

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

LİNEER OLMAYAN PROGRAMLAMA PROBLEMİNE BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ

HASAN DALMAN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. MUSTAFA SİVRİ**

İSTANBUL, 2015

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN PROGRAMLAMA PROBLEMİNE BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ

Hasan DALMAN tarafından hazırlanan tez çalışması ...09.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
Üsküdar Üniversitesi

Prof. Dr. Emanullah Hızel
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Fatih TAŞÇI
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Müfit GİRESUNLU
İstanbul Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu tezde matematik programlama alanında öneme sahip belirsiz ortamda Lineer olmayan Çok Amaçlı Programlama problemleri incelenmiştir. Gerçek hayat problemlerinde genellikle bilgi ve veriler tam olarak ifade edilemediğinden belirsizlik içermektedir. Üstelik karşılaşılan problemlerin çoğu karmaşık yapıda olmakla birlikte birden fazla amaç ya da kriter içermektedir. Bunun sonucu olarak, son on yıl içinde bu tip problemler ile ilgili araştırmalardaki ilerleme net olarak gözlemlenebilmektedir.

Bu tez’de belirsizlik altında verilen lineer olmayan çok amaçlı programlama problemlerini çözmek için bir yeni yöntem önerilmiş ve literatürde var olan bazı çok amaçlı programlama yöntemlerine değinilmiştir.

Bu çalışmanın hazırlanmasında benden hiçbir yardımı esirgemeyen Saygıdeğer Hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa Sivri’ ye, tez izleme komitesinde bulunan Sayın Prof. Dr. Mustafa BAYRAM ve Sayın Prof. Dr. Emanullah HIZEL hocalarıma en içten duygularıyla sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eylül, 2015

Hasan DALMAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÇİZELGE LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT.....	xi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	6
1.3 Hipotez.....	6
BÖLÜM 2	
TEMEL TANIM VE TEOREMLER	8
2.1. Matematiksel Programlama	8
2.2 Çok Amaçlı Programlama Problemleri.....	10
2.2.1 Vektör Maksimum Problemi	10
2.2.2 Optimal Çözüm	12
2.2.3 Pareto optimal çözüm.....	12
2.2.4 Zayıf Pareto optimal çözüm	12
2.2.5 Basılamazlık Kriteri.....	13
2.3 Çok Amaçlı Programlama Problemlerinin Bazı Çözüm Yöntemleri	14
2.3.1 Ağırlıklandırma Yöntemi	14
2.3.2 Global Kriter Yöntemi	16
BÖLÜM 3	
BULANIK KARAR VERME VE BULANIK KUME TEORİSİ.....	19
3.1 Bulanık Mantık ve Küme Teorisi	19
3.2 Bulanık Sayı	25
3.2.1 Üçgensel ve Yamuksal Bulanık Sayı.....	25

3.2.2	Yamuksal Bulanık Sayılar için Lineer Sıralama Yöntemi.....	26
3.2.3	Bulanık Sayılar için En Yakın Aralık Yöntemi	26
3.3	Zadeh'in Genişleme Prensibi	27
3.3.1	Zadeh'in Genişleme Prensibine Dayanan Aritmetik İşlemler	28
3.4	Bulanık Programlama.....	29
3.5	Bulanık Çok Amaçlı Programlama Problemleri ve Çözüm Yöntemleri	32
BÖLÜM 4		
ARALIK ARİTMETİĞİ VE ARALIKLI PROGRAMLAMA		35
4.1	Aralık Sayılar.....	35
4.1.1	Aritmetik İşlemler ve Küme Özellikleri	36
4.2.1	Makimizasyon Problemleri için Sıra İlişkileri	39
4.2.1	Minimizasyon Problemleri için Sıra İlişkileri	40
4.3	Aralıklı Programlama Problemleri.....	41
4.3.1	Aralıklı Programlama Problemlerinin Amaç Fonksiyonlarının Yapısına Göre Formülasyonu	41
BÖLÜM 5		
ARALIKLI PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN ÖNERİLEN YÖNTEM.....		45
5.1	Aralıklı Programlama Problemlerinin Çözümü İçin Global Kriter Yöntemi	45
5.2	Aralıklı Programlama Problemlerinin Çözümü İçin Ağırlık Toplamları Yöntemi	47
5.3	Çok Amaçlı Aralıklı Programlama Problemlerini Çözmek İçin Önerilen Bir Yeni Aralıklı Bulanık Programlama Yaklaşımı Modeli	49
BÖLÜM 6		
SAYISAL UYGULAMALAR		54
Örnek 6.1.....		54
Örnek 6.2.....		58
BÖLÜM 7		
SONUÇLAR VE ÖNERİLER		67
KAYNAKLAR.....		69
ÖZGEÇMİŞ.....		76

SİMGE LİSTESİ

μ	Üyelik Fonksiyonu
Λ	Konveks kombinasyon

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3. 1 A bulanık kümesinin $\alpha -$ keseni.....	22
Şekil 3. 2 Konveks Bulanık Küme.....	24
Şekil 3. 3 Konveks olmayan bir bulanık küme.....	24
Şekil 3. 4 $A \cap B$ bir konveks kümedir fakat $A \cup B$ konveks değildir	25
Şekil 3. 5 $\tilde{3}$ bulanık sayısının bir olası üyelik fonksiyonu	27
Şekil 3. 6 μ_D üyelik fonksiyonu ve $\tilde{x}$ optimal optimal kararı.....	31

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 6. 1 Birinci amaç fonksiyonunda birinci mal için taşımanın birim fiyatları.....	59
Çizelge 6. 2 Birinci amaç fonksiyonunda ikinci mal için taşımanın birim fiyatları	59
Çizelge 6. 3 İkinci amaç fonksiyonunda birinci mal için taşımanın birim fiyatları	59
Çizelge 6. 4 İkinci amaç fonksiyonunda ikinci mal için taşımanın birim fiyatları	59
Çizelge 6. 5 Bulanık kapasiteler.....	59
Çizelge 6. 6 Birinci amaç fonksiyonunda birinci mal için aralıklı birim taşıma fiyatı	60
Çizelge 6. 7 Birinci amaç fonksiyonunda ikinci mal için aralıklı birim taşıma fiyatı	61
Çizelge 6. 8 İkinci amaç fonksiyonunda birinci mal için aralıklı birim taşıma fiyatı	61
Çizelge 6. 9 İkinci amaç fonksiyonunda ikinci mal için aralıklı birim taşıma fiyatı.....	61
Çizelge 6. 10 Aralıklı kapasiteler	61
Çizelge 6. 11 Karşılaştırmalı sonuçlar.....	66

LİNEER OLMAYAN PROGRAMLAMA PROBLEMİNE BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ

Hasan DALMAN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Karar verme yöntemlerinin temel amacı birden fazla kriterlere dayalı bir eylem ya da seçimin yararını değerlendirmek için bütünsel bir kriter sağlamaktır. Pratik ve gerçek dünya karar verme problemleri, çoğu zaman çelişkili ve tutarsız olan bazı hedeflere ulaşmayı gerektirir. Böyle bir problem, çok kriterli karar verme yöntemlerinin konusudur. Bununla birlikte, gerçek dünyada rastgelelik ve belirsizlik oluşumu, bazı beklenmedik durumlarda kaçınılmazdır. Bu nedenle, belirsizliğe maruz kalan geleneksel optimizasyon problemleri özel bir araştırma konusudur.

Bu çalışmada, aralıklı lineer olmayan çok amaçlı programlama problemlerinin üstesinden gelmek için etkin bir çözüm yöntemi geliştirilmiştir. İlk olarak, önerilen yöntemde, aralıklı amaç fonksiyonlarının her birinin en iyi ve en kötü çözümlerini elde etmek için mantığa dayalı bir uzlaşık programlama uygulanmıştır. İkinci aşamada, önerilen yöntem, bulanık küme yaklaşımına dayanan, farklı amaçları aynı anda optimize eden, en iyi uzlaşık çözümü elde etmeyi denemektedir.

Çalışmanın geri kalanı aşağıdaki gibi düzenlenmiştir. Birinci bölümde literatür hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde optimizasyon ve optimalliğin temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümde, bulanık mantık, bulanık programlama, aralık aritmetiği ve aralık programlama hakkında bilgiler verilmiştir. Beşinci bölümde, önerilen yöntem verilmiştir. Bölüm 6 da, önerilen yöntemler örneklerle uygulanmıştır. Bölüm 7’de bazı önemli sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lineer olmayan Programlama, Aralıklı Programlama, Bulanık Karar Verme, Bulanık Programlama, Lineer Olmayan Çok Amaçlı Programlama.

A SOLUTION PROPOSAL TO NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEM

Hasan DALMAN

Department of Mathematics Engineering

Ph.D Thesis

Adviser: Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

The main purpose of decision making methods is to provide a holistic criterion to evaluate the utility of an action or choice based on multiple criteria. Practical and real world decision making problems often must satisfy several goals which are sometimes conflicting and inconsistent. Such a problem is the subject of multiple criteria decision making methods. Furthermore, the occurrence of randomness and imprecision in the real world is inevitable owing to some unexpected situations. Therefore, imposing the uncertainty upon the conventional optimization problems is an interesting research topic.

In this paper, a new efficient structure is developed to deal with interval nonlinear multiobjective programming problems. In the first step, the proposed method applied a compromise programming based logic to obtain the best and worst solutions of each interval objectives. In the second phase, the proposed method tries to find the better

compromise solution which simultaneously satisfied different objectives based on a fuzzy set approach.

The rest of the paper is organized as follows. The first section provides information about literature. In section 2, the basic definitions and theorems of mathematical programming and optimality are given. The third and fourth sections provide information about fuzzy logic, fuzzy programming, interval arithmetic and interval programming. In section 5, the proposed methods are given for solving general interval nonlinear programming problems. In section 6, the proposed methods are applied to the problems. Some interesting results and proposals are presented in section 7.

Keywords: Nonlinear Programming, Interval Programming, Fuzzy Decision Making, Fuzzy Programming, Nonlinear Multiobjective Programming.

1.1 Literatür Özeti

Optimizasyon uygulamalı matematiğin önemli alanlarından biridir. Çok farklı alanlarda uygulama olanağına sahiptir ve gün geçtikçe uygulama alanı genişlemektedir. Matematiksel olarak, bir kümede problemlerin en iyi çözümlerini bulmak ve bu çözümleri en iyi şekilde analiz etmek için kullanılır. En çok kullanılan uygulama alanları, mühendislik, istatistik, ekonomi, yönetim bilimleri, bilgisayar bilimleri ve matematik bilim dallarıdır (Ruszczynski [1]).

Genellikle, üretim ve tasarım sistemlerinde kar ya da performans arzu edilen seviyelere taşınmak (en iyilemek) istenir. Bu gibi durumlarda karar verici etkin, hızlı ve sistematik kararlar almak için bazı optimizasyon stratejilerine ihtiyaç duyar. Böylece, karar verici karşılaşılan kayıp ve riskleri minimuma indirip, verimi maksimize etmeyi amaçlar. Bir köprü yapımında köprünün ağırlığının azaltılarak uzunluğunun artırılması, hava ulaşımında zaman ve yakıt tüketiminin minimize edilmesi vs. basit örnekler optimizasyon tekniklerinin önemini kavramamızda yardımcı olmaktadır (Griva [2]).

Optimizasyon uygulamaları hakkında tarihe bakılacak olursa, optimizasyon teorisi oldukça eskiye dayanmaktadır. İlk olarak, Yunan matematikçi Zenodorus (M.Ö. 495–435) ve Poppus (M.S. 300) çalışmalarında isoperimetrik problemlere ait bilgilere ve verilere ulaşmıştır. Lineer eşitsizlikler sistemi şeklindeki bir problemin analiz edilmesi Fourier'in çalışmalarına kadar dayanmaktadır ve Fourier-Motzkin eliminasyon yöntemi adıyla anılmaktadır.

1920'lerde Rusya'da ekonominin planlaması üzerine çalışmalar pratikte ön plana çıkmışken teorik olarak ekonominin nasıl planlanabileceği stratejilerini göstermek için yapılan teorik çalışmalar esnasında Leonid Kantoroviç lineer programlama problemini ortaya atmıştır. Bu teorinin gerçek hayata uygulanmasının imkânsızlığı, siyasi ve ideolojik nedenler dolayısıyla Kantoroviç [3] tarafından yapılan bu çalışmanın önemi ancak II. Dünya Savaşından sonra anlaşılmıştır.

II. Dünya Savaşı esnasında Birleşik Amerika'da ortaya çıkan lojistik tahsis sorunlarını incelemek için George Dantzig isimli bilim adamı etrafında bir araştırma grubu, bu tip sorunların çözülmesi için lineer programlama problemi modelinin tanımlanması gerektiğini açıklamıştır. Bu tip lineer programlama problemlerinin çözümü için simpleks algoritması adını verdikleri bir çözüm sistemi ortaya atmışlardır. Bu matematiksel modelin çözümünde kullanılan algoritmanın, maliyetleri ve getirileri planlayarak harp masraflarının minimize edilmesini sağladığı açıkça görüldüğü için bu teorik ve pratik gelişmeler 1947'ye kadar devlet sırası olarak saklı kalmıştır. Yine, 1947'de John von Neumann, özellikle oyun teorisiyle araştırmalar yaparken, ikincilik teorisini geliştirmiştir. Böylelikle, lineer programlamanın ilerlemesinde önemli katkılar sağlamıştır. Daha sonra, lineer programlamaya yaptıkları katkılar nedeni ile Kantoroviç, Dantzig ve John von Neumann'a 1975'de Nobel Ekonomi ödülü verilmiştir (Cottle [4]).

1947'den sonra geliştirilen bilgisayar uygulamaları sayesinde özellikle büyük sanayi birimleri ve büyük devlet projeleri için birçok lineer programlama modeli oluşturulmuştur. Bu problemler simpleks algoritması ile çözülüp gerçek hayatta kullanılmaya başlanmıştır. Örneğin petrol rafine şirketlerinin günlük üretim planlamaları için lineer programlama çözümlerini devamlı olarak kullanmaya başlamışlardır (Bazaraa ve Sherali [5]).

Lineer programlamanın önemi Dantzig tarafından ortaya atılan 70 kişinin 70 göreve, karar verici kuruma en iyi sonuç çıkaracak şekilde, tahsis edilmesi örneğinden anlaşılabilir. Dantzig bu örneğinde, Eğer çözüm için her mümkün tahsisi teker teker elden geçirip her birinin amaca yaptığı katkıyı bulmak deneyimine girilirse, bu kadar çok büyük sayıda permutasyonun elden geçirilmesinin imkânsız olduğu hemen açığa çıkar; çünkü gerekli permutasyon sayısı evrende bulunan parçacıkların sayısına yaklaşıp.

Eğer bu problem lineer programlama olarak ifade edilip en iyi çözümü bulma kararı verilirse, en karmaşık ve zaman alıcı çalışmanın, probleminin çözümünde değil problemin programlama modelinin kurulmasında olduğu anlaşılır. Bu problem matematiksel olarak ifade edildiğinde, bilgisayarlarla simpleks algoritması kullanılarak çözülmesi saniyeler almaktadır. Lineer programlama modeli ve bu modelin oluşumunu sağlayan teori, kontrol edilmesi gereken en iyi çözüm sayısını etkin bir şekilde azaltmaktadır.

Bu alanda, önemli teorik ve pratik gelişmeler 1984'te Karmarkar [6] tarafından lineer programlama problemlerin çözülmesi için simpleks algoritması yerine, diğer önemli bir yöntem olan iç nokta yöntemini ortaya atması ile başlamıştır.

Son yıllarda, optimizasyon problemlerini çözmek için çeşitli algoritmalar ve yazılımlar geliştirilmiştir. Bu yazılımlar sayesinde çoğu problemin çözümü bulmak oldukça kolaylaştırılmış ve problemlerin çözümü için harcanan zaman azaltılmıştır. Buna rağmen, problemlerin yapısı karmaşıktıkça ve gerçek dünya uygulamalarına göre modellemeye çalışıldıkça, bu tür karmaşık problemlerin çözümünde, verilen yöntem ve algoritmaların yetersiz kaldığı ve bir sonuca ulaşamadığı görülmüştür. Bu nedenle, bu yöntemler için etkin sonuçlar veren yazılımlar geliştirilmeye çalışılmaktadır. Farklı yapıdaki optimizasyon stratejilerinin ve çözüm yöntemlerinin, problemin yapısına göre incelenme ve düzenleme süreci devam etmektedir.

Gerçek hayatta günlük aldığımız kararlar ve uzlaşılar, sezgi, şans, genel duygular ya da bunların tamamına bağlıdır. Diğer ifadeyle; lineer programlama problemleri pek çok alanda kullanılmasına rağmen gerçek hayat problemlerinin modelinin lineer yapıda olmadığı ve çok daha karmaşık matematiksel ifadelerle modellenmesi gerekmektedir. Bu nedenle, son yıllarda lineer olmayan programlama problemlerinin çözümü üzerinde çalışmalar yoğunlaşmıştır. Lineer olmayan programlama problemlerinin, matematiksel modellerinin optimal çözümünün bulunmasına yönelik çözüm yöntemleri, temel tanım ve teorik bilgileri Bazaraa [5]; Bertsekas [7]; J.Kelley [8]; Luenberger [9], Sun [10] literatürlerinde kapsamlı olarak verilmiştir.

Bununla birlikte, bilim, mühendislik ve ekonomi gibi matematiksel programlamaya ihtiyaç duyulan alanlarda karar vermek için tek amaçlı bir problem modeli yeterli

değildir ve gerçek dünya problemleri lineer olmayan birden fazla amaç fonksiyonunu optimize etmeyi gerektirir (Miettinen [11]). Bu tip problemler genel olarak çok kriterli programlama problemleri ya da çok kriterli karar verme problemleri olarak adlandırılır. Çok kriterli karar verme uygulama alanları feasible (uygun) çözüme bağlı olarak çok nitelikli karar analizi ve çok amaçlı programlama olarak iki farklı alana ayrılır. Çok amaçlı programlama problemlerinde feasible alternatifler açıkça bilinmez ve sonsuz sayıdadırlar. Bu nedenle, bu alternatifler kısıt fonksiyonlarının oluşturduğu bölgede sınırlandırılmış karar değişkenleri ile gösterilirler.

Gerçek dünya problemlerini matematiksel olarak ifade ederken, bilgi ya yaklaşık ya da kısmi olarak verildiğinden kesinlik varsayımı geçerliliğini yitirmektedir. Çoğu karar verici belirsiz ortamlarda verileri ifadeye etmeye ve birden fazla amacı optimize etmeye çalışmaktadır (Hajiagha [12]). Gerçek dünya uygulamalarında sıklıkla karşılaşılan belirsizlikleri Liu ve Lin [13]

- Olasılık ve İstatistik;
- Bulanık Küme Teorisi;
- Grey Sistemler Teorisi;

olarak alt sınıflara ayırmıştır. Son zamanlarda, bu sınıflandırmadan bulanık küme teorisi ve aralık aritmetiğine dayalı Grey sistemler teorisi kullanılarak çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmalardan bazıları [13-27]'de bulunmaktadır.

Bulanık mantık kuramı ilk olarak Lotfy A. Zadeh tarafından 1965 yılında ortaya atılmıştır [28]. Bellman ve Zadeh [29]'da bulanık ve belirsiz ortamlarda karar verme durumunda bulanık küme teorisinden yararlanarak bulanık karar verme yöntemi üzerine çalışmalar yapmıştır. Daha sonra Zimmerman [30] ve [31]'de tek amaçlı ve çok amaçlı lineer programlama problemlerinin çözümünde farklı yapılara sahip bulanık programlama modeli kullanmıştır.

Aralık aritmetiğine ilk Moore tarafından [32]'de verilmiş ve [33]'de yeniden tanımlanmıştır.

Literatürde aralıklı lineer programlama ve çok amaçlı aralıklı lineer programlama problemleri üzerine epey çalışma bulunmakta ve bu programlama problemi modelleri üzerinde çalışmalara devam edilmektedir. Bu tip problemlerde asıl zorluk problemin hangi yöntemle, nasıl modelleneceğidir. Problem modellendikten sonra klasik yöntemlerle ya da bilgisayar programları sayesinde çözüme gidilmesi saniyeler almaktadır. Fakat çoğu zaman bu tip problemlerin optimal çözümleri elde edilememekte ya da elde edilen çözümlerde analiz için yetersiz kalmaktadır.

Aralıklı problemleri çözmek için Moore 1979'da, aralıklar üzerinde küme teorisine dayalı bir takım sıra ilişkisi vermiştir ([33]). Daha sonra Ishibuchi ve Tanaka [34]'de aralıklar üzerinde sıra ilişkisi kullanarak aralıklı programlama problemlerinin deterministik problemlere dönüştürmüş ve optimal çözümlerini elde etmiştir. Chanas ve Kuchta α -kesenleri yardımıyla, Ishibuchi ve Tanaka tarafından verilen sıra ilişkisini genelleştirmiştir. Charnes [35] lineer programlama problemlerinin feasible kümesinde eşitsizlik kısıtlarının sağ yan sabitini kapalı ve sınırlı aralıklar alarak, bu tip problemler için bir çözüm önermiştir. Urli ve Nadeau [36]'da aralıklı katsayılardan oluşan çok amaçlı lineer programlama problemlerini çözmek için etkileşimli programlama yöntemi kullanmış ve aralık sayılardan oluşan kısmen belirsiz lineer programlama problemleri, deterministik probleme dönüştürülerek bir çözüm elde edilmiştir. Ida [37]'de aralıklı lineer amaç fonksiyonları kullanılarak, portföy problemlerinin bir çok örneğini vermiştir. Bu alanda, aralıklı programlama problemleri çözmek için diğer önemli çalışmalar Inuiguchi ve Sakawa [38], Chinneck ve Ramadan [39], Sengupta [40] ve Chen [41], Das [42] literatüründe mevcuttur. Çok amaçlı aralıklı lineer programlama alanında; Oliveria ve Antunes problemlerinin amaç ve kısıt fonksiyonlarını aralıklı katsayılarla modelleyerek çok sayıda sayısal örnek vermiştir ([43], [44]). Sivri vd. , Ishibuchi ve Tanaka tarafından verilen sıra ilişkilerini kullanarak aralıklı taşıma problemlerinin çözümünü elde etmiştir ([77-80]). Karmakar ve Bhunia aralıklar üzerinde sıra ilişkileri hakkında kapsamlı araştırmalar yapmıştır ([45]).

Wu vd. [46-49]'da aralıklı lineer olmayan programlama problemlerinin çözümünde optimallik gerek ve yeter şartları tanımlamıştır. Bu tip problemleri deterministik problemere dönüştürmek için Moore tarafından [32]'de verilen aralıklara üzerinde

kısmi sıra ilişkisini kullanmış ve aralıklı programlama problemleri üzerine pek çok sayısal örnekler vermiştir. Hladik [50]'de aralıklı lineer olmayan programlama problemleri çözmek için, aralığın optimal sınırlarını belirleyen farklı bir yöntem geliştirmiştir. Literatürde lineer aralıklı programlama problemleri modelleri üzerine çalışmalar ve karşılaştırmalar oldukça fazladır (Bakınız; [50-55]).

Grey sistemler teorisi ilk olarak Deng tarafından ortaya atılmıştır ([24]) ve daha sonra Deng [25]'de aralık sayılara dayalı grey karar verme sistemlerini vermiştir. Bu sistemler, aralıklı sistemlerle hemen hemen aynıdır. Son zamanlarda bu teori bir çok alanda kullanılmaya devam etmektedir Hajiagha [12]'de lineer çok amaçlı aralıklı programlama problemlerini çözmek için aralıklar üzerinde farklı bir sıra ilişkisi kullanmış ve üyelik fonksiyonları yardımıyla grey bulanık programlama modeli oluşturmuştur. Bu bulanık programlama modelinden elde edilen sonuçların Pareto optimal olduğunu ispatlamıştır. Rehana ve Mujumdar [56], Karmakar ve Mujumdar [57],[58] su kaynakları yönetiminde risk değerlendirmesi için farklı bir grey bulanık programlama yöntemleri kullanmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezde, aralıklı lineer olmayan programlama ve çok amaçlı lineer olmayan programlama problemlerinin aralıklar arasında sıra ilişkileri kullanarak deterministik çok amaçlı lineer olmayan problemlere dönüştürülmesi, lineer olmayan çok amaçlı programlama yöntemleri ve bulanık küme teorisine dayalı bir yeni aralıklı bulanık programlama yöntemi kullanarak Pareto optimal çözümlerinin elde edilmesi amaçlanmaktadır.

1.3 Hipotez

Bildiğimiz kadarıyla aralıklı sayılarla ilgili çalışmalar genel olarak lineer programlama problemleri üzerine kurulmuştur ve literatürde çok az aralıklı lineer olmayan programlama problemi üzerine çalışmalar vardır. Bununla birlikte, çözüm yöntemleri hemen hemen Ishibuchi ve Tanaka tarafından [34]'de verilen aralıklar üzerinde sıralama yöntemine dayanmakta, aralıklar arasında sıra yöntemleri ile problemler

deterministik hale dönüştürülmekte ve literatürde bilinen çok amaçlı programlama yöntemleri, zeki yöntemler ya da bulanık yöntemler ile çözüme gidilmektedir.

Biz bu çalışmada, problemde aralıklar üzerinde literatürde bilinen sıra ilişkilerini kullanarak, aralıklı verilen amaç ve kısıt fonksiyonlarının deterministik fonksiyonlara dönüştürülmesi, literatürde var olan bazı çok amaçlı programlama çözüm yöntemlerini de kullanarak, bu yöntemlerin aralıklı programlama modellerinin oluşturulmasını ele aldık. Üstelik bu yöntemlerden farklı, bulanık küme teorisine dayalı aralıklı bulanık programlama modeli önererek, çok amaçlı aralıklı lineer olmayan programlama problemlerinin Pareto optimal çözümlerini elde ettik.

Bu tezde, Bölüm 2’de lineer ya da lineer olmayan programlama, çok amaçlı lineer/lineer olmayan programlama problemi ile ilgili genel bilgiler ve literatürde bilinen ağırlıklandırma ve global kriter çözüm yöntemleri incelenmiştir. Bölüm 3’te bulanık karar verme ve bulanık programlama problemleri tanıtılmıştır.

Çalışmamızın orijinal bölümleri olan Bölüm 4 ve Bölüm 5’de aralıklar üzerinde sıra ilişkileri, aralıklı programlama problemlerinin deterministik modelleri tanımlanarak, aralıklı programlam problemlerini çözmek için bulanık küme teorisi ve aralıklar arasında sıra ilişkilerine dayalı bir takım çözüm yöntemleri önerilmiştir. Bölüm 6’da bu yöntemler iki farklı sayısal örnek üzerine uygulanmış ve karşılaştırmalar yapılmıştır. Bölüm 7’de önerilen yöntemden elde edilen sonuçların etkinliği hakkında bilgi verilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde matematiksel programlama problemlerinin çözümü için gerekli temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Matematiksel Programlama

Genel olarak bir programlama probleminin matematiksel modeli, $f(x)$ amaç fonksiyonu, $x \in R^n$ bir karar değişkeni ve $S \subset R^n$ bir kısıt kümesi ya da feasible bölge olmak üzere,

$$\min_{x \in S} f(x) \quad (2.1)$$

ile gösterilir Sun [10]. Eğer feasible bölge $S = R^n$ ise (2.1) programlama problemi kısıtsız programlama problemi olarak adlandırılır ve $\min_{x \in R^n} f(x)$ ile gösterilir. Kısıtlı programlama problemi literatürde sıklıkla aşağıdaki şekilde ifade edilir (Sun [10]).

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min \\ \text{kısıtlar} &\begin{cases} g_i(x) = 0, i \in E, \\ g_i(x) \geq 0, i \in I, \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.2) kısıtlı programlama probleminde, sırasıyla E ve I eşitlik ve eşitsizlik kısıtlarının index kümesi, $g_i(x)$, $i \in E \cup I$ kısıt fonksiyonlarıdır. Tüm karar değişkenleri sıfıra eşit veya sıfırdan büyüktür.

(2.2) programlama probleminde feasible bölgede $x \in S$ noktası değişkenler üzerinde alt ve üst sınırlar içerir. Bu sınırlar lineer ve lineer olmayan programlama probleminin karmaşık kısıtlarının kesin sınırlarını gösterdiği için kısıtlı programlama problemlerinin çözümü içinde oldukça önemlidir.

Tanım 2.1 (Sun [10]) (2.2) programlama probleminde feasible bölgede elde edilen bir $x \in R^n$ noktasına feasible nokta denir. Feasible noktaların oluşturduğu kümeye ise feasible küme denir.

Tanım 2.2 (Sun [10]) (2.2) programlama probleminde kısıtlar programlama probleminin kısıt koşullarıdır ve tüm feasible noktalar kısıtları sağlar. Kısıt kümesi genel olarak

$$S = \{x \mid g_i(x) = 0, i \in E, g_i(x) \geq 0, i \in I, x \geq 0\} \quad (2.3)$$

ile gösterilir. (2.3) ile verilen kısıt kümesi kesin ve nettir.

(2.2) programlama probleminde amaç fonksiyonunu yada fonksiyonlarını verilen (2.3) kısıtları altında, optimum yapan bir x vektörü bulmaktır.

Tanım 2.3 (Bazaraa vd. [5]) (2.2) programlama probleminde amaç, (2.3) feasible kümesinde $f(x) \leq f(\tilde{x})$ olacak şekilde en iyi x uygun vektörü bulmaktır. Böyle bir x vektörü mevcut ise (2.2) programlama problemi için optimal çözüm yada temel çözüm olarak adlandırılır.

Tanım 2.4 (Bazaraa vd. [5]) (2.2) programlama probleminde birden fazla optimal çözüm mevcutsa, bu çözümlere alternatif çözüm denir. Diğer ifadeyle; feasible bölgeyi oluşturan (2.3) ile verilen kümede birbirinden farklı karar değişkenleri için (2.2) programlama probleminin amaç fonksiyonu değerleri eşit ise karar değişkenleri birer alternatif çözümdür.

(2.2) programlama problemi amaç fonksiyonunun negatifi alınarak bir maksimizasyon problemi olarak kolayca değiştirilebilir ve eşitsizlik kısıtları $c_i(x) \leq 0, i \in I$ olarak yeniden düzenlenebilir.

Tanım 2.5 (Bazaraa vd. [5]) (2.2) programlama probleminde amaç fonksiyonu ve kısıt fonksiyonlarının tamamı lineer ise programlama problemi lineer programlama problemi olarak adlandırılır. Kısıt ya da amaç fonksiyonlarından en az biri lineer değilse (2.2) programlama problemi lineer olmayan programlama problemi olarak adlandırılır.

2.2 Çok Amaçlı Programlama Problemleri

Verilen kısıtlar altında birden fazla amacı optimize etmeyi amaçlayan problem, çok amaçlı programlama problemi olarak adlandırılır. Problemin matematiksel modeli vektör maksimum problemi ismiyle ilk kez Kuhn ve Tucker tarafından 1951 yılında tanımlanmıştır([59]).

2.2.1 Vektör Maksimum Problemi

Vektör maksimum probleminin ilk matematiksel gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$\{\max f(x), x \in S\} \quad (2.4)$$

Bu gösterimde, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$, $x \in R^m \rightarrow R^k$ vektör değerli bir fonksiyondur. $\bar{x} \in S$ 'in tüm çözümlerinin kümesi, $f_l(x)$, $l = 1, 2, \dots, k$ amaç fonksiyonuna bağlı olarak tanımlanır ve aşağıdaki koşullar sağlanır;

Eğer $\bar{x} \in S$ ise, $\bar{x} \in S$ bir etkin çözümdür öyle ki, $f_l(\bar{x}) \geq f_l(x)$, $l = 1, 2, \dots, k$ ve en az bir $l = 1, 2, \dots, k$ için, $f_l(\bar{x}) > f_l(x)$ dir.

Buradan, çok amaçlı programlama problemi modeli genel olarak

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \sum_{j=1}^n c_{1j} x_j \rightarrow \max(\min) \\
f_2(x) &= \sum_{j=1}^n c_{2j} x_j \rightarrow \max(\min) \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
f_k(x) &= \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j \rightarrow \max(\min)
\end{aligned}
\tag{2.5}$$

$$\text{kısıtlar} \begin{cases} a_{ij} x_j \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_i, i = 1, 2, \dots, m \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

yazılabilir. (2.5) programlama probleminde $x_j = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, n – boyutlu sıfırdan büyük pozitif karar değişkenleri vektörü, $c_{ij} = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})^T$ $l \times n$ boyutlu sabit fiyat katsayılar matrisi, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))^T$ k – boyutlu kriter vektörü, $[a_{ij}]_{m \times n}$ kısıtların katsayılar matrisi, $b_i = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ m – boyutlu sağ taraf sabiti vektörüdür. Problemde verilen “max- min” kelimesi amaçların maksimize ya da minimize edilmesi anlamını taşımaktadır.

(2.5) çok amaçlı programlama probleminde amaç fonksiyonları arasında bir çakışma yoksa, tüm amaç fonksiyonları optimum çözüme katkı sağlar. Bu durumda optimal değerleri bulmak için herhangi özel bir yöntem gerektirmez. Uygulamalarda, genellikle çok amaçlı amaç fonksiyonlarını aynı anda optimize eden tek bir nokta olmadığı kabul edilir.

(2.5) çok amaçlı programlama probleminde, $f_i(x)$ fonksiyonu maksimum değer ise $-f_i(x)$ fonksiyonu amaç fonksiyonunun minimum değeridir. $f_i(x)$ amaç fonksiyonunu maksimize etmekle, $-f_i(x)$ amaç fonksiyonunu minimize etmek arasında hiçbir fark yoktur.

Tanım 2.6 (2.5) programlama problemi modelinde, amaç fonksiyonları ve kısıtlar lineer ise (2.5) programlama problemi lineer olarak adlandırılır. Eğer amaç fonksiyonu ya da kısıtlardan en az biri lineer değilse (2.5) programlama problemi lineer olmayan çok amaçlı programlama problemi olarak adlandırılır.

2.2.2 Optimal Çözüm

(2.5) çok amaçlı programlama probleminde (minimizasyon problemi için) feasible bölgede $x \in X$ noktasının optimal çözüm olması için gerek ve yeter şart $l = 1, 2, \dots, k$ için $f_l(\tilde{x}) \leq f_l(x)$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \in X$ noktasının mevcut olmamasıdır.

Bununla birlikte, çok amaçlı programlama problemlerinde genellikle amaç fonksiyonları birbirleri ile çeliştiğinden amaç fonksiyonlarının tamamını aynı anda optimize eden tek bir optimal çözüm daima mevcut değildir. Bu nedenle, optimallik koşulu yanında diğer optimallik kavramları olan Pareto optimallik kavramlarını ve basılamazlık kriterini tanımlamaya ihtiyaç duyarız.

2.2.3 Pareto optimal çözüm

Kriter uzayında $S = \{x \in R^n \mid a_{ij}x_j (\leq, =, \geq) b, x_j \geq 0\}$ bir feasible küme olmak üzere $x \in S$ vektörü verilsin. x vektörünün (2.5) programlama probleminin bir Pareto optimal çözüm olması için gerek ve yeter şart tüm $l = 1, 2, \dots, k$ için $f_l(\tilde{x}) \leq f_l(x)$ ve en az bir farklı index r için $f_r(\tilde{x}) < f_r(x)$ (kesin eşitsizlik) olacak şekilde herhangi bir $\tilde{x} \in S$ vektörünün olmamasıdır.

Pareto optimal çözümler genellikle sonsuz sayıdadır. Bu nedenlerle, problemin çözümünde Pareto optimal çözümlerin bir kümesi elde edilir.

2.2.4 Zayıf Pareto optimal çözüm

Kriter uzayında $S = \{x \in R^n \mid a_{ij}x_j (\leq, =, \geq) b, x_j \geq 0\}$ bir feasible bölge olmak üzere $x \in S$ vektörü verilsin. x vektörünün bir zayıf Pareto optimal çözüm olması için gerek

ve yeter şart tüm $l=1,2,...,k$ için $f_l(\tilde{x}) < f_l(x)$ olacak şekilde herhangi bir $\tilde{x} \in S$ vektörünün olmamasıdır.

2.2.5 Basılamazlık Kriteri

Kriter uzayında $S = \{x \in R^n \mid a_{ij}x_j (\leq, =, \geq) b_i, x_j \geq 0\}$ bir uygun bölge kümesinde olmak üzere $x \in S$ vektörü verilsin. x vektörünün bir basılamaz çözüm olması için gerek ve yeter şart $f_l(\tilde{x}) \leq f_l(x)$ ve $f_l(x) \neq f_l(\tilde{x})$ olacak şekilde herhangi bir $\tilde{x} \in X$ noktasının olmamasıdır.

Tüm etkin çözümlerin görüntüsü Pareto eğri ya da Pareto yüzey olarak adlandırılır. Pareto yüzeylerin görüntüsü farklı amaç fonksiyonları arasında değiş tokuş (trade off)'un doğasına işaret eder.

Tanım 2.7 (Referans Noktası) Karar verme problemlerinde arzu edilen (hedeflenen) amaç fonksiyonlarının değerleri istek seviyeleri olarak adlandırılır ve $f_l^*, l=1,2,...,k$ ile gösterilir. İstek seviyelerini oluşturan vektöre ise referans noktası adı verilir.

Tanım 2.8 (İdeal Nokta) Her bir amaç fonksiyonunu tek tek optimize ederek elde edilen amaç fonksiyonu vektörüne ideal ya da mükemmel amaç fonksiyonu vektörü denir.

Aşağıda verilen çok amaçlı programlama problemini alalım.

$$\min_{x \in S} f_l(x), (l=1,2,...,k) \quad (2.6)$$

Verilen programlama problemi modelinde, $f_l(x)$ amaç fonksiyonunun herbirinin tek tek optimize edilmesi ile elde edilen $f_l^* = (f_1^*, f_2^*, ..., f_k^*)$ amaç fonksiyonunun değerlerinden oluşturan vektöre, ideal amaç fonksiyonu vektörü denir. İdeal amaç fonksiyonunu oluşturan her bir amaç fonksiyonu değerine amaç fonksiyonunu oluşturan ideal noktalar adı verilir.

2.3 Çok Amaçlı Programlama Problemlerinin Bazı Çözüm Yöntemleri

Bir çok problemde, Pareto eğriler etkin olarak hesaplanamaz. Teorik olarak bu noktaları tam olarak hesaplamak mümkün olsa bile, lineer olmayan çok amaçlı programlama problemlerinin çözümlerinin bulunması için yetersiz kalır. Bu nedenle, çoğu lineer olmayan programlama problemlerinin çözümlerinde yaklaştırma yöntemleri kullanılır. Bununla birlikte, yaklaştırma yöntemleri karar verici için bir ikinci seçenek sunmaz.

Son yıllarda lineer olmayan çok amaçlı programlama problemlerinin çözümünde önerilen yöntemler hakkında kapsamlı bir araştırma Ehrgott tarafından [94]'da verilmiştir. Ehrgott farklı ağırlıklandırma yöntemleri hakkında araştırmalar yapmıştır.

Bu tezde, önerdiğimiz yöntemden elde edilen sonuçları karşılaştırmak ve yöntemimizin etkinliğini göstermek için çok amaçlı programlama problemlerinin çözümünde sıklıkla kullanılan ağırlıklandırma yöntemi ve global kriter yöntemi hakkında bazı önemli bilgiler verilecektir.

2.3.1 Ağırlıklandırma Yöntemi

Ağırlıklandırma yöntemi, çok amaçlı programlama problemlerinin çözümlerinin elde edilmesinde sıklıkla kullanılan temel yöntemlerden biridir ve çok amaçlı programlama problemlerinin zayıf Pareto optimal çözümlerini verir.

Ağırlıklandırma yönteminde ana fikir, amaç fonksiyonlarının ağırlık toplamaları minimize edilir ve her bir amacın ağırlık katsayısı diğerleriyle bağdaştırılır. Böylece çok amaçlı fonksiyonlar, ağırlık parametreleri ile tek bir amaç fonksiyonuna dönüştürülür (Gass and Saaty [62]).

Ağırlıklandırma yöntemi kullanılarak, verilen programlama problemi genel olarak aşağıdaki gibi formüle edilir:

$$y(x) = \min \sum_{l=1}^k w_l f_l(x), l = 1, 2, \dots, k \quad (2.7)$$
$$\text{kısıtlar } \left\{ S = \left\{ x \in R^n \mid a_{ij}x_j (\leq, =, \geq) b, x_j \geq 0 \right\} \right\}$$

(2.7) modelinde $w_l = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ amaç fonksiyonlarının önceden atanmış ağırlık katsayılar vektörüdür ve her bir $l = 1, 2, \dots, k$ için $w_l \geq 0$, $w_l \geq 0, \sum_{l=1}^k w_l = 1$ olduğu kabul edilir.

Ağırlıklandırma yönteminde ağırlık katsayıları pozitif ya da çözüm tek ise problemde pareto optimallik garantilenir. Ağırlıklandırma yöntemi kullanılarak ve bu pozitif ağırlıklar karar verici tarafından değiştirilerek farklı Pareto optimal çözümlerde elde edilebilir.

Teorem 2.1 (2.7) ağırlıklı programlama probleminden elde edilen çözümler zayıf Pareto optimal çözümüdür.

İspat $\bar{x} \in S$ ağırlıklı programlama probleminin bir çözümü olsun ve bu çözüm zayıf Pareto optimal çözüm olmasın. O halde, Pareto optimallik tanımından tüm $l = 1, 2, \dots, k$ için $f_l(\tilde{x}) < f_l(\bar{x})$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \in S$ çözümü mevcuttur. Buradan, $l = 1, 2, \dots, k$ için $w_l > 0$ olduğu için

$$\sum_{l=1}^k w_l f_l(\tilde{x}) < \sum_{l=1}^k w_l f_l(\bar{x}), l = 1, 2, \dots, k.$$

Bu eşitsizlik $\bar{x} \in S$ 'in (2.7) ağırlıklı programlama probleminin bir çözümü olması ile çelişir. Bu yüzden $\bar{x} \in S$ bir zayıf Pareto optimal çözüm olmalıdır.

Teorem 2.2 Tüm $l = 1, 2, \dots, k$ için $w_l > 0$ ise $\bar{x} \in S$ ağırlıklı programlama probleminin bir Pareto optimal çözümüdür.

İspat $\bar{x} \in S$ ağırlıklı programlama probleminin bir çözümü olsun ve bu çözüm Pareto optimal çözüm olmasın. O halde, Pareto optimallik tanımından tüm $l = 1, 2, \dots, k$ için $f_l(\tilde{x}) \leq f_l(\bar{x})$ ve en az bir $r = 1, 2, \dots, p$ için $f_r(\tilde{x}) < f_r(\bar{x})$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \in S$ çözümü mevcuttur. Buradan, $l = 1, 2, \dots, k$ için $w_l > 0$ olduğu için

$$\sum_{l=1}^k w_l f_l(\tilde{x}) < \sum_{l=1}^k w_l f_l(\bar{x}), l = 1, 2, \dots, k.$$

Bu eşitsizlik $\bar{x} \in S$ 'in (2.7) programlama probleminin bir çözümü olması ile çelişir. Bu yüzden $\bar{x} \in S$ bir Pareto optimal çözüm olmalıdır.

2.3.2 Global Kriter Yöntemi

Global kriter yöntemi, genellikle uzlaşık programlama olarak adlandırılır (Yu and Zeleny [95]). Bu yöntemde, bazı referans noktaları arasındaki mesafeler ve feasible bölge minimize edilir. Bu yöntem tercih önceliği kullanmaz ve karar vericinin düşüncelerini dikkate almaz.

Tanım 2.8'den (2.5) programlama probleminin minimum veya maksimum ideal amaç fonksiyonu vektörü $f_l^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_k^*)$ elde edilir. Bu vektör bir referans noktası olarak kabul edilir. L_p metrikleri ise referans noktaları arasındaki mesafelerin ölçümü için kullanılır. Böylece, amaç fonksiyonlarının referans noktalardan sapmaları minimize edilerek optimal çözümler elde edilebilir. Bu yöntem global kriter yöntem olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde matematiksel olarak ifade edilebilir:

$$\min L_p = \left\{ \sum_{l=1}^k \left| \frac{f_l(x) - f_l^*}{f_l^*} \right|^p \right\}^{1/p} \quad (2.8)$$

$$\text{kısıtlar } \left\{ S = \left\{ x \in R^n \mid a_{ij}x_j (\leq, =, \geq) b, x_j \geq 0 \right\} \right\}$$

(2.8) problem modelinde amaç fonksiyonunun tam değer olarak alınmasının nedeni, global kriter vektörünün tam olarak bilinmemesinden kaynaklanmaktadır. (2.8) L_p probleminde p değeri genel olarak $1 \leq p \leq \infty$ aralığında alınmaktadır.

Burada, (2.8) problem modelinde $p = \infty$ olarak alınırsa, metrik Tchebycheff metriği olarak adlandırılır. L_p probleminin matematiksel modeli aşağıdaki gibidir;

$$L_p = \min \max_{l=1,2,\dots,k} \left| \frac{f_l(x) - f_l^*}{f_l^*} \right| \quad (2.9)$$

$$S = \left\{ x \in R^n \mid a_{ij}x_j (\leq, =, \geq) b, x_j \geq 0 \right\}$$

(2.9) L_p probleminde, amaç fonksiyonu $\min \max_{l=1,2,\dots,k} |f_l(x) - f_l^*|$ olarak kullanılabilir.

Amaç fonksiyonunun $\min \max_{l=1,2,\dots,k} \left| \frac{f_l(x) - f_l^*}{f_l^*} \right|$ olarak alındığında, (2.9) problemi normalize edilmiş olur.

Teorem 2.4 (2.8) programlama probleminin çözümü Pareto optimal çözümdür.

İspat Farz edelim ki $\bar{x} \in S$ (2.8) programlama probleminin bir çözümü olsun ve bu çözüm Pareto optimal çözüm olmasın. O halde, Pareto optimal çözümün tanımından tüm $l=1,2,\dots,k$ için $f_l(\tilde{x}) \leq f_l(\bar{x})$ ve en az bir $r=1,2,\dots,p$ için $f_r(\tilde{x}) < f_r(\bar{x})$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \in S$ çözümü mevcuttur. Burada, $l=1,2,\dots,k$ için l . amaç fonksiyonunun ideal amaç fonksiyonu f_l^* 'dan

$$f_l^* \leq f_l(\tilde{x}) \leq f_l(\bar{x}), l=1,2,\dots,k$$

$$f_r^* < f_r(\tilde{x}) < f_r(\bar{x}), r=1,2,\dots,p.$$

elde ederiz. Buradan,

$$(f_l(\tilde{x}) - f_l^*)^p \leq (f_l(\bar{x}) - f_l^*)^p, l=1,2,\dots,k$$

$$(f_r(\tilde{x}) - f_r^*)^p < (f_r(\bar{x}) - f_r^*)^p, r=1,2,\dots,p$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak,

$$\sum_{l=1}^k (f_l(\tilde{x}) - f_l^*)^p < \sum_{l=1}^k (f_l(\bar{x}) - f_l^*)^p$$

elde edilir. Her iki tarafın karekökü alınırsa

$$\sqrt{\sum_{l=1}^k (f_l(\tilde{x}) - f_l^*)^p} < \sqrt{\sum_{l=1}^k (f_l(\bar{x}) - f_l^*)^p}$$

elde edilir. Buradan, $\bar{x} \in S$ noktasının (2.8) programlama probleminin bir optimal çözümü olması ile çelişir. Böylece $\bar{x} \in S$ noktasının bir Pareto optimal çözüm olduğu ispatlanmış olur.

BULANIK KARAR VERME VE BULANIK KÜME TEORİSİ

Bulanık mantık kuramı ilk olarak Lotfy A. Zadeh tarafından 1965 yılında ortaya atılmıştır [28]. Bellman ve Zadeh tarafından [29]'de bulanık ve belirsiz ortamlarda karar verme durumunda bulanık küme teorisinin kullanılmasına yönelik çalışmalar yapmışlardır. Daha sonra, Zimmerman [30] ve [31]'da tek ve çok amaçlı lineer programlama problemlerinin çözümünde bulanık programlama yöntemi önermiştir. Bir takım modeller üzerinde bulanık programlama yöntemini test etmiştir.

Literatürde bulanık programlama üzerine çok fazla çalışma mevcuttur. Bu çalışmalardan; Tanaka vd. [63]'de bulanık kısıtlarda bulanık lineer programlama yönteminin bir modelini önermiştir. Orlovsky [64] ve Yager [65], bulanık lineer programlama konusunda çalışmalar yapmışlardır. Chanas [66]'de bulanık lineer programlamada parametrik programlamayı kullanmıştır. Rommelfanger ([67], [68]) amaç fonksiyonunda bulanık parametrelerle lineer programlama problemlerini çözmek için yeni bir yöntem sunmuştur.

Bu bölümde tezde kullanılacak olan bulanık kümeler teorisi, bulanık karar verme temel tanım ve teoremleri hakkında kısa bilgiler verilecektir.

3.1 Bulanık Mantık ve Küme Teorisi

Tanım 3.1 (Zadeh, [28]) Reel sayılar kümesinde $[0,1]$ kapalı aralığında tanımlı, bir X fonksiyonuna bulanık (Fuzzy) sayı denir.

Tanım 3.2 (Zadeh, [28]) $X = \{x\}$, $x \in X$ ile ifade edilen sayıların (ya da nesnelerin) kümesidir.

Tanım 3.3 (Zadeh, [28]) X kümesinde tanımlı bir bulanık küme $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. A bulanık kümesinde x 'in üyelik derecesi $[0,1]$ kapalı ve sınırlı aralığında değerler alır.

Kısaca; $\mu_A(x): A \subset X \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu bir üyelik fonksiyonudur denir. X evrensel kümesinde A bulanık kümesi $A: X \rightarrow [0,1]$ olacak şekilde bir fonksiyondur.

x noktasında $\mu_A(x)$ değeri, A bulanık kümesinde x 'in üyeliğinin derecesini temsil eder. Bu üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (3.1)$$

Bazen X evrensel kümesinde A bulanık kümesi, $(x, \mu_A(x))$ olacak şekilde sıralı liste ile gösterilebilir. Bu listede 0 dereceli elemanlar yer almaz. Böylece, X reel sayılar kümesinde A bulanık küme $x \in X$ ve $\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$ olmak üzere, $A = \{(x, \mu_A(x))\}$ ile temsil edilebilir.

Tanım 3.4 (Zadeh, [28]) X reel sayılar kümesinde tüm $x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise A ve B bulanık kümeleri eşittir ve $A = B$ ile gösterilir.

Tanım 3.5 (Zadeh, [28]) Bir A bulanık kümesinin tümleyeni A' ile gösterilir ve $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$ ile temsiledilir.

Tanım 3.6 (Zadeh, [28]) X reel sayılar kümesinde tüm $x \in X$ için A bulanık kümesinin B bulanık kümesinin bir alt kümesi olması için gerek ve yeter şart $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ olmasıdır ve $A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ile temsil edilir.

Tanım 3.7 (Zadeh, [28]) Üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ olan A ve B bulanık kümelerinin birleşimi bir bulanık kümedir ve

$$\mu_C = A \cup B(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)], x \in X$$

fonksiyonu A ve B bulanık kümelerinin birleşimi olan farklı bir C bulanık kümesidir. Bu bulanık küme bir üyelik fonksiyonu belirtir.

Tanım 3.8 (Zadeh, [28]) Üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ olan A ve B bulanık kümelerinin kesişiminde bir bulanık kümedir ve $\mu_C = A \cap B(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)], x \in X$ fonksiyonuna A ve B bulanık kümelerinin kesişimi olan bir C bulanık kümesinin bir üyelik fonksiyonu denir.

Tanım 3.9 (Zadeh, [28]) A ve B bulanık kümelerinin çarpımı AB ile verilir ve $\mu_{AB} = \mu_A \mu_B$ fonksiyonuna üyelik fonksiyonlarının cebirsel toplam fonksiyonu denir.

Tanım 3.10 (Zadeh, [28]) A ve B bulanık kümelerinin toplamı $A+B$ ile verilir ve $\mu_{A+B} = \mu_A + \mu_B$ fonksiyonuna üyelik fonksiyonlarının cebirsel çarpım fonksiyonu denir.

Tanım 3.11 (Zadeh, [28]) A ve B bulanık kümelerinin mutlak farkı $|A-B|$ ile verilir ve $\mu_{|A-B|} = |\mu_A - \mu_B|$ fonksiyonuna üyelik fonksiyonlarının mutlak fark fonksiyonu denir.

Tanım 3.12 (Zadeh, [28]) A ve B bulanık kümelerinin konveks birleşimi $\Lambda \in [0,1]$ olmak üzere $\mu_{(A,B;\Lambda)(x)} = \Lambda \mu_A(x) + (1-\Lambda) \mu_B(x), x \in X$ fonksiyonuna üyelik fonksiyonlarının konveks birleşimi denir.

Tanım 3.13 (Zadeh, [28]) X reel sayılar kümesinde $X \times X$ bağıntısına çarpım uzayında bir bulanık küme denir. Genelleştirilecek olursa X reel sayılar kümesinde n -li bulanık bağıntı $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ çarpım uzayında bir bulanık küme olan A kümesidir. Bu kümenin üyelik fonksiyonları $\mu_A(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in X, i = 1, 2, \dots, n$ ile gösterilir.

Tanım 3.14 (Zadeh, [28]) X reel sayılar kümesinde A bir bulanık küme olsun. A bulanık kümesinin desteği $S(A)$ ile gösterilir ve

$$S(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\} \quad (3.2)$$

kümesi ile temsil edilir.

Tanım 3.15 (Zadeh, [28]) X evrensel kümesinde A bir bulanık küme olsun. A bulanık kümesinin yüksekliği $h(A)$ olmak üzere,

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) \quad (3.3)$$

ile tanımlanır.

Eğer $h(A)=1$ ise A bulanık kümesi normal bulanık küme olarak adlandırılır. Aksi takdirde, A bulanık kümesi alt normal olarak adlandırılır. Eğer $0 < h(A) < 1$ ise, alt normal A bulanık kümesi $x \in X$ için

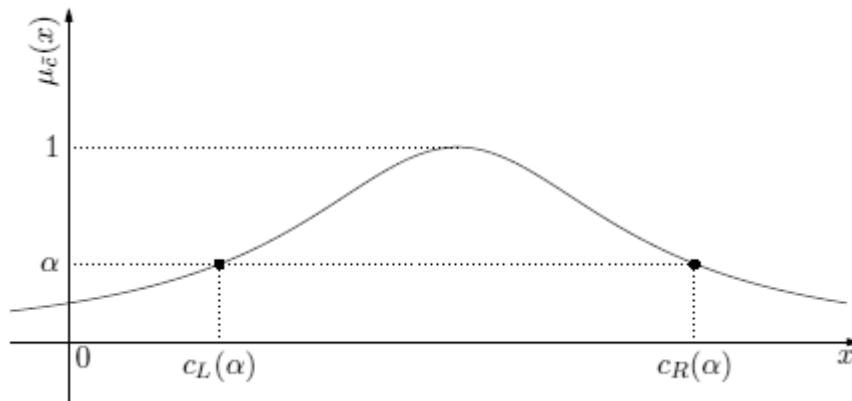
$$\frac{\mu_A(x)}{h(A)} \quad (3.4)$$

olarak tekrar tanımlanarak normalleştirilebilir.

Tanım 3.16 Reel sayılar kümesindeki bir A bulanık kümenin α – keseni

$$A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \geq \alpha, x \in X\} \quad (3.5)$$

ile gösterilir. Bu küme x elemanının üyelik derecelerinin en az α kadar olduğunu gösterir. Üstelik bir A bulanık kümesinin bir α – keseni $c_L(\alpha)$ ve $c_R(\alpha)$ alt ve üst sınırlar olmak üzere, $A_\alpha = [c_L(\alpha), c_R(\alpha)]$ aralığı ile temsil edilir ve aşağıda verilen grafik 3.1’deki gibi gösterilir.



Şekil 3. 1 A bulanık kümesinin α – keseni

Tanım 3.17 Bir A bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart

$$A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \alpha \in (0,1]$$

şeklinde tanımlanan kümelerinin konveks olmasıdır.

Tanım 3.18 (Sınırlı Bulanık Küme). Tüm $\alpha \in (0,1]$ için, (3.5) ile verilen α – keseni kümesi sınırlı ise A bulanık kümesi, R^n de sınırlı bir bulanık kümedir.

Teorem 3.1 A bulanık kümesi reel sayıların bir alt kümesi olsun. A bulanık kümesi konvekstir yalnız ve yalnız $\lambda \in [0,1]$ ve $\forall x_1, x_2 \in X$ için

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) \quad (3.6)$$

İspat: A kümesi X de bir konveks bulanık küme olsun. $\alpha = \mu_A(x_1) \leq \mu_A(x_2)$ alalım. A_α kümesi konveks olduğu için, $x_1 \in A_\alpha$ ve $x_2 \in A_\alpha$ ve $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$ elde edilir. Bu yüzden,

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \alpha = \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

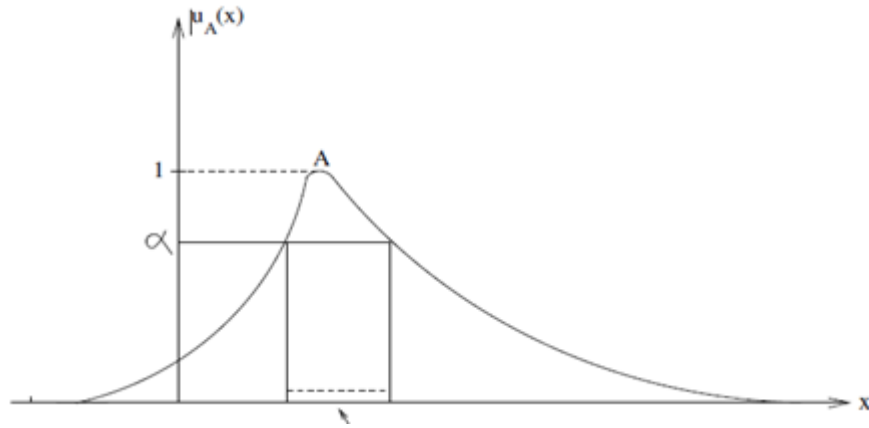
elde edilir.

Tersine, A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $\mu_A(x)$, $\alpha = \mu_A(x_1)$ alınarak, A_α kümesi, tüm x_2 noktalarının bir kümesi olarak $\mu_A(x_2) \geq \alpha = \mu_A(x_1)$ yeniden düzenlenebilir. Bu yüzden, her $x_1 \in A_\alpha$ ve $x_2 \in A_\alpha$ için

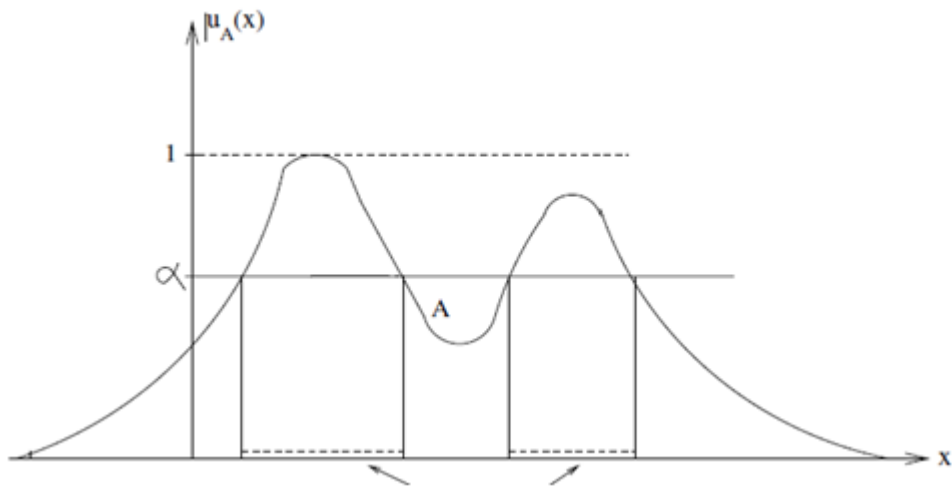
$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) = \mu_A(x_1) = \alpha$$

eşitsizliği $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$ olduğunu gösterir. Buradan, her $\alpha \in (0,1]$ için A_α kümesi bir konveks kümedir.

Aşağıdaki şekillerde sırasıyla konveks bulanık küme ve konveks bulanık olmayan küme gösterilmiştir.



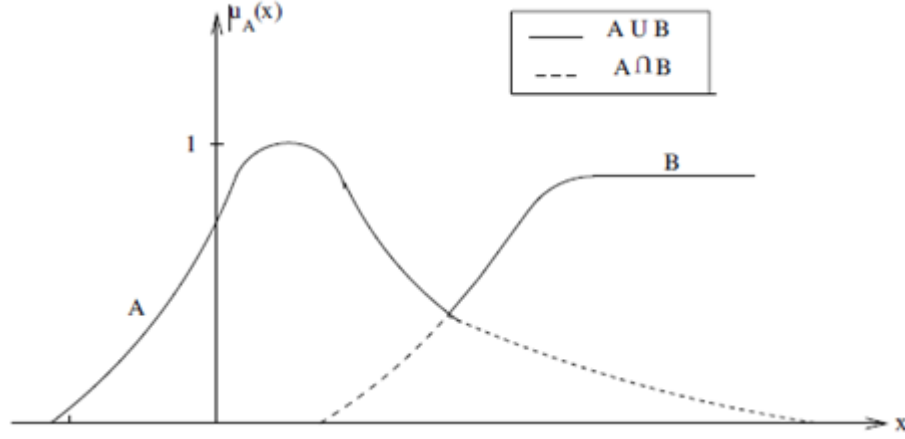
Şekil 3. 2 Konveks Bulanık Küme



Şekil 3. 3 Konveks olmayan bir bulanık küme

A ve B iki konveks bulanık küme ise kesişimlerinde bir bulanık konveks kümedir. Diğer taraftan A ve B iki konveks bulanık kümenin birleşimi konveksliğe ihtiyaç duymaz.

Bu durum aşağıdaki grafikte şekil 3.4' de gösterilmiştir.



Şekil 3. 4 $A \cap B$ bir konveks kümedir fakat $A \cup B$ konveks değildir

3.2 Bulanık Sayı

A bulanık kümesi, reel sayılar kümesi üzerinde aşağıdaki şartlar sağlanırsa bulanık sayı olarak adlandırılır;

1. A bulanık kümesi normaldir.
2. $\forall x \in [a, b]$ için $\mu_A = 1$ ise $[a, b]$ aralığında sabittir.
3. A_α , her $\alpha \in (0, 1]$ için bir kapalı aralıktır ve bu aralıkta sürekli artandır.
4. A bulanık kümesinin desteği sınırlıdır.

3.2.1 Üçgensel ve Yamuksal Bulanık Sayı

Üçgensel ve yamuksal bulanık sayılar uygulamada en çok kullanılan ve bulanık sayılar içinde en önemli olan sayılardır. Bu sayılar, isimlerini üyelik fonksiyonlarının biçimlerinden almaktadırlar.

Üçgensel bir bulanık sayı ve yamuksal bulanık sayılara ait tanımlar, üyelik fonksiyonları Kaufmann ve Gupta tarafından [100]'de detaylı olarak verilmiştir. Bu çalışmada, yamuksal bulanık sayılardan yararlanacağımız için, yamuksal bulanık sayının gösterimi ve üyelik fonksiyonlarını vereceğiz. Bir yamuksal bulanık sayı $\tilde{A} = (x, a, b, c, d)$ olmak üzere

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x, a, b, c, d) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 1, & b \leq x \leq c, \\ \frac{x-d}{c-d}, & c < x < d, \\ 0, & \text{diğer.} \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir.

3.2.2 Yamuksal Bulanık Sayılar için Lineer Sıralama Yöntemi

Bulanık sayıları deterministik sayılara dönüştürmek için çeşitli sıralama yöntemleri mevcuttur. Biz bu tezde Liou and Wang [98] sıralama yönteminden yararlandık. Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir X bulanık kümeyi alalım ve $\tilde{A} = (a, b, c, d) \in X$ olsun. Liou and Wang tarafından [98]'de verilen lineer sıralama yöntemine göre yamuksal bulanık sayının deterministik değeri $\Re(\tilde{A}) = \frac{(a+b+c+d)}{4}$ fonksiyonu ile elde edilir ve $\Re(\tilde{A}): X \rightarrow R$ fonksiyonu sıralama fonksiyonu olarak adlandırılır.

3.2.3 Bulanık Sayılar için En Yakın Aralık Yöntemi

Grzegorzewski [99]'da bir üçgensel ve yamuksal sayıyı α -kesenleri yardımıyla aralıklı sayılara çevirmiştir. $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ yamuksal bulanık sayı olsun. Bu yamuksal sayı α -kesenleri ile $[\underline{A}_\alpha, \bar{A}_\alpha]$ olacak şekilde yeniden tanımlanabilir. Bu aralığın alt ve üst sınırlarını $\underline{A}_\alpha = a_1 + \alpha(a_2 - a_1)$ ve $\bar{A}_\alpha = a_3 + \alpha(a_4 - a_3)$ olarak yazabiliriz. Grzegorzewski [99]'da verilen yöntem kullanılarak alt ve üst sınırları

$$\underline{C} = \int_0^1 \underline{A}_\alpha(\alpha) d\alpha = \int_0^1 [a_1 + \alpha(a_2 - a_1)] d\alpha = \frac{1}{2}(a_2 + a_1), 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\bar{C} = \int_0^1 \bar{A}_\alpha(\alpha) d\alpha = \int_0^1 [a_3 + \alpha(a_4 - a_3)] d\alpha = \frac{1}{2}(a_4 + a_3), 0 \leq \alpha \leq 1$$

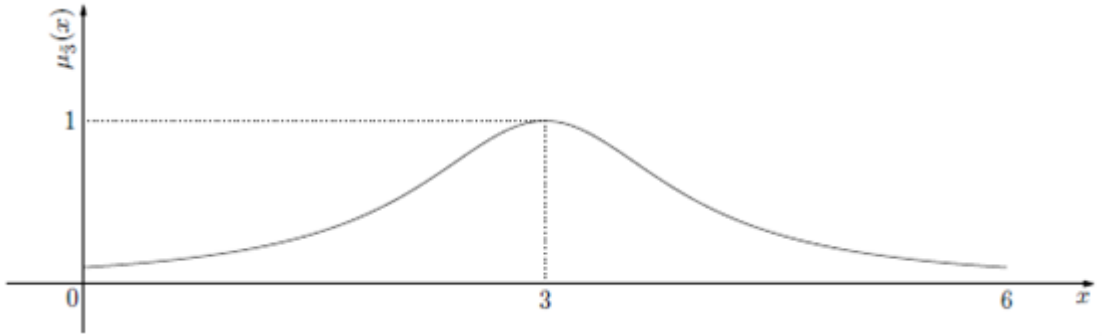
elde ederiz. Böylece $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ yamuksal bulanık sayısı aşağıdaki gibi bir aralıklı sayıya dönüştürülür.

$$[\underline{C}, \bar{C}] = \left[\frac{1}{2}(a_2 + a_1), \frac{1}{2}(a_4 + a_3) \right]$$

Örnek 3.1 Kesin olarak verilen bir değişken bir bulanık sayı olarak gösterilebilir. Örneğin $\tilde{3}$ bulanık sayısı için, 3 civarındadır denir. Bunun anlamı sayı iyi tanımlı (well-defined) olmamasından kaynaklanmaktadır. Böylece $\tilde{3}$ bulanık sayısı

$$\mu_3(x) = \frac{1}{(x-3)^2 + 1}$$

üyelik fonksiyonu ile ifade edilir. Bu üyelik fonksiyonu aşağıda verilen grafik 3.5 ile verilmiştir.



Şekil 3. 5 $\tilde{3}$ bulanık sayısının bir olası üyelik fonksiyonu

3.3 Zadeh'in Genişleme Prensibi

Genişleme prensibi, matematiksel teorilerin bulanık ortamlarda kullanılmasını sağlar. Bulanık bağıntı ve bulanık aritmetiğin temelini oluşturur. x ve y değişkenleri sırasıyla A ve B bulanık kümelerindeki elemanları gösterebilir. Ayrıca A ve B bulanık kümeleri E ve D evrenlerinde tanımlı olsun. A bulanık kümesi

$$A = (x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \dots, (x_n, \mu_A(x_n))$$

olmak üzere, x ve y değişkenleri arasında $y = f(x)$ olacak şekilde bir fonksiyonel ilişki varsa ya da başka bir ifadeyle veya bu değişkenlerin tanımlı olduğu evrensel kümeler arasında $f : E \rightarrow D$ olacak şekilde eşleşme varsa B bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu genişleme prensibi ile aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$B = f(A) = f((x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \dots, (x_n, \mu_A(x_n)))$$

Buda $y = f(x)$ fonksiyonunun birebir olmasını gerektirir.

Başka bir gösterimle, Y kümesinde bir nokta için X kümesinde f fonksiyonu n -sıralı yada $X = X_1, X_2, \dots, X_n$ ve $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile verilen $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonunu alalım. Zadeh'in genişleme prensibi, X evrensel kümesinin bulanık alt kümeleri üzerinde $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kesin fonksiyonunu genişletmek için kullanılır. Yani; $A_1, A_2, \dots, A_n$ öyle ki $B = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ olmasıdır. Böylece, B bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mu_B(y) = \sup_{y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \dots, \mu_{A_n}(x_n)) \quad (3.7)$$

ve

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x)} \mu_A(x) & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (3.8)$$

ile verilebilir.

(3.8)'de verilen $f^{-1}(y)$ fonksiyonu y fonksiyonunun ters görüntüsüdür.

3.3.1 Zadeh'in Genişleme Prensibine Dayanan Aritmetik İşlemler

A ve B iki bulanık sayı ve "*" bu sayılar üzerinde herhangi bir aritmetik işlem olsun. Zadeh'in genişleme prensibi kullanılarak bulanık sayı $A*B$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\mu_{A*B}(z) = \sup_{z=x*y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad (3.9)$$

$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{z=x+y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad (3.10)$$

$$\mu_{A-B}(z) = \sup_{z=x-y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad (3.11)$$

$$\mu_{A.B}(z) = \sup_{z=x.y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad (3.12)$$

$$\mu_{A \cdot B}(z) = \sup_{z=x \cdot y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad (3.13)$$

3.4 Bulanık Programlama

Gerçek dünya problemlerinde kısıtların ve amaç fonksiyonlarının katsayıları kesin olmamakla birlikte bir belirsizlik içermektedir. Kesinlikten kaynaklanan bazı kesin varsayımlar karar vericiyi zora sokmakta ve problemin çözümünde çok fazla karmaşıklık oluşturmaktadır. Bu nedenle çoğu problemlerin çözümü bulunamamaktadır.

Bulanık programlama, karar verici için kabul edilebilir sınırlarda olmak koşuluyla, problemi çözümsüzlükten kurtarma ve hesaplamalardaki karmaşıklığın azaltılmasına olanak sağlamaktadır. Gerçek dünyaya ilişkin belirsizliklerin verildiği problem modellerinde, çözümlerin elde edilmesi bulanık küme tanım ve teorileri kullanılarak oluşturulan bulanık programlama modeli ile mümkündür. Bulanık programlamada, verilen problem modelinde belirsizlikler hem amaç fonksiyonu hem de kısıtların katsayılarında ya da her iki şekilde olabilir. Bu belirsizliği içeren karar verme problemleri Bellman ve Zadeh [29] tarafından 1970’de bulanık ortamda karar verme olarak ifade edilmiştir.

Bulanık karar verme üç ana temel üzerine oturtulmuştur. Bu temeller bulanık hedef, bulanık kısıt ve bulanık karardır (Bellman ve Zadeh [29]). Bulanık hedef ve bulanık kısıtlarla nasıl karar verilebileceği Sakawa tarafından [60]’da tanımlamıştır.

Bulanık amaç fonksiyonu üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir ve kısıtları olan bir fonksiyondur. Verilen kısıtlar altında amaç fonksiyonunu optimize etmek istediğimiz için bulanık ortamda karar verme, amaç fonksiyonlarını ve kısıtları aynı anda sağlayan çözümler olarak tanımlanabilir. Bulanık küme teorisinde kümelerin kesişimi genellikle mantık olarak “ve” bağlacıdır. Bulanık ortamda karar verme amaç fonksiyonlarının ve kısıtların aynı anda kesişimi olarak ifade edilebilir. Bu nedenle, bulanık ortamda amaç fonksiyonları ve kısıtlar arasındaki ilişki tamamen simetriktir. Bulanık lineer ya da lineer olmayan bir fonksiyon için karar verme, amaç fonksiyonları ve kısıtları oluşturup kesişimleri olarak tanımlanabilir.

Eğer bir bulanık kümenin en iyi üyelik derecesi elde edilmek isteniyorsa bulanık karar verme problemi modeli, C_j ($j=1,2,...,n$) bulanık kısıtları boyunca, amaçlar kümesi G_i ($i=1,2,...,p$) ve olası hareketler/ alternatifler kümesi X ile karakterize edilmiştir (Wahed [69]).

Belman ve Zadeh [29]'da D bulanık kararının üyelik fonksiyonu $\mu_D(x) \rightarrow [0,1]$ olmak üzere, tüm hedef ve amaçların aşağıdaki gibi kesişimi olarak tanımlamıştır;

$$D = (G_1 \cap G_2 \cap, ..., \cap G_p) \cap (C_1 \cap C_2 \cap, ..., \cap C_n)$$

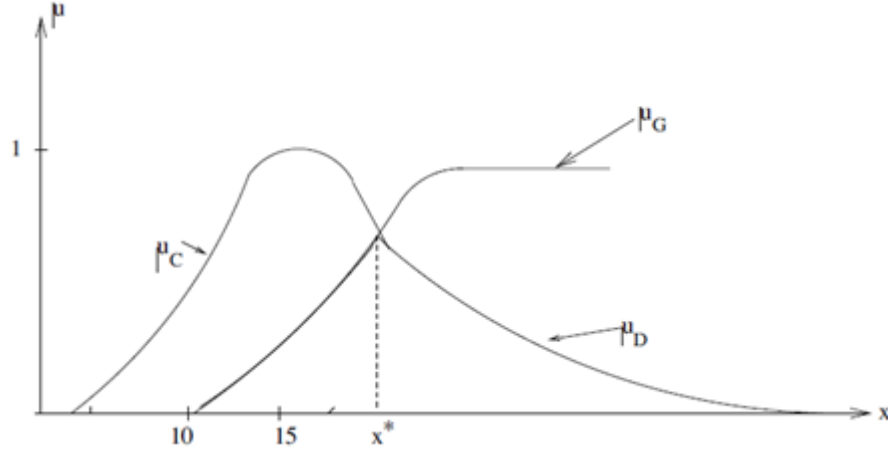
Bu kararı üyelik fonksiyonları yardımıyla

$$\mu_D(x) = \min_{i,j} (\mu_{G_i}(x), \mu_{C_j}(x)) \quad (3.14)$$

olarak ifade etmişlerdir.

Burada, D bulanık kararı için, üyelik fonksiyonu $\mu_D(\tilde{x}) = \max_i \mu_D(x)$ ile verilmişse $\tilde{x}$ noktasını bir optimal karar olarak açıklanmıştır. Yine X evrensel kümede tüm olası bulanık kararları $\alpha \in (0,1)$ aralığında seçebilir ya da tüm $\tilde{x} \in X$ noktalarını $\mu_D(\tilde{x}) \geq \alpha$ sınırı için belirleyebiliriz. Bu şekilde ifade edilen bulanık karar vermenin bir grafiksel gösterimi şekil 3.6'da verilmiştir. Bu grafik de sırasıyla;

$\mu_G(\tilde{x})$ kısıtın üyelik fonksiyonu; $\mu_D(x)$ hedefin üyelik fonksiyonu; $\mu_G(\tilde{x}) \cap \mu_D(\tilde{x})$ ifadesi bulanık kararı gösterir. Bu karar, $\mu_G(\tilde{x}) \cap \mu_D(\tilde{x})$ 'nin en büyük değeri için en iyi değere ulaşacağından, $\mu_G(\tilde{x}) \cap \mu_D(\tilde{x})$ üyelik fonksiyonlarının kesişimlerinin maksimum değerini alacaktır. Bu şekilde $\mu_G(\tilde{x}) \cap \mu_D(\tilde{x})$ kararını veren üyelik derecesi değeri kolayla belirlenir. Bulanık karar kümesindeki maksimum üyelik dereceli elemanın tek olması ise, bulanık kümelerin konvekslik özelliğinden kaynaklanmaktadır.



Şekil 3. 6 μ_D üyelik fonksiyonu ve $\tilde{x}$ optimal optimal kararı

Bulanık programlama problemleri, bulanıklık kavramının tanımlanmasına göre farklı yapılarda oluşturulabilir. Böyle bir çalışma Zimmermann tarafından [30]'da yapılmıştır. Zimmermann bulanık lineer programlama problemlerini simetrik modeller ve simetrik olmayan modeller olmak üzere iki sınıfta incelemiştir. Bulanık lineer programlamada olduğu gibi bulanık lineer olmayan programlama, bulanık mantık ve lineer olmayan programlamanın birleşimi olup, klasik lineer olmayan programlamanın genişletilmiş halidir. Uygulama ve yöntemler bakımından aralarında fazla bir fark bulunmamaktadır.

Aşağıda verilen lineer programlama problemini alalım.

$$\begin{aligned} \max f(x) &= c^T x \\ \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Bu problemde, $x \in R^n$ karar değişkeni $c \in R^n$ ve $b \in R^n$ birer deterministik sabit sayıdır. $A \in R^m \times R^n$ 'de bir deterministik teknolojik katsayılar matrisi, $\leq$ işareti ve "max" ifadesi kesinliği temsil etmektedir.

Lineer programlama problemlerinden farklı, karar verme problemlerinde, amaç fonksiyonlarını optimize etmek yerine bazı istek seviyelerine ulaşmak istenir. Bu nedenle, (3.15) problemde verilen deterministik ifadeler bir anlam ifade etmezler. İstenilen seviyelerden bir takım sapmalar meydana gelebilir ve deterministik ifadeler

bulanık olabilir. Böylece (3.15) programlama problemi bir bulanık programlama problemine dönüşür.

3.5 Bulanık Çok Amaçlı Programlama Problemleri ve Çözüm Yöntemleri

Literatürde kullanılan çeşitli bulanık programlama modelleri bulunmaktadır. Bu modeller aşağıdaki gibi problem yapılarına göre yapılmaktadır (Verdegay [70], [71]):

I. Bulanık kısıtlı doğrusal programlama problemi

II. Bulanık amaç fonksiyonlu ve bulanık kısıtlı doğrusal programlama problemi

III. Bulanık amaç katsayılı doğrusal programlama problemi

IV. Bulanık parametrelili doğrusal programlama problemi.

Bulanık çok amaçlı programlama probleminin çözümünde üyelik fonksiyonlarının seçimi önemli bir yere sahiptir. Kaynaklarda sıklıkla lineer üyelik fonksiyonlarının yanı sıra hiperbolik, s – biçimli hiperbolik, üstel, ters hiperbolik, parçalı lineer, s – biçimli parçalı lineer vs. gibi lineer olmayan yapıda değişik formlarda üyelik fonksiyonları mevcuttur. Bulanık programlama problemlerinin çözümünde en sık kullanılan üyelik fonksiyonu biçimleri lineer olanlardır. Bu şekilde oluşturulan programlama modeli, diğer üyelik fonksiyonlarına kıyasla daha pratik çözümler vermektedir. Bulanık programlama problemlerinin çözümü için farklı yöntemler hakkında Werners [72]'ye bakılabilir.

(2.5) çok amaçlı programlama problemini alalım. Bulanık karar verme problemi ya da bulanık programlama problemi oluşturularak çok amaçlı programlama problemini çözmek için Tanım 2.8'den ideal amaç fonksiyonu vektörleri

$$f_l^{\min}(x) \quad l=1,2,\dots,k \quad \text{ve} \quad f_l^{\max}(x) \quad l=1,2,\dots,k$$

verilen kısıtlar altında her bir amaç fonksiyonu tek tek optimize edilerek elde edilir. Eğer (2.5) çok amaçlı programlama problemi bir maksimizasyon problemi ise lineer üyelik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir;

$$\mu_l (f_l(x)) = \begin{cases} 0 & f_l(x) \leq f_l^{\min} \\ \frac{f_l(x) - f_l^{\min}}{f_l^{\max} - f_l^{\min}}, & f_l^{\min} \leq f_l(x) \leq f_l^{\max} \\ 1 & f_l(x) \geq f_l^{\max} \end{cases} \quad (3.16)$$

(3.16) lineer üyelik fonksiyonunda $f_l^{\min}$ ve $f_l^{\max}$ sırasıyla $f_l(x)$ $l=1,2,...,k$ (2.5)

programlama probleminde amaç fonksiyonunun 0 ve 1 olan üyelik derecelerini belirtmektedir. Maksimizasyon problemleri için oluşturulan (3.16) üyelik fonksiyonunun üyelik derecesi artarken, (2.5) çok amaçlı programlama probleminde amaç fonksiyonunun değeri artacaktır.

Aynı şekilde (2.5) çok amaçlı programlama problemi, bir minimizasyon problemi ise üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\mu_l (f_l(x)) = \begin{cases} 1 & f_l(x) \leq f_l^{\min} \\ \frac{f_l^{\max} - f_l(x)}{f_l^{\max} - f_l^{\min}}, & f_l^{\min} \leq f_l(x) \leq f_l^{\max} \\ 0 & f_l(x) \geq f_l^{\max} \end{cases} \quad (3.17)$$

Minimizasyon problemlerinde, (3.17) üyelik fonksiyonunun üyelik derecesi artarken, (2.5) çok amaçlı programlama probleminde amaç fonksiyonunun değeri de azalacaktır.

(2.5) çok amaçlı programlama probleminin amaç fonksiyon $f_l(x)$ 'in, üyelik fonksiyonları (3.16) ya da (3.17) elde edildikten sonra, Bellman ve Zadeh'in [29]'de verilen karar verme yöntemi kullanılarak (2.5) çok amaçlı programlama problemi, aşağıda verilen bulanık karar verme problemine kolayca dönüştürülür;

$$\begin{aligned} & \max \min \{ \mu_1(f_1(x)), \mu_2(f_2(x)), ..., \mu_k(f_k(x)) \} \\ & \text{Kısıtlar} \begin{cases} a_{ij}x_j (\leq, =, \geq) b_i, i=1,2,...,m, \\ x_j \geq 0, j=1,2,...,n. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

(3.18) bulanık programlama modelinde $\min \{ \mu_l(f_l(x)) \} = \lambda$ yardımcı değişkeni atanır ve $\mu_l(f_l(x)) \geq \lambda$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece, aşağıdaki gibi tek amaçlı bulanık programlama modeli elde edilir;

$$\begin{aligned}
& \max \lambda \\
& \text{Kısıtlar} \begin{cases} \lambda \leq \mu_l (f_l(x)), l = 1, 2, \dots, k \\ a_{ij}x_j (\leq, =, \geq) b_i, i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Bu bulanık programlama problemi çözüldüğünde, λ parametresinin en iyi değerini veren çözümler elde edilir.

ARALIK ARİTMETİĞİ VE ARALIKLI PROGRAMLAMA

Aralıklı aritmetiği, bulanık matematik, olasılık ve istatistik kavramlarından farklıdır. Karakteristik özelliklerinin bir takım bilgileri bilinirken bir takım bilgiler bilinmeyebilir. Bu nedenle, tüm bilgileri verilmiş bir sistemin tek bir çözümü varken aralık aritmetiğine dayalı sistemlerin çok amaçlı programlamada olduğu gibi optimal çözümleri birden fazladır.

Aralıklı sayılar teorisi ilk olarak Moore [32] tarafından geliştirildi. Daha sonra aralıklı sayılar kullanılarak Deng tarafından [24]'de grey sistemler teorisi olarak geliştirildi ve Deng tarafından [25]'de aralık sayılara dayalı grey karar verme sistemlerini verildi. Bu güne kadar, bu teori bir çok alanda kullanılmaya devam edilmektedir ([88-97]). Bu üç kurama bağlı belirsizlikler hakkında Kahraman tarafından [73]'de bazı önemli özellikleri verilmiştir.

Bu bölümde lineer ya da lineer olmayan aralıklı programlama problemlerinin modelinin oluşturulması ve deterministik hale dönüştürülmesi, temel aralık aritmetiği, aralıklar üzerinde sıra ilişkileri ile aralıklı fonksiyonların deterministik fonksiyonlara dönüştürülmesi hakkında bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

4.1 Aralık Sayılar

Tanım 4.1 (Huang [74]) Reel sayılar üzerinde tüm kapalı ve sınırlı aralıkların sınıfı I olsun. $A = [a^L, a^R] \in I$ kapalı ve sınırlı aralığı verilsin. A ile verilen aralıklı sayının

değeri kesin olarak bilinen bir alt sınır a^L ve kesin olarak bilinen bir üst sınır a^R boyunca uzanan bir kapalı aralıkta tanımlıdır.

Tanım 4.2 (Moore [32]) $A = [a^L, a^R] \in I$ kapalı ve sınırlı aralığı verilsin. Eğer $a^L = a^R$ olacak şekilde, aralığın alt ve üst sınırı birbirine eşitse ise A ile verilen aralık sayı deterministik sayı yada tamamen bilinen (kesin) bir sayı olarak adlandırılır. Bu aralığa dejenere aralıkda diyebiliriz.

Tanım 4.3 (Liu ve Lin [13]) $A = [a^L, a^R] \in I$ aralıklı sayı verilsin. Bu aralık kesin sınırlar kullanılarak $a^L \leq A_d \leq a^R$ ile ifade edilir ve A_d bu aralığın deterministik sayısı olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde gösterilir;

$$A = [a^L, a^R] = \{x : a^L \leq A_d \leq a^R, x \in R^n\}$$

Genel bir aralık sayı için, aralığın alt ve üst sınırları arasında

$$A_d = a^L \eta + (1 - \eta) a^R, \quad \eta \in [0, 1] \quad (4.1)$$

olacak şekilde bir dağılım yapılarak deterministik bir sayı elde edilebilir. $\eta \in [0, 1]$ aralığında herhangi bir değer alınarak kesin sayıya dönüştürülebilir.

Tanım 4.4 (Liu and Lin [13]) Bir önceki tanımdan $\eta = \frac{1}{2}$ olarak alındığında,

$$A_c = \frac{1}{2} a^L + \left(1 - \frac{1}{2}\right) a^R \text{ olacak şekilde aralığın orta noktası elde edilir. Bu nedenle, bir}$$

A aralığının orta noktası,

$$A_c = \frac{1}{2} (a^L + a^R) \quad (4.2)$$

ile ifade edilebilir.

4.1.1 Aritmetik İşlemler ve Küme Özellikleri

Tanım 4.5 (Moore [32]) $A = [a^L, a^R]$ ve $B = [b^L, b^R]$ I kümesinde iki kapalı ve sınırlı aralık olsun. Bu iki aralıklı sayı kullanılarak, aşağıda verilen aritmetik işlemler sağlanır:

- $A + B = \{a + b : a \in A \text{ and } b \in B\} = [a^L + b^L, a^R + b^R]$
- $-A = \{-a : a \in A\} = [-a^R, -a^L]$
- $A - B = A + (-B) = [a^L - b^R, a^R - b^L]$ ve $k \in R$ olduğu
- $A \times B = [\min(a^L b^L, a^L b^R, a^R b^L, a^R b^R), \max(a^L b^L, a^L b^R, a^R b^L, a^R b^R)]$
- $kA = \{ka : a \in A\} = \begin{cases} [ka^L, ka^U], & k \geq 0 \\ [ka^U, ka^L], & k < 0 \end{cases}$

Tanım 4.6 (Moore [32]) $A = [a^L, a^R]$ kapalı ve sınırlı aralığını alalım. Bu aralık $A^L = a^L$ ve $A^R = a^R$ olarak yazılabilir.

Tanım 4.5'dan, $(A + B)^L = a^L + b^L = A^L + B^L$ ve $(A + B)^R = a^R + b^R = A^R + B^R$ olduğunu görebiliriz.

Tanım 4.7 (Moore [32]) $A = [a^L, a^R]$ ve $B = [b^L, b^R]$ iki kapalı ve sınırlı aralık sayıları verilsin. Bu aralıklarda $a^L < b^L$ yada $a^R < b^R$ ise ve A ve B aralığının kesisimi boş kümedir ve $A \cap B = \emptyset$ ile gösterilir.

Eğer bu iki aralığın kesisimi boş kümeden farklı ise aralık

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{z : z \in A \text{ ve } z \in B\} \\ &= [\max\{a^L, b^L\}, \min\{a^R, b^R\}] \end{aligned} \quad (4.3)$$

olarak gösterilir. Aynı şekilde iki aralığın birleşimi

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{z : z \in A \text{ ve } z \in B\} \\ &= [\min\{a^L, b^L\}, \max\{a^R, b^R\}] \end{aligned} \quad (4.4)$$

olarak yazılır. (4.3) ve (4.4) eşitliği kullanılarak herhangi iki aralık için $A \cap B \subseteq A \cup B$ elde edilir.

Örnek 4.1 Eğer $A = [-1, 0]$ ve $B = [1, 2]$ ise $A \cup B = [-1, 2]$ olur.

Tanım 4.8 (Moore [29]) $A = [a^L, a^R]$ bir kapalı ve sınırlı aralık olsun. Alternatif olarak bu aralık, orta noktası A_c ve genişliği A_w olmak üzere sırasıyla,

$$A_c = \frac{a^L + a^R}{2} \quad (4.5)$$

$$A_w = \frac{a^R - a^L}{2} \quad (4.6)$$

temsil edilebilir. Bu eşitlikler kullanılarak $a^L = A_c - A_w$ ve $a^R = A_c + A_w$ eşitliği kolayca elde edilebilir.

4.2 Aralık Sayılar Üzerinde Sıra İlişkileri

Aralıklı sayılar üzerinde [32]'de iki geçişli sıra ilişkisi tanımlanmıştır. Bu sıra ilişkisinden biri aralıkların sınırlarına, diğeri aralıkların küme kapsama özelliğine bağlıdır. Bu sıra ilişkisinin dezavantajlarına vurgu yaparak Ishibuchi ve Tanaka [34]'de karar vericinin bakış açısına göre çok daha etkin sıra ilişkisi geliştirdi. Bu çalışma [34]'de, Chanas and Kuchta [35] tarafından genelleştirilerek alfa kesenleri yardımıyla yeniden tanımlandı. Sengupta ve Pal [40]'de bir önceki çalışmaların dışında, aralıklı sayıların çok geniş olması durumu için yeni bir sıra ilişkisi verdiler. Levin [75]'de teorik ve mantıksal küme kavramları kullanarak çok karmaşık bir sıra ilişkisi geliştirdi. Mahato ve Bhunia [76]'da aralıklı karar verme için iyimser (optimistic) ve karamsar (pessimistic) sıra ilişkilerini tanımladı.

Tanım 4.8 Reel sayılar $<$ ilişkisi ile sıralandığını biliyoruz. Eğer bu ilişki herhangi bir a, b ve $c \in R$ için $a < b$ ve $b < c$ ise $a < c$ elde edilir. Bu bir sıra ilişkisidir ve bu sıra ilişkisi geçişlidir denir.

$A = [a^L, a^R]$ ve $B = [b^L, b^R]$ iki kapalı aralıklı sayıları alalım. Bu iki keyfi aralık aşağıdaki şekilde sınıflandırılabilir;

Type I: Birbiri ile örtüşmeyen aralıklar

Type II: Kısmi örtüşen aralıklar

Type III: Tamamen örtüşen aralıklar

Benzer şekilde yukarıda verilen sıra ilişkisi aralıklı sayılarda da geçerlidir. Aralıklar üzerinde sıra ilişkisini göstermek için $A = [a^L, a^R]$ ve $B = [b^L, b^R]$ iki kapalı aralıklı sayıları alalım. Bu iki aralık $A \leq B$ ya da $B \geq A$ olacak şekilde tercih ilişkisi kullanarak ya da küme kapsama özelliği kullanılarak $A \supseteq B$ ya da $A \subseteq B$ sıralanmaktadır.

Moore [29]'da aralık sayılar üzerinde $A <_{LR} B \Leftrightarrow a^R < b^L$ ilişkisi verilmiştir. Bu sıra ilişkisi geçişlidir ve yalnızca Type I aralıklar için kullanılır.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow b^L \leq a^L \text{ ve } a^R \leq b^R;$$

Diğer bir ifadeyle; Eğer A ve B aralıklı sayılar karşılaştırılmaz ise $A \neq B$ ve $A \supseteq B$ ya da $A \subseteq B$ elde edilir. Bu küme kapsama özelliğidir ve kısmi sıra ilişkisi olarak adlandırılır. Moore bu iki geçişli sıra ilişkisinden farklı olarak aşağıdaki sıra ilişkisini tanımlamıştır.

$$A = B \Leftrightarrow b^L = a^L \text{ ve } a^R = b^R;$$

4.2.1 Makzimizasyon Problemleri için Sıra İlişkileri

Tanım 4.9 (Ishibuchi ve Tanaka [34]) Eğer $A = [a^L, a^R]$ ve $B = [b^L, b^R]$ iki aralıklı sayı ise, aşağıdaki şekilde aralıklar üzerinde $\leq_{LR}$ sıra ilişkisi sağlanır.

$$A \leq_{LR} B \Leftrightarrow a^L \leq b^L, a^R \leq b^R$$

$$A <_{LR} B \Leftrightarrow A \leq_{LR} B \text{ ve } A \neq B.$$

Bu sıra ilişkileri en iyi minimum ve maksimum arasından karar vericinin tercih yapmasına imkan sağlar.

$A \leq_{LR} B \Rightarrow a^L \leq b^L$ ve $a^R \leq b^R$ olup, aralık aritmetiğinden sağ ve sol yan sınırlar toplanırsa bu eşitsizlik bozulmaz. Buradan,

$$A \leq_{LR} B \Rightarrow a^L + a^R \leq b^L + b^R$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının ortalaması alınır ise

$$A \leq_{LR} B \Rightarrow \frac{a^L + a^R}{2} \leq \frac{b^L + b^R}{2} \Rightarrow a^C \leq b^C$$

elde edilir.

Tanım 4.10 (Ishibuchi ve Tanaka [34]) Benzer şekilde, $A = [a^L, a^R]$ ve $B = [b^L, b^R]$ iki aralıklı sayı ise, aşağıdaki şekilde aralıklar üzerinde $\leq_{CW}$ sıra ilişkisi sağlanır.

$$A \leq_{CW} B \Leftrightarrow a^C \leq b^C \text{ ve } a^W \geq b^W,$$

$$A \prec_{CW} B \Leftrightarrow A \leq_{CW} B \text{ ve } A \neq B.$$

$$A \leq_{CW} B \Leftrightarrow a^C \leq b^C \text{ 'dir. } a^C = \frac{a^L + a^R}{2} \leq b^C = \frac{b^L + b^R}{2} \text{ olduğundan,}$$

$$a^L + a^R \leq b^L + b^R \Rightarrow a^L \leq b^L, a^R \leq b^R$$

elde ederiz. $\leq_{LR}$ ve $\leq_{CW}$ sıra ilişkileri asla birbiri ile çakışmazlar.

4.2.1 Minimizasyon Problemleri için Sıra İlişkileri

Benzer şekilde, Ishibuchi ve Tanaka [34] minimizasyon problemleri için $\leq_{LR}^*$ ve $\leq_{CW}^*$ sıra ilişkilerini de aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$$A \leq_{LR}^* B \Leftrightarrow a^L \leq b^L, a^R \leq b^R,$$

$$A \prec_{LR}^* B \Leftrightarrow A \leq_{LR}^* B \text{ ve } A \neq B.$$

$$A \leq_{CW}^* B \Leftrightarrow a^C \leq^* b^C \text{ ve } a^W \leq^* b^W,$$

$$A \prec_{CW}^* B \Leftrightarrow A \leq_{CW}^* B \text{ ve } A \neq B.$$

Ishibuchi ve Tanaka aralığın merkezini aralığın beklenen değeri, ve aralığın çapını kesin olmayan parametrelerin belirsizliği olarak kabul etmiştir. Çünkü bu sıra ilişkisi, çok küçük bir belirsizlikle beklenen değeri ve karar verici için en iyi optimal tercihi sağlar.

4.3 Aralıklı Programlama Problemleri

Hem amaç fonksiyonu hem de kısıt katsayıları, aralıklı sayılarla verilen programlama problemleri genel olarak,

$$\begin{cases} \min(\max) f_l(x, U), l = 1, 2, \dots, k. \\ \left\{ c_i(x, U) (\geq, \leq) [b_i^L, b_i^R], i = 1, 2, \dots, m, \right. \\ \left. x \in X \subseteq R^n \right\} \end{cases} \quad (4.7)$$

ile gösterilir. (4.7) aralıklı programlama probleminde $f: R^n \rightarrow I$ fonksiyonu aralıklı amaç fonksiyonunu, $c_i: R^n \rightarrow I$, $(i = 1, 2, \dots, m)$ fonksiyonu i .inci kısıt fonksiyonunu temsil etmektedir. m değeri kısıtların sayısını, $[b_i^L, b_i^R]$ i . kısıtın sağ yan aralıklı sayısını temsil etmektedir. $U = (U_1, U_2, \dots, U_q)$ amaç ve kısıt fonksiyonunun q – boyutlu aralık parametreleridir. x ise bilinmeyen karar değişkenleri vektörüdür.

(4.7) aralıklı programlama probleminde $l > 1$ ise problem çok amaçlı aralıklı programlama problemi olarak adlandırılır. Yine amaç fonksiyonu ve kısıtlar tamamen lineer ise lineer aralıklı programlama problemi, aksi takdirde lineer olmayan aralıklı programlama problemi olarak adlandırılır.

4.3.1 Aralıklı Programlama Problemlerinin Amaç Fonksiyonlarının Yapısına Göre Formülasyonu

Tanım 4.11 (Ishibuchi ve Tanaka [34]) $A = [a^L, a^R]$ ve $B = [b^L, b^R]$ iki aralıklı sayı ise, aşağıdaki şekilde aralıklar üzerinde $\leq_{LC}$ sıra ilişkisi sağlanır.

$$A \leq_{LC} B \Leftrightarrow a^L \leq b^L, a^C \leq b^C,$$

$$A <_{LC} B \Leftrightarrow A \leq_{LC} B \text{ ve } A \neq B.$$

Eğer, $A \leq_{LC} B$ ise $A \leq_{LR} B$ ya da $A \leq_{CW} B$ olduğu kolayca görülebilir.

Önerme 4.1

$$A \leq_{LC} B \Rightarrow A \leq_{LR} B \text{ veya } A \leq_{CW} B$$

$$A <_{LC} B \Leftrightarrow A <_{LR} B \text{ veya } A <_{CW} B$$

İspat $A \leq_{LC} B \Leftrightarrow a^L \leq b^L, a^C \leq b^C$ ise $a^W \geq b^W$ olduğu görülebilir. Eğer $a^W \leq b^W$ ise $A \leq_{LR} B$ elde edilir. Buradan aşağıdaki eşitsizlik sağlanır;

$$a^R = a^L + 2a^W \leq b^L + 2b^W = b^L$$

Eğer $A \leq_{LR} B$ ise $A \leq_{LC} B$ elde edilir.

$$A \leq_{LR} B \Rightarrow a^L \leq b^L \text{ ve } a^R \leq b^R$$

elde edilir. Buradan eşitsizliğin sağ ve sol yan sınırları toplanıp orta noktaları

$$\text{alındığında, } a^L = \left(\frac{a^L + a^R}{2} \right) \leq b^L = \left(\frac{b^L + b^R}{2} \right) \text{ elde edilir. Buradan}$$

$A \leq_{LR} B \Rightarrow A \leq_{LC} B$ elde edilir. Diğer yandan; $A \leq_{CW} B \Rightarrow A \leq_{LR} B$ olduğunu gösterelim.

$A \leq_{CW} B \Rightarrow a^C \leq b^C$ ve $a^W \geq b^W$ ve $a^L = a^C - a^W \leq b^C - b^W = b^L$ ve $a^R \leq b^R$ elde edilir. Bu son iki eşitsizlikten $A \leq_{LC} B$ olduğu görülür.

Tanım 4.12 Farz edelim ki x karar değişkeni vektörü, (4.7) aralıklı programlama probleminin bir feasible (uygun) çözümü olsun. Bu durumda $f(x) <_{LC} f(\tilde{x})$ olacak şekilde farklı bir $\tilde{x}$ feasible çözümü mevcut değilse, x karar değişkeni vektörü, (4.7) aralıklı programlama probleminin bir pareto optimal çözümüdür.

Burada $f(x) <_{LC} f(\tilde{x})$ olmasının nedeni ise $f(x) <_{LR} f(\tilde{x})$ ve $f(x) <_{CW} f(\tilde{x})$ sıra ilişkisinin sağlanmasıdır.

Tanım 4.13 (4.7) aralıklı programlama problemi bir maksimizasyon olsun. Önerme 4.1'den aralıklar üzerinde sıra ilişkisi kullanılarak, (4.7) aralıklı programlama probleminin Pareto optimal çözümü amaç fonksiyonlarını alt sınırları ve orta noktaları alınarak aşağıdaki şekilde deterministik çok amaçlı model ile elde edilebilir.

$$(f^L(x), f^C(x)) \rightarrow \max \quad (4.8)$$

Tanım 4.14 (Ishibuchi ve Tanaka [34]) $A = [a^L, a^R]$ ve $B = [b^L, b^R]$ iki aralıklı sayı ise, aşağıdaki şekilde aralıklar üzerinde $\leq_{RC}$ sıra ilişkisi sağlanır.

$$A \leq_{RC} B \Leftrightarrow a^L \leq b^L, a^C \leq b^C,$$

$$A <_{RC} B \Leftrightarrow A \leq_{RC} B \text{ ve } A \neq B.$$

Buradan, $A \leq_{RC} B$ ise $A \leq_{LR} B$ ya da $A \leq_{CW} B$ olduğu görülebilir.

Önerme 4.2

$$A \leq_{RC} B \Rightarrow A \leq_{LR} B \text{ veya } A \leq_{CW} B$$

$$A <_{RC} B \Leftrightarrow A <_{LR} B \text{ veya } A <_{CW} B$$

Tanım 4.15 Farz edelim ki x vektörü, (4.7) aralıklı programlama probleminin bir feasible çözümü olsun. Tanım 4.14'den $f(\tilde{x}) <_{RC} f(x)$ olacak şekilde bir $\tilde{x}$ çözüm vektörü mevcut değilse, x feasible çözümü (4.7) aralıklı programlama probleminin bir optimal çözümüdür.

Tanım 4.16 (4.7) aralıklı programlama problemi bir minimizasyon problemi ise tanım 4.14'dan aralıklar üzerinde sıra ilişkisi kullanılarak (4.7) aralıklı programlama probleminin Pareto optimal çözümü, amaç fonksiyonlarını orta noktaları ve üst sınırları alınarak

$$(f^C(x), f^R(x)) \rightarrow \min \quad (4.9)$$

amaç fonksiyonunun minimize edilmesiyle elde edilir.

Benzer şekilde (4.7) aralıklı programlama probleminde verilen aralıklı kısıt fonksiyonları aralıklar üzerinde sıra ilişkileri kullanılarak deterministik hale dönüştürülebilir.

$c_i(x, U)(\geq, \leq)[b_i^L, b_i^R]$ aralık değerli kısıt fonksiyonunu alalım. Burada belirsiz vektörler $U_i = [a_{ij}^L, a_{ij}^R]$ olmak üzere, problemin kısıt fonksiyonu

$$[a_{ij}^L, a_{ij}^R]x_j (\geq, \leq) [b_i^L, b_i^R] \quad (4.10)$$

olacak şekilde yeniden yazılabilir.

(4.10) kısıt fonksiyonu eşitsizliklerin yapısına bağlı olarak aralıklar üzerinde sıra ilişkisi kullanılarak aşağıdaki şekilde deterministik fonksiyonlara dönüştürülür.

Eğer $[a_{ij}^L, a_{ij}^R] x_j \leq [b_i^L, b_i^R]$ ise, aralıklar üzerinde $\leq_{RC}$ sıra ilişkisi kullanılarak

$$\begin{cases} a_{ij}^R x_j \leq b_i^R \\ \left(\frac{a_{ij}^L + a_{ij}^R}{2} \right) x_j \leq \left(\frac{b_i^L + b_i^R}{2} \right) \end{cases} \quad (4.11)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Eğer kısıt fonksiyonu $[a_{ij}^L, a_{ij}^R] x_j \geq [b_i^L, b_i^R]$ ise aralıklar üzerinde $\leq_{LC}$ sıra ilişkisi kullanılarak aşağıdaki eşitsilikler elde edilir.

$$\begin{cases} a_{ij}^L x_j \geq b_i^L \\ \left(\frac{a_{ij}^L + a_{ij}^R}{2} \right) x_j \geq \left(\frac{b_i^L + b_i^R}{2} \right) \end{cases} \quad (4.12)$$

Eğer kısıt fonksiyonu $[a_{ij}^L, a_{ij}^R] x_j = [b_i^L, b_i^R]$ ise,

$$\begin{cases} a_{ij}^L x_j \geq b_i^L \\ a_{ij}^R x_j \leq b_i^R \end{cases} \quad (4.13)$$

elde edilir. Kısıt fonksiyonunun eşitlik olması durumu bazı çalışmalarda

$$\begin{cases} a_{ij}^L x_j = b_i^L \\ a_{ij}^R x_j = b_i^R \end{cases}$$

olarak alınmıştır. Kısıt fonksiyonları eşitlik halinde tanımlandığında, karmaşık ve lineer olmayan problemlerin çözümü elde edilememekte, feasible bölge oluşmamaktadır. Bu nedenlerle diğer çalışmalardan farklı olarak bu çalışmada aralıklı kısıt fonksiyonu eşitlik durumunda ise (4.13) kısıt fonksiyonu modeli kullanılmalıdır. Çünkü aralıklı fonksiyon (4.13) ile verilen modelin aralığında tanımlıdır (Bakınız: Tanım 4.3).

BÖLÜM 5

ARALIKLI PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN ÖNERİLEN YÖNTEM

Jiang vd. [80-82] 'de lineer olmayan programlama problemleri çözmek için Ishibuchi ve Tanaka'nın aralıklar üzerinde sıra ilişkisini kullanarak problemleri deterministik çok amaçlı programlama problemlerine dönüştürmüştür. Daha sonra kısıtların olabilirlik derecelerini kullanarak farklı iki yöntem ile problemlerin çözümlerini elde etmiştir.

Biz bu bölümde, ilk olarak Ishibuchi ve Tanaka tarafından verilen aralıklar üzerinde farklı sıra ilişkilerini kullanarak lineer ya da lineer olmayan aralıklı programlama problemlerinin deterministik çok amaçlı programlama modellerine dönüştüreceğiz. Elde edilen sonuçlarla; Bölüm 2'de verilen çok amaçlı programlama yöntemleri ağırlıklandırma ve global kriter yöntemlerini aralıklı programlama problemlerine uygulanmak için genelleştireceğiz. Daha sonra tezin asıl konusu olan yeni bir aralıklı bulanık programlama yöntemi elde edeceğiz. Bu programlama probleminin üyelik fonksiyonlarını kullanarak yeniden çok amaçlı programlama problemlerine dönüştürceğiz. Böylece problemde feasible bölgeyi genişleteceğiz.

5.1 Aralıklı Programlama Problemlerinin Çözümü İçin Global Kriter Yöntemi

İlk önce, (4.7) aralıklı programlama problemi, bir önceki bölümde verilen (4.8) ya da (4.9) problem modelleri ile deterministik programlama problem modellerine dönüştürülür.

Daha sonra, kısıt fonksiyonlarının yapısına göre aralıklar üzerinde sıra ilişkileri kullanılarak (4.11)-(4.13) deterministik kısıt fonksiyonları oluşturulur.

Oluşturulan deterministik programlama probleminde amaç fonksiyonları verilen kısıtlar altında tek tek optimize edilir ve her amacın referans noktası olarak elde edilir.

Eğer, (4.7) aralıklı programlama problemi, bir maksimizasyon problemi ise (4.8) problem modeli kullanılarak, L_p metrik fonksiyonu

$$\min L_p = \left\{ \left| \frac{f^L(x) - f_{opt}^L}{f_{opt}^L} \right|^p + \left| \frac{f^C(x) - f_{opt}^C}{f_{opt}^C} \right|^p \right\}^{1/p} \quad (5.1)$$

olarak oluşturulur.

Eğer, minimum değerler aranıyorsa, (4.9) modelinden, L_p metrik fonksiyonu

$$\min L_p = \left\{ \left| \frac{f^R(x) - f_{opt}^R}{f_{opt}^R} \right|^p + \left| \frac{f^C(x) - f_{opt}^C}{f_{opt}^C} \right|^p \right\}^{1/p} \quad (5.2)$$

olarak oluşturulur.

(5.1) ya da (5.2) metrik fonksiyonları, $p=1,2,\infty$ için elde edilen deterministik kısıtlar altında optimize edilerek, L_p metrik problemin optimal çözümleri elde edilir.

Teorem 5.1 (5.1) ya da (5.2) programlama probleminin optimal çözümü (4.7) aralıklı programlama probleminin bir feasible çözümü ise Pareto optimal çözümdür.

İspat Farz edelim ki $\bar{x} \in S$ (5.1) programlama probleminin bir optimal çözümü ve (4.7) aralıklı programlama problemi için de bir uygun çözüm olsun. Üstelik bu çözüm, (4.7) aralıklı programlama problemi için bir Pareto optimal çözüm olmasın. O halde, Pareto optimal çözümün tanımından; tüm $l=1,2,\dots,k$ için

$$[f_l^C(\tilde{x}), f_l^R(\tilde{x})] \leq [f_l^C(\bar{x}), f_l^R(\bar{x})]$$

ve en az bir farklı index r

$$[f_r^C(\tilde{x}), f_r^R(\tilde{x})] < [f_r^C(\bar{x}), f_r^R(\bar{x})]$$

olacak şekilde bir $\tilde{x} \in S$ çözümü mevcuttur. Buradan, $l=1,2,...,k$ için l . amaç fonksiyonunun ideal amaç fonksiyonu $[f_l^L, f_l^R]$ 'dan

$$[f_l^L, f_l^R] \leq [f_l^C(\tilde{x}), f_l^R(\tilde{x})] \leq [f_l^C(\bar{x}), f_l^R(\bar{x})], l=1,2,...,k$$

ve en az bir index r için

$$[f_l^L, f_l^R] < [f_l^C(\tilde{x}), f_l^R(\tilde{x})] < [f_l^C(\bar{x}), f_l^R(\bar{x})], l=1,2,...,k$$

kesin eşitsizliği elde edilir. Böylece,

$$([f_l^C(\tilde{x}), f_l^R(\tilde{x})] - [f_l^L, f_l^R])^p \leq ([f_l^C(\bar{x}), f_l^R(\bar{x})] - [f_l^L, f_l^R])^p, l=1,2,...,k$$

en az bir index için

$$([f_l^C(\tilde{x}), f_l^R(\tilde{x})] - [f_l^L, f_l^R])^p < ([f_l^C(\bar{x}), f_l^R(\bar{x})] - [f_l^L, f_l^R])^p, r=1,2,...,p$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak,

$$\sum_{l=1}^k ([f_l^C(\tilde{x}), f_l^R(\tilde{x})] - [f_l^L, f_l^R])^p < \sum_{l=1}^k ([f_l^C(\bar{x}), f_l^R(\bar{x})] - [f_l^L, f_l^R])^p$$

elde edilir. Her iki tarafın karekökü alınırsa

$$\sqrt{\sum_{l=1}^k ([f_l^C(\tilde{x}), f_l^R(\tilde{x})] - [f_l^L, f_l^R])^p} < \sqrt{\sum_{l=1}^k ([f_l^C(\bar{x}), f_l^R(\bar{x})] - [f_l^L, f_l^R])^p}$$

elde edilir. Buradan, $\bar{x} \in S$ noktasının (4.7) programlama probleminin bir optimal çözümü olması ile çelişir. $\bar{x} \in S$ noktasının (4.7) programlama probleminin bir optimal çözümü olması

$$\sqrt{\sum_{l=1}^k ([f_l^C(\bar{x}), f_l^R(\bar{x})] - [f_l^L, f_l^R])^p} < \sqrt{\sum_{l=1}^k ([f_l^C(\tilde{x}), f_l^R(\tilde{x})] - [f_l^L, f_l^R])^p}$$

olmasını gerektirir. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur.

5.2 Aralıklı Programlama Problemlerinin Çözümü İçin Ağırlık Toplamları Yöntemi

Eğer, (4.7) aralıklı programlama problemi bir maksimizasyon problemi ise (4.8) maksimizasyon ve (4.9) minimizasyon amaç fonksiyonu modelleri kullanılarak, ağırlık

toplamları yöntemiyle aşağıdaki tek amaçlı deterministik programlama problemi modeline indirgenir.

$$\min \sum_{l=1}^k w_l f_l^L(x) + \sum_{l=1}^k w_l f_l^R(x) \quad (5.5)$$

Verilen orijinal programlama probleminin kısıt fonksiyonları da yapısına göre (4.11)-(4.13) sıra ilişkileri kullanılarak deterministik kısıt fonksiyonları oluşturulur. Bu modelde $w_l = (w_{l1}, w_{l2}, \dots, w_{lk})$ amaç fonksiyonlarının karar vericinin isteğine bağlı önceden atanmış ağırlık katsayılar vektörüdür ve her bir $l = 1, 2, \dots, k$ için $w_l \geq 0$, $\sum_{l=1}^k w_l = 1$ olduğu kabul edilir. Bu şekilde karar verici, ağırlıkları değiştirerek problemin etkin çözümünü elde edebilir.

Ağırlıklı programlama probleminin çözümünden elde edilen çözümler, (4.7) aralıklı programlama probleminin bir pareto optimal çözümüdür. Bölüm 2’de Teorem 2.1’de verildiği gibi ağırlıklandırma yönteminden elde edilen çözüm zayıf pareto optimal çözümdür.

Teorem 5.2 (5.5) ağırlıklı programlama probleminden elde edilen çözümler (4.7) aralıklı programlama probleminin bir zayıf Pareto optimal çözümüdür.

İspat $\bar{x} \in S$ ağırlıklandırılmış programlama probleminden elde edilen bir çözüm ve (4.7) aralıklı problemin bir feasible çözümü olsun. Üstelik bu çözüm zayıf Pareto optimal çözüm olmasın. O halde, Pareto optimallik tanımından tüm $l = 1, 2, \dots, k$ için $[f_l^C(\tilde{x}), f_l^R(\tilde{x})] < [f_l^C(\bar{x}), f_l^R(\bar{x})]$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \in S$ çözümü mevcuttur.

Buradan, en az bir $l = 1, 2, \dots, k$ için $w_l > 0$ olduğu için

$$\sum_{l=1}^k w_l [f_l^C(\tilde{x}), f_l^R(\tilde{x})] < \sum_{l=1}^k w_l [f_l^C(\bar{x}), f_l^R(\bar{x})], l = 1, 2, \dots, k.$$

Bu eşitsizlik $\bar{x} \in S$ ’in (4.7) ağırlıklı programlama probleminin bir çözümü olması ile çelişir. Bu yüzden $\bar{x} \in S$ bir zayıf Pareto optimal çözüm olmalıdır.

5.3 Çok Amaçlı Aralıklı Programlama Problemlerini Çözmek İçin Önerilen Bir Yeni Aralıklı Bulanık Programlama Yaklaşımı Modeli

Bulanık küme teorisine dayalı aralıklı bulanık programlama yöntemi, son yıllarda finans, risk yönetimi ve su kaynaklarının optimize edilmesinde sıklıkla kullanılmaktadır. Aralıklı bulanık programlama yöntemine ilişkin bazı önemli çalışmalar [83-93]'da bulunmaktadır. Çalışmalar üzerinde detaylar [89-93]'de verilmiştir.

Bu kısımda (4.7) çok amaçlı aralıklı programlama problemlerinin ($l > 1$ olmak üzere) Pareto optimal çözümünü elde etmek için literatürde kullanılan yöntemlerden farklı bir bulanık programlama yöntemi verceğiz.

Aşağıda verilen aralıklı programlama probleminin deterministik modelini alalım:

$$(f^L(x), f^C(x)) \rightarrow \max$$

Bu problem verilen kısıtlar altında yalnızca maksimizasyon problemi olarak çözülür. $f^L(x)$ fonksiyonunun değeri aralıklı fonksiyonun alt sınırını $f^C(x)$ fonksiyonunda aralığın üst sınırını oluşturur. Matematiksel olarak; aralıklı bir amaç fonksiyonunun optimal değeri $f_l = [f_l^L, f_l^C]$ olarak elde edilir.

(4.7) programlama problemi bir maksimizasyon problemi ise aralıklı fonksiyonların üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi elde edilebilir;

$$\mu_l(f_l(x, U)) = \begin{cases} 0 & f_l(x, U) \leq f_l^L \\ \frac{f_l(x, U) - f_l^L}{f_l^C - f_l^L}, & f_l^L \leq f_l(x, U) \leq f_l^C \\ 1 & f_l(x, U) \geq f_l^C \end{cases} \quad (5.6)$$

Bu üyelik fonksiyonunun üyelik derecesi artarken $f_l(x, U)$ amaç fonksiyonunun değeri de artacaktır.

Aynı şekilde (4.7) çok amaçlı aralıklı programlama problemi, bir minimizasyon problemi için, her amaç fonksiyonuna denk gelen üyelik fonksiyonları:

$$\mu_l (f_l(x,U)) = \begin{cases} 1 & f_l(x,U) \leq f_l^C \\ \frac{f_l^R - f_l(x,U)}{f_l^R - f_l^C}, & f_l^C \leq f_l(x,U) \leq f_l^R \\ 0 & f_l(x,U) \geq f_l^R \end{cases} \quad (5.7)$$

olarak elde edilir. Burada, (5.7) üyelik fonksiyonunun derecesi artarken $f_l(x,U)$ amaç fonksiyonunun değeri azalır.

Önerme 5.1: (5.6) yada (5.7) üyelik fonksiyonlarının üyelik dereceleri her zaman $\mu_l (f_l(x,U)) \leq 1$ olacak şekilde sağlanır.

İspat: Farz edelim ki (4.7) aralıklı programlama problemi bir maksimizasyon problemi olsun. Bu programlama problemine karşılık gelen (5.6) üyelik fonksiyonu için üyelik derecesi $\mu_l (f_l(x,U)) \geq 1$ olsun. (5.6) üyelik fonksiyonu formülasyonundan,

$$\begin{aligned} \mu_l (f_l(x,U)) \geq 1 &\Rightarrow \frac{f_l(x,U) - f_l^L}{f_l^C - f_l^L} \\ &\Rightarrow f_l(x,U) - f_l^L \geq f_l^C - f_l^L \\ &\Rightarrow f_l(x,U) \geq f_l^C \end{aligned} \quad (5.8)$$

elde edilir. $\leq_{LC}$ sıra ilişkisi kullanılarak

$$\begin{aligned} f_l^L(x) &\geq f_l^C \\ f_l^C(x) &\geq f_l^C \end{aligned} \quad (5.9)$$

elde edilir. (5.9) eşitsizliğinde $f_l^L(x) \geq f_l^C$ olması $f_l^R(x) \geq f_l^C$ olmasını gerektirdiğinden, bu f_l^C değerinin optimalliği ile çelişmektedir. O halde, $\mu_l (f_l(x,U)) \leq 1$ olmalıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Yukarıda verilen üyelik fonksiyonları yardımıyla (4.7) aralıklı programlama problemi aşağıda verilen aralıklı bulanık programlama problemine kolayca dönüştürülür.

$$\begin{cases} \max \{ \mu_1 (f_1(x, U)), \mu_2 (f_2(x, U)), \dots, \mu_k (f_k(x, U)) \}, \\ \text{Kısıtlar} \begin{cases} \mu_l (f_l(x, U)) \leq 1, (l=1, 2, \dots, k) \\ c_i(x, U) (\leq \geq) [b_i^L, b_i^R], i=1, 2, \dots, m, \\ x \in X \subseteq R^n \end{cases} \end{cases} \quad (5.10)$$

(5.10) bulanık programlama probleminde, $\mu_l (f_l(x, U))$, $l=1, 2, \dots, k$, aralıklı üyelik fonksiyonları ve $c_i(x, U)$ fonksiyonu, aralıklı kısıt fonksiyonlardır.

(5.10) bulanık çok amaçlı aralıklı maksimizasyon probleminin amaç fonksiyonu (4.8) deterministik modeli kullanılarak, $\mu_l (f_l(x, U)) \leq 1$ eşitsizliğide (4.11)'den deterministik fonksiyonlara kolayca dönüştürülebilir. $c_i(x, U) (\leq \geq) b_i$ aralıklı kısıt fonksiyonları da (4.11)-(4.13) eşitsizlikleri kullanılarak deterministik hale getirildikten sonra

$$\begin{cases} \max \{ (\mu_l^L (f_l(x)), \mu_l^C (f_l(x))) \}, l=1, 2, \dots, k, \\ \text{Kısıtlar} \begin{cases} \mu_l^R (f_l(x)) \leq 1, (l=1, 2, \dots, k), \\ \mu_l^C (f_l(x)) \leq 1, (l=1, 2, \dots, k) \\ c_i(x) (\leq \geq) b_i, i=1, 2, \dots, 2m \\ x \in X \subseteq R^n \end{cases} \end{cases} \quad (5.11)$$

tek amaçlı deterministik programlama problemi elde edilir. Bu programlama probleminin amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi tek amaçlı fonksiyona dönüştürülür.

$$\begin{cases} \max \sum_{l=1}^k w_l (\mu_l^L (f_l(x)) + \mu_l^C (f_l(x))) \\ r \begin{cases} \mu_l^R (f_l(x)) \leq 1, (l=1, 2, \dots, k), \\ \mu_l^C (f_l(x)) \leq 1, (l=1, 2, \dots, k) \\ c_i(x) (\leq \geq) b_i, i=1, 2, \dots, 2m \\ x \in X \subseteq R^n \end{cases} \end{cases} \quad (5.12)$$

Önerilen yöntemle dikkat edilirse, (5.10) problemi bir bulanık çok amaçlı programlama problemidir. Bu problem önerme 5.1 kullanılarak ilk önce (5.11) deterministik çok

amaçlı programlama problemine ve sonra (5.12) ağırlıklandırma amaç fonksiyonu ile birlikte tek bir deterministik lineer programlama problemine dönüştürülmüştür.

Böylece (5.12) tek amaçlı programlama probleminin optimal çözümü, (5.10) bulanık çok amaçlı programlama probleminin etkin çözümü ve (4.7) aralıklı programlama probleminin pareto optimal çözümü elde edilmiştir.

Tanım 5.1 (4.7) programlama probleminde uygun çözüm $\bar{x} \in X$ noktasının aralıklı programlama probleminin bir Pareto optimal çözümü olması için gerek yeter şart tüm $l=1,2,...,k$ için $f_l(\bar{x}) \leq f_l(\tilde{x})$ ve en az bir $r=1,2,...,p$, $f_r(\bar{x}) < f_r(\tilde{x})$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \in X$ noktasının mevcut olmamasıdır.

Tanım 5.2 Farz edelim ki (5.10) bulanık çok amaçlı programlama probleminin uygun çözümlerinin kümesi X ve $\bar{x} \in X$ (5.10) probleminin bir uygun çözümü olsun. Uygun bölgede $\bar{x} \in X$ noktasının (5.10) probleminin bir bulanık etkin çözümü olması için gerek ve yeter şart tüm $l=1,2,...,k$ için $\mu_l(f_l(\bar{x})) \leq \mu_l(f_l(\tilde{x}))$ ve en az bir $r=1,2,...,p$, $\mu_r(f_r(\bar{x})) \leq \mu_r(f_r(\tilde{x}))$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \in X$ noktasının mevcut olmamasıdır.

Bu tanımlar kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.3 $\bar{x} \in X$ noktası (5.12) programlama probleminin bir optimal çözümü olsun. O halde $\bar{x} \in X$ noktası (5.10) aralıklı bulanık programlama probleminin bir etkin çözümüdür.

İspat $\bar{x} \in X$ (5.10) aralıklı bulanık programlama probleminin bir etkin çözümü olmasın. Böylece, tüm $l=1,2,...,k$ için $\mu_l(f_l(\tilde{x})) \geq \mu_l(f_l(\bar{x}))$ ve en az bir indeks r için $\mu_r(f_r(\tilde{x})) > \mu_r(f_r(\bar{x}))$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \in X$ noktası mevcuttur. Buradan,

$$\sum_{l=1}^k \mu_l(f_l(\tilde{x})) \geq \sum_{l=1}^k \mu_l(f_l(\bar{x})) \text{ elde edilir ve bu eşitsizlik } \bar{x} \in X \text{ noktasının (5.12)}$$

programlama probleminin bir optimal çözüm olmaması ile çelişir. Bu durumda $\bar{x} \in X$ noktası (5.10) aralıklı bulanık programlama problemi için bir etkin çözümüdür.

Teorem 5.4 $\bar{x} \in X$ noktası (5.10) aralıklı bulanık programlama probleminin bir bulanık etkin çözümü olsun. O halde $\bar{x} \in X$ noktası (4.7) aralıklı programlama probleminin bir Pareto optimal çözümüdür.

İspat (5.10) bulanık programlama probleminin çözümünden elde edilen $\bar{x} \in X$ noktası bir bulanık etkin çözümdür. Buradan, tüm $l=1,2,...,k$ için $\mu_l(f_l(\tilde{x})) \geq \mu_l(f_l(\bar{x}))$ ve en az bir indeks r için $\mu_r(f_r(\tilde{x})) > \mu_r(f_r(\bar{x}))$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \in X$ noktası mevcut değildir. Bu koşul tanım 5.1’de verilen Pareto optimallik koşuluna denktir. Diğer ifadeyle; $\mu_l(f_l(\bar{x})) \geq \mu_l(f_l(\tilde{x}))$ eşitsizliği $f_l(\bar{x}) \leq f_l(\tilde{x})$ ’ne denktir.

Tüm bu sonuçlardan problem (5.10)’nın sonucu (4.7) programlama probleminin bir Pareto optimal çözümü olduğunun kanıtıdır.

BÖLÜM 6

SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde, yukarıda önerdiğimiz aralıklı bulanık programlama, literatürde var olan global kriter ve ağırlıklandırma yöntemleri kullanılarak lineer olmayan aralıklı programlama problemlerinin çözümleri incelenecektir. Problemleri çözmek için her aşamada Maple 18.02 optimizasyon programının yararlanılacaktır.

Örnek 6.1

Jiang vd. [80] tarafından kullanılan, aşağıda verilen tek amaçlı lineer olmayan aralıklı programlama problemi modelini alalım;

$$\begin{aligned} f(x, U) &= [3.5, 4.5]x_1 + 7[5.5, 6.5]x_2 - [1.5, 2.5]x_1x_2 + 100 \rightarrow \min \\ \text{kısıtlar} \quad &\begin{cases} c_1(x, U) = [5.5, 6.5][3.5, 4.5]x_2 + [1.5, 2.5]x_1x_2 \leq [790, 810] \\ c_2(x, U) = [1.5, 2.5][5.5, 6.5](x_1 - 15)^2 + [3.5, 4.5](x_2 - 20)^2 \leq [690, 710] \\ 0 \leq x_i \leq 20, i = 1, 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.1)$$

(6.1) programlama probleminde amaç fonksiyonu minimizasyon olduğundan (4.9)'dan aralıklar üzerinde $\leq_{RC}$ sıra ilişkisi kullanılarak, problemin amaç fonksiyonu aralıkların orta noktaları ve üst sınırları alınarak

$$f^c(x) = \left(\frac{3.5+4.5}{2}\right)x_1 + 7\left(\frac{5.5+6.5}{2}\right)x_2 - \left(\frac{1.5+2.5}{2}\right)x_1x_2 + 100 \quad (6.2)$$

$$f^R(x) = 4.5x_1 + 7(6.5)x_2 - 1.5x_1x_2 + 100 \quad (6.3)$$

deterministik fonksiyonlar elde ederiz.

Benzer şekilde, probleminin kısıt fonksiyonlarında (4.11) eşitsizliğinden $\leq_{RC}$ sıra ilişkisi kullanılarak aşağıdaki gibi deterministik kısıt fonksiyonlarına dönüştürülür:

$$\begin{aligned} c_1(x, U) &= [5.5, 6.5][3.5, 4.5]x_2 + [1.5, 2.5]x_1x_2 \leq [790, 810] \\ &= [19.25, 29.25]x_2 + [1.5, 2.5]x_1x_2 \leq [790, 810] \\ \Rightarrow c_1^C(x) &= \left(\frac{19.25 + 29.25}{2}\right)x_2 + \left(\frac{1.5 + 2.5}{2}\right)x_1x_2 \leq \left(\frac{790 + 810}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$c_1^R(x) = 29.25x_2 + 2.5x_1x_2 \leq 810 \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} c_2(x, U) &= [1.5, 2.5][5.5, 6.5](x_1 - 15)^2 + [3.5, 4.5](x_2 - 20)^2 \leq [690, 710] \\ &= [8.25, 16.25](x_1 - 15)^2 + [3.5, 4.5](x_2 - 20)^2 \leq [690, 710] \\ \Rightarrow c_2^C(x) &= \left(\frac{8.25 + 16.25}{2}\right)(x_1 - 15)^2 + \left(\frac{3.5 + 4.5}{2}\right)(x_2 - 20)^2 \leq \left(\frac{690 + 710}{2}\right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$c_2^R(x) = 16.25(x_1 - 15)^2 + 4.5(x_2 - 20)^2 \leq 710 \quad (6.7)$$

(6.2)- (6.7) deterministik fonksiyonlar kullanılarak (6.1) aralıklı programlama problemi aşağıdaki gibi lineer olmayan çok amaçlı deterministik programlama problemine dönüştürülür:

$$\begin{aligned} \min f^C(x) &= \left(\frac{3.5 + 4.5}{2}\right)x_1 + 7\left(\frac{5.5 + 6.5}{2}\right)x_2 - \left(\frac{1.5 + 2.5}{2}\right)x_1x_2 + 100 \\ \min f^R(x) &= 4.5x_1 + 7(6.5)x_2 - 1.5x_1x_2 + 100 \\ \text{kısıtlar} \left\{ \begin{array}{l} c_1^C(x) = \left(\frac{19.25 + 29.25}{2}\right)x_2 + \left(\frac{1.5 + 2.5}{2}\right)x_1x_2 \leq \left(\frac{790 + 810}{2}\right) \\ c_1^R(x) = 29.25x_2 + 2.5x_1x_2 \leq 810 \\ c_2^C(x) = \left(\frac{8.25 + 16.25}{2}\right)(x_1 - 15)^2 + \left(\frac{3.5 + 4.5}{2}\right)(x_2 - 20)^2 \leq \left(\frac{690 + 710}{2}\right) \\ c_2^R(x) = 16.25(x_1 - 15)^2 + 4.5(x_2 - 20)^2 \leq 710 \\ 0 \leq x_i \leq 20, i = 1, 2 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6.8)$$

(6.8) lineer olmayan çok amaçlı programlama probleminde $f^C(x)$ ve $f^R(x)$ amaç fonksiyonları verilen kısıtlar altında tek tek minimize edilerek

$$f^C(x) = 235.126 \text{ ve } f^R(x) = 335.012$$

ideal çözümler bulunur. Böylece, (5.1)'de çok amaçlı aralıklı programlama problemleri için verilen L_p metrik fonksiyonu kullanılarak, (6.8) programlama probleminin amaç fonksiyonu

$$\min L_p = \left\{ \left(\frac{335.012 - f^R(x)}{335.012} \right)^p + \left(\frac{235.126 - f^C(x)}{235.126} \right)^p \right\}^{1/p} \quad (6.9)$$

tek amaç fonksiyonu olarak yazılabilir. (6.8) programlama problemi aşağıdaki tek amaçlı lineer olmayan deterministik programlama problemine dönüşür.

$$\begin{aligned} \min L_p &= \left\{ \left(\frac{335.012 - f^R(x)}{335.012} \right)^p + \left(\frac{235.126 - f^C(x)}{235.126} \right)^p \right\}^{1/p} \\ \text{kısıtlar} &\begin{cases} c_1^C(x) = \left(\frac{19.25 + 29.25}{2} \right) x_2 + \left(\frac{1.5 + 2.5}{2} \right) x_1 x_2 \leq \left(\frac{790 + 810}{2} \right) \\ c_1^R(x) = 29.25x_2 + 2.5x_1 x_2 \leq 810 \\ c_2^C(x) = \left(\frac{8.25 + 16.25}{2} \right) (x_1 - 15)^2 + \left(\frac{3.5 + 4.5}{2} \right) (x_2 - 20)^2 \leq \left(\frac{690 + 710}{2} \right) \\ c_2^R(x) = 16.25(x_1 - 15)^2 + 4.5(x_2 - 20)^2 \leq 710 \\ 0 \leq x_i \leq 20, i = 1, 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.10)$$

(6.2) $f^C(x)$, (6.3) $f^R(x)$ fonksiyonları, (6.10) programlama probleminde yerine yazılarak,

$$\begin{aligned} \min L_p &= \left\{ \left(\frac{335.012 - 4.5x_1 - 7(6.5)x_2 + 1.5x_1 x_2 - 100}{335.012} \right)^p + \left(\frac{235.126 - \left(\frac{3.5 + 4.5}{2} \right) x_1 - 7 \left(\frac{5.5 + 6.5}{2} \right) x_2 + \left(\frac{1.5 + 2.5}{2} \right) x_1 x_2 - 100}{235.126} \right)^p \right\}^{1/p} \\ \text{kısıtlar} &\begin{cases} c_1^C(x) = \left(\frac{19.25 + 29.25}{2} \right) x_2 + \left(\frac{1.5 + 2.5}{2} \right) x_1 x_2 \leq \left(\frac{790 + 810}{2} \right) \\ c_1^R(x) = 29.25x_2 + 2.5x_1 x_2 \leq 810 \\ c_2^C(x) = \left(\frac{8.25 + 16.25}{2} \right) (x_1 - 15)^2 + \left(\frac{3.5 + 4.5}{2} \right) (x_2 - 20)^2 \leq \left(\frac{690 + 710}{2} \right) \\ c_2^R(x) = 16.25(x_1 - 15)^2 + 4.5(x_2 - 20)^2 \leq 710 \\ 0 \leq x_i \leq 20, i = 1, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Bu programlama problemi $p=1$ için çözülürse,

$$x_1 = 8.390, x_2 = 20; f^C(x_1, x_2) = 479.866 \text{ ve } f^R(x_1, x_2) = 796.055$$

olarak elde edilir. Böylece, (6.1) lineer olmayan aralıklı programlama probleminin $p=1$ için optimal çözümü $f(x_1, x_2) = [479.866, 796.055]$ olarak elde edilir.

Benzer şekilde $p=2$ için $x_1 = 16.145, x_2 = 7.629; f^C(x_1, x_2) = 134.836$ ve $f^R(x_1, x_2) = 335.614$ olarak elde edilir. Böylece, (6.1) lineer olmayan aralıklı programlama probleminin $p=2$ için optimal çözümü $f(x_1, x_2) = [134.836, 335.614]$ dir.

(6.1) aralıklı programlama problemi, (5.5) ağırlık toplamları yöntemi kullanılarak da çözülebilir. (6.1) aralıklı programlama probleminin, (6.2) ve (6.3) deterministik fonksiyonları ağırlık parametreleri kullanılarak

$$\begin{aligned} & w_1 f^C(x) + w_2 f^R(x) \\ &= w_1 \left(\left(\frac{3.5+4.5}{2} \right) x_1 + 7 \left(\frac{5.5+6.5}{2} \right) x_2 - \left(\frac{1.5+2.5}{2} \right) x_1 x_2 + 100 \right) \\ &+ w_2 (4.5x_1 + 76.5x_2 - 1.5x_1 x_2 + 100) \end{aligned}$$

olacak şekilde tek bir deterministik amaç fonksiyonu haline dönüştürülebilir.

Böylece (6.1) aralıklı programlama problemi

$$\begin{aligned} \min & \left(\begin{aligned} &= w_1 \left(\left(\frac{3.5+4.5}{2} \right) x_1 + 7 \left(\frac{5.5+6.5}{2} \right) x_2 - \left(\frac{1.5+2.5}{2} \right) x_1 x_2 + 100 \right) \\ &+ w_2 (4.5x_1 + 7(6.5)x_2 - 1.5x_1 x_2 + 100) \end{aligned} \right) \\ \text{kısıtlar} & \begin{cases} c_1^C(x) = \left(\frac{19.25+29.25}{2} \right) x_2 + \left(\frac{1.5+2.5}{2} \right) x_1 x_2 \leq \left(\frac{790+810}{2} \right) \\ c_1^R(x) = 29.25x_2 + 2.5x_1 x_2 \leq 810 \\ c_2^C(x) = \left(\frac{8.25+16.25}{2} \right) (x_1 - 15)^2 + \left(\frac{3.5+4.5}{2} \right) (x_2 - 20)^2 \leq \left(\frac{690+710}{2} \right) \\ c_2^R(x) = 16.25(x_1 - 15)^2 + 4.5(x_2 - 20)^2 \leq 710 \\ 0 \leq x_i \leq 20, i=1,2 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.11)$$

tek amaçlı programlama lineer olmayan deterministik programlama problemine dönüştürülebilir.

Bu problemde $w_1 + w_2 = 1$ ve $w_1, w_2 \geq 0$ olmak üzere, ağırlıklar eşit olarak atanınca, optimal çözümler $x_1 = 16.603$, $x_2 = 7.814$; $f(x) = [134.604, 335.648]$ olarak elde edilir. Elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi, L_2 metrik fonksiyonu ile hemen hemen aynıdır.

Bu problem, Jiang vd. tarafından [80]'de, aralıklar üzerinde klasik sıra ilişkisi kullanılarak deterministik forma dönüştürülmüş ve kısıtlarının olabilirlik dereceleri alınmıştır. Ağırlıklandırma yöntemi kullanılarak problem tek amaçlı deterministik probleme dönüştürülerek, birinci dereceden Taylor serileri yaklaşımı ile çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar dikkate alındığında çözümler her zaman kısıtları sağlamamakta ve bu sonuçlar feasible bölgede oluşmamaktadır. Bu nedenle bu tezde verilen aralık yöntemler, hesaplama açısından hem çok fazla zaman almakta hem de karar vericinin tercihinine göre ağırlık dereceleri değiştirilerek doğru ve arzu edilebilir çözümler üretebilmektedir.

Örnek 6.2

Aşağıda Kundu vd. tarafından [97]'de verilen bulanık üç boyutlu taşıma problemi örneğini alalım.

Bu problemde amaç, 2 farklı kaynaktan 3 farklı hedefe 2 farklı araç (örneğin biri tren, diğeri gemi vs. olabilir) ile taşınan, 2 farklı malı taşımak için harcanan maliyeti (ya da zamanı) aynı anda optimize etmektir. Bu problem yapısı oldukça karmaşık olmakla son iki yıldır bu tip problemleri çözmek için çalışmalar yapılmaktadır. Problemde kullanılan veriler Çizelge 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 ve 6.5'de verilmiştir. Üstelik problemin matematiksel modeli Kundu vd. tarafından [97]'de açıklanmıştır.

Kundu vd. bu problemi dengelemeden üç boyutlu programlama problemi olarak minimum bulanık programlama yöntemi ile çözmüştür ve problemin beklenen değerini elde etmiştir. Biz bu çalışmada problemi dengeli taşıma problemi haline getirip problemin olması gereken Pareto optimal çözümünü elde edeceğiz.

Genel olarak bir taşıma problemlerinde tüm kapasitelerin (kaynak, talep ve araç kapasiteleri) dengede olduğu farz edilir. Eğer problemde bu denge sağlanmaz ise kapasiteler yapay kaynak, yapay talep ve yapay araç kapasiteleri eklenerek denge sağlanır.

Çizelge 6. 1 Birinci amaç fonksiyonunda birinci mal için taşımanın birim fiyatları

Araç k=1				Araç k=2			
Kaynak	Hedef 1	Hedef 2	Hedef 3	Kaynak	Hedef 1	Hedef 2	Hedef 3
S1	(5,8,9,11)	(4,6,9,11)	(10,12,14,16)	S1	(9,11,3,15)	(6,8,10,12)	(7,9,12,14)
S2	(8,10,13,15)	(6,7, 8, 9)	(11,13,15,17)	S2	(10,11,13,15)	(6,8,10,12)	(14,16,18,20)
Mal 1							

Çizelge 6. 2 Birinci amaç fonksiyonunda ikinci mal için taşımanın birim fiyatları

Araç k=1				Araç k=2			
Kaynak	Hedef 1	Hedef 2	Hedef 3	Kaynak	Hedef 1	Hedef 2	Hedef 3
S1	(9,10,12,13)	(5,8,10,12)	(10,11,12,13)	S1	(11,13,14,15)	(6,7,9,11)	(8,10,11,13)
S2	(11,13,14,16)	(7,9,12,14)	(12, 14,16,18)	S2	(14 16,18,20)	(9,11,13,14)	((13,14,15,16)
Mal 2							

Çizelge 6. 3 İkinci amaç fonksiyonunda birinci mal için taşımanın birim fiyatları

Araç k=1				Araç k=2			
Kaynak	Hedef 1	Hedef 2	Hedef 3	Kaynak	Hedef 1	Hedef 2	Hedef 3
S1	(4,5, 7,8)	(3, 5,6,8)	(7, 9,10, 12)	S1	(6,7, 8,9)	(4, 6,7,9)	(5,7, 9,11)
S2	(6,8, 9,11)	(5, 6,7,8)	(6, 7,9,10)	S2	(4,6, 8,10)	(7, 9,11,13)	(9,10, 11,12)
Mal 1							

Çizelge 6. 4 İkinci amaç fonksiyonunda ikinci mal için taşımanın birim fiyatları

Araç k=1				Araç k=2			
Kaynak	Hedef 1	Hedef 2	Hedef 3	Kaynak	Hedef 1	Hedef 2	Hedef 3
S1	(5,7, 9,10)	(4, 6,7,9)	(9, 11, 12,13)	S1	(7,8,9, 10)	(4, 5,7,8)	(8,10, 11,12)
S2	(10, 11,13, 14)	(6, 7,8,9)	(7, 9,11, 12)	S2	(6,8,10, 12)	(5, 7,9,11)	(9,10, 12,14)
Mal 2							

Çizelge 6. 5 Bulanık kapasiteler

Bulanık mevcut kaynak kapasite	Bulanık talep kapasite	Bulanık araç kapasite
$\tilde{a}_1^1 = (21,24, 26, 28)$	$\tilde{b}_1^1 = (14, 16, 19, 22)$	$\tilde{e}_1 = (46, 49, 51, 53)$
$\tilde{a}_2^1 = (28, 32, 35, 37)$	$\tilde{b}_2^1 = (17,7 20, 22, 25)$	$\tilde{e}_2 = (51,53, 56, 59)$
$\tilde{a}_1^2 = (32, 34, 37, 39)$	$\tilde{b}_3^1 = (12, 15, 18, 21)$	
$\tilde{a}_2^2 = (25,28, 30, 33)$	$\tilde{b}_1^2 = (20, 23, 25, 28)$	

$$\tilde{b}_2^2 = (16, 18, 19, 22)$$

Bu problemde kapasiteleri dengelemek için Liou and Wang tarafından [98]'de verilen lineer sıralama yaklaşımı kullanılmıştır. Bu yaklaşım kullanılarak

$$\Re\left(\sum_{i=1}^2 \tilde{a}_i^p\right) \geq \Re\left(\sum_{j=1}^3 \tilde{b}_j^p\right) \text{ elde edilir. Problemde arz ve talep dengesi sağlanmadığı için, mal 1}$$

ve mal 2'nin bulanık talep kapasitelerine sırasıyla bulanık lineer sıralama ile elde edilen deterministik değeri 2.5 ve 3.75 olan herhangi yamuksal bulanık yapay talep kapasiteleri eklenir. Bu yapay talep kapasiteleri $\tilde{b}_4^1 = (1, 2, 3, 4)$, $\tilde{b}_4^2 = (2, 3, 4, 6)$ olarak

$$\text{alınabilir. Böylece, arz ve talep dengelenir ve } \Re\left(\sum_{i=1}^2 \tilde{a}_i^p\right) = \Re\left(\sum_{j=1}^3 \tilde{b}_j^p\right) = 122 \text{ elde edilir.}$$

Bununla birlikte; araç kapasite toplamı, arz ve talepten $\sum_{j=1}^2 \tilde{e}_k = 104 < 122$ küçük olduğu

için, arz ve talep kapasiteleri ile araç kapasitelerinde denge sağlamak adına, kısıtlara bulanık lineer sıralama yöntemi kullanılarak deterministik değeri 17.75 olan bir yapay araç kapasitesi eklenir. Bu yapay aracın bulanık kapasitesini $\tilde{e}_3 = (15, 16, 19, 21)$ olarak alabiliriz. Böylece üç boyutlu taşıma probleminde denge sağlanmış olur.

Bu bulanık sayıları aralıklı sayılara çevirmek için α – kesenleri yardımıyla aralıkların olağan alt ve üst sınırları belirlenir. En yakın aralık yöntemi (Grzegorzewski [98]) kullanılarak, aralıklı sayının alt üst sınırlarını oluşturan sayılar arasında sapmalar minimize edilerek Çizelge 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 ve 6.5'de verilen yamuksal bulanık sayılar Çizelge 6.6, 6.7, 6.8, 6.9 ve 6.10'de verilen aralıklı sayılara dönüştürülür.

Çizelge 6. 6 Birinci amaç fonksiyonunda birinci mal için aralıklı birim taşıma fiyatı

Araç k=1				Araç k=2			
Kaynak	Hedef 1	Kaynak	Hedef 1	Kaynak	Hedef 1	Kaynak	Hedef 1
S1	[13/2, 10]	[5, 10]	[11, 15]	S1	[10, 14]	[7, 11]	[8, 13]
S2	[9, 14]	[13/2, 17/2]	[12, 16]	S2	[21/2, 14]	[7, 11]	[15, 19]
Mal 1							

Çizelge 6. 7 Birinci amaç fonksiyonunda ikinci mal için aralıklı birim taşıma fiyatı

Araç k=1				Araç k=2			
Kaynak	Hedef 1	Kaynak	Hedef 1	Kaynak	Hedef 1	Kaynak	Hedef 1
S1	[19/2, 252]	[13/2, 11]	[21/2, 25/2]	S1	[12, 29/2]	[13/2, 10]	[9 12]
S2	[12, 15]	[8, 13]	[13, 17]	S2	[15, 19]	[10, 27/2]	[27/2, 31/2]
Mal 2							

Çizelge 6. 8 İkinci amaç fonksiyonunda birinci mal için aralıklı birim taşıma fiyatı

Araç k=1				Araç k=2			
Kaynak	Hedef 1	Kaynak	Hedef 1	Kaynak	Hedef 1	Kaynak	Hedef 1
S1	[9/2, 15/2]	[4 7]	[8, 11]	S1	[5,8]	[6,10]	[5, 9]
S2	[7 10]	[11/2,15/2]	[13/2,19/2]	S2	[8,12]	[19/2,23/2]	[6,19/2]
Mal 1							

Çizelge 6. 9 İkinci amaç fonksiyonunda ikinci mal için aralıklı birim taşıma fiyatı

Araç k=1				Araç k=2			
Kaynak	Hedef 1	Kaynak	Hedef 1	Kaynak	Hedef 1	Kaynak	Hedef 1
S1	[13/2,17/2]	[5, 8]	[10, 25/2]	S1	[15/2,17/2]	[9/2, 15/2]	[9, 23/2]
S2	[21/2,27/2]	[13/2,17/2]	[8, 23/2]	S2	[7, 11]	[6, 10]	[19/2, 13]
Mal 2							

Çizelge 6. 10 Aralıklı kapasiteler

Aralıklı mevcut kapasite	Aralıklı talep kapasite	Aralıklı araç kapasite
$\tilde{a}_1^1 = [45/2, 27]$	$\tilde{b}_1^1 = [15, 41/2]$	$\tilde{e}_1 = [95/2, 52]$
$\tilde{a}_2^1 = [30, 36]$	$\tilde{b}_2^1 = [37/2, 47/2]$	$\tilde{e}_2 = [52, 115/2]$
$\tilde{a}_1^2 = [33, 38]$	$\tilde{b}_3^1 = [27/2, 39/2]$	$\tilde{e}_3 = [31/2, 20]$
$\tilde{a}_2^2 = [53/2, 63/2]$	$\tilde{b}_4^1 = [3/2, 7/2]$	
	$\tilde{b}_1^2 = [43/2, 53/2]$	
	$\tilde{b}_2^2 = [17, 41/2]$	
	$\tilde{b}_3^2 = [16, 20]$	
	$\tilde{b}_4^2 = [5/2, 5]$	

Böylece, bu taşıma probleminin matematiksel modeli aşağıdaki şekilde formüle edilir;

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \min \left(\begin{aligned} &\left[\frac{13}{2}, 10 \right] x_{111}^1 + [5, 10] x_{121}^1 + [11, 15] x_{131}^1 + [9, 14] x_{211}^1 + \left[\frac{13}{2}, \frac{17}{2} \right] x_{221}^1 + [12, 16] x_{231}^1 + [10, 14] x_{112}^1 + [7, 11] x_{122}^1 + [8, 13] x_{132}^1 \\ &+ \left[\frac{21}{2}, 14 \right] x_{212}^1 + [7, 11] x_{222}^1 + [15, 19] x_{232}^1 + \left[\frac{19}{2}, \frac{25}{2} \right] x_{111}^2 + \left[\frac{13}{2}, 11 \right] x_{121}^2 + \left[\frac{21}{2}, \frac{25}{2} \right] x_{131}^2 + [12, 15] x_{211}^2 + [8, 13] x_{221}^2 + [13, 17] x_{231}^2 \\ &+ \left[12, \frac{29}{2} \right] x_{112}^2 + \left[\frac{13}{2}, 10 \right] x_{122}^2 + [9, 12] x_{132}^2 + [15, 19] x_{212}^2 + \left[10, \frac{27}{2} \right] x_{222}^2 + \left[\frac{27}{2}, \frac{31}{2} \right] x_{232}^2 \end{aligned} \right) \\
f_2(x) &= \min \left(\begin{aligned} &\left[\frac{9}{2}, \frac{15}{2} \right] x_{111}^1 + [4, 7] x_{121}^1 + [8, 11] x_{131}^1 + [7, 10] x_{211}^1 + \left[\frac{11}{2}, \frac{15}{2} \right] x_{221}^1 + \left[\frac{13}{2}, \frac{19}{2} \right] x_{231}^1 + \left[\frac{13}{2}, \frac{17}{2} \right] x_{112}^1 + [5, 8] x_{122}^1 + [6, 10] x_{132}^1 \\ &+ [5, 9] x_{212}^1 + [8, 12] x_{222}^1 + \left[\frac{19}{2}, \frac{23}{2} \right] x_{232}^1 + \left[6, \frac{19}{2} \right] x_{111}^2 + [5, 8] x_{121}^2 + \left[10, \frac{25}{2} \right] x_{131}^2 + \left[\frac{21}{2}, \frac{27}{2} \right] x_{211}^2 + \left[\frac{13}{2}, \frac{17}{2} \right] x_{221}^2 + \left[8, \frac{23}{2} \right] x_{231}^2 \\ &+ \left[\frac{15}{2}, \frac{19}{2} \right] x_{112}^2 + \left[\frac{9}{2}, \frac{15}{2} \right] x_{122}^2 + \left[9, \frac{23}{2} \right] x_{132}^2 + [7, 11] x_{212}^2 + [6, 10] x_{222}^2 + \left[\frac{19}{2}, 13 \right] x_{232}^2 \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{ \begin{aligned} &x_{111}^1 + x_{121}^1 + x_{131}^1 + x_{141}^1 + x_{112}^1 + x_{122}^1 + x_{132}^1 + x_{142}^1 + x_{113}^1 + x_{123}^1 + x_{133}^1 + x_{143}^1 \leq \left[\frac{45}{2}, 27 \right]; \\ &x_{211}^1 + x_{221}^1 + x_{231}^1 + x_{241}^1 + x_{212}^1 + x_{222}^1 + x_{232}^1 + x_{242}^1 + x_{213}^1 + x_{223}^1 + x_{233}^1 + x_{243}^1 \leq [30, 36], \\ &x_{111}^2 + x_{121}^2 + x_{131}^2 + x_{141}^2 + x_{112}^2 + x_{122}^2 + x_{132}^2 + x_{142}^2 + x_{113}^2 + x_{123}^2 + x_{133}^2 + x_{143}^2 \leq [33, 38]; \\ &x_{211}^2 + x_{221}^2 + x_{231}^2 + x_{241}^2 + x_{212}^2 + x_{222}^2 + x_{232}^2 + x_{242}^2 + x_{213}^2 + x_{223}^2 + x_{233}^2 + x_{243}^2 \leq \left[\frac{53}{2}, \frac{63}{2} \right], \\ &x_{111}^1 + x_{211}^1 + x_{112}^1 + x_{212}^1 + x_{113}^1 + x_{213}^1 \geq \left[15, \frac{45}{2} \right] \\ &x_{121}^1 + x_{221}^1 + x_{122}^1 + x_{222}^1 + x_{123}^1 + x_{223}^1 \geq \left[\frac{37}{2}, \frac{47}{2} \right], \\ &x_{131}^1 + x_{231}^1 + x_{132}^1 + x_{232}^1 + x_{133}^1 + x_{233}^1 \geq \left[\frac{27}{2}, \frac{49}{2} \right], \\ &x_{141}^1 + x_{241}^1 + x_{142}^1 + x_{242}^1 + x_{143}^1 + x_{243}^1 \geq \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2} \right], \\ &x_{111}^2 + x_{211}^2 + x_{112}^2 + x_{212}^2 + x_{113}^2 + x_{213}^2 \geq \left[\frac{43}{2}, \frac{53}{2} \right], \\ &x_{121}^2 + x_{221}^2 + x_{122}^2 + x_{222}^2 + x_{123}^2 + x_{223}^2 \geq \left[17, \frac{41}{2} \right], \\ &x_{131}^2 + x_{231}^2 + x_{132}^2 + x_{232}^2 + x_{133}^2 + x_{233}^2 \geq [16, 10], \\ &x_{141}^2 + x_{241}^2 + x_{142}^2 + x_{242}^2 + x_{143}^2 + x_{243}^2 \geq \left[\frac{5}{2}, 5 \right] \\ &x_{111}^1 + x_{121}^1 + x_{131}^1 + x_{141}^1 + x_{211}^1 + x_{221}^1 + x_{231}^1 + x_{241}^1 + x_{111}^2 + x_{121}^2 + x_{131}^2 + x_{141}^2 + x_{211}^2 + x_{221}^2 + x_{231}^2 + x_{241}^2 \leq \left[\frac{95}{2}, 52 \right], \\ &x_{112}^1 + x_{122}^1 + x_{132}^1 + x_{142}^1 + x_{212}^1 + x_{222}^1 + x_{232}^1 + x_{242}^1 + x_{112}^2 + x_{122}^2 + x_{132}^2 + x_{142}^2 + x_{212}^2 + x_{222}^2 + x_{232}^2 + x_{242}^2 \leq \left[52, \frac{115}{2} \right], \\ &x_{113}^1 + x_{123}^1 + x_{133}^1 + x_{143}^1 + x_{213}^1 + x_{223}^1 + x_{233}^1 + x_{243}^1 + x_{113}^2 + x_{123}^2 + x_{133}^2 + x_{143}^2 + x_{213}^2 + x_{223}^2 + x_{233}^2 + x_{243}^2 \leq \left[\frac{31}{2}, 20 \right] \\ &x_{ijk} \geq 0, \forall p, i, j, k \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Bu problem, bir minumum programla problemi olduğu için (4.9) amaç fonksiyonu ve (4.12) kısıtları kullanılarak aşağıdaki deterministik programlama problemi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 f_1^L(x) &= \min \left(\begin{aligned} &\frac{13}{2}x_{111}^1 + 5x_{121}^1 + 11x_{131}^1 + 9x_{211}^1 + \frac{13}{2}x_{221}^1 + 12x_{231}^1 + 10x_{112}^1 + 7x_{122}^1 + 8x_{132}^1 + \frac{21}{2}x_{212}^1 + 7x_{222}^1 + 15x_{232}^1 + \frac{19}{2}x_{111}^2 + \frac{13}{2}x_{121}^2 \\ &+ \frac{21}{2}x_{131}^2 + 12x_{211}^2 + 8x_{221}^2 + 13x_{231}^2 + 12x_{112}^2 + \frac{13}{2}x_{122}^2 + 9x_{132}^2 + 15x_{212}^2 + 10x_{222}^2 + \frac{27}{2}x_{232}^2 \end{aligned} \right) \\
 f_1^C(x) &= \min \left(\begin{aligned} &10x_{111}^1 + 10x_{121}^1 + 15x_{131}^1 + 14x_{211}^1 + \frac{17}{2}x_{221}^1 + 16x_{231}^1 + 14x_{112}^1 + 11x_{122}^1 + 13x_{132}^1 + 14x_{212}^1 + 11x_{222}^1 + 19x_{232}^1 + \frac{25}{2}x_{111}^2 + 11x_{121}^2 \\ &+ \frac{25}{2}x_{131}^2 + 15x_{211}^2 + 13x_{221}^2 + 17x_{231}^2 + \frac{29}{2}x_{112}^2 + 10x_{122}^2 + 12x_{132}^2 + 19x_{212}^2 + \frac{27}{2}x_{222}^2 + \frac{31}{2}x_{232}^2 \end{aligned} \right) \\
 f_2^L(x) &= \left(\begin{aligned} &\frac{9}{2}x_{111}^1 + 4x_{121}^1 + 8x_{131}^1 + 7x_{211}^1 + \frac{11}{2}x_{221}^1 + \frac{13}{2}x_{231}^1 + \frac{13}{2}x_{112}^1 + 5x_{122}^1 + 6x_{132}^1 + 5x_{212}^1 + 8x_{222}^1 + \frac{19}{2}x_{232}^1 + 6x_{111}^2 + 5x_{121}^2 + 10x_{131}^2 \\ &+ \frac{21}{2}x_{211}^2 + \frac{13}{2}x_{221}^2 + 8x_{231}^2 + \frac{15}{2}x_{112}^2 + \frac{9}{2}x_{122}^2 + 9x_{132}^2 + 7x_{212}^2 + 6x_{222}^2 + \frac{19}{2}x_{232}^2 \end{aligned} \right) \\
 f_2^C(x) &= \left(\begin{aligned} &\frac{15}{2}x_{111}^1 + 7x_{121}^1 + 11x_{131}^1 + 10x_{211}^1 + \frac{15}{2}x_{221}^1 + \frac{19}{2}x_{231}^1 + \frac{17}{2}x_{112}^1 + 8x_{122}^1 + 10x_{132}^1 + 9x_{212}^1 + 12x_{222}^1 + \frac{23}{2}x_{232}^1 + \frac{19}{2}x_{111}^2 + 8x_{121}^2 + \\ &\frac{25}{2}x_{131}^2 + \frac{27}{2}x_{211}^2 + \frac{17}{2}x_{221}^2 + \frac{23}{2}x_{231}^2 + \frac{19}{2}x_{112}^2 + \frac{15}{2}x_{122}^2 + \frac{23}{2}x_{132}^2 + 11x_{212}^2 + 10x_{222}^2 + 13x_{232}^2 \end{aligned} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned}
& \frac{45}{2} \leq x_{111}^1 + x_{121}^1 + x_{131}^1 + x_{141}^1 + x_{112}^1 + x_{122}^1 + x_{132}^1 + x_{142}^1 + x_{113}^1 + x_{123}^1 + x_{133}^1 + x_{143}^1 \leq 27, \\
& 30 \leq x_{211}^1 + x_{221}^1 + x_{231}^1 + x_{241}^1 + x_{212}^1 + x_{222}^1 + x_{232}^1 + x_{242}^1 + x_{213}^1 + x_{223}^1 + x_{233}^1 + x_{243}^1 \leq 36, \\
& 33 \leq x_{111}^2 + x_{121}^2 + x_{131}^2 + x_{141}^2 + x_{112}^2 + x_{122}^2 + x_{132}^2 + x_{142}^2 + x_{113}^2 + x_{123}^2 + x_{133}^2 + x_{143}^2 \leq 38, \\
& \frac{53}{2} \leq x_{211}^2 + x_{221}^2 + x_{231}^2 + x_{241}^2 + x_{212}^2 + x_{222}^2 + x_{232}^2 + x_{242}^2 + x_{213}^2 + x_{223}^2 + x_{233}^2 + x_{243}^2 \leq \frac{63}{2}, \\
& 15 \leq x_{111}^1 + x_{211}^1 + x_{112}^1 + x_{212}^1 + x_{113}^1 + x_{213}^1 \leq \frac{45}{2} \\
& \frac{37}{2} \leq x_{121}^1 + x_{221}^1 + x_{122}^1 + x_{222}^1 + x_{123}^1 + x_{223}^1 \leq \frac{47}{2}, \\
& \frac{27}{2} \leq x_{131}^1 + x_{231}^1 + x_{132}^1 + x_{232}^1 + x_{133}^1 + x_{233}^1 \leq \frac{49}{2}, \\
& \frac{3}{2} \leq x_{141}^1 + x_{241}^1 + x_{142}^1 + x_{242}^1 + x_{143}^1 + x_{243}^1 \leq \frac{7}{2}, \\
& \frac{43}{2} \leq x_{111}^2 + x_{211}^2 + x_{112}^2 + x_{212}^2 + x_{113}^2 + x_{213}^2 \leq \frac{53}{2}, \\
& 17 \leq x_{121}^2 + x_{221}^2 + x_{122}^2 + x_{222}^2 + x_{123}^2 + x_{223}^2 \leq \frac{41}{2}, \\
& 16 \leq x_{131}^2 + x_{231}^2 + x_{132}^2 + x_{232}^2 + x_{133}^2 + x_{233}^2 \leq 20, \\
& \frac{5}{2} \leq x_{141}^2 + x_{241}^2 + x_{142}^2 + x_{242}^2 + x_{143}^2 + x_{243}^2 \leq 5, \\
& \frac{95}{2} \leq x_{111}^1 + x_{121}^1 + x_{131}^1 + x_{141}^1 + x_{211}^1 + x_{221}^1 + x_{231}^1 + x_{241}^1 + x_{111}^2 + x_{121}^2 + x_{131}^2 + x_{141}^2 + x_{211}^2 + x_{221}^2 + x_{231}^2 + x_{241}^2 \leq 52, \\
& 52 \leq x_{112}^1 + x_{122}^1 + x_{132}^1 + x_{142}^1 + x_{212}^1 + x_{222}^1 + x_{232}^1 + x_{242}^1 + x_{112}^2 + x_{122}^2 + x_{132}^2 + x_{142}^2 + x_{212}^2 + x_{222}^2 + x_{232}^2 + x_{242}^2 \leq \frac{115}{2}, \\
& \frac{31}{2} \leq x_{113}^1 + x_{123}^1 + x_{133}^1 + x_{143}^1 + x_{213}^1 + x_{223}^1 + x_{233}^1 + x_{243}^1 + x_{113}^2 + x_{123}^2 + x_{133}^2 + x_{143}^2 + x_{213}^2 + x_{223}^2 + x_{233}^2 + x_{243}^2 \leq 20, \\
& x_{ijk} \geq 0, \forall p, i, j, k
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Bu deterministik problemin her amacı, verilen kısıtlar altında tek tek optimize edildiğinde $f_1^{opt}(x) = [815.450, 960.750]$ ve $f_2^{opt}(x) = [611.625, 747.000]$ elde edilir.

(5.8) üyelik fonksiyonu modelinden, problemin aralıklı üyelik fonksiyonlarını,

$$\mu_1(f_1(x)) = \begin{cases} 1 & f_1(x) \leq 815.450 \\ \frac{960.750 - f_1(x)}{960.750 - 815.450} & 815.450 \leq f_1(x) \end{cases} \text{ and } \mu_2(f_2(x)) = \begin{cases} 1 & f_2(x) \leq 611.625 \\ \frac{747 - f_2(x)}{747 - 611.625} & 611.625 \leq f_2(x) \end{cases}$$

olacak şekilde oluşturabiliriz.

(5.10) bulanık programlama modelinden, aralıklı bulanık programlama modelini aşağıdaki gibi formüle edebiliriz;

$$\begin{aligned}
& (\mu_1(f_1(x)), \mu_2(f_2(x))) \rightarrow \max \\
& \left\{ \begin{array}{l}
\mu_1(f_1(x)) \leq 1; \mu_2(f_2(x)) \leq 1 \\
\frac{45}{2} \leq x_{111}^1 + x_{121}^1 + x_{131}^1 + x_{141}^1 + x_{112}^1 + x_{122}^1 + x_{132}^1 + x_{142}^1 + x_{113}^1 + x_{123}^1 + x_{133}^1 + x_{143}^1 \leq 27, \\
30 \leq x_{211}^1 + x_{221}^1 + x_{231}^1 + x_{241}^1 + x_{212}^1 + x_{222}^1 + x_{232}^1 + x_{242}^1 + x_{213}^1 + x_{223}^1 + x_{233}^1 + x_{243}^1 \leq 36, \\
33 \leq x_{111}^2 + x_{121}^2 + x_{131}^2 + x_{141}^2 + x_{112}^2 + x_{122}^2 + x_{132}^2 + x_{142}^2 + x_{113}^2 + x_{123}^2 + x_{133}^2 + x_{143}^2 \leq 38, \\
\frac{53}{2} \leq x_{211}^2 + x_{221}^2 + x_{231}^2 + x_{241}^2 + x_{212}^2 + x_{222}^2 + x_{232}^2 + x_{242}^2 + x_{213}^2 + x_{223}^2 + x_{233}^2 + x_{243}^2 \leq \frac{63}{2}, \\
15 \leq x_{111}^1 + x_{211}^1 + x_{112}^1 + x_{212}^1 + x_{113}^1 + x_{213}^1 \leq \frac{45}{2} \\
\frac{37}{2} \leq x_{121}^1 + x_{221}^1 + x_{122}^1 + x_{222}^1 + x_{123}^1 + x_{223}^1 \leq \frac{47}{2}, \\
\frac{27}{2} \leq x_{131}^1 + x_{231}^1 + x_{132}^1 + x_{232}^1 + x_{133}^1 + x_{233}^1 \leq \frac{49}{2}, \\
s.t. \left\{ \begin{array}{l}
\frac{3}{2} \leq x_{141}^1 + x_{241}^1 + x_{142}^1 + x_{242}^1 + x_{143}^1 + x_{243}^1 \leq \frac{7}{2}, \\
\frac{43}{2} \leq x_{111}^2 + x_{211}^2 + x_{112}^2 + x_{212}^2 + x_{113}^2 + x_{213}^2 \leq \frac{53}{2}, \\
17 \leq x_{121}^2 + x_{221}^2 + x_{122}^2 + x_{222}^2 + x_{123}^2 + x_{223}^2 \leq \frac{41}{2}, \\
16 \leq x_{131}^2 + x_{231}^2 + x_{132}^2 + x_{232}^2 + x_{133}^2 + x_{233}^2 \leq 20, \\
\frac{5}{2} \leq x_{141}^2 + x_{241}^2 + x_{142}^2 + x_{242}^2 + x_{143}^2 + x_{243}^2 \leq 5, \\
\frac{95}{2} \leq x_{111}^1 + x_{121}^1 + x_{131}^1 + x_{141}^1 + x_{211}^1 + x_{221}^1 + x_{231}^1 + x_{241}^1 + x_{111}^2 + x_{121}^2 + x_{131}^2 + x_{141}^2 + x_{211}^2 + x_{221}^2 + x_{231}^2 + x_{241}^2 \leq 52, \\
52 \leq x_{112}^1 + x_{122}^1 + x_{132}^1 + x_{142}^1 + x_{212}^1 + x_{222}^1 + x_{232}^1 + x_{242}^1 + x_{112}^2 + x_{122}^2 + x_{132}^2 + x_{142}^2 + x_{212}^2 + x_{222}^2 + x_{232}^2 + x_{242}^2 \leq \frac{115}{2}, \\
\frac{31}{2} \leq x_{113}^1 + x_{123}^1 + x_{133}^1 + x_{143}^1 + x_{213}^1 + x_{223}^1 + x_{233}^1 + x_{243}^1 + x_{113}^2 + x_{123}^2 + x_{133}^2 + x_{143}^2 + x_{213}^2 + x_{223}^2 + x_{233}^2 + x_{243}^2 \leq 20, \\
x_{ijk} \geq 0, \forall p, i, j, k
\end{array} \right.
\end{array} \right.
\end{aligned}$$

Bu problem bir aralıklı programlama problemi olduğu için, aralıklı amaç fonksiyonları için $\leq_{LR}$ sıra ilişkisi kullanılarak (5.11) programlama problemi modeline dönüştürülür ve (5.12) eşit ağırlıklandırma modelinden aşağıdaki optimal sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned}
x_{111}^1 &= 13, x_{132}^1 = 13.5, x_{212}^1 = 3, x_{221}^1 = 23.5, x_{242}^1 = 3.5, x_{111}^2 = 11, \\
x_{122}^2 &= 20.5, x_{132}^2 = 5, x_{133}^2 = 4., x_{212}^2 = 1.5, x_{213}^2 = 9, x_{233}^2 = 11, x_{242}^2 = 5.
\end{aligned}$$

$$f_1^{opt} = [682.000, 978.250] \text{ ve } f_2^{opt} = [497.500, 768.000].$$

Son kısımda oluşturulan (5.12) ağırlıklandırma yönteminde amaç fonksiyonlarının ağırlıkları eşit olarak alınmıştır. Bu ağırlık parametreleri karar vericinin tercihi doğrultusunda değiştirilerek farklı alternatif çözümlerde kolayca üretilebilir.

Kundu vd. [97]'de elde edilen sonuçlarla, bu çalışmada önerilen yöntemden elde edilen sonuçların karşılaştırması Çizelge 6.11'de verilmiştir.

Çizelge 6. 11 Karşılaştırmalı sonuçlar

Amaç Fonksiyonları	Kundu et al., [97]	Önerilen yöntemden elde edilen sonuçlar
f_1	[1043.019, 1233.229]	[682.000, 978.250]
f_2	[745.5609, 930.706]	[497.500, 768.000]

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Gerçek dünya problemlerini ifade ederken genel olarak kesinlikten kaçınılır ve çoğu problem modelleri bilgi ya da veri eksikliği nedeniyle belirsizdir. Belirsizliği ifade etmek için literatürde sıklıkla bulanık, stokastik ya da aralıklı problem modelleri kullanılır.

Bu tezde, aralıklı programlama problemlerinin çözümü için bazı çok amaçlı programlama yöntemleri incelenmiş ve bu yöntemler sırasıyla tek ve çok amaçlı aralıklı programlama problemlerine uygulanarak, aralıklı problemlerin Pareto optimal çözümleri elde edilmiştir. Önerilen yöntem, örnek 6.2’de üç boyutlu bulanık çok amaçlı aralıklı programlama problemine uygulanmıştır. Bu problem yapısı klasik çok amaçlı üç boyutlu taşıma problemlerinden daha karmaşıktır ve son bir yıldır farklı yöntemler kullanılarak optimize edilmeye çalışılmaktadır. Kundu vd. tarafından [97]’de verilen bulanık üç boyutlu taşıma problemi modeli, bu çalışmada lineer sıralama yöntemi kullanılarak dengeli üç boyutlu taşıma problemine ve daha sonra en yakın interval yöntemi yardımıyla üç boyutlu çok amaçlı aralıklı programlama problemine dönüştürülmüştür. Böylece, bu tezde önerilen aralıklı bulanık programlama yöntemi kullanılarak problemin Pareto optimal çözümleri elde edilmiştir. Çizelge 6.11’de, Kundu vd.’nin [97]’de elde ettikleri çözümler ile bu tezde önerilen yöntemden elde edilen çözümler karşılaştırılmıştır.

Sonuç olarak; bu tezde önerilen yöntemin çok daha etkin sonuçlar verdiği doğrulanmış ve üç boyutlu taşıma probleminin Pareto optimal çözümü elde edilmiştir.

Üstelik bu tezde önerilen yöntem lineer ya da lineer olmayan farklı programlama problemlerine (bulanık, stokastik vs.), farklı faktörler altında da kolaylıkla uygulanabilir. Bulanık hedef programlama modeli olarak formüle edilebilir.

-
- [1] Ruszczyński, A. P., (2006). Nonlinear optimization (Vol. 13). Princeton university press.
 - [1] Ruszczyński, A. P., (2006). Nonlinear optimization, First Edition, Princeton university press, New Jersey.
 - [2] Griva, I., Nash, S. G., ve Sofer, A., (2009). Linear and nonlinear optimization, Second Edition, Siam, Philadelphia.
 - [3] Kantorovič, L. V. E., (1961). Rachunek ekonomiczny optymalnego ykorzystania zasobów, First Edition, Państwowe Wydawnictwo, Naukowe.
 - [4] Cottle, R. W., (2005). "George B. Dantzig: operations research icon", Operations research, 53(6): 892-898.
 - [5] Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., ve Shetty, C. M., (2013). Nonlinear programming: theory and algorithms, Third Edition, John Wiley ve Sons, New Jersey.
 - [6] Karmarkar, N. (1984, December). "A new polynomial-time algorithm for linear programming", In Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing, April 30-May 2 1984, Washington, D.C.
 - [7] Bertsekas, D. P., (1999). Nonlinear programming, Athena scientific press, Belmont.
 - [8] Kelley, C. T., (1999). Iterative methods for optimization, Second Edition, Siam, Philadelphia.
 - [9] Luenberger, D. G., ve Ye, Y., (2008). Linear and nonlinear programming, Third Edition, Springer Science ve Business Media, New York.
 - [10] Sun, W., ve Yuan, Y. X., (2006). Optimization theory and methods: nonlinear programming, Second Edition, Springer Science ve Business Media, New York.
 - [11] Miettinen, K., (1999). Nonlinear multiobjective optimization, Second Edition, Springer Science ve Business Media, Massachusetts.
 - [12] Hossein Razavi Hajiagha, S., Amoozad Mahdiraji, H., ve Sadat Hashemi, S., (2013). "Multi-objective linear programming with interval coefficients: A fuzzy set based approach", Kybernetes, 42(3): 482-496.
 - [13] Liu, S., ve Lin, Y., (2006). Grey information: theory and practical applications, First Edition, Springer Science ve Business Media, London.
 - [14] Li, Y. P., Huang, G. H., Yang, Z. F., ve Nie, S. L., (2008). "IFMP: interval-fuzzy multistage programming for water resources management under uncertainty", Resources, Conservation and Recycling, 52(5): 800-812.

- [15] Zhao, F., Li, Y. P., ve Huang, G. H., (2013). "A queue-based interval-fuzzy programming approach for electric-power systems planning", *International Journal of Electrical Power ve Energy Systems*, 47: 337-350.
- [16] Dubey, D., Chandra, S., ve Mehra, A., (2012). "Fuzzy linear programming under interval uncertainty based on IFS representation", *Fuzzy Sets and Systems*, 188(1): 68-87.
- [17] Li, W., Huang, G. H., Dong, C., ve Liu, Y., (2013). "An inexact fuzzy programming approach for power coal blending", *Journal of Environmental Informatics*, 21(2): 112-118.
- [18] Miao, D. Y., Huang, W. W., Li, Y. P., ve Yang, Z. F., (2014). "Planning water resources systems under uncertainty using an interval-fuzzy de novo programming method", *J Environ Inform*, 24(1): 11-23.
- [19] Sen, S., ve Pal, B. B., (2015). "Interval Goal Programming Approach to Multiobjective Programming Problems with Fuzzy Data Uncertainty" *Information Systems Design and Intelligent Applications*, 457-467.
- [20] Sen, S., ve Pal, B. B., (2013). "Interval Goal Programming Approach to Multiobjective Fuzzy Goal Programming Problem with Interval Weights", *Procedia Technology*, 10: 587-595.
- [21] Jiuping, X., (2000). "A kind of fuzzy linear programming problems based on interval-valued fuzzy sets", *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 15(1): 65-72.
- [22] Lu, H. W., Huang, G. H., ve He, L., (2010). "Development of an interval-valued fuzzy linear-programming method based on infinite α -cuts for water resources management" *Environmental Modelling ve Software*, 25(3): 354-361.
- [23] T. S., Shih, S., ve Su, S., Ya, (2009). "Fuzzy linear programming based on interval valued fuzzy sets" *International Journal of Fuzzy Sytems*, 15(2): 351-361.
- [24] Ju-Long, D., (1982). "Control problems of grey systems", *Systems ve Control Letters*, 1(5): 288-294.
- [25] Deng, J. L., (1989). "Introduction to grey system theory", *The Journal of grey system*, 1(1): 1-24.
- [26] Lin, Y. H., Lee, P. C., Chang, T. P., ve Ting, H. I., (2008). "Multi-attribute group decision making model under the condition of uncertain information", *Automation in Construction*, 17(6): 792-797.
- [27] Zhang, J., Wu, D., ve Olson, D. L., (2005). "The method of grey related analysis to multiple attribute decision making problems with interval numbers", *Mathematical and computer modelling*, 42(9): 991-998.
- [28] Zadeh, L. A., (1965). "Fuzzy sets", *Information and control*, 8(3): 338-353.

- [29] Bellman, R. E., ve Zadeh, L. A., (1970). "Decision-making in a fuzzy environment", *Management science*, 17(4): B-141.
- [30] Zimmermann, H. J., (1978). "Fuzzy programming and linear programming with several objective functions", *Fuzzy sets and systems*, 1(1): 45-55.
- [31] Zimmermann, H. J., (1983). "Fuzzy mathematical programming", *Computers ve operations research*, 10(4): 291-298.
- [32] Moore, R. E., (2009). *Interval analysis*, Third Edition, Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- [33] Moore, R. E., ve Moore, R. E., (1979). *Methods and applications of interval analysis*, Second Edition, Siam, Philadelphia.
- [34] Ishibuchi, H., ve Tanaka, H., (1990). "Multiobjective programming in optimization of the interval objective function", *European Journal of Operational Research*, 48(2): 219-225.
- [35] Chanas, S., ve Kuchta, D., (1996). "Multiobjective programming in optimization of interval objective functions—a generalized approach", *European Journal of Operational Research*, 94(3): 594-598.
- [36] Urli, B., ve Nadeau, R., (1992). "An interactive method to multiobjective linear programming problems with interval coefficients", *Infor*, 30(2): 127.
- [37] Ida, M., (2003). "Portfolio selection problem with interval coefficients", *Applied Mathematics Letters*, 16(5): 709-713.
- [38] Inuiguchi, M., ve Sakawa, M., (1995). "Minimax regret solution to linear programming problems with an interval objective function", *European Journal of Operational Research*, 86(3): 526-536.
- [39] Chinneck, J. W., ve Ramadan, K., (2000). "Linear programming with interval coefficients", *Journal of the Operational Research Society*, 209-220.
- [40] Sengupta, A., ve Pal, T. K., (2000). "On comparing interval numbers", *European Journal of Operational Research*, 127(1): 28-43.
- [41] Chen, S. H., ve Wu, J., (2004). "Interval optimization of dynamic response for structures with interval parameters", *Computers ve structures*, 82(1): 1-11.
- [42] Das, S. K., Goswami, A., ve Alam, S. S., (1999). "Multiobjective transportation problem with interval cost, source and destination parameters", *European Journal of Operational Research*, 117(1): 100-112.
- [43] Oliveira, C., ve Antunes, C. H., (2007). "Multiple objective linear programming models with interval coefficients—an illustrated overview", *European Journal of Operational Research*, 181(3): 1434-1463.
- [44] Oliveira, C., ve Antunes, C. H., (2007). "Multiple objective linear programming models with interval coefficients—an illustrated overview". *European Journal of Operational Research*, 181(3): 1434-1463.

- [45] Karmakar, S., ve Bhunia, A. K., (2012). "A comparative study of different order relations of intervals", *Reliable Computing*, 16: 38-72.
- [46] Wu, H. C., (2008). "On interval-valued nonlinear programming problems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 338(1): 299-316.
- [47] Wu, H. C., (2007). "The Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function", *European Journal of Operational Research*, 176(1): 46-59.
- [48] Wu, H. C., (2008). "The optimality conditions for optimization problems with fuzzy-valued objective functions", *Optimization*, 57(3): 473-489.
- [49] Wu, H. C., (2009). "The optimality conditions for optimization problems with convex constraints and multiple fuzzy-valued objective functions", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 8(3): 295-321.
- [50] Hladík, M., (2011). "Optimal value bounds in nonlinear programming with interval data", *Top*, 19(1): 93-106.
- [51] Karmakar, S., ve Bhunia, A. K., (2012). "A comparative study of different order relations of intervals", *Reliable Computing*, 16: 38-72.
- [52] Karmakar, S., ve Bhunia, A. K., (2013). "Uncertain constrained optimization by interval-oriented algorithm", *Journal of the Operational Research Society*, 65(1): 73-87.
- [53] Hladík, M., (2012). "Interval linear programming: A survey. Linear programming-new frontiers in theory and applications", 85-120.
- [54] Hladík, M., (2014). "On approximation of the best case optimal value in interval linear programming", *Optimization Letters*, 8(7): 1985-1997.
- [55] Hladík, M., (2015). "AE solutions and AE solvability to general interval linear systems", *Linear Algebra and its Applications*, 465: 221-238.
- [56] Rehana, S., ve Mujumdar, P. P., (2009). "An imprecise fuzzy risk approach for water quality management of a river system", *Journal of environmental management*, 90(11): 3653-3664.
- [57] Karmakar, S., ve Mujumdar, P. P., (2006). "Grey fuzzy optimization model for water quality management of a river system", *Advances in Water Resources*, 29(7): 1088-1105.
- [58] Mujumdar, P. P., ve Karmakar, S., (2008). "Grey fuzzy multi-objective optimization", In *Fuzzy Multi-Criteria Decision Making*, 453-482.
- [59] Gale, D., Kuhn, H. W., ve Tucker, A. W., (1951). "Linear programming and the theory of games", *Activity analysis of production and allocation*, 13: 317-335.
- [60] Nishizaki, I., ve Sakawa, M., (2000). "Solutions based on fuzzy goals in fuzzy linear programming games", *Fuzzy Sets and Systems*, 115(1): 105-119.

- [61] Tiryaki F. (1993). Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Problemi İçin Çözüm Önerileri. Ph.D. thesis, Yıldız Technical University, Institution of Science, İstanbul.
- [62] Gass, S., ve Saaty, T., (1955). "The computational algorithm for the parametric objective function", Naval research logistics quarterly, 2(1-2): 39-45.
- [63] Shaocheng, T., (1994). "Interval number and fuzzy number linear programmings", Fuzzy sets and systems, 66(3), 301-306.
- [64] Orlovsky, S. A., (1978). "Decision-making with a fuzzy preference relation", Fuzzy sets and systems, 1(3): 155-167.
- [65] Yager, R. R., (1979). "On the measure of fuzziness and negation part I: membership in the unit interval", 221-229.
- [66] Chanas, S., (1983). "The use of parametric programming in fuzzy linear programming", Fuzzy Sets and Systems, 11(1): 229-241.
- [67] Rommelfanger, H., Hanuscheck, R., ve Wolf, J., (1989). "Linear programming with fuzzy objectives", Fuzzy sets and systems, 29(1): 31-48.
- [68] Rommelfanger, H., (1996). "Fuzzy linear programming and applications", European journal of operational research, 92(3): 512-527.
- [69] El-Wahed, W. F. A., ve Lee, S. M., (2006). "Interactive fuzzy goal programming for multi-objective transportation problems", Omega, 34(2): 158-166.
- [70] Verdegay, J. L., (1984). "A dual approach to solve the fuzzy linear programming problem", Fuzzy sets and systems, 14(2): 131-141.
- [71] Fedrizzi, M., Kacprzyk, J., ve Verdegay, J. L., (1991). A survey of fuzzy optimization and mathematical programming, In Interactive fuzzy optimization, Springer Berlin Heidelberg, Berlin.
- [72] Werners, B., (1987). "An interactive fuzzy programming system", Fuzzy Sets and Systems, 23(1): 131-147.
- [73] Kahraman, C., (2008). Fuzzy multi-criteria decision making: theory and applications with recent developments, First Edition, Springer Science and Business Media, Berlin.
- [74] Huang, G., Baetz, B. W., ve Patry, G. G., (1992). "A grey linear programming approach for municipal solid waste management planning under uncertainty", Civil Engineering Systems, 9(4): 319-335.
- [75] Levin, H. S., ve Grossman, R. G., (1978). "Behavioral sequelae of closed head injury: a quantitative study", Archives of Neurology, 35(11): 720-727.
- [76] Mahato, S. K., ve Bhunia, A. K., (2006). "Interval-arithmetic-oriented interval computing technique for global optimization", Applied Mathematics Research eXpress, 2006, 69642.

- [77] Guzel, N., Emiroglu, Y., Tapci, F., Guler, C., ve Sivri, M., (2012). "A solution proposal to the interval fractional transportation problem", *Applied Mathematics and Information Sciences*, 6(3): 567-571.
- [78] Dalman, H., Köçken, H. G., ve Sivri, M., (2013). "A Solution Proposal to Indefinite Quadratic Interval Transportation Problem", *New Trends in Mathematical Sciences*, 1(2): 07-12.
- [79] Sivri, M., Emiroglu, I., Guler, C., ve Tasci, F., (2011). "A solution proposal to the transportation problem with the linear fractional objective function", In *Modeling, Simulation and Applied Optimization (ICMSAO)*, 2011 4th International Conference on IEEE, 19-21 April 2011, Kuala Lumpur.
- [80] Jiang, C., Zhang, Z. G., Zhang, Q. F., Han, X., Xie, H. C., ve Liu, J., (2014). "A new nonlinear interval programming method for uncertain problems with dependent interval variables", *European Journal of Operational Research*, 238(1): 245-253.
- [81] Jiang, C., Han, X., ve Li, D., (2012). "A new interval comparison relation and application in interval number programming for uncertain problems". *Computers Materials and Continua*, 27(3): 275.
- [82] Jiang, C., Han, X., Liu, G. R., ve Liu, G. P. (2008). "A nonlinear interval number programming method for uncertain optimization problems", *European Journal of Operational Research*, 188(1): 1-13.
- [83] Bhurjee, A. K., ve Panda, G., (2012). "Efficient solution of interval optimization problem", *Mathematical Methods of Operations Research*, 76(3): 273-288.
- [84] Li, F., Luo, Z., VE Sun, G., (2011). "Reliability-based multiobjective design optimization under interval uncertainty", *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 74(1): 39.
- [85] Nikoo, M. R., Kerachian, R., ve Karimi, A., (2012). "A nonlinear interval model for water and waste load allocation in river basins", *Water resources management*, 26(10), 2911-2926.
- [86] Liu, Y. J., Zhang, W. G., ve Zhang, P., (2013). "A multi-period portfolio selection optimization model by using interval analysis", *Economic Modelling*, 33: 113-119.
- [87] Fujita, K., ve Takewaki, I. (2011). "An efficient methodology for robustness evaluation by advanced interval analysis using updated second-order Taylor series expansion" *Engineering Structures*, 33(12): 3299-3310.
- [88] Allison, L., (2003). Longest biased interval and longest non-negative sum interval. *Bioinformatics*, 19(10): 1294-1295.
- [89] Srivastava, A. K., ve Nema, A. K., (2010). "Fuzzy parametric programming model for integrated solid waste management under uncertainty", *Journal of Environmental Engineering*, 137(1): 69-83.

- [90] Sun, W., Huang, G. H., Lv, Y., ve Li, G., (2012). "Waste management under multiple complexities: Inexact piecewise-linearization-based fuzzy flexible programming" *Waste management*, 32(6): 1244-1257.
- [91] Liu, F., Zhang, W. G., ve Fu, J. H., (2012). "A new method of obtaining the priority weights from an interval fuzzy preference relation", *Information Sciences*, 185(1): 32-42.
- [92] Chen, S., Liu, J., Wang, H., ve Augusto, J. C., (2013). "Ordering based decision making—a survey", *Information Fusion*, 14(4): 521-531.
- [93] Dou, Y., Zhang, P., Jiang, J., Yang, K., ve Chen, Y., (2014). Comparisons of Hybrid Multi-Objective Programming Algorithms with Grey Target and PCA for Weapon System Portfolio Selection. *Appl. Math*, 8(3): 1389-1399.
- [94] Ehrgott, M., (2006). *Multicriteria optimization*, Second Edition, Springer Berlin Heidelberg, New York.
- [95] Yu, P. L., ve Zeleny, M., (1973). "On some linear multi-parametric programs", Center for System Science, University of Rochester, Rochester.
- [96] Dalman, H., Güzel, N., ve Sivri, M., (2015). "A Fuzzy Set-Based Approach to Multi-objective Multi-item Solid Transportation Problem Under Uncertainty", *Int. J. Fuzzy Systems (Baskıda)*.
- [97] Kundu, P., Kar, S., ve Maiti, M., (2013). "Multi-objective multi-item solid transportation problem in fuzzy environment", *Applied Mathematical Modelling*, 37(4): 2028-2038.
- [98] Liou, T. S., ve Wang, M. J. J., (1992). "Ranking fuzzy numbers with integral value", *Fuzzy sets and systems*, 50(3): 247-255.
- [99] Grzegorzewski, P. (2002). "Nearest interval approximation of a fuzzy number", *Fuzzy Sets and systems*, 130(3): 321-330.
- [100] Kaufmann, A., ve Gupta, M. M. (1988). *Fuzzy mathematical models in engineering and management science*, Elsevier Science Inc., North-Holland, Amsterdam.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hasan DALMAN
Doğum Tarihi ve Yeri : 1984/ Eynesil
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : hsandalman@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik	Atatürk Ünivesitesi	2005

YAYINLARI

Makale

1. Dalman, H., Güzel, N., & Sivri, M. (2015). A Fuzzy Set-Based Approach to Multi-objective Multi-item Solid Transportation Problem Under Uncertainty. *Int. J. Fuzzy Syst.* 40815-81. (DOI 10.1007/s40815-015-0081-9).
2. Dalman, H., Köçken, H. G., & Sivri, M. (2013). A Solution Proposal to Indefinite Quadratic Interval Transportation Problem. *New Trends in Mathematical Sciences*, 1(2), 07-12.