

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BAZI İTERASYON ÇEŞİTLERİ VE AĞIRLIKLİ ORTALAMA MATRİSİ

DERYA SEKMAN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. VATAN KARAKAYA**

İSTANBUL, 2015

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
BAZI İTERASYON ÇEŞİTLERİ VE AĞIRLIKLİ ORTALAMA MATRİSİ

Derya SEKMAN tarafından hazırlanan tez çalışması 13.08.2015 tarihinde aşğıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. İrfan ŞİAP
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK
İstanbul Ticaret Üniversitesi

ÖNSÖZ

Çalışmalarımda ve tezin hazırlanma sürecinde yardımlarını esirgemeyen, bilgi ve tecrübeleriyle beni daima destekleyen ve üzerimde emeği bulunan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Vatan KARAKAYA' ya en samimi duygularıyla teşekkür ederim.

Hayatım boyunca destek ve güvenlerini her zaman yanımda hissettiğim sevgili annem, babam ve tüm aileme bütün içtenliğimle sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ve bu süreçte bana her zaman yardımcı olan tüm ekip arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Ağustos, 2015

Derya SEKMAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
Literatür Özeti	1
Tezin Amacı	3
Hipotez	4
BÖLÜM 2	
TEMEL TANIM ve TEOREMLER	5
2.1 Analiz ve Fonksiyonel Analizle İlgili Bazı Kavramlar	5
2.2 Toplanabilme Teorisiyle İlgili Bazı Kavramlar	13
2.3 Sabit Nokta Teorisiyle İlgili Bazı Kavramlar	16
BÖLÜM 3	
BAZI SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMLERİ	22
BÖLÜM 4	
AĞIRLIKLİ ORTALAMA MATRİSİNE GÖRE TOPLANABİLME METODUYLA İTERASYON	49
4.1 İterasyon yöntemi	50
4.2 Toplanabilme-İterasyon İlişkisi	50
BÖLÜM 5	
AĞIRLIKLİ ORTALAMANIN MANN İTERASYONU	60
5.1 İterasyon Dizisinin Kuvvetli Yakınsak Olması	63
5.2 İterasyon Dizisinin Zayıf Yakınsak Olması	72
BÖLÜM 6	

SONUÇ VE ÖNERİLER	76
KAYNAKLAR.....	77
ÖZGEÇMİŞ.....	86

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
K	Cisim $K = \mathbb{R}$ yada $\mathbb{C}$
$\ x\ _{\infty}$	ℓ_{∞} uzayının alışılmış supremum normu
$T: X \rightarrow Y$	X den Y ye tanımlı T dönüşümü
$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$	X üzerinde tanımlı uzaklık fonksiyonu
(X, d)	X Metrik uzayı
$(X, \ \bullet\)$	X Normlu uzayı
F_T	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$(.,.,.)$	İterasyon yöntemi
$G(u, v)$	Ağırlıklı ortalama matrisi
$B(x, r)$	x merkezli, r yarıçaplı açık yuvar
(a_{nk})	Satır ve sütun sayısı sonsuz olan matris
E^*	E nin duali

BAZI İTERASYON ÇEŞİTLERİ VE AĞIRLIKLI ORTALAMA MATRİSİ

Derya SEKMAN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Altı bölümden oluşan bu çalışmada; Cesàro, Riezs, Nörlund ortalamalarının genelleştirilmesi olan ağırlıklı ortalama matrisi yardımıyla Mann iterasyon yönteminin, bazı dönüşüm sınıflarının sabit noktasına yakınsaklığına ilişkin bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Birinci bölümde, sabit nokta teorisi ve toplanabilme teorisinin tarihsel süreci hakkında literatür özeti verilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamız boyunca kullandığımız temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, geniş bir çalışma alanı olarak günümüze kadar gelmiş ve hala çalışılmakta olan bazı iterasyon yöntemlerinin bir derlemesi yapılmıştır.

Dördüncü bölümde, regüler tipten ağırlıklı ortalama matrisi alınarak Mann iterasyonunun sürekli dönüşümlerin sabit noktasına yakınsadığı ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde ise, ağırlıklı ortalamanın Mann iterasyonu tanımlanarak asimptotik genişlemeyen dönüşüm sınıfları için kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları incelenmiştir.

Ve tezin son bölümünde, çalışmamızdan elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, İterasyon yöntemi, Mann iterasyonu, Toplanabilme, Ağırlıklı ortalama matrisi, Asimptotik genişlemeyen dönüşüm.

SOME ITERATION PROCEDURES AND WEIGHTED MEAN MATRIX

Derya SEKMAN

Department of Mathematical Engineering

MSc. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

In this study which consist of six chapters, some results relating to convergence of Mann iteration procedure to the fixed point of some transformation classes have been obtained by the help of weighted mean matrix which is generalization of Cesàro, Riezs and Nörlund means.

In the first chapter, literature summary is given about historical process of the fixed point theory and summability. In the second chapter, the basic definitions and theorems which are used in the process of this study have been given.

In the third chapter, some iteration procedures which reach up to today as a wide field of study have been compiled.

In the fourth chapter, using regular type weighted mean matrix, it has been proven that Mann iteration converges to fixed point of continous transformations.

In the five chapter, defining Mann iteration of weigted mean, strong and weak convergence of asymptotically nonexpansive transformation classes have been examined. In the last chapter of the thesis, the results obtained from our study have been given.

Key words: Fixed point, Iteration procedure, Mann iteration, Summability, Weighted mean matrix, Asymptotically nonexpansive transformation.

**YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

Literatür Özeti

Sabit nokta teori, matematiğin pek çok alanında varlık ve teklik problemlerinin çözümünde önemli bir rol oynamış; analiz, topoloji ve geometri alanlarının yanı sıra lineer olmayan çalışmalarında çok güçlü ve önemli bir aracı haline gelmiştir. Matematiğin değişik disiplinleriyle ve uygulama alanlarıyla yakından ilişkili olan sabit nokta teori; günlük hayat problemlerinden ortaya çıkan diferansiyel denklemler, integral denklemler, lineer denklem sistemleri, dinamik sistemler ve fonksiyonel denklemler gibi problemlerin çözümlerinin varlığını ispatlamak için kullanılmıştır. Sabit nokta tekniklerinin aynı zamanda fizik, kimya, biyoloji, tıp, ekonomi, modelleme, optimizasyon, denge problemleri, sosyal bilimler, haberleşme [1-13] gibi birçok bilim dalında uygulamaları bulunmaktadır.

Genel sabit nokta tanımını yaparsak, herhangi bir keyfi X uzayında $T: X \rightarrow X$ dönüşümü için $Tx = x$ olacak şekilde $x \in X$ ler mevcut ise X uzayı *sabit nokta özelliğine sahiptir* denir. Yani X uzayı T dönüşümü altında invaryant (değişmez) kalan bir noktaya sahiptir. $Tx = x$ denkleminin bütün çözümleri T dönüşümünün sabit noktaları olarak adlandırılır ve F_T ile gösterilir.

Sabit nokta teoride çalışmanın temel amacı; T dönüşümü için $F_T \neq \emptyset$ olmasını sağlayacak X uzayı üzerindeki şartları belirlemektir. Burada X kümesi üzerine küme değerlilik, sıralılık, analitik olma, metrik, normlu, topolojik olma özellikleri; T

dönüşümü üzerine ise monotonluk, süreklilik, sınırlılık, diferansiyellenebilme, Lipschitzian olma gibi özellikler konulabilir.

19. yüzyılın sonlarında başlayan sabit nokta teori çalışmaları ilk olarak Brouwer ile başlamıştır. *Aradeğer Teoremi* nin bir sonucu olarak bilinen “ $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ tanımlı her sürekli fonksiyonun $[a, b]$ aralığında bir sabit noktası vardır” ifadesi en basit sabit nokta teoremidir. 1912 yılında Brouwer [14], bu teoremi n -boyutlu $\mathbb{R}^n$ Euclid uzayına genişleterek “ $B, \mathbb{R}^n$ de kapalı bir yuvar ve $f : B \rightarrow B$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f, B de en az bir sabit noktaya sahiptir” şeklinde ifade etmiştir. 1930 yılında Schauder [15], *Brouwer Sabit Nokta Teoremi* ni sonsuz boyutlu Banach uzaylarına genelleştirerek “ K , keyfi bir X Banach uzayının boştan farklı kompakt, konveks bir alt kümesi ve $f : K \rightarrow K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f, K da en az bir sabit noktaya sahiptir” teoremini ispatlamıştır.

Brouwer ve Schauder’in ispatladığı teoremlerde sadece sabit noktanın varlığıyla ilgili fikir yürütülebilmektedir. 1922’de Banach [16], büzülme dönüşümlerini kullanarak varlık ve tekliğin yanı sıra sabit noktanın bulunmasını sağlayan *Banach Sabit Nokta Teoremi* veya *Banach Contraction Prensipli* olarak bilinen şu teoremi ifade etmiştir: “ (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ contraction (büzülme) dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümünün bir sabit noktası vardır ve bu nokta tektir”.

Browder [17-20], Kirk [21],[22], Kannan [23], Zamfirescu [24], Reich [25], Ćirić [26],[27], Rhoades [28],[29] ve pek çok araştırmacı bu sabit nokta teoremlerini genelleştirmiştir ve yeni sonuçlar elde etmişlerdir.

Sabit nokta teorisinde, bir dönüşümün sabit noktasına en iyi şekilde yaklaşabilmek için geliştirilen yöntem *iterasyon yöntemi* denir. 1922’den itibaren birçok araştırmacı lineer olmayan operatörlerin sabit noktalarını bulabilmek için çeşitli iterasyon yöntemleri geliştirmişlerdir. *Ardışık iterasyon yöntemi* olarak da adlandırılan Picard iterasyon yöntemi, 1837 yılında Liouville [30] tarafından tanımlanmış ve Cauchy tarafından kullanılmıştır. 1890 yılında ilk olarak Picard [31], adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümünün varlık ve tekliğini ispatlamak için geliştirmiştir. Fakat Picard iterasyonu genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına

yakınsamadığı için yeni iterasyon yöntemleri geliştirilmiştir. 1955’de Krasnoselskiy’in [32] tanımladığı iterasyonla bu durum ortadan kaldırılmış ve bu iterasyonunun genel formu Schaefer [33] tarafından tanımlanmıştır.

Daha sonra 1953’de Mann iterasyonu [34] tanımlanmış ve Mann ilk defa iterasyon dizilerinin yakınsaklığını gösterebilmek için toplanabilme metodlarını kullanmıştır.

Toplanabilme teorisinin temeli, ıraksak serilerle ilgili çalışmalara dayanmaktadır. Serilerde yakınsaklık teorisi ilk olarak Cauchy tarafından ortaya atılmış, daha sonra Abel tarafından geliştirilmiştir.

Bir serinin yakınsaklığına o serinin kısmi toplamlar dizisinin yakınsaklığı ile karar verilmektedir. ıraksak serilerin kısmi toplamlar dizisinin bir limit değeri olmadığı için toplanabilirlik çalışmaları ıraksak serilerin ıraksak dizilere dönüşümü olarak kalmıştır. Euler’in çalışmalarına kadar Cauchy anlamında toplanabilirlik çalışılıyorken, Euler $1-1+1-1+\dots=1/2$ yazarak ıraksak seriyi toplayabilmiştir. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi olan $(1,0,1,0,\dots)$ dizisi, Cauchy anlamındaki yakınsaklık tanımına göre ıraksak olmasına rağmen yeni tanıma göre yakınsak olmaktadır. 1890 yılında Cesàro [35], serilerin çarpımı üzerine yazdığı makalesinde “ $\{x_n\}$ reel dizisi bir L değerine yakınsıyor ise bu dizinin aritmetik ortalaması da aynı L değerine yakınsaktır” ifadesini ispatlayarak aritmetik ortalama olarak bilinen yeni bir toplama metodunu tanımlamıştır. Daha sonra Abel, Riezs, Euler, Nörlund, Hölder gibi farklı toplanabilme metodları tanımlanmış ve genelleştirilmiştir.

1911 yılında Toeplitz [36] toplanabilme metodlarıyla matris dönüşümleri arasında ilişki kurmuştur. Mann [34], ıraksak iterasyon dizilerini inceleyerek bu dizilerin yakınsaklığını gösterebilmek için Cesàro ortalamasını kullanmıştır. 2010’da Song [37], Cesàro ortalamasının Mann iterasyonunu tanımlayarak, asimptotik genişlemeyen dönüşümler için farklı uzaylar üzerinde sabit noktanın kuvvetli ve zayıf yakınsaklıklarını incelemiştir.

Tezin Amacı

Bu çalışmada, iterasyon yöntemlerinde toplanabilme metodları kullanılacaktır. Cesàro, Riezs, Nörlund ortalamalarının genelleştirilmesi olan ağırlıklı ortalama matrisi alınarak, Mann iterasyon yöntemi ile elde edilen iterasyon dizilerinin sürekli dönüşümlerin sabit

noktalarına yakınsaklığı ispatlanacaktır. Ayrıca uzay üzerine bazı şartlar konularak aynı iterasyon dizilerinin asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına kuvvetli ve zayıf yakınsaklık sonuçları elde edilecektir.

Çalışmamızın bir bölümünde de literatürde geniş uygulama alanlarına sahip olan ve yaygın olarak kullanılan belirli iterasyon yöntemlerinin bir derlemesi yapılmıştır.

Hipotez

Mann iterasyonunda ağırlıklı ortalama matrisi kullanılarak iterasyonun bir sabit noktaya yakınsadığının gösterilmesidir.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullandığımız bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1 Analiz ve Fonksiyonel Analizle İlgili Bazı Kavramlar

Tanım 2.1 (Metrik Uzay) X boştan farklı bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$$M_1. d(x, y) \geq 0$$

$$M_2. d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M_3. d(x, y) = d(y, x)$$

$$M_4. d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

koşullarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir [38].

Tanım 2.2 (Lineer Uzay) X boştan farklı bir küme ve K bir cisim olsun. $+: X \times X \rightarrow X$ ve $\cdot : K \times X \rightarrow X$ işlemleri tanımlansın. Eğer bu dönüşümler her $x, y, z \in X$ ile her $\alpha, \beta \in K$ için

$$L_1. x + y = y + x$$

$$L_2. x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$L_3. \text{ Her } x \in X \text{ için } x + \theta = x \text{ olacak biçimde bir } \theta \in X \text{ vardır.}$$

L₄. Her $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak biçimde bir $-x \in X$ vardır.

$$L_5. \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$L_6. (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$L_7. (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

$$L_8. 1 \cdot x = x$$

koşullarını sağlıyorsa X kümesine K cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzay) denir. Bir lineer uzayda $K = \mathbb{R}$ ise gerçel lineer uzay, $K = \mathbb{C}$ ise karmaşık lineer uzay adını alır [39].

Tanım 2.3 (Normlu Uzay) X bir reel (kompleks) vektör uzayı olsun ve $\|\cdot\|: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm

$$N_1. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N_2. \text{Her } \lambda \in K \text{ ve her } x \in X \text{ için } \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$N_3. \text{Her } x, y \in X \text{ için } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|$ dönüşümüne X üzerinde norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [40].

Eğer $\|\cdot\|$, X vektör uzayı üzerinde bir norm ise $x, y \in X$ için $d(x, y) = \|x - y\|$ olarak tanımlanan bu metriğe norm tarafından üretilen metrik denir.

Tanım 2.4 (Banach Uzayı) X normlu uzay olsun. X , $d(x, y) = \|x - y\|$, $(x, y \in X)$ norm metriğine göre tam ise X uzayına Banach uzayı denir [40].

Tanım 2.5 (İç çarpım Uzayı) H , $\mathbb{C}$ kompleks sayılar üzerinde tanımlanmış bir lineer vektör uzayı olsun. H uzayındaki her vektör çiftine bir sayı karşılık getiren $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyoneli aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde bir iç çarpım adını alır.

$$I_1. \text{Her } u, v \in H \text{ için } (u, v) = \overline{(v, u)}$$

$$I_1. \text{Her } u, v \in H \text{ ve } \alpha \in \mathbb{C} \text{ için } (\alpha u, v) = \alpha(u, v)$$

I_1 . Her $u, v, w \in H$ için $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$

I_1 . Her $u \in H, u \neq 0$ için $(u, u) > 0$.

Buradaki üst çizgi kompleks eşleniği göstermektedir. Bir iç çarpımla donatılmış bir lineer vektör uzayına iç çarpım uzayı adı verilir.

Tanım 2.6 (Hilbert Uzayı) H vektör uzayı üzerinde

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u - v, u - v)} \quad (u, v \in H)$$

olarak tanımlanan doğal metriğe göre tam olan iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir. Bir Hilbert uzayının aynı zamanda bir Banach uzayı olduğu da açıktır [41].

Tanım 2.7 (Yakınsak Dizi) $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tamsayısı varsa $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir. Eğer bir dizi $x \in X$ noktasına yakınsak ise bu x noktası dizinin limiti olarak adlandırılır [42].

Yakınsak olmayan veya limiti mevcut olmayan diziye de ıraksak dizi denir.

Tanım 2.8 (Cauchy Dizisi) $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tamsayısı varsa $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Cauchy dizisi denir [43].

Tanım 2.9 (Tam Metrik Uzay) $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X de ki her Cauchy dizisi, X in bir noktasına yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [44].

Tanım 2.10 (Süreklili Dönüşüm) $X = (X, d)$ ve $Y = (Y, \rho)$ iki metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ veya $f(D(x_0; \delta)) \subseteq D(f(x_0); \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f, X in her noktasında sürekli ise, f ye X de süreklidir denir [42].

Tanım 2.11 (Lineer Dönüşüm) X ve Y lineer uzay ve $T: X \rightarrow Y$ ye bir dönüşüm olsun. Her $x_1, x_2 \in X$ ve her λ, μ skaleri için

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2)$$

sağlanıyorsa T ye lineer dönüşüm denir. Eğer $Y = \mathbb{R}$ ise bu dönüşüme lineer fonksiyonel adı verilir [39].

Tanım 2.12 (Sınırlı Lineer Dönüşüm) X ve Y lineer uzay, $T: X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için

$$\|Tx\| \leq M \|x\|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti varsa, T ye sınırlı lineer dönüşüm denir [39].

Tanım 2.13 (Sınırlı Lineer Fonksiyonel) X bir lineer uzay ve $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyonel olsun. Her $x \in X$ için

$$|f(x)| \leq M \|x\|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti varsa, f ye sınırlı lineer fonksiyonel denir [45].

Tanım 2.14 (Dizi Uzayı) Reel terimli tüm dizilerin kümesi

$$\omega = \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, k \rightarrow x_k = x(k)\}$$

şeklinde gösterilsin. Bu küme $((x_k), (y_k)) \rightarrow (x_k + y_k)$ ve $(\lambda, (x_k)) \rightarrow (\lambda x_k)$ olarak tanımlı koordinatsal toplama ve skaler çarpma işlemleriyle $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzaydır. Bu uzayın her lineer altuzayına bir dizi uzayı denir [46].

Aşağıda bazı dizi uzayları verilmiştir:

$$\ell_\infty = \left\{x = (x_k) \in \omega : \|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty\right\} \quad (\text{Sınırlı diziler uzayı})$$

$$c = \left\{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \text{ mevcut}\right\} \quad (\text{Yakınsak diziler uzayı})$$

$$c_0 = \left\{x = (x_k) \in c : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0\right\} \quad (\text{Sıfıra yakınsak diziler uzayı})$$

$c_{00} = \{x = (x_k) \in \omega : \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n: x_k = 0\} = \langle \{e^n : n \in \mathbb{N}\} \rangle$ (Sonlu tanesi sıfırdan farklı dizilerin uzayı)

Burada $e^n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$, $\delta_{nk} := \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$ ($k, n \in \mathbb{N}$) olarak tanımlanmıştır.

$\ell_1 = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \|x\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| < \infty \right\}$ (Mutlak yakınsak serilerin uzayı)

$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}, (1 < p < \infty)$ (p -mutlak yakınsak serilerin uzayı)

$b_s = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \|x\|_{bs} = \sup_n \left| \sum_{k=0}^n x_k \right| < \infty \right\}$ (Sınırlı serilerin uzayı)

Tanım 2.15 (Topolojik Uzay) X boştan farklı bir küme ve τ , X 'in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Bu sınıf

T₁. $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$

T₂. τ daki kümelerin herhangi birleşimi τ ya ait

T₃. τ daki kümelerin sonlu sayıda arakesiti τ ya ait

koşullarını sağlıyorsa τ , X üzerinde bir topolojidir denir. (X, τ) çiftine de bir topolojik uzay adı verilir. τ topolojisinin elemanlarına da X in açık kümeleri denir [41].

Tanım 2.16 (Kapalı Küme) Bir $B \subset X$ alt kümesinin X kümesine göre tümleyeni açıksa yani $B' \in \tau$ ise B bir kapalı küme adını alır [41].

Tanım 2.17 (Kompakt Uzay) Bir X topolojik uzayının her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X bir kompakt topolojik uzay adını alır. Kompakt bir uzay daima bazı G_i açık kümelerinin sonlu bir birleşimi olarak $X = \bigcup_{i=1}^n G_i$ şeklinde ifade edilebilir [47].

Tanım 2.18 (Bağlantılı Uzay) Bir (X, τ) topolojik uzayı boş olmayan ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak gösterilemiyorsa, yani $X \neq A \cup B$, $A, B \in \tau$ ve $A \cap B = \emptyset$ ise bir bağlantılı uzay adını alır [41].

Tanım 2.19 (Konveks Küme) C, X lineer uzayının alt kümesi olsun. Her $x, y \in C$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in C$$

sağlanıyorsa C 'ye konveks küme denir [45].

Lemma 2.20 C, X lineer uzayının bir alt kümesi olsun. C nin konveks olması için gerek ve yeter koşul her $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq C$ sonlu alt kümeleri ve $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ şartını sağlayan $\lambda_i \geq 0, (i = \overline{1, n})$ skalerleri için

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \in C$$

olmasıdır [45].

Tanım 2.21 (Konveks Kabuk) C, X lineer uzayının keyfi bir alt kümesi olsun. X in C yi içeren tüm konveks alt kümelerinin arakesitine C nin X deki konveks kabuğu denir ve $co(C)$ ile gösterilir. Yani

$$co(C) = \cap \{D \subseteq X : C \subseteq D, D \text{ konveks}\}$$

dir. $co(C), C$ yi içeren en küçük konveks alt kümedir. Ayrıca konveks kabuk C nin elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarının kümesidir. Yani

$$co(C) = \left\{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n : x_i \in C, \alpha_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

dir. C nin konveks kabuğunun kapanışı $\overline{co(C)}$ ile gösterilir.

C nin X deki kapalı konveks kabuğu, X in C yi içeren tüm kapalı konveks alt kümelerinin arakesitidir. $\overline{co(C)}$ ile gösterilir. Yani

$$\overline{co(C)} = \cap \{D \subseteq X : C \subseteq D, D \text{ kapalı ve konveks}\}$$

dir. Yukarıdaki iki tanımdan $\overline{co(C)} = \overline{co(C)}$ olduğu görülür [45].

X bir Banach uzayı olsun. Banach uzayının normunun temel özelliği daima konveks olmasıdır. Yani normun her $x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| \leq (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\|$$

şartını sağlamasıdır.

Tanım 2.22 (Kesin Konveks Uzay) Keyfi bir X Banach uzayı olsun. $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$ şartlarını sağlayan her $\lambda \in (0,1)$ için

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1$$

sağlanıyorsa, X Banach uzayına kesin (strictly) konveks uzay denir [48].

Bu tanım, $S_x = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ birim küre ve $\|x - y\| \geq \varepsilon > 0$ için $x, y \in S_x$ noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktasının, S_x birim yuvarında olmadığını ifade eder, yani

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$$

dir.

Tanım 2.23 (Düzgün Konveks Uzay) X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon \in (0, 2]$ için $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ varsa X e düzgün (uniform) konveks uzay denir [48].

Bu tanım, $x, y \in B_x = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvar ve $\|x - y\| \geq \varepsilon > 0$ için $(x+y)/2$ orta noktasının S_x den bir δ uzaklığında ve B_x kapalı birim yuvar içinde olduğunu ifade eder.

Tanım 2.24 (Dual uzay) X bir normlu uzay olsun. X deki tüm sınırlı lineer fonksiyonların uzayına X in duali denir ve X^* ile gösterilir. $X^* = B(X, \mathbb{R})$ duali

$$\|f\|_* = \sup \{|f(x)| : x \in S_x\}$$

ile tanımlı normlu uzaydır [45].

X^* in normlu duali $L(X^*, \mathbb{R}) = (X^*)^*$ veya X^{**} ile gösterilir ve buna X normlu uzayının normlu ikinci duali denir.

Tanım 2.25 (Doğal Dönüşüm) X bir lineer uzay olsun. Bir $x \in X$ için

$$g_x : X^* \rightarrow \mathbb{R}, g_x(f) = f(x)$$

şeklinde bir g_x fonksiyoneli tanımlayalım. f lineer olduğundan $g_x \in X^{**}$ olduğu görülür. Böylece bir $x \in X$ için $g_x \in X^{**}$ öğesinin var olduğu anlaşılır. Bu durumda

$$G : X \rightarrow X^{**}, G(x) = g_x$$

dönüşümü tanımlanabilir. Bu G dönüşümüne X uzayından X^{**} uzayı içine doğal dönüşüm denir [38].

Tanım 2.26 (Yansımalı uzay) X normlu bir uzay iken $G : X \rightarrow X^{**}$ doğal dönüşümü örten yani $G(X) = X^{**}$ ise X uzayına yansımalı uzay denir. Buradan $X \cong X^{**}$ veya $X = X^{**}$ yazabiliriz [38].

Tanım 2.27 (Kuvvetli Yakınsaklık) X normlu bir uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e kuvvetli yakınsaktır veya norma göre yakınsaktır denir. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir [38].

Tanım 2.28 (Zayıf Yakınsaklık) X normlu bir uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun. Her $f \in X^*$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{w} x$ ile gösterilir [38].

Kuvvetli ve zayıf yakınsama arasındaki gerektirmeler aşağıdaki teoremle verilmiştir:

Teorem 2.29 X bir normlu uzay olsun. Bu durumda,

(a) Kuvvetli yakınsaklık, zayıf yakınsaklığı gerektirir.

(b) (a) nın tersi genel olarak doğru değildir.

(c) $\dim(X) < \infty$ ise, zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığı gerektirir [38].

Normlu uzaylarda zayıf yakınsamanın kuvvetli yakınsamayı gerektirmediğini aşağıdaki örnekle gösterelim.

Örnek 2.30 $X = \ell_2$ uzayını alalım. $\{x_n\} \in \ell_2$ için, $\{x_n\}$ dizisini

$$x_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$$

olarak tanımlayalım. Her $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in X^* = \ell_2$ için $n \rightarrow \infty$ giderken

$$(x_n, y) = y_n \rightarrow 0$$

olur. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow 0$ a zayıf yakınsar. Ancak her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi kuvvetli yakınsak değildir [45].

Tanım 2.31 (Opial Koşulu) Bir X Banach uzayında $x_n \xrightarrow{w} x$ zayıf yakınsaması her $y \neq x$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

olmasını gerektiriyorsa, X Banach uzayı Opial Şartını sağlıyor denir [49].

2.2 Toplanabilme Teorisiyle İlgili Bazı Kavramlar

Tanım 2.32 (Sonsuz Matris) λ , herhangi bir reel veya kompleks sayı olmak üzere

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \lambda A = (\lambda a_{ij}), AB = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj} \right)$$

işlemleriyle tanımlanmış, reel veya kompleks terimli $A = (a_{ij})$, $(i, j = 1, 2, \dots)$ matrisine sonsuz matris denir [36].

Tanım 2.33 (Toplanabilirlik) Verilen bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) olsun. Ayrıca $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin veya (s_n) dizisinin $A=(a_{nk})$ matrisi yardımıyla (t_n) dönüşüm dizisi,

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k$$

olarak tanımlansın. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k = s$ ise, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine veya (s_n) dizisine s -değerine A -toplanabilirdir denir [50].

Tanım 2.34 (Alt Üçgensel Matris) $k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $k > n$ için $(a_{nk}) = 0$ elemanları ile tanımlanan $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisine alt üçgensel matris denir [46].

Şimdi bazı toplanabilme metodlarını verelim:

Tanım 2.35 (Cesàro Toplanabilme Metodu)

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

elemanları ile tanımlı alt üçgensel sonsuz matrise Cesàro matrisi denir.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, (s_n)$ kısmi toplamlar dizisi ile verilen sonsuz bir seri olsun.

$$C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k$$

ile tanımlanan diziden diziye dönüşümüne (s_n) dizisinin Cesàro ortalaması denir [35].

Tanım 2.36 (Nörlund Toplanabilme Metodu) Hepsi birden sıfır olmayan, non-negatif sayıların bir (p_n) dizisi verilmiş olsun.

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad p_0 > 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

olmak üzere bir (s_n) dizisinden bir (t_n) dizisine

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_{n-k} s_k$$

ile verilen dönüşüme Nörlund ortalaması denir ve (N, p_n) ile gösterilir. (N, p_n) ortalamasının matrisinin elemanları

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{p_{n-k}}{P_n} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olarak tanımlanır [50].

Teorem 2.37 (N, p_n) ortalamasının regüler olması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ giderken $\frac{p_n}{P_n} \rightarrow 0$ olmasıdır [50].

Tanım 2.38 (Riezs Toplanabilme Metodu) Hepsi birden sıfır olmayan, non-negatif sayıların bir (p_n) dizisi verilmiş olsun.

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_n, \quad p_0 > 0, \quad (n=0,1,\dots)$$

olmak üzere bir (s_n) dizisinden bir (T_n) dizisine

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_k s_k$$

ile verilen dönüşüme Riezs ortalaması denir ve $(\overline{N}, p_n)$ ile gösterilir. $(\overline{N}, p_n)$ ortalamasının matrisinin elemanları

$$r_{nk} = \begin{cases} \frac{p_k}{P_n} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olarak tanımlanır [50].

Teorem 2.39 $(\overline{N}, p_n)$ ortalamasının regüler olması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ giderken $P_n \rightarrow \infty$ olmasıdır [50].

Tanım 2.40 (Euler Metodu) $q > 0$ için

$$a_m^{(q)} = \frac{1}{(q+1)^{m+1}} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} q^{m-n} a_n$$

$$\sum a_m^{(q)} = A$$

ise $\sum a_n$ serisi A değerine (E, q) toplanabilir denir [51].

Teorem 2.41 (E, q) metodu regülerdir [51].

Tanım 2.42 (Çarpımsal Matris) $k, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$g_{nk} = \begin{cases} u_n v_k & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ile tanımlanan $G = (g_{nk})$ sonsuz matrisine çarpımsal matris denir [35].

2.3 Sabit Nokta Teorisiyle İlgili Bazı Kavramlar

Tanım 2.43 (Sabit Nokta) X boştan farklı bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer

$$T(x) = x$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T dönüşümünün sabit noktası denir [40]. $Tx = x$ denkleminin bütün çözümleri T nin sabit noktaları olarak adlandırılır ve F_T veya $Fix(T)$ ile gösterilir. Eğer T dönüşümü bir sabit noktaya sahip değilse serbest sabit noktalı olarak adlandırılır.

$$F_T = \{x \in X : Tx = x\}$$

Örnek 2.44

1. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $T(x) = x^2 + 5x + 4$ ise $F_T = \{-2\}$ dir.
2. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $T(x) = x^2 - x$ ise $F_T = \{0, 2\}$ dir.
3. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $T(x) = x + 2$ ise $F_T = \emptyset$ dir.
4. Eğer $X = \mathbb{R}$ ve $T(x) = x$ ise $F_T = \mathbb{R}$ dir.

Tanım 2.45 (İterasyon) X boştan farklı bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^n(x)$, $T^0(x) = x$ ve $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ şeklinde tanımlanır. $T^n(x)$ e, x in T altındaki n . iterasyonu denir. T^n ($n \geq 1$) dönüşümüne de T nin n . iterasyonu denir. $T(x)$ yerine Tx kullanabiliriz.

$T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

1. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$ dir.
2. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T^n) = \{x\}$ ise $F(T) = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir [40].

Örnek 2.46 $T : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ dönüşümü $T(1) = 3$, $T(2) = 2$ ve $T(3) = 1$ olarak tanımlanırsa, $F_{T^2} = \{1, 2, 3\}$ olduğu halde $F_T = \{2\}$ dir.

Teorem 2.47 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi) B , $\mathbb{R}^n$ nin kompakt konveks alt kümesi olsun. Bu durumda $f : B \rightarrow B$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir [52].

Teorem 2.48 (Schauder Sabit Nokta Teoremi) X bir Banach uzayı, K da X in boştan farklı kompakt konveks bir alt kümesi ve $f : K \rightarrow K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f en az bir sabit noktaya sahiptir [53].

Teorem 2.49 (Banach Daralma Prensibi) (X, d) tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir daralan dönüşüm olsun. Bu durumda T tek bir sabit noktaya sahiptir [52].

Tanım 2.50 (Kararlılık-Stability) X bir normlu uzay, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $x_{n+1} = f(T, x_n)$ iterasyon yöntemiyle elde edilen $\{x_n\}$ dizisinin T' nin bir p sabit noktasına yakınsadığını kabul edelim. $\{y_n\}$, X te keyfi bir dizi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\varepsilon_n = \|y_{n+1} - f(T, y_n)\|$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$$

ise $x_{n+1} = f(T, x_n)$ iterasyon yöntemine T -kararlıdır denir [54].

Tanım 2.51 (Yakınsaklık Hızı ve Yakınsaklık Oranı) $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$, sırasıyla limitleri a ve b olan iki reel sayı dizisi olsun.

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n - a|}{|b_n - b|}$$

olduğunu kabul edelim.

1) Eğer $l = 0$ ise $\{a_n\}$ dizisi $\{b_n\}$ dizisinden daha hızlıdır denir.

2) Eğer $0 < l < \infty$ ise $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri benzer yakınsaklık oranına sahiptir denir [40].

Tanım 2.52 (Lipschitzian Dönüşüm) (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha \cdot d(x, y)$$

olacak şekilde bir $\alpha > 0$ sayısı var ise T dönüşümüne Lipschitzian (veya α -Lipschitzian) dönüşüm denir [40].

Tanım 2.53 (Contraction Dönüşüm) (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha \cdot d(x, y)$$

olacak şekilde en az bir $\alpha \in (0, 1)$ sayısı bulunabiliyorsa T dönüşümüne büzülme (contraction) dönüşüm denir [52].

Tanım 2.54 (Contractive Dönüşüm) (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise, T dönüşümüne contractive dönüşüm denir [40].

Tanım 2.55 (Nonexpansive Dönüşüm) (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise, T dönüşümüne genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir [52].

Tanım 2.56 (Quasi Nonexpansive Dönüşüm) C, X normlu uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $T : C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F_T \neq \emptyset$ ve her $x \in C$ için

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

ise T dönüşümüne quasi nonexpansive dönüşüm denir [45].

Teorem 2.57 (Kannan Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha [d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı mevcut ise T bir Picard dönüşümüdür [55].

Teorem 2.58 (Chatterjea Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \beta [d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı mevcut ise T bir Picard dönüşümüdür [56].

Teorem 2.59 (Zamfirescu Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. α, β, γ reel sayıları $0 \leq \gamma < 1$, $0 \leq \alpha < 1/2$ ve $0 \leq \beta < 1/2$ şartlarına sahip olmak üzere, $\forall x, y \in X$ için

$$(z_1) \quad d(Tx, Ty) \leq \gamma d(x, y)$$

$$(z_2) \quad d(Tx, Ty) \leq \alpha [d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

$$(z_3) \quad d(Tx, Ty) \leq \beta [d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

ifadelerinden en az biri doğru ise T bir Picard dönüşümüdür [57].

Tanım 2.60 (Quasi Contraction Dönüşüm) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq h \cdot \max \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(y, Tx)\}$$

olacak şekilde bir $h \in (0, 1)$ sayısı varsa T dönüşümüne quasi contraction dönüşüm denir ve T bir Picard dönüşümüdür [58].

Tanım 2.61 (Zayıf Contraction Dönüşüm) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) + Ld(y, Tx)$$

veya

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) + Ld(x, Ty)$$

olacak şekilde bir $\lambda \in (0, 1)$ sabiti ve $L \geq 0$ mevcut ise T dönüşümüne zayıf contraction dönüşüm denir [59].

Tanım 2.62 (Contractive-Like Dönüşüm) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \cdot d(x, y) + \varphi(d(x, Tx))$$

olacak şekilde bir $\delta \in [0, 1)$ sabiti ve $\varphi(0) = 0$ şartını sağlayan bir $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton artan fonksiyonu mevcut ise T dönüşümüne contractive-like dönüşüm denir [60].

Tanım 2.63 (Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm) X bir Banach uzayı, $C \subseteq X$ boştan farklı kapalı konveks alt kümesi ve $T : C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $n \geq 1$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq (1 + \theta_n) \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$$

olacak şekilde $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$ şartını sağlayan bir θ_n non-negatif reel sayısı var ise T dönüşümüne asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir [37].

Tanım 2.64 (Asimptotik Regüler Dönüşüm) X bir Banach uzayı, $C \subseteq X$ boştan farklı alt kümesi ve $T : C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in C$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x - T^{n+1} x\| = 0$$

sağlanıyorsa T dönüşümüne C de asimptotik regülerdir denir [45].

Tanım 2.65 (Kuvvetli Pseudocontraction ve Pseudocontractive Dönüşümler) X bir keyfi Banach uzayı ve X^* , X in dual uzayı olsun. T , X te tanım bölgesi $D(T)$ ve değer bölgesi $R(T)$ olan $T : D(T) \rightarrow R(T)$ bir dönüşüm olsun.

i) Her $x, y \in D(T)$ için

$$\langle (I-T)x - (I-T)y, j(x-y) \rangle \geq k \|x-y\|^2$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $k > 0$ ve $j(x, y) \in J(x-y)$ mevcut ise T dönüşümüne kuvvetli pseudocontraction dönüşüm;

ii) Her $x, y \in D(T)$ için

$$\langle (I-T)x - (I-T)y, j(x-y) \rangle \geq 0$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $j(x, y) \in J(x-y)$ mevcut ise T dönüşümüne pseudocontractive dönüşüm denir.

Burada ; $J : X \rightarrow P(X^*)$ çok değerli dönüşüm olmak üzere

$$Jx = \{ f \in X^* : \langle f, x \rangle = \|x\| \cdot \|f\|, \|x\| = \|f\| \}$$

dönüşümü X in normalleştirilmiş dual dönüşümü ve

$$J(x-y) = \{ f \in X^* : \langle f, x-y \rangle = \|x-y\| \cdot \|f\|, \|x-y\| = \|f\| \}$$

olarak ifade edilir [40].

BAZI SABİT NOKTA İTERASYON YÖNTEMLERİ

Fiziksel olayların ve gerçek hayat problemlerinin çözümünün araştırılabilmesi için, disiplinlerarası geniş uygulama alanına sahip olan sabit nokta teoriye ihtiyaç duyulmuştur. Sabit nokta teorisinin çıkış noktası günlük hayat uygulamalarına ilişkin olmasına rağmen, çalışmaların teorik zeminde kaldığı görülmektedir. Bu bölümde fonksiyonel ve topolojik anlamda soyut uzaylarda yapılan bazı sabit nokta iterasyon yöntemleri incelenecektir.

Sabit nokta iterasyon yöntemi, ilk olarak Picard [31] tarafından diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmıştır. Daha sonra birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve günümüzde hala çalışılmakta olan çok sayıda iterasyon yöntemi geliştirilmiştir.

1955 yılında Krasnoselskij [32], Picard iterasyonunun yetersiz kaldığı nonexpansive dönüşümlerin sabit noktasına yaklaşmak için Krasnoselskij iterasyon yöntemini tanımlamış; 1953 yılında Mann [34] bu dönüşümler için en genel iterasyon yöntemini vermiştir. Daha sonra 1971 yılında Kirk [61], 1974 yılında Ishikawa [62] ve 2000 yılında Noor [63] varyasyonel eşitsizlikler için iterasyon yöntemleri tanımlamışlardır. 2007 yılında bu iterasyon türlerinin hibrit türleri olan S-iterasyonu [64], 2009 yılında iki adımlı iterasyon yöntemi [65], 2011 yılında SP-iterasyonu [66] tanımlanmıştır. 2004 yılında Rhoades ve Şoltuz [67], bazı iterasyon yöntemlerinin multistep iterasyonlarını tanımlamışlardır. Daha sonra bu iterasyon yöntemleri genişletilerek çeşitli dönüşüm sınıflarının sabit noktalarına yakınsamak için kullanılmıştır.

Bir sabit nokta iterasyon yönteminin yararlı olup olmadığını aşağıdaki soruların cevaplarıyla tespit edebiliriz [68].

1. Elde edilen iterasyon yöntemi dönüşümün sabit noktasına yakınsıyor mu?
2. Literatüdeki diğer iterasyon yöntemlerinden daha hızlı mı?
3. İterasyon yönteminin yakınsaklığı diğer iterasyon yöntemlerinin yakınsaklığına denk midir?
4. İterasyon yöntemi kararlı mıdır?

Şimdi en genel formda iterasyon yöntemini tanımlayarak bazı sabit nokta iterasyon yöntemlerini verelim.

X bir normlu uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ ve f bir fonksiyon olmak üzere, sabit nokta iterasyon yöntemi en genel formda

$$x_{n+1} = f(T, x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

olarak tanımlanır [40].

Tanım 3.1 (Picard İterasyon Yöntemi) (X, d) bir metrik uzay olsun. C de X in kapalı bir alt kümesi ve $T : C \rightarrow C$ dönüşümü $p \in F_T$ olacak şekilde en az bir sabit noktaya sahip olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlı iterasyon yöntemine Picard iterasyon yöntemi (ardışık yaklaşıklıklar dizisi) denir.

Picard iterasyon yöntemi Liouville [30] tarafından tanımlanmış, Cauchy tarafından kullanılmıştır. Bu yöntem, 1890 yılında ilk kez Picard [31] tarafından, adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin çözümünün varlık ve tekliğinin ispatıyla geliştirilmiştir.

Banach Contraction Prensipte, Picard iterasyon yönteminin büzülme (contraction) dönüşümlerinin sabit noktasına yakınsadığı gösterilmiştir. Büzülme dönüşümü yerine, genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm sınıfı alındığında Picard iterasyon yönteminin genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamadığı görülmüştür.

Örnek 3.2 $X = [0, 1]$ olsun ve her $x \in [0, 1]$ için $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümünü

$Tx = 1 - x$ olarak tanımlayalım. Bu durumda T bir nonexpansive dönüşümdür ve

$F_T = \{1/2\}$ olup T bir tek sabit noktaya sahiptir. Herhangi $x = x_0 \neq 1/2$ başlangıç değeri için, Picard iterasyonu

$$x_0, 1-x_0, x_0, 1-x_0, \dots$$

şeklinde x_0 ve $1-x_0$ değerleri arasında salınan bir dizi üretir ve bu dizi T nin sabit noktasına yakınsamaz [40].

Tanım 3.3 (Krasnoselskij İterasyon Yöntemi) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$x_{n+1} = \lambda Tx_n + (1-\lambda)x_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlı iterasyon yöntemine Krasnoselskij iterasyon yöntemi denir. Bu iterasyon yöntemi $\lambda = 1$ için Picard iterasyon yöntemine indirgenir.

Krasnoselskij iterasyon yöntemi, 1955’de ilk kez Krasnoselskij [32] tarafından tanımlanmıştır ve Krasnoselskij göstermiştir ki; C , düzgün konveks Banach uzayının kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi ve $T : C \rightarrow C$ genişlemeyen ve kompakt bir operatör (yani T sürekli ve $T(K)$ göreceli kompakt) olduğunda,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + Tx_n), \quad n \geq 0$$

ile tanımlı $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi T nin sabit noktasına güçlü yakınsar. Schaefer [33], bu sonucu $\lambda = (0,1)$ olma durumuna genişletmiştir. Daha sonra Edelstein [69] tarafından, bu sonuçlar strictly konveks uzaylar için genişletildi.

Petryshyn [70], Krasnoselskij ve Schaefer ın bulduğu sonuçları sadece Hilbert uzayları için, demicompact nonexpansive dönüşümlere genişletmiştir. Browder ve Petryshyn [71],[72] asimptotik regüler genişlemeyen dönüşümler ve sınırlı kapalı kümelerden kapalı kümelere olan dönüşümler için, Krasnoselskij iterasyonunun yakınsaklığını araştırmışlardır.

Örnek 3.4 [Örnek 3.2]'deki $X = [0,1]$ uzayını ve $T : [0,1] \rightarrow [0,1]$ dönüşümünü ele alalım. Herhangi bir $x = x_0 \neq 1/2$ başlangıç değeri için, (3.2) ile verilen Krasnoselskij iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1/2\}$ sabit dizisi T nin sabit noktası olan $1/2$ değerine yakınsar [40].

Tanım 3.5 (Mann İterasyon Yöntemi) C, X lineer uzayının konveks alt kümesi ve $T : C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}$ dizisi, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \alpha_n < 1$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ koşullarını sağlayan negatif olmayan sayılar dizisi olsun. $x_1 \in C$ için

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \quad (3.3)$$

olarak tanımlı $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine (normal) Mann iterasyonu denir [45].

Mann iterasyon yönteminin *matris formunda* tanımı aşağıdaki şekilde yapılmıştır:

X bir lineer uzay ve X in konveks alt kümesi C olsun. $x_1 \in C$ ve $T : C \rightarrow C$ dönüşüm olmak üzere $A = (a_{nj})$ matrisi aşağıdaki şartları sağlasın:

$$(i) \quad \forall n, j \in \mathbb{N} \text{ için } a_{nj} \geq 0 \text{ ve } j > n \text{ için } a_{nj} = 0$$

$$(ii) \quad n \geq 1 \text{ için } \sum_{j=1}^n a_{nj} = 1 \quad (3.4)$$

$$(iii) \quad j \geq 1 \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nj} = 0.$$

$$x_{n+1} = T(v_n)$$

$$v_n = \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j$$

olarak tanımlanan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine Mann iterasyon yöntemi denir. Mann iterasyon yöntemi kısaca, keyfi bir x_1 başlangıç değeri, A matrisi ve T dönüşümünü belirten $M(x_1, A, T)$ şeklinde gösterilebilir.

Mann iterasyon yöntemi, 1953 yılında Mann [34] tarafından tanımlanmıştır ve nonexpansive dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için tanımlanan en genel

iterasyon yöntemidir. Kronolojik olarak Krasnolselskij iterasyon yönteminden iki yıl önce bir matris formülasyonunda tanımlanmış olmasına rağmen, biçimsel olarak Krasnolselskij iterasyonunun bir genelleştirmesidir ve Mann iterasyonunun normal formu Krasnolselskij iterasyonundaki λ parametresinin bir $\{a_n\} \subset [0,1]$ reel dizisi ile değiştirilmesi ile verilir.

Mann iterasyon yönteminin yakınsaklığı, Banach uzaylarında verilmiştir, fakat Dotson [73] tarafından yerel, konveks, Hausdorff lineer topolojik uzayının daha genel şartları altında da geçerli olduğu gösterilmiştir.

Örnek 3.6

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

olarak tanımlı Cesaro matrisini alalım. Bu matrisin (3.4) ile verilen A matrisinin özelliklerini sağladığı açıkça görülür. $\{x_n\}$ dizisi, keyfi bir x_1 elemanı ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = T\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

biçiminde ifade edilir. (x_1, Λ, T) ; Cesaro matrisi ile elde edilen iterasyon dizisini göstermektedir [45].

T sürekli ve Mann iterasyon yöntemi yakınsak ise iterasyon dizisi T nin sabit noktasına yakınsar. Fakat T sürekli değilse, Mann iterasyon yöntemi yakınsak olsa bile T nin sabit noktasına yakınsaması garanti edilemez.

Örnek 3.7 $T:[0,1] \rightarrow [0,1]$ dönüşümünü alalım. $0 < x < 1$, $T(0)=T(1)=0$ ve $Tx=1$ olarak verilsin. $0 < x_1 < 1$ ve $n \geq 1$ için $\alpha_n = \frac{1}{n}$ ile verilen Mann iterasyon yöntemi 1 e yakınsar, fakat $F_T = \{0\}$ dir. T nin sabit noktasına yakınsamadığı görülür [73].

Mann iterasyon yöntemi, genel olarak çeşitli nonlinear operatörlerin sabit noktalarına yaklaşmak ve normlu uzaylarda operatör denklemlerin çözümlerini bulmak için kullanılmaktadır.

Tanım 3.8 (Ishikawa İterasyon Yöntemi) C, X lineer uzayının boştan farklı konveks alt kümesi ve $T:C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Keyfi $x_1 \in C$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \quad (3.5)$$

olarak tanımlanmış iterasyon yöntemine Ishikawa iterasyon yöntemi denir. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $[0,1]$ aralığında tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan reel sayı dizileridir.

$$(i) \ 0 \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq 1 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0 ,$$

$$(ii) \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n = \infty . \quad (3.6)$$

Ishikawa iterasyon yöntemi, 1974 yılında Ishikawa [62] tarafından Mann iterasyon yönteminin geliştirilmesi olarak tanımlanmıştır. Ishikawa iterasyon yöntemi ilk kez, konveks kompakt bir Hilbert uzayında, Lipschitzian pseudo-contractive dönüşüm sınıfı için sabit noktaya güçlü yakınsaklığını oluşturmak için kullanılmıştır. Ishikawa iterasyon yöntemi, Mann iterasyon yönteminin geliştirilmesi olmasına rağmen yakınsaklık sonuçları arasında bir ilişki yoktur. Hicks ve Kubicek [74] göstermiştir ki; Ishikawa iterasyon yöntemi, Lipschitzian pseudo-contractive dönüşüm sınıfı için operatörün sabit noktasına yakınsıyorken; Mann iterasyon yöntemi bu dönüşüm sınıfı için operatörün sabit noktasına yakınsamamaktadır.

Tanım 3.9 (S-İterasyon Yöntemi) X bir lineer uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı konveks alt küme, $T : C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri, (3.6) koşullarını sağlayan $[0,1]$ aralığında tanımlı pozitif reel sayı dizileri olmak üzere, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_nTy_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nTx_n \end{cases} \quad (3.7)$$

olarak tanımlanmış iterasyon yöntemine S-iterasyon yöntemi denir.

S-iterasyon Yöntemi, Agarwal vd. [64] tarafından 2007 yılında tanımlanmıştır. Agarwal vd. daraltan dönüşümler için, S-iterasyon yönteminin yakınsaklık hızının Picard iterasyon yönteminin yakınsama hızına denk ve diğer sabit nokta iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarından daha hızlı olduğunu göstermişlerdir. Nawab Hussian vd. [75], S-iterasyon yönteminin quasi contractive operatörler için Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemlerinden daha hızlı olduğunun örneğini vermişler ve kanıtlamışlardır.

Tanım 3.10 (İki Adımlı İterasyon Yöntemi) X bir lineer uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı konveks alt küme, $T : C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri, (3.6) koşullarını sağlayan $[0,1]$ aralığında tanımlı pozitif reel sayı dizileri olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_nTy_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_nTx_n \end{cases} \quad (3.8)$$

olarak tanımlanmış iterasyon yöntemine iki adımlı iterasyon yöntemi denir.

İki adımlı iterasyon yöntemi, Thianwan vd. [65] tarafından 2008 yılında tanımlanmıştır. Yildirim vd. [76] bu iterasyon yönteminin yakınsaklığını ispatlamış ve kesin quasi contractive dönüşüm sınıfını kullanarak Picard, Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemleri ile denk olduğunu göstermiştir.

Tanım 3.11 (Noor İterasyon Yöntemi) X bir lineer uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı konveks alt küme, $T : C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ dizileri, (3.6) koşullarını sağlayan $[0,1]$ aralığında tanımlı pozitif reel sayı dizileri olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tz_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n \end{cases} \quad (3.9)$$

olarak tanımlanmış iterasyon yöntemine üç adımlı Noor iterasyon yöntemi denir.

Noor iterasyon yöntemi, Noor [63] tarafından 2000 yılında, varyasyonel eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerini elde etmek amacıyla, Ishikawa yönteminin genelleştirilmesi olarak tanımlanmıştır. Cîric, Lee ve Rafiq [77], Noor iterasyon yönteminin kesin quasi-contractive operatör sınıfı için Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemlerinden daha hızlı olduğunu bir örnekle ispatlayarak göstermiştir.

Tanım 3.12 (SP İterasyon Yöntemi) X bir lineer uzay, $C \subseteq X$ boştan farklı konveks alt küme, $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ dizileri, (3.6) koşullarını sağlayan $[0,1]$ aralığında tanımlı pozitif reel sayı dizileri olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n Ty_n \\ y_n = (1-\beta_n)z_n + \beta_n Tz_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n \end{cases} \quad (3.10)$$

olarak tanımlanmış iterasyon yöntemine SP iterasyon yöntemi denir.

SP iterasyon yöntemi, iki adımlı Mann iterasyon yönteminin genelleştirilmesi olarak, Phuengrattana ve Suantai [66] tarafından 2011 yılında keyfi bir aralıkta sürekli fonksiyonların sabit noktalarına yaklaşmak için tanımlanmıştır ve bu iterasyon yönteminin yakınsama hızının Mann, Ishikawa ve Noor iterasyon yöntemlerinden daha hızlı olduğu ispatlanmıştır.

Tanım 3.13 (CR İterasyon Yöntemi) X bir Banach uzayı, $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ dizileri, (3.6) koşullarını sağlayan $[0,1]$ aralığında tanımlı pozitif reel sayı dizileri olmak üzere, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n Ty_n \\ y_n = (1-\beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n \end{cases} \quad (3.11)$$

olarak tanımlanmış iterasyon yöntemine CR iterasyon yöntemi denir.

CR iterasyon yöntemi, R. Chugh vd. [78] tarafından 2012 yılında tanımlanmıştır ve bu iterasyon yönteminin Banach uzaylarında, quasi-contractive dönüşüm sınıfı için güçlü yakınsaklığı çalışılmıştır. Sözü edilen operatör sınıfı için, CR iterasyon yönteminin Picard, Mann, Ishikawa, S, Noor ve SP iterasyon yöntemlerinden daha hızlı ve onlara denk olduğu gösterilmiştir. Yakınsaklık oranına göre karşılaştırıldığında şu sonuçlar elde edilmiştir:

- 1) SP iterasyon yöntemi azalan fonksiyonlar için en iyisiyken, CR iterasyon yöntemi artan fonksiyonlar için en iyisidir,
- 2) CR iterasyon yöntemi kesin quasi- contractive operatör sınıfı için en iyisidir [78].

Tanım 3.14 (Kirk İterasyon Yöntemi) X bir Banach uzayı, $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm ve

$x_0 \in X$ olsun. $i = \overline{0, k}$, $k \geq 1$ için $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 > 0$ ve $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$, $n \geq 0$ olmak üzere

$$x_{n+1} = f(T, x_n) = \sum_{i=0}^k \alpha_i T^i x_n \quad (3.12)$$

olarak tanımlanan iterasyon yöntemine Kirk iterasyon yöntemi denir. Bu iterasyon yönteminde, $k=0$ alınırsa Picard iterasyon yöntemi ve $k=1$ alınırsa Genelleştirilmiş Krasnoselskij iterasyon yöntemi elde edilir.

Kirk iterasyon yöntemi, 1971 yılında Kirk [61] tarafından tanımlanmıştır ve Banach uzaylarında nonexpansive dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşım için kullanılmıştır.

Şimdi de Kirk iterasyon yöntemiyle yapılmış hibrid iterasyon yöntemlerini inceleyelim:

Tanım 3.15 (Kirk-Mann İterasyon Yöntemi ve Kirk-Ishikawa İterasyon Yöntemi)

X Banach uzayı ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. k ve s , $k \geq s$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\alpha_{n,i}, \beta_{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_{n,i} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,j} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler olmak üzere,

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0} x_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i} T^i x_n, \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.13)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-Mann iterasyon yöntemi denir.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0}x_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \\ y_n = \beta_{n,0}x_n + \sum_{j=1}^s \beta_{n,j}T^j x_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_{n,j} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemi denir.

Olatinwo [79] tarafından 2009 yılında, kesin contractive dönüşüm sınıfı kullanılarak normlu lineer uzaylarda tanımlanmıştır.

Tanım 3.16 (Kirk-Noor İterasyon Yöntemi) X Banach uzayı ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. k, s ve t , $k \geq s \geq t$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\alpha_{n,i}, \beta_{n,j}, \gamma_{n,l} \in [0,1]$, $\alpha_{n,i} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,j} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$, $\gamma_{n,l} \geq 0$, $\gamma_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler olmak üzere;

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0}x_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \\ y_n = \beta_{n,0}x_n + \sum_{j=1}^s \beta_{n,j}T^j z_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_{n,j} = 1, \\ z_n = \gamma_{n,0}x_n + \sum_{l=1}^t \gamma_{n,l}T^l x_n, \quad \sum_{l=0}^t \gamma_{n,l} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-Noor iterasyon yöntemi denir.

Kirk-Noor iterasyon yöntemi, 2012 yılında Chugh ve Kumar [80] tarafından Kirk-Mann ve Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemlerinin genelleştirmesi olarak tanımlanmıştır.

Tanım 3.17 (Kirk-SP İterasyon Yöntemi ve Kirk-CR İterasyon Yöntemi) X Banach uzayı ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. k, s ve t , $k \geq s \geq t$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\alpha_{n,i}, \beta_{n,j}, \gamma_{n,l} \in [0,1]$, $\alpha_{n,i} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,j} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$, $\gamma_{n,l} \geq 0$, $\gamma_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler olmak üzere;

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0}y_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \\ y_n = \beta_{n,0}z_n + \sum_{j=1}^s \beta_{n,j}T^j z_n, \quad \sum_{j=0}^s \beta_{n,j} = 1, \\ z_n = \gamma_{n,0}x_n + \sum_{l=1}^t \gamma_{n,l}T^l x_n, \quad \sum_{l=0}^t \gamma_{n,l} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-SP iterasyon yöntemi denir.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0}y_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}T^i y_n, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1, \\ y_n = \beta_{n,0}Tx_n + \sum_{r=1}^s \beta_{n,r}T^r z_n, \quad \sum_{r=0}^s \beta_{n,r} = 1, \\ z_n = \gamma_{n,0}x_n + \sum_{l=1}^t \gamma_{n,l}T^l x_n, \quad \sum_{l=0}^t \gamma_{n,l} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-CR iterasyon yöntemi denir.

Kirk-SP ve Kirk-CR iterasyon yöntemleri, 2012 yılında Hussain vd. [81] tarafından tanımlanmıştır. Kirk-SP ve Kirk-CR iterasyon yöntemlerinin, kesin quasi-contractive dönüşüm sınıfı için güçlü yakınsaklığı ispatlanmış ve bu iterasyon yöntemlerinin literatürdeki diğer iterasyon yöntemleriyle karşılaştırıldığında daha iyi yakınsadığı gösterilmiştir.

Tanım 3.18 (Kirk-S İterasyon Yöntemi) s_1 ve s_2 , $s_1 \geq s_2$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\alpha_{n,i_1}, \beta_{n,i_2} \in [0,1]$, $\alpha_{n,i_1} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,i_2} \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler olmak üzere;

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0}Tx_n + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1}T^{i_1} y_n, \quad \sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1, \\ y_n = \beta_{n,0}x_n + \sum_{i_2=1}^{s_2} \beta_{n,i_2}T^{i_2} x_n, \quad \sum_{i_2=0}^{s_2} \beta_{n,i_2} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (3.18)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-S iterasyon yöntemi denir.

Kirk-S iterasyon yönteminde $s_1 = s_2 = 1$ olarak alınması durumunda $\sum_{i_1=0}^1 \alpha_{n,i_1} = 1$ ve

$\sum_{i_2=0}^1 \beta_{n,i_2} = 1$ olarak elde edilir, bunlara ek olarak $\alpha_{n,1} = \alpha_n$ ve $\beta_{n,i_2} = \beta_n$ seçimleri ile

birlikte verilen S-iterasyon yöntemine indirgenir.

Kirk-S iterasyon yöntemi, 2014 yılında Karakaya ve Gürsoy [82] tarafından tanımlanmış, contractive operatörlerin bazı sınıflarının sabit noktalarına yaklaşmak için kullanılmış ve aynı operatörler için kararlılığı ispatlanmıştır.

Tanım 3.19 (Multistep İterasyon Yöntemi) C , X Banach uzayının boştan farklı, konveks alt kümesi ve $T : C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\beta_n^i\}_{n=0}^{\infty}, i = \overline{1, k-2}, k \geq 2$ dizileri $[0,1]$ de reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(T, x_n) = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n^1 \\ y_n^i = (1 - \beta_n^i)x_n + \beta_n^i T y_n^{i+1} \\ y_n^{k-1} = (1 - \beta_n^{k-1})x_n + \beta_n^{k-1} T x_n, n \in \mathbb{N}, i = \overline{1, k-2}, \end{cases} \quad (3.19)$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine Multistep iterasyon yöntemi denir. Burada

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^i = 0$ olarak alınır.

2004 yılında, Rhoades ve Şoltuz [67] tarafından tanımlanan Multistep iterasyon yöntemi aşağıda gösterildiği şekilde yukarıda bahsedilen iterasyon yöntemlerinin bir genelleştirmesidir:

Multistep iterasyon yönteminde $k = 3$ ve $k = 2$ alındığında, sırasıyla, Noor ve Ishikawa iterasyon yöntemleri ; $k = 2$, $\beta_n^1 \equiv 0$ ve $k = 2$, $\beta_n^1 \equiv 0$, $\alpha_n \equiv \lambda$ (sabit) için, sırasıyla, Mann ve Genelleştirilmiş Krasnoselskij iterasyon yöntemleri elde edilir. Genelleştirilmiş Krasnoselskij iterasyon yönteminde $\lambda = 1/2$ ve $\lambda = 1$ alındığında, sırasıyla, Krasnoselskij ve Picard iterasyon yöntemleri elde edilir.

Rhoades ve Şoltuz [67], çeşitli operatör sınıfları için Mann, Ishikawa iterasyon yöntemlerinin yakınsaklığının multistep iterasyonunun yakınsaklığına denk olduğunu göstermişlerdir; ayrıca, [83]'de Ishikawa iterasyonunun yakınsaklığının Mann iterasyonunun yakınsaklığına denk olduğunu göstermişlerdir.

Şimdi Multistep iterasyonu ile yapılmış hibrid iterasyon yöntemlerini inceleyelim:

Tanım 3.20 (Kirk-Multistep İterasyon Yöntemi) s_1 ve s_{p+1} , $p = \overline{1, k-1}$; $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$

şartını sağlayan tamsayılar ve $\alpha_{n,i_1}, \beta_{n,i_{p+1}}^p \in [0,1]$; $p = \overline{1, k-1}$ için $\alpha_{n,i_1} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$,

$\beta_{n,i_{p+1}}^p \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler ve $p = \overline{1, k-1}$ için $\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1$ ve

$\sum_{i_{p+1}=0}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ olmak üzere;

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0} x_n + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} y_n^1, \\ y_n^p = \beta_{n,0} x_n + \sum_{i_{p+1}=1}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p T^{i_{p+1}} y_n^{p+1}, \quad p = \overline{1, k-2}, \\ y_n^{k-1} = \sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} T^{i_k} x_n, \quad k \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}, \end{array} \right. \quad (3.20)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-Multistep iterasyon yöntemi denir [84].

Kirk-Multistep iterasyon yönteminde $k = 3$ ve $k = 2$ alındığında, sırasıyla, Kirk-Noor ve Kirk-Ishikawa iterasyon yöntemleri elde edilir. $k = 2$ ve $s_2 = 0$ için Kirk-Multistep iterasyon yöntemi Kirk-Mann iterasyon yöntemine indirgenir. Ayrıca, $k = 2$, $s_2 = 0$ ve $\alpha_{n,i_1} = \alpha_{i_1}$ için Kirk iterasyon yöntemine indirgenir. $s_1 = 1$ ve $s_{p+1} = 1$, $p = \overline{1, k-1}$ olarak

alınırsa; $\sum_{i_1=0}^1 \alpha_{n,i_1} = 1$ ve $\sum_{i_{p+1}=0}^1 \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1$ elde edilir, bunlara ek olarak $\alpha_{n,1} = \alpha_n$ ve

$\beta_n^p = \beta_n^p$, $p = \overline{1, k-1}$ seçimleri ile birlikte Kirk-multistep iterasyon yöntemi, multistep iterasyon yöntemine indirgenir.

Kirk-Multistep iterasyon yöntemi, 2014 yılında Karakaya, Rhoades ve Gürsoy [84] tarafından tanımlanmış ve bu iterasyon yönteminin yakınsaklığı üzerine çalışılmıştır; ayrıca, bazı contractive-like dönüşümler kullanılarak, Kirk-Multistep iterasyon yönteminin kararlılık sonuçlarıyla ilgili bazı teoremler de ispatlanmıştır.

Tanım 3.21 (Multistep-SP İterasyon Yöntemi) $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\beta_n^i\}_{n=0}^{\infty}$, $i = \overline{1, k-1}$, $k \geq 2$,

$[0,1]$ deki reel sayı dizileri olsun ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartını sağlasın.

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n) y_n^1 + \alpha_n T y_n^1, \\ y_n^1 = (1 - \beta_n^1) y_n^2 + \beta_n^1 T y_n^2, \\ y_n^2 = (1 - \beta_n^2) y_n^3 + \beta_n^2 T y_n^3, \\ \vdots \\ y_n^{k-2} = (1 - \beta_n^{k-2}) y_n^{k-1} + \beta_n^{k-2} T y_n^{k-1}, \\ y_n^{k-1} = (1 - \beta_n^{k-1}) x_n + \beta_n^{k-1} T x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

veya kısaca

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n) y_n^1 + \alpha_n T y_n^1, \\ y_n^i = (1 - \beta_n^i) y_n^{i+1} + \beta_n^i T y_n^{i+1}, \quad i = \overline{1, k-2}, \\ y_n^{k-1} = (1 - \beta_n^{k-1}) x_n + \beta_n^{k-1} T x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.21)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Multistep-SP iterasyon yöntemi denir [85].

(3.21) de $k=3$ ve $k=2$ alındığında, sırasıyla SP ve iki adımlı Mann iterasyon yöntemleri elde edilir. (3.21) ile verilen iterasyon yöntemi $k=2$, $\beta_n^1 \equiv 0$ ve $k=2$, $\beta_n^1 \equiv 0$, $\alpha_n \equiv \lambda$ (sabit) için, sırasıyla, Mann ve Genelleştirilmiş Krasnoselskij iterasyon yöntemlerine indirgenir. Genelleştirilmiş Krasnoselskij iterasyon yönteminde $\lambda = 1/2$ ve $\lambda = 1$ alındığında, sırasıyla, Krasnoselskij ve Picard iterasyon yöntemleri elde edilir.

Multistep-SP iterasyon yöntemi, 2013 yılında Karakaya, Rhoades ve Gürsoy [85] tarafından tanımlanmış ve bu iterasyon yönteminin yakınsaklığının contractive- like

dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için kullanılabileceği ispatlanmıştır. [86]' da tanımlanan Jungck multistep-SP iterasyon yönteminde $S = I$ (Özdeşlik dönüşümü) alındığında Multistep-SP iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 3.22 (Kirk-Multistep-SP İterasyon Yöntemi) s_1 ve s_{p+1} , $p = \overline{1, k-1}$; $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$ şartını sağlayan tamsayılar ve $\alpha_{n,i_1}, \beta_{n,i_{p+1}}^p \in [0,1]$; $p = \overline{1, k-1}$ için $\alpha_{n,i_1} \geq 0$, $\alpha_{n,0} \neq 0$, $\beta_{n,i_{p+1}}^p \geq 0$, $\beta_{n,0} \neq 0$ şartlarını sağlayan diziler ve $p = \overline{1, k-1}$ için

$$\sum_{i_1=0}^{s_1} \alpha_{n,i_1} = 1 \text{ ve } \sum_{i_{p+1}=0}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1 \text{ olmak üzere;}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = \alpha_{n,0} y_n^1 + \sum_{i_1=1}^{s_1} \alpha_{n,i_1} T^{i_1} y_n^1, \\ y_n^p = \beta_{n,0}^p y_n^{p+1} + \sum_{i_{p+1}=1}^{s_{p+1}} \beta_{n,i_{p+1}}^p T^{i_{p+1}} y_n^{p+1}, \quad p = \overline{1, k-2}, \\ y_n^{k-1} = \sum_{i_k=0}^{s_k} \beta_{n,i_k}^{k-1} T^{i_k} x_n, \quad k \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}, \end{array} \right. \quad (3.22)$$

ile tanımlı iterasyon yöntemine Kirk-Multistep-SP iterasyon yöntemi denir [82].

(3.22) de $k = 3$ ve $k = 2$ alındığında, sırasıyla, Kirk-SP ve Kirk-iki adımlı Mann iterasyon yöntemleri elde edilir. $k = 2$ ve $s_2 = 0$ için (3.22) ile verilen iterasyon yöntemi Kirk-Mann iterasyon yöntemine indirgenir. Ayrıca, $k = 2$, $s_2 = 0$ ve $\alpha_{n,i_1} = \alpha_{i_1}$ için (3.22) ile verilen iterasyon yöntemi Kirk iterasyon yöntemine indirgenir. (3.22) de $s_1 = 1$ ve

$$s_{p+1} = 1, \quad p = \overline{1, k-1} \text{ olarak alınırsa; } \sum_{i_1=0}^1 \alpha_{n,i_1} = 1 \text{ ve } \sum_{i_{p+1}=0}^1 \beta_{n,i_{p+1}}^p = 1 \text{ olarak elde edilir,}$$

bunlara ek olarak $\alpha_{n,1} = \alpha_n$ ve $\beta_{n,1}^p = \beta_n^p$, $p = \overline{1, k-1}$ seçimleri ile birlikte (3.22) ile verilen Kirk-multistep iterasyon yöntemi, multistep-SP (3.21) iterasyon yöntemine indirgenir. Böylece yukarıda bahsedildiği üzere (3.21) ile verilen multistep-SP iterasyon yönteminin özel durumları olan diğer iterasyon yöntemleri, Kirk-multistep-SP (3.22) iterasyon yönteminin de birer özel durumu olurlar.

Kirk-Multistep-SP iterasyon yöntemi, 2014 yılında Karakaya ve Gürsoy [82] tarafından Multistep-SP iterasyon yönteminin genelleştirilmesi olarak tanımlanmış, contractive operatörlerin bazı sınıflarının sabit noktalarına yaklaşmak için kullanılmış ve aynı operatörler için kararlılığı ispatlanmıştır.

Tanım 3.23 (Jungck İterasyon Yöntemi) X bir Banach uzayı, Y keyfi bir küme ve $T(Y) \subseteq S(Y)$ olmak üzere $S, T : Y \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x_0 \in Y$ için

$$Sx_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

olacak şekilde bir $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi var ise bu iterasyon yöntemine Jungck iterasyon yöntemi denir. $Y = X$ ve $S = Id$ birim dönüşümü alınırsa bu iterasyon, Picard iterasyon yöntemine indirgenir.

Jungck iterasyon yöntemi, 1976 yılında Jungck [87] tarafından kendi üzerine olmayan dönüşümler için tanımlanmıştır. Jungck göstermiştir ki; S ve T değişmeli, $T(X) \subseteq S(X)$ ve S sürekli olmak üzere, $\forall x, y \in X$ ve $0 \leq k < 1$ için

$$d(Tx, Ty) \leq k.d(Sx, Sy)$$

koşulunu sağlayan S ve T dönüşümleri X tam uzayında tek bir ortak sabit noktaya sahiptir.

Jungck iterasyon yöntemi ile yapılmış bazı hibrid iterasyon yöntemlerini verelim:

Tanım 3.24 (Jungck-Mann İterasyon Yöntemi) X bir normlu lineer uzay, Y keyfi bir küme ve $T(Y) \subseteq S(Y)$ olacak şekilde $S, T : Y \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \in [0, 1]$ de bir dizi olmak üzere $\forall x_0 \in Y$ için

$$Sx_{n+1} = (1 - \alpha_n)Sx_n + \alpha_n Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

olacak şekilde bir $\{Sx_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi var ise bu iterasyon yöntemine Jungck-Mann iterasyon yöntemi denir.

Jungck-Mann iterasyon yöntemi, 2005 yılında Singh vd. [88] tarafından bazı kararlılık sonuçlarını elde etmek için tanımlanmıştır.

Tanım 3.25 (Jungck-Ishikawa İterasyon Yöntemi) X bir Banach uzayı, Y keyfi bir küme ve $T(Y) \subseteq S(Y)$, $S(Y)$ X in tam altuzayı ve S injektif olacak şekilde $S, T : Y \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty} \in [0,1]$ de pozitif sayılar dizisi olmak üzere $\forall x_0 \in Y$ için

$$\begin{cases} Sx_{n+1} = (1-\alpha_n)Sx_n + \alpha_n Ty_n \\ Sy_n = (1-\beta_n)Sx_n + \beta_n Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.25)$$

şeklinde tanımlı iterasyon yöntemine Jungck-Ishikawa iterasyon yöntemi denir.

Jungck-Ishikawa iterasyon yöntemi, 2008 yılında Olatinwo ve Imoru [89] tarafından tanımlanmıştır. Olatinwo ve Imoru, genelleştirilmiş Zamfirescu dönüşüm sınıfları için Jungck-Mann ve Jungck-Ishikawa iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarını incelemişlerdir. Bu sonuçlar Kannan [23],[90], Rhoades [91],[92] ve Berinde [93],[94] nin sonuçlarının genişlemesi ve genelleştirilmesidir.

Tanım 3.26 (Jungck-Noor İterasyon Yöntemi) X bir Banach uzayı, Y keyfi bir küme ve $T(Y) \subseteq S(Y)$, $S(Y)$ X in tam altuzayı ve S injektif olacak şekilde $S, T : Y \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty} \in [0,1]$ de pozitif sayılar dizisi olmak üzere $\forall x_0 \in Y$ için

$$\begin{cases} Sx_{n+1} = (1-\alpha_n)Sx_n + \alpha_n Ty_n \\ Sy_n = (1-\beta_n)Sx_n + \beta_n Tz_n \\ Sz_n = (1-\gamma_n)Sx_n + \gamma_n Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.26)$$

şeklinde tanımlı iterasyon yöntemine Jungck-Noor iterasyon yöntemi denir.

Jungck-Noor iterasyon yöntemi, 2008 yılında Olatinwo [95] tarafından tanımlanmış olup keyfi Banach uzaylarında genel contractive şartları kullanılarak kendi üzerine olmayan dönüşümler için güçlü yakınsaklık sonuçları elde edilmiştir. Bu iterasyon yöntemi Jungck-Ishikawa iterasyon yönteminin genelleştirilmesi olarak da bilinir.

Tanım 3.27 (Jungck-Multistep İterasyon Yöntemi) X bir Banach uzayı, Y keyfi bir küme ve $T(Y) \subseteq S(Y)$ olmak üzere $S, T : Y \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\beta_n^i\}_{n=0}^{\infty}, i = \overline{1, k-2}, k \geq 2$ dizileri $[0,1]$ de reel sayı dizileri olmak üzere $\forall x_0 \in Y$ için

$$\begin{cases} Sx_{n+1} = (1 - \alpha_n)Sx_n + \alpha_n Ty_n^1 \\ Sy_n^i = (1 - \beta_n^i)Sx_n + \beta_n^i Ty_n^{i+1} \\ Sy_n^{k-1} = (1 - \beta_n^{k-1})Sx_n + \beta_n^{k-1}Tx_n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (3.27)$$

şeklinde tanımlı iterasyon yöntemine Jungck-multistep iterasyon yöntemi denir.

Burada $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ olarak alınır.

Jungck-multistep iterasyon yöntemi, 2010 yılında Olaleru ve Akewe [96] tarafından tanımlanmış, keyfi bir Banach uzayında genelleştirilmiş contractive-like dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasına güçlü yakınsadığı gösterilmiştir.

Jungck-multistep iterasyon yöntemi Jungck-Noor, Jungck-Ishikawa ve Jungck-Mann iterasyon yöntemlerinin bir genelleştirmesidir. Eğer (3.27) de $k=1$ alınırsa Jungck-Mann iterasyon yöntemi, $k=2$ alınırsa Jungck-Ishikawa iterasyon yöntemi, $k=3$ alınırsa Jungck-Noor iterasyon yöntemi elde edilir.

Tanım 3.28 (Jungck-SP İterasyon Yöntemi) X bir Banach uzayı, Y keyfi bir küme ve $T(Y) \subseteq S(Y)$, $S(Y)$ X in tam altuzayı ve S injektif olacak şekilde $S, T : Y \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty} \in [0,1]$ de pozitif sayılar dizisi olmak üzere $\forall x_0 \in Y$ için

$$\begin{cases} Sx_{n+1} = (1 - \alpha_n)Sy_n + \alpha_n Ty_n \\ Sy_n = (1 - \beta_n)Sz_n + \beta_n Tz_n \\ Sz_n = (1 - \gamma_n)Sx_n + \gamma_n Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.28)$$

şeklinde tanımlı iterasyon yöntemine Jungck-SP iterasyon yöntemi denir.

Jungck-SP iterasyon yöntemi, 2011 yılında Chugh ve Kumar [97] tarafından tanımlanmıştır. Burada keyfi Banach uzayında kendi üzerine olmayan dönüşümler için Jungck-SP iterasyon yönteminin güçlü yakınsaklığı çalışılmış ve bazı contractive koşullar kullanılarak aynı dönüşümler için normlu lineer uzaylarda kararlılık sonuçları elde edilmiştir. C^{++} bilgisayar programı kullanılarak, bu iterasyon yönteminin Jungck-Noor, Jungck-Ishikawa ve Jungck-Mann iterasyon yöntemlerinden daha hızlı yakınsadığı bir örnekle gösterilmiştir.

Tanım 3.29 (Jungck-CR İterasyon Yöntemi) X bir Banach uzayı, Y keyfi bir küme ve $T(Y) \subseteq S(Y)$, $S(Y)$ X in tam altuzayı ve S injektif olacak şekilde $S, T: Y \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty, \{\beta_n\}_{n=0}^\infty, \{\gamma_n\}_{n=0}^\infty \in [0,1]$ de pozitif sayılar dizisi olmak üzere $\forall x_0 \in Y$ için

$$\begin{cases} Sx_{n+1} = (1-\alpha_n)Sy_n + \alpha_nTy_n \\ Sy_n = (1-\beta_n)Tx_n + \beta_nTz_n \\ Sz_n = (1-\gamma_n)Sx_n + \gamma_nTx_n, \quad n = 0,1,2,\dots \end{cases} \quad (3.29)$$

şeklinde tanımlı iterasyon yöntemine Jungck-CR iterasyon yöntemi denir.

Jungck-CR iterasyon yöntemi, 2013 yılında Hussain, Kumar ve Kutbi [98] tarafından tanımlanmış, diğer iterasyon yöntemleriyle yakınsaklık hızları karşılaştırılmış ve bir örnekle Jungck-CR iterasyon yönteminin uygulamaları gösterilmiştir.

Tanım 3.30 (Jungck- Kirk-Mann İterasyon Yöntemi ve Jungck-Kirk İterasyon Yöntemi)

X bir normlu lineer uzay, Y keyfi bir küme, $T(Y) \subseteq S(Y)$ ve $S, T: Y \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $\alpha_{n,i} \geq 0, \alpha_{n,0} \neq 0, \alpha_{n,i} \in [0,1]$ ve $\sum_{i=0}^k \alpha_{n,i} = 1$ olmak üzere $\forall x_0 \in Y$ için

$$Sx_{n+1} = \alpha_{n,0}Sx_n + \sum_{i=1}^k \alpha_{n,i}T^i x_n, \quad n = 0,1,\dots \quad (3.30)$$

olarak tanımlanan $\{Sx_n\}_{n=0}^\infty \subset X$ iterasyon yöntemine Jungck-Kirk-Mann iterasyon yöntemi denir.

Eğer (3.30) da $\alpha_{n,i} = \alpha_i$ olarak alınırsa $\alpha_i \geq 0, \alpha_0 \neq 0, \alpha_i \in [0,1]$ ve $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$ olmak üzere $\forall x_0 \in Y$ için

$$Sx_{n+1} = \alpha_0Sx_n + \sum_{i=1}^k \alpha_iT^i x_n, \quad n = 0,1,\dots \quad (3.31)$$

olarak tanımlanan $\{Sx_n\}_{n=0}^\infty \subset X$ iterasyon yöntemine Jungck-Kirk iterasyon yöntemi denir.

Jungck-Kirk iterasyon yöntemi ve Jungck-Kirk-Mann iterasyon yöntemi, 2013 yılında Olatinwo [65] tarafından tanımlanmış, kendi üzerine olmayan dönüşümler için genel contractive şartları altında kararlılık sonuçlarını elde etmişlerdir.

Tanım 3.31 (Halpern İterasyon Yöntemi) X bir normlu uzay, K bu uzayın boş olmayan konveks bir alt kümesi, $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_0, u \in K$, $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ de bir dizi olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n)Tx_n, \quad n \geq 0 \quad (3.32)$$

olarak tanımlanan iterasyon yöntemine Halpern iterasyon yöntemi denir.

Halpern iterasyon yöntemi, 1967 yılında Halpern [100] tarafından tanımlanmıştır. 1983 yılında Reich [101] şu soruyu sormuştur: X bir Banach uzayı, K bu uzayın zayıf kompakt ve konveks bir alt kümesi ve $T : K \rightarrow K$ sabit nokta özelliğine sahip genişlemeyen bir dönüşüm olmak üzere, $\{x_n\}$ dizisinin T nin sabit noktasına yakınsamasını sağlayacak bir $\{\alpha_n\}$ dizisi tanımlanabilir mi?

İlk olarak Halpern (3.32) iterasyon dizisinde $\alpha_n = n^{-a}$, $a \in (0,1)$ alarak, $\{x_n\}$ dizisinin T genişlemeyen dönüşümünün sabit noktasına zayıf yakınsadığını ispatlamıştır. 1977’de Lions [102], $\{\alpha_n\}$ reel dizisi üzerine

$$(C_1) \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0,$$

$$(C_2) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty,$$

$$(C_3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n - \alpha_{n-1}) / \alpha_n^2 = 0$$

koşullarını koyarak $\{x_n\}$ dizisinin T dönüşümünün sabit noktasına kuvvetli yakınsadığını ispatlayarak Halpern’in sonuçlarını geliştirmiştir. Halper ve Lions’un $\{\alpha_n\}$ reel dizisi üzerine koyduğu koşullar $\alpha_n := (n+1)^{-1}$ seçimini hariç tuttuğu görülmüştür. 1992 yılında Wittmann [103] bu durumun üstesinden gelerek Hilbert uzaylarında $\{\alpha_n\}$ reel dizisi üzerine

$$(C_1) \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0,$$

$$(C_2) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty,$$

$$(C_3) \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n - \alpha_{n-1}| < \infty$$

koşullarını koyarak $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli yakınsadığını ispatlamıştır. Daha sonra Reich [104], Wittmann'ın sonuçlarını Banach uzaylarında genişletmiştir.

Tanım 3.32 (Picard-Mann İterasyon Yöntemi) X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Keyfi $x_1 \in C$ ve $\{\alpha_n\} \in (0,1)$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.33)$$

olarak tanımlanan iterasyon yöntemine Picard-Mann iterasyon yöntemi denir.

Picard-Mann iterasyon yöntemi, 2013 yılında Khan [105] tarafından tanımlanmış; Banach uzaylarında genişlemeyen bir T dönüşümü için (3.33) ile verilen iterasyon yönteminin kuvvetli ve zayıf yakınsaklığı incelenmiştir. Ayrıca bu iterasyonun daraltan dönüşümler için Picard, Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemlerinden daha hızlı yakınsadığı gösterilmiştir.

Tanım 3.33 (Picard-S İterasyon Yöntemi) X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Keyfi $x_1 \in C$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = (1 - \alpha_n)Tx_n + \alpha_n Tz_n \\ z_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.34)$$

olarak tanımlanan iterasyon yöntemine Picard-S iterasyon yöntemi denir.

Picard-S iterasyon yöntemi, 2014 yılında Karakaya ve Gürsoy [106] tarafından tanımlanmış, büzülme dönüşümlerinin sabit noktalarına yaklaşmak için kullanılmıştır. Picard-S iterasyon yöntemi bu dönüşüm sınıfları için CR iterasyon yönteminden daha hızlı yakınsar ve denktir. Ayrıca (3.34) ile tanımlanmış iterasyon yönteminin Picard, Mann, Ishikawa, Noor, SP, CR, S ve literatürde bulunan bazı iterasyon metodlarından

büzülme dönüşümleri için uygulandığında daha hızlı yakınsadığı bir örnekle sağlanmış, diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılmış ve veri bağıllığı sonuçları elde edilmiştir.

Tanım 3.34 (Yeni İki Adım İterasyon Yöntemi) X bir normlu uzay, K bu uzayın boş olmayan konveks bir alt kümesi, $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_0 = x \in K$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \beta_n Tx_n + (\alpha_n - \beta_n)Ty_n \\ y_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (3.35)$$

şeklinde tanımlanmış iterasyon yöntemine yeni iki adım iterasyon yöntemi denir [107].

Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ dizileri aşağıdaki şartları sağlayan reel dizilerdir.

- i) $\alpha_n \geq \beta_n$,
- ii) $\{\alpha_n - \beta_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty} \in [0,1]$,
- iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

(4.5) iterasyon yöntemi, eğer $\beta_n = 0$ alınırsa Ishikawa iterasyon yöntemine, $\gamma_n = 0$ alınırsa Mann iterasyon yöntemine indirgenir.

Yeni iki adım iterasyon yöntemi, 2014 yılında Karakaya ve Doğan [107] tarafından Ishikawa iterasyon yönteminin bir geliştirilmesi olarak tanımlanmış, zayıf büzülme dönüşümleri için yakınsaklığı incelenmiş ve kararlılık sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca bu iterasyon yöntemi diferansiyel eşitsizliklerin çözümünü bulmak için uygulanmıştır.

Tanım 3.35 (S^* Üç Adım İterasyon Yöntemi) X bir normlu uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan kapalı ve konveks bir alt küme, $T : C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Keyfi $x_1 \in C$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n Ty_n \\ y_n = (1-\beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.36)$$

ile tanımlanan iterasyon yöntemine S^* iterasyon yöntemi denir. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$, $[0,1]$ aralığında uygun $\alpha, \beta, \gamma > 0$ sayıları için $\alpha \leq \alpha_n < 1$, $\beta \leq \beta_n < 1$ ve $\gamma \leq \gamma_n < 1$ eşitsizliklerini sağlayan dizilerdir.

S^* iterasyon yöntemi, Karahan ve Özdemir [108] tarafından 2013 yılında tanımlanmıştır, Banach uzaylarında daraltan dönüşümler için S^* iterasyonu S iterasyonu ile hızları bakımından karşılaştırılarak S^* iterasyonunun daha hızlı yakınsadığı gösterilmiştir. Ayrıca daraltan ve genişlemeyen dönüşümler S^* iterasyonu ile ilgili kuvvetli ve zayıf yakınsama teoremleri verilmiştir ve varyasyonel eşitsizlik problemlerinin çözümlerini bulmada uygulanmıştır. Bu iterasyon yöntemi diğer tüm iterasyonlardan bağımsızdır. Yani kontrol dizileri veya dönüşümlerin özel seçimleriyle S^* iterasyonu diğer iterasyonlardan elde edilemez.

Tanım 3.36 (Yeni Üç Adım İterasyon Yöntemi) X bir normlu uzay, K bu uzayın boş olmayan konveks bir alt kümesi, $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n - \beta_n)y_n + \alpha_n Ty_n + \beta_n Tz_n \\ y_n = (1 - a_n - b_n)z_n + a_n Tz_n + b_n Tx_n \\ z_n = (1 - c_n)x_n + c_n Tx_n \end{cases}, n \in \mathbb{N} \quad (3.37)$$

şeklinde tanımlanmış iterasyon yöntemine yeni üç adım iterasyon yöntemi denir [68]. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{a_n\}, \{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında tanımlı, aşağıdaki şartları sağlayan reel dizilerdir.

$$i) (\alpha_n + \beta_n)_{n=0}^{\infty}, (a_n + b_n)_{n=0}^{\infty} \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N},$$

$$ii) \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) = \infty.$$

Yeni üç adım iterasyon yöntemi, 2013 yılında Karakaya vd. [68] tarafından üç adım iterasyonunun genellemesi olarak tanımlanmış, contractive- like dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsadığı ispatlanmıştır. Ayrıca bu dönüşüm sınıfları için yeni üç adım iterasyon yöntemi ile yenilenmiş Noor iterasyon yöntemi arasındaki yakınsaklık oranı karşılaştırılmıştır ve bu iterasyon yönteminin T - kararlı olduğu ispatlanmıştır.

Çoğu araştırmacı asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına ulaşmak için yeni iterasyon yöntemleri tanımlamışlardır. Şimdi T yerine n .kez itere edilmiş T^n dönüşümünü alarak modifiye iterasyon yöntemlerini verelim.

Tanım 3.37 (Modifiye Mann İterasyon Yöntemi) X bir normlu uzay, K bu uzayın boş olmayan konveks bir alt kümesi, $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ olmak üzere

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T^n x_n, \quad n \geq 1 \quad (3.38)$$

olarak tanımlanan iterasyon yöntemine modifiye Mann iterasyon yöntemi denir [109]. Burada $\{\alpha_n\}$, $\forall n \geq 1$ ve uygun bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\varepsilon \leq \alpha_n \leq 1 - \varepsilon$ şartını sağlayan $[0,1]$ aralığında bir dizidir.

Schu [110], 1991 yılında modifiye Mann iterasyonunu kullanarak asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına kuvvetli ve zayıf yakınsama teoremlerini ifade etmiştir.

Tanım 3.38 (Modifiye Ishikawa İterasyon Yöntemi) X bir normlu uzay, K bu uzayın boş olmayan konveks bir alt kümesi, $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T^n y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T^n x_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (3.39)$$

olarak tanımlanan iterasyon yöntemine modifiye Ishikawa iterasyon yöntemi denir [109]. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $\forall n \geq 1$ ve uygun bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $\varepsilon \leq (1 - \alpha_n)(1 - \beta_n) \leq 1 - \varepsilon$ şartını sağlayan $[0,1]$ aralığında iki reel sayı dizisidir.

Schu [110], 1991 yılında modifiye Ishikawa iterasyon yöntemini kullanarak tamamen sürekli, düzgün L-Lipschitzian ve asimptotik pseudocontractive dönüşümler için yakınsama teoremlerini ifade etmiştir.

Tanım 3.39 (Modifiye Üç Adım İterasyon Yöntemi) X bir normlu uzay, K bu uzayın boş olmayan konveks bir alt kümesi, $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + (1 - \alpha_n)x_n \\ y_n = \beta_n T^n z_n + (1 - \beta_n)x_n \\ z_n = \gamma_n T^n x_n + (1 - \gamma_n)x_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (3.40)$$

şeklinde tanımlanmış iterasyon yöntemine modifiye üç adım iterasyon yöntemi denir [99]. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in [0,1]$ dir.

(3.40) da $\gamma_n = 0$ alınırsa (3.39) ile tanımlanan modifiye Ishikawa iterasyonu elde edilir. Benzer şekilde (3.40) da $\gamma_n = \beta_n = 0$ alınırsa (3.38) ile tanımlanan modifiye Mann iterasyonu elde edilir.

Modifiye üç adım iterasyon yöntemi, 2002 yılında Xu ve Noor [99] tarafından tanımlanmıştır. Xu ve Noor, (3.40) iterasyon yöntemini kullanarak düzgün konveks Banach uzaylarında asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsama teoremlerini ifade etmişlerdir.

Tanım 3.40 (Modifiye Noor İterasyon Yöntemi) X bir normlu uzay, K bu uzayın boş olmayan konveks bir alt kümesi, $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n - \beta_n)x_n + \alpha_n T^n y_n + \beta_n T^n z_n \\ y_n = (1 - b_n - c_n)x_n + c_n T^n x_n + \beta_n T^n z_n \\ z_n = (1 - a_n)x_n + a_n T^n x_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (3.41)$$

şeklinde tanımlanmış iterasyon yöntemine modifiye Noor iterasyon yöntemi denir [111]. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \in [0,1]$ dir.

(3.41) de $c_n = \beta_n = 0$ alınırsa (3.40) ile tanımlanan modifiye üç adım iterasyonu; $c_n = \beta_n = a_n = 0$ alınırsa (3.39) ile tanımlanan modifiye Ishikawa iterasyonu; $c_n = \beta_n = a_n = b_n = 0$ alınırsa (3.38) ile tanımlanan modifiye Mann iterasyonu elde edilir.

Modifiye Noor iterasyon yöntemi, 2005 yılında Suantai [111] tarafından üç adım iterasyonunun genellemesi olarak tanımlanmıştır. Suantai, (3.41) iterasyon yöntemini kullanarak tamamen sürekli ve asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsama teoremlerini ifade etmişlerdir.

Tanım 3.41 (Modifiye S-İterasyon Yöntemi) X bir normlu uzay, K bu uzayın boş olmayan konveks bir alt kümesi, $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)T^n x_n + \alpha_n T^n y_n \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T^n x_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (3.42)$$

olarak tanımlanan iterasyon yöntemine modifiye S-iterasyon yöntemi denir [109]. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $[0,1]$ aralığında iki reel sayı dizisidir.

Modifiye S-İterasyon Yöntemi, Agarwal vd. [64] tarafından 2007 yılında tanımlanmış ve çeşitli dönüşümler için zayıf ve kuvvetli yakınsaklığı incelenmiştir.

Tanım 3.42 (Nilsrakoo ve Saejung Üç Adım İterasyon Yöntemi) X bir normlu uzay, K bu uzayın boş olmayan konveks bir alt kümesi, $T:K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ olmak üzere üç adım iterasyonu

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n T^n y_n + \beta_n T^n z_n + \gamma_n T^n x_n (1 - \alpha_n - \beta_n - \gamma_n) x_n \\ y_n = b_n T^n z_n + c_n T^n x_n + (1 - b_n - c_n) x_n \\ z_n = a_n T^n x_n + (1 - a_n) x_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \quad (3.43)$$

şeklinde tanımlanır [112].

Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n\}, \{b_n + c_n\} \in [0,1]$ dir. (3.43) de $\gamma_n = 0$ alınırsa (3.41) ile tanımlanan modifiye Noor iterasyonu, $\gamma_n = c_n = \beta_n = 0$ alınırsa (3.40) ile tanımlanan modifiye üç adım iterasyonu; ayrı ayrı $\gamma_n = \alpha_n = b_n = c_n = 0$ ve $\gamma_n = \beta_n = a_n = c_n = 0$ alınırsa (3.39) ile tanımlanan modifiye Ishikawa iterasyonu; $\beta_n = \gamma_n = a_n = b_n = c_n = 0$ alınırsa (3.38) ile tanımlanan modifiye Mann iterasyonu elde edilir.

Bu iterasyon yöntemini Nilsrakoo ve Saejung [112], 2006 yılında üç adım ve modifiye Noor iterasyon yönteminin geliştirilmesi olarak tanımlamıştır.

Tanım 3.43 (Modifiye Multistep İterasyon Yöntemi) C, X Banach uzayının boştan farklı, konveks alt kümesi ve $T:C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\beta_n^i\}_{n=0}^{\infty}$, $i = \overline{1, k-2}$, $k \geq 2$ dizileri $[0,1]$ de reel sayı dizileri olmak üzere

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n) y_n^1 + \alpha_n T y_n^1 \\ y_n^i = (1 - \beta_n^i) y_n^{i+1} + \beta_n^i T y_n^{i+1} \\ y_n^{k-1} = (1 - \beta_n^{k-1}) x_n + \beta_n^{k-1} T x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1, k-2}, \end{cases} \quad (3.44)$$

alınmasıyla elde edilen iterasyon yöntemine modifiye Multistep iterasyon yöntemi

denir. Burada $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^i = 0$ olarak alınır.

Modifiye Multistep iterasyon yöntemi, H. Akewe [113] tarafından 2014 yılında tanımlanmış ve tam metriklenabilir yerel konveks uzaylarda Bosede ve Rhoades [114] tarafından tanıtılan genel fonksiyon sınıflarının sabit noktalarına yaklaşmak için kullanılmış ve yakınsaklık sonuçları elde edilmiştir.

Tanım 3.44 (Modifiye Halpern İterasyon Yöntemi) X bir normlu uzay, K bu uzayın boş olmayan konveks bir alt kümesi, $T:K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_0, u \in K$, $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ de bir dizi olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) T^n x_n, \quad n \geq 0 \quad (3.45)$$

olarak tanımlanan iterasyon yöntemine modifiye Halpern iterasyon yöntemi denir [45].

BÖLÜM 4

AĞIRLIKLI ORTALAMA MATRİSİNE GÖRE TOPLANABİLME METODUYLA İTERASYON

İlk olarak toplanabilme ve sabit nokta iterasyon yöntemi arasındaki ilişki verilecektir. Bir iterasyon yönteminde limitin varlığı Cauchy dizisinin olmasına bağlıdır.

$$T(x_n) = x_{n+1}$$

şeklindeki keyfi Picard tipten bir dönüşümde $\{x_n\}$ yakınsak bir dizidir ve itere edildiğinde de $T(x_n)$ de bir Cauchy dizisidir. Yani Cauchy yakınsama mevcuttur. Fakat $\{x_n\}$ dizisinin veya $T(x_n)$ iterasyon dizisinin yakınsak olmadığı düşünüldüğünde Cauchy anlamında yakınsaklığın ortadan kalktığı görülür.

İraksak diziler teorisinde Cesàro Teoremi olarak bilinen teoremde E. Cesàro, Cauchy anlamında yakınsaklık tanımını kullanmamış, *aritmetik ortalama* olarak adlandırdığımız yeni bir toplama metodunu kullanmıştır. Bu yeni tanımla Cauchy anlamında yakınsak olan her dizi yine yakınsak olmaktadır, aynı zamanda Cauchy anlamında ıraksak olan diziler de yakınsak olmaktadır.

1953 yılında Mann [34] ilk defa ıraksak iterasyon dizilerinin de yakınsaklığını gösterebilmek için toplanabilme metodlarına başvurmuştur. İterasyon dizisi yakınsak ise limit noktasının dönüşümün sabit noktası olduğunu göstermiştir. Aksi halde iterasyon dizisi ıraksak iken toplanabilme metodlarından yararlanmıştır.

Bu bölümde regüler genelleştirilmiş ağırlıklı ortalama matrisi kullanılarak Mann iterasyon yöntemi ile elde edilen dizilerin yakınsaklığı incelenmiştir.

4.1 İterasyon yöntemi

Keyfi bir Banach uzayı üzerinde konveks kompakt E kümesini alalım. $T: E \rightarrow E$ sürekli bir dönüşüm olsun. Schauder sabit nokta teoreminden T dönüşümünün en az bir sabit noktası olmalıdır. E de keyfi bir x_1 noktası seçip, T dönüşümünün ardışık iterasyonları ile elde edilen $\{x_n\}$ dizisini gözönüne alalım.

$$\begin{aligned} T(x_1) &= x_2 \\ T(x_2) &= x_3 \\ &\vdots \\ T(x_n) &= x_{n+1} \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$x_{n+1} = T(x_n)$$

Eğer (1) ifadesindeki bu dizi yakınsaksa, dizinin limit noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır. Açık olarak aşağıdaki şekilde ispatlayabiliriz:

$\{x_n\}$ dizisinin yakınsak olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$$

yazabiliriz. T sürekli dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) &= T(p) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} &= T(p) \end{aligned}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow p$ olduğunda $x_{n+1} \rightarrow p$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $x_{n+1} \rightarrow p$ ve $x_{n+1} \rightarrow T(p)$ olduğu görülür. Limit noktasının tekliğinden $Tp = p$ gerçekleşir. Yani p, T dönüşümünün sabit noktasıdır. İspat tamamlanır.

Yakınsak bir iterasyon dizisinin T dönüşümünün bir sabit noktasına yakınsak olduğu görüldü. Yakınsak olmayan iterasyon dizileri için ise matris toplanabilme metotlarının kullanımını inceleyelim.

4.2 Toplanabilme-İterasyon ilişkisi

X ve Y birer dizi uzayı olmak üzere her $n, k \in \mathbb{N}$ için $A = (a_{nk})$ satır ve sütun sayısı sonsuz olan bir matris olarak alalım. Dizi uzayları birer lineer uzay olduğundan, her

$x = (x_n) \in X$ dizisini $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$ vektörel formda yazabiliriz. $A = (a_{nk})$ matrisi ile (x_n)

dizisine matris çarpımı uygularsak

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} x_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \\ \vdots \end{bmatrix} = (A_n(x))$$

dizisini elde ederiz. Burada $\forall k \in \mathbb{N}$ için $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ serilerinin yakınsak olduğunu kabul ediyoruz. Bu şekilde elde edilen $(A_n(x))$ dizisine $x = (x_n)$ dizisinin A matrisi ile yapılan dönüşüm dizisi denir. Her $x = (x_n) \in X$ için $(A_n(x))$ dizileri Y uzayının elemanları ise $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi X den Y ye bir matris dönüşümü tanımlar denir ve $A \in (X, Y)$ ile gösterilir [50].

Tanım 4.1 (Regüler Matris) Bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilmiş olsun. Eğer A matrisi yakınsak her diziye yakınsak diziye limiti koruyarak dönüştürüyorsa, A matrisine regüler matris denir ve $A \in (c, c, p)$ şeklinde gösterilir [39].

Matris metodlarıyla toplanabilme arasındaki ilişki 1911 yılında Toeplitz tarafından kurulmuştur.

Teorem 4.2 (Silverman-Toeplitz) Bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

$$(i) \|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$$

$$(iii) \text{ Her } k \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0$$

olmasıdır [46].

Şimdi kabul edelim ki

$$T(x_n) = x_{n+1} \quad (4.2)$$

ile tanımlanan iterasyon yöntemi yakınsak olmasın.

Sonsuz alt üçgensel bir $A = (a_{nk})$ matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots \\ . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın ve ek olarak

$$\begin{aligned} a_{nk} &\geq 0 && ; \forall n, k \\ a_{nk} &= 0 && ; k > n \\ \lim_n a_{nk} &= 0 && ; \forall k \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} &= 1 && ; \forall n \end{aligned} \quad (4.3)$$

şartlarını sağlasın. A matrisi bir Toeplitz matrisi olduğundan regüler olduğu açıktır. Konveks kompakt E kümesi üzerinde keyfi bir $x_1 \in E$ başlangıç değerini alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} = T(y_n) \quad (4.4)$$

$$y_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k \quad (4.5)$$

olarak tanımlanan iterasyon yöntemine genelleştirilmiş iterasyon yöntemi veya Mann iterasyonu denir. Bu yöntem x_1 başlangıç değeri, A matrisi ve T dönüşümü ile belirlenir ve kısaca (x_1, A, T) ile gösterilir. A matrisi birim matris alınırsa (x_1, A, T) iterasyon dizisi

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} = T(x_n) \\ y_{n+1} &= T^n y_1 = T^n x_1 \end{aligned}$$

olarak tanımlanmış Picard iterasyon yöntemine dönüşür.

(4.3) ifadesindeki sınırlamalar altında (y_n) dizisinin E kümesine ait olacağı açıktır.

Çünkü (4.3) ifadesinde, keyfi n, k için $a_{nk} \geq 0$ ve $\sum_{k=1}^n a_{nk} = 1$ verilmiştir. Böylece

$a_{nk} \in [0, 1]$ elde edilir. E kümesi konveks küme olduğundan konvekslik tanımından

$$y_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k \in E \text{ bulunur.}$$

Teorem 4.3 (4.4) ve (4.5) ifadesindeki koşulları sağlayan $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinden herhangi biri bir p noktasına yakınsak olsun. O halde diğer dizi de aynı değere yakınsaktır ve bu ortak limit noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır [34].

İspat. $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak olduğunu varsayalım. Yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$$

olsun. $y_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k$ ve A regüler matris olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$$

elde edilir. T sürekli olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n) = T(p)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = T(p)$$

gerçeklenir. $x_n \rightarrow p$ olduğundan $x_{n+1} \rightarrow p$ olur. Bu durumda $x_{n+1} \rightarrow p$ ve $x_{n+1} \rightarrow T(p)$ olduğu görülür. Limit noktasının bir tek olması nedeniyle $T(p) = p$ gerçekleşir. Yani p, T dönüşümünün sabit noktasıdır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = p$ elde edilir.

Şimdi de; $\{y_n\}$ dizisi yakınsak olsun. Yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = q$$

olsun. T sürekli olduğundan

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n) &= T(q) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} &= T(q) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= T(q)\end{aligned}$$

gerçeklenir. A regüler matris olduğundan

$$T(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = q$$

olacaktır. O halde; $T(q) = q$ gerçekleşir. Yani q , T dönüşümünün sabit noktasıdır ve

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = q$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Eğer $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri bir dizi limit noktasına sahip değilse, E kümesi kompakt olduğundan her bir diziyi içeren noktaların kümesi birden fazla limit noktasına sahip olacaktır. x dizisinin limit noktalarının kümesini X , y dizisinin limit noktalarının kümesini Y ile gösterelim.

Teorem 4.4 $\{s_n\}$ bir metrik uzayda sınırlı kompleks dizi olsun. Eğer;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(s_n, s_{n+1}) = 0$$

sağlanıyorsa dizinin limit noktalarının kümesi bağlantılıdır [115].

Teorem 4.5 (3) ifadesindeki şartları gerçekleyen A matrisi ek olarak

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n,n} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |a_{n+1,k} - a_{n,k}| &= 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

şartlarını da sağlasın. O halde X ve Y kapalı ve bağlantılıdır [34].

İspat. Y , $\{y_n\}$ dizisinin limit noktalarının kümesi olsun. Y , E kompakt kümesine ait olduğundan kapalıdır. Kapalılık topolojik bir özellik olduğundan sürekli dönüşümler altında korunur. O halde $X = T(Y)$ olduğundan X de kapalıdır. $y_n = \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k$ ile verildiğinden;

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= \sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1,k} x_k - \sum_{k=1}^n a_{n,k} x_k \\
&= \sum_{k=1}^n (a_{n+1,k} - a_{n,k}) x_k + a_{n+1,n+1} x_{n+1} \\
\|y_{n+1} - y_n\| &= \left\| \sum_{k=1}^n (a_{n+1,k} - a_{n,k}) x_k + a_{n+1,n+1} x_{n+1} \right\| \\
\|y_{n+1} - y_n\| &\leq \sum_{k=1}^n \|(a_{n+1,k} - a_{n,k}) x_k + a_{n+1,n+1} x_{n+1}\| \\
\|y_{n+1} - y_n\| &\leq \sum_{k=1}^n \|(a_{n+1,k} - a_{n,k}) x_k\| + \|a_{n+1,n+1} x_{n+1}\|
\end{aligned}$$

elde edilir. $\{x_n\}$ dizisi E kompakt kümesinden alındığı için sınırlıdır.

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - y_n\| &\leq \sup_k \|x_k\| \sum_{k=1}^n |a_{n+1,k} - a_{n,k}| + \|a_{n+1,n+1} x_{n+1}\| \\
\|y_{n+1} - y_n\| &\leq \|x\|_\infty \sum_{k=1}^n |a_{n+1,k} - a_{n,k}| + |a_{n+1,n+1}| \sup_n \|x_{n+1}\|
\end{aligned}$$

bulunur. $\|x\|_\infty < \infty$, (4.6) ifadesinden $\sum_{k=1}^n |a_{n+1,k} - a_{n,k}| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1,n+1} = 0$

olduğu biliniyor. O halde;

$$\|y_{n+1} - y_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

gerçeklenir.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_{n+1} - y_n) = 0$ olduğundan Teorem 4.4 den Y kümesi bağlantılıdır. Bağlantılılık topolojik bir özellik olup sürekli dönüşüm altında korunur. Tek parçadan oluşan kümenin sürekli dönüşüm altında iki parçalı bir küme haline dönüştürülemeyeceği açıktır. O halde $X = T(Y)$ olduğundan X de kapalı ve bağlantılıdır.

Tanım 4.6 (Çarpımsal matris) $u = (u_{nk})$ dizilerinin kümesini U ile gösterelim. Her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k \neq 0$ olsun. $u, v \in U$ olmak üzere her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$g_{nk} = \begin{cases} u_n v_k & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olarak gösterilen matrise $G(u, v) = (g_{nk})$ çarpımsal matris veya genelleştirilmiş ağırlıklı ortalama matrisi denir [35]. Burada u_n sadece n ye, v_k sadece k ya bağlı dizilerdir. O halde;

$$G = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n v_1 & u_n v_2 & \dots & u_n v_n & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Keyfi $x_1 \in E$ başlangıç değeri olmak üzere (4.4) ve (4.5) ile verilen iterasyon yönteminde A matrisi yerine, (4.3) koşulunu sağlayan regüler ağırlıklı ortalama matrisi alınırsa

$$x_{n+1} = T(y_n)$$

$$y_n = \sum_{k=1}^n u_n v_k x_k$$

iterasyon dizisi elde edilir ve (x_1, G, T) ile gösterilir.

Banach uzayı yerine reel eksen, konveks kompakt E kümesi yerine de kapalı ve sınırlı aralık alınırsa aşağıdaki özel durum elde edilir.

Teorem 4.7 $T : [a, b] \rightarrow [a, b]$ tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. T fonksiyonu tek bir p sabit noktasına sahip ise $[a, b]$ aralığındaki bir x_1 elemanının her seçimi için $(x_1, G, T) \rightarrow p$ gerçekleşir.

Bu teoremin ispatını vermek yerine daha genel bir teorem verilecektir. İspatı kolaylaştırmak için $[a, b]$ aralığı yerine $[0, 1]$ aralığını alalım.

Teorem 4.8 $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. T fonksiyonu tek bir p sabit noktasına sahip ise $[0, 1]$ aralığındaki bir x_1 elemanının her seçimi için $(x_1, G, T) \rightarrow p$ gerçekleşir.

İspat. $v_{n+1} \neq 0$ ve $u_{n+1}v_{n+1} \rightarrow 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} - y_n &= \sum_{k=1}^{n+1} u_{n+1}v_k x_k - \sum_{k=1}^n u_n v_k x_k \\
 &= \sum_{k=1}^n u_{n+1}v_k x_k + u_{n+1}v_{n+1}x_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_n v_k x_k \\
 &= u_{n+1}v_{n+1}x_{n+1} + (u_{n+1} - u_n) \sum_{k=1}^n v_k x_k \\
 &= u_{n+1}v_{n+1}T(y_n) + \frac{(u_{n+1} - u_n)}{u_n} y_n
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
 |y_n - y_{n-1}| &\leq |u_{n+1}v_{n+1}| |T(y_n)| + \left| \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} \right| |y_n| \\
 &\leq |u_{n+1}v_{n+1}| + \left| \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} \right| \rightarrow 0 ; (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

yazabiliriz. Çünkü tanım kümesi ve değer kümesi $[0,1]$ aralığına ait olduğundan $\{T(y_n)\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri sınırlıdır.

İlk olarak $\{y_n\}$ dizisinin yakınsaklığını inceleyelim. $\{y_n\}$ dizisi sınırlı bir aralıkta tanımlı olduğu için Bolzano-Weierstrass teoreminden en az bir limit noktası vardır. $\{y_n\}$ dizisinin birbirinden farklı $\lambda_1 < \lambda_2$ olacak biçimde iki limit noktasının var olduğunu kabul edelim. İspatı iki aşamada tamamlayabiliriz.

a) Öncelikle λ_1, λ_2 iki limit noktası olmak üzere her $y \in (\lambda_1, \lambda_2)$ için $T(y) = y$ olduğunu göstermeliyiz.

Keyfi $y^* \in (\lambda_1, \lambda_2)$ aralığında alınsın ve $T(y^*) > y^*$ olsun. $g(y^*) = T(y^*) - y^*$ alınırsa $g(y^*) > 0$ elde edilir. T fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli olduğundan g fonksiyonuda $[0,1]$ aralığında süreklidir. O halde bir $\delta > 0$ vardır öyle ki

$\delta \in \left(0, \frac{y^* - \lambda_1}{2}\right)$ seçilirse $|y - y^*| < \delta$ koşulunu sağlayan her y için işaret koruma

özelliklerinden $g(y) > 0$ bulunur. Yani $T(y) > y$ elde edilir. Bu durumda

$$|y_n - y^*| < \delta \text{ iken } T(y_n) > y_n \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.8) ifadesinden öyle bir N sayısı vardır ki

$$|y_{n+1} - y_n| < \delta, \quad n = N, N+1, \dots \quad (4.10)$$

bulunur. Aynı zamanda $y^* \in (\lambda_1, \lambda_2)$ olduğunda $\lambda_2 > y^*$ gerçekleşir. $\lambda_2, \{y_n\}$ dizisinin limit noktası olduğundan öyle bir N sayısı vardır ki (4.9) ifadesinden her $n \geq N$ için

$$y^* - \delta < y_n < y^* + \delta$$

elde edilir. Yani $y^* \in (\lambda_1, \lambda_2)$ ve $\delta \in \left(0, \frac{y^* - \lambda_1}{2}\right)$ olmak üzere

$$y_n > y^* - \delta > y^* - \frac{y^* - \lambda_1}{2} > \frac{y^* + \lambda_1}{2} > \lambda_1; \quad n = N, N+1, \dots \quad (4.11)$$

eşitsizliği elde edilir. O halde (4.11) ifadesinden λ_1 noktasının $\{y_n\}$ dizisi için limit noktası olamayacağı görülür. Kabul edelim ki $T(y^*) < y^*$ olsun. Bu durumda da λ_2 noktasının $\{y_n\}$ dizisi için limit noktası olamayacağı görülür. Öyleyse $T(y^*) < y^*$ ve $T(y^*) > y^*$ olması limit noktalarının varlığıyla çelişmektedir. O halde her $y^* \in (\lambda_1, \lambda_2)$ için

$$T(y^*) = y^*$$

elde edilir.

b) İkinci aşamada λ_1 ve λ_2 gibi iki farklı limit noktası olamayacağı gösterilecektir. Her $n \geq 1$ için

$$y_n \notin (\lambda_1, \lambda_2) \quad (4.12)$$

olduğu görülür. Çünkü $\{T(y_n)\} = \{y_n\}$ olsaydı (4.7) ifadesinden her $m = n+1 \geq n$ için $y_m = y_n$ olurdu. Yani belli bir yerden sonra sabit dizidir. Bu yüzden λ_1 ve λ_2 iki farklı limit noktası olamaz. (4.8) ve (4.12) ifadelerinden bir M sayısı vardır öyle ki eğer

$$y_M \geq \lambda_2 \text{ ise her } n > M \text{ için } y_n \geq \lambda_2 \geq \lambda_1$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten görülür ki $\lambda_1; \{y_n\}$ dizisi için limit noktası olamaz. Eğer

$$y_M \leq \lambda_1 \text{ ise her } n > M \text{ için } y_n < \lambda_1 < \lambda_2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten görülür ki λ_2 ; $\{y_n\}$ dizisi için limit noktası olamaz.

Yani; $\{y_n\}$ dizisinin iki farklı limit noktası olamaz. En az bir tane limit noktası olduğu

bilindiği için $\{y_n\}$ dizisinin λ gibi bir tek limit noktası vardır. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lambda$ elde

edilir. Teorem 4.3 den $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda$ gerçekleşir ve yine aynı teoremden λ elemanı T

fonksiyonunun bir sabit noktası olmak zorundadır. Hipotezden T fonksiyonunun tek sabit noktası p olduğundan $\lambda = p$ olmalıdır. İspat tamamlanır.

Sonuç 4.9 (4.4) ile verilen iterasyon yönteminde A matrisi yerine Cesàro, Nörlund ve Riezs matrisleri alındığında Mann iterasyonu gerçekleşir ve sabit nokta elde edilir.

AĞIRLIKLIL ORTALAMANIN MANN İTERASYONU

Tanım 5.1 (Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm) X bir Banach uzayı, $C \subseteq X$ boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T : C \rightarrow C$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $n \geq 1$ ve her $x, y \in C$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq (1 + \theta_n) \|x - y\| \quad (5.1)$$

olacak şekilde $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$ şartını sağlayan bir θ_n non-negatif reel sayısı var ise T dönüşümüne asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir [37].

Asimptotik genişlemeyen dönüşüm, 1972 yılında Goebel ve Kirk [116] tarafından genişlemeyen dönüşüm sınıflarının genelleştirilmesi olarak tanımlanmış ve bu dönüşümün sabit noktasının ilk varlık teoremini ispatlamışlardır. Daha sonra Kirk-Yanez-Shin [117], bu teoremin sonuçlarını geliştirmişlerdir.

Teorem 5.2 (Goebel-Kirk Sabit Nokta Teoremi) X düzgün konveks bir Banach uzayı, C bu uzayın boştan farklı, kapalı, konveks, sınırlı bir alt kümesi ve $T : C \rightarrow C$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda T , C de bir sabit noktaya sahiptir.

Teorem 5.3 (Kirk-Yanez-Shin Sabit Nokta Teoremi) X reflektive Banach uzayı, C bu uzayın boştan farklı, kapalı, konveks, sınırlı bir alt kümesi olsun. C genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta özelliğine sahip ise asimptotik genişlemeyen dönüşümler içinde sabit nokta özelliğine sahiptir denir.

1991 yılında Schu [109], Hilbert uzaylarında asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamak için modifiye Mann iterasyon yöntemini tanımlamış ve aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 5.4 H bir Hilbert uzayı, C bu uzayın boştan farklı, kapalı, konveks, sınırlı bir alt kümesi, $T : C \rightarrow C$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ve $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n < +\infty$ olsun.

Ayrıca $\varepsilon \in (0,1)$ için $0 < \varepsilon \leq \alpha_n \leq 1 - \varepsilon < 1$ şartını sağlayan $\{\alpha_n\}$, $[0,1]$ aralığında bir dizi olsun. Bu durumda her $x_1 \in C$ için

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T^n x_n$$

olarak tanımlanan iterasyon dizisi T nin bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Schu [110] ve Rhoades [118], Schu'nun sonuçlarını düzgün konveks Banach uzaylarına genişletmişlerdir. Baillon [119], ilk kez lineer olmayan ergodic teoremi şu şekilde ispatlamıştır.

Teorem 5.5 H bir Hilbert uzayının boştan farklı, kapalı, konveks C alt kümesini alalım. $T : C \rightarrow C$ genişlemeyen dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Her $x \in C$ için

$$T_n x = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n T^i x$$

Cesàro ortalaması T nin sabit noktasına zayıf yakınsar.

Bruck [120-121], genişlemeyen dönüşümler için düzgün konveks Banach uzaylarında Cesàro ortalamasına çalışmıştır. Daha sonra Hirano-Takashi [122], Baillon'un teoremini asimptotik genişlemeyen dönüşümler için genişletmiştir. Song [37], düzgün konveks Banach uzayı üzerinde asimptotik genişlemeyen dönüşümler için Cesàro ortalamasının Mann iterasyonunu tanımlamıştır.

Bu çalışmada Cesàro, Nörlund, Riezs ortalamalarının genelleştirmesi olan ağırlıklı ortalamanın Mann iterasyonunu tanımlayarak asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına zayıf ve kuvvetli yakınsak olma durumunu inceleyeceğiz.

E düzgün konveks Banach uzayı, $T:C \rightarrow C$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Ağırlıklı ortalamanın Mann iterasyonu, her $x_0 \in C$ ve $n \geq 0$ için

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n \quad (5.2)$$

biçiminde tanımlansın. $b_n = u_n \sum_{j=0}^n v_j \theta_j$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$; $\alpha_n, (0,1)$

de bir reel dizi ve aşağıdaki şartlardan birini sağlasın:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0;$$

$$ii) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty;$$

$$iii) 0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1.$$

Bu durumda iterasyon dizisinin T dönüşümünün sabit noktasına kuvvetli ve zayıf yakınsak olma durumları incelenecektir.

İlk olarak, bu bölümde kullanacağımız bazı lemma ve teoremleri ispatsız olarak verelim.

Lemma 5.6 C , düzgün konveks Banach uzayının kapalı konveks bir alt kümesi ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T:C \rightarrow C$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Her $r > 0$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} \sup_{x \in C \cap B_r} \left\| \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m T^j x - T^n \left(\frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m T^j x \right) \right\| = 0 \quad (5.3)$$

sağlanır. Burada $B_r = \{x \in E; \|x\| \leq r\}$ dir [123].

Lemma 5.7 (Xu Eşitsizliği) $q > 1$ ve $r > 0$ sabit reel sayılar olmak üzere bir E Banach uzayının düzgün konveks olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in B_r = \{x \in E : \|x\| \leq r\}$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^q \leq \lambda \|x\|^q + (1 - \lambda) \|y\|^q - W_q(\lambda) g(\|x - y\|) \quad (5.4)$$

olacak şekilde kesin artan, sürekli ve konveks bir $g:[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g(0) = 0$ fonksiyonu vardır. Burada $W_q(\lambda) = \lambda(1 - \lambda)^q - \lambda^q(1 - \lambda)$ dir [124].

Lemma 5.8 (Osilike-Aniagbosor) $\{a_n\}, \{b_n\}$ ve $\{\delta_n\}$ dizileri her $n \geq 1$

$$a_{n+1} \leq (1 + \delta_n)a_n + b_n \quad (5.5)$$

şartını sağlayan negatif olmayan reel sayı dizileri olsun. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n < +\infty$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$

ise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ vardır. Özellikle, $\{a_n\}$ de sıfıra güçlü yakınsayan $\{a_{n_k}\}$ alt dizisi varsa $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ olur [125].

Lemma 5.9 $\{a_n\}, \{b_n\}$ dizileri

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n < +\infty$$

şartını sağlayan negatif olmayan reel sayı dizileri olsun. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$ ise

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ dır [37].

5.1 İterasyon Dizisinin Kuvvetli Yakınsak Olması

Lemma 5.10 Düzgün konveks bir E Banach uzayının boştan farklı, kapalı konveks bir C altkümesini alalım. $T : C \rightarrow C$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ve $k_n = 1 + \theta_n$ olsun. $\{x_n\}$, C de sınırlı dizi ve $\{x_n\}$ dizisinin her $z \in C$ için

$$i) \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| x_{n_k} - u_{n_k} \sum_{j=0}^{n_k} v_j T^j x_{n_k} \right\| = 0 \quad \text{ve} \quad h(z) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z\|^2$$

$$ii) \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| x_{n_k+1} - u_{n_k} \sum_{j=0}^{n_k} v_j T^j x_{n_k} \right\| = 0 \quad \text{ve} \quad h(z) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k+1} - z\|^2$$

şartlarından birini sağlayan bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $h(x) = \inf_{z \in C} h(z)$ ve $Tx = x$ eşitliklerini sağlayacak bir tek $x \in C$ vardır.

İspat. i) İlk olarak x' in varlık ve tekliğini gösterelim.

E' nin düzgün konveksliğinden [126]; $h(z)$ sürekli, konveks ve $\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} h(z) = +\infty$ olmak üzere $h(x) = \inf_{z \in D} h(z)$ olacak şekilde bir x in varlığını kesin olarak söyleyebilirim. Kabul edelim ki

$$h(x) = h(y) = \inf_{z \in D} h(z)$$

eşitliğini sağlayan bir $y \in C$ olsun.

$r = \sup_{n \geq 0} \|x_n\|$ olmak üzere Lemma 5.7 den $q = 2$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ alırsak; her sabit n için

$$\left\| \frac{y+x}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|y\|^2 + \frac{1}{2} \|x\|^2 - \frac{1}{4} g(\|y-x\|)$$

$$\left\| x_{n_k} - \frac{y+x}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|x_{n_k} - y\|^2 + \frac{1}{2} \|x_{n_k} - x\|^2 - \frac{1}{4} g(\|y-x\|)$$

sağlayan $g: [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$, $g(0) = 0$ olacak şekilde sürekli kesin artan konveks bir fonksiyon vardır.

$k \rightarrow \infty$ için her iki tarafın üst limitini alırsak,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| x_{n_k} - \frac{y+x}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - y\|^2 + \frac{1}{2} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - x\|^2 - \frac{1}{4} g(\|y-x\|)$$

$$h\left(\frac{y+x}{2}\right) \leq \frac{1}{2} h(y) + \frac{1}{2} h(x) - \frac{1}{4} g(\|y-x\|)$$

$$g(\|y-x\|) \leq 2h(y) + 2h(x) - 4h\left(\frac{y+x}{2}\right) = 4\left(h(x) - h\left(\frac{y+x}{2}\right)\right) \leq 0$$

olur, çünkü $h(x) = \inf_{z \in D} h(z)$ ve $\frac{x+y}{2} \in C$ dir. Buradan $g(\|y-x\|) = 0$ olur ve $x = y$ elde ederiz. Böylelikle teklüğünü ispatlamış olduk.

Şimdi $x = Tx$ olduğunu gösterelim. Lemma 5.7 den her n ve l için

$$\left\| x_{n_k} - \frac{T^l x + x}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|x_{n_k} - T^l x\|^2 + \frac{1}{2} \|x_{n_k} - x\|^2 - \frac{1}{4} g(\|T^l x - x\|)$$

yazabiliriz. $k \rightarrow \infty$ için her iki tarafın üst limitini alırsak ,

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{T^l x + x}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}h(T^l x) + \frac{1}{2}h(x) - \frac{1}{4}g(\|T^l x - x\|) \\
g(\|T^l x - x\|) &\leq 2h(T^l x) + 2h(x) - 4h\left(\frac{T^l x + x}{2}\right)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

elde edilir.

Şimdi $A_n = u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j$ alalım. Lemma 5.6 dan

$$\begin{aligned}
\limsup_{l \rightarrow \infty} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|A_{n_k} x_{n_k} - T^l(A_{n_k} x_{n_k})\| &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A_n x_n - T^l(A_n x_n)\| \\
&\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K \cap B_r} \|A_n x - T^l(A_n x)\| = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|A_{n_k} x_{n_k} - T^l(A_{n_k} x_{n_k})\| = 0 \tag{5.7}$$

olur.

$\|x_{n_k} - T^l x\|$ ifadesinden $\{A_{n_k} x_{n_k}\}, \{T^l(A_{n_k} x_{n_k})\}, \{T^l x_{n_k}\}$ eklenip çıkartılırsa

$$\begin{aligned}
\|x_{n_k} - T^l x\| &\leq \|x_{n_k} - A_{n_k} x_{n_k}\| + \|A_{n_k} x_{n_k} - T^l(A_{n_k} x_{n_k})\| + \|T^l(A_{n_k} x_{n_k}) - T^l x_{n_k}\| + \|T^l x_{n_k} - T^l x\| \\
&\leq (2 + \theta_l) \|x_{n_k} - A_{n_k} x_{n_k}\| + \|A_{n_k} x_{n_k} - T^l(A_{n_k} x_{n_k})\| + (1 + \theta_l) \|x_{n_k} - x\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\lim_{l \rightarrow \infty} \theta_l = 0$ ile birlikte (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - A_{n_k} x_{n_k}\| = 0$ ve (5.7) koşullarını kullanarak önce k,

sonra l için üst limit alınırsa;

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - T^l x\| \leq \limsup_{l \rightarrow \infty} (1 + \theta_l) \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - x\| = \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - x\|$$

elde edilir. Buradan

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} h(T^l x) \leq h(x) \tag{5.8}$$

olur. Her l için $h(x) = \inf_{z \in C} h(z)$ ve $\frac{T^l x + x}{2} \in C$ olduğundan

$$h(x) \leq h\left(\frac{T^l x + x}{2}\right)$$

$$h(x) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} h\left(\frac{T^l x + x}{2}\right)$$

yazabiliriz. (5.6) ve (5.8) den

$$\begin{aligned} \limsup_{l \rightarrow \infty} g\left(\|T^l x - x\|\right) &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \left(2h(T^l x) + 2h(x) - 4h\left(\frac{\|T^l x + x\|}{2}\right)\right) \\ &\leq 4 \left(h(x) - \liminf_{l \rightarrow \infty} h\left(\frac{T^l x + x}{2}\right)\right) \leq 0 \end{aligned}$$

dır. g fonksiyonunun özelliğinden $\lim_{l \rightarrow \infty} g\left(\|T^l x - x\|\right) = 0$ ve buradan $\lim_{l \rightarrow \infty} \|T^l x - x\| = 0$ bulunur. Böylece T sürekli olduğundan $x = Tx$ bulunur ve (i) nin ispatı tamamlanmış olur.

Benzer şekilde (ii) şıkkını ispatlayabiliriz. (i) nin ispatındaki $\{x_{n_k}\}, \{x_{n_k+1}\}$ ile değiştirilirse teklik ve (5.6), (5.7) eşitlikleri gösterilmiş olur. Tek farklılık (5.8) eşitsizliğinin argümentidir. Benzer şekilde düzenlersek

$$\begin{aligned} \|x_{n_k+1} - T^l x\| &\leq \|x_{n_k+1} - A_{n_k} x_{n_k}\| + \|A_{n_k} x_{n_k} - T^l(A_{n_k} x_{n_k})\| + \|T^l(A_{n_k} x_{n_k}) - T^l x_{n_k+1}\| + \|T^l x_{n_k+1} - T^l x\| \\ &\leq (2 + \theta_l) \|x_{n_k+1} - A_{n_k} x_{n_k}\| + \|A_{n_k} x_{n_k} - T^l(A_{n_k} x_{n_k})\| + (1 + \theta_l) \|x_{n_k+1} - x\| \end{aligned}$$

olur. $\lim_{l \rightarrow \infty} \theta_l = 0$ ile birlikte (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k+1} - A_{n_k} x_{n_k}\| = 0$ ve (5.7) koşullarını kullanarak önce k , sonra l için üst limit alınır;

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k+1} - T^l x\| \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k+1} - x\|$$

elde edilir. Böylece (5.8) de ispatlanmış olur. İspatın geri kalanı (i) şıkkına benzer şekilde tamamlanır.

Sonuç 5.11 $C \neq 0$ olmak üzere düzgün konveks E Banach uzayının kapalı konveks bir altkütmesi olsun. $T : C \rightarrow C$ asimptotik genişlemeyen dönüşüm ve $k_n = 1 + \theta_n$ olduğunu kabul edelim. $\{x_n\}$, C de sınırlı bir dizi ve $\{x_n\}$ dizisinin

$$i) \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| x_{n_k} - u_{n_k} \sum_{j=0}^{n_k} v_j T^j x_{n_k} \right\| = 0$$

$$ii) \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| x_{n_{k+1}} - u_{n_k} \sum_{j=0}^{n_k} v_j T^j x_{n_k} \right\| = 0$$

şartlarından birini sağlayan bir $\{x_{n_k}\}$ altdizisinin varolduğunu kabul edelim. Eğer $x_{n_k} \rightarrow x$ ya da $x_{n_k} \xrightarrow{z} x$ ve E Opial koşulunu sağlıyorsa $Tx = x$ gerçekleşir.

İspat. $x_{n_k} \rightarrow x$ olması $0 = h(x) = \inf_{z \in C} h(z)$ olduğunu gösterir. O zaman Lemma 5.10 dan $Tx = x$ olduğunu söyleyebiliriz. $\{x_{n_k}\}$ nın zayıf yakınsaması onun sınırlılığı anlamına gelir, bu yüzden $h(z)$ fonksiyonu iyi tanımlı olabilir. Opial koşulundan $h(x) = \inf_{z \in C} h(z)$ olur. Böylece Lemma 5.10 dan istediğimiz sonuca ulaşırız.

Lemma 5.12 Düzgün konveks bir E Banach uzayının boştan farklı, kapalı konveks bir C altkütmesini alalım. $T : C \rightarrow C$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ve $k_n = 1 + \theta_n$ olsun. Her $x_0 \in C$ ve her $n \geq 0$ için;

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n \quad (5.9)$$

olarak tanımlansın. Eğer $b_n = u_n \sum_{j=0}^n v_j \theta_j$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, $\alpha_n \in (0,1)$ de reel dizi ise

i) Her bir $p \in F(T)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ limiti mevcuttur.

Ek olarak $T_n = u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j$ olarak alınırsa;

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ olacak biçimde bir $\{\alpha_n\}$ dizisi var ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - T_n x_n\| = 0$ gerçekleşir.

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (1-\alpha_n) = +\infty$ olacak biçimde bir $\{\alpha_n\}$ dizisi var ise $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_n x_n\| = 0$

gerçeklenir.

iv) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$ olacak biçimde bir $\{\alpha_n\}$ dizisi var ise

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_n x_n\| = 0$ gerçekleşir.

İspat. (i) $p \in F(T)$ alalım, o zaman

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - p\| &= \left\| \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n - p \right\| \\
 &= \left\| \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n - p + \alpha_n p - \alpha_n p \right\| \\
 &\leq \alpha_n \|x_n - p\| + (1-\alpha_n) \left\| u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n - p \right\| \\
 &\leq \alpha_n \|x_n - p\| + (1-\alpha_n) \left\| u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n - u_n \sum_{j=0}^n v_j p \right\| \\
 &\leq \alpha_n \|x_n - p\| + (1-\alpha_n) u_n \sum_{j=0}^n v_j \|T^j x_n - p\| \\
 &\leq \alpha_n \|x_n - p\| + (1-\alpha_n) u_n \sum_{j=0}^n v_j (1+\theta_j) \|x_n - p\| \\
 &\leq \left\{ \alpha_n + (1-\alpha_n) u_n \sum_{j=0}^n v_j (1+\theta_j) \right\} \|x_n - p\| \\
 &\leq [\alpha_n + (1-\alpha_n)(1+b_n)] \|x_n - p\| \\
 &\leq (1+b_n) \|x_n - p\|
 \end{aligned}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ olduğundan, Lemma 5.8 den $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ limitinin varlığını söyleyebiliriz.

Buradan $\{x_n\}$ sınırlıdır, bu da

$$\|T_n x_n - p\| \leq u_n \sum_{j=0}^n v_j \|T^j x_n - p\| \leq (1+b_n) \|x_n - p\|$$

için $\{T_n x_n\}$ nin sınırlılığını gerektirir.

dir. Böylece (5.9) dan ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ koşulunda

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - T_n x_n\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n - u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n \right\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \alpha_n x_n - \alpha_n u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n (x_n - T_n x_n)\| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \|x_n - T_n x_n\| = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. (ii) nin ispatı tamamlanmış olur.

(iii) $r = \sup_{n \in \mathbb{N}} \max \{\|x_n\|, \|T_n x_n\|\}$ olarak alalım. Lemma 5.7 den $q=2$ ve $\lambda = \alpha_n$ alırsak

her n için

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\|^2 &= \left\| \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n - p \right\|^2 \\
&\leq \alpha_n \|x_n - p\|^2 + (1 - \alpha_n) \|T_n x_n - p\|^2 - \alpha_n (1 - \alpha_n) g(\|T_n x_n - x_n\|) \\
&\leq \alpha_n \|x_n - p\|^2 + (1 - \alpha_n) (1 + b_n)^2 \|x_n - p\|^2 - \alpha_n (1 - \alpha_n) g(\|T_n x_n - x_n\|) \\
&\leq [1 + b_n (2 + b_n) (1 - \alpha_n)] \|x_n - p\|^2 - \alpha_n (1 - \alpha_n) g(\|T_n x_n - x_n\|)
\end{aligned}$$

sağlayan sürekli, kesin artan konveks $g : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$, $g(0) = 0$ fonksiyonu vardır.

$M > (2 + b_n) \|x_n - p\|^2$ olacak şekilde seçersek bazı M pozitif sabiti için

$$\alpha_n (1 - \alpha_n) g(\|T_n x_n - x_n\|) \leq \|x_n - p\|^2 - \|x_{n+1} - p\|^2 + b_n M \quad (5.10)$$

yazabiliriz ve buradan $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) g(\|T_n x_n - x_n\|) < +\infty$ elde edilir.

$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) g(\|T_n x_n - x_n\|) < +\infty$ ve (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = +\infty$ ise Lemma 5.9 dan

$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_n x_n\| = 0$ bulunur.

(iv) (5.10) ve (i) ifadelerinden

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) g(\|T_n x_n - x_n\|) \leq 0$$

yazabiliriz. $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$ koşulu altında $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\|T_n x_n - x_n\|) = 0$

gerçeklenir, buradan da $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_n x_n\| = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.13 C düzgün konveks E Banach uzayının kapalı, konveks bir altkütmesi olsun. Kabul edelim ki; $T: C \rightarrow C$ asimptotik genişlemeyen dönüşüm ve $k_n = 1 + \theta_n$ olsun. Her $x_0 \in C$ ve her $n \geq 0$ için

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n$$

olarak tanımlansın. $b_n = u_n \sum_{j=0}^n v_j \theta_j$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, $\alpha_n \in (0,1)$ de reel dizi olsun.

O halde

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ise $n \rightarrow \infty$ giderken $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün sabit noktası olan bir z değerine kuvvetli yakınsaktır.

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty$ ise $n \rightarrow \infty$ giderken $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün sabit noktası olan bir z değerine kuvvetli yakınsaktır.

iii) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$ ise $n \rightarrow \infty$ giderken $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün sabit noktası olan bir z değerine kuvvetli yakınsaktır.

İspat. i) C kümesi kompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli yakınsak olan bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Bu dizinin limit noktasına z diyelim. Yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = z$$

olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

olduğundan Lemma 5.12 nin (ii) ifadesinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n_k+1} - T_{n_k} x_{n_k}\| = 0$$

elde edilir. Buradan ve $x_{n_k} \rightarrow z$ olduğundan Sonuç 5.11 den $z = Tz$ bulunur. Yani $z \in F(T)$ dir. O halde Lemma 5.12 nin (i) ifadesinden her bir $z \in F(T)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$$

değeri mevcuttur. Yani $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün bir sabit noktasına kuvvetli yakınsak olduğu elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) = \infty$ olduğundan Lemma 5.12 nin (iii) ifadesinden

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_n x_n\| = 0$$

dır. O halde $\{x_n\}$ dizisinin aşağıdaki koşulu sağlayan yakınsak bir $\{x_{n_k}\}$ altdizisi vardır.

Bu dizinin limit noktasına z diyelim. Yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = z$$

olsun. O halde (5.3) ifadesinden ve $x_{n_k} \rightarrow z$ olduğundan Sonuç 5.11 den $z \in F(T)$

bulunur. Bu yüzden Lemma 5.12 nin (i) ifadesinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$$

değeri mevcuttur. Yani $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün bir sabit noktasına kuvvetli yakınsak olduğu elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

iii) C kümesi kompakt olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli yakınsak olan bir $\{x_{n_k}\}$ altdizisi vardır. Bu dizinin limit noktasına z diyelim.

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$$

olduğundan Lemma 5.12 nin (iv) ifadesinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - T_{n_k} x_{n_k}\| = 0$$

yazabiliriz. Buradan ve $x_{n_k} \rightarrow z$ olduğundan Sonuç 5.11 den $z \in F(T)$ elde edilir.

Lemma 5.12 nin (i) ifadesinden her bir $z \in F(T)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\|$$

değeri mevcuttur. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.13 ün ispatından aşağıdaki sonucu çıkartabiliriz.

Teorem 5.14 C , düzgün konveks E Banach uzayının kapalı, konveks bir altkümesi olsun. Kabul edelim ki; $T : C \rightarrow C$ asimptotik genişlemeyen dönüşüm ve $k_n = 1 + \theta_n$ olsun. Her $x_0 \in C$ ve her $n \geq 0$ için

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n$$

olarak tanımlansın. $b_n = u_n \sum_{j=0}^n v_j \theta_j$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, $\alpha_n \in (0,1)$ de reel dizi olsun

ve aşağıdaki üç koşuldan birini sağlasın.

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty$

iii) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$.

Bu durumda, $n \rightarrow \infty$ giderken $\{x_n\}$ dizisinin T dönüşümünün z sabit noktasına güçlü yakınsaması için gerek ve yeter koşul $\{x_n\}$ nin güçlü yakınsak bir $\{x_{n_k}\}$ altdizisinin mevcut olmasıdır.

5.2 İterasyon Dizisinin Zayıf Yakınsak Olması

İlk olarak aşağıdaki teoremleri ispatlamak için kullanacağımız teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 5.15 Bir H Banach uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) H yansımali uzay

ii) H birim yuvarı zayıf kompakttır [127].

Teorem 5.16 Bir E Banach uzayı düzgün konveks ise yansımali uzaydır [128].

Teorem 5.17 Düzgün konveks ve Opial şartını sağlayan bir E Banach uzayının boştan farklı kapalı, konveks bir C altkümesini alalım. $T : C \rightarrow C$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ve $k_n = 1 + \theta_n$ olsun. $\{x_n\}$ dizisi;

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n, \quad n \geq 0$$

olarak tanımlansın. $b_n = u_n \sum_{j=0}^n v_j \theta_j$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, $\alpha_n \in (0,1)$ de reel bir dizi ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0 \quad (5.11)$$

ise $n \rightarrow \infty$ iken $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat. Düzgün konveks E Banach uzayı Teorem 5.16 dan yansılmalı uzaydır. E yansılmalı uzay olduğundan Teorem 5.15 den E birim yuvarı zayıf kompakttır. E zayıf kompakt olduğundan, E deki $\{x_n\}$ dizisinin zayıf yakınsak bir $\{x_{n_k}\}$ altdizisi vardır. Bu limit noktasına y diyelim. Yani;

$$x_{n_k} \xrightarrow{z} y$$

gerçeklensin. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ olduğundan Lemma 5.12 nin (ii) ifadesinden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k+1} - T_{n_k} x_{n_k}\| = 0 \quad (5.12)$$

bulunur. (5.11) ve (5.12) sağladığına göre Sonuç 5.11 den $y \in F(T)$ bulunur. $\{x_n\}$ dizisinin y elemanına zayıf yakınsak olduğunu ispatlamak istiyoruz. Aksini kabul edelim. Yani $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{n_k}\}$ dan başka bir $\{x_{m_j}\}$ altdizisini ele alalım ve $t \neq y$ olmak üzere $\{x_{n_j}\} \xrightarrow{z} t$ olsun. O halde Sonuç 5.11 den t elemanının sabit nokta olduğu görülebilir. $t \in F(T)$ olduğundan Lemma 5.12 nin (i) ifadesinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - t\|, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

mevcuttur. Yakınsak bir dizinin her altdizisi de aynı değere yakınsak olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - y\|$$

gerçeklenir. E Opial şartını sağladığından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - y\| < \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - t\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{m_j} - t\| < \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{m_j} - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y\|$$

gerçeklenir. O halde $t = y$ olmak zorundadır. Bu ise varsayım ile çelişir. Öyleyse $\{x_n\}$ dizisi y elemanına zayıf yakınsaktır.

Teorem 5.18 Düzgün konveks ve Opial şartını sağlayan bir E Banach uzayının boştan farklı kapalı, konveks bir C altkümesini alalım. $T : C \rightarrow C$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ve $k_n = 1 + \theta_n$ olsun. $\{x_n\}$ dizisi;

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n, \quad n \geq 0$$

olarak tanımlansın. $b_n = u_n \sum_{j=0}^n v_j \theta_j$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, $\alpha_n \in (0,1)$ de reel dizi ve

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$$

ise $n \rightarrow \infty$ iken $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat. Düzgün konveks E Banach uzayı Teorem 5.16 dan yansılmalı uzaydır. E yansılmalı uzay olduğundan Teorem 5.15 den E birim yuvarı zayıf kompakttır. E zayıf kompakt olduğundan, E deki $\{x_n\}$ dizisinin zayıf yakınsak bir $\{x_{n_k}\}$ altdizisi vardır. Bu limit noktasına y diyelim. Yani;

$$x_{n_k} \xrightarrow{z} y$$

gerçeklensin.

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$$

olduğundan Lemma 5.12 nin (iv) ifadesinden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - T_{n_k} x_{n_k}\| = 0 \quad (5.13)$$

elde edilir. $x_{n_k} \xrightarrow{z} y$ ve (5.13) sağlandığından Sonuç 5.11 den $y \in F(T)$ elde edilir. İspatın geri kalanı Teorem 5.17 deki gibi devam ettirilerek sonuçlandırılır.

Sonuç 5.19 Düzgün konveks ve Opial şartını sağlayan bir E Banach uzayının boştan farklı kapalı, konveks bir C altkümesini alalım. $T : C \rightarrow C$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ve $k_n = 1 + \theta_n$ olsun. $\{x_n\}$ dizisi;

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) u_n \sum_{j=0}^n v_j T^j x_n, \quad n \geq 0$$

olarak tanımlansın. $b_n = u_n \sum_{j=0}^n v_j \theta_j$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, $\alpha_n \in (0,1)$ de reel bir dizi olsun ve aşağıdaki iki koşuldan birini sağlasın:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

ii) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$.

Bu durumda, $n \rightarrow \infty$ iken $\{x_n\}$ dizisi T dönüşümünün bir z sabit noktasına zayıf yakınsar.

Sonuç 5.20 Yukarıda verilen kuvvetli ve zayıf yakınsaklığa ait her bir teorem, ağırlıklı ortalamanın özel hali olan Cesàro, Nörlund ve Riezs ortalamaları için de geçerlidir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Mann iterasyon yönteminde toplanabilme metodları kullanıldı.

4. Bölüm’ de regüler tipten ağırlıklı ortalama matrisi yardımıyla elde edilen Mann iterasyon dizisinin T sürekli dönüşümünün sabit noktasına yakınsadığı gösterildi.

5. Bölüm’ de T asimptotik genişlemeyen dönüşüm sınıfları için ağırlıklı ortalama matrisinin değiştirilmiş Mann iterasyonu tanımlanarak bu iterasyon dizisinin belirli şartlar altında asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına kuvvetli ve zayıf yakınsak olduğu gösterildi.

Ağırlıklı ortalama matrisinin genel özellikleri kullanılarak özel durumlarda Cesàro, Nörlund ve Riezs matrislerinin, değiştirilmiş Mann iterasyonunda kullanıldığında iterasyonun limit noktasının dönüşümün sabit noktasına eşit olduğu sonuç olarak verildi.

Belirli regüler matrislerle elde edilecek çarpım matrisleri kullanılarak değiştirilmiş Mann iterasyonu elde edilebilir ve belirli dönüşümler altında sabit noktalar araştırılabilir.

KAYNAKLAR

-
- [1] Borwein, J. ve Sims, B., (2011). "The Douglas–Rachford Algorithm In the Absence of Convexity", H.H. Bauschke Burachik, R.S. Combettes, P.L. Elser, V. Luke, D.R. ve Wolkowicz, H., ed. "Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering", Springer New York, 93-109.
 - [2] Border, K.C., (1989). Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory, Cambridge University Press, Cambridge UK.
 - [3] Somarakis, C. ve Baras, J.S., (2013). "Fixed Point Theory Approach to Exponential Convergence In LTV Continuous Time Consensus Dynamics with Delays", SIAM CT.
 - [4] Ceng, L.-C., Ansari, Q. ve Yao, J.-C., (2011). "Some Iterative Methods for Finding Fixed Points and For Solving Constrained Convex Minimization Problems", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 74: 5286-5302.
 - [5] Shehu, Y., (2011). "Iterative Methods for Family of Strictly Pseudocontractive Mappings and System of Generalized Mixed Equilibrium Problems and Variational Inequality Problems", Fixed Point Theory and Applications, 2011: 852789.
 - [6] Giocoli, N., (2003). "Fixing The Point: The Contribution of Early Game Theory to The Tool-box of Modern Economics", Journal of Economic Methodology, 10: 1-39.
 - [7] Echenique, F. ve Oviedo, J., (2004). "Core Many-To-One Matchings By Fixed-Point Methods", Journal of Economic Theory, 115: 358-376.
 - [8] Fleiner, T., (2003). "A Fixed-Point Approach to Stable Matchings and Some Applications", Mathematics of Operations Research, 28: 103-126.
 - [9] Broy, M., (1982). "Fixed Point Theory for Communication and Concurrency", Formal Description of Programming Concepts, II: 125-148.
 - [10] Hui, L., Jun, Z. ve Cheng, L., (2010). "Application Examples of The Network Fixed Point Theory for Space-Air-Ground Integrated Communication Network", International Congress On Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), 18-20 Oct. 2010, Moscow.

- [11] Chen, M., Lu, W., Chen, Q., Ruchala, K.J. ve Olivera, G.H., (2008). "A Simple Fixed-Point Approach to Invert A Deformation Field", *Medical Physics*, 35: 81.
- [12] Radde, N., (2010). "Fixed Point Characterization of Biological Networks with Complex Graph Topology", *Bioinformatics*, 26: 2874-2880.
- [13] Wang, G.-Q. ve Cheng, S.S., (2009). "Fixed Point Theorems Arising From Seeking Steady States of Neural Networks", *Applied Mathematical Modelling*, 33: 499-506.
- [14] Brouwer, L.E.J., (1912). "Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten", *Math. Ann.*, 71: 97-115.
- [15] Schauder, J., (1930). "Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen", *Studia Mathematica*, 2:171-180.
- [16] Banach, S., (1922). "Sur Les Opérations Dans Les Ensembles Abstraits et Leur Application Aux équations Intégrales", *Fund. Math*, 3: 133-181.
- [17] Browder, F.E., (1965). "Fixed-Point Theorems for Noncompact Mappings in Hilbert Space", *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 53: 1272-1276.
- [18] Browder, F.E., (1965). "Nonexpansive Nonlinear Operators In A Banach Space", *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 54: 1041-1044.
- [19] Browder, F.E., (1967). "Nonlinear Operators and Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces", *Proc. Symposia Pure Math.*, Vol XVIII-Part 2.
- [20] Browder, F.E., (1967). "Convergence of Approximants to Fixed Points of Nonexpansive Non-Linear Mappings In Banach Spaces", *Arch. Rational Mech. Anal.*, 24: 82-90.
- [21] Kirk, W., *Contraction Mappings and Extensions in Handbook of Metric Fixed Point Theory* (W.A. Kirk and B. Sims Eds.), 2001, eds.: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. MR1904272 (2003 f: 54096).
- [22] Kirk, W.A., (2003). "Fixed Points of Asymptotic Contractions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 277: 645-650.
- [23] Kannan, R., (1968). "Some Results On Fixed Points", *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, 60: 71-76.
- [24] Zamfirescu, T., (1972). "Fix Point Theorems In Metric Spaces", *Archiv der Mathematik*, 23: 292-298.
- [25] Reich, S., (1971). "Kannan's Fixed Point Theorem", *Boll. Un. Mat. Ital*, 4: 1-11.
- [26] Ćirić, L.B., (1974). "A Generalization of Banach's Contraction Principle", *Proceedings of The American Mathematical Society*, 45: 267-273.
- [27] Ćirić, L., (2009). "Some New Results for Banach Contractions and Edelstein Contractive Mappings On Fuzzy Metric Spaces", *Chaos, Solitons & Fractals*, 42: 146-154.
- [28] Rhoades, B.E., (1977). "A Comparison of Various Definitions of Contractive Mappings", *Transactions of the American Mathematical Society*, 226: 257-290.

- [29] Rhoades, B., (1983). "Contractive Definitions Revisited", Contemporary Math, 21: 189-205.
- [30] Liouville, J., (1837). "Second Mémoire: Sur le Développement Des Fonctions ou Parties de Fonctions en Séries Dont Les Divers Termes Sont Assujettis à Satisfaire à une Même équation Différentielles du Second Membre Contenant un Paramètre Variable", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2: 16-35.
- [31] Picard, E., (1890). "Mémoire Sur la Théorie Des équations Aux Dérivées Partielles et la Méthode Des Approximations Successives", Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 6:145-210.
- [32] Krasnoselskij, M.A., (1955). "Two Remarks On the Method of Successive Approximations", Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 10: 123-127.
- [33] Schaefer, H., (1957). "Über die Methode Sukzessiver Approximationen", Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 59: 131-140.
- [34] Mann, W.R., (1953). "Mean Value Methods In Iteration", Proceedings of The American Mathematical Society, 4: 506-510.
- [35] Başar, F., (2011). Summability Theory and Its Applications, Bentham Science Publishers, İstanbul.
- [36] Cook, R.C., (1952). Infinite Matrices and Sequence Spaces, Macmillan Publishing Co., 64.
- [37] Song, Y., (2010). "Mann Iteration of Cesàro Means for Asymptotically Non-Expansive Mappings", Nonlinear Analysis, 72: 176-182.
- [38] Kreyszig, E., (1989). Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, USA.
- [39] Maddox, I.J., (1970). Elements of Functional Analysis, Cambridge University, Cambridge.
- [40] Berinde, V., (2006). Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Berlin.
- [41] Şuhubi, E., (2001). Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı, İstanbul.
- [42] Brown, A.L. ve Page, A., (1970). Elements of Functional Analysis, Van Nostrand-Reinhold, London.
- [43] Somasundaram, D., (2008). A First Course In Functional Analysis, Alpha Science International, India.
- [44] MacCluer, B. D., (2009). Elementary Functional Analysis, Springer, New York.
- [45] Agarwal, R.P., O'Regan D. ve Sahu D.R., (2009). Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Application, Springer, New York.
- [46] Boos, J., (2000). Classical and Modern Method in Summability, Oxford, USA.
- [47] Pugachev, V. S. ve Sinitsyn, I. N., (1999). Lectures On Functional Analysis and Applications, World Scientific, Singapore.

- [48] Chidume, C., (2009). Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations, Springer, London.
- [49] Opial, Z., (1967). "Weak Convergence of The Sequence of Successive Approximations for Nonexpansive Mappings", Bull. Amer. Math. Soc., 591- 597.
- [50] Petersen, G. M., (1966). Regüler Matrix Transformation, McGRAW-HILL, London.
- [51] Hardy, G. H., (1949). Divergent Series, Oxford University Press, London.
- [52] Smart, D.R.,(1974). Fixed Point Theorems, Cambridge University Press, London.
- [53] Khamsi, M. A. and Kirk, W. A., (2001). "An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory", A Wiley – Interscience Publication, Canada.
- [54] Rhoades, B.E. ve Şoltuz, S.M., (2006). "The Equivalence Between The T - Stabilities Mann And Ishikawa Iterations", J. Math. Anal. Appl., 318: 472-475.
- [55] Taskovic, M., (1986). "Osnove Teorije Fiksne Tacke" (Fundamental Elements of Fixed Point Theory), Matematicka Biblioteka 50, Beograd.
- [56] Chatterjea, S., (1972). "Fixed Point Theorems", CR Acad. Bulgare Sci., 25:727-730.
- [57] Zamfirescu, T., (1972). "Fix Point Theorems In Metrik Spaces", Archiv Der Mathematik, 23: 292-298.
- [58] Ćirić, L.B., (1974). "A Generalization of Banach's Contraction Principle", Proceedings of The American Mathematical Society, 45: 267-273.
- [59] Berinde, V., (2004). " Approximating Fixed Points of Weak Contractions Using The Picard Iteration", Nonlinear Analysis Forum, 9: 43-53.
- [60] Olatinwo, M., Owojori, O. ve Imoru, C., (2006). "Some Stability Results for Fixed Point Iteration Processes", Aus. J. Math. Anal. Appl., 3: 1-7.
- [61] Kirk, W., (1971). "On Successive Approximations For Nonexpansive Mappings in Banach Spaces", Glasgow Math. J, 12:6-9.
- [62] Ishikawa, S., (1974). "Fixed Points By A New Iteration Method", Proceedings of The American Mathematical Society, 44: 147-150.
- [63] Noor, M.A., (2000). "New Approximation Schemes For General Variational ilnequalities", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 251: 217-229.
- [64] Agarwal, R., O Regan, D. ve Sahu, D., (2007). "Iterative Construction of Fixed Points of Nearly Asymptotically Nonexpansive Mappings", Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 8: 61-79
- [65] Thianwan, S., (2009). "Common Fixed Points of New Iterations For Two Asymptotically Nonexpansive Nonself-Mappings In a Banach Space", Journal of Computational and Applied Mathematics, 224: 688-695.
- [66] Phuengrattana, W., and Suantai, S., (2011). "On The Rate of Convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-iterations For Continuous Functions On An

- Arbitrary Interval", Journal of Computational and Applied Mathematics, 235: 3006-3014.
- [67] Rhoades, B. ve Soltuz, S.M., (2004). "The Equivalence Between Mann-Ishikawa Iterations and Multistep Iteration", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 58: 219-228.
 - [68] Karakaya, V., Doğan, K., Gürsoy, F. ve Ertürk, M., (2013). "Fixed Point of A New Three-Step Iteration Algorithm Under Contractive-Like Operators Over Normed Spaces", Abstract and Applied Analysis, 2013: 1-10. (S.C.I)
 - [69] Edelstein, M., (1966). "A Remark On A Theorem of M. A. Krasnoselski", Amer. Math. Monthly, 73: 509-510.
 - [70] Petryshyn, W.V., (1966). "Construction of Fixed Points of Demicompact Mappings In Hilbert Space", J. Math. Anal. Appl., 14: 276-284.
 - [71] Browder, F.E., Petryshyn, W.V., (1966). "The Solution By Iteration of Nonlinear Functional Equations In Banach Spaces", Bull. Amer. Math. Soc., 72: 571-575.
 - [72] Browder, F.E., Petryshyn, W.V., (1967). "Construction of Fixed Points of Nonlinear Mappings In Hilbert Spaces", J. Math. Anal. Appl., 20: 197-228.
 - [73] Rhoades, B.E., (1991). "Some Fixed Point Iteration Procedures", Int. J. Math. Sci., 14, No. 1, 1-16.
 - [74] Hicks, T.L., Kubicek, J.r., (1977). "On The Mann Iteration Process In Hilbert Space", J. Math. Anal. Appl., 59: 498-504.
 - [75] Hussain, N., Latif A., Kumar, V. ve Rafiq, A., (2013). "S-Iteration Process for Quasi-Contractive Mappings", Journal of Inequalities and Applications, 2013: 206.
 - [76] Yildirim, İ., Özdemir, M. ve Kiziltunç, H., (2009). "On The Convergence of A New Two-Step Iteration in the Class of Quasi-Contractive Operators", Int. Journal of Math. Analysis, Vol.3, 38: 1881-1892.
 - [77] L. B. Ćirić, B.S. Lee, and A. Rafiq, (2010). "Faster Noor iterations", Indian Journal of Mathematics, Vol. 52, 3: 429-436.
 - [78] Chugh, R., Kumar, V. and Kumar, S., (2012). "Strong Convergence of A New Three Step Iterative Scheme In Banach Spaces", American Journal of Computational Mathematics, 2: 345-357.
 - [79] Olatinwo, M., (2009). "Some Stability Results for Two Hybrid Fixed Point Iterative Algorithms in Normed Linear Space", Matematik Vesnik, 61: 247-256.
 - [80] Chugh, R. ve Kumar, V., (2012). "Stability of Hybrid Fixed Point Iterative Algorithms of Kirk-Noor Type in Normed Linear Space for Self and Nonself Operators", International Journal of Contemporary Mathematical sciences, 7: 1165-1184.

- [81] Hussain, N., Chugh, R., Kumar, V. ve Rafiq, A., (2012). "On the Rate of c-Convergence of Kirk-Type Iterative Schemes", Journal of Applied Mathematics, 2012.
- [82] Gürsoy, F. and Karakaya, V., (2014). "Some Convergence and Stability Results for Two New Kirk Type Hybrid Fixed Point Iterative Algorithms", Journal of Function Spaces doi: 10.1155/2014/684191.
- [83] Rhoades, B. ve Soltuz, S.M., (2003). "On the Equivalence of Mann and Ishikawa Iterations Methods" , International Journal of Mathematics and Mathematical sciences, 2003: 451-459.
- [84] Gürsoy, F., Karakaya, V. ve Rhoades, B. E., (2014). "Some Convergence and Stability Results for the Kirk Multistep and Kirk-Sp Fixed Point Iterative Algorithms", Abstract and Applied Analysis, 806537,12.
- [85] Gürsoy, F., Karakaya, V. ve Rhoades, B.E., (2013). "Data Dependence Results of New Multi-Step and S-Iterative Schemes for Contractive-Like Operators", Fixed Point Theory and Applications, 2013: 76.
- [86] Akewe, H., (2012). "Strong Convergence and Stability of Jungck-Multistep-SP Iteration for Generalized Contractive-Like Inequality Operators", Advances in Natural Science, 5: 21-27.
- [87] Jungck, G., (1976). "Commuting Mappings and Fixed Points", The American Mathematical Monthly, vol.83, no.4, 261-263.
- [88] Singh, S.L., Bhatnagar C. and Mishra S.N., (2005). "Stability of Jungck- Type Iterative Procedures", International J. Math. & Math. Sc. 19: 3035- 3043.
- [89] Olatinwo, M.O. ve Imoru, O., (2008). " Some Convergence Results for The Jungck- Mann and The Jungck- Ishikawa Iteration Processes In The Class of Generalized Zamfirescu Operators", Acta Math. Univ. Comenianae LXXVII (2): 299- 304.
- [90] Kannan, R., (1971). "Some Results on Fixed Points *III* ", Fund. Math. 70(2): 169-177.
- [91] Rhoades B. E., (1974). "Fixed Point Iteration Using Infinite Matrices", Trans. Amer. Math. Soc. 196: 161- 176.
- [92] Rhoades B. E., (1976). "Comments On Two Fixed Point Iteration Methods", J. Math. Anal. Appl. 56(2): 741- 750.
- [93] Berinde, V., (2002). Iterative Approximation of Fixed Points, Editura Efemeride.
- [94] Berinde, V., (2004). "On The Convergence of The Ishikawa Iteration In The Class of Quasi-contractive Operators", Acta Math. Univ. Comenianae LXXIII(1): 119-126.
- [95] Olatinwo, M. O., (2008). " A Generalization of Some Convergence Results Using A Jungck- Noor Three- Step Iteration Process In Arbitrary Banach Space", Polytechnica Posnaniensis, 40: 37- 43.

- [96] Olaleru, J.O. ve Akewe, H., (2010). "On Multistep Iterative Scheme for Approximating the Common Fixed Points of Contractive-Like Operators", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 2010, Article ID 530964, 11 pages.
- [97] Chugh, R. ve Kumar, V., (2011). "Strong Convergence and Stability Results for Jungck-SP Iterative Scheme", International Journal of Computer Applications, 36(12): 40-46.
- [98] Hussain, N., Kumar, V. ve Kutbi, M. A., (2013). "On Rate of Convergence of Jungck- Type Iterative Schemes", Abstract and Applied Analysis, Article ID132626, 15 pages.
- [99] Xu, B. ve Noor, M. A., (2002). "Fixed Point Iterations for Asymptotically Nonexpansive Mappings in Banach Spaces", J. Math. Anal. Appl., 267: 444-453.
- [100] Halpern, B., (1967). "Fixed Points of Nonexpanding Maps", Bull. Amer. Math. Soc., 73: 957-961.
- [101] Reich, S., (1983). "Some Problems and Results Fixed Point Theory", Contemp. Math. 21: 179-187.
- [102] Lions, P.L., (1977). "Approximation de Points Fixes de Contractions", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique 284, 21: A1357-A1359.
- [103] Wittmann, R., (1992). "Approximation of Fixed Points of Nonexpansive Mappings", Arch. Math. (Basel), 58: 486-491.
- [104] Reich, S., (1994). "Approximating Fixed Points of Nonexpansive Mappings", PanAmer. Math. J., 4: 23-28.
- [105] Khan, S. H., (2013). "A Picard- Mann Hybrid Iterative Process", Fixed Point Theory and Appl. ,doi: 10.1186/1687-1812-2013-69.
- [106] Karakaya, V. ve Gürsoy, F., (2014). "A Picard- S Hybrid Type Iteration Method for Solving A Differential Equation with Retarded Argument", arXiv preprint arXiv: 1403.2546.
- [107] Karakaya, V. ve Doğan, K., (2014). "On The Convergence and Stability Results for A New General Iterative Process", Scientific World Journal, 2014:8.
- [108] Karahan, İ. ve Özdemir, M., (2013). "A General Iterative Method for Approximation of Fixed Points and Their Applications", Advances in Fixed Point Theory, 3: 510-526.
- [109] Schu, J., (1991). "Iterative Construction of Fixed Points of for Asymptotically Nonexpansive Mappings", J. Math. Anal. Appl., 158: 407-413.
- [110] Schu, J., (1991). "Weak and Strong Convergence to Fixed Points of for Asymptotically Nonexpansive Mappings", Bull. Austral. Math. Soc., 43: 153-159.

- [111] Suantai, S., (2005). "Weak and Strong Convergence Criteria of Noor Iterations for Asymptotically Nonexpansive Mappings", *Journal of Math. Anal. and Appl.*, 311: 506-517.
- [112] Nilsrakoo, W. ve Saejung, S., (2006). "A New Three-Step Fixed Points Iteration Scheme for Asymptotically Nonexpansive Mapping", *Appl. Math. and a Computation*, 181: 1026-1034.
- [113] Akewe, H., (2014). "Modified Multistep Iteration for Approximating A General Class of Functions in Locally Convex Spaces", *Acta Math. Univ. Comenianae*, Vol. LXXXIII, 1: 39- 45.
- [114] Bosede, A. O. ve Rhoades, B. E., (2010). "Stability of Picard and Mann Iteration for A General Class of Functions", *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 3(2) :1- 3.
- [115] Barone, H. G., (1939). "Limit Points of Sequences and Their Transforms By Methods of Summability", *Duke Math. J.*,5: 740- 752.
- [116] Goebel, K. ve Kirk, W.A., (1972). "A Fixed Point Theorem for Asymptotically Nonexpansive Mappings", *Proc. Amer. Math. Soc.* 35: 171- 174.
- [117] Kirk, W.A., Yanez, C.M. ve Shin, S.S., (1998). "Asymptotically Nonexpansive Mappings", *Nonlinear Anal.*, 33:1-12.
- [118] Rhoades, B.E., (1994). "Fixed Point Iteration for Certain Nonlinear Mappings", *J. Math. Anal. Appl.*, 183: 118-120.
- [119] Baillon, J.B., (1975). "Un Théorème de Type Ergodique Pour Les Contractions Non Linéaires Dans Un Espaces de Hilbert", *C.R. Acad. Sci. Paris Ser., A-B* 280: 1511-1541.
- [120] Bruck, R.E., (1979). "A Simple Proof of The Mean Ergodic Theorem for Nonlinear Contractions In Banach Spaces", *Israel J. Math.* 32: 107-116.
- [121] Bruck, R.E., (1981). "On The Convex Approximation Property and The Asymptotic Behavior of Nonlinear Contractions In Banach Spaces", *Israel J. Math.* 38: 304-314.
- [122] Hirano, N. ve Takahashi, W., (1979). "Nonlinear Ergodic Theorems for Nonexpansive Mappings In Hilbert Spaces", *Kodai Math. J.*, 2: 11-25.
- [123] Shioji, N. ve Takahashi, W., (1999). " Strong Convergence of Averaged Approximants for Asymptotically Nonexpansive Mappings in Banach Spaces", *J. Approx. Theory*, 97: 53- 64.
- [124] Xu, H.K., (1991). "Inequality in Banach Spaces with Applications", *Nonlinear Anal.*, 16: 1127-1138.
- [125] Osilike, M.O. ve Aniagbosor, S.C., (2000). "Weak and Strong Convergence Theorems for Fixed Points of Asymptotically Nonexpansive Mappings", *Math. Comput. Modelling*, 32: 1181- 1191.
- [126] Takahashi, W., (2000). "Nonlinear Functional Analysis- Fixed Point Theory and Its Applications", *Yokohama Publishers Inc, Yokohama*.

- [127] Conway, J.B., (1990). A Course in Functional Analysis, Springer, New York.
- [128] Plubtieng, S. ve Ungchittrakool, K., (2010). "Approximation of Common Fixed Points for A Countable Family of Relatively Nonexpansive Mappings in A Banach Space and Applications", Nonlinear Analysis, 72: 2896- 2908.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Derya SEKMAN
Doğum Tarihi ve Yeri : 04.02.1987- EMİNÖNÜ
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : deryasekman@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik Mühendisliği	Yıldız Teknik Üniversitesi	
Lisans	Matematik	Kocaeli Üniversitesi	2010
Lise	Fen Bilimleri	Kandilli Kız Lisesi	2004

YAYINLARI

Bildiri

1. Sekman, D. ve Karakaya, V., (2014). "On Mann Iteration Process Derived by Weighted Mean and Its Fixed Point", KMD 2014, Karatekin Mathematics Days, 11-13 June 2014, Çankırı-Turkey.