

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ LOKAL MORREY UZAYLARINDA KABA
ÇEKİRDEKLİ POTANSİYEL TİPLİ BAZI ALTLİNEER
OPERATÖRLERİN VE KOMÜTATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI**

Ferit GÜRBÜZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2015

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

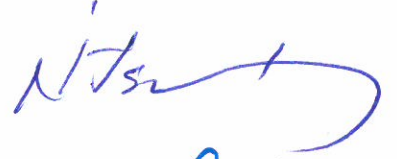
Ferit GÜRBÜZ tarafından hazırlanan “Genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında kaba çekirdekli potansiyel tipli bazı altlineer operatörlerin ve komütatörlerinin sınırlılığı” adlı tez çalışması 07/10/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ



Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof.Dr. Nurhayat İSPİR
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Ertan İBİKLİ
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Cihan ORHAN
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

07/10/2015



Ferit GÜRBÜZ

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ LOKAL MORREY UZAYLARINDA KABA ÇEKİRDEKLİ POTANSİYEL TIPLI BAZI ALTLİNEER OPERATÖRLERİN VE KOMÜTATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Ferit GÜRBÜZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, çalışmamızla ilgili temel kavramlar ve torelmlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümün birinci kesiminde, Calderón-Zygmund operatörleri tarafından üretilen bir kaba çekirdekli altlineer operatörün genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında sınırlılığı ispatlanmıştır. Üçüncü bölümün ikinci kesiminde, kesirli integral operatörleri tarafından üretilen kaba çekirdekli potansiyel tipli bir altlineer operatörün genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında sınırlılığı ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümün birinci kesiminde, lokal Campanato uzayından bir fonksiyon ve kaba çekirdekli lineer operatörü tarafından üretilen komütatörlerin genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında sınırlılığı ispatlanmıştır. Dördüncü bölümün ikinci kesiminde, lokal Campanato uzayından bir fonksiyon ve kaba çekirdekli potansiyel tipli bir lineer operatörü tarafından üretilen komütatörlerin genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında sınırlılığı ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde, elde edilen sonuçların uygulaması olarak, Marcinkiewicz operatörünün ve bazı analitik yarı grupların kesirli kuvvetlerinin sınırlılığı verilmiştir.

Son bölümde ise elde edilen sonuçların analizi yapılmıştır.

Ekim 2015, 66 sayfa

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş lokal Morrey uzayı, lokal Campanato uzayı, kaba çekirdekli altlineer operatör, komütatör.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

BOUNDEDNESS OF SOME POTENTIAL TYPE SUBLINEAR OPERATORS AND
THEIR COMMUTATORS WITH ROUGH KERNELS ON GENERALIZED LOCAL
MORREY SPACES

Ferit GÜRBÜZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts and theorems related to this study are given.

In the first section of the third chapter, the boundedness of a sublinear operator with rough kernel generated by Calderón-Zygmund operators on generalized local Morrey spaces is proved. In the second section of the third chapter, the boundedness of a potential type sublinear operator with rough kernel generated by fractional integral operators on generalized local Morrey spaces is proved.

In the first section of the fourth chapter, the boundedness of the commutators generated by a function in local Campanato spaces and linear operators with rough kernels on generalized local Morrey spaces is proved. In the second section of the fourth chapter, the boundedness of the commutators generated by a function in local Campanato spaces and some potential type linear operators with rough kernels on generalized local Morrey spaces is proved.

In the fifth chapter, as application of results obtained , boundedness of Marcinkiewicz operator and fractional powers of the some analytic semigroups are given.

Finally, the last chapter is devoted to the analysis of the results obtained.

October 2015, 66 pages

Key Words: Generalized local Morrey space, local Campanato space, sublinear operator with rough kernel, commutator.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında beni bilgi, fikir ve önerileriyle yönlendirip bana her konuda yardımlarını esirgemeyerek destek olan hocam, Sayın Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ'ye (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), engin görüşleri ve kıymetli yardımlarından dolayı Sayın Prof. Dr. Vagif GULİYEV'e (Institute of Mathematics and Mechanics, Bakü, Azerbaycan; Ahi Evran Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı, Kırşehir) çok teşekkür ederim.

Ayrıca, yetişmemde emeği olan Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine şükranlarımı sunarım.

Büyük bir özveriyle beni yetiştiren, maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman benden esirgemeyen sevgili annem ile babama, beni bu çalışmalara teşvik eden değerli kardeşim Meliha Ece GÜRBÜZ'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ferit GÜRBÜZ
Ankara, Ekim 2015

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1 Morrey Uzayı	14
2.2 Genelleştirilmiş Morrey Uzayı	17
2.3 BMO uzayı ve komütatör operatörü	19
2.4 CBMO Lokal Campanato Uzayı.....	22
3. $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ LOKAL MORREY UZAYLARINDA T_Ω ve $T_{\Omega,\alpha}$ OPERATÖRLERİNİN GULİYEV TİPİ SINIRLILIK- LARI	23
3.1 $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ Genelleştirilmiş Lokal Morrey Uzaylarında Kaba Çekird- ekli T_Ω Altlineer Operatörünün Guliyev Tipi Sınırlılığı	25
3.2 $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ Genelleştirilmiş Lokal Morrey Uzaylarında Kaba Çekird- ekli Potansiyel Tipli $T_{\Omega,\alpha}$ Altlineer Operatörünün Spanne-Guliyev Tipi Sınırlılığı	31
4. $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ LOKAL MORREY UZAYLARINDA $T_{\Omega,b}$ ve $T_{\Omega,b,\alpha}$ KOMÜTATÖR OPERATÖRLERİNİN GULİYEV TİPİ SINIRLILIKLARI	38
4.1 $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ Genelleştirilmiş Lokal Morrey Uzaylarında Kaba Çekird- ekli $T_{\Omega,b}$ Komütatör Operatörünün Guliyev Tipi Sınırlılığı.....	39
4.2 $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ Genelleştirilmiş Lokal Morrey Uzaylarında Kaba Çekird- ekli $T_{\Omega,b,\alpha}$ Komütatör Operatörünün Spanne-Guliyev Tipi Sını- rlılığı	46
5. BAZI UYGULAMALAR	54
5.1 Marcinkiewicz İntegral Operatörü.....	54
5.2 Bazı Analitik Yarı Grupların Kesirli Kuvvetleri.....	57
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	60
KAYNAKLAR.....	62
ÖZGEÇMİŞ	66

SİMGELER DİZİNİ

S^{n-1}	$\mathbb{R}^n$ de birim küre
$B(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$ B(x, r) $	$B(x, r)$ yuvarının Lebesgue ölçüsü
$supp f$	f fonksiyonun desteği
ω_n	Birim yuvarın hacmi
$L_p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayı
$M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş lokal Morrey uzayı
$L^{loc}(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$C^\infty(\mathbb{R}^n)$	Kendisi ve bütün türevleri sürekli olan fonksiyonların sınıfı
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de kompakt destekli bütün C^∞ fonksiyonlarının sınıfı
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
I_α	Riesz potansiyeli(Kesirli integral operatörü)
$\overline{T}$	Calderón-Zygmund operatörü
μ_Ω	Marcinkiewicz integral operatörü
H_w	Ağırlıklı Hardy operatörü
$\overline{T}_\Omega$	Kaba çekirdekli Calderón-Zygmund singüler integral operatörü
$I_{\Omega,\alpha}$	Kaba çekirdekli kesirli integral operatörü
$[b, T]$	Komütatör operatörü
$CBMO_{p,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$	Lokal Campanato uzayı

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Harmonik analizde, klasik operatörlerin çeşitli fonksiyon uzaylarındaki eşitsizliklerinin çalışmaları çok önemli bir yer tutmaktadır. $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Klasik Morrey uzayları, ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarını araştırma çalışmalarında Morrey (1938) tarafından ortaya konulmuştur. Morrey uzayları Lebesgue uzaylarının bir uzantısı olarak değerlendirileceğinden klasik operatörlerin sınırlılıklarının Morrey uzaylarında araştırılması oldukça doğal ve önemlidir. Morrey uzaylarında kesirli integral operatörünün (Riesz Potansiyeli) sınırlılığı Adams (1975) tarafından çalışılmıştır. Chiarenza ve Frasca (1987) Hardy-Littlewood maksimal operatörü, kesirli integral operatörü ve singüler integral operatörlerinin Morrey uzaylarında sınırlılığını göstermiştir. Bu sonuçlar daha sonra çeşitli uzaylara genişletilmiştir. $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Mizuhara (1991), Nakai (1994) ve Guliyev (1994) gibi araştırmacılar Riesz potansiyeli, maksimal ve singüler integral operatörlerinin sınırlılığını elde etmişlerdir.

Nakai (1994), genelleştirilmiş Morrey uzayında klasik operatörlerinin sınırlılığını araştırmış ve φ fonksiyonu üzerine $r \leq t \leq 2r$ olmak üzere

$$C^{-1}\varphi(x, r) \leq \varphi(x, t) \leq C\varphi(x, r) \quad (1.1)$$

(noktasal *doubling*) şartını koymuştur.

Guliyev (1994, 1999, 2009), Nakai'nin φ fonksiyonu üzerine koyduğu (1.1) şartını kaldırmış ve eğer

$$\int_r^\infty \varphi_1(x, t) \frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x, r) \quad (1.2)$$

koşulu altında Maksimal operatör ve Calderón-Zygmund operatörlerinin $M_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayından bir diğer $M_{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayına sınırlı olduklarını ve eğer $1 < p < q < \infty$ ve $\alpha = n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ olmak üzere

$$\int_r^\infty t^\alpha \varphi_1(x, t) \frac{dt}{t} \leq C \varphi_2(x, r) \quad (1.3)$$

koşulu sağlanıyorsa Riesz potansiyelinin $M_{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayından bir diğer $M_{q, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayına sınırlı olduğunu göstermiştir.

Son yıllarda Guliyev ile birlikte Burenkov, Samko, Gogotashvili, Mustafayev ve Hasanov gibi araştırmacılar, Morrey-tipli uzaylar başta olmak üzere diğer fonksiyon uzaylarında yeni sonuçlar elde etmişlerdir.

Ω , $\mathbb{R}^n$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega \in L_s(S^{n-1})$; $s > 1$ olsun, burada S^{n-1} , $d\sigma$ normalleştirilmiş Lebesgue ölçüsü ile donatılmış $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) nin birim küresini göstermektedir. Kompakt destekli $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için $x \notin \text{supp} f$ olmak üzere kaba çekirdekli T_Ω lineer veya altlineer operatörü

$$|T_\Omega f(x)| \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^n} |f(y)| dy \quad (1.4)$$

koşulunu sağlayan bir operatör olsun, burada c_0 , f ve x den bağımsızdır. Benzer şekilde, her $0 < \alpha < n$ ve kompakt destekli $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için $x \notin \text{supp} f$ olmak üzere kaba çekirdekli potansiyel tipli $T_{\Omega, \alpha}$ lineer veya altlineer operatörü

$$|T_{\Omega, \alpha} f(x)| \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} |f(y)| dy \quad (1.5)$$

koşulunu sağlayan bir operatör olsun, burada c_0 , f ve x den bağımsızdır.

$\Omega \equiv 1$ olduğu zaman (1.4) koşulu ilk olarak Soria ve Weiss (1994) tarafından tanımlanmıştır. (1.4) ve (1.5) koşulları harmonik analizde pek çok operatör için sağlanır, örneğin bunların en önemlileri Marcinkiewicz operatörü, Calderón-Zygmund operatörü, Carleson maksimal operatörü, Hardy-Littlewood maksimal operatörü, C.

Fefferman singüler çarpanları, R. Fefferman singüler integralleri, Ricci-Stein salınımlı singüler integralleri, Bochner-Riesz ortalamasıdır (Soria ve Weiss 1994, Lu vd. 2002).

b , $\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, kaba çekirdekli potansiyel tipli operatör ile b tarafından üretilen komütatör aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} T_{\Omega,b,\alpha}(f)(x) &= [b, T_{\Omega,\alpha}]f(x) \\ &= b(x)T_{\Omega,\alpha}f(x) - T_{\Omega,\alpha}(bf)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [b(x) - b(y)] \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y) dy. \end{aligned}$$

Lineer ve altlineer operatörler ve bunların komütatörlerinin sınırlılığı kısmi türevli denklemler teorisinde süreksiz katsayılı eliptik ve parabolik denklemlerin çözümlerinin ön (apriori) eşitsizliklerinin elde edilmesinde önemli bir yer tutmaktadır. Örneğin Calderón-Zygmund operatörlerinin komütatörleri ikinci mertebeden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin düzgünlüğü çalışmalarında kullanılmaktadır. Coifman vd. (1976) $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ iken $[b, \overline{T}]$ komütatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlılığını göstermişlerdir. Daha sonra Janson (1978) $[b, \overline{T}]$ komütatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlı iken $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olduğunu göstermiştir. Ayrıca Coifman vd. (1976) $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ iken $[b, \overline{T}_\Omega]$ komütatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlılığını göstermişlerdir. $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında altlineer ve komütatör operatörlerinin sınırlılığı Ding vd. (1998) tarafından elde edilmiştir. Genelleştirilmiş Morrey uzayı üzerinde Guliyev vd. (2011), Nakai (1994) tarafından konulan (1.2) ve (1.3) şartları yerine (φ_1, φ_2) fonksiyon çifti üzerinde daha zayıf olan

$$\int_r^\infty \frac{\text{essinf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \leq C \varphi_2(x, r)$$

yeterlik koşulunu koyarak T ve T_α altlineer operatörlerinin ve bunların komütatörlerinin sınırlılığını göstermişlerdir. Karaman (2012) doktora tez çalışmasında, Guliyev

tarafından verilen ispat yöntemini kullanarak, genelleştirilmiş Morrey ve genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında altlineer operatörlerin ve altlineer komütatör operatörünün sınırlılığı hakkında yeni sonuçlar elde etmiştir.

Bu tezin temel amacı genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında kaba çekirdekli konvolüsyon tipli altlineer operatörlerin sınırlılığını incelemek ve kaba çekirdekli konvolüsyon tipli lineer operatörlerin komütatörleri için $CBMO$ tahminlerini verebilmektir. Tezde, Guliyev tarafından verilen ispat yöntemi kullanılarak, genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında kaba çekirdekli altlineer operatörlerinin ve bunların komütatörlerinin sınırlılığı hakkında yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bütün durumlarda T_Ω , $T_{\Omega,\alpha}$, $T_{\Omega,b}$ ve $T_{\Omega,b,\alpha}$ operatörlerinin sınırlılık koşullarında φ_1 ve φ_2 fonksiyonlarının monotonluğu ile ilgili herhangi bir kabul yapılmayıp sadece (φ_1, φ_2) nin Zygmund tipli bir integral eşitsizliğini sağladığı kabul edilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde konu ile ilgili temel kavramlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümler tezin orijinal kısımlarıdır. Üçüncü bölümün birinci kesiminde, kaba çekirdekli Calderón-Zygmund singüler integral operatörü tarafından üretilen ve (1.4) koşulunu sağlayan T_Ω kaba çekirdekli altlineer operatörünün $p > 1$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayından bir diğer $LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayına ve $p = 1$ için $LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ uzayından $WLM_{1,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ zayıf uzayına sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) fonksiyon çifti üzerinde yeterlik şartları araştırılmıştır. Üçüncü bölümün ikinci kesiminde kaba çekirdekli kesirli integral operatörleri tarafından üretilen ve (1.5) koşulunu sağlayan $T_{\Omega,\alpha}$ potansiyel tipli kaba çekirdekli altlineer operatörünün $0 < \alpha < n$, $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayından bir diğer $LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayına ve $1 < q < \infty$, $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ için $LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ uzayından $WLM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ zayıf uzayına sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) fonksiyon çifti üzerinde yeterlik şartları elde edilmiştir. Dördüncü bölümün birinci kesiminde $b \in CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere b ve T_Ω tarafından üretilen $T_{\Omega,b}$ komütatör operatörünün $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ iken $LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayından bir diğer $LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayına sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) çifti üzerindeki yeterlilik şartları belirlenmiştir. Dördüncü bölümün ikinci kesiminde $b \in CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$

olmak üzere $T_{\Omega,b,\alpha}$ komütatör operatörünün $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$ iken $LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayından bir diğer $LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayına sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) çifti üzerinde yeterlilik şartları elde edilmiştir. Beşinci bölümde, elde edilen sonuçların uygulaması olarak Marcinkiewicz operatörünün ve bazı analitik yarı grupların kesirli kuvvetlerinin sınırlılığı verilmiştir. Son bölümde ise elde edilen sonuçların analizi yapılmıştır.

$A \lesssim B$ gösterimini $A \leq CB$, $C > 0$ eşitsizliğinin yerine kullanacağız. $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ ise $A \approx B$ yazılır ve A, B ye eşdeğerdir denir. Bu çalışma boyunca C farklı sabitleri gösterecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 (Esas supremum-Esas infimum) (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun (f fonksiyonunun ölçülebilir olması gerekmez). Eğer her $x \in X$ için $f(x) \leq a$ yani, $\{x : f(x) > a\}$ kümesi boş ise a reel sayısına f nin üst sınırı denir. Tersine, eğer $\{x : f(x) > a\}$ kümesi ölçümü sıfır olan bir küme tarafından kapsanıyorsa $a \in \mathbb{R}$ sayısına f nin bir esas üst sınırı denir. Yani, $\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) > a\}) = 0\}$ esas üst sınırların kümesi boş kümeden farklı ise f fonksiyonunun esas supremumu

$$\operatorname{esssup}_{x \in X} f := \inf \{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) > a\}) = 0\}$$

şeklinde tanımlanır. Diğer durumlarda $\operatorname{esssup} f = +\infty$ dir. Benzer şekilde, $\{b \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) < b\}) = 0\}$ esas alt sınırların kümesi boş kümeden farklı ise

$$\operatorname{essinf}_{x \in X} f := \sup \{b \in \mathbb{R} : \mu(\{x : f(x) < b\}) = 0\}$$

alınır. Diğer durumlarda $\operatorname{essinf} f = -\infty$ olarak tanımlanır. Ayrıca, f , X kümesinde negatif olmayan bir fonksiyon olmak üzere, bu kavramlar arasında

$$\left(\operatorname{essinf}_{x \in X} f(x) \right)^{-1} = \operatorname{esssup}_{x \in X} \frac{1}{f(x)}$$

ilşkisi vardır.

Tanım 2.2 (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p(X) = \left\{ f \in M(X, \Sigma) : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p -inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. $L_p(X)$ uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_{L_p(X)} = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{esssup}_{x \in X} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada

$$\operatorname{esssup}_{x \in X} |f(x)| = \inf \{ \lambda > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) = 0 \}$$

ile verilir.

$1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, X in her bir kompakt alt kümesinde p -inci kuvveti integrallenebilen tüm ölçülebilir fonksiyonların uzayı $L_p^{loc}(X)$ ile gösterilir. Bu uzay $p = 1$ için $L_1^{loc}(X) \equiv L^{loc}(X)$ şeklinde gösterilen lokal integrallenebilir fonksiyonların sınıfını gösterir. $L^{loc}(X)$ uzayı $1 \leq p \leq \infty$ için bütün $L_p(X)$ uzaylarının birleşimlerini içerir.

Tanım 2.3 $WL_p(X)$ zayıf L_p uzayı, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{WL_p(X)} = \sup_{t>0} t \mu(\{y \in X : |f(y)| > t\})^{\frac{1}{p}} < \infty$$

quasi-normuna sahip f ölçülebilir fonksiyonlarının uzayıdır. $1 \leq p < \infty$ için $L_p(X) \subset WL_p(X)$ sağlanır. $WL_\infty(X)$ uzayının tanımı $L_\infty(X)$ ile verilir.

Tanım 2.4 (Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$, (X, μ) ve (Y, ν) ölçülebilir uzaylar olsun. $f, (X, \mu) \times (Y, \nu)$ çarpım uzayı üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\left(\int_Y \left(\int_X |f(x, y)| d\mu(x) \right)^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_X \left(\int_Y |f(x, y)|^p d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x)$$

eşitsizliği sağlanır (Grafakos 2004).

Teorem 2.1 (Pozitif Kuvvetler İçin Genelleştirilmiş Hölder Eşitsizliği)

$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1$ olacak şekilde $p_1, \dots, p_m > 0$ reel sayılar olsun. Ayrıca $i = 1, \dots, m$

için $f_i \in L_{p_i}$ olsun. Bu durumda $\prod_{i=1}^m f_i \in L_1$ ve

$$\int \prod_{i=1}^m |f_i| d\mu \leq \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L_{p_i}}$$

eşitsizliği sağlanır (Cheung 2001).

Tanım 2.5 (Fubini) $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$ olmak üzere (X, μ) ve (Y, ν) ölçü uzayları ve $\mu \otimes \nu$, $X \times Y$ üzerinde tanımlı çarpım ölçüsü olsun. Bu durumda $F(x, y)$, $\mu \otimes \nu$ -integrallenebilir ise

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} F(x, y) d\mu \otimes \nu &= \int_X \left(\int_Y F(x, y) d\nu \right) d\mu \\ &= \int_Y \left(\int_X F(x, y) d\mu \right) d\nu \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada $X = Y = \mathbb{R}$ ise $\mu = \nu$ Lebesgue ölçüsüdür. Bu durumda $\mathbb{R}^2$ de $\mu \otimes \nu = dx_1 dx_2$ dir (Sadosky 1979).

$\mathbb{R}^n$, n -boyutlu Öklid uzayı; $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ iç çarpımı ve buna karşılık gelen $|x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ normu ile $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere tüm $x = (x_1, \dots, x_n)$ noktalarının kümesidir.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1 \dots dx_n$ ile Lebesgue ölçüsünü göstereceğiz. $\mathbb{R}^n$ tam uzayı üzerinde bir f fonksiyonunun (Lebesgue) integrali

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

ile gösterilir. Bir $E \subset \mathbb{R}^n$ ölçülebilir kümesinin Lebesgue ölçüsü $|E| = \int_E dx$ ile gösterilir. $B = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$ kümesi merkezi x , yarıçap uzunluğu r olan açık yuvarı ve $B(x, r)^c$ onun tümleyenini gösterebiliriz. $\omega_n = |B(0, 1)|$ olmak üzere

$$|B(x, r)| = \omega_n r^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} r^n = \frac{1}{n} \omega_{n-1} r^n$$

biçimindedir, burada $\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$, $\mathbb{R}^n$ de yarıçapı 1 olan S^{n-1} birim küresinin yüzey

alanıdır. $\Gamma(n)$, gamma fonksiyonudur ve $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ ile tanımlanır.

Tanım 2.6 (Destek) Bir f fonksiyonunun desteği $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının oluşturduğu kümenin kapamışdır ve $\text{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$ ile gösterilir. Eğer $\text{supp} f$ sınırlı bir küme ise f kompakt desteğe sahiptir denir.

Tanım 2.7 T , reel-değerli ölçülebilir fonksiyonların bir (X, μ) ölçü uzayından kompleks değerli, hemen her yerde sonlu, ölçülebilir fonksiyonların bir (Y, ν) ölçü uzayına tanımlanan bir operatör olsun. Bu durumda her f, g ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$T(f + g) = T(f) + T(g) \text{ ve } T(\lambda f) = \lambda T(f)$$

ise T operatörüne lineer operatör,

$$|T(f + g)| \leq |T(f)| + |T(g)| \text{ ve } |T(\lambda f)| = |\lambda| |T(f)|$$

ise T operatörüne altlineer operatör, bir $C > 0$ sabiti için

$$|T(f + g)| \leq C(|T(f)| + |T(g)|) \text{ ve } |T(\lambda f)| = |\lambda| |T(f)|$$

ise T operatörüne quasilineer operatör denir. Altlineerlik quasilineerliğin özel bir durumudur (Grafakos 2004).

Tanım 2.8 ((p,q) tipli operatör) $1 \leq p, q \leq \infty$, (X, μ) ve (Y, ν) iki ölçü uzayı ve $T, L_p(X, \mu)$ uzayından tanım ve görüntü kümeleri sırasıyla Y ve $\mathbb{C}$ olan ölçülebilir fonksiyonların uzayına bir altlineer operatör olsun. Eğer $q < \infty$ olmak üzere

$$\nu(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C \|f\|_{L_p}}{\lambda} \right)^q$$

ise T zayıf (p, q) tipinden ve eğer $q = \infty$ iken $L_p(X, \mu)$ uzayından $L_\infty(Y, \nu)$ uzayına sınırlı bir operatör ise zayıf (p, ∞) tipindendir denir.

Eğer $T, L_p(X, \mu)$ uzayından $L_q(Y, \nu)$ uzayına sınırlı bir operatör ise kuvvetli (p, q) tipindendir denir. Yani, her $f \in L_p(X, \mu)$ için

$$\|Tf\|_{L_q} \leq C \|f\|_{L_p}$$

olacak biçimde bir $C > 0$ sabiti vardır. Buradan $q = \infty$ olması durumunda zayıf ve kuvvetli tip çakışmaktadır.

Eğer T , kuvvetli (p, q) tipli ise aynı zamanda zayıf (p, q) tiplidir. Gerçekten, eğer $E_\lambda = \{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}$ olarak alınrsa, bu durumda

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d\nu \leq \int_{E_\lambda} \left| \frac{Tf(y)}{\lambda} \right| d\nu \leq \frac{\|Tf\|_{L^q(Y)}^q}{\lambda^q} \leq \left(\frac{C \|f\|_{L^p(X)}}{\lambda} \right)^q$$

olur.

Eğer $(X, \mu) = (Y, \nu)$ ve T özdeşlik operatörü olarak alınrsa zayıf (p, p) klasik Chebyshev eşitsizliği olur (Lu vd. 2006).

Tanım 2.9 (Lebesgue Diferensiyelleme Teoremi) Eğer $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy = f(x)$$

sağlanır (Grafakos 2004).

Tanım 2.10 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, $Mf : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

biçiminde tanımlanır.

Dikkat edilirse M maksimal operatörü altlineer ve homojendir, yani her $f, g \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$M(f + g) \leq Mf + Mg \text{ ve } M(\lambda f) = \lambda(Mf), \quad \forall \lambda \geq 0$$

sağlanır.

Aşağıdaki teorem M Hardy-Littlewood maksimal operatörünün hemen her yerde sonlu, zayıf $(1, 1)$ ve $1 < p \leq \infty$ için kuvvetli (p, p) tipinden bir operatör olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 2.2 $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için

(i) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ ise bu durumda Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.

(ii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $\forall \alpha > 0$ için

$$|\{x : Mf(x) > \alpha\}| \leq \frac{A}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \frac{A}{\alpha} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

sağlanır, burada A sadece n boyutuna bağlı bir sabittir.

(iii) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise bu durumda $Mf \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|Mf\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq A \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği sağlanır, burada A sadece p ve n boyutuna bağlı bir sabittir (Stein 1970).

Tanım 2.11 $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere $I_\alpha f$ Riesz potansiyeli

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy$$

olarak tanımlanır, burada

$$\gamma(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2})}$$

biçimindedir.

Aşağıdaki teorem $I_\alpha f$ Riesz potansiyelinin Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığını karakterize etmektedir.

Teorem 2.3 (Riesz Potansiyeli İçin Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi)

$0 < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun.

(i) Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ise

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-n+\alpha} f(y) dy$$

integrali hemen her x için mutlak yakınsaktır.

(ii) Eğer $p > 1$ ise bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq A_{p,q} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği gerçekleşir.

(iii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$|\{x : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{A \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{\lambda} \right)^q$$

Yani, $f \rightarrow I_\alpha f$ dönüşümü $(1, q)$ zayıf tiptir $\left(\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n}\right)$ (Stein 1970).

Tanım 2.12 (Singüler İntegrallerin Sınıflandırılması) $K(x)$ çekirdeği α -inci mertebeden homojen bir fonksiyon olsun. Eğer $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \theta$ ise, $S^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$ birim küre üzerinde x in izdüşümü $x' = \frac{x}{|x|}$ olarak gösterelim. Eğer $K(x)$, α -inci mertebeden homojen ise bu durumda

$$K(x) = |x|^\alpha K\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^\alpha K(x')$$

yazılabilir. $\Omega(x) = K\left(\frac{x}{|x|}\right)$ fonksiyonu sıfıncı mertebeden homojendir. Böylece $\Omega(x) = K(x')$, S^{n-1} de bir fonksiyon olarak alınabilir, Ω ya K çekirdeğinin karakteristiği denir.

$K(x)$, $-\alpha$ -inci mertebeden homojen olmak üzere bir $f \rightarrow f * K$ dönüşümünü göz önüne alalım, burada $(f * K)$ konvolüsyonu

$$(f * K)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K(x - y) dy \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu durumda aşağıdaki üç durum mevcuttur:

(i) Eğer $0 < \alpha < n$ ise, (2.1) integraline zayıf singüler integral denir.

(ii) Eğer $\alpha = n$ ise, (2.1) integraline singüler integral denir.

(iii) Eğer $\alpha > n$ ise, (2.1) integraline hipersingüler integral denir.

$0 < \alpha < n$ için $I_\alpha f$ Riesz potansiyeli, zayıf singüleriteye sahip bir integraldir (Neri 1971).

Şimdi $\bar{T}$ standart Calderón-Zygmund singüler integral operatörünü, kısaca Calderón-Zygmund operatörünü tanımlayalım. $\bar{T} : C_0^\infty \rightarrow L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ sürekli lineer operatörü $L_2(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_2(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olan bir operatördür ve

$$\bar{T}f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y) f(y) dy, \quad x \notin \text{supp} f$$

ile tanımlanır. Burada $k(x, y)$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x = y\}$ dışında sürekli bir fonksiyondur ve standart eşitsizlikleri sağlar: her $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$ için

$$|k(x, y)| \leq C |x - y|^{-n} \quad (\text{büyüklük koşulu})$$

olacak şekilde $C > 0$ vardır ve $2|h| \leq |x - y|$ iken

$$|k(x, y + h) - k(x, y)| + |k(x + h, y) - k(x, y)| \leq C \frac{|h|^\epsilon}{|x - y|^{n+\epsilon}} \quad (\text{düzgünlük koşulu})$$

olacak şekilde $0 < \epsilon \leq 1$ vardır.

$\bar{T}$ Calderón-Zygmund operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlıdır ve zayıf $(1, 1)$ tiplidir.

Ω aşağıdaki koşulları sağlasın:

- (i) $\Omega(\lambda y) = \Omega(y)$, $\forall \lambda > 0$
- (ii) $\int_{S^{n-1}} \Omega(y') d\sigma(y') = 0$, $y' = \frac{y}{|y|}$
- (iii) $\Omega \in L_1(S^{n-1})$.

Bu durumda $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ için $\bar{T}_\Omega$ kaba çekirdekli Calderón-Zygmund singüler integral operatörü

$$\bar{T}_\Omega f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x - y)}{|x - y|^n} f(y) dy$$

biçiminde tanımlanır ve (1.4) koşulunu sağlar. Ayrıca $\Omega(x) \equiv 1$ olduğu zaman $\bar{T}_\Omega$, $\bar{T}$ Calderón-Zygmund operatörüdür.

1971'de Muckenhoupt ve Wheeden, $0 < \alpha < n$, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $1 < s \leq \infty$ ve Ω , $\mathbb{R}^n$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen olmak üzere $I_{\Omega, \alpha}$ kaba çekirdekli kesirli integral operatörünü

$$I_{\Omega,\alpha}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y) dy$$

biçiminde tanımladılar, $I_{\Omega,\alpha}$ (1.5) koşulunu da sağlar. Bunun yanında $\Omega(x) \equiv 1$ olduğu zaman I_α Riesz potansiyeli elde edilir.

Tanım 2.13 $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için, $B(x, r)$ x merkezli r yarıçaplı açık yuvarı ve $|B(x, r)|$, $B(x, r)$ yuvarının Lebesgue ölçüsü olsun. S^{n-1} , $d\sigma$ normalleştirilmiş Lebesgue ölçüsü ile donatılmış $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) nin birim küresini göstermek üzere, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$; $s > 1$ ve Ω , $\mathbb{R}^n$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen olsun. $M_{\Omega,\alpha}$ kaba çekirdekli kesirli maksimal operatörü

$$M_{\Omega,\alpha}f(x) = \sup_{t>0} |B(x, t)|^{-1+\frac{\alpha}{n}} \int_{B(x,t)} |\Omega(x-y)| |f(y)| dy$$

biçiminde tanımlanır.

$\alpha = 0$ olduğunda $M_\Omega \equiv M_{\Omega,0}$, yani kaba çekirdekli Hardy-Littlewood maksimal operatörüdür. Açık olarak $\Omega \equiv 1$ olduğu zaman $M_{\Omega,\alpha}$ operatörü M_α kesirli maksimal operatörü olur.

2.1 Morrey Uzayı

Klasik $M_{p,\lambda}$ Morrey uzayları 1938 de Morrey tarafından eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarını araştırma çalışmalarında tanımlanmıştır. Daha sonra Morrey uzaylarının önemli uygulamaları Navier-Stokes ve Schrödinger denklemlerinde, süreksiz katsayılı eliptik problemlerde ve potansiyel teoride ortaya çıkmıştır.

Şimdi klasik Morrey uzaylarının tanımını verelim.

Tanım 2.14 $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $M_{p,\lambda} \equiv M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı

$$M_{p,\lambda} = \left\{ f : \|f\|_{M_{p,\lambda}} < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanır, burada $\|f\|_{M_{p,\lambda}}$ normu

$$\|f\|_{M_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

biçiminde verilir.

$\lambda = 0$ için $M_{p,0} \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ olur. Eğer $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise bu durumda $M_{p,\lambda} = \theta$ olur, burada θ , $\mathbb{R}^n$ üzerinde 0' a denk olan bütün fonksiyonların kümesini göstermektedir.

Yukarıdaki norm tanımında $B(x, r)$ yerine $B(0, r)$ alınacak olursa $LM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey uzayı elde edilir.

Ayrıca $WM_{p,\lambda} \equiv WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı olan zayıf Morrey uzayını göstereceğiz öyle ki burada

$$\|f\|_{WM_{p,\lambda}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

biçimindedir. Burada; $WL_p(B(x, r))$, f ölçülebilir fonksiyonların zayıf L_p -uzayını göstermek üzere

$$\begin{aligned} \|f\|_{WL_p(B(x,r))} &\equiv \|f\chi_{B(x,r)}\|_{WL_p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \sup_{t>0} t |\{y \in B(x, r) : |f(y)| > t\}|^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

şeklinde dir.

Lemma 2.1 $1 \leq p < \infty$ ve $\lambda = n$ olsun. Bu durumda $M_{p,n} \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|f\|_{M_{p,n}} = \omega_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

sağlanır, burada $\omega_n = |B(0, 1)|$ dir.

İspat. $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$r^{-\frac{n}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

olduğu görülür. Burada $f \in M_{p,n}$ ve

$$\|f\|_{M_{p,n}} = \omega_n^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

sağlanır.

$f \in M_{p,n}$ olsun. Lebesgue diferensiyelleme teoreminden

$$\lim_{r \rightarrow 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |f(y)|^p dy = |f(x)|^p$$

olur. Bu durumda

$$|f(x)| = \left(\lim_{r \rightarrow 0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_n^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{M_{p,n}}$$

elde edilir. Buradan $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ bulunur ve

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \omega_n^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{M_{p,n}}$$

olduğu görülür. ■

Chiarenza ve Frasca (1987) maksimal operatörün Morrey uzayında sınırlılığını ispat etmişlerdir.

Teorem 2.4 $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \lambda < n$ ve $f \in M_{p,\lambda}$ için $\mathbb{R}^n$ de Mf hemen her yerde sonludur. Ayrıca, $p > 1$ için

$$\|Mf\|_{M_{p,\lambda}} \leq C \|f\|_{M_{p,\lambda}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|Mf\|_{WM_{1,\lambda}} \leq C \|f\|_{M_{1,\lambda}}$$

sağlanır, burada C , f ' den bağımsız bir sabittir.

Fazio ve Ragusa (1993), Calderón-Zygmund operatörünün Morrey uzayında sınırlılığını ispat etmişlerdir.

Teorem 2.5 $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda $p > 1$ için

$$\|\overline{T}f\|_{M_{p,\lambda}} \leq C \|f\|_{M_{p,\lambda}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|\overline{T}f\|_{WM_{1,\lambda}} \leq C \|f\|_{M_{1,\lambda}}$$

sağlanır, burada C , f ' den bağımsız bir sabittir (Fazio ve Ragusa 1993).

2.2 Genelleştirilmiş Morrey Uzayı

Mizuhara (1991), Morrey uzayının tanımındaki r^λ kuvvet fonksiyonu yerine bir $\varphi(r)$ veya daha genel olarak bir $\varphi(x, r)$ fonksiyonu alarak Morrey uzaylarını genelleştirmiştir. Bu çalışmalarda φ fonksiyonu üzerine r ye bağlı monoton tipli şartlar konulmuştur. Ayrıca, Mizuhara (1991)'nın sonuçları Nakai (1994) tarafından genelleştirilmiştir.

Genelleştirilmiş Morrey uzaylarının normalleştirilmiş biçimi Guliyev (2009) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.15 $\varphi(x, r)$, $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi(x, r)^{-1} |B(x, r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(B(x, r))} < \infty$$

quasi-normuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır ve $M_{p,\varphi} \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Ayrıca,

$$\|f\|_{WM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \varphi(x, r)^{-1} |B(x, r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{WL_p(B(x, r))} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf genelleştirilmiş Morrey uzayı olarak tanımlanır ve $WM_{p,\varphi} \equiv WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre, $\varphi(x, r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ seçildiğinde $M_{p,r^{\frac{\lambda-n}{p}}} \equiv M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı ve $WM_{p,r^{\frac{\lambda-n}{p}}} \equiv WM_{p,\lambda}$ zayıf Morrey uzayı olduğu görülür.

Nakai (1994), $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayında M , $\bar{T}$ ve I_α operatörlerinin sınırlılığını araştırmış ve φ fonksiyonu üzerine $r \leq t \leq 2r$ olmak üzere

$$C^{-1}\varphi(x, r) \leq \varphi(x, t) \leq C\varphi(x, r) \quad (2.2)$$

noktasal *doubling* şartını koymuştur. Burada $C > 0$; t , r ve $x \in \mathbb{R}^n$ den bağımsız bir sabittir. Ayrıca bu şarta ilave olarak

$$\int_r^\infty \varphi(x, t)^p \frac{dt}{t} \leq C\varphi(x, r)^p \quad (2.3)$$

koşulu sağlanıyorsa M ve $\overline{T}$ operatörlerinin $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayı üzerinde ve eğer $1 < p < q < \infty$ ve $\alpha = n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ olmak üzere

$$\int_r^\infty t^{\alpha p} \varphi(x, t)^p \frac{dt}{t} \leq C r^{\alpha p} \varphi(x, r)^p \quad (2.4)$$

koşulu sağlanıyorsa I_α operatörünün $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayından bir diğer $M_{q,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayına sınırlı olduklarını göstermiştir.

Nakai (1994)'deki sonucu içeren aşağıdaki teoremler (1.4) koşulunu sağlayan bir T altlineer operatörü ve $[b, T]$ komütatör operatörü için 1998' de Ding vd. (1998) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 2.6 $\varphi(x, r)$, (2.2)-(2.3) şartlarını sağlasın. T , (1.4) koşulunu sağlayan ve $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlı olan bir altlineer operatör olsun. Bu durumda T operatörü $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır (Ding vd. 1998).

Guliyev (1994, 1999, 2009), Nakai'nin (1994) φ fonksiyonu üzerine koyduğu (2.2) ve (2.3) şartları yerine eğer

$$\int_r^\infty \varphi_1(x, t) \frac{dt}{t} \leq C \varphi_2(x, r) \quad (2.5)$$

koşulu sağlanıyorsa M ve $\overline{T}$ operatörlerinin $M_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayından bir diğer $M_{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayına ve benzer şekilde $1 < p < q < \infty$ ve $\alpha = n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right)$ olmak üzere (2.2) ve (2.4) şartları yerine eğer

$$\int_r^\infty t^\alpha \varphi_1(x, t) \frac{dt}{t} \leq C \varphi_2(x, r) \quad (2.6)$$

koşulu sağlanıyorsa I_α operatörünün $M_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayından bir diğer $M_{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayına sınırlı olduklarını göstermiştir.

Daha sonra Guliyev vd. (2011), (2.5) ve (2.6) şartından daha zayıf bir şart ile $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayı üzerinde T ve T_α altlineer operatörlerinin

ve bunların komütatörlerinin sınırlılığını göstermişlerdir. Bu sonuç aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

$\Omega \equiv 1$ olduğu zaman, $p > 1$ için M_{p,φ_1} genelleştirilmiş Morrey uzayından bir diğer M_{p,φ_2} genelleştirilmiş Morrey uzayına ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} zayıf uzayına Calderón-Zygmund operatörü tarafından üretilen ve (1.4) koşulunu sağlayan T_Ω altlineer operatörünün sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) fonksiyon çifti üzerinde

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \leq C \varphi_2(x, r)$$

yeterlik koşulu elde edilmiştir, burada C , x ve r ye bağlı değildir. Benzer şekilde; $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ için M_{p,φ_1} genelleştirilmiş Morrey uzayından bir diğer M_{q,φ_2} genelleştirilmiş Morrey uzayına ve, $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{q,φ_2} zayıf uzayına Riesz potansiyeli tarafından üretilen ve (1.5) koşulunu sağlayan $T_{\Omega,\alpha}$ altlineer operatörünün sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) fonksiyon çifti üzerinde

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}+1}} dt \leq C \varphi_2(x, r)$$

yeterlik koşulu elde edilmiştir, burada C , x ve r ye bağlı değildir.

2.3 BMO uzayı ve komütatör operatörü

Bu kesimde John ve Nirenberg (1961) tarafından kısmi diferensiyel denklemlerin çalışmaları sırasında ortaya konan BMO uzayının ve komütatör operatörünün tanımını ve bazı özelliklerini vereceğiz. BMO uzayı L_∞ uzayı ile benzer özelliklere sahiptir ve sıklıkla L_∞ uzayı yerine kullanılır. Klasik singüler integral operatörler L_∞ uzayından L_∞ uzayına sınırlı değildir, fakat L_∞ uzayından BMO uzayına sınırlıdır. Çoğu kez L_p ve BMO arasındaki interpolasyon L_p ile L_∞ arasındakinden daha uygun olmaktadır. Fakat BMO uzayının rolü bundan daha kapsamlı ve derindir. Bu uzay standart çekirdekli konvolüsyon tipli olmayan singüler integral operatörlerin L_2 sınırlılığının karakterizasyonunda olduğu gibi analizde pek çok durumda önemli

bir role sahiptir. 1971’ de Fefferman ve Stein BMO uzayının H^1 Hardy uzayının duali olduğunu göstermişlerdir. $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve bir $B(x, r)$ yuvarı için

$$f_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy$$

ifadesine f fonksiyonunun $B(x, r)$ üzerindeki ortalaması denir. Bu durumda $|f - f_{B(x,r)}|$ fonksiyonuna f fonksiyonunun salınımı ve

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}| dy$$

ifadesine $B(x, r)$ üzerinde f fonksiyonunun ortalama salınımı denir.

Tanım 2.16 $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|f\|_* = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}| dy$$

olsun. Eğer $\|f\|_* < \infty$ ise f fonksiyonu ortalama salınımına sahiptir denir ve $\|f\|_* < \infty$ olmak üzere $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının kümesi $BMO(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

$BMO(\mathbb{R}^n)$ bir lineer uzaydır. Bundan başka $f, g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve λ skaler olmak üzere

$$\|f + g\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*$$

$$\|\lambda f\|_* = |\lambda| \|f\|_*$$

sağlanır. Fakat $\|\cdot\|_*$ bir norm değildir. Çünkü $\|f\|_* = 0$ olması $f = 0$ olmasını gerektirmeyip f nin sabit olmasını gerektirmektedir. Bundan başka her c sabit fonksiyonu için $\|c\|_* = 0$ sağlanır. $\|\cdot\|_*$ bir yarı-norm olmasına rağmen karışıklığın söz konusu olmadığı durumlarda bir norm olarak adlandırılır. c bir sabit iken f ve $f + c$ fonksiyonları aynı BMO normuna sahip olup, farkları bir sabit olan BMO uzayının elemanları özdeşdir.

$\|f\|_* \leq 2 \|f\|_\infty$ olduğundan $L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ sağlanır. Her sınırlı (ölçülebilir) fonksiyon BMO uzayındadır. Sınırlı olmayan BMO fonksiyonları da vardır. $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olan fakat $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olmayan tipik bir örnek $\log|x|$ fonksiyonudur.

Tanım 2.17 Ölçülebilir fonksiyonlar kümesi üzerinde tanımlı bir lineer T operatörü ve bir $b \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu için $[b, T]$ komütatörü

$$[b, T] f(x) = b(x) T f(x) - T(bf)(x)$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.18 $f \in C_0^\infty$, $b \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $\overline{T}$ Calderón-Zygmund operatörü olmak üzere $[b, \overline{T}]$ komütatör operatörü

$$[b, \overline{T}] f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [b(x) - b(y)] k(x-y) f(y) dy, \quad x \notin \text{supp } f$$

ile tanımlanır.

Calderón-Zygmund operatörlerinin komütatörleri ikinci mertebeden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin düzgünlüğü çalışmalarında önemli bir rol oynamaktadır. Coifman vd. (1976) $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ iken $[b, \overline{T}]$ komütatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlılığını göstermişlerdir. Daha sonra Janson (1978) $[b, \overline{T}]$ komütatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlı iken $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olduğunu göstermiştir.

Ayrıca Coifman vd. (1976) $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ iken $[b, \overline{T}_\Omega]$ komütatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlılığını araştırıp, $\overline{T}_\Omega$ ve $b \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ tarafından üretilen $[b, \overline{T}_\Omega]$ komütatörünü

$$[b, \overline{T}_\Omega] = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} [b(x) - b(y)] \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y) dy$$

şeklinde tanımladılar.

Teorem 2.7 $\varphi(x, r)$, (2.2)-(2.3) şartlarını sağlasın ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. T , (1.4) koşulunu sağlayan lineer operatör olsun ve $[b, T]$ komütatör operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlı olsun. Bu durumda $[b, T]$ operatörü $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır (Ding vd. 1998).

2.4 CBMO Lokal Campanato Uzayı

Bu kesimde $CBMO$ Lokal Campanato uzayı tanıtılıp, bu uzayın yapısı hakkında bazı sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.19 $1 \leq p < \infty$ ve $0 \leq \lambda < \frac{1}{n}$ olsun. $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $CBMO_{p,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$

$$CBMO_{p,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{CBMO_{p,\lambda}^{\{x_0\}}} < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanır ve $\|f\|_{CBMO_{p,\lambda}^{\{x_0\}}}$ normu

$$\|f\|_{CBMO_{p,\lambda}^{\{x_0\}}} = \sup_{r>0} \left(\frac{1}{|B(x_0, r)|^{1+\lambda p}} \int_{B(x_0, r)} |f(y) - f_{B(x_0, r)}|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

biçiminde verilir. Ayrıca burada $f_{B(x_0, r)}$ fonksiyonu

$$f_{B(x_0, r)} = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} f(y) dy$$

biçimindedir.

Lu ve Yang (1995) merkezi BMO uzayını $CBMO_p(\mathbb{R}^n) = CBMO_{p,0}^{\{0\}}(\mathbb{R}^n)$ biçiminde tanımladılar. Belirtmeliyiz ki $1 \leq p < \infty$ için $BMO(\mathbb{R}^n) \subset CBMO_p^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ dir.

3. $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ LOKAL MORREY UZAYLARINDA T_Ω VE $T_{\Omega,\alpha}$ OPERATÖRLERİNİN GULİYEV TİPİ SINIRLILIKLARI

Bu bölümde ilk olarak genelleştirilmiş lokal Morrey uzayları tanımlanıp, bu uzayların yapısı hakkında bazı sonuçlar verilecektir. Daha sonra ω negatif olmayan ve $(0, \infty)$ üzerinde ölçülebilir sabit bir fonksiyon olmak üzere,

$$H_\omega g(t) := \int_t^\infty g(s)\omega(s)ds, \quad 0 < t < \infty,$$

ağırlıklı Hardy operatörünün sınırlılığı hakkında aşağıdaki Teorem 3.1' i kullanarak, $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında T_Ω operatörünün Guliyev tipi sınırlılığını ve $T_{\Omega,\alpha}$ operatörünün ise Spanne-Guliyev tipi sınırlılığını sırasıyla ispatlayacağız.

Genelleştirilmiş lokal Morrey uzayları ilk kez Guliyev (1994) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.1 $\varphi(x, r)$, $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{LM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{LM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{r>0} \varphi(0, r)^{-1} |B(0, r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_p(B(0,r))} < \infty$$

quasi-normuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş lokal Morrey uzayı olarak tanımlanır ve $LM_{p,\varphi} \equiv LM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Ayrıca

$$\|f\|_{WLM_{p,\varphi}} \equiv \|f\|_{WLM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{r>0} \varphi(0, r)^{-1} |B(0, r)|^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{WL_p(B(0,r))} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf genelleştirilmiş lokal Morrey uzayı olarak tanımlanır ve $WLM_{p,\varphi} \equiv WLM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2 $\varphi(x, r)$, $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere her sabit $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\|f\|_{LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}} \equiv \|f(x_0 + \cdot)\|_{LM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

quasi-normuna sahip bütün $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı genelleştirilmiş lokal Morrey uzayı olarak tanımlanır ve $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}} \equiv LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Ayrıca

$$\|f\|_{WM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}} \equiv \|f(x_0 + \cdot)\|_{LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}} < \infty$$

normuna sahip bütün $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının uzayı zayıf genelleştirilmiş lokal Morrey uzayı olarak tanımlanır ve $WLM_{p,\varphi}^{\{x_0\}} \equiv WLM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre, $\varphi(x_0, r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ seçilmesiyle $LM_{p,r^{\frac{\lambda-n}{p}}}^{\{x_0\}} \equiv LM_{p,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ lokal Morrey uzayı ve $WM_{p,r^{\frac{\lambda-n}{p}}}^{\{x_0\}} \equiv WM_{p,\lambda}^{\{x_0\}}$ zayıf lokal Morrey uzayı olduğu görülür.

Teorem 3.1 v_1, v_2 ve ω hemen her yerde pozitif ve $(0, \infty)$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar olsun ve

$$H_\omega g(t) := \int_t^\infty g(s)\omega(s)ds, \quad 0 < t < \infty,$$

ağırlıklı Hardy operatörünü gözönüne alalım. Bu durumda

$$\operatorname{esssup}_{t>0} v_2(t) H_\omega g(t) \leq C \operatorname{esssup}_{t>0} v_1(t) g(t), \quad C > 0, \quad (3.1)$$

eşitsizliğinin $(0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ve azalmayan tüm g fonksiyonları için sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$B := \sup_{t>0} v_2(t) \int_t^\infty \frac{\omega(s) ds}{\operatorname{esssup}_{s<\tau<\infty} v_1(\tau)} < \infty \quad (3.2)$$

olmasıdır.

Ayrıca, (3.1) de C^* , C nin en küçük değeri ise $C^* = B$ olmasıdır (Guliyev 2012, Mustafayev 2012). Özel olarak $\omega \equiv 1$ iken Teorem 3.1 Carro vd. (2001) tarafından da ispatlanmıştır.

3.1 $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ Genelleştirilmiş Lokal Morrey Uzaylarında Kaba Çekirdekli T_Ω Altlineer Operatörünün Guliyev Tipi Sınırlılığı

Bu kesimde, kaba çekirdekli Calderón-Zygmund singüler integral operatörü tarafından üretilen ve (1.4) koşulunu sağlayan T_Ω kaba çekirdekli altlineer operatörünün $p > 1$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayından bir diğer $LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayına ve $p = 1$ için $LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ uzayından $WLM_{1,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ zayıf uzayına sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) fonksiyon çifti üzerinde yeterlik şartları araştırılacaktır.

Lemma 3.1 (T_Ω için lokal Guliyev eşitsizliği) Ω , sıfırıncı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s > 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. T_Ω (1.4) koşulunu sağlayan ve $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ve $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olan bir altlineer operatör olsun.

$p > 1$ ve $s' \leq p$ ise bu durumda

$$\|T_\Omega f\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt$$

eşitsizliği herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

$p > 1$ ve $p < s$ ise bu durumda

$$\|T_\Omega f\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{p}-\frac{n}{s}} \int_{2r}^{\infty} t^{\frac{n}{s}-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt$$

eşitsizliği herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

Ayrıca, $s > 1$ için

$$\|T_\Omega f\|_{WL_1(B(x_0,r))} \lesssim r^n \int_{2r}^{\infty} t^{-n-1} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} dt \quad (3.3)$$

herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$ ve $s' \leq p$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0, r)$, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar ve $2B = B(x_0, 2r)$ olsun. f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y) \chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y) \chi_{(2B)^c}(y), \quad r > 0 \quad (3.4)$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda

$$\|T_{\Omega}f\|_{L_p(B)} \leq \|T_{\Omega}f_1\|_{L_p(B)} + \|T_{\Omega}f_2\|_{L_p(B)}$$

elde ederiz. $f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olduğundan $T_{\Omega}f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olur ve $T_{\Omega}f$ nin $L_p(\mathbb{R}^n)$ deki sınırlılığından

$$\|T_{\Omega}f_1\|_{L_p(B)} \leq \|T_{\Omega}f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = C \|f\|_{L_p(2B)}$$

elde edilir. Burada $C > 0$, f den bağımsızdır.

$x \in B$, $y \in (2B)^C$ olması $\frac{1}{2}|x_0 - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|x_0 - y|$ olmasını gerektirir.

Buradan

$$|T_{\Omega}f_2(x)| \leq 2^n c_1 \int_{(2B)^C} \frac{|f(y)| |\Omega(x - y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

elde ederiz. Fubini teoreminden

$$\begin{aligned} \int_{(2B)^C} \frac{|f(y)| |\Omega(x - y)|}{|x_0 - y|^n} dy &\approx \int_{(2B)^C} |f(y)| |\Omega(x - y)| \int_{|x_0 - y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy \\ &\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \leq |x_0 - y| \leq t} |f(y)| |\Omega(x - y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0, t)} |f(y)| |\Omega(x - y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Genelleştirilmiş Hölder eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} &\int_{(2B)^C} \frac{|f(y)| |\Omega(x - y)|}{|x_0 - y|^n} dy \\ &\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0, t))} \|\Omega(x - \cdot)\|_{L_s(B(x_0, t))} |B(x_0, t)|^{1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{s}} \frac{dt}{t^{n+1}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde ederiz.

$x \in B(x_0, t)$ için, Ω , sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s > 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B(x_0, t)} |\Omega(x-y)|^s dy \right)^{\frac{1}{s}} &= \left(\int_{B(x-x_0, t)} |\Omega(z)|^s dz \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\int_{B(0, t+|x-x_0|)} |\Omega(z)|^s dz \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \left(\int_{B(0, 2t)} |\Omega(z)|^s dz \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \left(\int_0^{2t} \int_{S^{n-1}} |\Omega(z')|^s d\sigma(z') r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= C \|\Omega\|_{L_s(S^{n-1})} |B(x_0, 2t)|^{\frac{1}{s}} \quad (3.6)
\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece, (3.6) dan

$$|T_\Omega f_2(x)| \lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}}$$

elde ederiz.

Ayrıca, her $p \in [1, \infty)$ için

$$\|T_\Omega f_2\|_{L_p(B)} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \quad (3.7)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\|T_\Omega f\|_{L_p(B)} \lesssim \|f\|_{L_p(2B)} + r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L_p(2B)} &\approx r^{\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B)} \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \\
&\leq r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}}. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece

$$\|T_{\Omega}f\|_{L_p(B)} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}}$$

elde ederiz.

$1 < p < s$ olsun. (3.6) ya benzer şekilde, $y \in B(x_0, t)$ olduğu zaman,

$$\left(\int_{B(x_0,r)} |\Omega(x-y)|^s dy \right)^{\frac{1}{s}} \leq C \|\Omega\|_{L_s(S^{n-1})} \left| B\left(x_0, \frac{3}{2}t\right) \right|^{\frac{1}{s}} \quad (3.9)$$

sağlanır.

Fubini teoremi, genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği ve (3.9)' dan,

$$\begin{aligned} \|T_{\Omega}f_2\|_{L_p(B)} &\leq \left(\int_B \left| \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| |\Omega(x-y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_p(B)} dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\leq |B(x_0, r)|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{s}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_s(B)} dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim r^{\frac{n}{p} - \frac{n}{s}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} \left| B\left(x_0, \frac{3}{2}t\right) \right|^{\frac{1}{s}} \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim r^{\frac{n}{p} - \frac{n}{s}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} t^{\frac{n}{s} - \frac{n}{p} - 1} dt. \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

$p = 1 < s \leq \infty$ olsun. T_{Ω} nın zayıf $(1, 1)$ sınırlılığı ve (3.8) ifadesinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \|T_{\Omega}f_1\|_{WL_1(B)} &\leq \|T_{\Omega}f_1\|_{WL_1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_1\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|f\|_{L_1(2B)} \lesssim r^n \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.7) ve (3.10) ifadelerini birleştirerek (3.3) eşitsizliğini elde ederiz. ■

Aşağıdaki teoremdede, $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında T_Ω operatörünün Guliyev tipi sınırlılığını elde edeceğiz.

Teorem 3.2 (T_Ω için Guliyev tipi sınırlılık) Ω , sıfırıncı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s > 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. T_Ω , (1.4) koşulunu sağlayan ve $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ve $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olan bir altlineer operatör olsun. Ayrıca, $s' \leq p$, $p \neq 1$, için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x_0, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}+1}} dt \leq C \varphi_2(x_0, r) \quad (3.11)$$

koşulunu ve $1 < p < s$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x_0, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p} - \frac{n}{s} + 1}} dt \leq C \varphi_2(x_0, r) r^{\frac{n}{s}} \quad (3.12)$$

koşulunu sağlasın, burada C , r ye bağlı değildir. Bu durumda T_Ω operatörü $p > 1$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye ve $LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $WLM_{1,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır. Yani $p > 1$ için

$$\|T_\Omega f\|_{LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}} \lesssim \|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|T_\Omega f\|_{WLM_{1,\varphi_2}^{\{x_0\}}} \lesssim \|f\|_{LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}}$$

eşitsizlikleri sağlar.

İspat. $1 < p < \infty$ ve $s' \leq p$ olsun. $v_2(r) = \varphi_2(x_0, r)^{-1}$, $v_1(r) = \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p}}$, $g(r) = \|f\|_{L_p(B(x_0, r))}$ ve $\omega(r) = r^{-\frac{n}{p}-1}$ seçilmesiyle, Lemma 3.1 ve Teorem 3.1' den

$$\begin{aligned} \|T_\Omega f\|_{LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}} &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(x_0, r)^{-1} \int_r^\infty \|f\|_{L_p(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}+1}} \\ &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x_0, r))} = \|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca burada (3.2) koşulu (3.11) koşuluna da denktir.

$1 < p < s$ olsun. $v_2(r) = \varphi_2(x_0, r)^{-1}$, $v_1(r) = \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p} + \frac{n}{s}}$, $g(r) = \|f\|_{L_p(B(x_0, r))}$ ve $\omega(r) = r^{-\frac{n}{p} + \frac{n}{s} - 1}$ seçilmesiyle, Lemma 3.1 ve Teorem 3.1' den

$$\begin{aligned} \|T_\Omega f\|_{LM_{p, \varphi_2}^{\{x_0\}}} &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{s}} \int_r^\infty \|f\|_{L_p(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p} - \frac{n}{s} + 1}} \\ &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x_0, r))} = \|f\|_{LM_{p, \varphi_1}^{\{x_0\}}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca burada (3.2) koşulu (3.12) koşuluna da denktir.

Benzer şekilde $p = 1$ için

$$\begin{aligned} \|T_\Omega f\|_{WLM_{1, \varphi_2}^{\{x_0\}}} &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(x_0, r)^{-1} \int_r^\infty \|f\|_{L_1(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{n+1}} \\ &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-n} \|f\|_{L_1(B(x_0, r))} = \|f\|_{LM_{1, \varphi_1}^{\{x_0\}}} \end{aligned}$$

elde ederiz. ■

Sonuç 3.1 Ω , sıfırıncı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s > 1$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. T_Ω , (1.4) koşulunu sağlayan ve $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ve $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olan bir altlineer operatör olsun. Ayrıca, $s' \leq p$, $p \neq 1$, için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \frac{\text{essinf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p} + 1}} dt \leq C \varphi_2(x, r)$$

koşulunu ve $1 < p < s$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \frac{\text{essinf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p} - \frac{n}{s} + 1}} dt \leq C \varphi_2(x, r) r^{\frac{n}{s}}$$

koşulunu sağlasın, burada C , r ye bağlı değildir. Bu durumda T_Ω operatörü $p > 1$ için M_{p, φ_1} den M_{p, φ_2} ye ve M_{1, φ_1} den WM_{1, φ_2} ye sınırlıdır. Yani $p > 1$ için

$$\|T_\Omega f\|_{M_{p, \varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{p, \varphi_1}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|T_\Omega f\|_{WM_{1, \varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{1, \varphi_1}}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

$s = \infty$ olması durumunda Teorem 3.2' den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2 $1 \leq p < \infty$ ve (φ_1, φ_2) çifti (3.11) şartını sağlasın. Bu durumda $\bar{T}$ operatörü $p > 1$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye ve $LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $WLM_{1,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır.

Sonuç 3.3 Ω , sıfırıncı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s > 1$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $s' \leq p$, $p \neq 1$, için (φ_1, φ_2) çifti (3.11) şartını ve $1 < p < s$ için (φ_1, φ_2) çifti (3.12) şartını sağlasın. Bu durumda M_Ω ve $\bar{T}_\Omega$ operatörleri $p > 1$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye ve $LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $WLM_{1,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır.

Uyarı 3.1 $s = \infty$ olması durumunda Sonuç 3.1, Guliyev vd. (2011) tarafından ispat edilmiştir. Ayrıca yine $s = \infty$ olması durumunda Lemma 3.1 ve Teorem 3.2 Guliyev (2013b) tarafından ispat edilmiştir.

Aşağıdaki ifadelerde, genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında (1.5) koşulunu sağlayan $T_{\Omega,\alpha}$ altlineer operatörünün Spanne-Guliyev tipi sınırlılığını ispatlayacağız.

3.2 $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ Genelleştirilmiş Lokal Morrey Uzaylarında Kaba Çekirdekli Potansiyel Tipli $T_{\Omega,\alpha}$ Altlineer Operatörünün Spanne-Guliyev Tipi Sınırlılığı

Bu kesimde, kaba çekirdekli kesirli integral operatörleri tarafından üretilen ve (1.5) koşulunu sağlayan $T_{\Omega,\alpha}$ potansiyel tipli kaba çekirdekli altlineer operatörünün $0 < \alpha < n$, $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayından bir diğer $LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayına ve $1 < q < \infty$, $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ için $LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ uzayından $WLM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ zayıf uzayına sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) fonksiyon çifti üzerinde yeterlik şartları elde edilecektir.

Lemma 3.2 ($T_{\Omega,\alpha}$ için lokal Guliyev eşitsizliği) Ω , sıfırıncı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $1 < s \leq \infty$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. $T_{\Omega,\alpha}$, (1.5) koşulunu sağlayan ve $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına

ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olan bir altlineer operatör olsun.

$p > 1$ ve $s' \leq p$ ise bu durumda

$$\|T_{\Omega,\alpha}f\|_{L_q(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt$$

eşitsizliği herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlar.

$p > 1$ ve $q < s$ ise bu durumda

$$\|T_{\Omega,\alpha}f\|_{L_q(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{q}-\frac{n}{s}} \int_{2r}^{\infty} t^{\frac{n}{s}-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} dt$$

eşitsizliği herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlar.

Ayrıca, $p = 1 < q < s$ için

$$\|T_{\Omega,\alpha}f\|_{WL_q(B(x_0,r))} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} dt \quad (3.13)$$

eşitsizliği herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlar.

İspat. $0 < \alpha < n$, $1 \leq s' < p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0, r)$, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar ve $2B = B(x_0, 2r)$ olsun. f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y) \chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y) \chi_{(2B)^c}(y), \quad r > 0 \quad (3.14)$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda

$$\|T_{\Omega,\alpha}f\|_{L_q(B)} \leq \|T_{\Omega,\alpha}f_1\|_{L_q(B)} + \|T_{\Omega,\alpha}f_2\|_{L_q(B)}$$

elde ederiz. $f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olduğundan $T_{\Omega,\alpha}f_1 \in L_q(\mathbb{R}^n)$ olur ve $T_{\Omega,\alpha}f$ nin $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığından

$$\|T_{\Omega,\alpha}f_1\|_{L_q(B)} \leq \|T_{\Omega,\alpha}f_1\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = C \|f\|_{L_p(2B)}$$

elde edilir, burada $C > 0$, f den bağımsızdır.

$x \in B$, $y \in (2B)^c$ olması $\frac{1}{2}|x_0 - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|x_0 - y|$ olmasını gerektirir.

Buradan

$$|T_{\Omega,\alpha}f_2(x)| \leq 2^{n-\alpha} c_1 \int_{(2B)^c} \frac{|f(y)| |\Omega(x-y)|}{|x_0 - y|^{n-\alpha}} dy$$

elde ederiz. Fubini teoreminden

$$\begin{aligned}
\int_{(2B)^C} \frac{|f(y)| |\Omega(x-y)|}{|x_0-y|^{n-\alpha}} dy &\approx \int_{(2B)^C} |f(y)| |\Omega(x-y)| \int_{|x_0-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} dy \\
&\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \leq |x_0-y| \leq t} |f(y)| |\Omega(x-y)| dy \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| |\Omega(x-y)| dy \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve (3.6)' dan

$$\begin{aligned}
&\int_{(2B)^C} \frac{|f(y)| |\Omega(x-y)|}{|x_0-y|^{n-\alpha}} dy \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \|\Omega(x-\cdot)\|_{L_s(B(x_0,t))} |B(x_0,t)|^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{s}} \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}}
\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$|T_{\Omega,\alpha} f_2(x)| \lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}}$$

elde ederiz.

Ayrıca, her $p \in [1, \infty)$ için

$$\|T_{\Omega,\alpha} f_2\|_{L_q(B)} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}} \quad (3.15)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece,

$$\|T_{\Omega,\alpha} f\|_{L_q(B)} \lesssim \|f\|_{L_p(2B)} + r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L_p(2B)} &\approx r^{\frac{n}{q}} \|f\|_{L_p(2B)} \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}} \\
&\leq r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}}
\end{aligned} \quad (3.16)$$

sağlanır. Böylece,

$$\|T_{\Omega,\alpha}f\|_{L_q(B)} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}}$$

elde ederiz.

$1 < q < s$ olsun. Fubini teoremi, genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği ve (3.9)' dan,

$$\begin{aligned} \|T_{\Omega,\alpha}f_2\|_{L_q(B)} &\leq \left(\int_B \left| \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| |\Omega(x-y)| dy \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_q(B)} dy \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} \\ &\leq |B(x_0, r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{s}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_s(B)} dy \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} \\ &\lesssim r^{\frac{n}{q}-\frac{n}{s}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} \left| B\left(x_0, \frac{3}{2}t\right) \right|^{\frac{1}{s}} \frac{dt}{t^{n+1-\alpha}} \\ &\lesssim r^{\frac{n}{q}-\frac{n}{s}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x_0,t))} t^{\frac{n}{s}-\frac{n}{q}-1} dt. \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

$p = 1 < q < s \leq \infty$ olsun. $T_{\Omega,\alpha}$ nın zayıf $(1, q)$ sınırlılığı ve (3.16) ifadesinin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \|T_{\Omega,\alpha}f_1\|_{WL_q(B)} &\leq \|T_{\Omega,\alpha}f_1\|_{WL_1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f_1\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|f\|_{L_1(2B)} \lesssim r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

olduğu görülür.

Bu durumda (3.15) ve (3.17) ifadelerini birleştirerek (3.13) eşitsizliğini elde ederiz.

■

Aşağıdaki teoremde, $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında $T_{\Omega,\alpha}$ operatörünün Spanne-Guliyev tipi sınırlılığını elde edeceğiz.

Teorem 3.3 ($T_{\Omega,\alpha}$ için Spanne-Guliyev tipi sınırlılık) Ω , sıfırıncı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $1 < s \leq \infty$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. $T_{\Omega,\alpha}$, (1.5) koşulunu sağlayan ve $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olan bir altlineer operatör olsun. Ayrıca, $s' \leq p$, $p \neq 1$, için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \frac{\text{essinf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x_0, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}+1}} dt \leq C \varphi_2(x_0, r) \quad (3.18)$$

koşulunu ve $q < s$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \frac{\text{essinf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x_0, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}-\frac{n}{s}+1}} dt \leq C \varphi_2(x_0, r) r^{\frac{n}{s}} \quad (3.19)$$

koşulunu sağlasın, burada C , r ye bağlı değildir. Bu durumda $T_{\Omega,\alpha}$ operatörü $p > 1$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye ve $LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $WLM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır. Yani $p > 1$ için

$$\|T_{\Omega,\alpha} f\|_{LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}} \lesssim \|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|T_{\Omega,\alpha} f\|_{WLM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}} \lesssim \|f\|_{LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$ ve $s' \leq p$ olsun. $v_2(r) = \varphi_2(x_0, r)^{-1}$, $v_1(r) = \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p}}$, $g(r) = \|f\|_{L_p(B(x_0, r))}$ ve $\omega(r) = r^{-\frac{n}{q}-1}$ seçilmesiyle, Lemma 3.1 ve Teorem 3.1' den

$$\begin{aligned} \|T_{\Omega,\alpha} f\|_{LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}} &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(x_0, r)^{-1} \int_r^\infty \|f\|_{L_p(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}} \\ &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x_0, r))} = \|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca burada (3.2) koşulu (3.18) koşuluna da denktir.

$1 \leq q < s$ olsun. $v_2(r) = \varphi_2(x_0, r)^{-1}$, $v_1(r) = \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p}+\frac{n}{s}}$, $g(r) = \|f\|_{L_p(B(x_0, r))}$ ve $\omega(r) = r^{-\frac{n}{q}+\frac{n}{s}-1}$ seçilmesiyle, Lemma 3.1 ve Teorem 3.1' den

$$\begin{aligned} \|T_{\Omega,\alpha} f\|_{LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}} &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{s}} \int_r^\infty \|f\|_{L_p(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}-\frac{n}{s}+1}} \\ &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L_p(B(x_0, r))} = \|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca burada (3.2) koşulu (3.19) koşuluna da denktir.

Benzer şekilde $p = 1$ için

$$\begin{aligned} \|T_{\Omega,\alpha}f\|_{WLM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}} &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(x_0, r)^{-1} \int_r^\infty \|f\|_{L_1(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q}+1}} \\ &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-n} \|f\|_{L_1(B(x_0,r))} = \|f\|_{LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}} \end{aligned}$$

elde ederiz. ■

Sonuç 3.4 Ω , sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $1 < s \leq \infty$ olsun. $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. $T_{\Omega,\alpha}$, (1.5) koşulunu sağlayan ve $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olan bir altlineer operatör olsun. Ayrıca, $s' \leq p$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t<\tau<\infty} \varphi_1(x, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}+1}} dt \leq C \varphi_2(x, r)$$

koşulunu ve $q < s$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t<\tau<\infty} \varphi_1(x, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}-\frac{n}{s}+1}} dt \leq C \varphi_2(x, r) r^{\frac{n}{s}}$$

koşulunu sağlasın, burada C , r ye bağlı değildir. Bu durumda $T_{\Omega,\alpha}$ operatörü $p > 1$ için M_{p,φ_1} den M_{q,φ_2} ye ve M_{1,φ_1} den WM_{q,φ_2} ye sınırlıdır. Yani $p > 1$ için

$$\|T_{\Omega,\alpha}f\|_{M_{q,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{p,\varphi_1}}$$

ve $p = 1$ için

$$\|T_{\Omega,\alpha}f\|_{WM_{q,\varphi_2}} \lesssim \|f\|_{M_{1,\varphi_1}}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Uyarı 3.2 $s = \infty$ olması durumunda Sonuç 3.4, Guliyev vd. (2011) tarafından ispat edilmiştir. Ayrıca yine $s = \infty$ olması durumunda Lemma 3.2 ve Teorem 3.3 Guliyev (2013a) tarafından ispat edilmiştir.

Sonuç 3.5 Ω , sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $1 < s \leq \infty$ olsun. $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. $s' \leq p$ için (φ_1, φ_2) çifti (3.18) şartını ve $q < s$ için (φ_1, φ_2) çifti (3.19) şartını sağlasın. Bu durumda $M_{\Omega, \alpha}$ ve $\bar{T}_{\Omega, \alpha}$ operatörleri $p > 1$ için $LM_{p, \varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{q, \varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye ve $p = 1$ için $LM_{1, \varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $WLM_{q, \varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır.

$s = \infty$ olması durumunda Teorem 3.3' den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.6 $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve (φ_1, φ_2) çifti (3.18) şartını sağlasın. Bu durumda $\bar{T}_\alpha$ operatörü $p > 1$ için $LM_{p, \varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{q, \varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye ve $p = 1$ için $LM_{1, \varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $WLM_{q, \varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır.

4. $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ LOKAL MORREY UZAYLARINDA $T_{\Omega,B}$ VE $T_{\Omega,B,\alpha}$ KOMÜTATÖR OPERATÖRLERİNİN GULİYEV TİPİ SINIRLILIKLARI

Bu bölümde ilk olarak komütatör operatörünün tanımı verilir, daha sonra ω negatif olmayan ve $(0, \infty)$ üzerinde ölçülebilir sabit bir fonksiyon olmak üzere,

$$H_{\omega}^*g(r) := \int_r^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) g(t)\omega(t)dt, \quad r \in (0, \infty)$$

ağırlıklı Hardy operatörünün sınırlılığı hakkındaki aşağıda verilen Teorem 4.1' i kullanarak, $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında $b \in CBMO_{p,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ iken $T_{\Omega,b}$ komütatör operatörünün Guliyev tipi sınırlılığını ve $T_{\Omega,b,\alpha}$ komütatör operatörünün ise Spanne-Guliyev tipi sınırlılığını sırasıyla ispatlayacağız.

$b, \mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, kaba çekirdekli potansiyel tipli operatör ve b tarafından üretilen komütatör aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} T_{\Omega,b,\alpha}(f)(x) &= [b, T_{\Omega,\alpha}]f(x) \\ &= b(x)T_{\Omega,\alpha}f(x) - T_{\Omega,\alpha}(bf)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [b(x) - b(y)] \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y) dy. \end{aligned}$$

Aşağıdaki teorem Guliyev (2012) tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.1 v_1, v_2 ve ω hemen her yerde pozitif ve $(0, \infty)$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar.

$$\operatorname{esssup}_{r>0} v_2(r) H_{\omega}^*g(r) \leq C \operatorname{esssup}_{r>0} v_1(r) g(r), \quad C > 0, \quad (4.1)$$

eşitsizliğinin $(0, \infty)$ üzerinde negatif olmayan ve azalmayan tüm g fonksiyonları için sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$B := \sup_{r>0} v_2(r) \int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\omega(t) dt}{\operatorname{esssup}_{t<s<\infty} v_1(s)} < \infty \quad (4.2)$$

olmasıdır.

Ayrıca, (4.1) de C^* , C nin en küçük değeri ise $C^* = B$ olmasıdır (Guliyev 2012).

Uyarı 4.1 (4.1) ve (4.2) de $\frac{1}{\infty} = 0$ ve $0 \cdot \infty = 0$ olduğu kabul edilecektir.

4.1 $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ Genelleştirilmiş Lokal Morrey Uzaylarında Kaba Çekirdekli $T_{\Omega,b}$ Komütatör Operatörünün Guliyev Tipi Sınırlılığı

Bu kesimde, $b \in CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere b ve T_Ω tarafından üretilen $T_{\Omega,b}$ komütatör operatörünün $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ iken $LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayından bir diğer $LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayına sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) çifti üzerindeki yeterlilik şartları belirlenmiştir.

Lemma 4.1 ($T_{\Omega,b}$ için lokal Guliyev eşitsizliği) Ω , sıfırıncı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s > 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. T_Ω , (1.4) koşulunu sağlayan ve $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ve $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olan bir lineer operatör olsun. Ayrıca $b \in CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ ve $0 \leq \lambda < \frac{1}{n}$ olsun. Bu durumda $s' \leq p$ için

$$\|T_{\Omega,b}f\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{n\lambda - \frac{n}{p_1} - 1} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} dt$$

eşitsizliği herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L_{p_1}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

Ayrıca, $p_1 < s$ için

$$\|T_{\Omega,b}f\|_{L_p(B(x_0,r))} \lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p} - \frac{n}{s}} \int_{2r}^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{n\lambda - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{s} - 1} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} dt$$

eşitsizliği herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L_{p_1}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0, r)$, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar ve $2B = B(x_0, 2r)$ olsun. f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y) \chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y) \chi_{(2B)^c}(y), \quad r > 0$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} T_{\Omega, b} f(x) &= (b(x) - b_B) T_{\Omega} f_1(x) - T_{\Omega}((b(\cdot) - b_B) f_1)(x) \\ &\quad + (b(x) - b_B) T_{\Omega} f_2(x) - T_{\Omega}((b(\cdot) - b_B) f_2)(x) \\ &\equiv J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\|T_{\Omega, b} f\|_{L_p(B)} \leq \|J_1\|_{L_p(B)} + \|J_2\|_{L_p(B)} + \|J_3\|_{L_p(B)} + \|J_4\|_{L_p(B)}$$

olduğu görülür.

Genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve T_{Ω} nın $L_{p_1}(\mathbb{R}^n)$ üzerindeki sınırlılığından

$$\begin{aligned} \|J_1\|_{L_p(B)} &\leq \|(b(\cdot) - b_B) T_{\Omega} f_1(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|(b(\cdot) - b_B)\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} \|T_{\Omega} f_1(\cdot)\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p_2} + n\lambda} \|f_1\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_1} + n\lambda} \|f\|_{L_{p_1}(2B)} \int_{2r}^{\infty} t^{-1 - \frac{n}{p_1}} dt \\ &\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p} + n\lambda} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} t^{-1 - \frac{n}{p_1}} dt \end{aligned}$$

elde edilir.

J_2 için T_{Ω} nın $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerindeki sınırlılığını kullanarak, genelleştirilmiş Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \|J_2\|_{L_p(B)} &\leq \|T_{\Omega} (b(\cdot) - b_B) f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|(b(\cdot) - b_B) f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|b(\cdot) - b_B\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} \|f_1\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_1} + n\lambda} \|f\|_{L_{p_1}(2B)} \int_{2r}^{\infty} t^{-1 - \frac{n}{p_1}} dt \\ &\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p} + n\lambda} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} t^{-1 - \frac{n}{p_1}} dt \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

J_3 için $x \in B$, $y \in (2B)^C$ olması $\frac{1}{2}|x_0 - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|x_0 - y|$ olmasını gerektirir.

$s' \leq p_1$ olduğu zaman, Fubini teoremi, genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve (3.6)' dan

$$\begin{aligned}
|T_\Omega f_2(x)| &\leq c_0 \int_{(2B)^C} |\Omega(x-y)| \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} dy \\
&\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r < |x_0-y| < t} |\Omega(x-y)| |f(y)| dy t^{-1-n} dt \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |\Omega(x-y)| |f(y)| dy t^{-1-n} dt \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} \|\Omega(x-\cdot)\|_{L_s(B(x_0,t))} |B(x_0,t)|^{1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{s}} t^{-1-n} dt \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p_1}} dt.
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece,

$$\begin{aligned}
\|J_3\|_{L_p(B)} &= \|(b(\cdot) - b_B) T_\Omega f_2(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|b(\cdot) - b_B\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p_1}} dt \\
&\leq \|b(\cdot) - b_B\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} r^{\frac{n}{p_1}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p_1}} dt \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p}+n\lambda} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p_1}} dt \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{n\lambda-\frac{n}{p_1}-1} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} dt
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$p_1 < s$ olduğu zaman Fubini teoremi, genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği, genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve (3.9)' dan

$$\begin{aligned}
\|J_3\|_{L_p(B)} &\leq \left(\int_B \left| \int_{2r B(x_0, t)}^\infty \int |f(y)| |b(x) - b_B| |\Omega(x - y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_{2r B(x_0, t)}^\infty \int |f(y)| \| (b(\cdot) - b_B) \Omega(\cdot - y) \|_{L_p(B)} dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\leq \int_{2r B(x_0, t)}^\infty \int |f(y)| \| b(\cdot) - b_B \|_{L_{p_2}(B)} \| \Omega(\cdot - y) \|_{L_{p_1}(B)} dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p_2} + n\lambda} |B|^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{s}} \int_{2r B(x_0, t)}^\infty \int |f(y)| \| \Omega(\cdot - y) \|_{L_s(B)} dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p} - \frac{n}{s} + n\lambda} \int_{2r}^\infty \|f\|_{L_1(B(x_0, t))} \left| B\left(x_0, \frac{3}{2}t\right) \right|^{\frac{1}{s}} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p} - \frac{n}{s} + n\lambda} \int_{2r}^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p_1} - \frac{n}{s} + 1}} \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p} - \frac{n}{s}} \int_{2r}^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{n\lambda - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{s} - 1} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} dt
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Diğer taraftan J_4 için, $s' \leq p$ olduğu zaman, $x \in B$ olmak üzere Fubini teoremi, genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve (3.6)' dan

$$\begin{aligned}
|T_\Omega((b(\cdot) - b_B) f_2)(x)| &\lesssim \int_{(2B)^C} |b(y) - b_B| |\Omega(x - y)| \frac{|f(y)|}{|x - y|^n} dy \\
&\lesssim \int_{(2B)^C} |b(y) - b_B| |\Omega(x - y)| \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \\
&\approx \int_{2r}^\infty \int_{2r < |x_0 - y| < t} |b(y) - b_B| |\Omega(x - y)| |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim \int_{2r B(x_0, t)}^\infty \int |b(y) - b_{B(x_0, t)}| |\Omega(x - y)| |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&+ \int_{2r}^\infty |b_{B(x_0, r)} - b_{B(x_0, t)}| \int_{B(x_0, t)} |\Omega(x - y)| |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \left\| (b(\cdot) - b_{B(x_0,t)}) f \right\|_{L_p(B(x_0,t))} \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_s(B(x_0,t))} |B(x_0,t)|^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{s}} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&+ \int_{2r}^{\infty} |b_{B(x_0,r)} - b_{B(x_0,t)}| \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_s(B(x_0,t))} |B(x_0,t)|^{1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{s}} t^{-n-1} dt \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \left\| (b(\cdot) - b_{B(x_0,t)}) \right\|_{L_{p_2}(B(x_0,t))} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p_1}} dt \\
&+ \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p_1}+n\lambda} dt \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{p_1}+n\lambda} dt
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece,

$$\begin{aligned}
\|J_4\|_{L_p(B)} &\leq \|T_{\Omega}(b(\cdot) - b_B) f_2\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-1-\frac{n}{p_1}+n\lambda} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} dt
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$p_1 < s$ olduğu zaman Fubini teoremi, genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği, genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve (3.9)' dan

$$\begin{aligned}
\|J_4\|_{L_p(B)} &\lesssim \left(\int_B \left| \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |b(y) - b_{B(x_0,t)}| |f(y)| |\Omega(x-y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_B \left| \int_{2r}^{\infty} |b_{B(x_0,r)} - b_{B(x_0,t)}| \int_{B(x_0,t)} |f(y)| |\Omega(x-y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |b(y) - b_{B(x_0,t)}| |f(y)| \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_p(B(x_0,t))} dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&+ \int_{2r}^{\infty} |b_{B(x_0,r)} - b_{B(x_0,t)}| \int_{B(x_0,t)} |f(y)| \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_p(B(x_0,t))} dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim |B|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |b(y) - b_{B(x_0,t)}| |f(y)| \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_s(B(x_0,t))} dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&+ |B|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{s}} \int_{2r}^{\infty} |b_{B(x_0,r)} - b_{B(x_0,t)}| \int_{B(x_0,t)} |f(y)| \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_s(B(x_0,t))} dy \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&\lesssim r^{\frac{n}{p}-\frac{n}{s}} \int_{2r}^{\infty} \left\| (b(\cdot) - b_{B(x_0,t)}) \right\|_{L_{p_2}(B(x_0,t))} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} |B(x_0,t)|^{1-\frac{1}{p}} \left| B\left(x_0, \frac{3}{2}t\right) \right|^{\frac{1}{s}} \frac{dt}{t^{n+1}} \\
&+ r^{\frac{n}{p}-\frac{n}{s}} \int_{2r}^{\infty} |b_{B(x_0,r)} - b_{B(x_0,t)}| \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} \left| B\left(x_0, \frac{3}{2}t\right) \right|^{\frac{1}{s}} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p_1}+1}} \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p}-\frac{n}{s}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{n\lambda-\frac{n}{p_1}+\frac{n}{s}-1} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} dt
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi yukarıdaki tahminleri birleştirerek Lemma 4.1' in ispatını tamamlarız. ■

Aşağıdaki teoremden, $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında $b \in CBMO_{p,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ iken $T_{\Omega,b}$ operatörünün Guliyev tipi sınırlılığını elde edeceğiz.

Teorem 4.2 ($T_{\Omega,b}$ için Guliyev tipi sınırlılık) Ω , sıfırıncı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s > 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $1 < p < \infty$ olsun. T_{Ω} , (1.4) koşulunu sağlayan ve $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olan bir lineer operatör olsun. $b \in CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ ve $0 \leq \lambda < \frac{1}{n}$ olsun.

Ayrıca, $s' \leq p$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x_0, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p_1}+1-n\lambda}} dt \leq C \varphi_2(x_0, r) \quad (4.3)$$

koşulunu ve $p_1 < s$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x_0, \tau) \tau^{\frac{n}{p_1}}}{t^{\frac{n}{p_1}-\frac{n}{s}+1-n\lambda}} dt \leq C \varphi_2(x_0, r) r^{\frac{n}{s}} \quad (4.4)$$

koşulunu sağlasın, burada C , r ye bağlı değildir. Bu durumda $T_{\Omega,b}$ operatörü $LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır. Yani

$$\|T_{\Omega,b}f\|_{LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}} \lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \|f\|_{LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$ ve $s' \leq p$ olsun. $v_2(r) = \varphi_2(x_0, r)^{-1}$, $v_1(r) = \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p_1}}$, $g(r) = \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, r))}$ ve $\omega(r) = r^{n\lambda - \frac{n}{p_1} - 1}$ seçilmesiyle, Lemma 4.1 ve Teorem 4.1' den

$$\begin{aligned} \|T_{\Omega,b}f\|_{LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}} &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(x_0, r)^{-1} \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \\ &\quad \times \int_{2r}^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{n\lambda - \frac{n}{p_1} - 1} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} dt \\ &\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \sup_{r>0} \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p_1}} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, r))} \\ &= \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \|f\|_{LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca burada (4.2) koşulu (4.3) koşuluna da denktir.

$1 < p < \infty$ ve $p_1 < s$ olsun. $v_2(r) = \varphi_2(x_0, r)^{-1}$, $v_1(r) = \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p_1} + \frac{n}{s}}$, $g(r) = \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, r))}$ ve $\omega(r) = r^{n\lambda - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{s} - 1}$ seçilmesiyle, Lemma 4.1 ve Teorem 4.1' den

$$\begin{aligned} \|T_{\Omega, b}f\|_{LM_{p, \varphi_2}^{\{x_0\}}} &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{s}} \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} \\ &\quad \times \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{n\lambda - \frac{n}{p_1} + \frac{n}{s} - 1} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} dt \\ &\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} \sup_{r>0} \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p_1}} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, r))} \\ &= \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} \|f\|_{LM_{p_1, \varphi_1}^{\{x_0\}}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca burada (4.2) koşulu (4.4) koşuluna da denktir. ■

Sonuç 4.1 Ω , sıfırcı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s > 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$ olsun. $b \in CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ ve $0 \leq \lambda < \frac{1}{n}$ olsun. Ayrıca, $s' \leq p$ için (φ_1, φ_2) çifti (4.3) şartını ve $p_1 < s$ için (φ_1, φ_2) çifti (4.4) şartını sağlasın. Bu durumda $\bar{T}_{\Omega, b}$ operatörü $LM_{p_1, \varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{p, \varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır.

Sonuç 4.2 Ω , sıfırcı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s > 1$, $1 < p < \infty$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. T_{Ω} , (1.4) koşulunu sağlayan ve $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olan bir lineer operatör olsun. Ayrıca, $s' \leq p$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p} + 1}} dt \leq C \varphi_2(x, r) \quad (4.5)$$

koşulunu ve $p < s$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p} - \frac{n}{s} + 1}} dt \leq C \varphi_2(x, r) r^{\frac{n}{s}} \quad (4.6)$$

koşulunu sağlasın, burada C , x ve r ye bağlı değildir. Bu durumda $T_{\Omega, b}$ operatörü M_{p, φ_1} den M_{p, φ_2} ye sınırlıdır. Yani

$$\|T_{\Omega, b}f\|_{M_{p, \varphi_2}} \lesssim \|b\|_{BMO} \|f\|_{M_{p, \varphi_1}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 4.3 Ω , sıfırcı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s > 1$, $1 < p < \infty$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca, $s' \leq p$ için (φ_1, φ_2) çifti (4.5) koşulunu ve $p < s$ için (φ_1, φ_2) çifti (4.6) koşulunu sağlasın. Bu durumda $\bar{T}_{\Omega,b}$ operatörü M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ye sınırlıdır.

Uyarı 4.2 $s = \infty$ olması durumunda Sonuç 4.3, Guliyev vd. (2011) tarafından ispat edilmiştir. Ayrıca yine $s = \infty$ olması durumunda Lemma 4.1 ve Teorem 4.2 Guliyev (2013b) tarafından ispat edilmiştir.

Aşağıdaki ifadelerde, genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında (1.5) koşulunu sağlayan $T_{\Omega,\alpha}$ lineer operatörün komütatörü ile ilgili sonuçları elde edeceğiz.

4.2 $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ Genelleştirilmiş Lokal Morrey Uzaylarında Kaba Çekirdekli $T_{\Omega,b,\alpha}$ Komütatör Operatörünün Spanne-Guliyev Tipi Sınırlılığı

Bu kesimde, $b \in CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $T_{\Omega,b,\alpha}$ komütatör operatörünün $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$ iken $LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayından bir diğer $LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayına sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) çifti üzerinde yeterlilik şartları elde edilmiştir.

Lemma 4.2 ($T_{\Omega,b,\alpha}$ için lokal Guliyev eşitsizliği) Ω , sıfırcı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $1 < s \leq \infty$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $T_{\Omega,\alpha}$, (1.5) koşulunu sağlayan ve $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olan bir lineer operatör olsun. Ayrıca $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $b \in CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \lambda < \frac{1}{n}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$ olsun.

Bu durumda $s' \leq p$ için

$$\|T_{\Omega,b,\alpha}f\|_{L_q(B(x_0,r))} \lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{n\lambda - \frac{n}{q_1} - 1} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} dt$$

eşitsizliği herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L_{p_1}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

Ayrıca, $q_1 < s$ için

$$\|T_{\Omega, b, \alpha} f\|_{L_q(B(x_0, r))} \lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{q} - \frac{n}{s}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{n\lambda - \frac{n}{q_1} + \frac{n}{s} - 1} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} dt$$

eşitsizliği herhangi bir $B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L_{p_1}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

İspat. $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $B = B(x_0, r)$, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvar ve $2B = B(x_0, 2r)$ olsun. f fonksiyonunu

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1(y) = f(y) \chi_{2B}(y), \quad f_2(y) = f(y) \chi_{(2B)^c}(y), \quad r > 0$$

biçiminde ifade edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} T_{\Omega, b, \alpha} f(x) &= (b(x) - b_B) T_{\Omega, \alpha} f_1(x) - T_{\Omega, \alpha} ((b(\cdot) - b_B) f_1)(x) \\ &\quad + (b(x) - b_B) T_{\Omega, \alpha} f_2(x) - T_{\Omega, \alpha} ((b(\cdot) - b_B) f_2)(x) \\ &\equiv J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\|T_{\Omega, b, \alpha} f\|_{L_q(B)} \leq \|J_1\|_{L_q(B)} + \|J_2\|_{L_q(B)} + \|J_3\|_{L_q(B)} + \|J_4\|_{L_q(B)}$$

olduğu görülür.

Genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve $T_{\Omega, \alpha}$ nın $L_{p_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{q_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığından

$$\begin{aligned} \|J_1\|_{L_q(B)} &\leq \|(b(\cdot) - b_B) T_{\Omega, \alpha} f_1(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|(b(\cdot) - b_B)\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} \|T_{\Omega} f_1(\cdot)\|_{L_{q_1}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p_2} + n\lambda} \|f_1\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p_2} + \frac{n}{q_1} + n\lambda} \|f\|_{L_{p_1}(2B)} \int_{2r}^{\infty} t^{-1 - \frac{n}{q_1}} dt \\ &\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{q} + n\lambda} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} t^{-1 - \frac{n}{q_1}} dt \end{aligned}$$

elde edilir.

J_2 için $T_{\Omega,\alpha}$ nın $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığını kullanarak ve genelleştirilmiş Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|J_2\|_{L_q(B)} &\leq \|T_{\Omega,\alpha}(b(\cdot) - b_B) f_1\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|(b(\cdot) - b_B) f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|b(\cdot) - b_B\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} \|f_1\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p_2} + \frac{n}{q_1} + n\lambda} \|f\|_{L_{p_1}(2B)} \int_{2r}^{\infty} t^{-1 - \frac{n}{q_1}} dt \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{q} + n\lambda} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} t^{-1 - \frac{n}{q_1}} dt
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

J_3 için $x \in B$, $y \in (2B)^C$ olması $\frac{1}{2}|x_0 - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|x_0 - y|$ olmasını gerektirir.

$s' \leq p_1$ olduğu zaman, Fubini teoremi, genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve (3.6)' dan

$$\begin{aligned}
|T_{\Omega,\alpha} f_2(x)| &\leq c_0 \int_{(2B)^C} |\Omega(x - y)| \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^{n-\alpha}} dy \\
&\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r < |x_0 - y| < t} |\Omega(x - y)| |f(y)| dy t^{-1-n+\alpha} dt \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |\Omega(x - y)| |f(y)| dy t^{-1-n+\alpha} dt \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} \|\Omega(x - \cdot)\|_{L_s(B(x_0,t))} |B(x_0,t)|^{1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{s}} t^{-1-n+\alpha} dt \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} t^{-1 - \frac{n}{q_1}} dt
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece,

$$\begin{aligned}
\|J_3\|_{L_q(B)} &= \|(b(\cdot) - b_B) T_{\Omega, \alpha} f_2(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \| (b(\cdot) - b_B) \|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} t^{-1-\frac{n}{q_1}} dt \\
&\leq \| (b(\cdot) - b_B) \|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^n)} r^{\frac{n}{q_1}} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} t^{-1-\frac{n}{q_1}} dt \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{q} + n\lambda} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} t^{-1-\frac{n}{q_1}} dt \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{n\lambda - \frac{n}{q_1} - 1} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} dt
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$q_1 < s$ olduğu zaman Fubini teoremi, genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği, genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve (3.9)' dan

$$\begin{aligned}
\|J_3\|_{L_q(B)} &\leq \left(\int_B \left| \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0, t)} |f(y)| |b(x) - b_B| |\Omega(x - y)| dy \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0, t)} |f(y)| \| (b(\cdot) - b_B) \Omega(\cdot - y) \|_{L_q(B)} dy \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
&\leq \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0, t)} |f(y)| \|b(\cdot) - b_B\|_{L_{p_2}(B)} \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_{q_1}(B)} dy \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{p_2} + n\lambda} |B|^{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{s}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0, t)} |f(y)| \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_s(B)} dy \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{q} - \frac{n}{s} + n\lambda} \int_{2r}^{\infty} \|f\|_{L_1(B(x_0, t))} \left| B\left(x_0, \frac{3}{2}t\right) \right|^{\frac{1}{s}} \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{q} - \frac{n}{s} + n\lambda} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} \frac{dt}{t^{\frac{n}{q_1} - \frac{n}{s} + 1}} \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{q} - \frac{n}{s}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{n\lambda - \frac{n}{q_1} + \frac{n}{s} - 1} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} dt
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Diğer taraftan J_4 için, $s' \leq p$ olduğu zaman, $x \in B$ olmak üzere Fubini teoremi, genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve (3.6)' dan

$$\begin{aligned}
|T_{\Omega,\alpha}((b(\cdot) - b_B) f_2)(x)| &\lesssim \int_{(2B)^C} |b(y) - b_B| |\Omega(x-y)| \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\
&\lesssim \int_{(2B)^C} |b(y) - b_B| |\Omega(x-y)| \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^{n-\alpha}} dy \\
&\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r < |x_0-y| < t} |b(y) - b_B| |\Omega(x-y)| |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |b(y) - b_{B(x_0,t)}| |\Omega(x-y)| |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
&+ \int_{2r}^{\infty} |b_{B(x_0,r)} - b_{B(x_0,t)}| \int_{B(x_0,t)} |\Omega(x-y)| |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|(b(\cdot) - b_{B(x_0,t)}) f\|_{L_p(B(x_0,t))} \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_s(B(x_0,t))} |B(x_0,t)|^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{s}} \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
&+ \int_{2r}^{\infty} |b_{B(x_0,r)} - b_{B(x_0,t)}| \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_s(B(x_0,t))} |B(x_0,t)|^{1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{s}} t^{\alpha-n-1} dt \\
&\lesssim \int_{2r}^{\infty} \|(b(\cdot) - b_{B(x_0,t)})\|_{L_{p_2}(B(x_0,t))} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{q}} dt \\
&+ \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \int_{2r}^{\infty} (1 + \ln \frac{t}{r}) \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{q_1}+n\lambda} dt \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \int_{2r}^{\infty} (1 + \ln \frac{t}{r}) \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} t^{-1-\frac{n}{q_1}+n\lambda} dt
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece,

$$\begin{aligned}
\|J_4\|_{L_q(B)} &= \|T_{\Omega,\alpha}(b(\cdot) - b_B) f_2\|_{L_q(B)} \\
&\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{q}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{-1-\frac{n}{q_1}+n\lambda} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0,t))} dt
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$q < s$ olduğu zaman Fubini teoremi, genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği, genelleştirilmiş Hölder eşitsizliği ve (3.9)' dan

$$\|J_4\|_{L_q(B)} \lesssim \left(\int_B \left| \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |b(y) - b_{B(x_0,t)}| |f(y)| |\Omega(x-y)| dy \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\int_B \left| \int_{2r}^{\infty} |b_{B(x_0, r)} - b_{B(x_0, t)}| \int_{B(x_0, t)} |f(y)| |\Omega(x-y)| dy \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0, t)} |b(y) - b_{B(x_0, t)}| |f(y)| \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_q(B(x_0, t))} dy \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
& + \int_{2r}^{\infty} |b_{B(x_0, r)} - b_{B(x_0, t)}| \int_{B(x_0, t)} |f(y)| \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_q(B(x_0, t))} dy \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
& \lesssim |B|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0, t)} |b(y) - b_{B(x_0, t)}| |f(y)| \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_s(B(x_0, t))} dy \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
& + |B|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{s}} \int_{2r}^{\infty} |b_{B(x_0, r)} - b_{B(x_0, t)}| \int_{B(x_0, t)} |f(y)| \|\Omega(\cdot - y)\|_{L_s(B(x_0, t))} dy \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
& \lesssim r^{\frac{n}{q} - \frac{n}{s}} \int_{2r}^{\infty} \left\| (b(\cdot) - b_{B(x_0, t)}) \right\|_{L_{p_2}(B(x_0, t))} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} |B(x_0, t)|^{1-\frac{1}{p}} \left| B\left(x_0, \frac{3}{2}t\right) \right|^{\frac{1}{s}} \frac{dt}{t^{n-\alpha+1}} \\
& + r^{\frac{n}{q} - \frac{n}{s}} \int_{2r}^{\infty} |b_{B(x_0, r)} - b_{B(x_0, t)}| \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} \left| B\left(x_0, \frac{3}{2}t\right) \right|^{\frac{1}{s}} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p_1} - \alpha + 1}} \\
& \lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}} r^{\frac{n}{q} - \frac{n}{s}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{n\lambda - \frac{n}{q_1} + \frac{n}{s} - 1} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} dt
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi yukarıdaki tahminleri birleştirerek, Lemma 4.2' nin ispatını tamamlarız. ■

Aşağıdaki teoremden, $LM_{p, \varphi}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında

$b \in CBMO_{p, \lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ iken $T_{\Omega, b, \alpha}$ operatörünün Spanne-Guliyev tipi sınırlılığını elde edeceğiz.

Teorem 4.3 ($T_{\Omega, b, \alpha}$ için Spanne-Guliyev tipi sınırlılık) Ω , sıfırıncı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $1 < s \leq \infty$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. $T_{\Omega, \alpha}$, (1.5) koşulunu sağlayan ve $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olan bir lineer operatör olsun $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $b \in CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \lambda < \frac{1}{n}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$ olsun.

Ayrıca, $s' \leq p$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x_0, \tau) \tau^{\frac{n}{p_1}}}{t^{\frac{n}{q_1} + 1 - n\lambda}} dt \leq C \varphi_2(x_0, r) \quad (4.7)$$

koşulunu ve $q_1 < s$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x_0, \tau) \tau^{\frac{n}{p_1}}}{t^{\frac{n}{q_1} - \frac{n}{s} + 1 - n\lambda}} dt \leq C \varphi_2(x_0, r) r^{\frac{n}{s}} \quad (4.8)$$

koşulunu sağlasın, burada C , r ye bağlı değildir. Bu durumda $T_{\Omega,b,\alpha}$ operatörü $LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır. Yani

$$\|T_{\Omega,b,\alpha}f\|_{LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}} \lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \|f\|_{LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $p > 1$ ve $s' \leq p$ olsun. $v_2(r) = \varphi_2(x_0, r)^{-1}$, $v_1(r) = \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p_1}}$, $g(r) = \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, r))}$ ve $\omega(r) = r^{n\lambda - \frac{n}{q_1} - 1}$ seçilmesiyle, Lemma 4.2 ve Teorem 4.1' den

$$\begin{aligned} \|T_{\Omega,b,\alpha}f\|_{LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}} &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(x_0, r)^{-1} \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \\ &\quad \times \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{n\lambda - \frac{n}{q_1} - 1} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} dt \\ &\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \sup_{r>0} \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p_1}} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, r))} \\ &= \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \|f\|_{LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca burada (4.2) koşulu (4.7) koşuluna da denktir.

$p > 1$ ve $q_1 < s$ olsun. $v_2(r) = \varphi_2(x_0, r)^{-1}$, $v_1(r) = \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p_1} + \frac{n}{s}}$, $g(r) = \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, r))}$ ve $\omega(r) = r^{n\lambda - \frac{n}{q_1} + \frac{n}{s} - 1}$ seçilmesiyle, Lemma 4.2 ve Teorem 4.1' den

$$\begin{aligned} \|T_{\Omega,b,\alpha}f\|_{LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}} &\lesssim \sup_{r>0} \varphi_2(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{s}} \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \\ &\quad \times \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) t^{n\lambda - \frac{n}{q_1} + \frac{n}{s} - 1} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, t))} dt \\ &\lesssim \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \sup_{r>0} \varphi_1(x_0, r)^{-1} r^{-\frac{n}{p_1}} \|f\|_{L_{p_1}(B(x_0, r))} \\ &= \|b\|_{CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}} \|f\|_{LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca burada (4.2) koşulu (4.8) koşuluna da denktir. ■

Sonuç 4.4 Ω , sıfırıncı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $1 < s \leq \infty$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $b \in CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \lambda < \frac{1}{n}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. Ayrıca, $s' \leq p$ için (φ_1, φ_2) çifti (4.7) şartını ve $q_1 < s$ için (φ_1, φ_2) çifti (4.8) şartını sağlasın. Bu durumda $I_{\Omega,b,\alpha}$ operatörü $LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır.

Sonuç 4.5 Ω , sıfırıncı dereceden homojen, $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $1 < s \leq \infty$ ve $T_{\Omega, \alpha}$, (1.5) koşulunu sağlayan ve $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı olan bir lineer operatör olsun. $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca, $s' \leq p$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q}+1}} dt \leq C \varphi_2(x, r) \quad (4.9)$$

koşulunu ve $q < s$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t < \tau < \infty} \varphi_1(x, \tau) \tau^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{q} - \frac{n}{s} + 1}} dt \leq C \varphi_2(x, r) r^{\frac{n}{s}} \quad (4.10)$$

koşulunu sağlasın, burada C , x ve r ye bağlı değildir. Bu durumda $T_{\Omega, b, \alpha}$ operatörü M_{p, φ_1} den M_{q, φ_2} ye sınırlıdır. Yani

$$\|T_{\Omega, b, \alpha} f\|_{M_{q, \varphi_2}} \lesssim \|b\|_{BMO} \|f\|_{M_{p, \varphi_1}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 4.6 Ω , sıfırıncı dereceden homojen ve $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $1 < s \leq \infty$ olsun. $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $0 \leq \lambda < \frac{1}{n}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca, $s' \leq p$ için (φ_1, φ_2) çifti (4.9) koşulunu ve $q < s$ için (φ_1, φ_2) çifti (4.10) koşulunu sağlasın. Bu durumda $I_{\Omega, b, \alpha}$ operatörü M_{p, φ_1} den M_{q, φ_2} ye sınırlıdır.

Uyarı 4.3 $s = \infty$ olması durumunda Sonuç 4.6, Guliyev vd. (2011) tarafından ispat edilmiştir. Ayrıca yine $s = \infty$ olması durumunda Lemma 4.2 ve Teorem 4.3 Guliyev (2013a) tarafından ispat edilmiştir.

5. BAZI UYGULAMALAR

Bu bölümde Teorem 3.2, Teorem 3.3, Teorem 4.2 ve Teorem 4.3' ü Marcinkiewicz operatörüne ve bazı analitik yarı grupların kesirli kuvvetlerine uygulayacağız.

5.1 Marcinkiewicz İntegral Operatörü

Marcinkiewicz integral operatörü ilk olarak Marcinkiewicz (1938) tarafından

$$\mu(f)(x) = \left(\int_0^{2\pi} \frac{|F(x+t) + F(x-t) - 2F(x)|^2}{t^3} dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

biçiminde tanımlanmıştır, burada $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ biçiminde tanımlıdır.

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $\mathbb{R}^n$ de $d\sigma$ Lebesgue ölçüsü ile donatılmış birim küre olmak üzere Ω 'nın aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim:

- (a) Ω , $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ üzerinde sıfıncı dereceden homojen bir fonksiyondur.
- (b) Ω , S^{n-1} üzerinde sıfır ortalama değerine sahip, yani

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x') d\sigma(x') = 0, \quad x' = \frac{x}{|x|}$$

sağlanır.

- (c) $\Omega \in Lip_\gamma(S^{n-1})$, $0 < \gamma \leq 1$, yani herhangi bir x' ve $y' \in S^{n-1}$ için

$$|\Omega(x') - \Omega(y')| \leq C|x' - y'|^\gamma$$

olacak şekilde $C > 0$ vardır.

- (d) $\Omega \in L_1(S^{n-1})$ dir.

1958 yılında Stein, Marcinkiewicz integralini n -boyutlu Öklid uzayında

$$\mu_\Omega(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_{\Omega,t}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2}$$

olarak tanımlamıştır, burada

$$F_{\Omega,t}(f)(x) = \int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f(y) dy$$

biçimindedir.

Stein (1958), Zygmund (1944)' un elde ettiği sonuçların benzerini n -boyutlu Öklid uzayına aşağıdaki teoremle genişletmiştir.

Teorem 5.1 $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$ ve Ω yukarıda verilen (a) – (d) koşullarını sağlasın. Bu durumda

- (i) $\mu_\Omega(f)$ hemen her yerde sonludur.
- (ii) Eğer $1 < p \leq 2$ ise $\|\mu_\Omega(f)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq A_p \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$ sağlanır.
- (iii) Eğer $p = 1$ ise her $\lambda > 0$ için $\lambda |\{x \in \mathbb{R}^n : \mu_\Omega(f)(x) > \lambda\}| \leq C \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$ sağlanır (Stein 1958).

μ_Ω Marcinkiewicz integral operatörünün sınırlılığı konusu yoğun bir şekilde çalışılmaktadır (bakınız: Lu vd. (2006), Stein (1970, 1993), Torchinsky ve Wang (1990)).

Torchinsky ve Wang (1990) $\mu_{\Omega,\alpha}$ Marcinkiewicz integral operatörünü

$$\mu_{\Omega,\alpha}(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_{\Omega,\alpha,t}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımladılar, burada

$$F_{\Omega,\alpha,t}(f)(x) = \int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1-\alpha}} f(y) dy$$

biçimindedir.

μ_Ω Marcinkiewicz integral operatörünün komütatörü

$$\mu_{\Omega,b}(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_{\Omega,t,b}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2}$$

ile tanımlanır, burada

$$F_{\Omega,t,b}(f)(x) = \int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} [b(x) - b(y)] f(y) dy$$

biçimindedir.

Benzer şekilde, $\mu_{\Omega,\alpha}$ Marcinkiewicz integral operatörünün komütatörü

$$\mu_{\Omega,\alpha,b}(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_{\Omega,\alpha,t,b}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2}$$

ile tanımlanır, burada

$$F_{\Omega,\alpha,t,b}(f)(x) = \int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1-\alpha}} [b(x) - b(y)] f(y) dy$$

biçimindedir.

H uzayını $H = \{f : \|f\| = (\int_0^\infty |f(t)|^2 dt/t^3)^{1/2} < \infty\}$ ile tanımlayalım, bu durumda $\mu_\Omega(f)(x) = \|F_{\Omega,t}(f)(x)\|$ olduğu açıktır. Genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliğinden,

$$\mu_\Omega(f)(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}} |f(y)| \left(\int_{|x-y|}^\infty \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^n} |f(y)| dy$$

elde edilir. Böylece, μ_Ω (1.4) koşulunu sağlar.

Benzer şekilde genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliğinden,

$$\mu_{\Omega,\alpha}(f)(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1-\alpha}} |f(y)| \left(\int_{|x-y|}^\infty \frac{dt}{t^3} \right)^{1/2} dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} |f(y)| dy$$

elde edilir. Böylece, $\mu_{\Omega,\alpha}$ (1.5) koşulunu sağlar.

Torchinsky ve Wang (1990), μ_Ω nın $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $WL_1(\mathbb{R}^n)$ e sınırlı olduğunu, $\mu_{\Omega,\alpha}$ nın ise $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_q(\mathbb{R}^n)$ e ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $WL_q(\mathbb{R}^n)$ e sınırlı olduğunu göstermişlerdir. Bu durumda Teorem 3.2, Teorem 3.3, Teorem 4.2 ve Teorem 4.3' den aşağıdaki yeni sonuçları elde ederiz.

Sonuç 5.1 $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s > 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $s' \leq p$, $p \neq 1$, için (φ_1, φ_2) çifti (3.11) şartını ve $1 < p < s$ için (φ_1, φ_2) çifti (3.12) şartını sağlasın. Ayrıca, Ω yukarıda verilen (a) – (c) koşullarını sağlasın. Bu durumda μ_Ω operatörü $p > 1$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye ve $p = 1$ için $LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $WLM_{1,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır.

Sonuç 5.2 $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $1 < s \leq \infty$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. $s' \leq p$ için (φ_1, φ_2) çifti (3.18) şartını ve $q < s$ için (φ_1, φ_2) çifti (3.19) şartını sağlasın. Ayrıca, Ω yukarıda verilen (a) – (c) koşullarını sağlasın. Bu durumda $\mu_{\Omega,\alpha}$ operatörü $p > 1$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye ve $p = 1$ için $LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $WLM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır.

Sonuç 5.3 $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $s > 1$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$ olsun. $b \in CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ ve $0 \leq \lambda < \frac{1}{n}$ olsun. $s' \leq p$ için (φ_1, φ_2) çifti (4.3) şartını ve $p_1 < s$ için (φ_1, φ_2) çifti (4.4) şartını sağlasın. Ayrıca, Ω yukarıda verilen (a) – (c) koşullarını sağlasın. Bu durumda $\mu_{\Omega,b}$ operatörü $LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır.

Sonuç 5.4 $\Omega \in L_s(S^{n-1})$, $1 < s \leq \infty$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ olsun. $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $b \in CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \lambda < \frac{1}{n}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. $s' \leq p$ için (φ_1, φ_2) çifti (4.7) şartını ve $q_1 < s$ için (φ_1, φ_2) çifti (4.8) şartını sağlasın. Ayrıca, Ω yukarıda verilen (a) – (c) koşullarını sağlasın. Bu durumda $\mu_{\Omega,\alpha,b}$ operatörü $LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır.

5.2 Bazı Analitik Yarı Grupların Kesirli Kuvvetleri

Bu kesimde, önceki bölümlerde adı geçen teoremleri (Teorem 3.3 ve Teorem 4.3) Riesz potansiyeli tarafından üstten sınırlanan çeşitli operatörlere uygulayacağız.

$L, L_2(\mathbb{R}^n)$ üzerinde $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve her $t > 0$ için

$$|p_t(x, y)| \leq \frac{c_1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-c_2 \frac{|x-y|^2}{t}} \quad (5.1)$$

Gaussian üst sınır koşulunu sağlayan $p_t(x, y)$ çekirdekli bir e^{-tL} analitik yarı grubu tarafından üretilen bir lineer operatör olsun, burada c_1 ve c_2 ; x, y, t den bağımsız pozitif sabitlerdir.

$0 < \alpha < n$ için, L operatörünün $L^{-\frac{\alpha}{2}}$ kesirli kuvvetleri

$$L^{-\frac{\alpha}{2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-tL} f(x) \frac{dt}{t^{\frac{\alpha}{2}+1}}$$

ile tanımlanır.

Belirtmeliyiz ki, $\mathbb{R}^n$ üzerinde $L = -\Delta$ Laplace operatörü ise bu durumda $L^{-\frac{\alpha}{2}}$, pek çok alanda önemli roller oynayan I_α Riesz potansiyelidir.

Sonuç 5.5 (5.1) koşulu sağlansın. Ayrıca $1 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve (φ_1, φ_2) çifti (3.18) koşulunu sağlasın. Bu durumda $L^{-\frac{\alpha}{2}}$, $p > 1$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye ve $p = 1$ için $LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $WLM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır.

İspat. e^{-tL} yarı grubu, (5.1) koşulunu sağlayan $p_t(x, y)$ çekirdeğine sahip olduğu için

$$|L^{-\frac{\alpha}{2}} f(x)| \lesssim I_\alpha(|f|)(x)$$

eşitsizliği sağlanır (bakınız: Duong ve Yan 2004). Böylece Teorem 3.3' den

$$\|L^{-\frac{\alpha}{2}} f\|_{LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}} \lesssim \|I_\alpha(|f|)\|_{LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}} \lesssim \|f\|_{LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}}.$$

elde ederiz. ■

$b \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, b ve $L^{-\frac{\alpha}{2}}$ tarafından üretilen komütatör

$$[b, L^{-\frac{\alpha}{2}}]f(x) = b(x) L^{-\frac{\alpha}{2}} f(x) - L^{-\frac{\alpha}{2}} (bf)(x)$$

ile tanımlanır.

Chanillo (1982), $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $0 < \alpha < n$ olduğunda $[b, I_\alpha]f = bI_\alpha f - I_\alpha(bf)$ komütatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_q(\mathbb{R}^n)$ e sınırlı olması için gerek ve yeter şartın $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olduğunu göstermiştir. Daha sonra Duong ve Yan (2004), Chanillo (1982)' nin sonucunu genişleterek $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ iken $[b, L^{-\frac{\alpha}{2}}]$ komütatör operatörünün $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $0 < \alpha < n$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ den $L_q(\mathbb{R}^n)$ e sınırlı olduğunu göstermişlerdir. Bu durumda Teorem 4.3' den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.6 (5.1) koşulu sağlansın. Ayrıca $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $b \in CBMO_{p_2, \lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \lambda < \frac{1}{n}$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$ ve (φ_1, φ_2) çifti (4.7) şartını sağlasın. Bu durumda $[b, L^{-\frac{\alpha}{2}}]$ operatörü $LM_{p_1, \varphi_1}^{\{x_0\}}$ den $LM_{q, \varphi_2}^{\{x_0\}}$ ye sınırlıdır.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Harmonik analizde, klasik operatörlerin çeşitli fonksiyon uzaylarındaki eşitsizliklerinin çalışmaları çok önemli bir yer tutmaktadır. $M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Klasik Morrey uzayları, ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal davranışlarını araştırma çalışmalarında Morrey (1938) tarafından ortaya konulmuştur. Morrey uzayları Lebesgue uzaylarının bir uzantısı olarak değerlendirileceğinden klasik operatörlerin sınırlılıklarının Morrey uzaylarında araştırılması oldukça doğal ve önemlidir. Morrey uzaylarında kesirli integral operatörünün (Riesz Potansiyeli) sınırlılığı Adams (1975) tarafından çalışılmıştır. Chiarenza ve Frasca (1987) Hardy-Littlewood maksimal operatörü, kesirli integral operatörü ve singüler integral operatörlerinin Morrey uzaylarında sınırlılığını göstermiştir. Bu sonuçlar daha sonra çeşitli uzaylara genişletilmiştir. $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Mizuhara (1991), Nakai (1994) ve Guliyev (1994) gibi araştırmacılar Riesz potansiyeli, maksimal ve singüler integral operatörlerinin sınırlılığını elde etmişlerdir.

Lineer ve altlineer operatörler ve bunların komütatörlerinin sınırlılığı kısmi türevli denklemler teorisinde süreksiz katsayılı eliptik ve parabolik denklemlerin çözümlerinin ön (apriori) eşitsizliklerinin elde edilmesinde önemli bir yer tutmaktadır (örneğin bakınız: Guliyev ve Softova 2013, 2015). Calderón-Zygmund operatörlerinin komütatörleri ikinci mertebeden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin düzgünlüğü çalışmalarında önemli bir rol oynamaktadır. Bu tezin temel amacı genelleştirilmiş Morrey uzaylarını da kapsayan genelleştirilmiş lokal Morrey uzaylarında kaba çekirdekli konvolüsyon tipli altlineer operatörlerin sınırlılığını incelemek ve kaba çekirdekli konvolüsyon tipli lineer operatörlerin komütatörleri için $CBMO$ tahminlerini verebilmektir. Tezde, Guliyev tarafından verilen ispat yöntemi kullanılarak, genelleştirilmiş $LM_{p,\varphi}^{\{x_0\}}$ lokal Morrey uzaylarında kaba çekirdekli belirli altlineer operatörlerinin ve bunların komütatörlerinin sınırlılığı hakkında yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bütün durumlarda T_Ω , $T_{\Omega,\alpha}$, $T_{\Omega,b}$ ve $T_{\Omega,b,\alpha}$ operatörlerinin sınırlılık koşullarında φ_1 ve φ_2 fonksiyonlarının monotonluğu ile ilgili herhangi bir kabul yapılmayıp sadece (φ_1, φ_2) nin Zygmund tipli bir integral eşitsizliğini sağladığı

kabul edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar özet olarak şöyledir:

1. Guliyev (2013b) tarafından elde edilen sonuçların genelleştirilmesi olarak, kaba çekirdekli Calderón-Zygmund singüler integral operatörü tarafından üretilen ve (1.4) koşulunu sağlayan T_Ω kaba çekirdekli altlineer operatörünün $p > 1$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayından bir diğer $LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayına ve $p = 1$ için $LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ uzayından $WLM_{1,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ zayıf uzayına sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) fonksiyon çifti üzerinde yeterlik şartları bulunmuştur.
2. Guliyev (2013a) tarafından elde edilen sonuçların genelleştirilmesi olarak, kaba çekirdekli kesirli integral operatörleri tarafından üretilen ve (1.5) koşulunu sağlayan $T_{\Omega,\alpha}$ potansiyel tipli kaba çekirdekli altlineer operatörünün $0 < \alpha < n$, $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ için $LM_{p,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayından bir diğer $LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayına ve $1 < q < \infty$, $1 - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ için $LM_{1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ uzayından $WLM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ zayıf uzayına sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) fonksiyon çifti üzerinde yeterlik şartları elde edilmiştir.
3. Guliyev (2013b) tarafından elde edilen sonuçların genelleştirilmesi olarak, $b \in CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere b ve T_Ω tarafından üretilen $T_{\Omega,b}$ komütatör operatörünün $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ iken $LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayından bir diğer $LM_{p,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayına sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) çifti üzerindeki yeterlilik şartları belirlenmiştir.
4. Guliyev (2013a) tarafından elde edilen sonuçların genelleştirilmesi olarak, $b \in CBMO_{p_2,\lambda}^{\{x_0\}}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $T_{\Omega,b,\alpha}$ komütatör operatörünün $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$ iken $LM_{p_1,\varphi_1}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayından bir diğer $LM_{q,\varphi_2}^{\{x_0\}}$ genelleştirilmiş lokal Morrey uzayına sınırlılığının sağlanması için (φ_1, φ_2) çifti üzerinde yeterlilik şartları elde edilmiştir.
5. Elde edilen sonuçların bir uygulaması olarak Marcinkiewicz operatörünün ve bazı analitik yarı grupların kesirli kuvvetlerinin sınırlılığı verilmiştir.

- Adams, D.R. 1975. A note on Riesz potentials. *Duke Math. J.*, **42**(4); pp. 765-778.
- Akbulut, A., Guliyev, V.S. and Mustafayev, R. 2012. On Boundedness of the maximal operator and singular integral operator in generalized Morrey spaces, *Mathematica Bohemica*, **137**(1), 27-43.
- Álvarez, J., Guzmán-Partida, M. and Lakey, J. 2000. Spaces of bounded λ -central mean oscillation, Morrey spaces, and λ -central Carleson measures, *Collect. Math.*, **51**, 1-47.
- Balakishiyev, A.S., Guliyev, V.S., Gurbuz, F. and Serbetci, A. 2015. Sublinear operators with rough kernel generated by Calderon-Zygmund operators and their commutators on generalized local Morrey spaces, *Journal of Inequalities and Applications*, 2015:61. doi:10.1186/s13660-015-0582-y.
- Burenkov, V.I. and Guliyev, V.S. 2009. Necessary and sufficient conditions for the boundedness of the Riesz potential in local Morrey-type spaces. *Potential Anal.*, **30**(3); pp. 211-249.
- Carro, M., Pick, L., Soria, J. and Stepanov, V.D. 2001. On embeddings between classical Lorentz spaces, *Math. Inequal. Appl.* **4** (3) 397-428.
- Chanillo, S. 1982. "A note on commutators," *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 31, no. 1, pp. 7-16.
- Chanillo, S., Watson, D. K. and Wheeden, R. L. 1993. Some integral and maximal operators related to starlike sets. *Studia Math.*, **107** , 223-255.
- Cheung, W.S. 2001. Generalizations of Hölder's inequality. *IJMMS.*, **26**(1); pp. 7-10.
- Chiarenza, F. and Frasca, M. 1987. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function, *Rend. Mat.*, **7**, 273-279.
- Coifman, R.R., Rochberg, R. and Weiss, G. 1976. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. *Ann. of Math.*, **103**(3); pp. 611-635.
- Ding, Y., Yang, D. and Zhou, Z. 1998. Boundedness of sublinear operators and commutators on $L^{p,\omega}(R^n)$, *Yokohama Math. J.*, **46**, 15-27.
- Duong, X.T. and Yan, L.X. 2004. On commutators of fractional integrals, *Proc. Amer. Math. Soc.* **132** (12), 3549-3557.
- Fan, Y. 2013. Boundedness of sublinear operators and their commutators on generalized central Morrey spaces. *Journal of inequalities and Applications* **2013**:411.
- Fefferman, C. and Stein, E.M. 1971. Some maximal inequalities. *Amer. J. Math.*, **93**; pp. 107-115.
- Fu, Z.W., Lin, Y. and Lu, S.Z. 2008. λ -Central *BMO* estimates for commutators of singular integral operators with rough kernel. *Acta Math. Sin.* **24**, 373-386.

- Grafakos, L. 2004. Classical and modern Fourier analysis. Dearson Education. Inc. Upper Saddle River, 931 p., New Jersey.
- Guliyev, V.S. 1994. Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in $\mathbb{R}^n$. Doctor's degree dissertation, Mat. Inst. Steklov, Moscow, 329 pp. (in Russian).
- Guliyev, V.S. 1996. Integral Operators, Function Spaces and Questions of Approximation on the Heisenberg Group (Russian). Elm, Baku (in Russian).
- Guliyev, V.S. 1999. Function spaces, Integral Operators and Two Weighted Inequalities on Homogeneous Groups. Some Applications, Cashioglu, Baku, 332 pp. (in Russian).
- Guliyev, V.S. 2009. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces, J. Inequal. Appl., Art. ID 503948, 20 pp.
- Guliyev, V.S., Aliyev, S.S., Karaman, T. and Shukurov, P. S. 2011. Boundedness of sublinear operators and commutators on generalized Morrey Space, Int. Eq. Op. Theory., **71** (3), pp. 327-355.
- Guliyev, V.S. 2012. Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators. Eurasian Math. J. **3**, 33-61.
- Guliyev, V.S. 2013a. Generalized local Morrey spaces and fractional integral operators with rough kernel, J. Math. Sci. (N.Y.) **193** (2), 211-227.
- Guliyev, V.S. 2013b. Local generalized Morrey spaces and singular integrals with rough kernel. Azerb. J. Math., **3** (2), 79-94.
- Guliyev, V.S. and Softova, L.G. 2013. Global regularity in generalized Morrey spaces of solutions to nondivergence elliptic equations with VMO coefficients. Potential Anal. **38** (3), 843-862.
- Guliyev, V.S. and Softova, L.G. 2015. Generalized Morrey regularity for parabolic equations with discontinuous data. Proc. Edinb. Math. Soc. **58** (1), 199-218.
- Janson, S. 1978. Mean oscillation and commutators of singular integral operators. Ark. Mat., **16**(2); pp. 263-270.
- John, F. and Nirenberg, L. 1961. On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure Appl. Math., **14**; pp. 415-426.
- Karaman, T. 2012. Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Bir Sınıf Altlineer Operatörlerin Sınırlılığı ve Bazı Uygulamaları. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Lu, S.Z. and Yang, D.C. 1995. The central BMO spaces and Littlewood-Paley operators, Approx. Theory Appl. (N.S.), **11**, 72-94.
- Lu, G., Lu, S.Z. and Yang, D. 2002. Singular integrals and commutators on homogeneous groups, Analysis Mathematica, **28**, 103-134.

- Lu, S.Z., Ding, Y. and Yan, D. 2006. Singular integrals and related topics, World Scientific Publishing, Singapore.
- Lu, S.Z. and Wu, Q. 2004. CBMO estimates for commutators and multilinear singular integrals, *Math. Nachr.*, **276**, 75-88.
- Mizuhara, T. 1991. *Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces*, Harmonic Analysis (S. Igari, Editor), ICM 90 Satellite Proceedings, Springer - Verlag, Tokyo, 183-189.
- Morrey, C.B. 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **43**, 126-166.
- Muckenhoupt, B. 1960. On certain singular integrals. *Pacific J. Math.* **10**, 239-261.
- Muckenhoupt, B. and Wheeden, R. 1971. Weighted norm inequalities for singular and fractional integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.* **161**, 249-258.
- Nakai, E. 1994. Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces, *Math. Nachr.* **166**, 95-103.
- Neri, U. 1971. Singular integrals. *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 272 p., New York.
- Mustafayev, R.C. 2012. On boundedness of sublinear operators in weighted Morrey spaces. *Azerb. J. Math.*, **2**, 66-79.
- Marcinkiewicz, J. 1938. Sur quelques integrales de type de Dini. *Annales de la Société Polonaise*, **17**; pp. 42-50.
- Peetre, J. 1969. On the theory of $M_{p,\lambda}$, *J. Funct. Anal.* **4**, 71-87.
- Sadosky, C. 1979. *Interpolation of operators and singular integrals*. Marcel Dekker Inc., 375 p., New York.
- Soria, F. and Weiss, G. 1994. A remark on singular integrals and power weights, *Indiana Univ. Math. J.*, **43**, 187-204.
- Stein, E.M. 1958. On the functions of Littlewood-Paley, Lusin, and Marcinkiewicz, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **88**, 430-466.
- Stein, E.M. 1970. *Singular integrals and differentiability of functions*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Stein, E.M. 1993. *Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton NJ.
- Torchinsky, A. 1986. *Real Variable Methods in Harmonic Analysis*, Pure and Applied Math., **123**, Academic Press, New York.
- Torchinsky, A. and Wang, S. 1990. A note on the Marcinkiewicz integral, *Colloq. Math.*, **60/61**, 235-243.

- Tao, X.X. and Shi, Y.L. 2011. Multilinear commutators of Calderón-Zygmund operator on λ -central Morrey spaces. *Adv. Math.*, **40**, 47-59
- Wiener, N. 1930. Generalized Harmonic Analysis, *Acta Math.*, **55**, 117-258.
- Zygmund, A. 1944. On certain integrals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55**; pp. 170-204.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ferit GÜRBÜZ

Doğum Yeri : Ayvalık

Doğum Tarihi : 02/04/1984

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Ankara Başkent Anadolu Lisesi (1998-2002)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü (2004-2008)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (2009-2011)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Özel sektör

Yayınları:

- **Balakishiyev, A.S., Guliyev, V.S., Gurbuz, F. and Serbetci, A. 2015.** Sublinear operators with rough kernel generated by Calderon-Zygmund operators and their commutators on generalized local Morrey spaces, Journal of Inequalities and Applications, 2015:61 (SCI-Expanded).
- **Balakishiyev, A.S., Gurbuz, F. and Serbetci, A. 2015.** Sublinear operators with rough kernel generated by fractional integrals and their commutators on generalized local Morrey spaces (yayına gönderildi).