

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Süleyman AKSOY

KISITLANMIŞ DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAYLARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2016

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KISITLANMIŞ DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAYLARI

Süleyman AKSOY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../.... tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Hayrullah AYIK
DANIŞMAN

.....
Prof. Dr. Gonca AYIK
ÜYE

.....
Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISITLANMIŞ DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ DOĞURAYLARI

Süleyman AKSOY

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
Yıl: 2016, Sayfa: 87

Jüri : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN

X boş olmayan bir küme olmak üzere X üzerindeki tüm kısmi dönüşümlerin kümesini PT_X ve tüm (tam) dönüşümlerin kümesini T_X ile gösterelim. O zaman, PT_X ve T_X kümeleri dönüşümlerin bileşke işlemi ile birer yarıgrup olup bu yarıgruplara sırasıyla, *kısmi dönüşümler yarı grubu* ve *(tam) dönüşümler yarı grubu* denir. Y , X in boş olmayan bir alt kümesi ve bir $\alpha \in PT_X$ için $X\alpha = \text{im}(\alpha) = \{x\alpha : x \in X\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \{\alpha \in T_X : X\alpha \subseteq Y\}, \\ PT(X, Y) &= \{\alpha \in PT_X : X\alpha \subseteq Y\} \text{ ve} \\ F(X, Y) &= \{\alpha \in T(X, Y) : X\alpha \subseteq Y\alpha\} \end{aligned}$$

kümeleri de dönüşümlerin bileşke işlemi ile birer yarıgruptur.

Bu çalışmada, yakın zamanda $T(X, Y)$, $PT(X, Y)$ ve $F(X, Y)$ alt yarıgruplarını inceleyen bazı çalışmalar derlenerek, özellikle bu alt yarıgrupların doğuray kümeleri hakkında elde edilen bazı sonuçlar sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Dönüşüm yarıgrupları, doğuray kümesi, rank

ABSTRACT

MSc. THESIS

GENERATORS of TRANSFORMATION SEMIGROUPS with RESTRICTED RANGE

Süleyman AKSOY

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof. Dr. Hayrullah AYIK

Year: 2016, Pages: 87

Jury : Prof. Dr. Hayrullah AYIK

: Prof. Dr. Gonca AYIK

: Asst. Prof. Dr. Basri ÇALIŞKAN

Onto a non-empty set X , denote the set of all partial transformations by PT_X and the set of all (full) transformations by T_X . Then, PT_X and T_X are semigroups with function composition and these semigroups are called *partial transformations semigroup* and *(full) transformations semigroup*, respectively. Let Y be a non-empty subset of X and $X\alpha = \text{im}(\alpha) = \{x\alpha : x \in X\}$ for any $\alpha \in P_X$. Then, the sets

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \{\alpha \in T_X : X\alpha \subseteq Y\}, \\ PT(X, Y) &= \{\alpha \in PT_X : X\alpha \subseteq Y\} \text{ ve} \\ F(X, Y) &= \{\alpha \in T(X, Y) : X\alpha \subseteq Y\alpha\} \end{aligned}$$

are also semigroups with function composition.

In this paper, the studies which study the subsemigroups $T(X, Y)$, $PT(X, Y)$ and $F(X, Y)$ were compiled, and especially some results about the generator sets of these subsemigroups were informed.

Key Words: Transformation semigroups, generator set, rank

TEŞEKKÜR

Çalıőmamın her aőamasında yardımlarını esirgemeyen, yapıcı ve yönlendirici fikirleri ile bana daima yol gösteren değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Hayrullah AYIK'a sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, yüksek lisans tez jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Gonca AYIK ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Basri ÇALIŞKAN'a destek ve teőviklerinden dolayı teşekkür ederim.

Son olarak, tezin yazım aőamasındaki katkılarından dolayı Arő. Gör. Leyla BUGAY'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER	3
2.1. Yarıgruplar	3
2.2. Homomorfizmler	7
2.3. Bağlıntılar, Denklik Bağlıntıları ve Kongrüanslar	8
2.4. Green Denklik Bağlıntıları	14
2.5. Regülerlik ve Tersinir Elemanlar	18
2.6. Doğuray Kümeleri	20
2.7. Bazı Dönüşüm Yarıgrupları	25
2.8. Tersinir Yarıgruplar	32
3. $T(X, Y)$ ALT YARIGRUBU	35
3.1. $T(X, Y)$ nin Regülerliği	35
3.2. $T(X, Y)$ Üzerinde Green Denklik Bağlıntıları	38
3.3. $T(X, Y)$ nin Maksimal Tersinir Alt Yarıgrupları	43
4. $PT(X, Y)$ ALT YARIGRUBU	49
4.1. $PT(X, Y)$ nin Regülerliği	49
4.2. $PT(X, Y)$ Üzerinde Green Denklik Bağlıntıları	50
4.3. $PT(X, Y)$ için İzomorfizm Teoremi	54
4.4. $T_{n,r}$ ve $PT_{n,r}$ nin Rankı	55
5. $F(X, Y)$ ALT YARIGRUBU	61
5.1. $F(X, Y)$ nin Bazı İzomorfizm Özellikleri	61
5.2. $F(X, Y)$ Üzerinde Green Denklik Bağlıntıları ve İdealler	64
5.3. $F(X, Y)$ nin Maksimal Regüler Alt Yarıgrupları	67
5.4. $F_{n,r}$ nin Rankı	77
KAYNAKLAR	85

ÖZGEÇMİŞ	87
----------------	----

1. GİRİŞ

1950 li yılların sonunda cebirin başlı başına bir alt dalı haline gelen yarıgrup teorisi günümüzde de popüler bir çalışma alanıdır. Her sonlu yarıgrup sonlu bir dönüşüm yarıgrubuna gömülebileceğinden dönüşüm yarıgrupları ve bu yarıgrupların doğuray kümeleri yarıgrup teorisinde önemli bir yere sahiptir. Daha önce birçok dönüşüm yarıgrubunun doğuray kümeleri üzerine çalışılmış, rankları ve idempotent rankları bulunmuştur.

X boş olmayan bir küme olmak üzere X üzerindeki tüm kısmi dönüşümlerin kümesini PT_X ve tüm (tam) dönüşümlerin kümesini T_X ile gösterelim. PT_X ve T_X kümeleri dönüşümlerin bileşke işlemi ile birer yarıgrup olup bu yarıgruplara sırasıyla, *kısmi dönüşümler yarıgrubu* ve *(tam) dönüşümler yarıgrubu* denir. Y , X in boş olmayan bir alt kümesi ve bir $\alpha \in PT_X$ için $X\alpha = \text{im}(\alpha) = \{x\alpha : x \in X\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \{\alpha \in T_X : X\alpha \subseteq Y\}, \\ PT(X, Y) &= \{\alpha \in PT_X : X\alpha \subseteq Y\} \text{ ve} \\ F(X, Y) &= \{\alpha \in T(X, Y) : X\alpha \subseteq Y\alpha\} \end{aligned}$$

kümeleri de dönüşümlerin bileşke işlemi ile birer yarıgruptur.

Bu çalışmada, yakın zamanda $T(X, Y)$, $PT(X, Y)$ ve $F(X, Y)$ alt yarıgruplarını inceleyen bazı çalışmalar derlenerek, özellikle bu alt yarıgrupların doğuray kümeleri hakkında elde edilen bazı sonuçlar sunulmuştur.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, tez boyunca gerekli olacak bazı ön bilgiler verilecektir.

2.1. Yarıgruplar

Tanım 2.1.1. S boş olmayan bir küme olmak üzere $S \times S$ den S ye tanımlı herhangi bir fonksiyona S üzerinde bir *ikili işlem* denir. \circ , S üzerinde bir ikili işlem olmak üzere (S, \circ) ikilisine de bir *grupoid* denir.

Tanım 2.1.2. \circ , S üzerinde bir ikili işlem olmak üzere eğer \circ işlemi birleşme özelliğini sağlıyorsa, diğer bir ifade ile, $\forall x, y, z \in S$ için

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

oluyorsa (S, \circ) ikilisine bir *yarıgrup* denir.

(S, \circ) bir yarıgrup ise $(x \circ y) \circ z$ veya $x \circ (y \circ z)$ yerine sadece xyz yazılabilir. Ayrıca, $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in S$ için

$$\overbrace{xx \cdots x}^{n \text{ tane}} = x^n$$

yazılır.

Tanım 2.1.3. S bir yarıgrup olsun. $\forall x, y \in S$ için $xy = yx$ oluyorsa S ye bir *değişmeli yarıgrup* denir.

Tanım 2.1.4. S bir yarıgrup olmak üzere $\forall x \in S$ için $zx = z$ olacak şekilde bir $z \in S$ varsa z ye S nin bir *sol sıfır elemanı* denir. Benzer şekilde, S nin bir *sağ sıfır elemanı* da tanımlanabilir. Eğer bir $z \in S$ hem sol hem de sağ sıfır eleman ise z ye S nin bir *sıfır elemanı* denir.

Önerme 2.1.5. S bir yarıgrup olmak üzere S nin sıfır elemanı varsa bu eleman tektir.

İspat: z ve z' , S yarı grubunun iki sıfır elemanı olsun. z bir sıfır eleman olduğundan $zz' = z$ ve benzer şekilde, z' bir sıfır eleman olduğundan $zz' = z'$ olup buradan $z = z'$ olduğu elde edilir. ■

Bu teklitten dolayı, S yarı grubunun bir sıfır elemanı varsa bu eleman 0 ile gösterilir.

Tanım 2.1.6. S bir yarıgrup olsun.

- i) Eğer $\forall x, y \in S$ için $xy = x$ oluyorsa bu yarı gruba *sol sıfır yarı grubu* denir.
- ii) Eğer $\forall x, y \in S$ için $xy = y$ oluyorsa bu yarı gruba *sağ sıfır yarı grubu* denir.
- iii) Eğer $\forall x, y \in S$ için $xy = z$ olacak şekilde bir $z \in S$ varsa bu yarı gruba *sıfır yarı grubu* denir.

Tanım 2.1.7. S bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall x, y \in S$ için $xyx = x$ oluyorsa bu yarı gruba *dikdörtgensel band* denir.

Tanım 2.1.8. S bir yarıgrup olmak üzere $\forall x \in S$ için $ex = x$ olacak şekilde bir $e \in S$ varsa e ye S nin bir *sol birim elemanı* denir. Benzer şekilde, S nin *sağ birim elemanı* da tanımlanabilir. Eğer bir $e \in S$, hem sol hem de sağ birim eleman ise e ye S nin bir *birim elemanı* denir.

Önerme 2.1.9. S bir yarıgrup olmak üzere S nin birim elemanı varsa bu eleman tektir.

İspat: e ve e' , S nin iki birim elemanı olsun. e bir birim eleman olduğundan $ee' = e'$ ve benzer şekilde, e' bir birim eleman olduğundan $ee' = e$ olup buradan $e = e'$ olduğu elde edilir. ■

Bu teklikten dolayı, S yarıgrubunun bir birim elemanı varsa bu eleman 1 veya 1_S ile gösterilir.

Tanım 2.1.10. Birim elemanı olan bir yarıgruba *monoid* denir. Ayrıca, S bir yarıgrup olmak üzere

$$S^1 = \begin{cases} S, & 1 \in S \text{ ise} \\ S \cup \{1\}, & 1 \notin S \text{ ise} \end{cases}$$

kümesi $\forall x, y \in S^1$ için

$$xy = \begin{cases} xy, & x \neq 1, y \neq 1 \text{ ise} \\ x, & y = 1 \text{ ise} \\ y, & x = 1 \text{ ise} \\ 1, & x = y = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile bir monoid olur. Bu monoide *gerekli ise S ye birim eleman eklenerek elde edilen monoid* denir.

Tanım 2.1.11. S bir monoid olmak üzere $\forall x \in S$ için $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ olacak şekilde bir $x^{-1} \in S$ varsa S ye bir *grup* denir.

Tanım 2.1.12. S bir yarıgrup ve T , S nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall a, b \in T$ için $ab \in T$ ise T ye S nin bir *alt yarıgrubu* denir ve $T \leq S$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13. S bir yarıgrup ve $T \leq S$ olsun. $T \leq K \leq S$ iken ya $K = T$ ya da $K = S$ olmak zorunda ise T ye S nin bir *maksimal alt yarıgrubu* denir.

Tanım 2.1.14. S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq I \subseteq S$ olsun. Eğer $\forall a \in I$ ve $\forall s \in S$ için $sa \in I$ oluyorsa I ya S nin bir *sol ideali* denir. Benzer şekilde *sağ ideal* tanımlanabilir. Eğer I , S nin hem sol hem de sağ ideali ise I ya S nin bir *ideali* denir ve $T \triangleleft S$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.15. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olmak üzere eğer $e^2 = e$ oluyorsa e ye S nin bir *idempotent elemanı* denir. S yarıgrupunun tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.16. S bir yarıgrup olsun.

i) S , sıfır elemanı olmayan bir yarıgrup ise ve S nin kendisi dışında başka bir ideali yoksa S ye bir *basit yarıgrup* denir.

ii) S , sıfır elemanlı ve en az iki elemanı olan bir yarıgrup olmak üzere $S^2 = \{st: s, t \in S\} \neq \{0\}$ ve S nin $\{0\}$ ve kendisi dışında başka bir ideali yoksa S ye bir *0-basit yarıgrup* denir.

Önerme 2.1.17. Sıfır elemanlı bir S yarıgrupunun 0-basit olması için gerek ve yeter koşul $\forall a \in S - \{0\}$ için $SaS = S$ olmasıdır.

İspat: Howie (1995), Proposition 3.1.1'e bakınız. ■

Bu önermeden şu önemli sonuca varırız: Bir S yarıgrupunun 0-basit olması için gerek ve yeter koşul $\forall a, b \in S - \{0\}$ için $xay = b$ olacak şekilde $x, y \in S$ elemanlarının var olmasıdır.

Tanım 2.1.18. Tüm elemanları idempotent olan bir yarıgruba *band* denir. Ayrıca, değişmeli bir banda da *yarılatis* denir.

Tanım 2.1.19. S , sıfır elemanlı bir yarıgrup olsun. Eğer bir $s \in S$ için $s^m = 0$ ve $s^{m-1} \neq 0$ olacak şekilde bir m tamsayısı varsa s elemanına bir *nilpotent eleman* ve m tamsayısına da s nin *indeksi* denir.

2.2. Homomorfizmler

Tanım 2.2.1. S ve T iki yarıgrup olmak üzere

$$\forall a, b \in S \text{ için } (ab)\varphi = (a)\varphi(b)\varphi$$

olacak şekilde bir $\varphi: S \rightarrow T$ fonksiyonu varsa bu fonksiyona S den T ye bir *homomorfizm* denir.

Ayrıca, bire-bir bir homomorfizme *monomorfizm*, örten bir homomorfizme *epimorfizm*, hem bire-bir hem de örten bir homomorfizme *izomorfizm*, S den S ye bir homomorfizme *endomorfizm* ve S den S ye bir izomorfizme de *otomorfizm* denir.

S ve T gibi iki yarıgrup arasında bir izomorfizm varsa S ile T *izomorfiktir* (*izomorftur*) denir ve bu durum $S \cong T$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.2. S ve T iki yarıgrup ve $\varphi: S \rightarrow T$ bir homomorfizm olmak üzere

$$\text{im}(\varphi) = S\varphi = \{x\varphi : x \in S\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye φ nin *görüntü kümesi* ya da S nin φ altındaki *görüntüsü* denir. $\text{im}(\varphi)$, T nin bir alt yarıgrupudur. Ayrıca, φ bir monomorfizm ise S ile $\text{im}(\varphi)$ izomorfiktir.

Tanım 2.2.3. S ve T iki yarıgrup ve $\varphi: S \rightarrow T$ bir homomorfizm olmak üzere

$$\text{Ker}(\varphi) = \{(x, y) : x\varphi = y\varphi ; x, y \in S\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye φ nin *çekirdek kümesi* denir. Diğer bir ifade ile; $\text{Ker}(\varphi)$ kümesi, φ altında görüntüsü eşit olan S yarı grubunun elemanlarıyla oluşturulan tüm ikililerin kümesidir.

2.3. Bağlılıklar, Denklik Bağlılıkları ve Kongrüanslar

Tanım 2.3.1. X ve Y boş olmayan iki küme olmak üzere

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

kümesine X ile Y nin *kartezyen çarpımı* denir. Ayrıca, $X \times Y$ nin her bir alt kümesine de X ten Y ye bir *bağlılık* denir. Özel olarak, X ten X e bir bağlılığa X üzerinde bir *bağlılık* denir ve X kümesi üzerindeki tüm bağlılıkların kümesi $B(X)$ ile gösterilir.

\emptyset ve $\Delta_X = 1_X = \{(x, x) : x \in X\}$ kümesi de X üzerinde birer bağlılıktır. Bu bağlılıklara sırasıyla *boş bağlılık* ve *birim bağlılık* denir.

Tanım 2.3.2. $\forall \alpha, \beta \in B(X)$ için

$$\alpha\beta = \{(x, y) : \exists z \in X \text{ için } (x, z) \in \alpha \text{ ve } (z, y) \in \beta\}$$

şeklinde tanımlanan işleme *bağlılıkların bileşke işlemi* denir. $B(X)$ bu işlem ile bir yarıgrupdur. Bu yarıgruba X üzerindeki *bağlılıklar yarı grubu* denir. Δ_X , bu işleme göre $B(X)$ in birim elemanı olup $B(X)$ aynı zamanda bir monoiddir.

Tanım 2.3.3. α , X üzerinde bir bağlılık olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{Dom}(\alpha) &= \{x : \exists y \in X \text{ için } (x, y) \in \alpha\} \\ \text{im}(\alpha) = X\alpha &= \{y : \exists x \in X \text{ için } (x, y) \in \alpha\} \\ x\alpha &= \{y : (x, y) \in \alpha\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\text{Dom}(\alpha)$, $\text{im}(\alpha)$ ve $x\alpha$ kümelerine sırasıyla α nın *tanım kümesi*, α nın *görüntü kümesi* ve x elemanının α altındaki *görüntü kümesi* denir. Ayrıca,

$$\alpha^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \alpha\}$$

şeklinde tanımlanan α^{-1} bağıntısına da α nın *tersi* denir. Dikkat edilirse

- i) $\forall \alpha, \beta, \theta \in B(X)$ için $\alpha \subseteq \beta$ ise $\text{Dom}(\alpha) \subseteq \text{Dom}(\beta)$, $\text{im}(\alpha) \subseteq \text{im}(\beta)$,
 $\alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1}$ ve $\alpha\theta \subseteq \beta\theta$,
- ii) $\forall \alpha \in B(X)$ için $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$,
- iii) $\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in B(X)$ için, $(\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n)^{-1} = \alpha_n^{-1} \cdots \alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}$

olduğu kolayca görülür.

Tanım 2.3.4. $\alpha \in B(X)$ olmak üzere $\forall x \in X$ için $|x\alpha| \leq 1$ ise α ya X üzerinde bir *kısmi dönüşüm* denir. Eğer $\forall x \in X$ için $|x\alpha| = 1$ ise α ya X üzerinde bir (*tam*) *dönüşüm* denir. $\alpha \in B(X)$ bir kısmi dönüşüm ve $(x, y) \in \alpha$ ise $x\alpha = \{y\}$ yerine $x\alpha = y$ yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \text{Dom}(\alpha) &= \{x : \exists y \in X \text{ için } x\alpha = y\} \\ \text{im}(\alpha) = X\alpha &= \{y : \exists x \in X \text{ için } x\alpha = y\} \end{aligned}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Ayrıca, $|\text{im}(\alpha)| = |X\alpha|$ sayısına α dönüşümünün *rankı* denir ve $\text{rank}(\alpha)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.5. $\alpha \in B(X)$ olsun.

- i) $\Delta_X \subseteq \alpha$ ise α ya *yansıyan* bağıntı denir.
- ii) $\alpha^{-1} = \alpha$ ise α ya *simetrik* bağıntı denir.
- iii) $\alpha^2 \subseteq \alpha$ ise α ya *geçişmeli* bağıntı denir.
- iv) $\alpha\alpha^{-1} \subseteq \Delta_X$ ise α ya *ters simetrik* bağıntı denir.

Bu özelliklerden ilk üçünü sağlayan bir bağıntıya da X üzerinde bir *denklik bağıntısı* denir.

Tanım 2.3.6. α , X üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere $x \in X$ için

$$x\alpha = \{y : (x, y) \in \alpha\}$$

kümesine x in denklik sınıfı denir. Ayrıca, α nın tüm denklik sınıflarından oluşan

$$X/\alpha = \{x\alpha : x \in X\}$$

kümesine de X in α ile oluşturulan *bölüm kümesi* denir.

Önerme 2.3.7. α , X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x\alpha, y\alpha \in X/\alpha$ olmak üzere ya $x\alpha \cap y\alpha = \emptyset$ ya da $x\alpha = y\alpha$ şeklindedir.

İspat: Karakaş (2008), Ders 1, Teorem 1'e bakınız. ■

Tanım 2.3.8. α , X üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere $\forall x \in X$ için $x \mapsto x\alpha$ şeklinde tanımlanan $\alpha^*: X \rightarrow X/\alpha$ dönüşümü örten bir dönüşüm olup bu dönüşüme X üzerindeki *doğal dönüşüm* denir.

Tanım 2.3.9. X ve Y boş olmayan iki küme ve $\varphi: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olmak üzere

$$\text{Ker}(\varphi) = \varphi\varphi^{-1} = \{(x, y) : x\varphi = y\varphi ; x, y \in X\}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı X üzerinde bir denklik bağıntısı olup bu bağıntıya φ nin *çekirdeği* denir.

Tanım 2.3.10. X boş olmayan bir küme ve R , X üzerinde bir bağıntı olsun. R yi içeren tüm denklik bağıntılarının kesişimi de bir denklik bağıntısı olup bu denklik bağıntısına R tarafından *doğurulan denklik bağıntısı* denir ve R^e ile gösterilir. Diğer bir ifade ile, herhangi bir R bağıntısını içeren en küçük denklik bağıntısına R tarafından *doğurulan denklik bağıntısı* denir. Ayrıca,

- i) $R = \emptyset$ ise $R^e = \Delta_X$,
- ii) R bir denklik bağıntısı ise $R^e = R$ ve
- iii) $R^e = (R^{-1})^e$

olur.

Tanım 2.3.11. X boş olmayan bir küme ve R , X üzerinde bir yansıyan bağıntı olsun. $\Delta_X \subseteq R$ olduğundan

$$R = \Delta_X R \subseteq R^2$$

$$R^2 = \Delta_X R^2 \subseteq R^3$$

olur. Buradan benzer şekilde devam edilirse

$$R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \dots$$

olduğu elde edilir. Bu bilgiden hareketle, X üzerinde R^∞ bağıntısı

$$R^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} R^n$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 2.3.12. X boş olmayan bir küme ve R , X üzerinde bir yansıyan bağıntı olmak üzere R^∞ , X üzerinde R yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır.

İspat: Howie (1995), Lemma 1.4.8'e bakınız. ■

Önerme 2.3.13. X boş olmayan bir küme ve R , X üzerinde herhangi bir bağıntı ise

$$R^e = (R \cup R^{-1} \cup \Delta_X)^\infty$$

olur.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.4.9'a bakınız. ■

Tanım 2.3.14. S bir yarıgrup ve R, S üzerinde bir bağıntı olsun. $\forall s \in S$ ve $(x, y) \in R$ için eğer $(sx, sy) \in R$ oluyorsa R ye *sol uyumlu bağıntı*, eğer $(xs, ys) \in R$ oluyorsa R ye *sağ uyumlu bağıntı* denir. Hem sağ uyumlu hem de sol uyumlu bir bağıntıya da *uyumlu bağıntı* denir. Diğer bir ifade ile $\forall (x, y), (x', y') \in R$ için $(xx', yy') \in R$ oluyorsa R uyumlu bir bağıntı olur.

Tanım 2.3.15. Sol uyumlu bir denklik bağıntısına *sol kongrüans*, sağ uyumlu bir denklik bağıntısına *sağ kongrüans* ve hem sol uyumlu hem de sağ uyumlu bir denklik bağıntısına da *kongrüans* denir.

Tanım 2.3.16. S bir yarıgrup olmak üzere α , S üzerinde bir kongrüans ve S/α , S nin α ile elde edilen bölüm kümesi olsun. $\forall x\alpha, y\alpha \in S/\alpha$ için

$$(x\alpha)(y\alpha) = (xy)\alpha$$

şeklinde tanımlanan işlem altında S/α bir yarıgrup olur. Bu yarıgruba S nin α ile elde edilen *bölüm yarıgrubu* denir.

Önerme 2.3.17. S ve T iki yarıgrup ve $\varphi: S \rightarrow T$ bir homomorfizm olmak üzere

$$\text{Ker}(\varphi) = \{(x, y) : x\varphi = y\varphi ; x, y \in S\}$$

S üzerinde bir kongrüanstır.

İspat: Howie (1995), Theorem 1.5.2'ye bakınız. ■

Teorem 2.3.18. (1. İzomorfizm Teoremi) S ve T iki yarıgrup ve $\varphi: S \rightarrow T$ örten bir homomorfizm ise $S/\text{Ker}(\varphi) \cong T$ olur.

İspat: Howie (1995), Theorem 1.5.2'ye bakınız. ■

Tanım 2.3.19. S bir yarıgrup ve R , S üzerinde bir bağıntı olmak üzere

$$R^c = \{(xay, xby) : (a, b) \in R, x, y \in S^1\}$$

şeklinde tanımlanan R^c kümesi, S yarıgrubu üzerinde R yi içeren en küçük sol ve sağ uyumlu bağıntıdır. Ayrıca, Q da S üzerinde bir bağıntı olmak üzere

- i) $R \subseteq Q \Rightarrow R^c \subseteq Q^c$,
- ii) $(R^{-1})^c = (R^c)^{-1}$,
- iii) $(R \cup Q)^c = R^c \cup Q^c$ ve
- iv) R bir kongrüans ise $R^c = R$

şeklindedir.

Tanım 2.3.20. S bir yarıgrup ve R , S üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere S yarıgrubu üzerinde R yi içeren tüm kongrüansların kesişimi de bir kongrüans olup bu kongrüansa R tarafından doğurulan (üretilen) kongrüans denir ve $R^\#$ ile gösterilir. Bu tanımdan anlaşılacağı üzere $R^\#$, R yi içeren en küçük kongrüanstır.

Teorem 2.3.21. S bir yarıgrup ve R , S üzerinde bir bağıntı ise $R^\# = (R^c)^e$ dir.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.5.8'e bakınız. ■

2.4. Green Denklik Bağlılıları

Tanım 2.4.1. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S^1a &= \{sa : s \in S^1\}, \\ aS^1 &= \{as : s \in S^1\} \text{ ve} \\ S^1aS^1 &= \{sat : s, t \in S^1\} \end{aligned}$$

kümelerine sırasıyla S nin a tarafından doğurulan (üretilen) sol ideali, sağ ideali ve iki taraflı ideali denir. Bu kümeler aynı zamanda, sırasıyla, S nin a elemanını içeren en küçük sol ideali, sağ ideali ve iki taraflı idealidir.

Tanım 2.4.2. S bir yarıgrup olsun. S nin aynı sol idealini üreten elemanlarla oluşturulan tüm ikililerin oluşturduğu bağıntıya *sol-Green bağıntısı* (\mathcal{L} -Green), aynı sağ idealini üreten elemanlarla oluşturulan tüm ikililerin oluşturduğu bağıntıya *sağ-Green bağıntısı* (\mathcal{R} -Green) ve aynı iki taraflı idealini üreten elemanlarla oluşturulan tüm ikililerin oluşturduğu bağıntıya da *Green bağıntısı* (\mathcal{J} -Green) denir. Buna göre

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{(x, y) \in S \times S : S^1x = S^1y\}, \\ \mathcal{R} &= \{(x, y) \in S \times S : xS^1 = yS^1\} \text{ ve} \\ \mathcal{J} &= \{(x, y) \in S \times S : S^1xS^1 = S^1yS^1\} \end{aligned}$$

şeklinde olup bu bağıntıların her biri bir denklik bağıntısıdır.

Önerme 2.4.3. S bir yarıgrup ve $s, t \in S$ olsun.

- i) $sLt \Leftrightarrow s = xt$ ve $t = ys$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
- ii) $sRt \Leftrightarrow s = tx$ ve $t = sy$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
- iii) $sJt \Leftrightarrow s = xtx'$ ve $t = ysy'$ olacak şekilde $x, x', y, y' \in S^1$ vardır.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.1'e bakınız. ■

Önerme 2.4.4. Bir S yarıgrubu üzerindeki \mathcal{L} -Green ve \mathcal{R} -Green bağıntıları bileşke işlemine göre değişmeli, yani $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ şeklindedir.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.1.3'e bakınız. ■

Tanım 2.4.5. Herhangi bir S yarıgrubu üzerindeki \mathcal{L} -Green ve \mathcal{R} -Green bağıntıları ile S üzerinde tanımlanan $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ bağıntısına \mathcal{H} -Green bağıntısı denir.

Tanım 2.4.6. Herhangi bir S yarıgrubu üzerindeki \mathcal{L} -Green ve \mathcal{R} -Green bağıntılarını içeren S üzerindeki en küçük denklik bağıntısına \mathcal{D} -Green bağıntısı denir. Buradan

$$\mathcal{D} = (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^e$$

olduğu kolayca görülür.

Önerme 2.4.7. Herhangi bir S yarıgrubu üzerindeki \mathcal{L} , \mathcal{R} ve \mathcal{D} -Green bağıntıları için $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ olur.

İspat: Howie (1995), Corollary 1.5.12 ve Proposition 2.1.3'den kolayca görülür. ■

Tanım 2.4.8. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. a nın S üzerinde tanımlı \mathcal{H} , \mathcal{L} , \mathcal{R} , \mathcal{D} ve \mathcal{J} -Green bağıntıları altındaki denklik sınıfları, sırasıyla H_a , L_a , R_a , D_a ve J_a ile gösterilir. Ayrıca, S yarıgrubunun bu denklik bağıntıları ile oluşturulan bölüm kümeleri, sırasıyla S/\mathcal{H} , S/\mathcal{L} , S/\mathcal{R} , S/\mathcal{D} , S/\mathcal{J} şeklinde gösterilir.

S yarıgrubu üzerindeki Green bağıntıları arasında

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$$

ilişkisi vardır. Ayrıca, \mathcal{D} -Green bağıntısının tanımından dolayı herhangi $a, b \in S$ elemanları için

$$L_a \cap R_a = H_a \subseteq L_a, R_a \subseteq L_a \cup R_a \subseteq D_a \text{ ve} \\ \alpha D b \Leftrightarrow L_a \cap R_b \neq \emptyset \Leftrightarrow L_b \cap R_a \neq \emptyset$$

olduğu da kolayca görülebilir.

Önerme 2.4.9. G bir grup olmak üzere G üzerindeki Green bağıntıları için $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{J} = G \times G$ olur.

İspat: $G^1 = G$ ve $\forall (a, b) \in G \times G$ için $G = Ga = Gb = aG = bG$ olduğundan

$$(a, b) \in \mathcal{L}, \mathcal{R} \Rightarrow G \times G \subseteq \mathcal{L}, \mathcal{R} \subseteq G \times G \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{R} = G \times G$$

olur. Ayrıca, $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = G \times G$ ve $G \times G = \mathcal{L} = \mathcal{R} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{J} \subseteq G \times G$ olduğundan $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{J} = G \times G$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 2.4.10. Bir S değişmeli yarıgrubu üzerindeki Green bağıntıları için $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{J}$ olur.

İspat: $\forall (a, b) \in \mathcal{J}$ için $S^1 a S^1 = S^1 b S^1$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca,

$$S^1 = 1S^1 \subseteq S^1 S^1 \subseteq S^1 \Rightarrow S^1 S^1 = S^1$$

ve S değişmeli olduğundan $aS^1 = S^1 a$ ve $bS^1 = S^1 b$ olup

$$S^1 a S^1 = S^1 b S^1 \Rightarrow S^1 S^1 a = S^1 S^1 b \Rightarrow S^1 a = S^1 b \Rightarrow a \mathcal{L} b \Rightarrow \mathcal{J} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$$

olduğu ve buradan da $\mathcal{L} = \mathcal{J}$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde $\mathcal{R} = \mathcal{J}$ olduğu da kolayca gösterilebilir. Buradan $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R} = \mathcal{L}$ ve $\mathcal{D} = (\mathcal{L} \cup \mathcal{R})^e = \mathcal{L}^e = \mathcal{L}$ olup $\mathcal{H} = \mathcal{L} = \mathcal{R} = \mathcal{D} = \mathcal{J}$ olduğu elde edilir. ■

Teorem 2.4.11. (Green Teoremi) S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

i) $a\mathcal{R}b$ ise $\exists s, s' \in S^1$ için $as = b$ ve $bs' = a$ olup

$$\begin{aligned}\rho_s : L_a &\mapsto L_b, \quad x \xrightarrow{\rho_s} xs \\ \rho_{s'} : L_b &\mapsto L_a, \quad y \xrightarrow{\rho_{s'}} ys'\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan ρ_s ve $\rho_{s'}$ dönüşümleri birbirinin tersi olan iki bire-bir ve örten dönüşümdür. Ayrıca ρ_s , L_a daki her bir \mathcal{H} -sınıfını L_b de bu \mathcal{H} -sınıfının bulunduğu \mathcal{R} -sınıfındaki \mathcal{H} -sınıfına eşler. Benzer şekilde, $\rho_{s'}$ de L_b deki her bir \mathcal{H} -sınıfını L_a da bu \mathcal{H} -sınıfının bulunduğu \mathcal{R} -sınıfındaki \mathcal{H} -sınıfına eşler.

ii) $a\mathcal{L}b$ ise $\exists t, t' \in S^1$ için $ta = b$ ve $t'b = a$ olup

$$\begin{aligned}\lambda_t : R_a &\mapsto R_b, \quad x \xrightarrow{\lambda_t} tx \\ \lambda_{t'} : R_b &\mapsto R_a, \quad y \xrightarrow{\lambda_{t'}} t'y\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan λ_t ve $\lambda_{t'}$ dönüşümleri birbirinin tersi olan iki bire-bir ve örten dönüşümdür. Ayrıca λ_t , R_a daki her bir \mathcal{H} -sınıfını R_b de bu \mathcal{H} -sınıfının bulunduğu \mathcal{L} -sınıfındaki \mathcal{H} -sınıfına eşler. Benzer şekilde, $\lambda_{t'}$ de R_b deki her bir \mathcal{H} -sınıfını R_a da bu \mathcal{H} -sınıfının bulunduğu \mathcal{L} -sınıfındaki \mathcal{H} -sınıfına eşler.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.1 ve 2.2.2'ye bakınız. ■

Önerme 2.4.12. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ için $a\mathcal{D}b$ ise $|H_a| = |H_b|$ olur.

İspat: Howie (1995), Lemma 2.2.3'e bakınız. ■

Teorem 2.4.13. H , S yarıgrubunda bir \mathcal{H} -sınıfı ise ya $H^2 \cap H = \emptyset$ ya da $H^2 = H$ olur. Eğer $H^2 = H$ oluyorsa H , S nin bir alt grubudur.

İspat: Howie (1995), Theorem 2.2.5'e bakınız. ■

Sonuç 2.4.14. S bir yarıgrup ve e , S de bir idempotent eleman ise H_e , S nin bir alt grubudur. Ayrıca, S yarıgrubunun hiçbir \mathcal{H} -sınıfı birden fazla idempotent eleman içeremez. ■

2.5. Regülerlik ve Tersinir Elemanlar

Tanım 2.5.1. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer $\exists x \in S$ için $axa = a$ oluyorsa a ya *regüler eleman* denir. Tüm elemanları regüler olan bir yarıgruba da *regüler yarıgrup* denir.

Önerme 2.5.2. S bir yarıgrup ve $a \in S$ regüler eleman ise $\forall x \in L_a$ ve $\forall x \in R_a$ da regülerdir.

İspat: $a \in S$ regüler ve $b \in L_a$ olsun. Bu durumda $axa = a$, $yb = a$ ve $za = b$ olacak şekilde $x \in S$ ve $y, z \in S^1$ var olup

$$b = za = z(axa) = (za)x(yb) = b(xy)b$$

eşitliği elde edilir. $xy \in S$ olduğundan b de regülerdir. Benzer şekilde $\forall x \in R_a$ nın da regüler olduğu gösterilebilir. ■

Bunun bir sonucu olarak, $a \in S$ regüler ise $\forall x \in D_a$ regülerdir. Bu durumda D_a ya *regüler \mathcal{D} -sınıfı* denir.

Önerme 2.5.3. Regüler bir \mathcal{D} -sınıfındaki her bir \mathcal{L} -sınıfı ve her bir \mathcal{R} -sınıfı en az bir idempotent eleman içerir.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.3.2'ye bakınız. ■

Önerme 2.5.4. S bir yarıgrup ve $e \in S$ bir idempotent eleman ise e , L_e nin bir sağ birim elemanı ve R_e nin bir sol birim elemanıdır.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.3.3'e bakınız. ■

Tanım 2.5.5. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olmak üzere $axa = a$ ve $xax = x$ olacak şekilde $x \in S$ varsa a ya bir *tersinir eleman*, x e de a nın bir *tersi* denir. a nın tüm terslerinin kümesi $V(a)$ ile gösterilir. Buna göre

$$V(a) = \{x \in S : axa = a, xax = x\}$$

şeklindedir.

Gruplarda her elemanın bir ve yalnız bir tersi vardır. Yarıgruplarda ise bir elemanın bir veya birden çok tersi olabileceği gibi hiçbir tersi de olmayabilir. Örneğin, bir dikdörtgensel band için herhangi bir eleman diğer tüm elemanların tersidir. Sıfır yarıgruplarda ise 0 elemanın tersi kendisi, yani 0 olup diğer elemanların tersi yoktur. Daha genel bir örnek verecek olursak; idempotent eleman aynı zamanda kendisinin tersidir.

Önerme 2.5.6. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. a nın bir tersinin olması için gerek ve yeter koşul a nın regüler olmasıdır.

İspat: $a \in S$ regüler ise $\exists x \in S$ için $axa = a$ olup eşitliğin her iki tarafını sağdan ve soldan x ile çarpar ve işlemlere devam edersek

$$a = axa \Rightarrow xax = xaxax = x(axa)xax = (xax)a(xax)$$

olduğu elde edilir. Ayrıca,

$$a = axa = (axa)xa = a(xax)a$$

olup buradan $xax \in S$ elemanının a nın bir tersi olduğu sonucuna varırız.

Diğer taraftan, $a \in S$ tersinir ise $\exists x \in S$ için $axa = a$ ve $xax = x$ olup a regülerdir. ■

Teorem 2.5.7. S bir yarıgrup, D bir regüler \mathcal{D} -sınıfı ve $a \in D$ olsun.

i) Eğer $a' \in V(a)$ ise $a' \in D$ olur ve iki \mathcal{H} -sınıfı, $R_a \cap L_{a'}$ ile $L_a \cap R_{a'}$ sırasıyla idempotent olan aa' ve $a'a$ elemanlarını içerirler.

ii) Bir $b \in D$ için $R_a \cap L_b$ ve $L_a \cap R_b$ sırasıyla e ve f idempotent elemanlarını içeriyorsa öyle bir $a^* \in H_b$ vardır ki $aa^* = e$, $a^*a = f$ ve a^* , a nın tersidir.

iii) Hiç bir \mathcal{H} -sınıfı a nın birden fazla tersini içeremez.

İspat: Howie (1995), Theorem 2.3.4'e bakınız. ■

Önerme 2.5.8. S regüler bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

i) $a\mathcal{L}b \Leftrightarrow a'a = b'b$ olacak şekilde $a' \in V(a)$ ve $b' \in V(b)$ vardır.

ii) $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow aa' = bb'$ olacak şekilde $a' \in V(a)$ ve $b' \in V(b)$ vardır.

iii) $a\mathcal{H}b \Leftrightarrow a'a = b'b$ ve $aa' = bb'$ olacak şekilde $a' \in V(a)$ ve $b' \in V(b)$ vardır.

İspat: Howie (1995), Proposition 2.4.1'e bakınız. ■

2.6. Doğuray Kümeleri

Tanım 2.6.1. S bir yarıgrup ve X , S nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. S nin X kümesini içeren tüm alt yarıgruplarının kesişimi de bir alt yarıgrup olup bu alt yarıgruba S nin X tarafından doğurulan (üretilen) alt yarıgrubu denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

$$\langle X \rangle = \bigcap \{T : X \subseteq T \leq S\}$$

Tanımdan da anlaşılacağı gibi $\langle X \rangle$, X kümesini içeren en küçük alt yarıgruptur. Eğer $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ şeklinde sonlu bir küme ise $\langle X \rangle$ yerine $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ yazılır.

Eğer $\langle X \rangle = S$ oluyorsa X e S nin bir *doğuray (üreteç) kümesi*, X in her bir elemanına S nin bir *doğurayı (üretici)* ve S ye de X tarafından *doğurulan (üretilen) yarıgrup* denir. Buna ek olarak; eğer $S = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ise S ye *sonlu doğuraylı yarıgrup* ve özel olarak $S = \langle x \rangle$ ise S ye *monojenik (tek doğuraylı) yarıgrup* denir.

Önerme 2.6.2. $\langle X \rangle$, X üzerindeki tüm sonlu çarpımlardan oluşur. Diğer bir ifade ile

$$\langle X \rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n : n \in \mathbb{Z}^+; x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$$

şeklindedir.

İspat: $T = \{x_1 x_2 \cdots x_n : n \in \mathbb{Z}^+; x_1, x_2, \dots, x_n \in X\}$ olsun. T nin X i içeren en küçük alt yarıgrup olduğunu göstermeliyiz.

$x, y \in T$ olsun. Bu durumda $x = x_1 x_2 \cdots x_m$ ve $y = y_1 y_2 \cdots y_n$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n \in X$ vardır. Buradan $xy = x_1 x_2 \cdots x_m y_1 y_2 \cdots y_n \in T$ olup T, X i içeren bir alt yarıgruptur. Dolayısıyla da $\langle X \rangle \subseteq T$ olur.

Diğer taraftan, $\forall x_1 x_2 \cdots x_n \in T$ için $x_1, x_2, \dots, x_n \in X, X \subseteq \langle X \rangle$ ve $\langle X \rangle$ bir alt yarıgrup olduğundan $x_1 x_2 \cdots x_n \in \langle X \rangle$ olup buradan $T \subseteq \langle X \rangle$ olduğu elde edilir. Böylece $T = \langle X \rangle$ olduğu gösterilmiş olur. ■

Özel olarak, $X = \{x\}$ ise $\langle x \rangle = \{x^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ olur. Buradan da kolayca görülebileceği gibi, $S = \langle x \rangle$ sonsuz elemanlı bir monojenik yarıgrup ise $(\langle x \rangle, \cdot)$ yarıgrubu ile $(\mathbb{Z}^+, +)$ yarıgrubu izomorfik olur.

Teorem 2.6.3. S bir yarıgrup ve bir $a \in S$ için $\langle a \rangle$ sonlu elemanlı bir monojenik yarıgrup ise

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1}\} \text{ ve } a^{m+r} = a^m$$

olacak şekilde $m, r \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Üstelik $m, r \in \mathbb{Z}^+$ bu şekildeki en küçük pozitif tamsayılar olmak üzere herhangi $1 \leq i, j \leq m + r - 1$ ve $i \neq j$ tamsayıları için $a^i \neq a^j$ dir.

İspat: $\langle a \rangle$ sonlu olduğundan

$$I = \{x \in \mathbb{Z}^+ : \exists y \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } x \neq y \text{ için } a^x = a^y\}$$

kümesi boş değildir. Ayrıca $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{Z}^+$ olup I kümesinin bir en küçük elemanı $\min(I) = m$ vardır. O zaman

$$J = \{x \in \mathbb{Z}^+ : a^m = a^{m+x}\} \subseteq \mathbb{Z}^+$$

kümesi de boş olmayıp bir en küçük elemanı $\min(J) = r$ vardır. Şimdi de

$$M = \{a, a^2, \dots, a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1}\}$$

kümesini ele alalım. Öncelikle $1 \leq i, j \leq m + r - 1$ ve $i \neq j$ tamsayıları için $a^i \neq a^j$ olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $i < j$ ve $a^i = a^j$ olsun. O zaman $i, j \in I$ olup $m \in I$ en küçük eleman olduğundan $i = m + p$ ve $j = m + q$ olacak şekilde $\exists p, q \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Ayrıca, $i < j$ olduğundan $p < q$ ve $j \leq m + r - 1$ olup $q < r$ olmalıdır. Buradan

$$a^{q-p+m} = a^{q-p}a^m = a^{q-p}a^{m+r} = a^{q+m}a^{r-p} = a^{p+m}a^{r-p} = a^{m+r} = a^m$$

olup $q - p \in J$ olur. $r \in J$ en küçük eleman olduğundan $r < q - p$ olup $r < q$ olduğu elde edilir. Bu durum $q < r$ olması ile çelişir. O zaman $a^i \neq a^j$ olmalıdır.

Son olarak $\langle a \rangle = M$ olduğunu göstermeliyiz.

$\forall 1 \leq i \leq m + r - 1$ için $a^i \in \langle a \rangle$ olup $M \subseteq \langle a \rangle$ olduğu elde edilir. Diğer taraftan, $a^k \in \langle a \rangle$ ve $m + r \leq k$ olsun. Bölme algoritmasından

$$k - m = sr + t \text{ ve } 0 \leq t \leq r - 1$$

olacak şekilde $s \in \mathbb{Z}^+$ ve $t \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ tamsayıları var olup

$$a^k = a^{m+sr+t} = a^{m+r} a^{(s-1)r+t} = a^m a^{(s-1)r+t} = \dots = a^{m+t}$$

olduğu elde edilir. $t \leq r - 1$ olduğundan $m + t \leq m + r - 1$ olup $a^k = a^{m+t} \in M$ ve buradan da $\langle a \rangle \subseteq M$ olur. Böylece $\langle a \rangle = M$ olduğu gösterilmiş olur. ■

Tanım 2.6.4. Yukarıdaki teoremde bahsi geçen $m \in \mathbb{Z}^+$ sayısına a nın *indeksi* ve $r \in \mathbb{Z}^+$ sayısına da a nın *periyodu* denir. Bu durumda $S = \langle a \rangle$ monojenik yarıgrubu $M_{m,r}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.6.5. S bir yarıgrup olmak üzere bir $a \in S$ için a nın indeksi m ve periyodu r olsun. $0 \leq k, l \leq r - 1$ tamsayıları

$$m + k \equiv 0 \pmod{r}$$

$$m + l \equiv 1 \pmod{r}$$

olacak şekildeki iki tamsayı olmak üzere

$$K_a = \{a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1}\}$$

kümesi r elemanlı, birim elemanı a^{m+k} olan ve a^{m+l} tarafından doğurulan bir devirli gruptur. (Bu gruba $\langle a \rangle$ monojenik yarıgrubunun *çekirdeği* denir.)

İspat: $\varphi: K_a \mapsto \mathbb{Z}/r$, $a^i \mapsto i$ şeklinde tanımlanan φ fonksiyonu bir izomorfizm olup $(K_a, \cdot) \cong (\mathbb{Z}/r, +)$ olduğundan (K_a, \cdot) bir devirli gruptur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}(a^{m+k})\varphi &= m + k = 0 \\ (a^{m+l})\varphi &= m + l = 1\end{aligned}$$

olduğundan a^{m+k} , (K_a, \cdot) nin birim elemanı ve a^{m+l} de (K_a, \cdot) nin doğurayıdır. ■

Tanım 2.6.6. S , sonlu doğuraylı bir yarıgrup olsun. S nin en küçük elemanlı bir doğuray kümesinin eleman sayısına S nin *yarıgrup rankı* denir ve $\text{rank}(S)$ ile gösterilir. Diğer bir ifade ile,

$$\text{rank}(S) = \min\{|X| : S = \langle X \rangle \text{ ve } X \text{ sonlu}\}$$

pozitif tamsayısına S nin *yarıgrup rankı* denir. *Monoid rankı* ve *grup rankı* da benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 2.6.7. S bir yarıgrup olmak üzere $A \subseteq E(S)$ ve $S = \langle A \rangle$ olacak şekilde bir A kümesi varsa S ye *idempotent doğuraylı yarıgrup* ve

$$\text{idrank}(S) = \min\{|A| : A \subseteq E(S) \text{ ve } S = \langle A \rangle\}$$

pozitif tamsayısına da S nin *idempotent rankı* denir.

Önerme 2.6.8. S ve T iki monoid olmak üzere $1_S, 1_T$ sırasıyla S ve T monoidlerinin birim elemanları ve X, Y de sırasıyla S ve T monoidlerinin doğuray kümeleri ise

$$Z = \{(x, 1_T) : x \in X\} \cup \{(1_S, y) : y \in Y\}$$

kümesi de $S \times T$ monoidinin bir doğuray kümesidir.

İspat: $(s, t) \in S \times T$ için $s = x_1 x_2 \cdots x_m$ ve $t = y_1 y_2 \cdots y_n$ olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ ve $y_1, y_2, \dots, y_n \in Y$ vardır. Buradan

$$(x_1, 1_T) \cdots (x_m, 1_T)(1_S, y_1) \cdots (1_S, y_n) = (x_1 x_2 \cdots x_m, y_1 y_2 \cdots y_n) = (s, t)$$

olup $\langle Z \rangle = S \times T$ olduğu elde edilir. ■

Sonuç 2.6.9. S ve T sonlu doğuraylı iki monoid ise $S \times T$ de sonlu doğuraylıdır. ■

Önerme 2.6.10. S sonlu doğuraylı bir yarıgrup ve X , S nin herhangi bir doğuray kümesi olsun. O zaman S nin, X in bir alt kümesi olan sonlu bir doğuray kümesi vardır.

İspat: $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, S nin bir sonlu doğuray kümesi olsun. X , S nin herhangi bir doğuray kümesi olduğundan $\forall y_i \in Y$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) için $y_i = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{k_i}}$ olacak şekilde $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k_i}} \in X$ ve $k_i \in \mathbb{Z}^+$ vardır. O zaman $Z = \bigcup_{i=1}^n \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k_i}}\}$ kümesi X in sonlu bir alt kümesidir ve $S = \langle Y \rangle \subseteq \langle Z \rangle \subseteq \langle X \rangle = S$ olduğundan $S = \langle Z \rangle$ dir. ■

2.7. Bazı Dönüşüm Yarıgrupları

Tanım 2.7.1. X boş olmayan bir küme olmak üzere X üzerindeki tüm (tam) dönüşümlerin kümesi T_X ve tüm kısmi dönüşümlerin kümesi PT_X ile gösterilir. T_X ve PT_X kümeleri, dönüşümlerin bileşke işlemi ile birer yarıgrup olup bu yarıgruplara sırasıyla (tam) dönüşümler yarı grubu ve kısmi dönüşümler yarı grubu denir. Ayrıca, $T_X \leq PT_X$ olduğu açıktır.

Özel olarak; X , n elemanlı sonlu bir küme ise T_X ve PT_X yerine sırasıyla T_n ve PT_n yazılır.

Tanım 2.7.2. $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerindeki tüm bire-bir ve örten dönüşümlerin (permütasyonların) kümesi S_n , dönüşümlerin bileşkesi işlemi ile bir grup olup bu gruba *n-inci simetrik grup (permütasyonlar grubu)* denir.

S_n nin, grup teoride üstlendiği role benzer bir rolü, yarıgruplarda T_n üstlenir. Bu yüzden sonlu yarıgrupların yapısını anlamak için T_n yarı grubunu incelemek önemlidir.

Herhangi bir yarıgruptan (tam) dönüşümler yarı grubuna olan bir homomorfizme o yarı grubun *temsili* denir. Eğer bu temsil aynı zamanda bire-bir ise bu temsile *güvenilir temsil* denir.

Gruplardaki Cayley teoreminin benzeri olan aşağıdaki teorem, her yarı grubun (tam) dönüşümler yarı grubunun bir alt yarı grubuna izomorfik olduğunu söylemektedir. Bu teoremle birlikte (tam) dönüşümler yarı grubunun, yarı grup teorisindeki önemi daha da belirgin hale gelmektedir.

Teorem 2.7.3. Kardinalitesi n olan her sonlu yarı grup T_n veya T_{n+1} in bir alt yarı grubuna izomorfiktir.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 2.4.3'e bakınız. ■

Önerme 2.7.4. $\forall \alpha, \beta \in PT_n$ için $\text{Dom}(\alpha\beta) \subseteq \text{Dom}(\alpha)$ olur.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Exercise 2.1.4'e bakınız. ■

Teorem 2.7.5. $\alpha, \beta \in PT_n$ olmak üzere

- i) $\text{im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta)$,
- ii) $\text{Ker}(\alpha) \subseteq \text{Ker}(\alpha\beta)$

olur.

İspat: $\alpha, \beta \in PT_n$ olmak üzere

$$\text{im}(\alpha\beta) = (\text{im}(\alpha))\beta \subseteq (X_n)\beta = \text{im}(\beta)$$

olup sonuç açıktır. Diğer taraftan, $\forall(x, y) \in \text{Ker}(\alpha)$ için

$$x\alpha = y\alpha \Rightarrow (x\alpha)\beta = (y\alpha)\beta \Rightarrow x(\alpha\beta) = y(\alpha\beta)$$

olup buradan da $\text{Ker}(\alpha) \subseteq \text{Ker}(\alpha\beta)$ olduğu elde edilir. ■

Herhangi bir $\alpha \in T_n$ için $\text{Ker}(\alpha)$ nın bir denklik bağıntısı olduğunu biliyoruz. $\text{im}(\alpha) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ olmak üzere $i = 1, \dots, r$ için $A_i = a_i\alpha^{-1}$ şeklinde tanımlanan A_i kümeleri, $\text{Ker}(\alpha)$ nın denklik sınıflarıdır. Böylece X_n nin, $\text{Ker}(\alpha)$ denklik bağıntısına göre parçalanışı $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ olur. Buradan hareketle, her $\alpha \in T_n$ dönüşümü $i = 1, \dots, r$ için $A_i\alpha = a_i$ şeklinde ya da

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix} \text{ veya kısaca } \alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir.

Benzer şekilde, $\alpha \in PT_n$ kısmi dönüşümü de $\text{im}(\alpha) = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, $i = 1, \dots, r$ için $A_i = a_i\alpha^{-1}$ ve $X_n \setminus \bigcup_{i=1}^r A_i = A_{i+1}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_r & A_{r+1} \\ a_1 & \dots & a_r & - \end{pmatrix} \text{ veya } \alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix} \text{ veya kısaca } \alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir.

Tanım 2.7.6. $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin bir parçalanışı $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ olmak üzere $i = 1, \dots, r$ için bir tek $a_i \in A_i$ seçilerek oluşturulan $T = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ kümesine $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ nin bir *transversali* denir.

Önerme 2.7.7. Bir $\alpha \in T_n$ dönüşümünün sağ sıfır eleman olması için gerek ve yeter koşul $|\text{im}(\alpha)| = 1$ olmasıdır. Dolayısıyla da T_n nin n tane sağ sıfır elemanı vardır. Ancak, $n > 1$ için T_n nin sol sıfır elemanı yoktur.

İspat: (\Rightarrow) $\alpha \in T_n$ bir sağ sıfır eleman olsun. O zaman $\forall \beta \in T_n$ ve $\forall x \in X_n$ için $(x)\beta\alpha = (x)\alpha$ olur. Özel olarak $\beta = (12 \dots n) \in T_n$ için de bu eşitlik geçerli olup

$$\begin{aligned} (1)\beta\alpha &= (1)\alpha \Rightarrow (2)\alpha = (1)\alpha \\ (2)\beta\alpha &= (2)\alpha \Rightarrow (3)\alpha = (2)\alpha \\ &\vdots \\ (n)\beta\alpha &= (n)\alpha \Rightarrow (1)\alpha = (n)\alpha \end{aligned}$$

ve buradan da

$$(1)\alpha = (2)\alpha = \dots = (n)\alpha$$

olduğundan $|\text{im}(\alpha)| = 1$ olduğu elde edilir.

(\Leftarrow) $|\text{im}(\alpha)| = 1$ olsun. O zaman, $\forall x, y \in X_n$ için $(x)\alpha = (y)\alpha$ olup $\forall \beta \in T_n$ ve $\forall x \in X_n$ için

$$(x)\beta\alpha = ((x)\beta)\alpha = (x)\alpha$$

olduğundan α bir sağ sıfır elemandır.

Ayrıca, $|X_n| = n$ olduğundan $|\text{im}(\alpha)| = 1$ olacak şekilde n tane farklı dönüşüm var olup T_n nin n tane sağ sıfır elemanı vardır.

$n > 1$, $\alpha \in T_n$ ve $(1)\alpha = k \in X_n$ olsun. α nın bir sol sıfır elemanı olması için $\forall \beta \in T_n$ ve $\forall x \in X_n$ için $(x)\alpha\beta = (x)\alpha$ olması gereklidir. $n > 1$ olup $(k)\beta \neq k$ olacak şekilde bir $\beta \in T_n$ vardır ve $x = 1$ için

$$(1)\alpha\beta = (k)\beta \neq k = (1)\alpha$$

olacağından α bir sol sıfır elemanı olamaz. ■

Önerme 2.7.8. $\alpha \in T_n$ nin bir idempotent eleman olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in \text{im}(\alpha)$ için $(x)\alpha = x$ olmasıdır.

İspat: (\Rightarrow) $\alpha \in T_n$ bir idempotent eleman ve $x \in \text{im}(\alpha)$ olsun. O zaman $\exists y \in X_n$ için $(y)\alpha = x$ ve α idempotent eleman olduğundan $\forall z \in X_n$ için $(z)\alpha^2 = (z)\alpha$ olup

$$(x)\alpha = ((y)\alpha)\alpha = (y)\alpha^2 = (y)\alpha = x$$

olduğu elde edilir.

(\Leftarrow) $\alpha \in T_n$, $\forall x \in \text{im}(\alpha)$ için $(x)\alpha = x$ ve $z \in X_n$ olsun. $(z)\alpha \in \text{im}(\alpha)$ olduğundan

$$(z)\alpha^2 = ((z)\alpha)\alpha = (z)\alpha$$

olup α bir idempotent elemandır. ■

Teorem 2.7.9. Herhangi $\alpha, \beta \in PT_n$ dönüşümleri için

- i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$,
- ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ve $\text{Dom}(\alpha) = \text{Dom}(\beta)$,
- iii) $\alpha \mathcal{D} \beta \Leftrightarrow |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$,

şeklindedir.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1'e bakınız. ■

Teorem 2.7.10. Herhangi $\alpha, \beta \in T_n$ dönüşümleri için

- i) $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$,
- ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ve
- iii) $\alpha \mathcal{D} \beta \Leftrightarrow |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|$

şeklindedir.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 4.5.1'e bakınız. ■

Önerme 2.7.11. T_n bir regüler yarıgruptur.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009), Theorem 2.6.3'e bakınız. ■

Önerme 2.7.12. T_X bir regüler yarıgruptur.

İspat: Clifford ve Preston (1961), sayfa 33'e bakınız. ■

Tanım 2.7.13. Eğer bir $x \in X_n$ için $x\alpha = x$ ise x e α nın bir *sabit noktası* denir ve tüm sabit noktaların kümesi

$$\text{Fix}(\alpha) = \{x \in X_n : x\alpha = x\}$$

şeklinde gösterilir. Aksi halde, *sabit olmayan nokta* denir ve tüm sabit olmayan noktaların kümesi

$$\text{Shift}(\alpha) = \{x \in X_n : x\alpha \neq x\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.7.14. $n, r \geq 2$ tamsayıları için $\alpha \in S_n$ ve $\text{Shift}(\alpha) = \{i_1, \dots, i_r\}$ olsun. Eğer

$$i_1\alpha = i_2, i_2\alpha = i_3, \dots, i_{r-1}\alpha = i_r \text{ ve } i_r\alpha = i_1$$

ise α ya bir *r - devir* denir ve $\alpha = (i_1 i_2 \dots i_r)$ şeklinde yazılır. Ayrıca *1 - devirler*, $\forall i \in X_n$ için $(i) = 1_{X_n}$ şeklinde yani $(1) = (2) = \dots = (n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlıdır. Uzunluğu 2 olan bir devire, yani bir *2 - devire*, bir *transpozisyon* denir.

Teorem 2.7.15. $\forall \alpha \in S_n$ permütasyonu transpozisyonların bir çarpımı şeklinde yazılabilir.

İspat: Rotman (1995), Theorem 1.3'e bakınız. ■

Teorem 2.7.16. $n > 2$ ve $\alpha = (1\ 2), \beta = (1\ 2\ \dots\ n) \in S_n$ olmak üzere $S_n = \langle \alpha, \beta \rangle$ olur.

İspat: Howie (1995), 1.9 EXERCISES 6'ya bakınız. ■

Tanım 2.7.17. $n, r \geq 2$ tamsayıları için $\alpha \in T_n$ ve $\text{Shift}(\alpha) = \{i_1, \dots, i_r\}$ olsun. Eğer

$$i_1\alpha = i_2, i_2\alpha = i_3, \dots, i_{r-1}\alpha = i_r, i_r\alpha = i_{r+1} \text{ ve } i_{r+1}\alpha = i_{r+1}$$

ise $\alpha = \|\|i_1 i_2 \dots i_r\|\|$ şeklinde yazılır.

Teorem 2.7.18. $n > 2$, $\alpha = (1\ 2)$, $\beta = (1\ 2\ \dots\ n)$ ve $\theta = \|\|1\ 2\|\|$ olmak üzere $T_n = \langle \alpha, \beta, \theta \rangle$ olur.

İspat: Howie (1995), 1.9 EXERCISES 7'ye bakınız. ■

Teorem 2.7.19. $n > 2$, $\alpha = (1\ 2)$, $\beta = (1\ 2\ \dots\ n)$, $\theta = \|\|1\ 2\|\|$ ve

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ - & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

olmak üzere $PT_n = \langle \alpha, \beta, \theta, \varepsilon \rangle$ olur.

İspat: Howie (1995), 1.9 EXERCISES 13'e bakınız. ■

2.8. Tersinir Yarıgruplar

Tersinir yarıgruplar ilk olarak Vagner (1952, 1953) ve (birbirinden bağımsız olarak) Preston (1954a,b,c) tarafından çalışılmıştır. Vagner tersinir yarıgrupları ‘genelleştirilmiş gruplar’ olarak adlandırdı ve bu ifade birçok yıl Rus yazınında kabul edildi. Her iki durumda da düşüncenin temeli, bir küme üzerindeki bire-bir kısmi dönüşümlerin oluşturduğu yarıgrupları çalışmaktı ve elde edilen ilk sonuç (grup teorisinde yer alan Cayley teoremine benzer şekilde), her tersinir yarıgruptan bire-bir kısmi dönüşümlerin tersinir yarıgrubuna bir güvenilir temsilin var olduğunu belirten temsil teoremidir. Bu önemli sonuç Vagner-Preston teoremi olarak bilinir.

Tersinir yarıgrupların tanımını vermeden önce ön hazırlık olarak birkaç tanım vereceğiz.

(G, μ) , birim elemanı 1 olan bir grup olsun. Bu grubu üç işleme sahip olarak da düşünebiliriz. Bu işlemler; $a, a^{-1}, b \in G$ olmak üzere

- i) İkili işlem (Binary operation): $\mu : (a, b) \mapsto ab$
- ii) Tekli işlem (Unary operation): $a \mapsto a^{-1}$
- iii) 0-lı işlem (0-ary operation): $a \mapsto 1$

şeklinindedir. Bu durumda G grubu $(G, \mu, {}^{-1}, 1)$ şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.8.1. (S, μ) bir yarıgrup olsun. Eğer $\forall a \in S$ için $(a')' = a$ olacak şekilde bir $a \mapsto a'$ tekli işlemi varsa S yarıgrubuna bir U-yarıgrubu denir ve $(S, \mu, ')$ ile gösterilir. Her yarıgrubun bir U-yarıgrup olarak düşünülebileceği oldukça açıktır ($a' = a$ olarak alınabilir).

Yukarıdaki gibi tanımlanan tekli işlem ile ikili işlem birçok durumda birbirini etkilemektedir. Bu etkileşimler çalışıldığında yeni kavramlar ortaya çıkmıştır. Bir S , U-yarıgrubu üzerinde yapılan bu çalışmalardan bir tanesinde a' genel olarak a^{-1} ile gösterilir ve eğer

$$\forall a \in S \text{ için } aa^{-1}a = a$$

oluyorsa S ye bir *I-yarıgrubu* denir. Ayrıca, S bir *I* -yarıgrup iken a^{-1} de S nin bir elemanı olduğundan

$$a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}(a^{-1})^{-1}a^{-1} = a^{-1}$$

olup $a^{-1} \in S$, a nın bir tersidir.

Dikkat edilirse, $(G, \cdot, ^{-1})$ grubu bir *I-yarıgrubudur*.

Tanım 2.8.2. $(S, \mu, ^{-1})$ bir *I-yarıgrup* olsun. Eğer $\forall a, b \in S$ için

$$(aa^{-1})(bb^{-1}) = (bb^{-1})(aa^{-1})$$

oluyorsa S ye bir *tersinir yarıgrup* denir.

Teorem 2.8.3. S bir yarıgrup olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir.

- i) S tersinir yarıgruptur.
- ii) S regülerdir ve idempotent elemanları değişmelidir.
- iii) Her \mathcal{L} -sınıfı ve her \mathcal{R} -sınıfı tam olarak bir tane idempotent eleman içerir.
- iv) S nin her elemanının bir tek tersi vardır.

İspat: Howie (1995), Theorem 5.1.1'ye bakınız. ■

3. $T(X, Y)$ ALT YARIGRUBU

X boş olmayan bir küme ve Y , X in boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere

$$T(X, Y) = \{\alpha \in T_X : X\alpha \subseteq Y\}$$

kümesinin dönüşümlerin bileşke işlemi ile T_X in bir alt yarıgrubu olduğu açıktır. Bu bölümde $T(X, Y)$ alt yarıgrubu ile ilgili bazı cebirsel özellikler verilecektir.

3.1. $T(X, Y)$ nin Regülerliği

$T(X, Y)$ nin regülerliği ile ilgili teoreme geçmeden önce aşağıdakilere dikkat edelim.

- i) Eğer $|Y| = 1$ ise $T(X, Y)$ tek elemanlı olup regülerdir.
- ii) Eğer $Y = X$ ise $T(X, Y) = T_X$ olup T_X regüler olduğundan $T(X, Y)$ de regülerdir.
- iii) Eğer $|X| \leq 2$ ise $|Y| = 1$ veya $Y = X$ olup i) ve ii) den $T(X, Y)$ regülerdir.

Şimdi kullanacağımız bazı notasyonları verelim. Bir $\alpha \in T(X, Y)$ için $X\alpha = \{x_i : i \in I\}$, $x_i\alpha^{-1} = X_i$ ($i \in I$) ve $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ olacak şekilde bir I indis kümesi var olup

$$\alpha = \begin{pmatrix} X_i \\ x_i \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir (Clifford ve Preston (1967), sayfa 241'e bakınız).

Teorem 3.1.1. $T(X, Y)$ nin regüler olması için gerek ve yeter koşul $|Y| = 1$ veya $Y = X$ olmasıdır.

İspat: $|Y| \neq 1$ ve $Y \neq X$ olsun. O zaman $a \neq b$ olmak üzere $a, b \in Y$ ve $c \in X \setminus Y$ vardır. Herhangi bir $\alpha \in T(X, Y)$ dönüşümünü ele alalım. $X\alpha = \{y_i: i \in I\}$, $y_i\alpha^{-1} = X_i$ ($i \in I$) ve $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ olmak üzere α dönüşümünün $\alpha = \begin{pmatrix} X_i \\ y_i \end{pmatrix}$ şeklinde yazılabildiğini biliyoruz. Şimdi de $\beta = \begin{pmatrix} c & X \setminus \{c\} \\ a & b \end{pmatrix} \in T(X, Y)$ şeklinde tanımlanan β dönüşümünü ele alalım. $c \notin Y$ olduğundan $\forall i \in I$ için $y_i \neq c$ olup

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} X_i \\ y_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & X \setminus \{c\} \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ b \end{pmatrix} \neq \beta$$

olur. O zaman $\forall \alpha \in T(X, Y)$ için $\alpha\beta \neq \beta$ olup $\beta \in T(X, Y)$ regüler olmayan bir elemandır. Dolayısıyla $|Y| \neq 1$ ve $Y \neq X$ iken $T(X, Y)$ regüler değildir.

Tersinin doğruluğu yukarıdaki bilgilerden kolayca görülebilir. ■

Şimdi $F(X, Y) = \{\alpha \in T(X, Y) : X\alpha \subseteq Y\alpha\}$ kümesini ele alalım. Dikkat edilirse, $Y \subseteq X$ olup $\forall \beta \in T_X$ için $Y\beta \subseteq X\beta$ olduğundan $\forall \alpha \in F(X, Y)$ için $X\alpha \subseteq Y\alpha \subseteq X\alpha$ olup

$$F(X, Y) = \{\alpha \in T(X, Y) : X\alpha \subseteq Y\alpha\} = \{\alpha \in T(X, Y) : X\alpha = Y\alpha\}$$

olur. Ayrıca bir $\alpha \in F(X, Y)$ dönüşümü için $X\alpha = \{y_i: i \in I\}$, $y_i\alpha^{-1} = X_i$ ($i \in I$) ve $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ olsun. $X\alpha \subseteq Y\alpha$ olduğundan $\forall i \in I$ için $z_i\alpha = y_i$ olacak şekilde bir $z_i \in Y$ var olup $X_i \cap Y \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $\alpha \in F(X, Y)$ dönüşümü $X\alpha = \{y_i: i \in I\}$, $y_i\alpha^{-1} = X_i$ ($i \in I$), $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ ve $\forall i \in I$ için $X_i \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} X_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Önerme 3.1.2. $F(X, Y)$, $T(X, Y)$ nin bir sağ idealidir.

İspat: $Y \neq \emptyset$ ve bir $a \in Y$ elemanı için sabit dönüşüm $\begin{pmatrix} X \\ a \end{pmatrix} \in F(X, Y)$ olup $F(X, Y) \neq \emptyset$ olur. Şimdi $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ alalım. O zaman $X\alpha = Y\alpha$ olup $X\alpha\beta = Y\alpha\beta$ olduğundan $\alpha\beta \in F(X, Y)$ olur. Benzer şekilde $\beta\alpha \in F(X, Y)$ olup $F(X, Y) \leq T(X, Y)$ olduğu elde edilir.

Ayrıca, $\alpha \in F(X, Y)$ ve $\theta \in T(X, Y)$ için $X\alpha = Y\alpha$ ve buradan $X\alpha\theta = Y\alpha\theta$ olup $\alpha\theta \in F(X, Y)$ olur. Dolayısıyla $F(X, Y)$, $T(X, Y)$ nin bir sağ idealidir. ■

Teorem 3.1.3. $F(X, Y)$, $T(X, Y)$ alt yarıgrubunun en geniş regüler alt yarıgrubudur.

İspat: $\alpha \in F(X, Y)$ olsun. O zaman $X\alpha = \{x_i : i \in I\} = Y\alpha$, $\bigcup_{i \in I} x_i\alpha^{-1} = X$ ve $\forall i \in I$ için $x_i\alpha^{-1} \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_i\alpha^{-1} \\ x_i \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Her bir $x_i \in Y\alpha$ için bir $d_{x_i} \in x_i\alpha^{-1} \cap Y$ seçilirse $d_{x_i}\alpha = x_i$ ve $\forall x_t \neq x_l \in Y\alpha$ için $d_{x_t} \neq d_{x_l}$ olur. Bir $k \in I$ seçelim ve $J = I \setminus \{k\}$ olarak alalım. O zaman $\{x_j : j \in J\} = Y\alpha \setminus \{x_k\}$ olup

$$\beta = \begin{pmatrix} x_j & X \setminus \{x_j\} \\ d_{x_j} & d_{x_k} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan β dönüşümü için $\beta \in T(X, Y)$ ve $\alpha\beta\alpha = \alpha$ olur. Ayrıca, $X\beta = \{d_{x_i} : i \in I\} \subseteq (Y\alpha)\beta \subseteq Y\beta$ olup $\beta \in F(X, Y)$ olduğundan $F(X, Y)$, $T(X, Y)$ nin bir regüler alt yarıgrubudur.

Şimdi de regüler olan herhangi bir $\alpha \in T(X, Y)$ elemanını ele alalım. O zaman $\exists \beta \in T(X, Y)$ için $\alpha\beta\alpha = \alpha$ olup $X\alpha = X\alpha\beta\alpha = (X\alpha\beta)\alpha \subseteq Y\alpha$ olduğundan

$\alpha \in F(X, Y)$ olur. Dolayısıyla $F(X, Y)$, $T(X, Y)$ alt yarigrubunun en geniş regüler alt yarigrubudur. ■

3.2. $T(X, Y)$ Üzerinde Green Denklik Bağlılıkları

Önerme 3.2.1. $\alpha \in T(X, Y)$ ve $\beta \in F(X, Y)$ olsun. O zaman $X\alpha \subseteq X\beta$ olması için gerek ve yeter koşul $\exists \gamma \in T(X, Y)$ için $\alpha = \gamma\beta$ olmasıdır.

İspat: $\alpha \in T(X, Y)$ ve $\beta \in F(X, Y)$ için $X\alpha = \{a_i: i \in I\} \subseteq \{b_j: j \in J\} = X\beta$ olsun. O zaman

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_i \alpha^{-1} \\ a_i \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} b_j \beta^{-1} \\ b_j \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. $\beta \in F(X, Y)$ olup her bir $a \in X\alpha \subseteq X\beta \subseteq Y\beta$ için $a = y\beta$ olacak şekilde $\exists y \in Y$ vardır. Dolayısıyla $y \in a\beta^{-1}$ olup $Y \cap a\beta^{-1} \neq \emptyset$ olur. Şimdi $\forall i \in I$ için bir $d_{a_i} \in Y \cap a_i\beta^{-1}$ seçelim. Bu durumda $d_{a_i} \in Y$ ve $d_{a_i}\beta = a_i$ olup

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_i \alpha^{-1} \\ d_{a_i} \end{pmatrix}$$

dönüşümü için $\gamma \in T(X, Y)$ ve $\alpha = \gamma\beta$ olur.

Tersine, $\exists \gamma \in T(X, Y)$ için $\alpha = \gamma\beta$ olsun. O zaman $X\alpha = (X\gamma)\beta \subseteq X\beta$ olduğu açıktır. ■

Teorem 3.2.2. $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ olsun. $\alpha \mathcal{L} \beta$ olması için gerek ve yeter koşul ya $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ve $X\alpha = X\beta$ ya da $\alpha, \beta \notin F(X, Y)$ ve $\alpha = \beta$ olmasıdır.

İspat: $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ için $\alpha \mathcal{L} \beta$ olsun. O zaman $\alpha = \lambda\beta$ ve $\beta = \mu\alpha$ olacak şekilde $\exists \lambda, \mu \in T(X, Y)^1$ vardır. İlk olarak $\alpha \in F(X, Y)$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\beta = \alpha$

ise $\beta \in F(X,Y)$ ve $X\alpha = X\beta$ olur. Eğer $\beta \neq \alpha$ ise $\lambda, \mu \in T(X,Y)$ olur. Buradan $X\beta = X\mu\alpha = (X\mu\lambda)\beta \subseteq Y\beta$ olup $\beta \in F(X,Y)$ olur. $\alpha \in F(X,Y)$ ve $\beta = \mu\alpha$ olup Önerme 3.2.1'den $X\beta \subseteq X\alpha$ olduğu ve benzer şekilde $\beta \in F(X,Y)$ ve $\alpha = \lambda\beta$ olup $X\alpha \subseteq X\beta$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $X\alpha = X\beta$ olur. Şimdi de $\alpha \notin F(X,Y)$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\lambda, \mu \in T(X,Y)$ ise $X\alpha = X(\lambda\beta) = X(\lambda(\mu\alpha)) = (X\lambda\mu)\alpha \subseteq Y\alpha$ olup bu durum $\alpha \notin F(X,Y)$ olması ile çelişir. O zaman ya $\lambda = 1$ ya da $\mu = 1$ olmalıdır. Dolayısıyla $\alpha = \beta$ olur.

Tersine ya $\alpha, \beta \in F(X,Y)$ ve $X\alpha = X\beta$ ya da $\alpha, \beta \notin F(X,Y)$ ve $\alpha = \beta$ olsun. Eğer $\alpha, \beta \notin F(X,Y)$ ve $\alpha = \beta$ ise sonuç açıktır. Eğer $\alpha, \beta \in F(X,Y)$ ve $X\alpha = X\beta$ ise Önerme 3.2.1'den $\alpha \mathcal{L} \beta$ olacağı kolayca görülebilir. ■

Teorem 3.2.3. $\alpha, \beta \in T(X,Y)$ olsun. $\text{Ker}(\beta) \subseteq \text{Ker}(\alpha)$ olması için gerek ve yeter koşul $\exists \gamma \in T(X,Y)$ için $\alpha = \beta\gamma$ olmasıdır. Dolayısıyla $\alpha \mathcal{R} \beta$ olması için gerek ve yeter koşul $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olmasıdır.

İspat: $\exists \gamma \in T(X,Y)$ için $\alpha = \beta\gamma$ ise $\text{Ker}(\beta) \subseteq \text{Ker}(\alpha)$ olduğu açıktır. Şimdi de $\text{Ker}(\beta) \subseteq \text{Ker}(\alpha)$ olduğunu kabul edelim. Eğer $x \in X\beta$ ise $\exists z \in X$ için $x = z\beta$ olup $\gamma : X \rightarrow X$ dönüşümünü

$$\gamma = \begin{cases} z\alpha, & x \in X\beta \text{ ise} \\ x\beta, & x \notin X\beta \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\text{Ker}(\beta) \subseteq \text{Ker}(\alpha)$ olduğundan γ iyi tanımlıdır ve $\gamma \in T(X,Y)$ olduğu açıktır. Her bir $x \in X$ için $y = x\beta \in X\beta$ olsun. γ dönüşümünün tanımından dolayı $x\beta\gamma = (x\beta)\gamma = y\gamma = x\alpha$ olup $\alpha = \beta\gamma$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 3.2.4. $\alpha, \beta \in T(X,Y)$ için $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ise ya $\alpha, \beta \in F(X,Y)$ ya da $\alpha, \beta \notin F(X,Y)$ olur.

İspat: $\alpha, \beta \in T(X,Y)$ için $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olsun. $\alpha \notin F(X,Y)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $(X \setminus Y)\alpha \not\subseteq Y\alpha$ olup $\forall y \in Y$ için $x_0\alpha \neq y\alpha$ olacak şekilde bir

$x_0 \in X \setminus Y$ vardır. Buradan $\forall y \in Y$ için $(x_0, y) \notin \text{Ker}(\alpha)$ olur. Eğer $\beta \in F(X, Y)$ ise $X\beta = Y\beta$ olup $\exists y \in Y$ için $(x_0, y) \in \text{Ker}(\beta)$ olur. Bu durum $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\beta \notin F(X, Y)$ olmalıdır. ■

Teorem 3.2.3 ve Önerme 3.2.4 kullanılarak aşağıdaki sonuç kolayca elde edilebilir.

Sonuç 3.2.5. $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ olsun. $\alpha \mathcal{R} \beta$ olması için gerek ve yeter koşul ya $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ya da $\alpha, \beta \notin F(X, Y)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olmasıdır. ■

Teorem 3.2.2 ve 3.2.3'ün doğal bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2.6. $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ olsun. $\alpha \mathcal{H} \beta$ olması için gerek ve yeter koşul ya $\alpha, \beta \in F(X, Y)$, $X\alpha = X\beta$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ya da $\alpha, \beta \notin F(X, Y)$ ve $\alpha = \beta$ olmasıdır. ■

Teorem 3.2.7 $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ olsun. $\alpha \mathcal{D} \beta$ olması için gerek ve yeter koşul ya $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ve $|X\alpha| = |X\beta|$ ya da $\alpha, \beta \notin F(X, Y)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olmasıdır.

İspat: $\alpha \mathcal{D} \beta$ olsun. O zaman $\exists \gamma \in T(X, Y)$ için $\alpha \mathcal{L} \gamma$ ve $\gamma \mathcal{R} \beta$ olur. Eğer $\alpha \in F(X, Y)$ ise $\alpha \mathcal{L} \gamma$ olduğundan $\gamma \in F(X, Y)$ ve buradan da $X\gamma = Y\gamma$ olur. Ayrıca, $\gamma \mathcal{R} \beta$ olduğundan $\text{Ker}(\gamma) = \text{Ker}(\beta)$ ve $\exists \lambda \in T(X, Y)^1$ için $\beta = \gamma\lambda$ olur. $F(X, Y)$, $T(X, Y)$ nin bir sağ ideali olduğundan $\beta \in F(X, Y)$ olur. O zaman $|X\alpha| = |X\gamma| = |X/\text{Ker}(\gamma)| = |X/\text{Ker}(\beta)| = |X\beta|$ olur. Diğer taraftan, eğer $\alpha \notin F(X, Y)$ ise $\alpha \mathcal{L} \gamma$ olduğundan $\alpha = \gamma$ olup buradan $(\alpha = \gamma) \mathcal{R} \beta$ olduğu elde edilir. O zaman $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olup Önerme 3.2.4'ten $\beta \notin F(X, Y)$ olur.

Tersine ya $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ve $|X\alpha| = |X\beta|$ ya da $\alpha, \beta \notin F(X, Y)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ve $|X\alpha| = |X\beta|$ ise bire-bir ve örten olan bir $\theta: X\beta \rightarrow X\alpha$ dönüşümü vardır. $\mu = \beta\theta$ alınırsa $\mu \in T(X, Y)$ ve

$X\mu = X\beta\theta = (X\beta)\theta = X\alpha$ olur. $\beta \in F(X, Y)$ olduğundan $X\beta \subseteq Y\beta$ olup buradan $X\mu = X\beta\theta \subseteq Y\beta\theta = Y\mu$ ve dolayısıyla da $\mu \in F(X, Y)$ olduğu elde edilir. $\alpha, \mu \in F(X, Y)$ ve $X\mu = X\alpha$ olup Teorem 3.2.2'den $\alpha\mathcal{L}\mu$ olur. Ayrıca, $\mu = \beta\theta$ ve θ dönüşümleri bire-bir olduğundan $\text{Ker}(\mu) = \text{Ker}(\beta)$ ve buradan da $\mu\mathcal{R}\beta$ olur. Dolayısıyla $\alpha\mathcal{D}\beta$ olduğu elde edilir. Diğer taraftan, eğer $\alpha, \beta \notin F(X, Y)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ise Sonuç 3.2.5'ten $\alpha\mathcal{R}\beta$ olup $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$ olduğundan yine $\alpha\mathcal{D}\beta$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 3.2.8. $Y \subseteq X$ ve π , X üzerinde herhangi bir denklik bağıntısı olsun. Eğer $|X/\pi| = |Y|$ ise $\text{Ker}(\alpha) = \pi$ ve $X\alpha = Y$ olacak şekilde bir $\alpha \in T(X, Y)$ dönüşümü vardır.

İspat: A. H. Clifford ve G. B. Preston (1961), Lemma 2.7'ye bakınız. ■

Önerme 3.2.9. $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ olsun. Eğer $\exists \lambda \in T(X, Y)$ ve $\exists \mu \in T(X, Y)^1$ için $\alpha = \lambda\beta\mu$ ise $|X\alpha| \leq |Y\beta|$ olur.

İspat: $\exists \lambda \in T(X, Y)$ ve $\exists \mu \in T(X, Y)^1$ için $\alpha = \lambda\beta\mu$ olsun. O zaman $X\lambda \subseteq Y$ olup $X\lambda\beta \subseteq Y\beta$ ve dolayısıyla $|X\lambda\beta| \leq |Y\beta|$ olduğu elde edilir. Eğer $\mu = 1$ ise $\alpha = \lambda\beta$ olup buradan $|X\alpha| = |X\lambda\beta| \leq |Y\beta|$ olur. Eğer $\mu \in T(X, Y)$ ise $|X\alpha| = |X(\lambda\beta\mu)| = |(X\lambda\beta)\mu| \leq |X\lambda\beta| \leq |Y\beta|$ olup buradan $|X\alpha| \leq |Y\beta|$ olduğu elde edilir. ■

Teorem 3.2.10. $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ olsun. $\alpha\mathcal{J}\beta$ olması için gerek ve yeter koşul ya $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ya da $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ olmasıdır.

İspat: $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ için $\alpha\mathcal{J}\beta$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\exists \gamma, \lambda, \gamma', \lambda' \in T(X, Y)^1$ için $\alpha = \gamma\beta\lambda$ ve $\beta = \gamma'\alpha\lambda'$ olur. Eğer $\gamma = 1 = \gamma'$ ise $\alpha = \beta\lambda$ ve $\beta = \alpha\lambda'$ olacağından $\alpha\mathcal{R}\beta$ ve dolayısıyla $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olur. Eğer $\gamma \in T(X, Y)$ ya da $\gamma' \in T(X, Y)$ ise $\exists \sigma, \sigma' \in T(X, Y)$ ve $\exists \delta, \delta' \in T(X, Y)^1$ için $\alpha = \sigma\beta\delta$ ve $\beta = \sigma'\alpha\delta'$ olduğu kolayca görülebilir. Örneğin; $\gamma = 1$ ve $\gamma' \in T(X, Y)$ ise $\alpha = \beta\lambda$ ve $\beta = \gamma'\alpha\lambda'$

olup buradan $\alpha = \beta\lambda = (\gamma'\alpha\lambda')\lambda = \gamma'\alpha(\lambda'\lambda) = \gamma'(\beta\lambda)\lambda'\lambda = \gamma'\beta(\lambda\lambda'\lambda)$ olur. Önerme 3.2.9 kullanılarak $|Y\beta| \geq |X\alpha| \geq |Y\alpha| \geq |X\beta| \geq |Y\beta|$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ olur.

Tersine, ya $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ya da $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ise $\alpha\mathcal{R}\beta$ olup $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$ olduğundan $\alpha\mathcal{J}\beta$ olur. Eğer $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ ise $|X/\text{Ker}(\alpha)| = |X\alpha| = |Y\beta|$ ve $|X/\text{Ker}(\beta)| = |X\beta| = |Y\alpha|$ olup Önerme 3.2.8'den $\text{Ker}(\gamma) = \text{Ker}(\alpha)$, $X\gamma = Y\beta$, $\text{Ker}(\lambda) = \text{Ker}(\beta)$ ve $X\lambda = Y\alpha$ olacak şekilde $\gamma, \lambda \in T(X, Y)$ dönüşümleri vardır. $\text{Ker}(\gamma) = \text{Ker}(\alpha)$ ve $\text{Ker}(\lambda) = \text{Ker}(\beta)$ olduğundan $\gamma\mathcal{R}\alpha$ ve $\lambda\mathcal{R}\beta$ olup buradan $\exists \gamma', \lambda' \in T(X, Y)^1$ için $\alpha = \gamma\gamma'$ ve $\beta = \lambda\lambda'$ olduğu elde edilir. Ayrıca, $X\gamma = Y\beta$ olduğundan $Y\beta = \{y_i : i \in I\}$ olmak üzere

$$\gamma = \begin{pmatrix} y_i\gamma^{-1} \\ y_i \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Her bir $i \in I$ için bir $a_i \in y_i\beta^{-1} \cap Y \neq \emptyset$ seçelim ve $\beta': X \rightarrow X$ dönüşümünü

$$\beta' = \begin{pmatrix} y_i\gamma^{-1} \\ a_i \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $\beta' \in T(X, Y)$ ve $\gamma = \beta'\beta$ olur. Benzer şekilde, $X\lambda = Y\alpha$ olduğundan $\lambda = \alpha'\alpha$ olacak şekilde $\exists \alpha' \in T(X, Y)$ dönüşümünün var olduğu da kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla $\alpha = \gamma\gamma' = \beta'\beta\gamma'$ ve $\beta = \lambda\lambda' = \alpha'\alpha\lambda'$ olup $\alpha\mathcal{J}\beta$ olduğu elde edilir. ■

Bilindiği üzere, herhangi bir yarıgrup üzerinde $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$ ve özel olarak, T_X üzerinde $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ dir. Fakat bu durum $T(X, Y)$ için her zaman doğru olmayabilir. Bununla birlikte, Teorem 3.2.7 ve 3.2.10'un doğrudan bir sonucu olarak $T(X, Y)$ nin $F(X, Y)$ alt yarıgrubu üzerinde $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olduğu görülür.

Sonuç 3.2.11. $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ olsun. $T(X, Y)$ üzerinde $\alpha J \beta$ olması için gerek ve yeter koşul $T(X, Y)$ üzerinde $\alpha \mathcal{D} \beta$ olmasıdır.

İspat: $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ve $T(X, Y)$ üzerinde $\alpha J \beta$ olsun. O zaman ya $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ya da $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ olur. Eğer $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ise $|X\alpha| = |X/\text{Ker}(\alpha)| = |X/\text{Ker}(\beta)| = |X\beta|$ olur. Her iki durumda da $|X\alpha| = |X\beta|$ olup Teorem 3.2.7'den $\alpha \mathcal{D} \beta$ olur.

Tersine, $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ve $T(X, Y)$ üzerinde $\alpha \mathcal{D} \beta$ olsun. Herhangi bir yarıgrup üzerinde $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$ olduğundan $\alpha J \beta$ olur. ■

Teorem 3.2.12. Eğer Y, X in sonlu bir alt kümesi ise $T(X, Y)$ üzerinde $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olur.

İspat: Y, X in sonlu bir alt kümesi ve $\alpha, \beta \in T(X, Y)$ için $T(X, Y)$ üzerinde $\alpha J \beta$ olsun. O zaman ya $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ya da $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ olur. Ayrıca, $\alpha \notin F(X, Y)$ iken $|X\alpha| > |Y\alpha|$ olduğuna dikkat edelim.

Eğer $|X\alpha| = |Y\alpha|$ ise Y sonlu olduğundan $X\alpha$ da sonlu olup $X\alpha = Y\alpha$ ve dolayısıyla $\alpha \in F(X, Y)$ olduğu elde edilir. Eğer $\alpha \in F(X, Y)$ ve $\beta \notin F(X, Y)$ ise $X\alpha = Y\alpha$ fakat $|X\beta| > |Y\beta|$ olup $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olmak zorunda kalır. Bu durum Önerme 3.2.4 ile çelişir. Dolayısıyla ya $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ya da $\alpha, \beta \notin F(X, Y)$ olmalıdır. Eğer $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ise Sonuç 3.2.11'den $\alpha \mathcal{D} \beta$ olur. Eğer $\alpha, \beta \notin F(X, Y)$ ise $|X\alpha| > |Y\alpha|$ olacağından $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olmak zorunda kalır ve Teorem 3.2.7'den yine $\alpha \mathcal{D} \beta$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{D}$ olup $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olduğu elde edilir. ■

3.3. $T(X, Y)$ nin Maksimal Tersinir Alt Yarıgrupları

Bir regüler yarıgruptaki herhangi iki idempotent eleman değişmeli ise bu regüler yarıgrubun bir tersinir yarıgrup olduğunu biliyoruz. Eğer $|Y| = 1$ ise $T(X, Y)$ tek elemanlıdır ve bu eleman bir sabit dönüşümdür. Bu durumda $T(X, Y)$ nin maksimal tersinir alt yarıgrubu yoktur. Dolayısıyla bu bölümde $|Y| \geq 2$ olduğunu kabul edeceğiz.

Tanım 3.3.1. X boş olmayan bir küme ve Y de X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her bir $a \in Y$ için F_a kümesi

$$F_a = \{\alpha \in F(X,Y): a\alpha = a \text{ ve } \alpha, X \setminus a\alpha^{-1} \text{ üzerinde bire - bir}\}$$

şeklinde tanımlanır. F_a kümesi $\binom{X}{a}$ sabit dönüşümünü içeriyor olup boş küme değildir.

Teorem 3.3.2. $\alpha \in T(X,Y)$ ve $a \in Y$ olsun. $\alpha \in F_a$ olması için gerek ve yeter koşul $\{a\} \cup (X \setminus Y) \subseteq a\alpha^{-1}$ ve α nın $Y \setminus a\alpha^{-1}$ üzerinde bire-bir olmasıdır.

İspat: Eğer $Y = X$ ise $X \setminus Y = \emptyset$ ve $F(X,Y) = T_X$ olup buradan $\alpha \in F_a$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha \in T_X$, $\{a\} \subseteq a\alpha^{-1}$ ve α nın $X \setminus a\alpha^{-1}$ üzerinde bire-bir olmasıdır. Şimdi de $Y \neq X$ olması durumunu ele alalım. $\alpha \in T(X,Y)$ ve $a \in Y$ için $\alpha \in F_a$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\alpha \in F(X,Y)$, $a\alpha = a$ ve $\alpha, X \setminus a\alpha^{-1}$ üzerinde bire-birdir. Öncelikle $(X \setminus Y)\alpha = \{a\}$ olduğunu gösterelim. $b \in (X \setminus Y)\alpha$ olsun. O zaman $x\alpha = b$ olacak şekilde bir $x \in X \setminus Y$ vardır. $\alpha \in F(X,Y)$ olduğundan $b \in (X \setminus Y)\alpha \subseteq Y\alpha$ olur. Buradan $\exists y \in Y$ için $b = y\alpha$ olup $x, y \in b\alpha^{-1}$ ve $x \neq y$ olur. F_a nın tanımından $b = a$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $\{a\} \cup (X \setminus Y) \subseteq a\alpha^{-1}$ ve $\alpha, Y \setminus a\alpha^{-1}$ üzerinde bire-birdir.

Tersine, $\{a\} \cup (X \setminus Y) \subseteq a\alpha^{-1}$ ve α nın $Y \setminus a\alpha^{-1}$ üzerinde bire-bir olduğunu kabul edelim. $a \in Y$ ve $\{a\} \subseteq a\alpha^{-1}$ olduğundan $a = a\alpha \in Y\alpha$ ve buradan $\{a\} \subseteq Y\alpha$ olduğu görülür. Böylece $(X \setminus Y)\alpha = \{a\} \subseteq Y\alpha$ ve dolayısıyla $\alpha \in F(X,Y)$ olduğu elde edilir. $Y \setminus a\alpha^{-1} = X \setminus a\alpha^{-1}$ ve $\alpha, Y \setminus a\alpha^{-1}$ üzerinde bire-bir olduğundan $\alpha, X \setminus a\alpha^{-1}$ üzerinde de bire-birdir. Dolayısıyla $\alpha \in F_a$ olur. ■

Hatırlanacağı üzere, bir $\alpha \in T_X$ dönüşümünün idempotent eleman olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in X\alpha$ için $x\alpha = x$ olmasıdır. $T(X,Y)$, T_X in bir alt yarigrubu olduğundan “ $\alpha \in T(X,Y)$ elemanının $T(X,Y)$ nin bir idempotent elemanı olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in X\alpha$ için $x\alpha = x$ olmasıdır” sonucuna varırız. Ayrıca,

Teorem 3.3.2'den dolayı eğer α , F_a da bir idempotent ise $\forall x \in Y \setminus a\alpha^{-1}$ için $x\alpha = x$ olur.

Önerme 3.3.3. $L, T(X, Y)$ nin $F_a \subsetneq L$ olacak şekildeki bir regüler alt yarıgrubu ve $\alpha \in L \setminus F_a$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur.

- i) İdempotent eleman olan $\exists \beta \in F_a$ için $\alpha\mathcal{L}\beta$ olur.
- ii) Eğer $a\alpha = a$ ise α , L üzerinde F_a nın hiçbir elemanı ile \mathcal{R} -Green bağlantılı değildir.

İspat: i) $\cup A_i = X \setminus a\alpha^{-1}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} a\alpha^{-1} & A_i \\ a & a_i \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılıyor olsun ve $B = \{a_i : i \in I\}$ olmak üzere $\beta \in T(X, Y)$ dönüşümü

$$\beta = \begin{pmatrix} a_i & X \setminus B \\ a_i & a \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\beta : X \rightarrow Y$ dönüşümü B üzerinde bir birim dönüşüm ve $X \setminus B = a\beta^{-1}$ olur. Buradan $B = X \setminus a\beta^{-1}$ ve β , $X \setminus a\beta^{-1} = B$ üzerinde bire-bir olur. $a \in X \setminus B$ olduğundan $a = a\beta \in Y\beta$ ve $\{a\} \subseteq Y\beta$ olur. $B = \{a_i : i \in I\} \subseteq Y$ olduğundan $(X \setminus Y)\beta \subseteq (X \setminus B)\beta = \{a\} \subseteq Y\beta$ olup $\beta \in F(X, Y)$ olduğu elde edilir. Buradan da $\beta \in F_a$ olduğu ve dahası β nın bir idempotent eleman olduğu kolayca görülür.

Ayrıca, $L \subseteq F = F(X, Y)$ alt yarıgrubu $T = T(X, Y)$ nin bir regüler alt yarıgrubu olup Hall teoreminden $\mathcal{L}^L = \mathcal{L}^T \cap (L \times L) \subseteq \mathcal{L}^T \cap (F \times F)$ olur. Burada $(a, b) \in \mathcal{L}^S$ notasyonu “ $a = sb$ ve $b = ta$ olacak şekilde $s, t \in S^1$ vardır” anlamına gelmektedir. Ayrıca $X\alpha = X\beta$ olup Teorem 3.2.2'den L üzerinde $\alpha\mathcal{L}\beta$ olur.

ii) $a\alpha = a$ olmak üzere L üzerinde $\exists \beta \in F_a$ için $\alpha\mathcal{R}\beta$ olduğunu kabul edelim. O zaman Teorem 3.2.3'ten $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ve buradan da $a\alpha^{-1} = a\beta^{-1}$ olur.

Şimdi de $x_1\alpha = x_2\alpha$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X \setminus a\alpha^{-1}$ alalım. O zaman $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olacağından $x_1\beta = x_2\beta$ olup $\beta, X \setminus a\beta^{-1} = X \setminus a\alpha^{-1}$ üzerinde bire-bir olduğundan $x_1 = x_2$ olur. Buradan α nın $X \setminus a\alpha^{-1}$ üzerinde bire-bir olduğu elde edilir ve bu durum $\alpha \notin F_a$ olması ile çelişir. Dolayısıyla α, F_a nın hiçbir elemanı ile \mathcal{R} -Green bağlantılı değildir. ■

Teorem 3.3.4. $F_a, T(X, Y)$ nin bir maksimal tersinir alt yarıgrubudur.

İspat: İlk olarak F_a nın $T(X, Y)$ nin bir alt yarıgrubu olduğunu gösterelim. $\alpha, \beta \in F_a$ olsun. O zaman $\alpha, \beta \in F(X, Y)$, $a\alpha = a = a\beta$ ve α ile β sırasıyla $X \setminus a\alpha^{-1}$ ve $X \setminus a\beta^{-1}$ üzerinde bire-bir olur. $F(X, Y), T(X, Y)$ nin bir sağ ideali olduğundan $\alpha\beta \in F(X, Y)$ olup $a(\alpha\beta) = a$ ve $\alpha\beta$ nın $X \setminus a(\alpha\beta)^{-1}$ üzerinde bire-bir olduğu açıktır. Dolayısıyla $\alpha\beta \in F_a$ olur.

İkinci olarak F_a nın $T(X, Y)$ nin bir regüler alt yarıgrubu olduğunu gösterelim. $\forall \alpha \in F_a$ için $a\alpha = a$ ve Teorem 3.3.2'den $\forall x \in Y\alpha \setminus \{a\}$ için $|x\alpha^{-1}| = 1$ olur. $\{x_i\} = Y\alpha \setminus \{a\}$ ve her i için $x_i\alpha^{-1} = y_i$ olsun. O zaman $\cup\{y_i\} = Y \setminus a\alpha^{-1}$ ve $X = Y \cup a\alpha^{-1}$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} y_i & a\alpha^{-1} \\ x_i & a \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $\{x_i\} = Y\alpha \setminus \{a\}$ ve $A = X \setminus \{x_i\}$ olmak üzere $\beta \in T(X, Y)$ dönüşümünü

$$\beta = \begin{pmatrix} x_i & A \\ y_i & a \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. $a \in A$ olduğundan $a = a\beta \in Y\beta$ olup $\{a\} \subseteq Y\beta$ olduğu elde edilir. Ayrıca $x_i \in Y$ olduğundan $\forall x \in X \setminus Y$ ve her i için $x \neq x_i$ olup $(X \setminus Y)\beta = \{a\} \subseteq Y\beta$ ve dolayısıyla $\beta \in F(X, Y)$ olur. $a\beta = a$ ve $\beta, \{a\} = X \setminus a\beta^{-1}$ üzerinde bire-bir olduğundan $\beta \in F_a$ olur. Dolayısıyla $\alpha = \alpha\beta\alpha$ olduğu elde edilir.

Şimdi de F_a nın tersinir olduğunu gösterelim. Bunun için de F_a nın idempotent olan herhangi iki elemanının değişmeli olduğunu göstermek yeterlidir. $\alpha, \beta \in F_a$ iki idempotent eleman olsun. O zaman $\forall x \in X \setminus a\alpha^{-1}$ için $x\alpha = x$ ve $\forall x \in X \setminus a\beta^{-1}$ için $x\beta = x$ olur. x, X in herhangi bir elemanı olsun.

1. Durum: $x \in X \setminus a\alpha^{-1}$ ise; o zaman $x\alpha = x$ olur. Eğer $x \in X \setminus a\beta^{-1}$ ise $x\beta = x$ olup $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = x\beta = x = x\alpha = (x\beta)\alpha = x(\beta\alpha)$ olur. Eğer $x \in a\beta^{-1}$ ise $x\beta = a$ olup buradan da $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = x\beta = a = a\alpha = (x\beta)\alpha = x(\beta\alpha)$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\alpha\beta = \beta\alpha$ olur.

2. Durum: $x \in a\alpha^{-1}$ ise; o zaman $x\alpha = a$ olup 1. Durum için yapılan ispattan dolayı $\alpha\beta = \beta\alpha$ olur.

Son olarak F_a nın maksimal tersinir alt yarıgrup olduğunu gösterelim. Bunun için $F_a \subsetneq L \subseteq F(X, Y) \subseteq T(X, Y)$ olacak şekilde $T(X, Y)$ nin tersinir olan bir L alt yarı grubunun var ve $\alpha \in L \setminus F_a$ olduğunu kabul edelim. β , görüntü kümesi $\{a\}$ olan sabit dönüşüm olsun. O zaman β , F_a nın bir idempotent elemanı ve $\beta\alpha$ da L nin bir idempotent elemanı olur. $\beta\alpha\beta = \beta$ ve L deki herhangi iki idempotent eleman değişmeli olduğundan $\beta = \beta\alpha\beta = \beta\beta\alpha = \beta\alpha$ ve $a\alpha = (a\beta)\alpha = a(\beta\alpha) = a\beta = a$ olur. L regüler olduğundan $\alpha = \alpha\alpha'\alpha$ olacak şekilde $\exists \alpha' \in L$ var olup L üzerinde $\alpha\mathcal{R}\alpha\alpha'$ ve $\alpha\alpha'$, L nin bir idempotent elemanı olur. Şimdi $\gamma = \alpha\alpha'$ olarak alalım. O zaman Önerme 3.3.3'ten $\gamma \in L \setminus F_a$ ve idempotent eleman olan $\exists \sigma \in F_a$ için $\gamma\mathcal{L}\sigma$ olmalıdır. Bir yarı gruptaki her idempotent eleman, kendisinin bulunduğu \mathcal{L} -Green sınıfında bir sağ birim eleman olduğundan $\gamma = \gamma\sigma = \sigma\gamma = \sigma \in F_a$ olur. Bu durum $\gamma \notin F_a$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $L = F_a$ olur. ■

Sonuç 3.3.5. $F_a = \{\alpha \in T_X : a\alpha = a \text{ ve } \alpha, X \setminus a\alpha^{-1} \text{ üzerinde bire - bir}\}$ kümesi T_X in bir maksimal tersinir alt yarı grubudur.

İspat: $Y = X$ alınırsa $T(X, Y) = T_X = F(X, Y)$ ve $F_a = \{\alpha \in T_X : a\alpha = a \text{ ve } \alpha, X \setminus a\alpha^{-1} \text{ üzerinde bire - bir}\}$ olup Teorem 3.3.4'ten F_a, T_X in bir maksimal tersinir alt yarı grubu olur. ■

Teorem 3.3.6. X boş olmayan herhangi bir küme ve Y, X in $|Y| = n$ olacak şekildeki boş olmayan bir alt kümesi olsun. O zaman her bir $a \in Y$ için $|F_a| = \sum_{r=0}^{n-1} r! \binom{n-1}{r}^2$ olur.

İspat: $a \in Y$ ve $\alpha \in F_a$ olsun. Teorem 3.3.2'den $Y = Y_1 \cup Y_2$, $a \in Y_1$, $Y_3 \subseteq Y \setminus \{a\}$ ve $|Y_2| = |Y_3|$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} (X \setminus Y) \cup Y_1 & Y_2 \\ a & Y_3 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $Y_2 = \emptyset$ ise bu şekildeki tek dönüşüm görüntü kümesi $\{a\}$ olan sabit dönüşümdür. $1 \leq t \leq n-1$ için $|Y_2| = t$ olsun. Bu şekilde $\binom{n-1}{t}$ tane Y_2 kümesi ve her bir Y_2 için de $\binom{n-1}{t}$ tane Y_3 kümesi vardır. Dolayısıyla Y_2 ve Y_3 kümeleri $\binom{n-1}{t}^2$ farklı şekilde seçilebilir. α nın Y_2 kümesine kısıtlanması bir permütasyon olduğundan α nın her bir Y_2 ve Y_3 seçimi için mümkün olan $t!$ tane farklı formu vardır. Bu durumda α dönüşümü $t! \binom{n-1}{t}^2$ farklı formda olabilir. Dolayısıyla $|F_a| = 1 + \sum_{r=1}^{n-1} r! \binom{n-1}{r}^2 = \sum_{r=0}^{n-1} r! \binom{n-1}{r}^2$ olur. ■

Sonuç 3.3.7. X sonlu bir küme ve $|X| = n$ olsun. O zaman $F_a = \{\alpha \in T_X : \alpha a = a \text{ ve } \alpha, X \setminus \{a\} \text{ üzerinde bire - bir}\}$ kümesinin eleman sayısı $\sum_{r=0}^{n-1} r! \binom{n-1}{r}^2$ olur. ■

4. $PT(X, Y)$ ALT YARIGRUBU

X boş olmayan bir küme ve Y , X in boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere

$$PT(X, Y) = \{\alpha \in PT_X : X\alpha \subseteq Y\}$$

kümesinin dönüşümlerin bileşke işlemi ile PT_X in bir alt yarigrubu olduğu açıktır. Bu bölümde $PT(X, Y)$ alt yarigrubu ile ilgili bazı cebirsel özellikler verilecektir.

Öncelikle bazı notasyonları verelim. Herhangi bir $Z \subseteq X$ için $Z\alpha = \{x\alpha : x \in \text{Dom}(\alpha) \cap Z\}$ olarak alınırsa $X\alpha = \{x\alpha : x \in \text{Dom}(\alpha) \cap X\} = \{x\alpha : x \in \text{Dom}(\alpha)\} = \text{im}(\alpha)$ olur. Ayrıca, bir $\alpha \in PT(X, Y)$ için $X\alpha = \{x_i : i \in I\}$, $x_i\alpha^{-1} = X_i$ ($i \in I$) ve $\bigcup_{i \in I} X_i = \text{Dom}(\alpha)$ olacak şekilde bir I indis kümesi var olup

$$\alpha = \begin{pmatrix} X_i \\ x_i \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

4.1. $PT(X, Y)$ nin Regülerliği

Önerme 4.1.1. $A \subseteq B \subseteq X$ ise $\forall \alpha \in PT(X, Y)$ için $A\alpha \subseteq B\alpha$ olur. ■

Şimdi $PF = PF(X, Y) = \{\alpha \in PT(X, Y) : X\alpha = Y\alpha\}$ kümesini ele alalım. $\alpha \in PF$ için $X\alpha = \{y_i : i \in I\}$, $y_i\alpha^{-1} = X_i$ ($i \in I$) ve $\bigcup_{i \in I} X_i = \text{Dom}(\alpha)$ olsun. $X\alpha = Y\alpha$ olduğundan $\forall i \in I$ için $z_i\alpha = y_i$ olacak şekilde $z_i \in Y$ var olup $X_i \cap Y \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla herhangi bir $\alpha \in PF$ dönüşümü $X\alpha = \{y_i : i \in I\}$, $y_i\alpha^{-1} = X_i$ ($i \in I$), $\bigcup_{i \in I} X_i = \text{Dom}(\alpha)$ ve $\forall i \in I$ için $X_i \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} X_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Önerme 4.1.2. PF kümesi $PT(X, Y)$ nin bir sağ idealidir.

İspat: PF kümesinin $PT(X, Y)$ nin bir alt yarıgrubu olduğu açıktır. Ayrıca, $\alpha \in PF$ ve $\beta \in PT(X, Y)$ için $X\alpha = Y\alpha$ olup $X\alpha\beta = Y\alpha\beta$ olduğundan $\alpha\beta \in PF$ olur. Dolayısıyla $PF, PT(X, Y)$ nin bir sağ idealidir. ■

Teorem 4.1.3. Bir $\alpha \in PT(X, Y)$ elemanının regüler olması için gerek ve yeter koşul $\alpha \in PF$ olmasıdır.

İspat: $\delta \in PT(X, Y)$ bir regüler eleman olsun. O zaman $\exists \theta \in PT(X, Y)$ için $\delta\theta\delta = \delta$ olur. Buradan $X\delta = X\delta\theta\delta = (X\delta\theta)\delta \subseteq Y\delta$ olup $\delta \in PF$ olduğu elde edilir.

Tersine $\alpha \in PF$ olsun. $\forall x \in X\alpha = Y\alpha$ için bir $d_x \in x\alpha^{-1} \cap Y$ seçilsin ve $\gamma: X\alpha \rightarrow \{d_x: x \in X\alpha\}$ dönüşümü $\forall x \in X\alpha$ için $x\gamma = d_x$ şeklinde tanımlansın. O zaman $\gamma \in PF$ ve $\alpha\gamma\alpha = \alpha$ olup α regülerdir. ■

Bu teoremden PF alt yarıgrubunun $PT(X, Y)$ nin bütün regüler elemanlarını içerdiği görülür.

4.2. $PT(X, Y)$ Üzerinde Green Denklik Bağlılıkları

Önerme 4.2.1. $\alpha \in PT(X, Y)$ ve $\beta \in PF$ olmak üzere $X\alpha \subseteq X\beta$ olması için gerek ve yeter koşul $\exists \gamma \in PT(X, Y)$ için $\alpha = \gamma\beta$ olmasıdır.

İspat: $\alpha \in PT(X, Y)$ ve $\beta \in PF$ için $X\alpha \subseteq X\beta$ olsun. O zaman $B_i \cap Y \neq \emptyset$ ve $B_j \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix}$ ve $\beta = \begin{pmatrix} B_i & B_j \\ a_i & a_j \end{pmatrix}$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca, her i için bir $b_i \in B_i \cap Y$ seçelim ve $\gamma = \begin{pmatrix} A_i \\ b_i \end{pmatrix}$ dönüşümünü tanımlayalım. O zaman $\gamma \in PT(X, Y)$ ve $\alpha = \gamma\beta$ olup istenen sağlanır.

Tersine $\alpha \in PT(X,Y)$, $\beta \in PF$ ve $\exists \gamma \in PT(X,Y)$ için $\alpha = \gamma\beta$ olsun. O zaman $X\alpha = (X\gamma)\beta \subseteq X\beta$ olur. ■

Teorem 4.2.2. $\alpha, \beta \in PT(X,Y)$ olsun. $\alpha\mathcal{L}\beta$ olması için gerek ve yeter koşul ya $\alpha, \beta \in PF$ ve $X\alpha = X\beta$ ya da $\alpha, \beta \notin PF$ ve $\alpha = \beta$ olmasıdır.

İspat: $\alpha\mathcal{L}\beta$ olsun. O zaman $\alpha = \lambda\beta$ ve $\beta = \mu\alpha$ olacak şekilde $\exists \lambda, \mu \in PT(X,Y)^1$ vardır. Öncelikle $\alpha \in PF$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\lambda = 1$ ya da $\mu = 1$ ise $\alpha = \beta \in PF$ ve $X\alpha = X\beta$ olur. Eğer $\lambda, \mu \in PT(X,Y)$ ise $X\lambda\mu \subseteq Y$ olup $X\beta = X\mu\alpha = (X\mu\lambda)\beta \subseteq Y\beta$ olur. Buradan $\beta \in PF$ olduğu elde edilir. Ayrıca $\alpha = \lambda\beta$ ve $\beta = \mu\alpha$ olup Önerme 4.2.1'den $X\alpha = X\beta$ olur. Şimdi de $\alpha \notin PF$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\lambda, \mu \in PT(X,Y)$ ise $X\alpha = X\lambda\beta = (X\lambda\mu)\alpha \subseteq Y\alpha$ olup bu durum $\alpha \notin PF$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\lambda = 1$ ya da $\mu = 1$ olup buradan $\beta = \alpha \notin PF$ olduğu elde edilir.

Tersi Önerme 4.2.1'in bir sonucudur. ■

Teorem 4.2.3. $\alpha, \beta \in PT(X,Y)$ olsun.

$$\text{Dom}(\alpha) \subseteq \text{Dom}(\beta) \text{ ve } \text{Ker}(\beta) \cap (\text{Dom}(\beta) \times \text{Dom}(\alpha)) \subseteq \text{Ker}(\alpha)$$

olması için gerek ve yeter koşul $\exists \gamma \in PT(X,Y)$ için $\alpha = \beta\gamma$ olmasıdır. Ayrıca, $\alpha\mathcal{R}\beta$ olması için gerek ve yeter koşul $\text{Dom}(\alpha) = \text{Dom}(\beta)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olmasıdır.

İspat: $\alpha = \beta\gamma$ olacak şekilde $\exists \gamma \in PT(X,Y)$ varsa $\text{Dom}(\alpha) \subseteq \text{Dom}(\beta)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $(a, b) \in \text{Ker}(\beta) \cap (\text{Dom}(\beta) \times \text{Dom}(\alpha))$ olsun. O zaman $a\beta = b\beta$ olur. $b \in \text{Dom}(\alpha) = \text{Dom}(\beta\gamma)$ olduğundan $b\beta\gamma$ vardır ve $b\beta\gamma = (b\beta)\gamma = (a\beta)\gamma = a\beta\gamma = a\alpha$ olup $a \in \text{Dom}(\alpha)$ olur. Ayrıca, $a\alpha = (a\beta)\gamma = (b\beta)\gamma = b\alpha$ olup $(a, b) \in \text{Ker}(\alpha)$ olur. Dolayısıyla $\text{Ker}(\beta) \cap (\text{Dom}(\beta) \times \text{Dom}(\alpha)) \subseteq \text{Ker}(\alpha)$ olduğu elde edilir.

Tersine, $\text{Dom}(\alpha) \subseteq \text{Dom}(\beta)$ ve $\text{Ker}(\beta) \cap (\text{Dom}(\beta) \times \text{Dom}(\alpha)) \subseteq \text{Ker}(\alpha)$ olduğunu kabul edelim. $x \in (\text{Dom}(\alpha))\beta$ olsun. O zaman $\exists a \in \text{Dom}(\alpha)$ için $a\beta = x$ olur. Dikkat edilirse $b\beta = x$ olacak şekildeki $b \in \text{Dom}(\beta)$ için $(b, a) \in \text{Ker}(\beta) \cap (\text{Dom}(\beta) \times \text{Dom}(\alpha)) \subseteq \text{Ker}(\alpha)$ olup $b\alpha = a\alpha$ olduğu elde edilir. $\gamma \in PT(X, Y)$ dönüşümünü $\forall x \in \text{Dom}(\gamma) = (\text{Dom}(\alpha))\beta$ için $x\gamma = a\alpha$, öyle ki $\exists a \in \text{Dom}(\alpha)$ için $a\beta = x$, şeklinde tanımlarsak $\alpha = \beta\gamma$ olur. ■

Sonuç 4.2.4. $\alpha, \beta \in PT(X, Y)$ ve $\alpha\mathcal{R}\beta$ olsun. O zaman ya $\alpha, \beta \in PF$ ya da $\alpha, \beta \in PT(X, Y) \setminus PF$ olur.

İspat: $\alpha, \beta \in PT(X, Y)$ ve $\alpha\mathcal{R}\beta$ olsun. Eğer $\alpha \in PF$ ise her i için $a_i \in Y$ ve $A_i \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix}$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\alpha\mathcal{R}\beta$ olup bir önceki teoremden $\text{Dom}(\alpha) = \text{Dom}(\beta)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olur. O zaman, her i için $b_i \in Y$ olmak üzere $\beta = \begin{pmatrix} A_i \\ b_i \end{pmatrix}$ şeklinde yazılabilir. Buradan $X\beta = Y\beta$ ve dolayısıyla $\beta \in PF$ olduğu elde edilir. ■

Teorem 4.2.5. $\alpha, \beta \in PT(X, Y)$ olsun. $\alpha\mathcal{D}\beta$ olması için gerek ve yeter koşul ya $\alpha, \beta \in PF$ ve $|X\alpha| = |X\beta|$ ya da $\alpha, \beta \notin PF$, $\text{Dom}(\alpha) = \text{Dom}(\beta)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olmasıdır.

İspat: $\exists \gamma \in PT(X, Y)$ için $\alpha\mathcal{L}\gamma\mathcal{R}\beta$ olsun. Eğer $\alpha \in PF$ ise Teorem 4.2.2'den $\gamma \in PF$ ve $|X\alpha| = |X\gamma|$ olur. Ayrıca $\gamma \in PF$ ve $\gamma\mathcal{R}\beta$ olup Teorem 4.2.3 ve Sonuç 4.2.4'ten $\beta \in PF$, $\text{Dom}(\gamma) = \text{Dom}(\beta)$ ve $\text{Ker}(\gamma) = \text{Ker}(\beta)$ olur. Buradan da $|X\alpha| = |X\gamma| = |\text{Dom}(\gamma)/\text{Ker}(\gamma)| = |\text{Dom}(\beta)/\text{Ker}(\beta)| = |X\beta|$ olduğu elde edilir. Diğer taraftan, eğer $\alpha \notin PF$ ise Teorem 4.2.2'den $\gamma \notin PF$ ve $\alpha = \gamma$ olur. Ayrıca $\gamma \notin PF$ ve $\gamma\mathcal{R}\beta$ olup Teorem 4.2.3 ve Sonuç 4.2.4'ten $\beta \notin PF$, $\text{Dom}(\gamma) = \text{Dom}(\beta)$ ve $\text{Ker}(\gamma) = \text{Ker}(\beta)$ olur. Buradan $\text{Dom}(\alpha) = \text{Dom}(\gamma) = \text{Dom}(\beta)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\gamma) = \text{Ker}(\beta)$ olduğu elde edilir.

Tersine ya $\alpha, \beta \in PF$ ve $|X\alpha| = |X\beta|$ ya da $\alpha, \beta \notin PF$, $\text{Dom}(\alpha) = \text{Dom}(\beta)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olsun. Eğer $\alpha, \beta \in PF$ ve $|X\alpha| = |X\beta|$ ise bir $\theta: X\beta \rightarrow X\alpha$ bire-bir ve örten dönüşümü vardır. $\mu = \beta\theta$ olsun. $\beta \in PF$ olduğundan $\mu \in PT(X, Y)$, $\text{Dom}(\mu) = \text{Dom}(\beta)$, $X\mu = X\beta\theta = (X\beta)\theta = X\alpha$ ve $X\mu = X\beta\theta = (Y\beta)\theta = Y\mu$ olur. O zaman $\mu \in PF$ ve $X\mu = X\alpha$ olup Teorem 4.2.2'den $\alpha\mathcal{L}\mu$ olur. Ayrıca, $\mu = \beta\theta$ ve θ bire-bir olduğundan $\text{Ker}(\mu) = \text{Ker}(\beta)$ olup Teorem 4.2.3'ten $\mu\mathcal{R}\beta$ olur. Buradan $\alpha\mathcal{D}\beta$ olduğu elde edilir. Diğer taraftan, eğer $\alpha, \beta \notin PF$, $\text{Dom}(\alpha) = \text{Dom}(\beta)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ise Teorem 4.2.3'ten $\alpha\mathcal{R}\beta$ ve buradan da $\alpha\mathcal{D}\beta$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 4.2.6. $\alpha, \beta \in PT(X, Y)$ olsun. Eğer $\exists \lambda \in PT(X, Y)$ ve $\mu \in PT(X, Y)^1$ için $\alpha = \lambda\beta\mu$ ise $|X\alpha| \leq |Y\beta|$ olur.

İspat: $(X\lambda)\beta \subseteq Y\beta$ olduğundan $|(X\lambda)\beta| \leq |Y\beta|$ olup $|X\alpha| = |(X\lambda\beta)\mu| \leq |(X\lambda)\beta| \leq |Y\beta|$ olduğu elde edilir. ■

Teorem 4.2.7. $\alpha, \beta \in PT(X, Y)$ olsun. $\alpha\mathcal{J}\beta$ olması için gerek ve yeter koşul ya $\text{Dom}(\alpha) = \text{Dom}(\beta)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ya da $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ olmasıdır.

İspat: $\alpha\mathcal{J}\beta$ olsun. O zaman $\alpha = \lambda\beta\mu$ ve $\beta = \lambda'\alpha\mu'$ olacak şekilde $\exists \lambda, \mu, \lambda', \mu' \in PT(X, Y)^1$ vardır. Eğer $\lambda = 1 = \lambda'$ ise $\alpha = \beta\mu$ ve $\beta = \alpha\mu'$ olduğundan $\alpha\mathcal{R}\beta$ olur. Buradan da $\text{Dom}(\alpha) = \text{Dom}(\beta)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olduğu elde edilir. Eğer $\lambda \in PT(X, Y)$ veya $\lambda' \in PT(X, Y)$ ise $\exists \sigma, \sigma' \in PT(X, Y)$ ve $\exists \delta, \delta' \in PT(X, Y)^1$ için $\alpha = \sigma\beta\delta$ ve $\beta = \sigma'\alpha\delta'$ şeklinde yazılabilir. O zaman Önerme 4.2.6'dan $|Y\beta| \geq |X\alpha| \geq |Y\alpha| \geq |X\beta| \geq |Y\beta|$ ve buradan da $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ olduğu elde edilir.

Tersine, ya $\text{Dom}(\alpha) = \text{Dom}(\beta)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ya da $|X\alpha| = |Y\alpha| = |Y\beta| = |X\beta|$ olsun. İlk olarak $\text{Dom}(\alpha) = \text{Dom}(\beta)$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\alpha\mathcal{R}\beta$ olup $\alpha\mathcal{J}\beta$ olduğu elde edilir. Şimdi de $|X\alpha| = |Y\alpha| =$

$|Y\beta| = |X\beta|$ olduğunu ve $\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix}$ şeklinde yazıldığını kabul edelim. $|X\alpha| = |Y\beta|$ olduğundan $B_i \cap Y \neq \emptyset$ ve $B_j \cap Y = \emptyset$ olmak üzere $\beta = \begin{pmatrix} B_i & B_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $a'_i \in B_i \cap Y$ olmak üzere $\lambda = \begin{pmatrix} A_i \\ a'_i \end{pmatrix}$ ve $\mu = \begin{pmatrix} b_i \\ a_i \end{pmatrix}$ dönüşümlerini tanımlayalım. Buradan $\lambda, \mu \in PT(X, Y)$ ve $\alpha = \lambda\beta\mu$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde, $|X\beta| = |Y\alpha|$ eşitliği kullanılarak $\beta = \lambda'\alpha\mu'$ olacak şekilde $\lambda, \mu \in PT(X, Y)$ bulunabilir. Dolayısıyla $\alpha \mathcal{J} \beta$ olduğu gösterilmiş olur. ■

4.3. $PT(X, Y)$ için İzomorfizm Teoremi

Önerme 4.3.1. Eğer $\alpha \in PT(X, Y) \setminus \{\emptyset\}$ ise aşağıdakiler birbirine denktir.

- i) Bir $a \in Y$ için $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ şeklindedir.
- ii) α bir idempotent elemandır ve $\forall \beta \in PT(X, Y)$ için ya $(\alpha\beta)^2 = \emptyset$ ya da $(\alpha\beta)^2 = \alpha$ olur.

İspat: i) \Rightarrow ii): $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ ise α nın bir idempotent eleman olduğu açıktır. $\beta \in PT(X, Y)$ olsun. Eğer $a \notin \text{Dom}(\beta)$ ise $\alpha\beta = \emptyset$; eğer $a \in \text{Dom}(\beta)$ ise $\alpha\beta = \begin{pmatrix} a \\ a\beta \end{pmatrix}$ olup buradan da $(\alpha\beta)^2 = \emptyset$ ya da $(\alpha\beta)^2 = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \alpha$ olduğu elde edilir.

ii) \Rightarrow i): $\alpha \neq \emptyset$ olduğundan $\exists a \in X\alpha \subseteq Y$ vardır. $A = a\alpha^{-1}$ olsun. α bir idempotent eleman olduğundan $a \in A$ olur. Buradan $\left(\alpha \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix} \neq \emptyset$ olup kabulümüzden dolayı $\begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix} = \alpha$ olur. $b \in A$ olsun. O zaman $\left(\begin{pmatrix} A \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)^2 = \begin{pmatrix} A \\ b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} A \\ b \end{pmatrix} \neq \emptyset$ olup yine kabulümüzden dolayı $\begin{pmatrix} A \\ b \end{pmatrix} = \alpha$ olur. Buradan $a = b$, $A = \{a\}$ ve dolayısıyla da $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ olduğu elde edilir. ■

Teorem 4.3.2. X boş olmayan sonlu bir küme ve Y_1 ile Y_2 , X in boş olmayan iki alt kümesi olsun. O zaman $PT(X, Y_1) \cong PT(X, Y_2)$ olması için gerek ve yeter koşul $|Y_1| = |Y_2|$ olmasıdır.

İspat: $PT(X, Y_1) \cong PT(X, Y_2)$ ve $\Psi: PT(X, Y_1) \rightarrow PT(X, Y_2)$ fonksiyonunun bir izomorfizm olduğunu kabul edelim. Ayrıca

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} : a \in Y_1 \right\} \quad \text{ve} \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} : b \in Y_2 \right\}$$

kümelerini ele alalım. O zaman $|M_1| = |Y_1|$ ve $|M_2| = |Y_2|$ olur. Önerme 4.3.1'den her bir $\alpha \in M_1$ bir idempotent eleman ve $\forall \beta \in PT(X, Y_1)$ için ya $(\alpha\beta)^2 = \emptyset$ ya da $(\alpha\beta)^2 = \alpha$ olur. Dolayısıyla $(\alpha\Psi)^2 = \alpha\Psi$ olup $\forall \gamma = \beta\Psi \in PT(X, Y_2)$ için

$$(\alpha\Psi\gamma)^2 = (\alpha\Psi\beta\Psi)^2 = (\alpha\beta)^2\Psi = \begin{cases} \emptyset\Psi = \emptyset \\ \alpha\Psi \end{cases}$$

olduğu elde edilir. Buradan, $\exists b \in Y_2$ için $\alpha\Psi = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$ olup $M_1\Psi \subseteq M_2$ olduğu elde edilir. Ayrıca $\Psi^{-1}: PT(X, Y_2) \rightarrow PT(X, Y_1)$ dönüşümü bir izomorfizm olduğundan benzer şekilde $M_2\Psi^{-1} \subseteq M_1$ olur. Böylece $|M_1| = |M_1\Psi| \leq |M_2| = |M_2\Psi^{-1}| \leq |M_1|$ ve buradan da $|M_1| = |M_2|$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla da $|Y_1| = |M_1| = |M_2| = |Y_2|$ olur.

Tersine, $|Y_1| = |Y_2|$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\theta_1: Y_1 \rightarrow Y_2$ bire-bir ve örten dönüşümü vardır. X sonlu olduğundan $|X \setminus Y_1| = |X \setminus Y_2|$ olup benzer şekilde $\theta_2: X \setminus Y_1 \rightarrow X \setminus Y_2$ bire-bir ve örten dönüşümü vardır. $\theta = \theta_1 \cup \theta_2$ olsun. O zaman $\theta: X \rightarrow X$ dönüşümü de bire-bir ve örtendir. Şimdi de $\Phi: PT(X, Y_1) \rightarrow PT(X, Y_2)$ dönüşümünü $\forall \alpha \in PT(X, Y_1)$ için $\alpha\Phi = \theta^{-1}\alpha\theta$ şeklinde tanımlayalım. Φ dönüşümünün bir izomorfizm olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Dolayısıyla $PT(X, Y_1) \cong PT(X, Y_2)$ olur. ■

4.4. $T_{n,r}$ ve $PT_{n,r}$ nin Rankı

X sonlu bir küme ve Y, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ olmak üzere $|X| = n$ ve $|Y| = r$ ise kolaylık olması açısından $T(X, Y) = T_{n,r}$ ve $PT(X, Y) = PT_{n,r}$ şeklinde gösterilir.

Ayrıca, $1 \leq r \leq n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r li parçalanışlarının sayısı $S(n, r)$ ile gösterilir ve bu sayıya 2. Stirling sayısı denir. Bir anlamda bu sayı, n elemanlı bir küme üzerinde r tane denklik sınıfına sahip olan denklik bağıntısı sayısıdır ve $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ olmak üzere

$$S(n, r) = S(n - 1, r - 1) + rS(n - 1, r)$$

indirgeme bağıntısı yardımıyla kolayca bulunur.

Dikkat edilirse $n \geq 2$ ve $1 \leq r \leq n - 1$ için $|T_{n,r}| = r^n$ olur. Diğer taraftan PT_n, T_{n+1} yarıgrubuna gömülebileceğinden $|PT_{n,r}| = (r + 1)^n$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Hatırlanacağı üzere, $T_{n,r}$ veya $PT_{n,r}$ deki herhangi iki elemanın \mathcal{R} -bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul çekirdek kümelerinin aynı olması idi. Buradan $T_{n,r}$ ve $PT_{n,r}$ de sırasıyla $S(n, r)$ ve $S(n + 1, r + 1)$ tane maksimum rank r -li \mathcal{R} -sınıfı olduğunu kolaylıkla görebiliriz (mümkün olan tüm farklı r -li çekirdek kümeleri kadar). $\forall \alpha, \beta \in PT_n$ için $\text{Ker}(\alpha) \cap (\text{Dom}(\alpha\beta) \times \text{Dom}(\alpha\beta)) \subseteq \text{Ker}(\alpha\beta)$ ve $\text{Dom}(\alpha\beta) \subseteq \text{Dom}(\alpha)$ olduğundan $T_{n,r}$ nin herhangi bir doğuray kümesinin, $T_{n,r}$ deki rankı r olan $S(n, r)$ tane farklı \mathcal{R} -sınıfının her birinden en az bir tane eleman içermesi gerektiği kolaylıkla gösterilebilir. Benzer şekilde, $PT_{n,r}$ nin herhangi bir doğuray kümesi de $PT_{n,r}$ deki rankı r olan $S(n + 1, r + 1)$ tane farklı \mathcal{R} -sınıfının her birinden en az bir tane eleman içermelidir. Buradan $\text{rank}(T_{n,r}) \geq S(n, r)$ ve $\text{rank}(PT_{n,r}) \geq S(n + 1, r + 1)$ olduğu sonucuna varırız. Ayrıca, $T_{n,r}$ ve $PT_{n,r}$ nin rankı r olan her bir \mathcal{R} -sınıfının $r!$ tane elemanı olduğu da açıktır.

Hatırlanacağı üzere,

$$F_{n,r} = \{\alpha \in T_{n,r} : \{1, \dots, n\}\alpha = \{1, \dots, r\}\alpha\}$$

$T_{n,r}$ nin en geniş regüler alt yarıgrubudur ve dahası $T_{n,r}$ nin bütün regüler elemanlarının kümesidir. Rankı r olan herhangi bir $\alpha \in F_{n,r}$ dönüşümü için $\{1, \dots, n\}\alpha = \{1, \dots, r\} = \{1, \dots, r\}\alpha$ olup $F_{n,r}$ nin $\{1, \dots, r\}$ kümesi üzerinde çakışan

\mathcal{R} -bağlantılı herhangi iki elemanı eşit olmalıdır. Dolayısıyla $T_{n,r}$ nin, rankı r olan birbirinden farklı r^{n-r} tane regüler \mathcal{R} -sınıfı vardır ($\{r+1, \dots, n\}$ kümesinden $\{1, \dots, r\}$ kümesine tanımlı fonksiyon sayısı kadar). Bunların her biri aynı zamanda bir \mathcal{H} -sınıfıdır ve ayrıca $\{1, \dots, r\}$ üzerindeki simetrik grup S_r ye izomorf olan birer alt gruptur.

Benzer şekilde, $PT_{n,r}$ nin en geniş regüler alt yarıgrubu

$$PF_{n,r} = \{\alpha \in PT_{n,r} : \{1, \dots, n\}\alpha = \{1, \dots, r\}\alpha\}$$

kümesi olup bu küme aynı zamanda $PT_{n,r}$ nin bütün regüler elemanlarının kümesidir. Rankı r olan herhangi bir $\alpha \in PF_{n,r}$ dönüşümü için $\{1, \dots, r\} = \{1, \dots, n\}\alpha = \{1, \dots, r\}\alpha$ ve dolayısıyla da $\{1, \dots, r\} \subseteq \text{Dom}(\alpha)$ olduğu açıktır. Ayrıca, $PF_{n,r}$ nin $\{1, \dots, r\}$ kümesi üzerinde çakışan \mathcal{R} -bağlantılı herhangi iki elemanı eşit olmalıdır. Dolayısıyla $PT_{n,r}$ nin, rankı r olan birbirinden farklı $(r+1)^{n-r}$ tane regüler \mathcal{R} -sınıfı vardır ($\{r+1, \dots, n\}$ kümesinden $\{1, \dots, r\}$ kümesine tanımlı kısmi fonksiyon sayısı kadar). Bu \mathcal{R} -sınıflarının her biri aynı zamanda birer \mathcal{H} -sınıfıdır ve ayrıca $\{1, \dots, r\}$ üzerindeki simetrik grup S_r ye izomorf olan birer alt gruptur.

Özel olarak, $T_{n,1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}$ olup $\text{rank}(T_{n,1}) = 1 = S(n, 1)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, $PT_{n,1}$ in sıfırdan farklı $S(n+1, 2)$ tane elemanı var olup yukarıdaki çıkarımlardan dolayı bunların hepsi de herhangi bir doğuray kümesinde olmalıdır. Buradan $S(n+1, 2) = \text{rank}(PT_{n,1})$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $n \geq 3$ ve $2 \leq r \leq n-1$ olması durumu ele alınacaktır.

Önerme 4.4.1. $T_{n,r}$ ve $PT_{n,r}$ yarıgrupları, rankı r olan elemanları tarafından üretilirler.

İspat: $1 \leq k < r$ olmak üzere $\alpha \in PT_{n,r}$, rankı k olan bir eleman ve $y_0 \in \{1, \dots, r\} \setminus \text{im}(\alpha)$ olsun. İlk olarak $\alpha \in T_{n,r}$ olduğunu kabul edelim. O zaman, α nın aşikar olmayan bir çekirdek sınıfına ait olan bir $x_0 \in \text{Dom}(\alpha) = \{1, \dots, n\}$ vardır. Bu durumda $\alpha_1, \alpha_2 \in T_{n,r}$ dönüşümleri $\forall x \in \{1, \dots, n\}$ için

$$x\alpha_1 = \begin{cases} y_0, & x = x_0 \text{ ise} \\ x\alpha, & x \neq x_0 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad x\alpha_2 = \begin{cases} x, & x \in \text{im}(\alpha) \text{ ise} \\ x_0\alpha, & x = y_0 \text{ ise} \\ y_0, & x \notin \text{im}(\alpha) \cup \{y_0\} \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Şimdi de $\alpha \in PT_{n,r} \setminus T_{n,r}$ olduğunu kabul edelim ve bir $x_0 \in \{1, \dots, n\} \setminus \text{Dom}(\alpha)$ elemanını ele alalım. Bu durumda da $\alpha_1, \alpha_2 \in PT_{n,r}$ dönüşümleri $\text{Dom}(\alpha_1) = \text{Dom}(\alpha) \cup \{x_0\}$ ve $\text{Dom}(\alpha_2) = \{1, \dots, n\} \setminus \{y_0\}$ olmak üzere

$$x\alpha_1 = \begin{cases} y_0, & x = x_0 \text{ ise} \\ x\alpha, & x \neq x_0 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad x\alpha_2 = \begin{cases} x, & x \in \text{im}(\alpha) \text{ ise} \\ y_0, & x \notin \text{im}(\alpha) \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her iki durumda da $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ olur. Ayrıca, $\text{im}(\alpha_1) = \text{im}(\alpha_2) = \text{im}(\alpha) \cup \{y_0\}$ ve dolayısıyla $\text{rank}(\alpha_1) = \text{rank}(\alpha_2) = k + 1$ olup istenen sağlanır. ■

Önerme 4.4.2. $\alpha, \gamma \in PT_n$ için $\text{im}(\gamma) \subseteq \text{im}(\alpha)$ ve $\alpha = \alpha\gamma$ olsun. O zaman $\gamma^2 = \gamma$ olur.

İspat: $x \in \text{Dom}(\gamma)$ olsun. O zaman $x\gamma \in \text{im}(\gamma) \subseteq \text{im}(\alpha)$ ve buradan da $\exists a \in \text{Dom}(\alpha)$ için $x\gamma = a\alpha$ olur. $a \in \text{Dom}(\alpha)$ olduğundan $a \in \text{Dom}(\alpha\gamma)$ olup $x\gamma = a\alpha \in \text{Dom}(\gamma)$ ve $x\gamma^2 = a\alpha\gamma = a\alpha = x\gamma$ olduğu elde edilir. ■

Şimdi de

$$\varepsilon = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & r & r & \dots & r \end{array} \right) \in T_{n,r}$$

dönüşümünü ele alalım ($\varepsilon \in PT_{n,r}$ olduğuna da dikkat edelim). ε , rankı r olan bir idempotent eleman olduğundan kendisinin içinde bulunduğu \mathcal{R} -sınıfı R_ε , $T_{n,r}$ nin (benzer şekilde $PT_{n,r}$ nin) birim elemanı ε olan bir alt grubudur. $\alpha \in T_{n,r}$ (benzer şekilde $\alpha \in PT_{n,r}$) rankı r olan herhangi bir eleman olsun. O zaman $\alpha\varepsilon = \alpha$ olduğu

açıktır. Ayrıca herhangi bir $\gamma \in R_\varepsilon$ için $\gamma^t = \varepsilon$ olacak şekilde $\exists t \in \mathbb{N}$ var ($t = r!$ alabiliriz) olup $\alpha = \alpha\varepsilon = \alpha\gamma^t = (\alpha\gamma)\gamma^{t-1}$ ve dolayısıyla da $\alpha\gamma\mathcal{R}\alpha$ olur. Diğer taraftan, $\alpha\gamma_1 = \alpha\gamma_2$ olacak şekildeki $\gamma_1, \gamma_2 \in R_\varepsilon$ için γ_1 in R_ε alt grubundaki tersi γ_1^{-1} olmak üzere $\alpha = \alpha\varepsilon = \alpha\gamma_1\gamma_1^{-1} = \alpha\gamma_2\gamma_1^{-1}$ ve $\text{im}(\gamma_2\gamma_1^{-1}) = \{1, \dots, r\} = \text{im}(\alpha)$ olup Önerme 4.4.2'den $\gamma_2\gamma_1^{-1}$ dönüşümü, $T_{n,r}$ nin (benzer şekilde $PT_{n,r}$ nin) bir idempotent elemanıdır. Buradan $\gamma_2\gamma_1^{-1} = \varepsilon$ ve dolayısıyla da $\gamma_1 = \gamma_2$ olduğu elde edilir. O zaman R_ε dan R_α ya $\gamma \mapsto \alpha\gamma$ şeklindeki eşleme bire-birdir. Dolayısıyla $|R_\varepsilon| = |R_\alpha| (= r!)$ olup $R_\alpha = \alpha R_\varepsilon$ olduğu elde edilir. Bu son sonuç ve Önerme 4.4.1'den $T_{n,r}$ nin (benzer şekilde $PT_{n,r}$ nin), R_ε sınıfını ve rankı r olan diğer tüm \mathcal{R} -sınıflarından yalnız bir tane keyfi elemanı içeren bir A alt kümesinin, $T_{n,r}$ için (benzer şekilde $PT_{n,r}$ için) bir doğuray kümesi olduğu sonucuna varırız.

$r = 2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$R_\varepsilon = \left\{ \varepsilon, \varepsilon_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

olup R_ε grubunun ε_b tarafından üretildiği açıktır. Dolayısıyla $B = A \setminus \{\varepsilon\} = (A \setminus R_\varepsilon) \cup \{\varepsilon_b\}$ kümesi, $T_{n,2}$ nin $S(n,2)$ (benzer şekilde $PT_{n,2}$ nin $S(n+1,3)$) elemanlı bir doğuray kümesidir.

Son olarak $r \geq 3$ olduğunu kabul edelim. Bilindiği üzere S_r simetrik grubunun rankı 2 idi. Özel olarak, $a = (1\ 2)$ transpozisyonu ve $b = (1\ 2 \dots r)$ r -deviri S_r simetrik grubunu üretmektedir. Bunlara R_ε da karşılık gelen elemanlar (R_ε nin, S_r ye izomorf bir grup olduğunu hatırlayalım) sırasıyla

$$\varepsilon_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r & r+1 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & \dots & r & r & \dots & r \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \varepsilon_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & r & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

olup $\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}$ kümesi R_ε sınıfını üretir. Bunun yanında

$$\varepsilon'_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r-1 & r & r+1 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & r & 1 & r & \dots & r \end{pmatrix} \in T_{n,r}$$

(aynı zamanda $\varepsilon'_b \in PT_{n,r}$ olduğuna da dikkat edelim) elemanını da ele alalım. ε'_b elemanının rankının r , $\varepsilon'_b \notin R_\varepsilon$ ve $\varepsilon_b = \varepsilon\varepsilon'_b = \varepsilon_a^2\varepsilon'_b$ olduğu kolayca görülür. ε' , A nın $\varepsilon'\mathcal{R}\varepsilon'_b$ olacak şekildeki (tek) elemanı olmak üzere $B = (A \setminus (R_\varepsilon \cup \{\varepsilon'\})) \cup \{\varepsilon_a, \varepsilon'_b\}$ kümesi, $T_{n,r}$ nin $S(n, r)$ (benzer şekilde $PT_{n,r}$ nin $S(n+1, r+1)$) elemanlı bir doğuray kümesidir.

Böylece aşağıdaki iki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.4.3. $n \geq 2$ ve $1 \leq r \leq n-1$ için $\text{rank}(T_{n,r}) = S(n, r)$ olur. ■

Teorem 4.4.4. $n \geq 2$ ve $1 \leq r \leq n-1$ için $\text{rank}(PT_{n,r}) = S(n+1, r+1)$ olur. ■

5. $F(X, Y)$ ALT YARIGRUBU

3. Bölümde X boş olmayan bir küme ve Y , X in boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere

$$F(X, Y) = \{\alpha \in T(X, Y) : X\alpha \subseteq Y\alpha\}$$

kümesinin $T(X, Y)$ nin en geniş regüler alt yarigrubu olduğu ve hatta $T(X, Y)$ nin bütün regüler elemanlarını içerdiği gösterilmişti. Yine aynı bölümde, $T(X, Y)$ nin Green bağıntılarının ve bir maksimal tersinir alt yarigrubunun saptanmasında $F(X, Y)$ nin belirleyici rolü üzerinde durulmuştu. Bu bölümde ise $F(X, Y)$ nin diğer bazı cebirsel özellikleri incelenecektir.

5.1. $F(X, Y)$ nin Bazı İzomorfizm Özellikleri

Y , X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. T_Y ile $F(X, Y)$ nin izomorfikliği ile ilgili gerek ve yeter koşulları verebilmek için ilk önce aşağıdakilere dikkat edelim.

- i) Eğer $Y = \{a\}$ şeklinde yalnız bir elemandan oluşuyorsa $F(X, Y)$ de yalnız bir elemandan oluşur ve bu eleman görüntü kümesi $\{a\}$ olan sabit dönüşümdür.
- ii) Eğer $X = Y$ ise $F(X, Y) = T_X$ olur.

Ayrıca, bir $\alpha \in F(X, Y)$ dönüşümünün $X\alpha = \{y_i : i \in I\}$, $y_i\alpha^{-1} = X_i$ ($i \in I$), $\bigcup_{i \in I} X_i = X$ ve $\forall i \in I$ için $X_i \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} X_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir olduğunu da hatırlayalım.

Önerme 5.1.1. $T_Y \cong F(X,Y)$ olması için gerek ve yeter koşul ya $X = Y$ ya da $|Y| = 1$ olmasıdır.

İspat: $X = Y$ iken $T_Y \cong F(X,Y)$ olduğu açıktır. $|Y| = 1$ ise T_Y ve $F(X,Y)$ yalnız bir eleman (sabit dönüşüm) içeriyor olup $T_Y \cong F(X,Y)$ olur.

Şimdi de bir Φ izomorfizmi altında $T_Y \cong F(X,Y)$, $Y \subsetneq X$ ve $|Y| \geq 2$ olduğunu kabul edelim. Y üzerindeki birim dönüşüm 1_Y , T_Y nin birim elemanı olduğundan $(1_Y)\Phi = \epsilon$ dönüşümü de $F(X,Y)$ nin birim elemanı olmak zorundadır. Bu da

$$\forall \alpha \in F(X,Y) \text{ için } \epsilon\alpha = \alpha \text{ ve } \alpha\epsilon = \alpha$$

olması demektir. $\alpha \in F(X,Y)$, $X\alpha = Y$ olacak şekilde bir dönüşüm olsun (örneğin, belirli bir $y_0 \in Y$ için α dönüşümü

$$x\alpha = \begin{cases} x, & x \in Y \text{ ise} \\ y_0, & x \notin Y \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $X\alpha = Y$ ve $\alpha \in F(X,Y)$ olur). O zaman $Y\epsilon = (X\alpha)\epsilon = (X)\alpha\epsilon = X\alpha = Y$ olup buradan $X\epsilon = Y\epsilon = Y$ olduğu elde edilir. $i \in I$ ve $\{y_i\} = Y$ olmak üzere $\epsilon = \begin{pmatrix} A_i \\ y_i \end{pmatrix}$ olsun. ϵ bir idempotent eleman olduğundan $\forall i \in I$ için $y_i \in A_i$ olur. $Y \subsetneq X$ olduğundan $\exists j \in I$ için $x \in (X \setminus Y) \cap A_j$ vardır. $|Y| \geq 2$ olduğundan $j \neq k \in I$ var olup

$$B_i = \begin{cases} A_i, & k \neq i \neq j \text{ ise} \\ A_j \setminus \{x\}, & i = j \text{ ise} \\ A_k \cup \{x\}, & i = k \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde B_i kümeleri tanımlayabiliriz. Bu durumda $\{B_i\}$, X in $\forall i \in I$ için $y_i \in B_i$ ve $\{A_i\} \neq \{B_i\}$ olacak şekildeki bir parçalanışıdır. Şimdi de

$$\beta = \begin{pmatrix} B_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

dönüşümünü ele alalım. $\beta \in F(X,Y)$ olup buradan $\beta\epsilon = \begin{pmatrix} B_i \\ y_i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} A_i \\ y_i \end{pmatrix} = \epsilon\beta$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla ya $X = Y$ ya da $|Y| = 1$ olmalıdır. ■

Teorem 5.1.2. X ve Z boş olmayan iki küme ve $\emptyset \neq Y \subseteq X$ olsun. $T_Z \cong F(X,Y)$ olması için gerek ve yeter koşul ya $X = Y$ ve $|Y| = |Z|$ ya da $|Y| = 1 = |Z|$ olmasıdır.

İspat: Eğer $X = Y$ ve $|Y| = |Z|$ ise $T_Y \cong T_Z$ ve Önerme 5.1.1'den $T_Y \cong F(X,Y)$ olup $T_Z \cong F(X,Y)$ olduğu elde edilir.

Tersine, $T_Z \cong F(X,Y)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $F(X,Y)$ birim elemana sahiptir. Eğer $|Y| = 1$ ise $F(X,Y)$ sadece bir elemanlı olup buradan $|Z| = 1$ ve dolayısıyla da $|Y| = 1 = |Z|$ olduğu elde edilir. Eğer $|Y| \geq 2$ ise $X = Y$ olmalıdır. Aksi takdirde, eğer $Y \subsetneq X$ ise $F(X,Y)$ nin birim elemanı olamaz. Buradan $T_Y = F(X,Y) \cong T_Z$ ve dolayısıyla da $|Y| = |Z|$ olduğu elde edilir. ■

Bu teoremin doğrudan bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1.3. Eğer $Y \subsetneq X$ ve $|Y| \geq 2$ ise T_Y ile $F(X,Y)$ izomorfik olamaz. ■

Teorem 5.1.4. $T_Y, F(X,Y)$ nin içine gömülebilir.

İspat: Eğer $X = Y$ veya $|Y| = 1$ ise $T_Y \cong F(X,Y)$ olup $T_Y, F(X,Y)$ nin içine gömülebilir. Şimdi de $Y \subsetneq X$ ve $|Y| > 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda bir $a \in Y$ seçelim ve her bir $\alpha \in T_Y$ için $\alpha': X \rightarrow X$ dönüşümünü

$$x\alpha' = \begin{cases} x\alpha, & x \in Y \text{ ise} \\ a\alpha, & x \notin Y \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $\alpha' \in F(X, Y)$ olup $\alpha, \beta \in T_Y$ için tanımlanan α' ve β' dönüşümlerinin Y kümesine kısıtlanışları sırasıyla $\alpha'|_Y = \alpha$ ve $\beta'|_Y = \beta$ olacağından $\Psi_\alpha : T_Y \rightarrow F(X, Y)$, $\alpha\Psi_\alpha = \alpha'$ şeklinde verilen Ψ_α fonksiyonu bire-bir olur. Ayrıca $(\alpha\beta)' = \alpha'\beta'$ olduğundan Ψ_α bir homomorfizmdir. Dolayısıyla $T_Y, F(X, Y)$ nin içine gömülebilir. ■

Sonuç 5.1.5. Her S yarıgrubu, $S^1 \subseteq X$ olacak şekildeki bir X kümesi için $F(X, S^1)$ in içine gömülebilir. ■

Teorem 5.1.6. Her regüler S yarıgrubu $F(S^1, S)$ nin içine gömülebilir.

İspat: S bir regüler yarıgrup olsun. Eğer S nin birim elemanı varsa (S nin sağ regüler temsili kullanılarak) birim elemanı 1_S olan (S üzerindeki birim dönüşüm) regüler yarıgrup $T_{S^1} = T_S = F(S, S) = F(S^1, S)$ nin içine gömülebildiği açıkça görülür. Eğer S nin birim elemanı yoksa $|S| > 1$ ve $S \subsetneq S^1$ olacağından $F(S^1, S)$ birim elemansız bir regüler yarıgrup olur. Bu durumda her bir $s \in S$ için $s = sts$ olacak şekilde $t \in S$ vardır. Buradan $\rho_s : S^1 \rightarrow S^1$ dönüşümü $\forall x \in S^1$ için $x\rho_s = xs$ şeklinde tanımlanırsa $1\rho_s = 1s = s = sts = st\rho_s$ olacağından $\rho_s \in F(S^1, S)$ olur. Dolayısıyla $s \mapsto \rho_s$ şeklinde tanımlanan $S \rightarrow F(S^1, S)$ genişletilmiş sağ regüler temsili bir monomorfizm olup S , birim elemansız bir regüler yarıgrubun içine gömülebilir. ■

5.2. $F(X, Y)$ Üzerinde Green Denklik Bağlılıkları ve İdealler

3. Bölümde $T(X, Y)$ üzerinde Green denklik bağlantıları incelenmişti. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda $F(X, Y)$ üzerinde Green denklik bağlantıları aşağıdaki gibi tanımlanır.

Önerme 5.2.1. $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ olsun.

- i) $\alpha \mathcal{L} \beta$ olması için gerek ve yeter koşul $X\alpha = X\beta$ olmasıdır.
- ii) $\alpha \mathcal{R} \beta$ olması için gerek ve yeter koşul $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olmasıdır.
- iii) $\alpha \mathcal{D} \beta$ olması için gerek ve yeter koşul $|X\alpha| = |X\beta|$ olmasıdır.
- iv) $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ dir.

İspat: i) ve ii): $F = F(X, Y)$, $T = T(X, Y)$ nin bir regüler alt yarigrubu olup Hall Teoreminden [Howie, Proposition II.4.5]

$$\mathcal{L}^F = \mathcal{L}^T \cap (F \times F) \text{ ve } \mathcal{R}^F = \mathcal{R}^T \cap (F \times F)$$

olur. Buradan $\alpha \mathcal{L} \beta \Leftrightarrow X\alpha = X\beta$ ve $\alpha \mathcal{R} \beta \Leftrightarrow \text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olduğu elde edilir.

iii): Eğer $F(X, Y)$ üzerinde $\alpha \mathcal{D} \beta$ ise $T(X, Y)$ üzerinde de $\alpha \mathcal{D} \beta$ olacağından $|X\alpha| = |X\beta|$ olduğu elde edilir. Şimdi de $|X\alpha| = |X\beta|$ olduğunu kabul edelim. O zaman bire-bir ve örten bir $\theta : X\beta \rightarrow X\alpha$ fonksiyonu vardır. $\mu = \beta\theta$ alırsak $X\mu = X\beta\theta = (X\beta)\theta = X\alpha$ olur. $\beta \in F(X, Y)$ olduğundan $X\beta \subseteq Y\beta$ olup $X\mu = X\beta\theta \subseteq Y\beta\theta = Y\mu$ ve dolayısıyla da $\mu \in F(X, Y)$ olur. $\alpha, \mu \in F(X, Y)$ ve $X\alpha = X\mu$ olup i)'den dolayı $\alpha \mathcal{L} \mu$ olduğu elde edilir. $\mu = \beta\theta$ ve θ , $X\beta$ üzerinde bire-bir olduğundan $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ olup ii)'den dolayı $\mu \mathcal{R} \beta$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\alpha \mathcal{D} \beta$ olur.

vi): $F(X, Y)$ üzerinde $\alpha \mathcal{J} \beta$ olduğunu kabul edelim. O zaman $T(X, Y)$ üzerinde de $\alpha \mathcal{J} \beta$ olacağından $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ veya $|X\alpha| = |X\beta|$ olmalıdır. Eğer $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\beta)$ ise $|X\alpha| = |X/\text{Ker}(\alpha)| = |X/\text{Ker}(\beta)| = |X\beta|$ olup iii)'den dolayı $\alpha \mathcal{D} \beta$ olur. Diğer taraftan, herhangi bir yarigrup üzerinde $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$ olduğundan $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 5.2.2. $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ve $|X\alpha| \leq |X\beta|$ olsun. O zaman $\alpha = \lambda\beta\mu$ olacak şekilde $\exists \lambda, \mu \in F(X, Y)$ vardır.

İspat: $\alpha, \beta \in F(X, Y)$ ve $|X\alpha| \leq |X\beta|$ olsun. O zaman $\forall i \in I$ ve $\forall j \in J$ için $A_i \cap Y \neq \emptyset$, $B_i \cap Y \neq \emptyset \neq B_j \cap Y$, $\{a_i\} \subseteq Y$ ve $\{b_i, b_j\} \subseteq Y$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} B_i & B_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. $\forall i \in I$ için $a'_i \in B_i \cap Y$, $b_i \in C_i$ ve $\cup C_i = X$ olmak üzere

$$\lambda = \begin{pmatrix} A_i \\ a'_i \end{pmatrix} \text{ ve } \mu = \begin{pmatrix} C_i \\ a_i \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanırsa $\lambda, \mu \in F(X, Y)$ ve $\alpha = \lambda\beta\mu$ olur. ■

Teorem 5.2.3. $2 \leq r \leq |Y|$ olmak üzere $F(X, Y)$ nin öz idealleri

$$Q_r = \{\alpha \in F(X, Y) : |X\alpha| < r\}$$

şeklindeki Q_r kümeleridir.

İspat: $\alpha \in Q_r$ ve $\beta \in F = F(X, Y)$ olsun. O zaman $|X\alpha\beta| \leq |X\alpha| < r$ olur. $X\beta \subseteq Y$ olduğundan $|X\beta\alpha| \leq |Y\alpha| = |X\alpha| < r$ olduğu elde edilir. Ayrıca, belirli bir $y_0 \in Y$ için

$$x\gamma = \begin{cases} x, & x \in Y \text{ ise} \\ y_0, & x \notin Y \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\gamma \in F(X, Y)$ dönüşümü için $\gamma \in F \setminus Q_r$ olup Q_r , F nin bir öz idealidir.

Tersine A , F nin bir öz ideali ve r sayısı da $\forall \alpha \in A$ için $|X\alpha| < r$ olacak şekilde en küçük kardinalite olsun. Buradan $A \subseteq Q_r$ olduğu açıktır. Ayrıca, A bir öz ideal olduğundan $\exists \gamma \in F \setminus A$ var olup $2 \leq r \leq |X\gamma| \leq |Y|$ olur. Şimdi de bir $\beta \in Q_r$ dönüşümünü ele alalım. O zaman $|X\beta| < r$ olur ve r nin seçiminden dolayı $|X\beta| \leq |X\alpha|$ olacak şekilde $\exists \alpha \in A$ vardır. Ayrıca, Önerme 5.2.2'den $\beta = \lambda\alpha\mu$ olacak şekilde $\exists \lambda, \mu \in F$ var olup $A \subseteq Q_r$ olduğu elde edilir. ■

5.3. $F(X, Y)$ nin Maksimal Regüler Alt Yarıgrupları

Bu bölümde Y, X in sonlu bir alt kümesi olmak üzere ilk olarak $F(X, Y)$ nin \mathcal{H} -Green sınıfları karakterize edilecek ve daha sonra $F(X, Y)$ nin maksimal regüler alt yarıgrupları belirlenecektir. Ayrıca, kolaylık olması açısından $F(X, Y)$ yerine kısaca F yazılacaktır.

Hatırlanacağı üzere T_X in grup olan her bir \mathcal{H} -Green sınıfı, $\exists A \subseteq X$ için S_A simetrik grubuna izomorftur (Clifford ve Preston (1961), Theorem 2.10). Bu teorem F için uygulandığında da doğru olur. Şöyleki; $\epsilon \in F$ bir idempotent eleman ve $\forall i \in I$ için $A_i \cap Y \neq \emptyset$, $a_i \in A_i$ ve $\{a_i\} \subseteq Y$ olmak üzere $\epsilon = \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix}$ olarak yazılabilir. “ $\alpha \in H_\epsilon \Leftrightarrow X\alpha = X\epsilon$ ve $\text{Ker}(\alpha) = \text{Ker}(\epsilon)$ ” olduğundan

$$H_\epsilon = \left\{ \begin{pmatrix} A_i \\ a_i \sigma \end{pmatrix} : \sigma, \{a_i\} \text{ üzerinde bir permütasyon} \right\}$$

olur. Buradan $\begin{pmatrix} A_i \\ a_i \sigma \end{pmatrix} \mapsto \sigma$ eşlemesi altında $H_\epsilon \cong S_{\{a_i\}}$ olduğu görülür. Ayrıca Y, X in $|Y| = r$ olacak şekildeki sonlu bir alt kümesi ve $1 \leq k \leq r$ olmak üzere

$$J(F; k) = \{\alpha \in F : |X\alpha| = k\}$$

olsun. O zaman $J(F; k)$, F yarı grubunun bir \mathcal{J} -Green sınıfıdır.

Kolaylık olması açısından bundan sonra $Y = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ alınacaktır.

Önerme 5.3.1. $J(F; r)$, izomorfik olan ayrık grupların bir birleşimidir.

İspat: Öncelikle her bir $\alpha \in J(F; r)$ dönüşümünün $1 \leq j \leq r$ için $A_j \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir olduğuna dikkat edelim.

Her bir B_j kümesi, Y nin bir ve yalnız bir elemanını içeriyor olmak üzere $\pi_i = \{B_1, B_2, \dots, B_r\}$ kümesi X in herhangi bir r -li parçalanışı olsun. Bu şekildeki bir π_i parçalanışına X in *kesişim özellikli bir parçalanışı* denir. $1 \leq j \leq r$ için $b_j \in B_j \cap Y$ olmak üzere ϵ_i ,

$$\epsilon_i = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ b_1 & b_2 & \dots & b_r \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan idempotent eleman olsun. O zaman $\epsilon_i \in J(F; r)$ olur ve

$$H_{\epsilon_i} = \left\{ \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ a_1\sigma & a_2\sigma & \dots & a_r\sigma \end{pmatrix} : \sigma \in S_Y \right\}$$

ϵ_i yi içeren grup \mathcal{H} -Green sınıfıdır. X in kesişim özellikli tüm parçalanışları π_i ler için $H_{\epsilon_i} \subseteq J(F; r)$ olur. X in kesişim özellikli tüm parçalanışlarının sayısı $|I|$ olsun. O zaman $\forall i \in I$ için $H_{\epsilon_i} \cong S_Y$ ve $J(F; r) = \cup_{i \in I} H_{\epsilon_i}$ olup $J(F; r)$ ayrık grupların bir birleşimidir. ■

Önerme 5.3.2. $J(F; r)$, F nin bir regüler alt yarıgrubudur.

İspat: $\alpha, \beta \in J(F; r)$ olsun. O zaman $1 \leq i \leq r$ için $a_i \in A_i \cap B_i \cap Y$ ve $\sigma, \delta \in S_Y$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1\sigma & a_2\sigma & \dots & a_r\sigma \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ a_1\delta & a_2\delta & \dots & a_r\delta \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $\sigma\delta \in S_Y$ ve

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1\sigma\delta & a_2\sigma\delta & \dots & a_r\sigma\delta \end{pmatrix}$$

olup $\alpha\beta \in J(F; r)$ olduğu elde edilir. Ayrıca, $J(F; r) = \bigcup_{i \in I} H_{\epsilon_i}$ ayrık grupların bir birleşimi olduğundan $J(F; r)$ deki her eleman regülerdir. ■

Şimdi de $1 \leq k \leq r$ olmak üzere

$$Q(F; k) = J(F; 1) \cup \dots \cup J(F; k) = \{\alpha \in F : |X\alpha| \leq k\}$$

kümesini ele alalım. F regüler ve Teorem 5.2.3'ten dolayı $Q(F; k)$, F nin bir ideali olduğundan $Q(F; k)$, F nin bir regüler alt yarıgrubu olur. Buradan aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 5.3.3. $1 \leq k \leq r$ için $Q(F; k)$, F nin bir ideali ve bir regüler alt yarıgrubudur. ■

Teorem 5.3.4. $Q(F; r-2) \cup J(F; r)$ kümesi F nin bir maksimal regüler alt yarıgrubudur.

İspat: $Q(F; r-2)$, F nin bir ideali ve $J(F; r)$, F nin bir alt yarıgrubu olduğundan $T = Q(F; r-2) \cup J(F; r)$ kümesi F nin bir alt yarıgrubu olur. Önerme 5.3.2 ve 5.3.3'ten dolayı $Q(F; r-2)$ ve $J(F; r)$ regüler olup T de regülerdir.

Şimdi de T nin maksimal regüler olduğunu gösterelim. $T \subsetneq S \subseteq F$ olacak şekilde F nin bir S regüler alt yarıgrubu var olsun. O zaman $\exists \alpha \in J(F; r-1) \cap S$ var olup $1 \leq i \leq r-1$ için $A_i \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{r-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla $|A_i \cap Y| = 2$ olacak şekilde bir A_i vardır. Kolaylık olması açısından $A_1 \cap Y = \{y_1, y_2\} \subseteq Y$ olduğunu kabul edelim. $\beta \in J(F; r-1)$ herhangi bir eleman olsun. O zaman $1 \leq i \leq r-1$ için $B_i \cap Y \neq \emptyset$ ve $\{b_1, \dots, b_r\} = Y$ olmak üzere

$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_{r-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{r-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. O zaman $|B_j \cap Y| = 2$ olacak şekilde bir B_j var olup bir $y \in B_j \cap Y$ seçilebilir. $1 \leq i \leq r-1$ için $a_i \in C_i$ olmak üzere $\{C_1, C_2, \dots, C_r\}$ kümesi X in bir parçalanışı olsun ve

$$\gamma = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_{j-1} & C_j & C_{j+1} & \dots & C_{r-1} & C_r \\ b_j & b_2 & \dots & b_{j-1} & b_1 & b_{j+1} & \dots & b_{r-1} & b_r \end{pmatrix}$$

olarak tanımlansın. Buradan $\gamma \in J(F; r)$ ve

$$\alpha\gamma = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{j-1} & A_j & A_{j+1} & \dots & A_{r-1} \\ b_j & b_2 & \dots & b_{j-1} & b_1 & b_{j+1} & \dots & b_{r-1} \end{pmatrix} = \theta \in S$$

olur. Şimdi de $\{c_2, \dots, c_{r-1}\} = Y \setminus \{y_1, y_2\}$ ve $2 \leq i \leq r-1$ için $c_i \in A_i$ olmak üzere ($y_1, y_2 \in A_1$ olduğundan bu mümkündür)

$$\delta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_{j-1} & B_j \setminus \{y\} & B_{j+1} & \dots & B_{r-1} & \{y\} \\ c_j & c_2 & \dots & c_{j-1} & y_1 & c_{j+1} & \dots & c_{r-1} & y_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. O zaman $\delta \in J(F; n)$ olup

$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_{r-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{r-1} \end{pmatrix} = \delta\theta \in S$$

olur. Dolayısıyla $J(F; r-1) \subseteq S$ olup bu durum $S = F$ olmasını gerektirir. ■

Şimdi ileride vereceğimiz Teorem 5.3.6'nın ispatı için kullanacağımız $J(F; r)$ ile ilgili bazı bilgileri verelim. $Y, \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ nin bir transversali olmak üzere $J(F; r)$ deki her bir ϵ_i idempotent elemanı için

$$H_{\epsilon_i} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1\sigma & a_2\sigma & \dots & a_r\sigma \end{pmatrix} : \sigma \in S_Y \right\}$$

idi. O zaman

$$\forall \alpha \in H_{\epsilon_i} \text{ için } \alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1\sigma & a_2\sigma & \dots & a_r\sigma \end{pmatrix} \mapsto \sigma$$

şeklinde tanımlanan $\Phi_i : H_{\epsilon_i} \rightarrow S_Y$ dönüşümü bir izomorfizmdir. Dolayısıyla $i \in I$ için M_i nin H_{ϵ_i} nin bir maksimal alt grubu olması için gerek ve yeter koşul $(M_i)\Phi_i = U_i$ nin S_Y nin bir maksimal alt grubu olmasıdır. $J(F;r) = \bigcup_{i \in I} H_{\epsilon_i}$ olmak üzere $\forall i \in I$ için M_i, H_{ϵ_i} nin bir maksimal alt grubu ve bütün U_i kümeleri birbirine eşit olmak üzere U_i, S_Y nin M_i ye karşılık gelen maksimal alt grubu olsun. O zaman $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ olmak üzere $M \subseteq J(F;r)$ olur ve aynı zamanda M , aşağıdaki önermede bahsi geçen özelliği sağlar.

Son olarak, S bir yarıgrup ve A, S nin boş olmayan bir alt kümesi olmak üzere $\langle A \rangle$ yarıgrubunun, S nin A yı içeren en küçük alt yarıgrubu olduğunu hatırlayalım.

Önerme 5.3.5. $M, J(F;r)$ nin bir maksimal regüler alt yarıgrubudur.

İspat: $\alpha, \beta \in M$ olsun. O zaman $\exists i, j \in I$ için $\alpha \in M_i$ ve $\beta \in M_j$ olup $\forall 1 \leq t \leq r$ için $a_t \in A_t \cap B_t$ ve $\sigma, \delta \in U_i = U_j$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1\sigma & a_2\sigma & \dots & a_r\sigma \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ a_1\delta & a_2\delta & \dots & a_r\delta \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan $\sigma\delta \in U_i$ ve

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1\sigma\delta & a_2\sigma\delta & \dots & a_r\sigma\delta \end{pmatrix}$$

olup $\alpha\beta \in M_i$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $M, J(F; r)$ nin bir alt yarıgrubudur. Ayrıca, her bir M_i bir grup olduğundan M nin regüler olduğu açıktır.

Şimdi de M nin maksimal regüler olduğunu gösterelim. $M \subsetneq T \subseteq J(F; r)$ olacak şekilde $J(F; r)$ nin bir T regüler alt yarıgrubu var olsun. O zaman $\exists \alpha \in T \setminus M$ var olup bir $i \in I$ için $\alpha \in H_{\epsilon_i} \setminus M_i$ olur. $M_i \subseteq T$ ve M_i, H_{ϵ_i} de maksimal olduğundan $H_{\epsilon_i} = \langle M_i, \alpha \rangle \subseteq T$ olur. $k \in I$ herhangi bir eleman, $1 \leq i \leq r$ için $a_i \in C_i$ ve $\rho \in S_Y$ olmak üzere

$$\lambda = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_r \\ a_1\rho & a_2\rho & \dots & a_r\rho \end{pmatrix} \in H_{\epsilon_k}$$

olsun. Ayrıca, $1 \leq i \leq r$ için $a_i \in D_i$ olmak üzere

$$\mu = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \dots & D_r \\ a_1\rho & a_2\rho & \dots & a_r\rho \end{pmatrix} \in H_{\epsilon_i}$$

dönüşümünü ele alalım. O zaman $\lambda = \epsilon_k \mu \in M_k H_{\epsilon_i} \subseteq T$ olur. Buradan $\forall k \in I$ için $H_{\epsilon_k} \subseteq T$ ve dolayısıyla $T = J(F; r)$ olur. ■

Teorem 5.3.6. M , bir önceki önermede bahsi geçen küme olsun. O zaman $Q(F; r - 1) \cup M, F$ nin bir maksimal regüler alt yarıgrubudur.

İspat: Teorem 5.3.4'teki ispata benzer bir ispat yaparak $Q(F; r - 1) \cup M$ kümesinin, F nin bir regüler alt yarıgrubu olduğunu gösterebiliriz.

Şimdi de $T = Q(F; r - 1) \cup M$ kümesinin maksimal regüler olduğunu gösterelim. S, F nin $T \subsetneq S \subseteq F$ olacak şekilde bir regüler alt yarıgrubu olsun. O zaman $M \subsetneq S \cap J(F; r)$ kümesi $J(F; r)$ nin bir alt yarıgrubudur. Eğer $\alpha \in [S \cap J(F; r)] \setminus M$ ise $\alpha \in H_{\epsilon_i} \setminus M_i$ olacak şekilde $\exists i \in I$ vardır. M_i, H_{ϵ_i} nin bir maksimal alt grubu ve $\langle M_i \cup \alpha \rangle$ de H_{ϵ_i} nin M_i yi öz olarak içeren bir alt grubu olduğundan $H_{\epsilon_i} = \langle M_i \cup \alpha \rangle \subseteq S$ olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\alpha, S \cap J(F; r)$

kümesinde bir regüler elemandır ve $S \cap J(F; r)$ de $J(F; r)$ nin M_i yi öz olarak içeren bir regüler alt yarıgrubudur. Dolayısıyla, Önerme 5.3.5'ten $S \cap J(F; r) = J(F; r)$ ve buradan da $S = F$ olduğu elde edilir. ■

İleride F nin sadece iki tip (Teorem 5.3.4 ve 5.3.6'da verilen şekilde) maksimal regüler alt yarıgrubu olduğu gösterilecektir. Ama öncesinde ispat için gerekli olan aşağıdaki dört önermeyi verelim.

Önerme 5.3.7. $T, J(F; r) = \cup_{i \in I} H_{\epsilon_i}$ nin bir maksimal regüler alt yarıgrubu olsun.

Ayrıca $J = \{j \in I : T \cap H_{\epsilon_j} \neq \emptyset\}$ ve $\forall j \in J$ için $T_j = T \cap H_{\epsilon_j}$ olsun.

- i) T_j kümelerine, S_Y de (izomorfizm altında) karşılık gelen V_j kümeleri çakışiktır.
- ii) $\forall j \in J$ için T_j, H_{ϵ_j} nin bir maksimal alt grubudur.

İspat: i): Birbirinden farklı $j, k \in J$ ikilisi için $V_j \neq V_k$ olduğunu kabul edelim. O zaman bir $\sigma \in V_j \setminus V_k$ (ya da $\sigma \in V_k \setminus V_j$) vardır. $1 \leq i \leq r$ için $y_i \in A_i \cap B_i$ olmak üzere

$$\epsilon_k = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix} \in T_k \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_r \\ a_1\sigma & a_2\sigma & \dots & a_r\sigma \end{pmatrix} \in T_j$$

olsun. $\sigma \notin V_k$ olduğundan

$$\epsilon_k \beta = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_r \\ a_1\sigma & a_2\sigma & \dots & a_r\sigma \end{pmatrix} \in H_{\epsilon_k} \setminus T_k$$

olur. Bununla birlikte $T \cap (H_{\epsilon_k} \setminus T_k) = \emptyset$ olduğundan $\epsilon_k \beta \notin T$ olması gerekir. Fakat $\epsilon_k \beta \in T_k T_j \subseteq T$ olduğundan bu mümkün değildir. Dolayısıyla $\forall j, k \in J$ için $V_j = V_k$ olur.

ii): $\exists k \in J$ için T_k nin H_{ϵ_k} nin bir maksimal alt grubu olmadığını kabul edelim. O zaman, H_{ϵ_k} nin bir maksimal alt grubu M_k için $T_k \subsetneq M_k$ olur. M_k ya S_Y de karşılık gelen alt grup U_k olsun. O zaman i)'den dolayı $\forall j, k \in J$ için $V_j = V_k \subsetneq U_k$ olur. U_i kümeleri birbirine eşit olmak üzere (yani, $\forall i \in I$ için $U_i = U_k$) U_i , S_Y nin M_i ye karşılık gelen bir maksimal alt grubu ve $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ olsun. Önerme 5.3.5'ten M , $J(F; r)$ nin bir maksimal regüler alt yarıgrubudur. $\forall j \in J$ için $V_j \subsetneq U_k = U_j$ olduğundan $T_j \subsetneq M_j$ olup buradan da $T = \bigcup_{j \in J} T_j \subsetneq \bigcup_{i \in I} M_i = M$ olduğu elde edilir. Bu durum T nin maksimalliği ile çelişir. Dolayısıyla $\forall j \in J$ için T_j , H_{ϵ_j} nin bir maksimal alt grubudur. ■

Önerme 5.3.8. Bir I indis kümesi için $J(F; r) = \bigcup_{i \in I} H_{\epsilon_i}$, $i \in I$ için M_i , H_{ϵ_i} nin bir maksimal alt grubu ve U_i kümeleri birbirine eşit olmak üzere U_i , S_Y nin M_i ye karşılık gelen maksimal alt grubu olsun. O zaman $J(F; r)$ nin her M maksimal regüler alt yarıgrubu $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ şeklindedir.

İspat: M , $J(F; r)$ nin bir maksimal regüler alt yarıgrubu olsun. Ayrıca $J = \{j \in I : M \cap H_{\epsilon_j} \neq \emptyset\}$ ve $\forall j \in J$ için $M_j = M \cap H_{\epsilon_j}$ olsun. O zaman her bir M_j kümesi H_{ϵ_j} nin maksimal alt grubudur ve Önerme 5.3.7'den dolayı M_j kümelerine karşılık gelen U_j maksimal alt gruplarının hepsi eşittir. Eğer $J \subsetneq I$ ise $M = \bigcup_{j \in J} M_j$ kümesi $J(F; r)$ nin $\bigcup_{i \in I} M_i$ regüler alt yarıgrubunun öz alt kümesi olur. Bu durum M nin maksimalliği ile çelişir. Dolayısıyla $J = I$ ve $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 5.3.9. Eğer S , F nin bir maksimal regüler alt yarıgrubu ve $S \cap J(F; r) \subsetneq J(F; r)$ ise $S \cap J(F; r)$ boş kümeden farklıdır ve $J(F; r)$ nin bir maksimal regüler alt yarıgrubudur.

İspat: S , F nin bir maksimal regüler alt yarıgrubu olsun. Eğer $S \cap J(F; r) = \emptyset$ ise S , $T = Q(F; r - 1) \cup M$ nin öz alt kümesi olur. Bu durum T yarıgrubunun F nin bir maksimal regüler alt yarıgrubu olması ile çelişir. Dolayısıyla $S \cap J(F; r) \neq \emptyset$ olur.

$S \cap J(F; r)$ nin F nin bir alt yarıgrubu olduğu açıktır. Bir I indis kümesi için $J(F; r) = \cup_{i \in I} H_{\epsilon_i}$ şeklinde ayrık grupların bir birleşimi olduğundan $S \cap J(F; r) = \cup_{i \in I} (S \cap H_{\epsilon_i})$ de grupların bir birleşimidir. Dolayısıyla $S \cap J(F; r)$ de regülerdir. Eğer $S \cap J(F; r)$ maksimal regüler değilse $J(F; r)$ nin bir M maksimal regüler alt yarıgrubu tarafından içerilir. Buradan $Q(F; r - 1) \cup M$, S alt yarıgrubunu öz olarak içeren bir maksimal regüler alt yarıgrup olur ve bu durum S nin maksimalliği ile çelişir. Dolayısıyla $S \cap J(F; r)$, $J(F; r)$ nin bir maksimal regüler alt yarıgrubudur. ■

Önerme 5.3.10. Eğer S , F nin bir maksimal regüler alt yarıgrubu ve $S \cap J(F; r) = J(F; r)$ ise $S \cap J(F; r - 1) = \emptyset$ dir.

İspat: İlk olarak $Q(F; r - 1) = \langle J(F; r - 1) \rangle$ olduğunu gösterelim. $\alpha \in J(F; r - 2)$ olsun. O zaman, $\forall 1 \leq i \leq r - 2$ için $A_i \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{r-2} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{r-2} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Kolaylık olması açısından $|A_1 \cap Y| \geq 2$ olduğunu kabul edelim. $y \in A_1 \cap Y$ ve $a_{r-1} \in Y \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{r-2}\}$ olsun. Ayrıca $\beta, \gamma \in J(F; r - 1)$ dönüşümleri $b_1, b_2 \in Y \setminus \{a_2, a_3, \dots, a_{r-1}\}$ olmak üzere

$$\beta = \begin{pmatrix} A_1 \setminus \{y\} & A_2 & \dots & A_{r-2} & \{y\} \\ b_1 & a_2 & \dots & a_{r-2} & b_2 \end{pmatrix}$$

ve $b_1, b_2 \in B_1$, $2 \leq i \leq r - 1$ için $a_i \in B_i$ olmak üzere

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_{r-2} & B_{r-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{r-2} & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$\beta\gamma = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{r-2} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{r-2} \end{pmatrix} = \alpha$$

oup $J(F; r-2) \subseteq \langle J(F; r-1) \rangle$ olduğu elde edilir. Tümevarım ile $\forall 3 \leq k \leq n-1$ için de $J(F; r-k) \subseteq \langle J(F; r-1) \rangle$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $Q(F; r-1) = \langle J(F; r-1) \rangle$ olur.

Şimdi de bir $\alpha \in S \cap J(F; r-1)$ dönüşümünün var olduğunu kabul edelim. O zaman Teorem 5.3.4'tekine benzer bir ispatla $J(F; r-1) \subseteq S$ olduğu görülür. Buradan $Q(F; r-1) = \langle J(F; r-1) \rangle \subseteq S$ olup $S = F$ olduğu elde edilir. Bu durum S nin maksimalliği ile çelişir. Dolayısıyla $S \cap J(F; r-1) = \emptyset$ olmalıdır. ■

Teorem 5.3.11. S, F nin bir maksimal regüler alt yarigrubu ve M de, Önerme 5.3.8'deki M kümesi olsun. O zaman

- i) $S = Q(F; r-2) \cup J(F; r)$ veya
- ii) $S = Q(F; r-1) \cup M$

şeklindedir.

İspat: Bir I indis kümesi için $J(F; r) = \bigcup_{i \in I} H_{\epsilon_i}$ olsun. Mümkün olan iki durum vardır.

1. Durum: $S \cap J(F; r) = J(F; nr)$ ise; o zaman Önerme 5.3.10'dan $S \cap J(F; r-1) = \emptyset$ olur. Ayrıca $Q(F; r-2) \cup J(F; r)$, S yi içeren bir maksimal regüler alt yarigrup olduğundan $S = Q(F; r-2) \cup J(F; r)$ olur.
2. Durum: $S \cap J(F; r) \subsetneq J(F; r)$ ise; $M = S \cap J(F; r)$ olsun. O zaman Önerme 5.3.9'dan M , boş kümeden farklıdır ve $J(F; r)$ nin bir maksimal regüler alt yarigrubudur. Önerme 5.3.8'den dolayı da $\forall i \in I$ için M_i, H_{ϵ_i} nin bir maksimal alt grubu ve S_Y nin M_i lere karşılık gelen alt grupları birbirine eşit olmak üzere $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ şeklindedir. Ayrıca $Q(F; r-1) \cup M$, F nin S yi içeren bir maksimal regüler alt yarigrubu olduğundan $S = Q(F; r-1) \cup M$ olur. ■

Sonuç 5.3.12. M, S_n simetrik grubunun bir maksimal alt grubu olsun. O zaman n elemanlı sonlu bir küme üzerindeki (tam) dönüşümler yarıgrubu T_n nin, her maksimal regüler alt yarıgrubu $Q(n; r) = \{\alpha \in T_n : |X\alpha| \leq r\}$ olmak üzere

i) $Q(n; n-2) \cup S_n$ veya

ii) $Q(n; n-1) \cup M$

şeklindedir.

İspat: X, n elemanlı sonlu bir küme olsun. $Y = X$ alınırsa $T(X, Y) = T_n = F$ olduğu elde edilir. Buradan $J(F; n) = S_n$ olup $J(F; n)$ nin bir maksimal regüler alt yarıgrubu, S_n nin bir maksimal alt grubudur. Böylece Teorem 5.3.4, 5.3.6 ve 5.3.11'den yukarıdaki sonuç elde edilir. ■

5.4. $F_{n,r}$ nin Rankı

X boş olmayan sonlu bir küme ve Y, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $|X| = n$ ve $|Y| = r$ olmak üzere bu bölümde kolaylık olması açısından $F(X, Y) = F_{n,r}$ şeklinde yazacağız ve $Y = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ olarak alacağız.

$F_{n,r}$ nin rankını hesaplayabilmek için ilk olarak $J(F; r)$ nin rankını hesaplamak gerekir. Hatırlanacağı üzere $J(F; r)$ üzerinde $\mathcal{H} = \mathcal{R}$ olup $J(F; r)$ nin r^{n-r} ayrık \mathcal{H} - sınıfı vardır.

n ve r pozitif tamsayılar, $n > r$ ve S, T_n nin rankı en fazla r olan elemanları tarafından üretilen alt yarıgrubu olmak üzere

$$i_r(S) = |\{X\alpha : \alpha \in S, |X\alpha| = r\}| \text{ ve } k_r(S) = |\{\text{Ker}(\alpha) : \alpha \in S, |X\alpha| = r\}|$$

olsun. Eğer $\alpha, \beta \in T_n$ rankları r olan iki eleman olmak üzere $\alpha\beta$ nin da rankı r ise $X\alpha\beta = X\beta$ ve $\text{Ker}(\alpha\beta) = \text{Ker}(\alpha)$ olur. Dolayısıyla

$$\text{rank}(S) \geq \max\{i_r(S), k_r(S)\}$$

olur.

$J, F_{n,r}$ nin rankı en fazla r olan elemanları tarafından üretilen alt yarıgrubu olsun. Buradan $J = J(F; r) = \bigcup_{i=1}^{r^{n-r}} H_{\epsilon_i}$ ve

$$i_r(J) = |\{X\alpha : \alpha \in J\}| = 1 \text{ ve } k_r(J) = |\{\text{Ker}(\alpha) : \alpha \in J\}| = r^{n-r}$$

olur. $J, F_{n,r}$ nin rankı en fazla r olan elemanları tarafından üretilen alt yarıgrubu olduğundan $X\alpha\beta = X\beta$ ve $\text{Ker}(\alpha\beta) = \text{Ker}(\alpha)$ ise $\alpha\beta \in J$ olur. Ayrıca $\text{rank}(J) \geq \max\{i_r(J), k_r(J)\} \geq k_r(J) = r^{n-r}$ olduğu kolayca görülebilir.

Bu bilgiler yardımıyla aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 5.4.1. $\alpha, \beta \in J(F; r)$ ise $\text{Ker}(\alpha\beta) = \text{Ker}(\alpha)$ ve $X\alpha\beta = X\beta$ olur. Bunun sonucunda da $\text{rank}(J) \geq r^{n-r}$ olur. ■

Önerme 5.4.2. S bir yarıgrup ve e, S nin bir idempotent elemanı olsun. Eğer S nin yalnız bir tane \mathcal{L} -sınıfı varsa $\forall a \in S$ için $H_a = aH_e$ olur.

İspat: S nin yalnız bir tane \mathcal{L} -sınıfı olduğunu kabul edelim. O zaman $a \in S$ ve e, S de bir idempotent eleman olmak üzere $a\mathcal{L}e$ olup $e, L_e = S$ nin bir sağ birim elemanı olduğundan $ae = a$ olur. Ayrıca $e \in R_e$ olup Green Teoreminden $aH_e = H_{ae} = H_a$ olduğu elde edilir. ■

$J(F; r) = \bigcup_{i=1}^{r^{n-r}} H_{\epsilon_i}$ ayrık grupların bir birleşimi olduğundan $J(F; r)$ nin $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_p$ şeklinde toplam $p = r^{n-r}$ tane idempotent elemanı vardır. Bunlardan biri

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} & \{a_r\} \cup (X \setminus Y) \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} & a_r \end{pmatrix}$$

olsun. O zaman $\epsilon_1, H_{\epsilon_1}$ in birim elemanıdır. Ayrıca, $1 \leq i, j \leq p$ için eğer $\alpha \in H_{\epsilon_i}$ ve $\beta \in H_{\epsilon_j}$ ise $\alpha\beta \in H_{\epsilon_i}$ olur. Özel olarak, $\beta = \epsilon_j$ ise $\alpha\beta = \alpha\epsilon_j = \alpha$ olur.

Eğer $n = 1$ veya $r = 1$ ise $\text{rank}(J(F; r)) = 1$ olduğu açıktır. Ayrıca, $n = r$ ise $J(F; r) = S_r$ olduğunu biliyoruz. Özel olarak, eğer $n = r = 2$ ise $S_2 = \langle \zeta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ olduğundan $\text{rank}(J(F; r)) = \text{rank}(S_2) = 1$ olur. Şimdi de $n \geq 3$ olması durumunu ele alalım. $3 \leq r \leq n - 1$ ise $\forall i \in I$ için $H_{\epsilon_i} \cong S_r$ ve grup olarak

$$S_r = \langle \eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r-1 & r \\ 2 & 1 & 3 & \dots & r-1 & r \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & r-1 & r \\ 2 & 3 & 4 & \dots & r & 1 \end{pmatrix} \rangle$$

olduğunu da biliyoruz. Bu bilgiler yardımıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.4.3. $n \geq 3$ için

$$\text{rank}(J(F; r)) = \begin{cases} 2, & n = r \text{ ise} \\ r^{n-r}, & 2 \leq r \leq n - 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

İspat: $J = J(F; r) = \bigcup_{i=1}^{r^{n-r}} H_{\epsilon_i}$ şeklinde her biri Y üzerindeki simetrik grup S_r ye izomorf olan ayrık grupların bir birleşimi olduğunu biliyoruz. $p = r^{n-r}$ ve $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_p$ dönüşümleri de $J(F; r)$ nin idempotent elemanları olmak üzere $E = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_p\}$ olsun. O zaman, E bir sol sıfır yarıgruptur ve $J, S_r \times E$ direkt çarpımına izomorftur. Ayrıca, $\text{rank}(J) \geq r^{n-r}$ olduğundan $\text{rank}(S_r \times E) \geq r^{n-r}$ olur. Özel olarak, $r = 2$ için $\text{rank}(S_r) = 1$, $r \geq 3$ için $\text{rank}(S_r) = 2$ ve $\text{rank}(E) = |E|$ dir. Dolayısıyla teoremin ispatı için $\text{rank}(S_r \times E) = \max\{\text{rank}(S_r), |E|\}$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Eğer $n = r$ ise $E = \{\epsilon_1\}$ ve $S_r \times E \cong S_r$ olup $r = n \geq 3$ olduğundan $\text{rank}(S_r \times E) = \text{rank}(S_r) = 2 = \max\{\text{rank}(S_r), |E|\}$ olur.

Eğer $2 \leq r \leq n - 1$ ise $|E| = r^{n-r} \geq 2$ olup $\max\{\text{rank}(S_r), |E|\} = |E| = p$ olur. Dolayısıyla iki durum söz konusudur. ζ, η, θ dönüşümleri yukarıdaki gibi tanımlı ve 1_Y de S_r grubunun birim dönüşümü olsun.

1. Durum: $r = 2$ ise; $A = \{(\zeta, \epsilon_1), (1_Y, \epsilon_2), (1_Y, \epsilon_3), \dots, (1_Y, \epsilon_p)\}$ olsun. O zaman A nın $S_r \times E$ yi ürettiği açıktır.

2. Durum: $3 \leq r \leq n - 1$ ise; $A = \{(\eta, \epsilon_1), (\theta, \epsilon_2), (1_Y, \epsilon_3), \dots, (1_Y, \epsilon_p)\}$ olsun. O zaman $|A| = p$ olur. Keyfi bir $(\alpha, \epsilon_i) \in S_r \times E$ elemanını ele alalım. Eğer $i \geq 3$ ise $\{\eta, \theta\}$ kümesi S_r yi ürettiğinden (α, ϵ_i) nin $(\eta, \epsilon_1), (\theta, \epsilon_2)$ ve $(1_Y, \epsilon_i)$ elemanlarının sonlu bir çarpımı olacağı açıktır. Eğer $i = 1$ ise $(\theta, \epsilon_1) = (1_Y, \epsilon_1)(\theta, \epsilon_2) = (\eta, \epsilon_1)(\eta, \epsilon_1)(\theta, \epsilon_2)$ olduğundan (α, ϵ_i) elemanı (η, ϵ_1) ve (θ, ϵ_2) nin sonlu bir çarpımı olur. Eğer $i = 2$ ise Önerme 5.4.2'den dolayı $S_r \times \{\epsilon_2\} = (\theta, \epsilon_2)(S_r \times \{\epsilon_1\})$ olacağından (α, ϵ_2) elemanı (η, ϵ_1) ve (θ, ϵ_2) nin sonlu bir çarpımı olur. Dolayısıyla A kümesi, $S_r \times E$ direkt çarpımını üretir.

Her iki durumda da $S_r \times E$, p tane eleman tarafından üretilebilmektedir. Bununla birlikte $\text{rank}(S_r \times E) \geq p$ olduğundan $\text{rank}(S_r \times E) = |E| = \max\{\text{rank}(S_r), |E|\}$ olduğu elde edilir. ■

π boş olmayan herhangi bir X kümesinin bir parçalanışı olsun. $d_1 > d_2 > \dots > d_k$ ve $\sum_{i=1}^k d_i \mu_i = n$ olmak üzere π parçalanışı her birinin uzunluğu d_i olan μ_i tane sınıftan oluşuyorsa bu parçalanış $\tau = d_1^{\mu_1} d_2^{\mu_2} \dots d_k^{\mu_k}$ tipine sahiptir veya τ -tiplidir denir. X in τ -tipli tüm parçalanışlarının sayısı $\mathcal{N}(\tau)$ ile gösterilir. Ayrıca, π parçalanışındaki sınıf sayısı $r = \sum_{i=1}^k \mu_i$ olup bu sayıya da τ nun ağırlığı denir.

X in ağırlığı r olan bir τ -tipli parçalanışını ele alalım. $\text{Ker}(\alpha)$ denklik bağıntısına göre elde edilen parçalanış τ -tipli olacak şekildeki bütün α dönüşümleri (kısaca τ -tip parçalanışa sahip α dönüşümleri) tarafından üretilen yarıgrup $S(\tau)$ olsun. Buradan $i_r(S(\tau)) = \binom{n}{r}$ ve $k_r(S(\tau)) = \mathcal{N}(\tau)$ olduğu kolayca görülür.

Benzer şekilde, X in ağırlığı r olan kesişim özellikli bir τ -tipli parçalanışını ele alalım. $F = F_{n,r}$ deki τ -tipli bütün dönüşümler tarafından üretilen yarıgrup $J(\tau)$ ve X in kesişim özellikli τ -tipli tüm parçalanışlarının sayısı da $\mathcal{N}_F(\tau)$ olsun. Buradan

$i_r(J(\tau)) = 1$ ve $k_r(J(\tau)) = \mathcal{N}_F(\tau)$ olduğu kolayca görülür. $n \geq 3$ ve $2 \leq r \leq n - 1$ iken en üst \mathcal{J} -sınıfı $J = J(F; r) = \bigcup_{i=1}^{n-r} H_{\epsilon_i}$ en az iki \mathcal{H} -sınıfı içerir ve H_{ϵ_i} deki bütün elemanlar aynı tip parçalanışa sahip olur. J de $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ şeklinde k tane farklı tip parçalanışın var olduğunu kabul edelim. O zaman her bir i için $J(\tau_i)$, grupların bir birleşimi olan ve sadece bir \mathcal{L} -sınıfı içeren bir yarıgruptur. Buradan Teorem 5.4.3'tekine benzer bir ispatla

$$\text{rank}(J(\tau_i)) = \mathcal{N}_F(\tau_i) = \max\{k_r(J(\tau_i)), i_r(J(\tau_i))\} \text{ ve}$$

$$\sum_{i=1}^k \text{rank}(J(\tau_i)) = \sum_{i=1}^k \mathcal{N}_F(\tau_i) = |E| = \text{rank}(J)$$

olduğu elde edilir.

Önerme 5.4.4. Eğer $\alpha \in J(F; r - 1)$ ise $R_\alpha = \alpha H_{\epsilon_1}$ olur.

İspat: $\alpha \in J(F; r - 1)$ ve $\beta \in \alpha H_{\epsilon_1}$ olsun. O zaman $\exists \mu \in H_{\epsilon_1}$ için $\beta = \alpha \mu$ olur. H_{ϵ_1} , $F_{n,r}$ nin bir alt grubu olduğundan $\mu^{-1} \in H_{\epsilon_1}$ var olup $\beta \mu^{-1} = \alpha$ şeklindedir. Buradan $\beta \mathcal{R} \alpha$ ve dolayısıyla $\beta \in R_\alpha$ olduğu elde edilir. Diğer taraftan, bir $\gamma \in R_\alpha$ için $|X\gamma| = |X\alpha| = r - 1$ olur. $X\alpha = \{b_1, b_2, \dots, b_{r-1}\}$ ve $X\gamma = \{c_1, c_2, \dots, c_{r-1}\}$ ve $i = 1, 2, \dots, r - 1$ için $A_i \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{r-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{r-1} \end{pmatrix} \text{ ve } \gamma = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{r-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{r-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir olsun. O zaman bir tek $b \in Y \setminus X\alpha$ ve bir tek $c \in Y \setminus X\gamma$ elemanı vardır.

Eğer $b = a_r$ ise $\lambda \in J(F; r)$ dönüşümünü

$$\lambda = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{r-1} & \{a_r\} \cup (X \setminus Y) \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{r-1} & c \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer $b \neq a_r$ ise $\exists t \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ için $b_t = a_r$ olacak şekilde b_t var olup $\lambda \in J(F; r)$ dönüşümünü

$$\lambda = \begin{pmatrix} b & b_1 & \dots & b_{t-1} & b_{t+1} & \dots & b_{r-1} & \{a_r\} \cup (X \setminus Y) \\ c & c_1 & \dots & c_{t-1} & c_{t+1} & \dots & c_{r-1} & c_t \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $\lambda \in H_{\epsilon_1}$ ve $\gamma = \alpha\lambda$ olup $R_\alpha \subseteq \alpha H_{\epsilon_1}$ olduğu elde edilir. ■

Önerme 5.4.5. $2 \leq k \leq r-1$ için $Q(F; k) = \langle J(F; k) \rangle$ olur.

İspat: $\alpha \in Q(F; k-1)$ olsun. O zaman $|X\alpha| = t \leq k-1$ olup $1 \leq i \leq t$ için $A_i \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_t \\ a_1 & a_2 & \dots & a_t \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılıyor olsun. Kolaylık olması açısından $|A_1 \cap Y| \geq 2$ olduğunu kabul edelim. $y \in A_1 \cap Y$ olsun ve bir $a \in Y \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ elemanını seçelim. Ayrıca $\beta, \gamma \in J(F; t+1)$ dönüşümlerini

$$\beta = \begin{pmatrix} y & A_1 \setminus \{y\} & A_2 & \dots & A_t \\ a & a_1 & a_2 & \dots & a_t \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \{a, a_1\} & a_2 & \dots & a_t & X \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_t\} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_t & a \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $\beta\gamma = \alpha$ olup sonuç açıktır. ■

$J(F; r)$, $F_{n,r}$ nin bir alt yarigrubu olduğundan eğer $\alpha \in Q(F; r-1)$ ise $\forall \beta, \gamma \in J(F; r)$ için $\alpha \neq \beta\gamma$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $Q(F; r-1)$ nin herhangi bir

elemanı $J(F; r)$ nin elemanları tarafından üretilemez. Ayrıca, eğer $\alpha \in J(F; r)$ ve $\alpha = \beta\gamma$ ise $\beta, \gamma \in J(F; r)$ olur. Dolayısıyla $\text{rank}(F_{n,r}) \geq \text{rank}(J(F; r)) + 1$ olur.

Teorem 5.4.6. $n \geq 3$ için

$$\text{rank}(F_{n,r}) = \begin{cases} 3, & n = r \text{ ise} \\ r^{n-r} + 1, & 2 \leq r \leq n - 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

İspat: $A, J(F; r)$ nin bir doğuray kümesi, $|A| = \text{rank}(J(F; r))$ ve

$$\sigma = \begin{pmatrix} \{a_1, a_2\} & a_3 & a_4 & \dots & a_{r-1} & \{a_r\} \cup (X \setminus Y) \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{r-2} & a_{r-1} \end{pmatrix} \in J(F; r - 1)$$

olsun. $A \cup \{\sigma\}$ kümesinin $F_{n,r}$ nin bir doğuray kümesi olduğunu gösterebilmek için ilk olarak, eğer $\alpha \in J(F; r - 1)$ ise $\exists \lambda, \mu \in J(F; r)$ için $\alpha = \lambda\sigma\mu$ olduğunu gösterelim.

$\alpha \in J(F; r - 1)$ için $a\alpha = b\alpha$ ve $a \neq b$ olacak şekilde $a, b \in Y$ vardır. $\{b_1, b_2, \dots, b_{r-1}\} \subseteq Y$ ve $i = 1, 2, \dots, r - 1$ için $A_i \cap Y \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_{r-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{r-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılıyor olsun. Kolaylık olması açısından $a, b \in A_1$ olduğunu kabul edelim ve $\lambda \in J(F; r)$ dönüşümünü

$$\lambda = \begin{pmatrix} a & A_1 \setminus \{a\} & A_2 & \dots & A_{r-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_r \end{pmatrix}$$

şeklinde ve $\gamma \in J(F; r - 1)$ dönüşümünü de

$$\gamma = \begin{pmatrix} \{a_1, a_2\} & a_3 & a_4 & \dots & a_{r-1} & \{a_r\} \cup (X \setminus Y) \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{r-2} & b_{r-1} \end{pmatrix} \in R_\sigma$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan $\alpha = \lambda\gamma$ olur. Ayrıca, Önerme 5.4.4'ten $R_\sigma = \sigma H_{\epsilon_1}$ olup $\gamma \in R_\sigma = \sigma H_{\epsilon_1}$ olacağından $\exists \mu \in H_{\epsilon_1} \subseteq J(F; r)$ için $\alpha = \lambda\gamma = \lambda\sigma\mu$ olur.

$J(F; r)$ nin bütün elemanlarının A kümesinin elemanlarının bir sonlu çarpımı şeklinde yazılabileceği açıktır. Şimdi de $\alpha \in Q(F; r-1)$ elemanını ele alalım. Önerme 5.4.5'ten dolayı $\alpha = \beta_1 \cdots \beta_t$ olacak şekilde $\beta_i \in J(F; r-1)$ vardır. Ayrıca, yukarıdaki nottan dolayı da $\alpha = (\lambda_1 \sigma \mu_1) \cdots (\lambda_t \sigma \mu_t)$ olacak şekilde $\lambda_i, \mu_i \in J(F; r)$ var olup α nın, $A \cup \{\sigma\}$ kümesinin elemanlarının bir sonlu çarpımı şeklinde yazılabildiği görülür. Diğer taraftan, $\text{rank}(F_{n,r}) \geq \text{rank}(J(F; r)) + 1$ olduğundan $\text{rank}(F_{n,r}) = \text{rank}(J(F; r)) + 1$ olur. Dolayısıyla bu teorem, Teorem 5.4.3'ün doğrudan bir sonucudur. ■

KAYNAKLAR

- CLIFFORD, A. H. and PRESTON, G. B., 1961. The Algebraic Theory of Semigroups, vol. 1. Mathematical Surveys, vol. 7. American Mathematical Society, Providence.
- _____, 1967. The Algebraic Theory of Semigroups, vol. 2. Mathematical Surveys, vol. 7. American Mathematical Society, Providence.
- FERNANDES, V. and SANWONG, J., 2014. On the Rank of Transformations on a Finite Set with Restricted Range. Algebra Colloquium, 497-510.
- GANYUSHKIN, O., and MAZORCHUK, V., 2009. Classical Finite Transformation Semigroups. Springer-Verlag, London, 314 s.
- HOWIE, J. M., 1976. Introduction to Semigroup Theory. Academic Press, London.
- _____, 1995. Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press, New York, 351 s.
- KARAKAŞ, H. İ., 2008. Cebir Dersleri. Türkiye Bilimler Akademisi, Ankara, 402 s.
- ROTMAN, J. J., 1995. An Introduction to the Theory of Groups. Springer-Verlag, New York, 513 s.
- SANWONG, J., 2011. The Regular Part of a Semigroup of Transformations with Restricted Range. Semigroup Forum, 83:134-146.
- SANWONG, J. and SOMMANEE, W., 2008. Regularity and Green's Relations on a Semigroup of Transformations with Restricted Range. Hindawi Publishing Corporation, 11 s.
- SOMMANEE, W. and SANWONG, J., 2013. Rank and Idempotent Rank of Finite Full Transformation Semigroups with Restricted Range. Semigroup Forum, 87:230-242.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Hatay'da doğdu. 1997 yılında Antakya Lisesinden ve 2002 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2004 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Tezsiz Yüksek Lisans programını tamamladı. 2013 yılından itibaren MEB'e bağlı bir okulda matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.