\forall a \in G$ için $(a^{-1})^{-1} = a$ dır.

4) $\forall a,b \in G$ için $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ dir.

5-) $a,b,x \in G$ için $ax = bx$ ya da $xa = xb$ ise $a = b$ dir.

İspat.

1) e ve f, G nin iki birim elemanı olsun. Bu taktirde,

$ef = f$ (e birim eleman olduğundan)

$ef = e$ (f birim eleman olduğundan) olup,

$f = ef = e$ dir. Yani birim eleman tektir.

2) $\forall$ $a \in G$ için a' ve a'', a nın inversleri olsun. Bu durumda

$a' = ea' = (a''a)a' = a''(aa') = a''e = a''$dır.

3) $\forall$ $a \in G$ için, $a^{-1}a = aa^{-1}$ = e olduğundan a^{-1} in tersi a dır, yani

$(a^{-1})^{-1} = a$ dır.

4) $a,b \in G$ olsun. $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$ dir.

Benzer şekilde, $(b^{-1}a^{-1})(ab) = e$ olup invers elemanın tekliğinden

$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ dir.

5) $a,b,x \in$ G olsun. $ax = bx$ denklemi sağdan x^{-1} ile çarpılırsa $a = b$ elde edilir.

Benzer şekilde, $xa = xb$ denklemi soldan x^{-1} ile çarpılırsa $a = b$ elde edilir.

Tanım 1.1.4. G bir grup olsun. Eğer $\forall a \in G$ için, $ea = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa,

e ye G nin *sol birim elemanı*, eğer $\forall a \in G$ için, $ae = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa, e ye G nin *sağ birim elemanı* denir.

Tanım 1.1.5. G bir grup olsun. Eğer $\forall a \in G$ için, $a'a = e$ olacak şekilde bir $a' \in G$ varsa a'ye *sol invers* (ters eleman) denir. Eğer $\forall a \in G$ için, $a\,a' = e$ olacak şekilde bir $a' \in G$ varsa, a' ye *sağ invers* (ters eleman) denir.

Tanım 1.1.6. $(G, *)$ bir grup ve A, G nin boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Eğer $\forall a,b \in A$ için $a*b \in A$ ise, o zaman A, G nin $*$ işlemine göre kapalıdır denir.

Tanım 1.1.7. G bir grup ve H, G nin boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Eğer H, G nin işlemine göre kapalı ve bu işleme göre bir grup ise, o zaman H ye G nin bir *alt grubu* denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Her G grubu, $\{e\}$ ve G alt gruplarına sahiptir. Bu alt gruplara G nin *aşikar alt grupları* denir. Bir G grubunun, $\{e\}$ ve G den farklı alt gruplarına da G nin *gerçek alt grupları* denir.

Önerme 1.1.8. G bir grup ve H, G nin boş olmayan bir alt cümlesi olsun. O zaman

$H \leq G \Leftrightarrow \forall\, h_1, h_2 \in H$ için $h_1 h_2^{-1} \in H$ dir.

İspat. $\Longrightarrow$: Aşikardır.

$\Longleftarrow$: $\forall h_1, h_2 \in H$ için $h_1(h_2)^{-1} \in H$ olsun. İşlem G üstünde birleşmeli olduğundan, H üstünde de birleşmelidir. Eğer hipotezde h_2 yerine özel olarak h_1 alınırsa,

$$h_1(h_1)^{-1} = e \in H$$

olur.

O halde H nin birim elemanı vardır. Eğer hipotezde h_1 yerine e alınırsa,

$\forall h_2 \in H$ için,

$$e(h_2)^{-1} = (h_2)^{-1} \in H$$

dir. Böylece $H \leq G$ dir.

Tanım 1.1.9. G bir grup, $x \in G$ ve $A,B \subseteq G$ olsun. Bu durumda ,

1) $AB=\{ab \mid a \in A ,b \in B\}$

2) $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A \}$

3) $xA = \{xa \mid a \in A\}$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.10. G bir grup ve $a \in G$ olsun. G nin eleman sayısına (kardinalitesine), G grubunun *derecesi* (mertebesi) denir ve $|G|$ ile gösterilir. Derecesi sonlu olan bir gruba *sonlu grup*, derecesi sonsuz olan bir gruba da *sonsuz grup* denir. Eğer $a^t = e$ olacak şekilde bir t pozitif tamsayısı varsa bu t pozitif tamsayılarının en küçüğüne a nın *derecesi* denir ve $|a|$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.11. G bir grup olmak üzere, G nin merkezi $Z(G)$ ile gösterilir ve

$$Z(G) = \{a \in G \mid \forall g \in G \text{ için } ag = ga \}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 1.1.12. p bir asal ve $m>0$ olmak üzere, $|G| = p^m$ olacak şekilde G sonlu bir grup ise, $0<\mu<m$ olmak üzere, G nin merkezinin mertebesi p^μ dir.

Önerme 1.1.13. G bir grup ve G nin merkezi $Z(G)$ olmak üzere $Z(G) \leq G$ dir.

İspat. $\forall$ g $\in$ G için eg = ge olduğundan e $\in$ Z(G) olup, Z(G) $\neq \emptyset$ olur. o halde,

$\forall a_1, a_2 \in Z(G)$ olsun. $\forall g \in G$ için

$$a_1 g = g a_1 \text{ ve } a_2 g = g a_2$$

dir.

$$a_2 g = g a_2 \Rightarrow a_2^{-1}(a_2 g) a_2^{-1} = a_2^{-1}(g a_2)\, a_2^{-1}$$

$$\Rightarrow g a_2^{-1} = a_2^{-1} g$$

dir. Şimdi, $\forall g \in G$ için

$$\begin{aligned}(a_1 a_2^{-1})g &= a_1(a_2^{-1} g)\\ &= a_1(g a_2^{-1})\\ &= (a_1 g)\, a_2^{-1}\\ &= (g a_1)\, a_2^{-1}\\ &= g(a_1 a_2^{-1})\end{aligned}$$

dir. Yani, $\forall a_1 a_2 \in$ Z(G) için $a_1 a_2^{-1} \in$ Z(G) olup $Z(G) \leq G$ dir.

Tanım1.1.14. G bir grup, $H \leq G$ ve $a \in G$ olsun. Bu durumda

$$C(a) = \{x \in \mathrm{H} \mid xa = ax \}$$

cümlesine a nın H de *merkezleyeni* denir.

Tanım 1.1.15. *G* bir grup ve $H \leq G$ olsun. $a \in G$ olmak üzere

$$a^{-1}Ha = \{a^{-1}ha \mid h \in H\}$$

cümlesine *H* nin *G* de *a* ya göre *eşleniği* denir.

Önerme 1.1.16. *G* bir grup, $a \in G$ ve $H \leq G$ olmak üzere, $a^{-1}Ha$ cümlesi *G* nin bir alt grubudur.

İspat. $\forall x,y \in a^{-1}Ha$ için,

$$x = a^{-1}h_1a \ (h_1 \in H)$$

$$y = a^{-1}h_2a \ (h_2 \in H)$$

dir. O halde,

$$xy^{-1} = (a^{-1}h_1a)(a^{-1}h_2a)^{-1}$$

$$= (a^{-1}h_1a)(a^{-1}h_2^{-1}a)$$

$$= a^{-1}h_1(aa^{-1})h_2^{-1}a$$

$$= a^{-1}h_1h_2^{-1}a \in a^{-1}Ha \ (h_1h_2^{-1} \in H)$$

dır.

Dolayısıyla $a^{-1}Ha \leq G$ dir.

Tanım 1.1.17. *G* bir grup ve *X*, *G* nin bir alt cümlesi olsun. O zaman *G* nin *X* i içeren bütün alt gruplarının kesişimine *X tarafından üretilen bir alt grup* denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. *X* e $\langle X \rangle$ in bir *üreteç cümlesi* denir. Eğer $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ise, $\langle X \rangle = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ ile gösterilir ve bu gruba $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tarafından üretilen bir alt grup denir.

Eğer n=1 ise $\langle x_1 \rangle$ grubuna x_1 tarafından üretilen bir *devirli alt grup* denir.

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ise $x_1 \in X$ ve $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$ (i=1,2,…,n) olmak üzere, $\langle X \rangle$, $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$ formundaki tüm sonlu çarpımlar tarafından üretilir.

Tanım 1.1.18. *G* bir grup olsun. Eğer $G = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\} = \langle a \rangle$ olacak şekilde bir $a \in G$ varsa *G* ye *a* tarafından üretilen *bir devirli grup* denir.

Tanım 1.1.19. *G* bir grup, $H \leq G$ ve $x \in G$ olsun. $xH = \{xh \mid h \in H\}$ cümlesine *H* nin *G* deki *sol koseti* denir ve *H* nin *G* deki tüm sol kosetlerinin cümlesi *G/H* ile gösterilir. $Hx = \{hx \mid h \in H\}$ cümlesine *H* nin *G* deki *sağ koseti* denir ve *H* nin *G* deki tüm sağ kosetlerinin cümlesi *G/H* ile gösterilir.

Kosetlerle ilgili tanım ve teoremleri sol kosetler üzerinden inceleyeceğiz.

Tanım 1.1.20. G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Her bir $x \in G$ için, xH sol kosetindeki $x \in G$ elemanına H nin G deki *sol koset temsilcisi* denir.

Önerme 1.1.21. G bir grup, $H \leq G$ ve $x,y \in G$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki koşullar denktir.

1) $xH = yH$

2) $y \in xH$

3) $y = xh$ olacak şekilde bir $h \in H$ elemanı vardır.

4) $x^{-1}y \in H$

İspat. 1 $\Longrightarrow$2 : $xH = yH$ olsun. $e \in H$ ve $H \leq G$ olduğundan,

$$y = ye \in \{yh | h \in H\} = yH$$

dır.

Dolayısıyla, $xH = yH$ olduğundan $y \in xH$ dır.

2$\Longrightarrow$3: $y \in xH = \{xh | \; h \in H\}$ olduğundan $y = xh$ olacak şekilde bir $h \in H$ vardır.

3$\Longrightarrow$4: y=xh olacak şekilde bir $h \in H$ mevcut olsun. Denklemi soldan x^{-1} ile çarparsak,

$$x^{-1}y = x^{-1}(xh) = h \in H$$

elde edilir.

4$\Longrightarrow$1: $x^{-1}y \in H$ olsun. H bir grup olduğundan,

$$(x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x \in H$$

dır. Şimdi $g \in yH$ olsun. Bu durumda, g= yh olacak şekilde bir $h \in H$ mevcuttur. O halde,

k=$x^{-1}yh \in H$ dır. Böylece $g = xk \in xH$ olup, $yH \subseteq xH$ dır. $xH \subseteq yH$ da benzer şekilde gösterilir. Böylece,

$$xH = yH$$

elde edilir.

Sonuç 1.1.22. $H \leq G$ ve $x \in G$ olsun. Bu durumda,

$$x \in H \Leftrightarrow xH = Hx$$

dir.

Önerme 1.1.23. $H, K \leq G$ olsun. $HK = KH$ ise, $HK \leq G$ dir.

İspat. $e \in H$ ve $e \in K$ olup $e = ee \in HK$ dır. Dolayısıyla $HK \neq \emptyset$ dir. $x \in HK$ olsun.

O halde, $x = hk$ olacak şekilde $h \in H$ ve $k \in K$ vardır. $H,K \subseteq G$ ve G bir grup olduğu için $x \in G$ dir. Böylece $HK \subseteq G$ dir. Şimdi $x,y \in HK$ olsun. HK nın tanımı gereğince, $x = h_1k_1$ ve $y = h_2k_2$ olacak şekilde $h_1,h_2 \in H$ ve $k_1,k_2 \in K$ elemanları vardır. O halde,

$$\begin{aligned} xy^{-1} &= h_1k_1(h_2k_2)^{-1} \\ &= h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \\ &= h_1k_1h_2^{-1}k_2^{-1} \quad (HK = KH \text{ olduğundan}) \\ &= h_1h_2^{-1}k_1k_2^{-1} \quad (HK = KH \text{ olduğundan}) \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan,

$H,K \leq G$ olduğu için $h_1h_2^{-1} \in H$ ve $k_1k_2^{-1} \in K$ dir. Bu nedenle,

$$xy^{-1} = h_1h_2^{-1}k_1k_2^{-1} = (h_1h_2^{-1})(k_1k_2^{-1}) \in HK$$

dir. Böylece $HK \leq G$ dir.

Önerme 1.1.24. $H \leq G$ ve $x,y \in G$ olsun. $xH \cap yH \neq \emptyset$ ise $xH = yH$ dır.

İspat. . $xH \cap yH \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $g \in xH \cap yH$ olacak şekilde en az bir $g \in G$ elemanı vardır. Buradan $g \in xH$ ve $g \in yH$ dır. Önerme 1.1.21 den, $gH = xH$ ve $gH = yH$ dır. Dolayısıyla, $xH = yH$ dır.

Önerme 1.1.26. $H \leq G$ ve $x,y \in G$ olsun. $xH \neq yH$ ise . $xH \cap yH = \emptyset$ dir. Ayrıca,

$$f: H \rightarrow xH$$

fonksiyonu birebir ve örtendir. Böylece, H ile xH aynı kardinaliteye sahiptir.

İspat. $h_1,h_2 \in H$ için $f(h_1) = f(h_2)$ olsun. Bu durumda $xh_1 = xh_2$ olup sadeleştirme kuralından $h_1 = h_2$ dir. Böylece f birebirdir. $g \in xH$ olsun. Bu durumda Önerme 1.1.21 den, $g = xh$ olacak şekilde bir $h \in H$ vardır. f fonksiyonunun tanımı gereğince,

$$g = xh = f(h)$$

olup, f örtendir.

Tanım 1.1.27. R, boştan farklı bir S cümlesi üzerinde bir bağıntı olsun. Bu durumda,

1) Her $a \in S$ için aRa ise R ye *yansımalı*,

2) aRb iken bRa ise R ye *simetrik*,

3) *aRb* ve *bRc* iken *aRc* ise *R* ye *geçişmeli* denir.

Eğer, *R* bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişmeli ise, bu durumda *R* ye *S* cümlesi üzerinde bir *denklik bağıntısı* denir. Bundan sonra aRb, a~b notasyonu ile gösterilecektir.

Tanım 1.1.28. '~', *S* üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in S$ olsun. x i içeren $\{ y \in S \mid y \sim x\}$ cümlesine x in denklik sınıfı denir ve bu cümle $C[x]$ şeklinde gösterilir.

Önerme 1.1.29. '~', bir *S* cümlesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu durumda, bu denklik bağıntısı sonucu elde edilen denklik sınıflarının ailesi, *S* nin bir parçalanmasıdır. Yani, denklik sınıfları, birleşimleri *S* yi veren ve ikişer ikişer ayrık olan cümlelerdir.

Önerme 1.1.30. $H \leq G$ olsun. G üzerinde bir '~' bağıntısı, $x,y \in G$ için,

$$x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda '~' *G* üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.1.31. *G* bir grup ve $H \leq G$ olsun. *H* nin *G* de farklı sol(sağ) kosetlerinin sayısına *H* nin *G* deki *indeksi* denir ve $[G:H]$ ile gösterilir.

Teorem 1.1.32. (Lagrange Teoremi) *G* sonlu bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu durumda,

$$|G| = [G : H]\,|H|$$

dir.

İspat. *G* sonlu bir grup olduğundan, $[G : H] \leq \infty$ dır. *H* nın *G* deki tüm farklı sol kosetlerinin sınıfı $\{x_1H,\ldots,x_rH\}$ olsun. O halde $G = \bigcup_{i=1}^{r} x_i H$ dir. Önerme 1.1.26. dan, her bir $1 \leq i \leq r$ için $|x_i\mathrm{H}| = |\mathrm{H}|$ olduğu biliniyor.

Bu nedenle

$$|G| = \left|\bigcup_{i=1}^{r} x_i H\right| = \sum_{i=1}^{r} |x_i H| = \sum_{i=1}^{r} |H| = r.H = [G:H].\,|H|$$

elde edilir.

Tanım 1.1.33. *G* bir grup, $H,K \leq G$ ve $x \in G$ olsun.

$$HxK = \{hxk \mid h \in H, k \in K\}$$

cümlesine, *G* de (H,K) – *double koseti* denir.

Tanım 1.1.34. *G* bir grup ve $N \leq G$ olsun. Eğer her $g \in G$ için

$$gNg^{-1} = N$$

ise N ye G nin bir *normal alt grubu* denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir.

Her G grubunda G ve $\{e\}$ normal alt gruplardır.

Önerme 1.1.35. G bir grup ve $N \leq G$ olsun. Buna göre aşağıdakiler birbirine denktir.

1) $\forall g \in G$ ve $\forall n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ dir.

2) $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} \subset N$ dir.

3) $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} = N$ dir.

4) $\forall g \in G$ için $gN = Ng$ dir.

Tanım 1.1.36. G bir grup olsun ve N, G nin bir normal alt grubu olsun.

$$G / N = \{aN \mid a \in G\}$$

cümlesi üzerinde bir çarpma işlemi şöyle tanımlansın: $\forall aN, bN \in G/N$ için,

$$(aN)(bN) = (abN)$$

olsun. Bu işleme göre, G/n bir gruptur ve bu gruba G nin N ile *bölüm grubu* denir.

Tanım 1.1.37. G bir grup ve $x,y \in G$ olsun.

$$[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$$

elemanına x ve y nin *komütatörü* denir.

$$G' = \mathrm{gp}\{[x,y] \mid x,y \in G\}$$

ise, G' grubuna da G nin *türemiş grubu* ya da *komütatör grubu* denir.

Teorem 1.1.38. (i) G' türemiş grubu, G nin bir normal alt grubudur ve G/G' Abelyendir.

(ii) G/H Abelyen olacak şekilde, H, G nin herhangi bir normal alt grubu ise, $G' \leq H$ dir

Tanım 1.1.39. (G,o) ve $(H, *)$ iki grup olmak üzere eğer $\vartheta : G \rightarrow H$ dönüşümü

$\forall x,y \in G$ için

$$\vartheta(x\mathrm{o}y) = \vartheta(x) * \vartheta(y)$$

şartını sağlarsa, ϑ ye bir *grup homomorfizmi* ya da kısaca bir *homomorfizm* denir.

Tanım 1.1.40. $\vartheta : G \rightarrow H$ grup homomorfizmi bire bir ise ϑ ye bir *monomorfizm* denir.

Tanım 1.1.42. $\vartheta : G \rightarrow H$ grup homomorfizmi hem bire bir hem de örten ise ϑ ye bir *izomorfizm* denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir.

Önerme 1.1.43. ϑ:G→H grup homomorfizmi olsun. Buna göre

a) e_G, G nin birim elemanı ve e_H, H nin birim elemanı olmak üzere

$$\vartheta(e_G) = e_H \text{ dir.}$$

b) $\forall a \in G$ için,

$$\vartheta(a^{-1}) = [\vartheta(a)]^{-1} \text{ dir.}$$

Tanım 1.1.44. G bir grup, $N \lhd G$ olmak üzere ϑ:G→G/N ve $\forall a \in G$ için

$$\vartheta(a) = aN$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm örten bir homomorfizmdir. Bu homomorfizme *doğal homomorfizm* denir.

Tanım 1.1.45. ϑ:G→H bir grup homomorfizmi olsun.

$$\text{Ker}(\vartheta) = \{x \in G \mid \vartheta(x) = e_H\}$$

cümlesine ϑ nın çekirdeği denir.

Tanım 1.1.46. ϑ:G→H bir grup homomorfizmi olsun.

$$\text{Im}(\vartheta) = \{\ \vartheta(\text{g}) \mid g \in G\}$$

cümlesine ϑ nin görüntüsü denir.

Önerme 1.1.47. ϑ:G→H grup homomorfizmi için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) Ker(ϑ) ≤ G dir.

2) Im(ϑ) ≤ H dir.

3) ϑ birebirdir ⇔ Ker(ϑ) = $\{e_G\}$ dir.

4) ϑ örtendir ⇔ Im(ϑ) = H dir.

Tanım 1.1.48. ϑ:G→G grup homomorfizmine bir *endomorfizm* denir.

Tanım 1.1.49. ϑ:G→G birebir ve örten bir grup homomorfizmi ise ϑ ye *grup otomorfizmi* denir.

Tanım 1.1.50. G bir grup olmak üzere, $\forall x \in G$ için $I(x) = x$ ile tanımlı $I : G \to G$ dönüşümüne *birim dönüşüm* ya da *özdeş dönüşüm* denir.

Tanım 1.1.51. G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere, $\forall x \in G$ için

$$I_a(x) = axa^{-1}$$

ile tanımlanan

$$I_a: G \rightarrow G$$

otomorfizmine G grubunun bir *iç otomorfizmi* denir. G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin cümlesi I(G) ile gösterilir. G değişmeli ise $I(G) = \{I\}$ birimdir. G nin bütün otomorfizmlerinin cümlesi de Aut(G) ile gösterilir. Aut(G) fonksiyonlardaki bileşke işlemi ile bir grup meydana getirir. Bu gruba G nin *otomorfizmlerinin grubu* denir.

Önerme 1.1.52. G bir grup olsun. O zaman

$$I(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$$

dir.

Tanım 1.1.53. H, G grubunun bir alt grubu olsun. Her $\vartheta: G \rightarrow G$ otomorfizması için

$\vartheta(H) \leq H$ ise H alt grubuna G nin bir *karakteristik alt grubu* denir.

Teorem 1.1.54. (Birinci İzomorfizm Teoremi) $\vartheta: G \rightarrow G'$ bir grup homomorfizmi ve Ker $\vartheta = K$ olsun. $\emptyset$: $G/K \rightarrow \theta(G)$, $\emptyset(Kx) = \theta(x)$ ile tanımlanan dönüşüm bir izomorfizmdir. Böylece

$$G/K \cong \theta(G)$$

dir.

Teorem 1.1.55. (İkinci İzomorfizm Teoremi) G bir grup ve $N \lhd G$ olsun. $N \lhd A \lhd G$ olacak şekilde A nın G nin bir normal alt grubu olduğunu varsayalım. Bu taktirde

$$(G/N)/(A/N) \cong G/A$$

dir.

Örnek 1.1.56. $(a,b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\theta: \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \rightarrow \theta(x,y) = (x+a, y+b)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona (a,b) vektörü yönündeki öteleme fonksiyonu denir. Düzlemdeki tüm öteleme fonksiyonlarının cümlesi $T(2)$ ile gösterilir. Eğer f, $(cd) \epsilon \mathbb{R}^2$ yönündeki bir öteleme fonksiyonu ise,

$$(\theta o f)(x,y) = \theta[f(x,y)] = \theta(x+c, y+d) = (x+c+a, y+d+b)$$

dönüşümü de (c+a,d+b) yönündeki bir öteleme fonksiyonudur. Yani T(2) fonksiyonların bileşke işlemine göre kapalıdır.

$$I_{\mathbb{R}^2}:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

birim dönüşümü T(2) kümesinin birim elemanıdır. (a,b.9 vektörü yönündeki öteleme fonksiyonunun tersi, (-a,-b) vektörü yönündeki öteleme fonksiyonudur. Böylece T(2) kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur.

Teorem 1.1.57. G boştan farklı bir küme ve $*$, G üzerinde birleşimli bir ikili işlem olsun. Aşağıdaki önermeler birbirine denktirler.

(a) $(G, *)$ ikilisi bir gruptur.

(b) $\forall a,b \in G$ için $a*x = b$ ve $y*a = b$ denklemlerinin G içinde x,y çözümleri vardır ve tektir.

İspat. $(a) \Longrightarrow (b)$ $(G, *)$ bir grup olduğundan, her elemanın tersi vardır. Bu sebeple

$$\begin{aligned} a*x = b &\Longrightarrow a^{-1} * (a*x) = a^{-1} * b \\ &\Longrightarrow (a^{-1} * a) * x = a^{-1} * b \\ &\Longrightarrow x = a^{-1} * b \end{aligned}$$

bulunur ve $x \in G$ olduğu açıktır. Benzer biçimde $y * a = b$ denkleminin çözümü $y = b * a^{-1}$ olup $y \in G$ dir. Kabul edelim ki $a * x_1 = b$ ve $a * x_2 = b$ olsun. Bu durumda $a * x_1 = a * x_2$ olup, $x_1 = x_2$ olduğu açıktır. Benzer şekilde $y * a = b$ denkleminin çözümünün de tek olduğu gösterilebilir.

$(b) \Longrightarrow (a)$ Verilen denklemlerin çözümleri G de olsun.

İlk olarak G nin $*$ işlemine göre birim elemana sahip olduğunu gösterelim.

$a \in G$ sabit bir eleman olmak üzere $a * x = a$ denkleminin bir çözümü $x = u \in G$ olsun. Şimdi u nun G nin sağ birimi, $\forall b \in G$ için $b * u = b$ olduğunu gösterelim. $y * a = b$ denkleminin bir çözümü $y = z \in G$ olsun. Bu durumda $z * a = b$ dir. Böylece

$b * u = (z * a) * u = z * (a * u) = z * a = b$ olup u, G nin sağ birimidir. Benzer şekilde $\forall b \in G$ için $v * b = b$ olacak şekilde bir $v \in G$ bulmak mümkün olacaktır. Yani v, G nin her elemanı için sol birimdir. Fakat u sağ birim olduğundan $v * u = v$ dir. Benzer şekilde v, sol birim olduğundan $v * u = u$ olur. Böylece $u = v = e$ aranan birim elemandır.

e, G nin $*$ işlemine göre birim elemanı olmak üzere, herhangi bir $a \in G$ verildiğinde, a nın tersinin de G içinde olduğunu gösterelim. $a,e \in G$ için $a * x = e$ ve $y * a = e$ denklemlerinin çözümleri vardır ve tektir. Bu durumda $x = e * x = y * a * x = y * e = y$ olduğundan

$x = y = a^{-1}$ dir.

Böylece G bir gruptur.

Teorem 1.1.58. $n \geq 2$ pozitif bir tamsayı, G bir grup, $a_1,a_2,\ldots,a_n \in G$ olsun. $1 \leq m \leq n$ şartını sağlayan $\forall m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$(a_1,a_2,\ldots,a_m)(a_{m+1},\ldots,a_k) = a_1,a_2,\ldots,a_k$$

dir.

İspat. İspatı n üzerinden tümevarımla yapalım. $n = 2$ için $1 \leq m \leq n$ şartını sağlayan tek tamsayı $m = 1$ dir. Bu sebeple $(a_1)(a_2) = a_1 a_2$ dir.

Kabul edelim ki, iddiamız $n = k$ için doğru olsun. Yani $1 \leq m \leq k$ şartını sağlayan $\forall m \in \mathbb{Z}^+$ için $(a_1,a_2,\ldots,a_m)(a_{m+1},\ldots,a_k) = a_1,a_2,\ldots,a_k$ olsun. Şimdi iddiamızın $n = k+1$ için de doğru olduğunu gösterelim.

$1 \leq m \leq k+1$ şartını sağlayan $m \in \mathbb{Z}^+$ için;

(i) Eğer $m = k$ ise

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,\ldots,a_m)(a_{m+1},\ldots,a_k a_{k+1}) &= (a_1,a_2,\ldots,a_k)\, a_{k+1}\\ &= a_1,a_2,\ldots,a_k a_{k+1}\end{aligned}$$

(ii) Eğer $1 \leq m < k$ ise

$$\begin{aligned}(a_1,a_2,\ldots,a_m)(a_{m+1},\ldots,a_k a_{k+1}) &= (a_1,a_2,\ldots,a_m)[(a_{m+1}\ldots,a_k)\, a_{k+1}]\\ &= (a_1,a_2,\ldots,a_m)(a_{m+1}\ldots,a_k)\, a_{k+1}\\ &= (a_1,a_2,\ldots,a_k)\, a_{k+1}\\ &= a_1,a_2,\ldots,a_k a_{k+1}\end{aligned}$$

olur ve böylece iddiamız bütün pozitif tamsayılar için doğru olur.

BÖLÜM 2

SONLU OLARAK ÜRETİLEN GRUPLAR

Bu bölümde *n* tane üreteç ve üreteçler arasındaki *m* tane bağıntı vasıtasıyla inşa edilen sonlu bir *G* grubunun cebirsel yapısı detayları ile tartışılacaktır.

Burada faydalandığımız temel referanslar [3,5,7,8,10] olacaktır.

2.1 Serbest Gruplar

Tanım 2.1.1. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişmeli olmayan semboller, $a, b, \ldots, r \in \{1,2,\ldots,n\}$ ve $\alpha, \beta, \ldots, \rho \in \mathbb{Z}/\{0\}$ olmak üzere, sonlu sayıda çarpandan oluşan

$$w = x_a^{\alpha} x_b^{\beta} \ldots x_r^{\rho} \tag{2.1}$$

elemanına bir *kelime* denir. Bir kelime $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lerin bir fonksiyonu olarak kabul edilebilir ve buna göre, daha açık bir şekilde, $w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yazılır.

Tanım 2.1.2. Çarpanlarının sayısı sıfır olan bir kelimeye *boş kelime* denir. *e* ile gösterilir ve

$$x_i^0 = e \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.3. Bir kelime, boş kelime ise ya da aynı sonek $(a, b, \ldots, r)$ e sahip ardışık *x* lere sahip olmayan (2.1) formunda bir çarpım ise, bu kelimeye *indirgenmiş bir kelime* denir.

Boştan farklı *u* ve *v* kelimelerinin çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$p = uv$$

olarak kabul edelim. Eğer *p* indirgenmiş kelime ise, *p* yi *uv* olarak tanımlarız.

Tersine, kabul edelim ki,

$$u = u_0 x^{\alpha} \qquad , \qquad v = x^{\beta} v_0$$

olsun, fakat x, u_0 ın sonunda ve v_0 ın başında bulunmasın. Bu taktirde

$$x^{\alpha} x^{\beta} = x^{\alpha+\beta} \tag{2.2}$$

kuralı kullanılarak p sadeleştirilir. Eğer α+β=0 ise, $x^{\alpha+\beta}$ çarpanı yok edilir ve daha sonraki sadeleştirmeler mümkün hale gelebilir. İndirgenmiş p_0 kelimesine ulaşana kadar bu sürece devam edilir. Sonra p_0 indirgenmiş kelimesi

$$uv = p_0$$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilmelidir ki, uv çarpımında belirsizliğe yer verilmediğinden dolayı, indirgeme yöntemi tektir. Bileşke işlemi bilinen yolla

$$ue = eu = \mathrm{u}$$

olarak tanımlanır. Yani boş kelime, birim elemandır. (2.1) in tersi ise, açıkça indirgenmiş bir kelime olarak

$$w^{-1} = x_r^{-\rho} \ldots x_b^{-\beta} x_a^{-\alpha}$$

dır.

$$(uv)w = u(vw) \tag{2.3}$$

birleşme kuralının doğruluğunu ispatlamak biraz zahmetlidir ve aşağıdaki gibi birkaç adımda gerçekleştirilir:

(i) x tek bir üreteç ve u_0 ın son çarpanı ile w_0 ın ilk çarpanı, üssü sıfır olmayan x in bir kuvveti olmayacak şekilde, u_0 ve w_0 indirgenmiş kelimeler (boş kelime olabilir) olsun.

$$(u_0 x^{\alpha})(x^{\beta} w_0) = u_0(x^{\alpha+\beta} w_0) = (u_0 x^{\alpha+\beta}) w_0$$

dır.

(ii) Eğer u ve w indirgenmiş kelimeler ve x herhangi bir üreteç ise,

$$(\mathrm{u}x^{\alpha})\, w = u(x^{\alpha}\mathrm{w}) \tag{2.4}$$

dır.

Gerçekten, u_0 ve w_0 terimlerinin (i) deki gibi olduğunu kabul edelim yani $u = u_0 x^{\pi}$, $w = x^{\Phi} w_0$ ve $\boldsymbol{\pi}$, Φ tamsayılar (sıfır da olabilir) olsun. Bu taktirde,

$$\begin{aligned}
(ux^{\alpha})w &= [(u_0 x^{\pi})x^{\alpha}](x^{\Phi} w_0) \\
&= (u_0 x^{\pi+\alpha})(x^{\Phi} w_0) \\
&= u_0(x^{\pi+\Phi+\alpha} w_0) \\
&= u_0[x^{\pi}(x^{\alpha+\Phi} w_0)]
\end{aligned}$$

$$= (u_0 x^{\pi})(x^{\alpha} w)$$

$$=\mathrm{u}(x^{\alpha} w)$$

dır.

(iii) Son olarak, genel durumda (2.3) ifadesini ispatlamak için v nin çarpanlarının sayısı üzerinde tümevarım uygulayacağız.

Şimdi, kabul edelim ki

$$v = v_0 x^{\alpha}$$

olsun. Birleşme kuralı v yerine, v_0 için doğru olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}(uv)\, w = (uv_0 x^{\alpha})w &= [(uv_0)x^{\alpha}]w \\ &= (uv_0)(x^{\alpha} w) \\ &= u[v_0(x^{\alpha} w)] \\ &= u[(v_0 x^{\alpha})w] \\ &= u(vw)\end{aligned}$$

olacaktır, bu ise tüm durumlarda (4.3) ün doğruluğunu gösterir.

Az önce tanımladığımız bileşke işlemi ile birlikte, x_1,x_2,…,x_n sembolleri vasıtasıyla bütün indirgenmiş kelimelerin cümlesi, x_1,x_2,…,x_n üzerinde *serbest grup* olarak adlandırılır.

Tek bir x üreteci üzerindeki serbest grup, sonsuz devirli gruptur.

İki üreteç durumunda, yani x ve y üreteçleri için tipik çarpımlar

$$(xy^{-2}x)(yx) = xy^{-2}xyx$$

$$(xy^{2})(y^{-1}x) = xyx$$

$$(xyx^{-1})(xy^{-1}x) = x^{2}$$

şeklinde olacaktır.

Özetlemek gerekirse, x_1,x_2,…,x_n sembolleri üzerindeki serbest grup, bu sembollerdeki tüm indirgenmiş kelimelerden oluşur ve bunlar yalnızca

$$x_i x_i^{-1} = x_i^{-1} x_i = e \qquad (i=1,2,...,n) \tag{2.5}$$

aşikar koşulların ve bunların sonuçlarına bağlıdır. Dikkat edilmeli ki, birden fazla üreteç üzerindeki serbest Abeliyan grup, serbest bir grup değildir. Çünkü aşikar olmayan $xyx^{-1}y^{-1} = e$ bağıntısı bir Abeliyan grupta sağlanır, fakat bir serbest grupta sağlanmaz.

2.2 Bağıntılar

G n tane üreteç tarafında üretilen bir grup yani G=gp$\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ olsun. G nin her bir elemanı, $g_a^{\alpha}, g_b^{\beta}, \ldots, g_r^{\rho}$ formunda bir çarpımdır.

Eğer G bir serbest grup değilse,

$$g_a^{\alpha} g_b^{\beta} \ldots = g_c^{\gamma} g_d^{\delta} \cdots$$

gibi aşikar olmayan eşitlikler vardır, ya da daha uygun notasyonla gösterecek olursak, eşitliğin sol tarafı $(g_a^{\alpha} g_b^{\beta} \ldots)(g_c^{\gamma} g_d^{\delta} \ldots)^{-1}$ olmak üzere,

$$\mathrm{r}(g_1, g_2, \ldots, g_n) = 1 \tag{2.6}$$

gibi aşikar olmayan eşitlikler vardır.

Bu durumu daha detaylı analiz etmek için, n tane $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sembolleri üzerinde tanımlanan F serbest grubunu göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\theta : F \rightarrow G$$

dönüşümünü

$$\theta(w(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = w(g_1, g_2, \ldots, g_n) \tag{2.7}$$

olarak tanımlayalım. Özel olarak,

$$\theta(e) = 1$$

dir.

Dikkat edilecek önemli nokta, θ nın bir homomorfizm olduğudur. Böylece $w_1, w_2 \epsilon F$ için

$$\theta(w_1 w_2) = \theta(w_1)\theta(w_2) \tag{2.8}$$

dir. Çünkü $w_1 w_2$ kelimesi, w_1 ve w_2 nin bitişikliği ve (2.2) ve (2.5) kurallarından dolayı sadeleştirme ile elde edilen indirgenmiş bir kelime olarak tanımlanır.

Bu kurallar herhangi bir grupta sağlanır ve x_i üzerinde gerçekleştirilen herhangi bir işlem g_i için de geçerlidir. Bu da (2.8) in doğruluğunu gösterir. θ nın bir homomorfizm olmasından dolayı, daha kısa şekilde,

$$\theta(x_i) = g_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.9}$$

yazabiliriz. Şimdi, θ nın çekirdeği R yani Kerθ = R olsun. Bu durumda,

$$R=\{r(x_1,x_2,\ldots,x_n)\epsilon F : \theta(r(x_1,x_2,\ldots,x_n))=e_G\}$$

dir. Gruplar için birinci izomorfizm teoreminden

$$G \cong F/R \tag{2.10}$$

elde edilir.

Elde ettiğimiz sonuçları aşağıdaki teoremle özetleyelim:

Teorem 4.2.1. *F* grubu, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ üzerinde serbest grup olsun. $g_1,g_2\ldots,g_n\epsilon G$ için $g_1,g_2,\ldots,g_n\epsilon G$ için $g_1,g_2,\ldots,g_n$ elemanları tarafından üretilen herhangi bir *G* grubu,

$$\theta(x_i)=g_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

dönüşümünden dolayı, *F* nin bir homomorfik görüntüsüdür. *Kerθ*, θ etkimesi altında, *G* de bağıntılara dönüşen *F* nin bütün kelimelerinden oluşur.

(2.10) un sağ tarafındaki *F*, *R* grup çiftinin *G* nin bir temsilini oluşturduğunu söyleyeceğiz. Bir grup, bu şekilde bir çok temsile sahiptir. Tersine, *R*, *F* nin bir normal alt grubu olmak üzere *G* yi, *F*/*R* olarak tanımlayalım. Bu taktirde $r(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ \epsilon\ R$ olmak üzere, *G* grubu, $g_i=x_iR$ (i=1,2,…,*n*) üreteçlerine ve $r(g_1,g_2,\ldots,g_n) = 1$ bağıntılarına sahiptir. Çünkü,

$q(g_1,g_2,\ldots,g_n) = 1$, *G* için bir bağıntıdır $\Leftrightarrow$ $q(x_1,x_2,\ldots,x_n)R = R$ dir, yani $q(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ \epsilon\ R$ dir.

Böylece, *R* nin elemanları, *G* nin üreteçleri tarafından sağlanan bağıntılar ile bire bir eşleşir. Bu sebepten, *R* ye, *G* nin bir *bağıntı grubu* denir.

2.3 Bir grubun tanımı

Şimdi *n* tane $g_1,g_2,\ldots,g_n$ üreteçleri ve *m* tane

$$\rho_k(g_1,g_2,\ldots,g_n)=1 \quad (k=1,2,\ldots,m) \tag{2.11}$$

bağıntıları ile tanımlanan bir *G* grubunu daha detaylı inceleyeceğiz.

Eğer $\sigma(g_1,g_2,\ldots,g_n) = 1$ ve $\tau(g_1,g_2,\ldots,g_n) = 1$, *G* de bağıntılar ise bu taktirde

$$\sigma(g_1,g_2,\ldots,g_n)\tau(g_1,g_2,\ldots,g_n) = 1,$$

$$\{\sigma(g_1,g_2,\ldots,g_n)\}^{-1} = 1$$

ve $g\ \epsilon\ G$ keyfi bir eleman olmak üzere,

$$g^{-1}\{\sigma(g_1,g_2,\ldots,g_n)\}g = 1$$

ifadeleri de G de bağıntılardır.

Yukarıdaki operasyonlar sonlu sayıda uygulanarak, (2.11) den elde edilen

$$\sigma(g_1, g_2, \ldots, g_n) = 1$$

bağıntısına (2.11) in bir *sonucu* adı verilir.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ üzerinde F serbest grubunu kullanarak, (2.12) bağıntısını ve $r = \rho(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kelimesini ilişkilendireceğiz. Genelliği bozmaksızın bunun bir indirgenmiş kelime olduğunu ve bu sebepten F nin meşru bir elemanı olduğunu varsayabiliriz. Örneğin,

$$g_1 g_2 g_2^{-2} g_1 g_2^{-1} = 1$$

bağıntısını kabul etmeyip, yerine

$$g_1 g_2^{-1} g_1 g_2^{-1} = 1$$

bağıntısını kullanacağız.

(2.11) bağıntıları,

$$r_k = \rho_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k=1,2,\ldots,\mathrm{m}) \qquad (2.13)$$

kelimelerine karşılık gelir.

Bu bağıntılar ve onların tüm sonuçları F nin, $r_1, r_2, \ldots, r_m$ terimlerini içeren en küçük R_0 normal alt grubunu oluştururlar. Bu grup,

$$R_0 = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}^F$$

ile gösterilir ve bu gruba $r_1, r_2, \ldots, r_m$ terimlerinin *normal kapanışı* adı verilir.

Tam olarak, R_0 grubu, $w \in F$ ve $r_k \in \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ olmak üzere, tüm $w^{-1} r_k w$ elemanları tarafından üretilen F nin alt grubudur. R_0 ın tamamen (2.11) cümlesi ve F ile belirlendiğine dikkat edelim.

Teorem 2.2.1 den dolayı, R grubu, G nin bağıntı grubu olmak üzere, G, F/R ile izomorfiktir. $r(g_1, g_2, \ldots, g_n) = 1$, G için bir bağıntı olacak şekilde, R, tüm $\mathrm{r}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kelimelerinin cümlesi olduğu için, R_0 ın her bir elemanının, R ye ait olduğu sonucu çıkarılır, yani

$$R_0 \leq R \qquad (2.14)$$

dir. Eğer,

$$R_0 = R \qquad (2.15)$$

ise, *G* grubu $g_1, g_2, \dots, g_n$ üreteçleri ve (2.11) bağıntıları ile tanımlanır ve daha kısa bir şekilde, (2.11), *G* için *tanımlayıcı bağıntıların* bir cümlesidir.

Başlangıçtan beri *G* nin *n* eleman tarafından üretildiği varsayılırsa, (2.15) koşulu, verilen (2.11) koşullarının ve sonuçlarının, *G* nin yapısı hakkındaki bilginin her makul parçasını içerdiğini belirtir.

Şimdi aşağıdaki varlık problemini dikkate almalıyız:

(2.11) bağıntılarının bir cümlesi verilsin. (2.11), tanımlayıcı bağıntıların cümlesi olmak üzere, *n* üreteç üzerinde bir *G* grubu var mıdır? Basit bir yorum bu sorunun cevabının olumlu olduğunu gösterir.

(2.11) den başlayarak, R_0 normal kapanışını oluşturunuz ve

$$G_0 = F/R_0 \tag{2.16}$$

yazarız. Bu grup, tüm (2.11) bağıntılarını sağlayan,

$$g_i^0 = x_i R_0 \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

kosetleri tarafından üretilir. Gerçekten,

$$\rho_k(g_1^0, g_2^0, \dots, g_n^0) = \rho_k(x_1, x_2, \dots, x_n)R_0 = r_k R_0 = R_0$$

dır. Çünkü $r_k \in R_0$ dır.

Varsayalım ki, *R*, G_0 ın bir bağıntı grubu olsun. Bu taktirde,

$$G_0 \cong F/R$$

dir.

Eğer, $r(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$ ise, x_i, g_i^0 (i=1,2,…,*n*) ile yer değiştirdiğinde, G_0 için bir bağıntıya dönüşür. Böylece

$$r(g_1^0, g_2^0, \dots, g_n^0) = r(x_1, x_2, \dots, x_n)R_0 = R_0$$

olur. Bundan dolayı, $r \in R_0$ dır. Buradan da anlaşılır ki,

$$R \leq R_0$$

dir. $R \leq R_0$ ve $R_0 \leq R$ olduğundan, $R = R_0$ dır. Böylece (2.11), G_0 için tanımlayıcı bağıntıların cümlesidir. $R_0 = F$ olduğundan, yalnızca aşikar grup (2.11) i sağlar.

Oluşturulan G_0 grubu, (2.11) i sağlayan en büyük ya da en serbest gruptur. Aşağıdaki teoremle, bu durum tam olarak gösterilir.

Teorem 2.3.1. G = gp$\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$,

$$\rho_k(g_1, g_2, \dots, g_n)=1_G \qquad (k=1,2,\dots,m) \tag{2.17}$$

tanımlayıcı bağıntılarıyla birlikte bir grup olsun.

H = gp$\{h_1,h_2,\dots,h_n\}$ nin aynı bağıntıları, yani,

$$\rho_k(h_1,h_2,\dots,h_n)=1_H \qquad (k=1,2,\dots,m)$$

bağıntılarını ve muhtemelen bunların sonuçları olmayanları da sağladığını varsayalım. Bu taktirde,

ε:G→H, ε(g_i)=h_i (i=1,2,…,n) dönüşümünden dolayı, H, G nin bir homomorfik görüntüsüdür.

İspat. G ve H, n tane üretece sahip olduğu için, sırasıyla G ve H nin bağıntı grupları olan R ve S çekirdekleri ile,

$$\theta:F\to G, \qquad \eta:F\to H$$

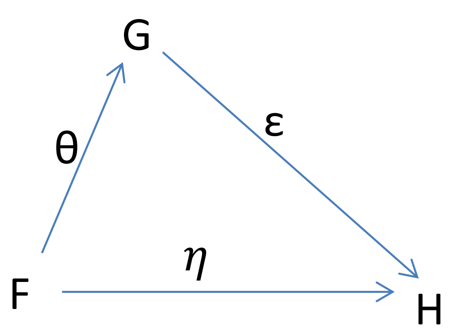
epimorfizmleri vardır. (2.14) notasyonunu kullanarak, $R = R_0$ diyebiliriz. Çünkü (2.17), G için tanımlayıcı bağıntıların bir cümlesidir. H için hipotez,

$$S \geq R_0(=R)$$

ifadesine denktir.

Şimdi ε:G→H dönüşümünün inşasına dönelim:

u=w($g_1, g_2, \dots, g_n$) ϵ G olsun.



θ bir epimorfizm olduğu için,

$$\theta(z)=u \tag{2.19}$$

olacak şekilde, bir z ϵ F vardır (z = $w(x_1,x_2,\dots,x_n)$ gibi).

u verildiğinde, $r\epsilon R$ olmak üzere, (2.19) un genel çözümü zr dir. Çünkü,

$$\theta(z)=\theta(z') \Leftrightarrow z^{-1}z'\epsilon R$$

dir.

Şimdi iddia ediyoruz ki, z, (2.19) ifadesini sağlıyor ise,

$$\varepsilon(u)=\eta(z) \tag{2.20}$$

eşitliği, G den H ye iyi tanımlı bir ε dönüşümünü belirler; yani,

z yi, zr ile değiştirirsek, (2.20) nin sağ tarafının aynı kalacağını doğrulamalıyız.

Fakat,

$$\eta(zr) = \eta(z)\eta(r) = \eta(z)$$

dir. Çünkü, (4.18) e göre, $r\epsilon S$ dir ve böylece η(r) = 1_H dir.

ε bir homomorfizm olduğu için,

$$\varepsilon(u_1)\varepsilon(u_2) = \varepsilon(u_1u_2)$$

dir. Özellikle, u = g_i olduğunda, z = x_i diyebiliriz ve tam olarak ε dönüşümünü belirleyen

$$\varepsilon(g_i) = \eta(x_i) = h_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

eşitliğini buluruz. Bu da ε un bir epimorfizm olduğunu gösterir. Şimdi,

$$G = gp\{a,c\},$$

$$a^3 = c^2 = (ac)^2 = 1 \tag{2.21}$$

bağıntılarıyla tanımlı bir grup olsun. x ve y üreteçleri üzerindeki F serbest grubunu kullanacağız ve (2.21) de verilen üç tane bağıntıyla

$$r_1 = x^3 \quad , \quad r_2 = y^2 \quad , \quad r_3 = (xy)^2$$

elemanlarını ilişkilendireceğiz.

$R_0=\{r_1, r_2, r_3\}^F$ ve $G_0=F/R_0$ olsun. $w\epsilon F$ olmak üzere, G_0 ın elemanları, wR_0 kosetleridir ve her bir kosetin,

$$R_0, xR_0, x^2R_0, yR_0, yxR_0, yx^2R_0 \tag{2.22}$$

kosetlerinden birine eşit olduğunu görmek kolaydır.

Örneğin, $xyR_0 = yx^2R_0$ dır. Çünkü r = $r^{-1}(xr_2^{-1}x^{-1})r_3 \,\epsilon\, R_0$ olmak üzere,

$$xy = yx^2r$$

dir.

Bu aşamada, (2.22) deki altı kosetin farklı olduğunu ileri süremeyiz. Çünkü bu kosetlerin bazılarını eşit hale getiren (2.21) in sonuçları olabilir. Buna rağmen, $|G_0| \leq 6$ dır. Biliyoruz ki, H, (4.21) i sağlayan iki üreteç üzerinde herhangi bir grup ise, bu taktirde H, G nin homomorfik görüntüsüdür ve böylece $|H| \leq |G_0|$ dir.

$H = S_3$ bu şartları sağlar. Çünkü S_3 simetrik grubu,

$$\alpha = (1\ 2\ 3) \text{ ve } \gamma(1\ 2)$$

tarafından üretilir ve

$$\alpha^3 = \gamma^2 = (\alpha\gamma)^2 = \iota$$

dir.

$|S_3| = 6$ olduğu için, $|G_0| = 6$ sonucunu çıkarırız ve böylece $G_0 \cong S_3$ dir.

Şimdi bir G grubunu, abeliyan yapma yönteminden, yani G den G nin en büyük abeliyan homomorfu olan G/G' grubuna geçişten bahsedelim. Bu, var olan bağıntılara

$$g_i^{-1} g_j^{-1} g_i g_j = 1 \qquad (i<j)$$

bağıntısı eklenerek gerçekleştirilecektir.

Örnek 2.6. G, kuaterniyon grubu aşağıdaki bağıntılar ile verilsin:

$$a^4 = 1 \quad , \quad a^2 = b^2 \quad , \quad ba = a^3 b \qquad (2.17)$$

Bu taktirde, G/G' grubunun yapısını inşa edelim.

G/G' abeliyan grubu, (2.17) den kaynaklanan

$$4\bar{a} = 0 \ , \ 2\bar{a} = 2\bar{b} \ , \ \bar{b}+\bar{a} = 3\bar{a}+\bar{b}$$

bağıntılarını sağlayan, $\bar{a} = aG'$ ve $\bar{b} = bG'$ terimleri tarafından üretilir. Yukarıdaki eşitlikler,

$$2\bar{a} = 2\bar{b} = 0$$

eşitliğine indirgenir. Karşılık gelen bağlantı matrisi diyogonal formdadır, böylece

$$G/G' \cong C_2 \oplus C_2$$

olduğu görülür.

Eğer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sembolleri üzerinde F serbest grubu, bu yolla abeliyan yapılırsa, $\bar{x}_i = x_iF$ olmak üzere, $F/F' = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \rangle$ buluruz. Böylece F/F', n tane üreteç üzerinde bir serbest abeliyan gruptur. Bu arada, farklı sayıda üreteç üzerindeki serbest gruplar izomorfik olmayabilir.

Gerçekten F_m ve F_n sırasıyla m ve n tane üreteç üzerindeki serbest gruplar olsun ve onların izomorfik olduğunu varsayalım. Bu taktirde, F_m/F_m' ve F_n/F_n' grupları da izomorf olacaktı. Fakat, bu gruplar sırasıyla m ve n üreteç üzerindeki serbest abeliyan gruplardır ve biliyoruz ki, $m = n$ değilse, bu gruplar izomorfik olamazlar.

Son olarak ispatsız olarak ifade edelim ki serbest bir grubun her alt grubu yine serbesttir.

BÖLÜM 3

ALT GRUPLARIN SERİLERİ

Bu son bölümde, Jordan-Hölder teorisi yardımıyla sonlu bir grubun normal alt gruplarının kompozisyon serilerinin nasıl inşa edildiği üzerinde durulacaktır. Bu bölümde kullanacağımız standart kaynaklar [6,9,10] olacaktır.

3.1 İç içe alt gruplar

Matematikte, kompleks oluşumları, indirgenemez daha basit bileşenlerine ayırmak yaygın bir uygulamadır. Örneğin, tam sayılar asal çarpanlarına, polinomlar indirgenemez çarpanlarına ayrılır.

Bir *G* grubunda ise, yöntem, uygun özelliklerle sırasıyla azalan veya artan

$$A_1 \geq A_2 \geq \ldots \quad \text{veya} \quad B_1 \leq B_2 \leq \ldots \tag{3.1}$$

alt grup serilerini incelemeye dayanır. Bu iç içe alt grupların her biri, G nin yapısına ışık tutar, fakat, burada ortaya çıkacağı gibi, onların hiç biri *G* yi tamamen karakterize etmeye yetmez. Bu bağlamda (3.1) serileri, *alt grup serileri* olarak adlandırılır.

3.2 Jordan-Hölder Teoremi

Bir grubun mertebesi birden büyük ve aşikar olmayan normal alt gruplara sahip değilse, bu grup *basit grup* olarak adlandırılır.

Rastgele seçilmiş gruplar için aşağıdaki tanım, normal alt grupların önemli bir türünü tarif eder.

Tanım 3.2.1. *A*, bir *G* grubunun bir normal alt grubu olsun. Eğer

$$A \rhd H \rhd G$$

olacak şekilde, *G* nin *H* normal alt grubu yoksa, *A* normal alt grubuna *G* nin bir *maksimal normal alt grubu* denir.

Bu tanım aşağıda verilen kriter ile yeniden ifade edilebilir:

Kriter 3.2.2. *A* (≠*G*) normal alt grubu *G* nin bir maksimal normal alt grubudur ⇔ *G/ A* bir basit gruptur. Eğer *G/A* asal mertebeli ise bu takdirde a bir maksimal normal alt gruptur. Yine, eğer *G* basit ise {1}, *G* nin yegane maksimal normal altgrubudur. Tartışmayı basitleştirmek için burada kendimizi sonlu gruplar ile kısıtlayacağız. Fakat elde edilen sonuçlar sonsuz gruplar için de geçerlidir.

Tanım 3.2.3 Eğer *G* basit olmayan bir grup ise bu taktirde A_n, *G* nin bir maksimal alt grubu, sonra A_2, A_1 in bir maksimal alt grubu olacak şekilde azalan sırada maksimal normal alt grupların bir dizisi var olsun, yani, eğer

(i) $G \rhd A_1 \rhd \ldots \rhd A_r \rhd \{1\}$ ise ve

(ii) $G/A_1, A_1/A_2, \ldots, A_{r-1}/A_r, A_r$ (3.3)

basit gruplar ise, *G* grubunun

$$A_1, A_2, \ldots, A_r \tag{3.4}$$

alt gruplarının bir dizisine, G nin bir *kompozisyon serisi* denir.

Açıkça, A_i, A_{i-1} de normal iken ve aslında maksimal normal iken, (3.2) dizisinde A_i den önce gelen herhangi diğer bir grup içinde normal olmak zorunda değildir. Özellikle, (3.4) grupları arasından yalnızca A_1 , *G* nin zorunlu olarak bir normal alt grubudur.

(3.3) de listelenen bölüm grupları, *kompozisyon bölüm grupları* ya da *kompozisyon çarpanlar* olarak adlandırılır. Genel olarak maksimal normal alt gruplar biricik olmadığından birden fazla kompozisyon serisi mevcut olabilir. Bununla birlikte, aşağıdaki temel teorem kompozisyon parçalarının biricik olduğunu söyler.

Teorem 3.2.4 (Jordan-Hölder)

Bir sonlu grubun herhangi iki kompozisyon serisi içinde, kompozisyon çarpanlar sıraları hariç, izomorfik çiftlerdir.

İspat. $G(=A_0) \rhd A_1 \rhd A_2 \rhd \ldots \rhd A_r \rhd \{1\}$ (I)

ve

$$G(=B_0) \rhd B_1 \rhd B_2 \rhd \ldots \rhd B_s \rhd \{1\} \tag{II}$$

G için iki tane kompozisyon serisi olsun. Eğer,

$$G/A_1 , A_1/A_2 , \ldots , A_{r-1}/A_r, A_r \qquad \text{(I)'}$$

ve

$$G/B_1\ ,\ B_1/B_2\ ,\ \dots\ ,\ B_{s-1}/B_s\ ,\ B_s \qquad \text{(II)'}$$

kompozisyon çarpanları çiftler halinde izomorfik ise , (I) ~(II) yazılır. Açıkça, bu, tüm mümkün kompozisyon serilerinin cümlesi içinde yeni düzenlemeler hariç olmak üzere bir denklik bağıntısı oluşturur, ve amacımız, bu anlamda tüm kompozisyon serilerinin denk olduğunu göstermektir.

Özellikle, dikkat edelim ki, (I)~(II) ise r=s dir.

G basit olduğunda, tek mümkün kompozisyon serisi $G \rhd \{1\}$ dir. Bu durumda (I) ve (II) serileri kesinlikle özdeştir ve $r=s=0$ dır. Böylece teorem açık bir şekilde tüm basit gruplar için ve özellikle mertebesi dörtten az tüm gruplar için sağlanır.

Şimdi |G| üzerinde tümevarımla ispata devam edeceğiz ve basit grupları göz ardı edeceğiz, yani bundan böyle, *r*≥1 ve *s*≥1 olduğunu varsayacağız. Bu şartlar altında 2 durum vardır:

(i) A_1=B_1 olsun. (I) ve (II) deki ilk terimler çıkarılarak, A_1 için iki tane kompozisyon serisi elde ederiz, yani

$A_1 \rhd A_2 \rhd \dots \rhd A_r \rhd \{1\}$

ve

$$A_1 \rhd B_2 \rhd \dots \rhd B_s \rhd \{1\}$$

dir.

$|A_1| < |G|$ olduğu için, tümevarım hipotezi

$$A_1/A_2\ ,\ A_2\ /A_3\ ,\ \dots\ ,\ A_r$$

ve

A_1/B_1 , B_1/B_2, … , B_s

kompozisyon çarpanlarının çiftler halinde izomorfik olduğunu belirtir. (I) ve (II)' de ilk terimler özdeş olduğu için, (I)~(II) dir ve bu durumda teorem ispat edilmiş olur.

Şimdi de (ii) $A_1 \neq B_1$ olsun. $A_1 \lhd G$ ve $B_1 \lhd G$ olduğu için,

$$C = A_1\ B_1$$

grubu G de normaldir ve bu grup A_1 i hem de B_1 i içerir. Özellikle,

$$G \geq C \geq A_1$$

dir. Fakat A_1 , G nin maksimal bir normal alt grubudur. Bundan dolayı, ya $C = G$ ya da $C = A_1$ dir. İkinci seçenek kabul edilmemelidir. Çünkü, $B_1 < C$ olduğu için, $G > A_1 > B_1$ olur. Bu ise, B_1 in maksimal olması ile çelişir. Böylece

$$G = A_1B_1$$

dir. Şimdi $D = A_1 \cap B_1$ olsun. İkinci izomorfizm teoreminden

$$G/A_1 \cong B_1 / D \qquad , \qquad G/B_1 \cong A_1 / D \tag{3.5}$$

buluruz.

Yapı olarak, G / A_1 ve G / B_1 basit gruplardır ve böylece B_1 / D ve A_1 / D grupları da basit gruplardır, yani, D, hem A_1 in hem de B_1 in maksimal bir normal alt grubudur. Şimdi,

$$D \rhd D_1 \rhd \ldots \rhd D_t \rhd \{1\} \tag{III}$$

ve

$$G \rhd A_1 \rhd D \rhd D_1 \rhd \ldots \rhd D_t \rhd \{1\} \qquad \text{(IV)}$$

dir. Aslında tüm

$$G_1 \,/\, A_1 \,,\, A_1 \,/\, D \,, \qquad D/D_1, \ldots, D_t \qquad \text{(III)'}$$

$$G \,/\, B_1 \,,\, B_1/D \,, \qquad D/D_1 \,, \ldots, D_t \qquad \text{(IV)'}$$

kompozisyon çarpanları basit gruplardır. Dikey çizginin sağ tarafındaki kompozisyon çarpanları (III)' ve (IV)' de ortaktır, ayrıca sol taraftakiler çapraz çiftler halinde düzenlendiğinde izomorfiktirler.

Böylece (III)~(IV) dir. Diğer taraftan (i) durumunda tartışılan bir durumda, (I) ve (III) ile iki terimde uyuşur.

Böylece (I)~(III) dir. Benzer şekilde, (II)~(IV) dir. Dolayısıyla, (I)~(II) sonucu elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. Şimdi aşağıdaki iki örnekle temel teoremi daha anlaşılır kılalım.

Örnek 3.2.5. *G*, mertebesi 6 olan Abelyen olmayan bir grup olsun. *G* grubu

$$a^3 = b^2 = (ab)^2 = 1$$

bağıntılarıyla tanımlanabilir.

A = gp{a} alt grubunun mertebesi 3 tür ve G de indeksi 2 dir. Bu yüzden,

$A \lhd G$ dir. Dolayısıyla

$$G \rhd A \rhd \{1\}$$

bir kompozisyon serisidir, çünkü

$$G/A \cong C_2 \qquad \text{ve} \qquad A \cong C_3 \tag{3.6}$$

çarpanları asal mertebelidir ve dolayısıyla basittir.

Örnek 3.2.6. G = gp{s}, mertebesi 6 olan devirli bir grup olsun. A_2=gp$\{s^2\}$, mertebesi 3 olan bir alt gruptur, ve bir abelyen grubun tüm alt grupları normal olduğu için,

$$G/A_2 \cong C_2 \qquad \text{ve} \qquad A_2 \cong C_3 \tag{3.7}$$

çarpanları ile

$$G \rhd A_2 \rhd \{1\}$$

kompozisyon serisini elde ederiz.

Bundan farklı olarak, mertebesi 2 olan A_3 = gp$\{s^3\}$ alt grubu ile başlayabiliriz ve (3.7) ile aynı, fakat ters mertebeli

$$G/A_3 \cong C_3 \qquad \text{ve} \qquad A_3 \cong C_2$$

çarpanlarına sahip,

$$G \rhd A_3 \rhd \{1\}$$

kompozisyon serisini oluşturabiliriz. Bu gruplar izomorfik olmamalarına rağmen, Örnek 3.2.5 ve Örnek 3.2.6 da aynı kompozisyon çarpanları oluştuğu görülür. İki durumda da kompozisyon çarpanlar asal mertebelidir. Bu özellik gelecek kısımda çalışacağımız grupların önemli bir sınıfını karakterize eder.

3.3 Çözülebilir Gruplar

Tanım 3.3.1. Bir sonlu grubun tüm kompozisyon çarpanları asal mertebeli ise, bu grup *çözülebilir* olarak adlandırılır. Verilen bir grubun çözülebilir olup olmadığına karar vermek için aşağıdaki önerme kullanılır.

Önerme 3.3.2. *G* sonlu bir grup olsun. Eğer *G* grubu, *H* ve *G/H* çözülebilir olacak şekilde bir *H* normal alt grubu içeriyor ise, bu taktirde bu grup çözülebilirdir.

İspat. Eğer önermenin hipotezindeki bu koşullar yerine getirilirse,

$$H \rhd H_1 \rhd \ldots \rhd H_r \rhd \{1\} \tag{3.8}$$

ve

$$G/H \rhd G_1/H \rhd \ldots \rhd G_s/H \rhd H \tag{3.9}$$

kompozisyon serileri elde edilir. (*G/H* nin herhangi bir alt grubu, *A/H* formunda yazılabilir ve *H*, *G/H* nin birim elemanıdır.)

Hipoteze göre, (3.8) ve (3.9) un kompozisyon çarpanları asal mertebelidir ve özellikle G_s/H asal mertebeye sahiptir. İkinci izomorfizm teoreminden,

$$\frac{G_{i-1}/H}{G_i/H} \cong G_{i-1}/G_i \qquad (G_0=G)$$

olduğu için,

$$G \rhd G_1 \rhd \ldots \rhd G_s \rhd \mathrm{H} \rhd H_1 \rhd \ldots \rhd H_r \rhd \{1\}$$

G için her bir kompozisyon çarpanının mertebesi asal olan bir kompozisyon serisidir. Bundan dolayı, *G* çözülebilirdir.

Önerme 3.3.3. Tüm sonlu Abelyen gruplar çözülebilirdir.

İspat. *A* sonlu bir Abelyen grup olsun. *p* asal olmak üzere, |A|= p ise,

$$A \rhd \{1\}$$

kompozisyon serisi, *A* nın çözülebilirliğini gösterir. |*A*| üzerinde tümevarım uygulayalım ve *A* nın bileşen mertebeli bir grup olduğunu varsayalım.

A grubu, *A* da kesinlikle normal olan gerçek bir *H* alt grubuna sahiptir. *H* ve *A*/*H*, mertebesi |*A*| dan küçük olan Abelyen gruplar olduğu için, tümevarım hipotezi *H* ve *A* / *H* nin çözülebilir olduğunu belirtir. Böylece Önerme 3.3.2 den, *A* çözülebilirdir.

Önerme 3.3.4. Bir *G* sonlu grubu çözülebilirdir ⇔ *G* grubu,

$$G \rhd B_1 \rhd B_2 \rhd \ldots \rhd B_s \rhd \{1\} \qquad (G=B_0\ ,\ \{1\} = B_{s+1}) \tag{3.10}$$

ve her bir

$$B_{i-1}/B_i \qquad (i=1,2,\ldots,s+1)$$

abelyen olacak şekilde, B_1, B_2,..., B_s alt gruplarına sahiptir.

İspat. Eğer *G* çözülebilir ise, Tanım 3.3.1 e göre B_{i-1}/B_i asal mertebeli olacak şekilde bir Abelyen (3.10) serisi vardır. Tersine (3.10) ve (3.11) in sağlandığını varsayalım. Her bir grup kendinden öncekinin gerçek bir alt grubu olduğu için, (3.10) da gereksiz terim olmadığını varsayabiliriz. $|G|$ üzerinde tümevarımla ispata devam edelim. (3.10) un ilk terimini yok sayarak, tümevarım ile, B_1, için B_1 in çözülebilir olduğunu ifade eden bir seri elde ederiz. (3.11) de i=1 yazarak, G/B_1 in Abelyen olduğunu ve böylece çözülebilir olduğunu görürüz. Böylece Önerme 3.3.2 den G çözülebilirdir.

3.4 Türetilmiş Seriler

Tanım 3.4.1. G verilen bir grup ve x,y ϵ G olsun. Bu durumda x ve y elemanlarına karşılık gelen

$$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

ifadesine x ve y nin komütatörü denir. Bu şekildeki bütün komütatörler vasıtasıyla üretilen gruba, G nin türetilmiş (veya komütatör) grubu denir ve genellikle G' olarak gösterilir. Yani,

$$G' = \mathrm{gp}\{[x,y] \mid x,y \in G\}$$

dır. Böylece, G' nin bir tipik elemanı komütatörlerin bir sonlu çarpımıdır.

Açık olarak, $G' = \{1\} \Leftrightarrow G$ Abelyendir. Ayrıca, G' türetilmiş grubu G nin bir normal altgrubudur ve G / G' Abelyendir. Diğer taraftan, H, G nin herhangi bir normal altgrubu ise bu taktirde $G' \leq H$ dır.

G', G grubunun türetilmiş (komütatör) grubu olmak üzere,

$$G(=G^0)\ ,\ G',\ G''=(G')',\ldots,G^{(i)} = (G^{(i-1)})',\ldots$$

dizisini inşa edelim. $G^{(i)} \leq G^{(i-1)}$ olduğu için

$$G \geq G' \geq G'' \geq \ldots \geq G^{(i)} \geq \cdots \tag{3.12}$$

dir. Bu ise G nin *türemiş serisi* olarak adlandırılır.

(3.12) deki her bir grup yalnızca kendinden öncekilerinin normali değildir, aynı zamanda kendi başına G nin karakteristik ve böylece normal bir alt grubudur.

Teorem 3.4.2. G sonlu grubu çözülebilirdir ⇔ G nin türetilmiş serisi birim grupta sonlanır, yani bazı negatif olmayan s tamsayısı için $G^{(s)} = \{1\}$ dir.

İspat. (i) $G^{(s)} = \{1\}$ olsun. Böylece, türetilmiş seri

$$G > G' > \ldots > G^{(s-1)} > \{1\} \tag{3.13}$$

dir. O halde, türetilmiş grubun yukarıda verilen özelliğinden, $G^{(i-1)} / G^{(i)}$ Abelyendir. Böylece (3.13), Önerme 3.3.4 de dikkate alınan biçimde bir seridir. Bundan şu sonuç çıkar ki, G çözülebilirdir.

(ii) G nin çözülebilir olduğunu ve böylece (3.10) ve (3.11) i sağlayan bir alt gruplar serisine G grubunun sahip olduğunu varsayalım. İddia ediyoruz ki

$$G^{(i)} \leq B_i \qquad (i=1,2,\ldots) \tag{3.14}$$

dir. G/ B_1, Abelyen olduğu için, türetilmiş grubun yukarıdaki özelliğinden, $G' \leq B_1$ sonucunu çıkarırız. Şimdi, $G^{(i-1)} \leq B_{i-1}$ eşitsizliğine tümevarım hipotezini uygulayalım. Türetilmiş grubun tanımından, eğer $K \leq L$ ise $K' \leq L'$ dir. Böylece

$$G^{(i)} = (G^{i-1}) \leq B_{i-1}'$$

dir. B_{i-1} / B_i Abelyen olduğu için, türetilmiş grubun yukarıdaki özelliğinden dolayı

$B_{i-1} \leq B_i$dir. Böylece $G^{(i)} \leq B_i$ dir. Bu ise, (3.14) ü ispatlar. Diğer taraftan,

$i = s+1$ olduğu zaman,

$$G^{(s+1)} \leq B_{s+1} = \{1\}$$

olur. Böylece türetilmiş seri, birim grupla sonlanır.

3.5 Nilpotent Gruplar

A ve B, G nin herhangi iki alt cümlesi olmak üzere,

$$[A,B] = \mathrm{gp}\{[a,b] \mid a \in A \, , \, b \in B\} \tag{3.15}$$

alt grubunu inşa edelim.

$$[a,b]^{-1} = (a^{-1}b^{-1}ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}ba = [b,a]$$

olduğu için,

$$[A,B] = [B,A] \tag{3.16}$$

dir. Açıktır ki, eğer $B \leq C$ ise $[A,B] \leq [A,C]$ dir. Şimdi, keyfi bir G grubuyla aşağıdaki gibi tümevarımsal olarak tanımlanan alt grupların bir dizisini ilişkilendirelim:

$$\Gamma_1 = G \, , \, \Gamma_2 = [G,G] = G' \, ,\ldots, \Gamma_{k+1} = [\Gamma_k, G] \tag{3.17}$$

$\Gamma_{k+1} \leq \Gamma_k$ $(k=1,2,\ldots)$ olduğunu göstermeliyiz. $k = 1$ olduğunda bu aşikardır. Kabul edelim ki $\Gamma_k \leq \Gamma_{k+1}$ (k>1) olsun. $\Gamma_{k+1} = [\Gamma_k, G] \leq [\Gamma_{k-1}, G] = \Gamma_k$ sonucunu çıkarırız. Böylece (3.17), aslında bir,

$$G = \Gamma_1 \geq \Gamma_2 \geq \ldots \geq \Gamma_k \geq \Gamma_{k+1} \geq \ldots \tag{3.18}$$

azalan serisidir.

Her bir Γ_k , G nin karakteristik bir alt grubudur, yani α, G nin bir otomorfizmi ise bu taktirde $\alpha(\Gamma_k) = \Gamma_k$ dir. Çünkü $\alpha : G \to G$ bir homomorfizm olduğu için,

$\alpha([a,b]) = [\alpha(a),\alpha(b)]$ olur. Böylece $\alpha([A,B]) = [\alpha(A),\alpha(B)]$ dir. Ayrıca $\alpha(G) = G$ ve

$\alpha(\Gamma_{k+1}) = [\alpha(\Gamma_k) , G]$ dir. Diğer taraftan $\alpha(\Gamma_k) = \Gamma_k$ olduğu için, $\alpha(\Gamma_{k+1}) = [\Gamma_k, G] = \Gamma_{k+1}$ dir.

Böylece

$$\alpha(\Gamma_k) = \Gamma_k \qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

dir. Sonuç olarak, $\Gamma_k \lhd G$ (k=1,2,3,…) ve daha ziyade $\Gamma_{k+1} \lhd \Gamma_k$ dir.

Önerme 3.5.1. Γ_k / Γ_{k+1} bölüm grubu, G / Γ_{k+1} (k=1,2,…) in merkezindedir.

İspat. v: $G \to \Gamma_{k+1}$, G nin G / Γ_{k+1} üzerine doğal dönüşümü olsun, yani $x \in G$ olmak üzere,

$v(x) = x\Gamma_{k+1} = \bar{x}$ dir. v nin çekirdeği Γ_{k+1} e eşittir. $u \in \Gamma_k$ olmak üzere, Γ_k / Γ_{k+1} in tipik bir elemanı $\bar{u} = u\Gamma_{k+1}$ dir. $\bar{u}$ ve $\bar{x}$ nin, her x için değişmeli olduğunu göstermek zorundayız, yani $\bar{1}(=\Gamma_{k+1})$, G / Γ_{k+1} in birim elemanı olmak üzere,

$[\bar{u},\bar{x}] = \bar{1}$ olduğunu ispatlamalıyız. Diğer taraftan,

$$[\bar{u},\bar{x}] = [\mathrm{v(u)},\mathrm{v(x)}] = v([\mathrm{u},\mathrm{x}])$$

dir.

Γ_{k+1} in tanımından, $[u,x] \in \Gamma_{k+1}$ dir. Böylece $v([u,x]) = \bar{1}$ dir. Bu ise ispatı tamamlar.

Lemma 3.5.2. U, G nin karakteristik bir alt grubu ve V/U , G/U nun merkezi olsun. Bu taktirde V, G nin karakteristik bir alt grubudur.

İspat. V grubu, G nin modül U ya göre, G ile değişmeli olan en büyük alt grubu olarak tarif edilebilir, yani

$$[V,G] \leq U$$

dir. Aslında, $\mu : G \rightarrow G/U$ doğal dönüşümünü uygularsak, $\bar{1}$, G/U nun birim elemanı olmak üzere, bu bağıntı $[\mu(V),\mu(G)] = \{\bar{1}\}$ bağıntısına dönüşür. Bu ise $V/U(=\mu(V))$ nun her bir elamanının, G / U$(=\mu(G))$ nun her bir elemanı ile değişmeli olduğu anlamına gelir. Şimdi, α, G nin bir otomorfizmi olsun. Bu taktirde, $[\alpha(V),G] \leq \alpha(U)$ dir. Hipoteze göre, $\alpha(U) = U$ ve böylece $[\alpha(V),G] \leq U$ dir.

Dolayısıyla, V nin maksimalliğinden, $\alpha(V) \subset V$ dir. Eğer α yerine α^{-1} i kullanırsak

$\alpha^{-1}(V) \subset V$, yani $V \subset \alpha(V)$ sonucunu çıkarırız. Bundan $\alpha(V) = V$ dir. Böylece V bir karakteristik alt gruptur. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi $Z_0 = \{1\}$ yazalım ve Z_1, G nin merkezi olsun. Z_1, G nin bir karakteristik alt grubu olduğu için, Lemma 3.5.2 den Z_2 / Z_1, G / Z_1 in merkezi olacak şekilde bir karakteristik Z_2 alt grubu vardır. Tümevarımla ilerleyerek, Z_{j+1} / Z_j, G / Z_j nin merkezi olmak üzere Z_{j+1} i tanımlayalım. Böylece

$$\{1\} = Z_0 \leq Z_1 \leq \ldots \leq Z_j \leq \ldots \tag{3.19}$$

karakteristik alt grupların artan bir serisini oluştururuz.

Tanım 3.5.3. (i) Eğer $\Gamma_{k+1} = [\Gamma_k,G]$ (k=1,2,…,r) olmak üzere,

$$G = \Gamma_1 > \Gamma_2 > \ldots > \Gamma_k > \ldots > \Gamma_r > \Gamma_{r+1} = \{1\} \tag{3.20}$$

ise, bir G grubu, *r uzunluğunda bir alt merkezi seriye sahiptir* denir.

(ii) Eğer Z_j / Z_{j-1}, G / Z_{j-1} (j=1,2,…,s) nin merkezi olmak üzere,

$$\{1\} = Z_0 < Z_1 < \ldots < Z_j < \ldots < Z_s = G \tag{3.21}$$

ise, bir G grubu *s uzunluğunda bir üst merkezi seriye sahiptir* denir.

Lemma 3.5.2 de olduğu gibi, Z_j,

$$[Z_j, \mathrm{G}] \leq Z_{j-1} \tag{3.22}$$

özelliğine sahip G nin en büyük alt grubu olarak karakterize edilebilir.

Bu iki merkezi serinin terimleri arasında dikkat çekici ilişkiler vardır. Eğer bu serilerden biri var ise, diğeri de vardır ve her iki seri de aynı uzunluğa sahiptir.

İlk önce G nin r uzunluğunda bir alt merkezi seriye sahip olduğunu varsayalım. Böylece (3.20) sağlanır ve bu grup için (3.19) serisini göz önüne alalım. Şimdi,

İddia ediyoruz ki,

$$\Gamma_{k+1} \leq Z_i \quad (i=0,1,\ldots,r) \tag{3.23}$$

dir.

i = 0 olduğunda, bu açık bir şekilde doğrudur. Çünkü Γ_{k+1} = {1} = Z_0 olduğu varsayıldı.

$\Gamma_{r-1} \leq Z_{i+1}$ i ispatlamak istersek, tümevarım hipotezini kullanarak, i nin özel bir değeri için (3.23) sağlanır. Γ_{r+1-i} = [Γ_{r-i}, G] olduğu için, hipotezimizden [Γ_{r-i},G] ≤ Z_i dir.

(3.22) ye göre, [Z_{i+1},G] ≤ Z_i olacak şekilde, Z_{i+1} en büyük alt gruptur. Buradan $\Gamma_{r-i} \leq Z_{i+1}$ dir. Böylece, i nin her bir değeri için (3.23) ispatlanır. Özellikle, i = r olduğunda, Γ_1 = G ≤ Z_r

bulunur. Bu demektir ki, Z_r = G dir. Böylece (3.19), en fazla r adım sonra G de sonlanır, yani G, uzunluğu s olan, $s \leq r$ yi sağlayan bir üst merkezi seriye sahiptir.

İkinci olarak, G için (3.21) in sağlandığını varsayalım ve bu grup için (3.18) serisini inceleyelim. Şimdi iddia ediyoruz ki,

$$\Gamma_i \leq Z_{s+1-i} \quad (i = 1,2,\ldots,s+1) \tag{3.24}$$

dir.

$i = 1$ olduğunda, bu durum sağlanır. Çünkü, $Z_s = G = \Gamma_1$ olduğunu varsaydık.

Tümevarımla devam ederek, (3.24) ün i nin bir özel değeri için sağlandığını varsayalım ve $\Gamma_{i+1} \leq Z_{s-1}$ olduğunu gösterelim. Gerçekten,

$$\Gamma_{i+1} = [\Gamma_i, G] \leq [Z_{s+1-i}, G] \leq Z_{s-i}$$

dir. (3.24) de i yerine s+1 yazılarak, $\Gamma_{s+1} \leq Z_0 = \{1\}$ elde edilir, yani $\Gamma_{s+1} = \{1\}$ dir.

Böylece (3.18), en fazla s+1 adım sonra, {1} de sonlanır. Bu ise, G nin $r \leq s$ yi sağlayan, r uzunluğunda bir alt merkezi seriye sahip olduğunu ispatlar. Sonuç olarak, $s \leq r$ ve $r \leq s$ olduğundan $s = r$ dir.

Tanım 3.5.4. Bir G grubu, bir alt merkezi seriye ya da bir üst merkezi seriye sahip ise, bu gruba *nilpotent grup* denir. Bu serilerin ortak uzunluğu G nin *nilpotentlik sınıfı* olarak adlandırılır.

Örnek 3.5.5. A grubu, mertebesi birden büyük bir Abelyen grup ise, üst merkezi seri,

$$\{1\} = Z_0 < Z_1 = A$$

serisine indirgenir. Böylece Abelyen grupların cümlesi ($\neq\{1\}$), birinci sınıf nilpotent grupların cümlesi ile denk düşer.

Örnek 3.5.6. *Sonlu p-gruplar nilpotenttir.* Eğer *P* sonlu bir *p-grup* ise, bu grubun merkezi olan Z_1 in mertebesi birden büyüktür. Ayrıca *P* / Z_1 de bir *p*-gruptur ve böylece onun merkezi Z_2 / Z_1 aşikar değildir, yani Z_1 < Z_2 dir. Benzer şekilde, Z_2 < Z_3 olmak üzere, *P* / Z_2 grubu, Z_3 / Z_2 merkezine sahiptir. bu şekilde devam ederek, bir

$$\{1\} = Z_0 < Z_1 < Z_2 < Z_3 < \ldots$$

artan serisini oluştururuz. Fakat *P* sonlu olduğundan, bu seri de sonlanmalıdır. Z_r = *P* olduğunda bu durum gerçekleşir. Böylece *P*, bir üst merkezi seriye sahiptir ve bundan dolayı nilpotenttir.

Önerme 3.5.7. *G* bir nilpotent grup olsun. Eğer *H*, *G* nin bir gerçek alt grubu ise, *G* de, *H* nin *N*(*H*) normalleştireni kesinlikle *H* den büyüktür.

İspat. *G* grubu, *r* sınıfında bir nilpotent grup olsun. $\{1\} = Z_0 \leq H$ olduğu açıktır. Diğer yandan, *H* bir alt grup olduğundan, $G = Z_r \nleq H$ dir. Böylece $0 \leq k \leq r$-1 ve

$$Z_k \leq H \;,\; Z_{k+1} \nleq H \tag{3.25}$$

olacak şekilde tek bir *k* tamsayısı vardır. Dolayısıyla $u \in Z_{k+1}$ ve $u \notin H$ olacak şekilde bir *u* elemanı vardır. $u \in$ N(*H*), yani

$$u^{-1}\mathrm{H}u = H \tag{3.26}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi,

$h_1 \in H$ keyfi bir eleman olsun. Bu taktirde (3.22) ve (3.25) den dolayı

$$[u, h_1] \in [Z_{k+1}, G\, G] \leq Z_k \leq H$$

dir. Bu demektir ki, $h_2 \in H$ olmak üzere, $u^{-1}h_1^{-1}$u $\in H$ dir. Aynı zamanda $h_1^{-1} \in H$ olduğu için, $u^{-1}Hu \subset H$ dir. Aynı şekilde, u yerine u^{-1} yazarsak, $uHu^{-1} \subset$H sonucunu çıkarırız, yani $H \subset u^{-1}Hu$ dir. Böylece, (3.26) ispatlanır. Bu ise önermeyi ispatlar.

KAYNAKLAR

1. Cameron, P. J. , 2008. Introduction to Algebra, Second Edition. Oxford University Press, New York, 350pp.

2. Gilbert, J., Gilbert, L., 2005. Elements of Modern Algebra, 6th Edition. Thomson Brooks/Cole, 430pp.

3. Herstein, I. N.,1975. Topic in Algebra, 2nd Edition. Wiley, 400pp.

4. Hungerford, T. W., 1974. Algebra, Graduate Texts in Mathematics. New York, 502 pp.

5. Judson, T. W., 1997. Abstract Algebra Theory and Applications. VCU mathematics Textbook Series, 357 pp.

6. Katznelson, Y., Katznelson, Y. R., 2008. A(Terse) Introduction to Linear Algebra, AMS, 215pp.

7. Ledermann, W., 1991. Introduction to Group Theory. Longman Scientific and Technical, 176pp.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Mehmet ÇETİNKAYA

Uyruğu: Türkiye (TC)

Doğum Tarihi ve Yeri: 16 Şubat 1990, Bünyan

Medeni Durumu: Evli

Tel: +90 554 694 81 19

Email: cetinkaya.mehmet2104@gmail.com

Yazışma Adresi: Bahçelievler Mah. Hayyam Caddesi No: 18 Talas/KAYSERİ

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi**
Pedagojik Formasyon	Ahi Evran Eğitim Fakültesi	2014
Lisans	EÜ Fen Fakültesi Matematik	2013
Lise	Sema Yazar Anadolu Lisesi	2008

YABANCI DİL

İngilizce