

2-Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopisi

Kadir Emir

DOKTORA TEZİ

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Ağustos 2015

Homotopy of 2-Crossed Module Maps

Kadir Emir

DOCTORAL DISSERTATION

Department of Mathematics and Computer Science

August 2015

2-Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopisi

Kadir Emir

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. İlker AKÇA

Ağustos 2015

ONAY

Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı doktora öğrencisi Kadir Emir’ in DOKTORA TEZİ olarak hazırladığı “**2-Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopisi**” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek oy birliğiyle kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. İlker AKÇA

İkinci Danışman : –

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Doç. Dr. İlker AKÇA

Üye : Prof. Dr. Zekeriya ARVASI

Üye : Prof. Dr. Erdal ULUALAN

Üye : Doç. Dr. Enver Önder USLU

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tufan Sait KUZPINARI

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet ERŞAHAN

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. İ. İlker AKÇA danışmanlığında hazırlamış olduğum "2-Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopisi" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaparak kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

27.08.2015

Kadir Emir

ÖZET

Bu tezde öncelikle 2-çaprazlanmış modül morfizmlerinin (noktasal) homotopileri üzerinde durularak homotopi kavramı tanımlanacaktır. Ardından temeli model kategori yapısına dayanan sebepler dolayısıyla belirli kısıtlamalar kullanılarak bu homotopiler üzerinde bir denklik bağıntısı oluşturulacak, sonrasında da bu denklik bağıntısı yardımıyla bir gruboid yapısı elde edilecektir.

Tezin geri kalan kısmında ise yukarıda bahsedilen mevcut problem bir boyut ileri taşınarak, 2-çaprazlanmış modül homomorfizmleri için 2-homotopilerin tanımlanması ve bu 2-homotopiler yardımıyla da bir 2-gruboid yapısı elde edilmesi üzerinde durulacaktır.

Tüm bunların tanımlanabilmesi ve ispatların daha kolay işlemsiz bir şekilde tamamlanabilmesi için ise öncelikle herhangi bir 2-çaprazlanmış modül üzerinde 1-, 2- ve 3-simpleks olarak adlandırılacak olan yeni cebirsel yapılara ve bu yapıların geometrik gösterimlerine ihtiyaç duyulacaktır. Diğer yandan tabi ki 2-çaprazlanmış modülün bir alt basamağı olan çaprazlanmış modüller için de tüm mevcut problem öncelikli olarak ele alınacak ve çözüme kavuşturulacaktır. Ayrıca homotopi için "noktasal" teriminin nereden geldiği de çaprazlanmış modül morfizmleri için homotopi tanımı verildikten sonra detaylı olarak açıklanacaktır.

Anahtar Kelimeler: Simplisel değişmeli cebir, 2-çaprazlanmış modül, kuadratik derivasyon, homotopi, gruboid.

SUMMARY

We address the (pointed) homotopy theory of 2-crossed modules of commutative algebras, which are equivalent to simplicial commutative algebras with Moore complex of length two. In particular, we construct for maps of 2-crossed modules a homotopy relation, and prove that it yields an equivalence relation in very unrestricted cases (freeness up to order one of the domain 2-crossed module). This latter condition strictly includes the case when the domain is cofibrant. Furthermore, we prove that this notion of homotopy yields a groupoid with objects being the 2-crossed module maps between two fixed 2-crossed modules (with free up to order one domain), the morphisms being the homotopies between 2-crossed module maps.

Then, as the final part of the thesis, we address the 2-homotopy theory of 2-crossed modules of commutative algebras. In particular, we define the concept of 2-fold homotopy between a pair of 1-fold homotopies connecting 2-crossed module maps $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$. We also prove that if the domain 2-crossed module $\mathcal{A}$ is free up to order one then we have a 2-groupoid of 2-crossed module maps $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ and their homotopies and 2-fold homotopies.

Keywords: Simplicial commutative algebra, 2-crossed module of commutative algebras, quadratic derivation, homotopy, groupoid.

TEŞEKKÜR / ACKNOWLEDGEMENTS

Öncelikle beni bu çalışmaya sevk eden, ardından da tüm doktora öğrenimim ve çalışmalarım boyunca her türlü emeğini üzerimden hiç eksik etmeyen, dahası karşılaştığım tüm zorluklarda bana her daim yol gösterici olan danışman hocam **Dr. İlker Akça**'ya sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

I will forever be thankful to my Erasmus supervisor **Dr. João Faria Martins** who has kindly contributed not only dearly to the supervision of this thesis, but his invaluable support has also assisted me dearly in shaping my career goals. Being perfectly aware that I have a lot to learn from, I would like to express my deepest gratitude to João for bearing with me throughout my studies at CMA. Obrigado por tudo!

Naturally, my special thanks goes to **Centro de Matemática e Aplicações** of **FCT, Portugal** for having accepted me as a collaborating member for one year at their research center during which I also had the opportunity to attend some prominent conferences and seminars and meet outstanding mathy people from all around the world. Finally, I am truly grateful to **Dr. Ronnie Brown** for his kind review and invaluable suggestions about this study. It has also been a unique pleasure to meet with him personally in Aveiro.

Bana her zaman hocadan çok bir abi gibi olan Dr. Enver Önder Uslu'ya; iyi gün kötü gün ayırt etmeksizin hep yanımda ve bana destek olan, başta oda arkadaşım Dr. Temel Ermiş olmak üzere tüm değerli ve gerçek dostlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca: tabi ki, bana her zaman güvenerek beni bugünlere taşıyan, haklarını bir ömür boyu asla ödeyemeyeceğim annem, babam, kardeşim ve artık ailemden biri olan Hilal ablam ve eşi Ali abiye;

Sahip olduğu tecrübesi, dünya görüşü ve engin birikimiyle ufkumu genişletip beni yeni dünyalara sürükleyen, varlığını her daim arkamda hissettiğim, hayattaki idolüm dayım Dr. İsmail Yılmaz'a;

Son olarak da, burada ismi açıkça anılmayıp da aslında kendini bilen herkese;

"Siz olmadan bunların hiçbiri olmazdı; iyi ki varsınız..."

İÇİNDEKİLER

ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR / ACKNOWLEDGEMENTS	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1 Giriş	6
2.2 Çaprazlanmış Modül	6
2.3 2-Çaprazlanmış Modül	8
2.4 Simplisel Cebirler	10
2.5 Homotopi	11
2.5.1 Zincir kompleks homotopisi	13
3. 1-, 2- ve 3- SİMPLEKSLER	22
3.1 Giriş	22
3.2 0- Simpleksler	22
3.3 Yarı-direkt Çarpım	23
3.4 1- ve 2- Simpleksler	24
3.5 3- Simpleksler	30
3.5.1 Bazı yardımcı cebir etkileri	30
3.5.2 3- Simpleksler	36

4. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL MORFİZMLERİNİN HOMOTOPİSİ ve GRUBOİD	40
4.1 Giriş	40
4.2 Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopisi	40
4.3 Gruboid	43
5. 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL MORFİZMLERİNİN HOMOTOPİSİ ve GRUBOİD	47
5.1 Giriş	47
5.2 2-Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopisi	47
5.3 Gruboid	53
5.3.1 XMod homotopisi - 2XMod homotopisi karşılaştırması	54
5.3.2 Anahtar fikir	55
5.3.3 Homotopilerin kompozisyonu	56
5.3.4 Ters kuadratik derivasyon	62
5.3.5 Kompozisyonunun asosyatifliği	64
6. 2-HOMOTOPI ve 2-GRUBOİD	70
6.1 Giriş	70
6.2 2-Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin 2-Homotopisi	70
6.2.1 Bazı cebirsel özellikleri	73
6.3 Dikey Kompozisyon	75
6.4 Sesquigruboid	78
6.4.1 Sağ-Whiskering	79
6.4.2 Sol-Whiskering	86
6.5 2-Gruboid	88

7. SONUÇ ve ÖNERİLER**90****KAYNAKLAR DİZİNİ****93**

1. GİRİŞ

$G = (\partial: E \rightarrow G, \blacktriangleright)$ çaprazlanmış modül yapısı [8] gruplar üzerinde, bir $\partial: E \rightarrow G$ grup homomorfizmi ve G nin E üzerine bir $\blacktriangleright$ etkisi ile birlikte her $e, f \in E$ ve $g \in G$ için:

$$\mathbf{1. \text{Peiffer-Whitehead şartı:}} \partial(g \blacktriangleright e) = g \partial(e) g^{-1},$$

$$\mathbf{2. \text{Peiffer-Whitehead şartı:}} \partial(e) \blacktriangleright f = e f e^{-1}$$

şartları ile birlikte tanımlıdır. Bu şartlar literatürde genel olarak sadece Peiffer şartı olarak adlandırılmasına karşın; Ronald Brown'un bu tez hakkındaki yorumundan, bu iki farklı kişinin, yukarıda bahsedilen şartlardan farklı kaynaklarda bahsettiği ve zamanın ağır koşulları (savaş, teknoloji ve iletişim) da göz önüne alındığında muhtemelen birbirinden habersiz olduğu öğrenilmiştir. Dolayısıyla bu sebeplerden dolayı bu şartlara Peiffer-Whitehead şartları denmesi daha doğru olacaktır.

Çaprazlanmış modül yapısı gruplar üzerinde ilk kez Whitehead tarafından homotopi 2-tiplerin cebirsel bir modellemesi olarak [32, 33] de tanımlanmıştır. Öyle ki [5, 25] grup çaprazlanmış modülleri üzerindeki model kategorisi [12, 6] için homotopi kategorisi, noktasal 2-tipler üzerindeki model kategorisi [17] için homotopi kategoriye denktir. Burada noktasal 2-tip olarak adlandırılan, $i \geq 3$ için $\pi_i(X) = 0$ olacak şekildeki yol bağlantılı X noktasal uzayıdır.

$G = (G_n, d_n^i, s_n^i)$ ile gösterilen simplisel gruplar, noktasal (pointed) homotopi tipleri için model olarak bilinmektedir [30]. Bu yapıda $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere tüm G_n ler birer grup, ayrıca $d_n^i: G_n \rightarrow G_{n-1}$, $i = 0, \dots, n$, ve $s_n^i: G_n \rightarrow G_{n+1}$, $i = 0, \dots, n$, birer grup homomorfizmi olmak üzere simplisel özdeşlikler olarak adlandırılan birtakım özellikler geçerlidir. Mevcut bu yapı üzerinden, $N(G)_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \ker(\partial_n^i) \subset G_n$ grubu ve ayrıca $d_n: N(G)_n \rightarrow N(G)_{n-1}$ homomorfizmi de $d_n^n: G_n \rightarrow G_{(n-1)}$ in kısıtlanması olarak alınması yardımıyla elde edilen:

$$N(G) = \left(\dots \xrightarrow{d_{(n+1)}} N(G)_n \xrightarrow{d_n} N(G)_{(n-1)} \xrightarrow{d_{(n-1)}} \dots \xrightarrow{d_3} N(G)_2 \xrightarrow{d_2} N(G)_1 \xrightarrow{d_1} G_0 \right)$$

normal zincir kompleksi, G simplisel grubunun Moore kompleksi olarak adlandırılır. Ayrıca her $i > n$ için $N(G)_i$ nin tek elemanlı aşikar grup olması durumunda özel olarak bu simplisel grubun Moore kompleksin uzunluğu n olarak adlandırılır.

Bilindiği üzere çaprazlanmış modüller kategorisi, Moore kompleksinin uzunluğu 1 olan simplisel gruplar kategorisine denktir [13]. Yine bu ilişki sebebiyle de çaprazlanmış modül kavramı, simplisel homotopi teori içerisinde doğal olarak ortaya çıkmaktadır. Benzer durum gruboid yapısı için de söz konusudur [27]. $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ arasında tanımlı çaprazlanmış modül morfizmleri arasındaki homotop olma bağıntısı yine ilk olarak Whitehead tarafından [33] de tanımlanmıştır. Diğer yandan [7, 8] de görüleceği üzere; homotopi kavramı çaprazlanmış modüller üzerindeki kapalı monoidal kategori yapısı ve interval obje çerçevesinde irdelenmiştir. Çaprazlanmış komplekslerin homotopisi ayrıca Huebschmann tarafından da çalışılmış ve biraz daha genişletilmiştir [22].

$\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ arasındaki çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotop olma bağıntısı:

- $\mathcal{G}'$ üzerindeki path obje yardımıyla, ya da
- $\mathcal{G}$ üzerindeki silindir obje yardımıyla

birbirine denk iki farklı yoldan tanımlanabilir. Elde edilen bu bağıntı da objeleri $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ arasındaki çaprazlanmış modül morfizmleri, morfizmleri de bunlar arasındaki homotopiler olan bir gruboid yapısı elde edilmesini sağlar. Burada önemli olan husus, homotop olma bağıntısının bir denklik bağıntısı olması gerektiğidir. Mevcut homotopi tanımı incelendiğinde, çaprazlanmış modüller için genel olarak $\mathcal{G}$ ya da $\mathcal{G}'$ için herhangi bir kısıtlamaya gerek kalmaksızın $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ arasında tanımlı homotop olma bağıntısının her zaman bir denklik bağıntısı olduğu görülmektedir.

Fakat model kategori çerçevesinden bakılacak olursa; $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ arasında tanımlı morfizmler üzerindeki homotop olma bağıntısının bir denklik bağıntısı olması için $\mathcal{G}$ nin cofibrant obje ve $\mathcal{G}'$ nin de fibrant obje olması gerekmektedir [15]. Çaprazlanmış modüller kategorisi üzerinde tanımlı bilinen model kategori yapısı [12] ele alındığında, burada her keyfi obje bir fibrant obje olmasına karşın, $\mathcal{G} = (\partial: E \rightarrow G, \blacktriangleright)$ nin cofibrant olması için gerek ve yeter şart G nin bir serbest grup olmasıdır [28]. Bu sonucun elde edilmesinde ise, simplisel kümeler üzerindeki model kategori yapısı ve çaprazlanmış modüllerin simplisel yapı ile olan ilişkisi kullanılmıştır.

2-çaprazlanmış modül yapısı (gruplar üzerinde) ilk kez Conduché tarafından [13] de tanımlanmıştır. 2-çaprazlanmış modül, $\mathcal{A} = (L \xrightarrow{\delta} E \xrightarrow{\partial} G, \blacktriangleright, \{, \})$ şeklinde G -modüllerin bir normal

zincir kompleksi aracılığıyla tanımlıdır. Burada önemli olan $(\partial: E \rightarrow G, \blacktriangleright)$ kısmının sadece bir önçaprazlanmış modül olmasıdır [8]. 2-çarpazlanmış modül yapısına ait bir diğer detay olarak belirli ek şartlara sahip bir $(e, f) \in E \times E \mapsto \langle e, f \rangle \doteq efe^{-1} \partial(e) \blacktriangleright f^{-1} \in E$, şeklinde ve kısaca Peiffer lifting olarak adlandırılan $\{, \}: E \times E \rightarrow L$ bilineer dönüşümün varlığıdır.

Conduché [13] deki çalışmasında, 2-çaprazlanmış modüller kategorisinin Moore kompleksi-nin uzunluğu iki olan simplisel gruplar kategorisine denk olduğunu söylemiş ve ispatlamıştır. Burada yine çaprazlanmış modüllerde olduğuna benzer şekilde, noktasal 3-tiplerle olan denklik söz konusudur. Bu sonuç ayrıca [18] de, 2-çaprazlanmış modüllerin homotop olma bağıntısı verildikten sonra direkt olarak ispatlanmıştır. Dahası, yine aynı çalışmada temel 2-çaprazlanmış modüller CW-komplekslerle ilişkilendirilerek, bu ilişki yardımıyla 2-çaprazlanmış modül morfizmleri ve homotopilerine geometrik bir yaklaşım getirilmiştir.

Homotopi 3-tipler için bir başka önemli cebirsel model ise çaprazlanmış kareler olup bilindiği üzere bu yapı da cat^2 -gruplara denktir. Ayrıca yine bu yapı bisimplisel gruplarla da yakın bir ilişki içerisinde. Homotopi 3-tipe bir model olarak, çaprazlanmış karelerin en önemli avantajı, noktasal (pointed) uzaylar üzerinde tanımlı özel bir kategoriden, çaprazlanmış karelerin kategorisine bir temel çaprazlanmış kare fonktörünün tanımlı olmasıdır. Bu fonktor ayrıca belli birtakım özelliklerle birlikte co-limitleri de korumaktadır [10]. Yine bu fonktor yardımıyla elde edilen temel çaprazlanmış kare, homotopi grupları yardımı haricinde Whitehead çarpımları yardımıyla da tanımlanabilmektedir.

Gruplar üzerinde, $\mathcal{A} = (L \xrightarrow{\delta} E \xrightarrow{\partial} G, \blacktriangleright, \{, \})$ şeklinde bir 2-çaprazlanmış modül, G nin serbest grup olması durumunda serbest₁ 2-çaprazlanmış modül olarak; daha özel olarak, $(\partial: E \rightarrow G, \blacktriangleright)$ nin bir serbest ön-çaprazlanmış modül olması durumunda ise serbest₂ 2-çaprazlanmış modül olarak adlandırılır [20, 18]. 2-çaprazlanmış modüllerin [11, 12, 20, 24] de tanımlı model kategori yapısında, herhangi bir $(L \xrightarrow{\delta} E \xrightarrow{\partial} G, \blacktriangleright, \{, \})$ 2-çaprazlanmış modülünün cofibrant obje olması ancak ve ancak serbest₂ 2-çaprazlanmış modül olması durumunda mümkündür (burada ayrıca herhangi bir 2-çaprazlanmış modül fibrant objedir). Fakat ilginç bir şekilde, [20, 19] deki çalışmada $\mathcal{A}$ sadece serbest₁ 2-çaprazlanmış modül olarak alınıp, dolayısıyla (bilinen) cofibrant obje olmasına gerek duyulmayarak; bu durum yardımıyla da $\mathcal{A}'$ yine herhangi bir 2-çaprazlanmış modül olmak üzere $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ arasındaki morfizmler ve bunların homotopileri yardımıyla bir gruboid

yapısı tanımlanmıştır (buradaki gruboid yapısında path objelerden yararlanılmıştır). Ardından da bu gruboid yapısı bir boyut ileri taşınarak 2-fold homotopiler yardımıyla bir 2-gruboid yapısı tanımlanmıştır. Burada $\mathcal{A}$ nın serbest₁ olarak kısıtlanmasının önemi kompozisyon ve bununla ilişkili diğer özelliklerin tanımlanabilmesidir. Tüm bunlar [20] de grup hali için açıkça ispatlanmıştır.

Bu tezdeki tüm cebirler değişmeli olup, sabit bir κ halkası üzerinde tanımlı olacaktır. Cebirler üzerindeki 2-çaprazlanmış modül [14, 29] kavramı, L, E ve R birer (değişmeli) cebir olmak üzere, etkinin otomorfizm grupları yerine; R bir cebir ve $a, b \in R$ için $f(ab) = f(a)b$ özelliğindeki $f: R \rightarrow R$ lineer dönüşümü yardımıyla tanımlı çarpanların tanımı göz önüne alınarak gruplardaki şekline paralel özellikler yardımıyla tanımlı olup, tezde herhangi bir 2-çaprazlanmış modül $\mathcal{A} = (L \xrightarrow{\partial_2} E \xrightarrow{\partial_1} R, \blacktriangleright, \{, \})$ şeklinde gösterilecektir. Yine gruplardakine benzer olarak, değişmeli cebirler için 2-çaprazlanmış modüller kategorisinin, Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan simplisel (değişmeli) cebirler kategorisine denk olduğu benzer fonktörler yardımıyla [1, 21, 29, 3] de görülmektedir.

Tezde öncelikle değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modül hali ele alınacak olup, herhangi bir kısıtlamaya gerek duyulmaksızın, $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}'$ birer genel çaprazlanmış modül olmak üzere $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ şeklindeki çaprazlanmış modül morfizmleri ve bu morfizmler arasında tanımlanacak olan homotopi yardımıyla bir gruboid yapısı elde edilecektir.

Ardından değişmeli cebirler için 2-çaprazlanmış modül yapısına geçildiğinde, öncelikle herhangi iki keyfi $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 2-çaprazlanmış modül morfizmleri üzerindeki homotop olma bağıntısı bir denklik bağıntısı olamayacağından dolayı, $\mathcal{A}$ nın serbest₁ 2-çaprazlanmış modül olarak sabitlenmesi yoluna gidilecektir. Bu özel durum ise [15] de bahsedilen model kategori yapısından daha az kısıtlayıcı ve daha genel bir durum olacaktır. Çünkü orada $\mathcal{A}$ nın cofibrant obje olması serbest₂ olmasını gerektirmektedir.

Dolayısıyla da bu tezde üzerinde durulacak olan serbest₁ 2-çaprazlanmış modül yapısı da muhtemelen henüz keşfedilmemiş ve üzerinde durulmamış farklı bir model kategori yapısındaki cofibrant objeye karşılık gelecektir. Önceki açıklamalardan anlaşılacağı üzere benzer ve bilinenen farklı bir durum çaprazlanmış modüller için de ortaya çıkacak olup gruboid yapısı ve denklik bağıntısında kullanılacak bu objelerin model kategori yapısı ile ilişkisinin ortaya çıkarılması bir

başka çalışmaya bırakılacaktır.

Homotopi bağıntısının bir denklik bağıntısı olabilmesi noktasında karşılaşılan problemin bu yeni fikir yardımıyla aşılmasından sonra ise belirli işlemlerin yardımıyla bir gruboid yapısı tanımlanacaktır. Ardından da 2-çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopileri arasında tanımlanacak olan 2-homotopi yardımıyla da özel bir 2-kategori yapısı olan 2-gruboid yapısı tanımlanacaktır. Burada interchange law koşulunun gerekli olmadığı sesquigruboid [31] yapısının elde edilmesi, sonuca ulaşmada bir ara basamak olarak kullanılacaktır.

Tezin büyük kısmını oluşturacak esas iki büyük problemten ilki 2-çaprazlanmış modüller üzerinde tanımlanan homotopilerin (benzer şekilde 2-homotopilerin) kompozisyonunu tanımlamak ve bir diğeri ise homotopilerin kompozisyon işleminin asosyatifliğini göstermek olacaktır ki bu problemlerin çözümünde ileri derecede teknik ve geometrik ispatlara gerek duyulacaktır. Bu noktada da tezin ilk bölümündeki 1-, 2- ve 3- simpleks ya da bir diğer adla doğru, üçgen ve tetrahedron uzayları olarak adlandırabilecek olan yeni cebirsel yapılar önem kazanacak ve büyük rol oynayacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Giriş

Bu bölümde tez için gerekli olan temel kavramlar tanıtılacaktır. Bu amaçla da özellikle değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül, 2-çaprazlanmış modül yapıları ve genel anlamda homotopi gibi temel kavramlar ele alınacaktır.

2.2 Çaprazlanmış Modül

Gruplar üzerinde çaprazlanmış modül ilk olarak Whitehead tarafından [32, 33] de homotopi 2-tipler için bir cebirsel model olarak tanımlanmıştır. Ardından Conduche [13] yine gruplar için homotopi 3-tiplere bir model olarak 2-çaprazlanmış modül yapısını oluşturmuştur. Değişmeli cebirler üzerinde çaprazlanmış modül kavramı ise ilk kez Porter [29] ve 2-çaprazlanmış modül ise Doncel, Grandjean, Vale [14] tarafından tanımlanmıştır.

Aşağıda bu yapılar tanıtılacaktır. Fakat önce, bu tanımlar için gerekli olan, değişmeli cebirler için **etki** tanımı verilecektir:

Tanım 2.1 κ bir değişmeli halka, M and R birer (değişmeli) κ -cebir olmak üzere,

$$(r, m) \in R \times M \mapsto r \blacktriangleright m \in M$$

şeklinde tanımlı κ -bilineer dönüşümü (her $m, m' \in M$ ve $r, r' \in R$ için):

$$\mathbf{A1.} \quad r \blacktriangleright (mm') = (r \blacktriangleright m)m' = m(r \blacktriangleright m'),$$

$$\mathbf{A2.} \quad (rr') \blacktriangleright m = r \blacktriangleright (r' \blacktriangleright m)$$

şartlarını sağlıyorsa, R nin M üzerine bir sol etkisi olarak adlandırılır. (R nin M üzerinde sağ etkisi de yine benzer şekilde tanımlanır.)

Not 2.2 Tezin bundan sonraki kısmında R değişmeli κ -cebirinden çoğu zaman kısaca R "cebiri" olarak bahsedilecektir.

Tanım 2.3 E ve R birer değişmeli κ -cebir ve $\partial: E \rightarrow R$ bir κ -cebir morfizmi olmak üzere, R nin E üzerine $\blacktriangleright$ etkisi ile birlikte (her $e, e' \in E$ ve $r \in R$ için),

$$\text{XM1)} \quad \partial(r \blacktriangleright e) = r\partial(e)$$

şartı sağlanıyorsa (E, R, ∂) bir **önçaprazlanmış modül (Pre-XMod)**, buna ek olarak,

$$\text{XM2)} \quad \partial(e) \blacktriangleright e' = ee', \text{ her } e, e' \in E$$

şartı da sağlanıyorsa (E, R, ∂) bir **çaprazlanmış modül (XMod)** olarak adlandırılır.

Bu iki şart, tezin giriş kısmında da bahsedildiği gibi Peiffer-Whitehead şartları olarak adlandırılmaktadır.

Örnek 2.1 R herhangi bir cebir ve $E \leq R$ yani E de R nin bir ideali olsun. Bu durumda $i: E \rightarrow R$ içine dönüşümü,

$$(r, e) \in R \times E \longmapsto r \blacktriangleright e = re \in E$$

etkisi ile birlikte, (E, R, i) şeklinde bir çaprazlanmış modül tanımlar.

Örnek 2.2 E ve R birer κ -cebir olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} 0: & E & \longrightarrow R \\ & e & \longmapsto 0_R \end{array}$$

morfizmi ile birlikte $(E, R, 0)$ üçlüsü, etkiden bağımsız olarak bir çaprazlanmış modül tanımlar.

Tanım 2.4 (E, R, ∂) ve (E', R', ∂') birer çaprazlanmış modül olsun. $f_1: E \rightarrow E'$ ve $f_0: R \rightarrow R'$ cebir morfizmleri için aşağıdaki diyagram değişmeli

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\partial} & R \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_0 \\ E' & \xrightarrow{\partial'} & R' \end{array}$$

ve ayrıca (her $e \in E$, $r \in R$ için):

$$f_1(r \blacktriangleright e) = f_0(r) \blacktriangleright f_1(e)$$

şartı sağlanıyorsa, $f = (f_1, f_0)$ ikilisine bir **çaprazlanmış modül homomorfizmi** denir ve kısaca $f: (E, R, \partial) \rightarrow (E', R', \partial')$ şeklinde gösterilir.

2.3 2-Çaprazlanmış Modül

Tanım 2.5 R, E ve L değişmeli κ -cebirleri ve ∂_1, ∂_2 cebir morfizmleri için:

$$L \xrightarrow{\partial_2} E \xrightarrow{\partial_1} R$$

bir zincir kompleksi olsun ve R nin kendi üzerine etkisi çarpım işlemi ile tanımlı olmak üzere R nin E, L üzerine etkileri mevcut olsun. Ayrıca Peiffer lifting olarak adlandırılan:

$$\{ \otimes \} : E \otimes_R E \longrightarrow L$$

R -bilineer fonksiyonu için ($l, l' \in L$, $e, e', e'' \in E$ ve $r \in R$ olmak üzere):

$$\mathbf{2XM1)} \quad \partial_2\{e \otimes e'\} = ee' - \partial_1(e') \blacktriangleright e,$$

$$\mathbf{2XM2)} \quad \{\partial_2(l) \otimes \partial_2(l')\} = ll',$$

$$\mathbf{2XM3)} \quad \{e \otimes e'e''\} = \{ee' \otimes e''\} + \partial_1(e'') \blacktriangleright \{e \otimes e'\},$$

$$\mathbf{2XM4)} \quad \{\partial_2(l) \otimes e\} = e \blacktriangleright' l - \partial_1(e) \blacktriangleright l,$$

$$\mathbf{2XM5)} \quad \{e \otimes \partial_2(l)\} = e \blacktriangleright' l,$$

$$\mathbf{2XM6)} \quad r \blacktriangleright \{e \otimes e'\} = \{r \blacktriangleright e \otimes e'\} = \{e \otimes r \blacktriangleright e'\}$$

şartları sağlansın. Bu durumda:

$$L \xrightarrow{\partial_2} E \xrightarrow{\partial_1} R$$

zincir kompleksine değişmeli cebirlerin **2-çaprazlanmış modülü (2XMod)** denir ve kısaca $(L, E, R, \partial_1, \partial_2, \{, \})$ şeklinde gösterilir.

Not 2.6 Burada $L \xrightarrow{\partial_2} E$ morfizmi, E nin L üzerine:

$$e \blacktriangleright' l = \{e \otimes \partial_2(l)\} \quad (2.1)$$

etkisi ile birlikte bir çaprazlanmış modüldür.

Fakat genel olarak $E \xrightarrow{\partial_1} R$ kısmı sadece bir önçaprazlanmış modüldür. Peiffer elemanının ∂_2 altındaki görüntüsü (**2XM1**) ise $E \xrightarrow{\partial_1} R$ in çaprazlanmış modül olması için gerekli olan cebirsel farkı verir.

Tanım 2.7 (Serbest₁ 2-Çaprazlanmış Modül) $(L, E, R, \partial_1, \partial_2, \{, \})$ bir 2-çaprazlanmış modül olsun. Eğer R bir serbest cebir ise bu 2-çaprazlanmış modül “**serbest₁ 2-çaprazlanmış modül**” olarak adlandırılır. Tezin ileriki kısımlarında kullanılacak olan serbest₁ 2-çaprazlanmış modüller her zaman sabit bir $B \subset R$ tabanı ile birlikte tanımlı olacaktır. Yani R serbest cebiri bir başka deyişle, $(B \subset R$ tabanındaki değerler üzerinde tanımlanan) $\kappa[B]$ polinom cebiri olacaktır.

Örnek 2.3 (E, R, ∂) önçaprazlanmış modül olsun. $i: Ker(\partial) \rightarrow E$ içine dönüşümü ve:

$$\{ \otimes \}(e, e') \in E \otimes_R E \mapsto \{e \otimes e'\} \doteq ee' - \partial(e)e' \in \ker(\partial)$$

Peiffer liftingi ile birlikte tanımlı,

$$Ker(\partial) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\partial} R$$

zinciri bir 2-çaprazlanmış modüldür.

Tanım 2.8 $\mathcal{A} = (L, E, R, \partial_1, \partial_2, \{, \})$ ve $\mathcal{A}' = (L', E', R', \partial'_1, \partial'_2, \{, \})$ birer 2-çaprazlanmış modül olsun. $f_0: R \rightarrow R'$, $f_1: E \rightarrow E'$ ve $f_2: L \rightarrow L'$ cebir morfizmleri için,

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{\partial_2} & E & \xrightarrow{\partial_1} & R \\ \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ L' & \xrightarrow{\partial'_2} & E' & \xrightarrow{\partial'_1} & R' \end{array}$$

diyagramı değişmeli oluyor ve bu morfizmler altında tüm mevcut etkiler korunuyor, yani (her $l \in L$, $e, e' \in E$ ve $r, r' \in R$ için):

$$f_1(r \blacktriangleright e) = f_0(r) \blacktriangleright f_1(e),$$

$$f_2(r \blacktriangleright l) = f_0(r) \blacktriangleright f_2(l),$$

$$f_2\{e \otimes e'\} = \{f_1(e) \otimes f_1(e')\},$$

şartları sağlanıyorsa, $f = (f_2, f_1, f_0): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ dönüşümü bu iki 2-çaprazlanmış modül arasındaki **2-çaprazlanmış modül homomorfizmi** olarak adlandırılır.

2.4 Simplisel Cebirler

Bu kısımda, genel olarak herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisi için tanımlanan Simplisel Obje [26] kavramı, değişmeli cebirlere uyarlanarak simplisel cebirin tanımı verilecektir.

Tanım 2.9 A simplisel cebiri, $(n \in \mathbb{N})$ için A_n değişmeli cebirlerinin bir ailesi üzerinde:

$$d_i^n: A_n \rightarrow A_{n-1} \quad , \quad 0 \leq i \leq n$$

$$s_j^{n+1}: A_n \rightarrow A_{n+1} \quad , \quad 0 \leq j \leq n$$

şeklinde tanımlı sınır (yüzey) ve dejenere dönüşümleri ile birlikte, aşağıda verilen ve simplisel özdeşlikler adı verilen eşitlikleri sağlar:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad , \quad i < j \\ \text{(ii)} \quad & s_i s_j = s_{j+1} s_i \quad , \quad i \leq j \\ \text{(iii)} \quad & d_i s_j = s_{j-1} d_i \quad , \quad i < j \\ & d_j s_j = d_{j+1} s_j = id \\ & d_i s_j = s_j d_{i-1} \quad , \quad i > j+1 \end{aligned}$$

Herhangi bir simplisel cebir kısaca aşağıdaki şekilde resmedilir:

$$A = \cdots \cdots \cdots A_3 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} A_2 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_2} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} A_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} A_0 \quad (2.2)$$

Ayrıca simplisel cebirler kategorisi $SimpAlg$ ile gösterilir.

Tanım 2.10 Simplisel cebirin özel bir durumu olarak, herhangi bir n değerinden büyük tüm yapıların göz ardı edilmesi sonucu n -truncated simplisel cebir adı verilen:

$$Tr_n A = \{A_n, \dots, A_1, A_0\}$$

yapısı elde edilir. Benzer şekilde, bu yapı yardımıyla elde edilen n -truncated simplisel cebirler kategorisi de $Tr_n SimpAlg$ şeklinde gösterilir ve bu kategori $SimpAlg$ nin bir full alt kategorisidir.

Dolayısıyla herhangi bir simplisel cebir üzerinde herhangi bir işlem gerekmeden istenilen n değeri için bir n -truncated simplisel cebiri elde edilir ve bu geçiş funktoryal olarak:

$$Tr_n: SimpAlg \rightarrow Tr_nSimpAlg$$

şeklinde olup bu funktor:

$$cosk_n: Tr_nSimpAlg \rightarrow SimpAlg$$

şeklinde tanımlı “ n -coskeleton” funktoruyla sağ adjoint; ayrıca:

$$sk_n: Tr_nSimpAlg \rightarrow SimpAlg$$

şeklinde tanımlı “ n -skeleton” funktoruyla da sol adjointtir.

Tanım 2.11 A bir simplisel cebir olsun. Bu durumda $(\mathcal{N}\mathcal{A})_0 = A_0$ olmak üzere:

$$(\mathcal{N}\mathcal{A})_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} Ker(d_i)$$

değişmeli cebirleri ve d_n in kısıtlanması olarak tanımlı $\partial_n: (\mathcal{N}\mathcal{A})_n \rightarrow (\mathcal{N}\mathcal{A})_{n-1}$ morfizmleri ile birlikte tanımlanan (normal) zincir kompleksi A nın Moore kompleksi olarak adlandırılır ve kısaca $\mathcal{N}\mathcal{A}$ şeklinde gösterilir.

A bir simplisel cebir olsun. Bu durumda her $n \geq t + 1$ için $(\mathcal{N}\mathcal{H})_n = \{0\}$ oluyorsa, bu durumda A simplisel cebirinin Moore kompleksinin uzunluğu t olarak adlandırılır.

Simplisel cebirlerin çaprazlanmış modüller ve 2-çaprazlanmış modüllerle olan ilişkisi aşağıdaki şekildedir:

Teorem 2.12 2-çaprazlanmış modüller kategorisi, Moore kompleksinin uzunluğu 2 olan simplisel cebirler kategorisine denktir [4, 2, 1]. Ayrıca benzer denklik çaprazlanmış modüller için de söz konusudur.

2.5 Homotopi

Bu bölümde özellikle [23] de verilen homotopi kavramlarından tez için gerekli olan temel bilgiler üzerinde durulacaktır.

İlk olarak herhangi bir kategori üzerindeki homotopi tanımına geçmeden önce, homotopinin en temel düzeyde örneği olan topolojik uzaylar üzerindeki homotopi tanımı verilecektir:

Tanım 2.13 X ile Y iki topolojik uzay, $f, g : X \rightarrow Y$ iki sürekli fonksiyon ve $I = [0, 1]$ olmak üzere eğer bir:

$$\begin{aligned} \phi: X \times I &\longrightarrow Y \\ (x, t) &\longmapsto \phi(x, t) \end{aligned}$$

sürekli fonksiyonu,

$$\phi(x, 0) = f(x) \quad \text{ve} \quad \phi(x, 1) = g(x)$$

şartlarıyla birlikte tanımlanabiliyorsa bu durumda f ile g fonksiyonlarına homotopiktir denir ve kısaca $f \simeq g$ şeklinde gösterilir. Ayrıca ϕ dönüşümüne de f ile g arasındaki **homotopi** denir.

Kamps K.H. ve Porter, T. [23] çalışmalarında homotopi kavramını kategoriler üzerine genelleştirmişlerdir. Bunun için ilk olarak herhangi bir kategoride, topolojik uzayların homotopi tanımındaki $I = [0, 1]$ nın yerini tutan ve adına silindirik obje denen kavramı tanımlamışlardır. Şimdi bu tanımı kısaca hatırlansın:

Tanım 2.14 $\mathcal{C}$ herhangi bir kategori olsun. $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ birim fonktor olmak üzere bir

$$\begin{aligned} () \times I: \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ X &\longmapsto X \times I \\ f &\longmapsto f \times id_I \end{aligned}$$

funktoru için,

$$e_0 : Id_{\mathcal{C}} \rightarrow () \times I, \quad e_1 : Id_{\mathcal{C}} \rightarrow () \times I \quad \text{ve} \quad \sigma : () \times I \rightarrow Id_{\mathcal{C}}$$

doğal dönüşümleri

$$\sigma \circ e_0 = \sigma \circ e_1 = id_{\mathcal{C}}$$

şartını sağlıyorsa $() \times I : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ funktoru $\mathcal{C}$ üzerinde bir **I silindiri** ya da **silindir funktoru** denir. Ayrıca $() \times I$ funktoru bir X objesine uygulandığında bu kısaca $X \times I$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.4 Bir silindir için en temel örnek **Top** topolojik uzaylar kategorisi için verilebilir. Bir X topolojik uzayı üzerindeki:

$$X \times I = X \times [0, 1]$$

silindiri için, e_0, e_1 ve σ doğal dönüşümleri:

$$\begin{aligned} e_0(X) : X &\longrightarrow X \times [0, 1] \\ x &\longmapsto e_0(X)(x) = (x, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1(X) : X &\longrightarrow X \times [0, 1] \\ x &\longmapsto e_1(X)(x) = (x, 1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sigma(X) : X \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (x, t) &\longmapsto \sigma(X)(x, t) = x \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Böylelikle bir $\mathbf{I} = ((\) \times I, e_0, e_1, \sigma)$ silindir objesi ile birlikte, herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisindeki homotopi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

Tanım 2.15 $\mathcal{C}$ bir kategori, $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ ve $(f, g : X \rightarrow Y) \in Mor(\mathcal{C})$ olsun. Bu durumda eğer bir:

$$\phi : X \times I \longrightarrow Y$$

morfizmi:

$$\phi(e_0(X)) = f \quad \text{ve} \quad \phi(e_1(X)) = g$$

olacak şekilde bulunabiliyorsa f ile g ye homotopiktir denir ve $f \simeq g$ biçiminde gösterilir; ayrıca ϕ morfizmine de f ile g arasındaki **homotopi** denir.

Bu tezdeki temel amaç öncelikle değişmeli cebirlerin çaprazlanmış modül morfizlerinin homotopisini tanımlamaktır. Bilindiği üzere çaprazlanmış modüller, uzunluğu 1 olan özel zincir komplekslerdir. Aynı özellik 2-çaprazlanmış modül için de geçerlidir. Dolayısıyla öncelikli olarak değişmeli cebirlerin zincir kompleksi ve morfizmleri tanımlanarak ardından bu morfizmler arasındaki homotopi tanımı verilecektir.

2.5.1 Zincir kompleks homotopisi

κ değişmeli birimli halka olmak üzere, $Calg_\kappa$ değişmeli κ -cebirler kategorisi olsun. $Calg_\kappa$ kategorisinin objelerinden elde edilen bir $\mathbf{C} = \{C_n : n \in \mathbb{Z}\}$ dizisine $Calg_\kappa$ kategorisinde dereceli

obje denir. Eğer objelerin elemanları mevcutsa ve $x \in C_n$ ise x e n -inci derecedendir denir. $Calg_{\mathbf{k}}$ da $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ dereceli objeleri için bir $\mathbf{f} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ morfizmi $\{f_n : C_n \rightarrow D_{n+r} : n \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde bir morfizmler dizisinden oluşuyorsa $\mathbf{f}$ morfizmine r -inci derecedendir denir. Bir $\mathbf{C}$ dereceli objesi, $n \leq 0$ için $C_n = 0$ oluyorsa $\mathbf{C}$ ye pozitif, $n < 0$ için $C_n = 0$ oluyorsa $\mathbf{C}$ ye negatif olmayan ve $n \geq 0$ için $C_n = 0$ oluyorsa $\mathbf{C}$ ye negatif dereceli obje denir.

$Calg_{\mathbf{k}}$ kategorisi içinde $\mathbf{C} = \{C_n : n \in \mathbb{Z}\}$ bir dereceli obje ve $\mathbf{d} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ morfizmi için ardışık iki -1 dereceli morfizmin bileşkesi sıfır morfizmi veriyor, yani bir başka deyişle her $n \in \mathbb{Z}$ için:

$$d_{n-1} \circ d_n = 0$$

oluyorsa bu durumda $(\mathbf{C}, \mathbf{d})$ ikilisine $Calg_{\mathbf{k}}$ kategorisinde bir **zincir kompleks** denir, bu zincir kompleks:

$$\mathbf{C} : \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow \cdots$$

şeklinde gösterilir.

$Calg_{\mathbf{k}}$ kategorisinde $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ iki zincir kompleks ve $\{f_n : C_n \rightarrow D_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ morfizm ailesi:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{C} : \cdots & \longrightarrow & C_3 & \xrightarrow{d_3} & C_2 & \xrightarrow{d_2} & C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \\ & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 \\ \mathbf{D} : \cdots & \longrightarrow & D_3 & \xrightarrow{d'_3} & D_2 & \xrightarrow{d'_2} & D_1 & \xrightarrow{d'_1} & D_0 \end{array}$$

şeklinde gösterilsin. Bu durumda eğer her bir $n \in \mathbb{Z}$ için:

$$f_{n-1} d_n = d'_n f_n$$

şartı sağlanıyorsa $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ dönüşümüne bu iki zincir arasındaki zincir dönüşümü denir.

Tüm bunlarla birlikte objeleri $Calg_{\mathbf{k}}$ kategorisindeki zincir kompleksler ve morfizmleri bunlar arasındaki zincir dönüşümleri olan $Ch(Calg_{\mathbf{k}})$ kategorisi elde edilir.

$\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ zincir kompleksleri için $\mathbf{C} \oplus \mathbf{D}$ direkt toplamı,

$$(\mathbf{C} \oplus \mathbf{D})_n = C_n \oplus D_n \quad \text{ve} \quad \partial_n(x, y) = (d_n(x), d'_n(y))$$

olmak üzere:

$$\mathbf{C} \oplus \mathbf{D}: \quad \cdots \longrightarrow (\mathbf{C} \oplus \mathbf{D})_3 \xrightarrow{\partial_3} (\mathbf{C} \oplus \mathbf{D})_2 \xrightarrow{\partial_2} (\mathbf{C} \oplus \mathbf{D})_1 \xrightarrow{\partial_1} (\mathbf{C} \oplus \mathbf{D})_0 \longrightarrow \cdots$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ tensör çarpımı ise,

$$(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})_n = \sum_{i+j=n} C_i \otimes_k D_j$$

ve

$$\partial_n(x \otimes y) = d(x) \otimes y + (-1)^{\deg(x)} x \otimes d'(y)$$

olmak üzere:

$$\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}: \quad \cdots \longrightarrow (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})_3 \xrightarrow{\partial_3} (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})_2 \xrightarrow{\partial_2} (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})_1 \xrightarrow{\partial_1} (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})_0 \longrightarrow \cdots$$

biçimindedir.

Burada $I_1 = \kappa$, $I_0 = \kappa \oplus \kappa$ ve $I_n = 0$ ($n \neq 0, 1$) alınarak, aşıkâr olmayan biricik

$$\begin{array}{ccc} \partial_1: & I_1 & \longrightarrow I_0 \\ & x & \mapsto (-x, x) \end{array}$$

diferensiyelini tanımlayarak, $Ch(CAlg_\kappa)$ kategorisinin bir

$$\mathbf{I}: \cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{0} I_1 \xrightarrow{\partial_1} I_0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

objesi tanımlanabilir.

Şimdi bu obje kullanılarak $\mathbf{I} \otimes \mathbf{C}$ tensör çarpımını oluşturulabilir:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{C})_n &= \sum_{i+j=n} I_i \otimes_k C_j \\ &= (I_0 \otimes C_n) \oplus (I_1 \otimes C_{n-1}) \\ &= ((\kappa \oplus \kappa) \otimes C_n) \oplus (\kappa \otimes C_{n-1}) \\ &= (\kappa \otimes C_n) \oplus (\kappa \otimes C_n) \oplus (\kappa \otimes C_{n-1}) \\ &\simeq C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1} \end{aligned}$$

bulunur. Burada:

$$(x, y, z) \in C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1} \simeq (I_0 \otimes C_n) \oplus (I_1 \otimes C_{n-1})$$

için

$$(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$$

alınırsa, her $a, b \in k$ için:

$$\begin{aligned}\partial_n(x, 0, 0) &= \partial_n((a \oplus 0) \otimes x) \\ &= \partial_0(a \oplus 0) \otimes x + (a \oplus 0) \otimes d_n(x) \\ &= 0 \otimes x + (a \oplus 0) \otimes d_n(x) \\ &= (a \oplus 0) \otimes d_n(x) \\ &= (d_n(x), 0, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_n(0, y, 0) &= \partial_n((0 \oplus b) \otimes y) \\ &= \partial_0(0 \oplus b) \otimes y + (0 \oplus b) \otimes d_n(y) \\ &= 0 \otimes y + (0 \oplus b) \otimes d_n(y) \\ &= (0 \oplus b) \otimes d_n(y) \\ &= (0, d_n(y), 0)\end{aligned}$$

ve son olarak:

$$\begin{aligned}\partial_n(0, 0, z) &= \partial_n(a \otimes z) \\ &= \partial_1(a) \otimes z + (-1)a \otimes d_{n-1}(z) \\ &= (-a \oplus a) \otimes z \oplus (-a) \otimes d_{n-1}(z) \\ &= (-a \otimes z) \oplus (a \otimes z) \oplus (-a \otimes d_{n-1}(z)) \\ &= (-z, z, -d_{n-1}(z))\end{aligned}$$

bulunur. Buradan:

$$\begin{aligned}\partial_n(x, y, z) &= (d_n(x), 0, 0) + (0, d_n(y), 0) + (-z, z, -d_{n-1}(z)) \\ &= (d_n(x) - z, d_n(y) + z, -d_{n-1}(z))\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre,

$$\mathbf{I} \otimes \mathbf{C}: \cdots \longrightarrow (\mathbf{I} \otimes \mathbf{C})_n \xrightarrow{\partial_n} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{C})_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

objesi için:

$$(\mathbf{I} \otimes \mathbf{C})_n = C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1} \quad \text{ve} \quad \partial_n(x, y, z) = (d_n(x) - z, d_n(y) + z, -d_{n-1}(z))$$

biçimindedir. Ayrıca her $(x, y, z) \in (\mathbf{I} \otimes \mathbf{C})_n = C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1}$ için:

$$\begin{aligned}\partial_{n-1}\partial_n(x, y, z) &= \partial_{n-1}(d_n(x) - z, d_n(y) + z, -d_{n-1}(z)) \\ &= (d_{n-1}(d_n(x) - z) - (-d_{n-1}(z)), \\ &\quad d_{n-1}(d_n(y) + z) + (-d_{n-1}(z)), -d_{n-2}(-d_{n-1}(z))) \\ &= (d_{n-1}d_n(x) - d_{n-1}(z) + d_{n-1}(z),\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $n \in \mathbb{Z}$ için:

$$g_n - f_n = d'_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n$$

esitliği sağlanıyorsa f ile g homotopiktir denir. Ayrıca h dönüşümüne de f ile g arasındaki **zincir homotopisi** denir.

Yardımcı Teorem 2.19 $f, g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ iki zincir dönüşümü olsun. Bu durumda:

(a) Eğer $H : \mathbf{C} \times I \rightarrow \mathbf{D}$, f ile g arasında bir homotopi ise $h(z) = H(0, 0, z)$ olarak tanımlanan h dönüşümü, f ile g arasında bir zincir homotopisidir.

(b) Eğer h , f ile g arasında bir zincir homotopisi ise

$$\begin{aligned} H : \quad \mathbf{C} \times I &\longrightarrow \mathbf{D} \\ (x, y, z) &\longmapsto H(x, y, z) = f(x) + g(y) + h(z) \end{aligned}$$

dönüşümü f ile g arasında bir homotopi oluşturur.

İspat:

(a) $H : \mathbf{C} \times I \rightarrow \mathbf{D}$, f ile g arasında bir homotopi olsun. Buna göre:

$$\begin{array}{ccccc}
 C & & C \times I & & D \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 C_n & \xrightarrow{e_0(C_n)} & C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1} & \xrightarrow{H_n} & D_n \\
 & \xrightarrow{e_1(C_n)} & & & \\
 \downarrow d_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow d_n' \\
 C_{n-1} & \xrightarrow{e_0(C_{n-1})} & C_{n-1} \oplus C_{n-1} \oplus C_{n-2} & \xrightarrow{H_{n-1}} & D_{n-1} \\
 & \xrightarrow{e_1(C_{n-1})} & & & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

olup:

$$H_n(e_0(C_n)) = H_n(x, 0, 0) = f_n(x)$$

ve:

$$H_n(e_1(C_n)) = H_n(0, y, 0) = g_n(y)$$

dir. Ayrıca $(x, y, z) \in C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1}$ için:

$$\begin{aligned}
 H_n(x, y, z) &= H_n((x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)) \\
 &= H_n(x, 0, 0) + H_n(0, y, 0) + H_n(0, 0, z)
 \end{aligned}$$

olduğu gö zönüne alınarak $H_n(0, 0, z)$ ifadesi $h_{n-1}(z)$ ile gösterilsin yani

$$H_n(0, 0, z) = h_{n-1}(z)$$

olsun. Bu durumda:

$$H_n(x, y, z) = f_n(x) + g_n(y) + h_{n-1}(z)$$

olup, burada

$$\begin{aligned} h_{n-1} : C_{n-1} &\longrightarrow D_n \\ z &\longmapsto h_{n-1}(z) \end{aligned}$$

biçimindedir. Ayrıca H bir zincir morfizmi olduğundan her $n \in \mathbb{Z}$ için:

$$\begin{array}{ccc} C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1} & \xrightarrow{H_n} & D_n \\ \downarrow \partial_n & & \downarrow d_n' \\ C_{n-1} \oplus C_{n-1} \oplus C_{n-2} & \xrightarrow{H_{n-1}} & D_{n-1} \end{array}$$

diagramı komütatif olmalıdır. Buna göre $(x, y, z) \in C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1}$ için,

$$\begin{array}{ccc} (x, y, z) & \xrightarrow{H_n} & H_n(x, y, z) \\ \downarrow \partial_n & & \downarrow d_n' \\ (d_n(x) - z, d_n(y) + z, -d_{n-1}(z)) & \xrightarrow{H_{n-1}} & H_{n-1}(d_n(x) - z, d_n(y) + z, -d_{n-1}(z)) = d_n'(H_n(x, y, z)) \end{array}$$

diagramından:

$$H_{n-1}(d_n(x) - z, d_n(y) + z, -d_{n-1}(z)) = d_n'(H_n(x, y, z))$$

eşitliği elde edilir. Buna göre:

$$f_{n-1}(d_n(x) - z) + g_{n-1}(d_n(y) + z) + h_{n-2}(-d_{n-1}(z)) = d_n'(f_n(x) + g_n(y) + h_{n-1}(z))$$

yani:

$$f_{n-1}d_n(x) - f_{n-1}(z) + g_{n-1}d_n(y) + g_{n-1}(z) - h_{n-2}d_{n-1}(z) = d_n'f_n(x) + d_n'g_n(y) + d_n'h_{n-1}(z)$$

olur. Burada f ve g , $\mathbf{C}$ ile $\mathbf{D}$ arasında zincir morfizmleri olduğundan her $n \in \mathbb{Z}$ için:

$$f_{n-1}d_n = d_n'f_n \quad \text{ve} \quad g_{n-1}d_n = d_n'g_n$$

elde edilir. O halde yukarıdaki eşitlik için:

$$d_n'f_n(x) - f_{n-1}(z) + d_n'g_n(y) + g_{n-1}(z) - h_{n-2}d_{n-1}(z) = d_n'f_n(x) + d_n'g_n(y) + d_n'h_{n-1}(z)$$

yani bir başka deyişle:

$$g_{n-1}(z) - f_{n-1}(z) = d'_n h_{n-1}(z) + h_{n-2} d_{n-1}(z)$$

bulunur. Buna göre her $n \in \mathbb{Z}$ için:

$$\begin{array}{ccc} h_n : C_n & \longrightarrow & D_{n+1} \\ z & \mapsto & h_n(z) \end{array}$$

dönüşümleri için

$$g_n(z) - f_n(z) = d'_{n+1} h_n(z) + h_{n-1} d_n(z)$$

eşitliği sağlanır.

O halde

$$h(z) = H(0, 0, z)$$

dönüşümü f ile g arasında bir zincir homotopisidir.

(b) h , f ile g arasında bir zincir homotopisi olsun. Buna göre

$$H(x, y, z) = f(x) + g(y) + h(z)$$

biçiminde tanımlanan H dönüşümü $\mathbf{C} \times I$ ile $\mathbf{D}$ arasında bir zincir morfizmi olup;

$$H(e_0(\mathbf{C}))(x) = H(x, 0, 0) = f(x)$$

$$H(e_1(\mathbf{C}))(y) = H(0, y, 0) = g(y)$$

elde edilir. Yani H dönüşümü f ile g arasında bir homotopi belirler.

□

Sonuç 2.20 Yukarıdaki yardımcı teoremin bir sonucu olarak; $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ zincir kompleksleri arasındaki f ve g zincir dönüşümlerinin homotop olması, her $n \in \mathbb{Z}$ için:

$$g_n - f_n = d'_{n+1} h_n + h_{n-1} d_n$$

esitliğini sağlayacak şekildeki:

$$h_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$$

dönüşümlerinin varlığına indirgenir.

3. 1-, 2- ve 3- SIMPLEKSLER

3.1 Giriş

Bu bölümde herhangi bir sabit $\mathcal{A} = (L, E, R, \partial_1, \partial_2, \{, \})$ 2-çaprazlanmış modülü alınarak bu yapı üzerinde (yeni etkilerle birlikte) çeşitli yarı-direkt çarpım cebirleri oluşturulacak ve bunlar kullanılarak da 1-, 2- ve 3- simpleksler inşaa edilecek ve ayrıca geometrik olarak yorumlanacaktır.

Bu simpleksler:

- 2-çaprazlanmış modüllerin homotopilerinin kompozisyonunun tanımlanabilmesinde temel unsuru oluşturacaktır.
- En ilginç olarak ise, ileriki bölümlerde elde edilecek karmaşık yapılar için cebirsel olarak ispatlanmak istendiğinde çok uzun işlem gerektiren ispatların diyagramatik olarak hiçbir işlem kullanmadan ispatlanabilmesini sağlayacaktır.
- Geometrik olarak resmedilebilmesi sayesinde çoğu teorem ve özelliğin önceden kolayca sezilmesini sağlayacaktır.

Ayrıca bu simpleksler yardımıyla bir simplisel cebir yapısı inşaa edebilmek için gerekli olan sınır (yüzey) ve dejenere dönüşümleri de yine bu bölümde tanımlanacaktır.

3.2 0- Simpleksler

$\mathcal{A} = (L, E, R, \partial_1, \partial_2, \{, \})$ bir 2-çaprazlanmış modül olsun. Burada $\mathcal{A}_0 = R$ ye $\mathcal{A}$ üzerindeki **0-simpleks** denir.

3.3 Yarı-direkt Çarpım

Tanım 3.1 R, E birer değişmeli κ -cebir olmak üzere R nin E üzerine bir $\blacktriangleright$ etkisi mevcut olsun.

Bu durumda:

$$R \ltimes_{\blacktriangleright} E \doteq \{(r, e) \mid e \in R, e \in E\}$$

kümesi $(e, e' \in E, r, r' \in R$ ve $k \in \kappa$ olmak üzere):

$$(r, e) + (r', e') = (r + r', e + e')$$

$$(r, e)(r', e') = (rr', r \blacktriangleright e' + r' \blacktriangleright e + ee')$$

$$k(r, e) = (kr, ke)$$

ikili işlemleri ile birlikte bir κ -cebir yapısı oluşturur. Bu yapıya R ile E nin **yarı-direkt çarpım** cebiri denir.

Değişmeli cebirlerin yarı-direkt çarpım cebirinin bir başka değişmeli cebir üzerine etkisinin tanımlı olmasında, aşağıda ispatsız olarak verilecek yardımcı teorem, ilerideki karmaşık yapı ve işlemlerde etkinin dolaylı olarak kolayca ispatlanmasında bize önemli ölçüde kolaylık sağlayacaktır:

Yardımcı Teorem 3.2 A herhangi bir cebir olmak üzere,

$$((r, e), a) \in (R \ltimes_{\blacktriangleright} E) \times A \longmapsto (r, e) \blacktriangleright a \in A$$

şeklinde tanımlı bilineer dönüşümünün, $(R \ltimes_{\blacktriangleright} E)$ nin A üzerine bir etkisi olabilmesi için gerek ve yeter şart her $(r, r' \in R, e, e' \in E$ ve $a \in A$ için):

- $[(r, 0)(r', 0)] \blacktriangleright a = (r, 0) \blacktriangleright [(r', 0) \blacktriangleright a],$
- $[(0, e)(0, e')] \blacktriangleright a = (0, e) \blacktriangleright [(0, e') \blacktriangleright a],$
- $(r, e) \blacktriangleright a = [(r, 0) + (0, e)] \blacktriangleright a,$
- $[(r, 0)(0, e')] \blacktriangleright a = (r, 0) \blacktriangleright [(0, e') \blacktriangleright a]$

şartlarının sağlanmasıdır.

3.4 1- ve 2- Simpleksler

$\mathcal{A}_1 \doteq R \ltimes_{\blacktriangleright} E$ değişmeli cebiri $\mathcal{A}$ üzerindeki **1-simpleks** olarak adlandırılır. Ayrıca elde edilen bu yapının görsel olarak bir anlam ifade edebilmesi açısından, herhangi bir $(r, e) \in \mathcal{A}_1$ elemanı:

$$r \xrightarrow{e} (r + \partial_1(e))$$

simplisel formuyla gösterilir.

Bu gösterim ile birlikte $\mathcal{A}_1$ deki herhangi iki elemanın çarpımı:

$$\begin{aligned} & \left(r \xrightarrow{e} (r + \partial_1(e)) \right) \cdot \left(r' \xrightarrow{e'} (r' + \partial_1(e')) \right) \\ &= \left(rr' \xrightarrow{r \blacktriangleright e' + r' \blacktriangleright e + ee'} (rr' + \partial_1(r \blacktriangleright e' + r' \blacktriangleright e + ee')) \right) \end{aligned}$$

şeklinde resmedilir.

Not 3.3 Bu gösterimin kullanılmasındaki en önemli sebep aşağıdaki yardımcı teoremin görselleştirilmesi aşamasında anlam kazanacak olmasıdır. Bu metod, benzer şekilde üst boyutlarda elde edilecek yapıların geometrik olarak algılanmasında da büyük kolaylık sağlayacaktır.

Yardımcı Teorem 3.4 $\mathcal{A}$ üzerinde yukarıda tanımlanan 1-simpleks ve 0-simpleks yapıları arasında;

$$d_{0,1} : \mathcal{A}_1 = R \ltimes_{\blacktriangleright} E \longrightarrow R = \mathcal{A}_0$$

biçiminde iki farklı yüzey (sınır) morfizmi:

$$d_0 \left(r \xrightarrow{e} (r + \partial_1(e)) \right) = r, \quad d_1 \left(r \xrightarrow{e} (r + \partial_1(e)) \right) = r + \partial_1(e)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca yine,

$$s_0 : \mathcal{A}_0 = R \longrightarrow R \ltimes_{\blacktriangleright} E = \mathcal{A}_1$$

biçiminde ($r \in R$ için),

$$s_0(r) = (r, 0)$$

şeklinde tanımlı bir dejenere morfizmi mevcuttur ve bu morfizm simplisel formda:

$$s_0(r) = \left(r \xrightarrow{0} (r + \partial_1(0)) \right) = \left(r \xrightarrow{0} r \right)$$

şeklinde resmedilir.

Not 3.5 $\mathcal{A}$ nın tanımı gereği E nin L üzerine mevcut olan $\blacktriangleright'$ etkisi yardımıyla, $E \ltimes_{\blacktriangleright'} L$ yarı-direkt çarpım cebirinin elde edilebileceği açıktır.

Yardımcı Teorem 3.6 $(R \ltimes_{\blacktriangleright} E)$ nin $(E \ltimes_{\blacktriangleright'} L)$, üzerine $(l \in L, e, e' \in E$ ve $r \in R$ için):

$$(r, e) \blacktriangleright_{\bullet} (e', l) = (ee' + r \blacktriangleright e', \partial_1(e) \blacktriangleright l + r \blacktriangleright l - \{e' \otimes e\})$$

şeklinde bir $\blacktriangleright_{\bullet}$ etkisi mevcuttur.

İspat: Dikkat edilirse tanımlanan bu etki aslında iki parça halinde düşünüldüğünde,

$$(r, 0) \blacktriangleright_{\bullet} (e', l) = (r \blacktriangleright e', r \blacktriangleright l)$$

ve

$$(0, e) \blacktriangleright_{\bullet} (e', l) = (ee', \partial_1(e) \blacktriangleright l - \{e' \otimes e\})$$

şeklindedir.

Burada, Tanım 2.1 de verilen **A1** ve **A2** şartlarının (Yardımcı Teorem 3.2 yardımıyla) gösterilmesi gerekmektedir. Fakat tüm cebirler değişmeli olduğundan ikinci şartın sağlandığı zaten aşikardır. Dolayısıyla sadece ilk şartın ispatlanması yeterli olacaktır. Bu durumda:

$$\begin{aligned} (r, 0) \blacktriangleright_{\bullet} [(e', l)(e'_2, l_2)] &= (r, 0) \blacktriangleright_{\bullet} (e'e'_2, e' \blacktriangleright' l_2 + e'_2 \blacktriangleright' l + ll_2) \\ &= (r \blacktriangleright (e'e'_2), r \blacktriangleright (e' \blacktriangleright' l_2 + e'_2 \blacktriangleright' l + ll_2)) \\ &= (r \blacktriangleright (e'e'_2), r \blacktriangleright (e' \blacktriangleright' l_2) + r \blacktriangleright (e'_2 \blacktriangleright' l) + r \blacktriangleright (ll_2)) \\ &= (r \blacktriangleright (e'e'_2), r \blacktriangleright \{e' \otimes \partial_2(l_2)\} + r \blacktriangleright \{e'_2 \otimes \partial_2(l)\} + r \blacktriangleright (ll_2)) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca:

$$\begin{aligned} [(r, 0) \blacktriangleright_{\bullet} (e', l)] (e'_2, l_2) &= (r \blacktriangleright e', r \blacktriangleright l)(e'_2, l_2) \\ &= ((r \blacktriangleright e')e'_2, (r \blacktriangleright e') \blacktriangleright' l_2 + e'_2 \blacktriangleright' (r \blacktriangleright l) + (r \blacktriangleright l)l_2) \\ &= (r \blacktriangleright (e'e'_2), \{(r \blacktriangleright e') \otimes \partial_2(l_2)\} + \{e'_2 \otimes' \partial_2(r \blacktriangleright l)\} + r \blacktriangleright (ll_2)) \\ &= (r \blacktriangleright (e'e'_2), r \blacktriangleright \{e' \otimes \partial_2(l_2)\} + \{e'_2 \otimes' r \blacktriangleright \partial_2(l)\} + r \blacktriangleright (ll_2)) \\ &= (r \blacktriangleright (e'e'_2), r \blacktriangleright \{e' \otimes \partial_2(l_2)\} + r \blacktriangleright \{e'_2 \otimes \partial_2(l)\} + r \blacktriangleright (ll_2)) \end{aligned}$$

olur. Buna göre her $r \in R$, $e', e'_2 \in E$ ve $l, l_2 \in L$ için:

$$(r, 0) \blacktriangleright_{\bullet} [(e', l)(e'_2, l_2)] = [(r, 0) \blacktriangleright (e', l)] (e'_2, l_2)$$

elde edilir. Ayrıca, her $r, r' \in R$, $e' \in E$ için:

$$\begin{aligned} [(r, 0)(r', 0)] \blacktriangleright_{\bullet} (e', l) &= (rr', 0) \blacktriangleright_{\bullet} (e', l) \\ &= ((rr') \blacktriangleright e', (rr') \blacktriangleright l) \\ &= (r \blacktriangleright (r' \blacktriangleright e'), r \blacktriangleright (r' \blacktriangleright l)) \\ &= (r, 0) \blacktriangleright_{\bullet} (r' \blacktriangleright e', r' \blacktriangleright l) \\ &= (r, 0) \blacktriangleright_{\bullet} [(r', 0) \blacktriangleright_{\bullet} (e', l)]. \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan her $e, e' \in E$ ve $l \in L$ için:

$$(0, e) \blacktriangleright_{\bullet} (e', 0) = (ee', -\{e' \otimes e\}), \quad (0, e) \blacktriangleright_{\bullet} (0, l) = (0, \partial_1(e) \blacktriangleright l)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece her $e, e', e'_2 \in E$ için:

$$\begin{aligned} (0, e) \blacktriangleright_{\bullet} [(e', 0)(e'_2, 0)] &= (0, e) \blacktriangleright_{\bullet} (e'e'_2, 0) \\ &= (e(e'e'_2), -\{e'e'_2 \otimes e\}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} [(0, e) \blacktriangleright_{\bullet} (e', 0)] (e'_2, 0) &= (ee', -\{e' \otimes e\})(e'_2, 0) \\ &= ((ee')e'_2, e'_2 \blacktriangleright' (-\{e' \otimes e\})) \\ &= (e(e'e'_2), \{e'_2 \otimes -\partial_2\{e', e\}\}) = (e(e'e'_2), \{e'_2 \otimes -ee' + \partial_1(e) \blacktriangleright e'\}) \\ &= (e(e'e'_2), \{e'_2 \otimes -ee'\}) + (e(e'e'_2), \{e'_2 \otimes \partial_1(e) \blacktriangleright e'\}) \\ &= (e(e'e'_2), -\{e'e'_2 \otimes e\}) - (e(e'e'_2), \partial_1(e) \blacktriangleright \{e'_2, e'\}) + (e(e'e'_2), \partial_1(e) \blacktriangleright \{e'_2, e'\}) \\ &= (e(e'e'_2), -\{e'e'_2 \otimes e\}), \end{aligned}$$

bulunur yani:

$$(0, e) \blacktriangleright_{\bullet} [(e', 0)(e'_2, 0)] = [(0, e) \blacktriangleright_{\bullet} (e', 0)] (e'_2, 0).$$

elde edilir. Ayrıca her $e \in E$ ve $l, l_2 \in L$ için:

$$(0, e) \blacktriangleright_{\bullet} [(0, l)(0, l_2)] = (0, e) \blacktriangleright_{\bullet} (0, ll_2)$$

$$= (0, \partial_1(e) \blacktriangleright ll_2)$$

$$\begin{aligned} [(e, 0) \blacktriangleright_{\bullet} (0, l)](0, l_2) &= (0, \partial_1(e) \blacktriangleright l)(0, l_2) \\ &= (0, (\partial_1(e) \blacktriangleright l)l_2) \\ &= (0, \partial_1(e) \blacktriangleright ll_2). \end{aligned}$$

bulunur, yani:

$$(0, e) \blacktriangleright_{\bullet} [(0, l)(0, l_2)] = [(0, e) \blacktriangleright_{\bullet} (0, l)](0, l_2).$$

elde edilir. Buna göre:

$$(0, e) \blacktriangleright_{\bullet} [(e', l)(e'_2, l_2)] = [(0, e) \blacktriangleright_{\bullet} (e', l)](e'_2, l_2).$$

olur. Benzer şekilde:

$$\begin{aligned} [(0, e)(0, e_2)] \blacktriangleright_{\bullet} (e', l) &= (0, ee_2) \blacktriangleright_{\bullet} (e', l) \\ &= ((ee_2)e', \partial_1(ee_2) \blacktriangleright l - \{e' \otimes ee_2\}) \\ &= ((ee_2)e', \partial_1(ee_2) \blacktriangleright l - \{e' \otimes e_2e\}) \\ &= ((ee_2)e', \partial_1(ee_2) \blacktriangleright l - \{e'e_2 \otimes e\} - \partial_1(e) \blacktriangleright \{e' \otimes e_2\}), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (0, e) \blacktriangleright_{\bullet} [(0, e_2) \blacktriangleright_{\bullet} (e', l)] &= (0, e) \blacktriangleright_{\bullet} (e_2e', \partial_1(e_2) \blacktriangleright l - \{e' \otimes e_2\}) \\ &= (e(e_2e'), \partial_1(e) \blacktriangleright [\partial_1(e_2) \blacktriangleright l - \{e' \otimes e_2\}] - \{e_2e' \otimes e\}) \\ &= ((ee_2)e', \partial_1(e)\partial_1(e_2) \blacktriangleright l - \partial_1(e) \blacktriangleright \{e' \otimes e_2\} - \{e_2e' \otimes e\}) \\ &= ((ee_2)e', \partial_1(ee_2) \blacktriangleright l - \partial_1(e) \blacktriangleright \{e' \otimes e_2\} - \{e_2e' \otimes e\}). \end{aligned}$$

bulunur. Yani her $e, e_2, e' \in E$ ve $l \in L$ için olup böylece aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$[(0, e)(0, e_2)] \blacktriangleright_{\bullet} (e', l) = (0, e) \blacktriangleright_{\bullet} [(0, e_2) \blacktriangleright_{\bullet} (e', l)]$$

elde edilir. Böylece:

$$\begin{aligned} [(r, 0)(0, e_2)] \blacktriangleright_{\bullet} (e', l) &= (0, r \blacktriangleright e_2) \blacktriangleright_{\bullet} (e', l) \\ &= ((r \blacktriangleright e_2)e', \partial_1(r \blacktriangleright e_2) \blacktriangleright l - \{e' \otimes r \blacktriangleright e_2\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((r \blacktriangleright e_2)e', (r\partial_1(e_2)) \blacktriangleright l - r \blacktriangleright \{e' \otimes e_2\}) \\
&= (r \blacktriangleright (e_2e'), r \blacktriangleright (\partial_1(e_2) \blacktriangleright l) - r \blacktriangleright \{e' \otimes e_2\}) \\
&= (r, 0) \blacktriangleright_{\bullet} (e_2e', \partial_1(e_2) \blacktriangleright l - \{e' \otimes e_2\}) \\
&= (r, 0) \blacktriangleright_{\bullet} [(0, e_2) \blacktriangleright_{\bullet} (e', l)].
\end{aligned}$$

olur. $\square$

Tanım 3.7 Mevcut olan $\blacktriangleright_{\bullet}$ etkisi yardımıyla elde edilen:

$$\mathcal{A}_2 \doteq (R \ltimes_{\blacktriangleright} E) \ltimes_{\blacktriangleright_{\bullet}} (E \ltimes_{\blacktriangleright'} L) \quad (3.1)$$

şeklindeki yeni cebir yapısı, $\mathcal{A}$ üzerindeki **2-simpleks** cebiri olarak adlandırılır.

Ayrıca her bir $(r, e, e', l) \in (R \ltimes_{\blacktriangleright} E) \ltimes_{\blacktriangleright_{\bullet}} (E \ltimes_{\blacktriangleright'} L)$ elemanı da:

$$\begin{array}{ccc}
& & r + \partial_1(e) + \partial_1(e') \\
& \nearrow^{e+e'} & \uparrow \boxed{l} \\
r & \xrightarrow{e} & r + \partial_1(e)
\end{array} \quad (3.2)$$

simplesel formunda resmedilir.

Not 3.8 $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlanan 2- simpleks ve 1- simpleks yapıları arasında;

$$d_{0,1,2} : \mathcal{A}_2 = (R \ltimes_{\blacktriangleright} E) \ltimes_{\blacktriangleright_{\bullet}} (E \ltimes_{\blacktriangleright'} L) \longrightarrow R \ltimes_{\blacktriangleright} E = \mathcal{A}_1,$$

biçiminde üç farklı yüzey morfizmi:

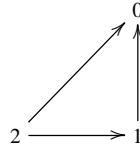
$$d_0(r, e, e', l) = (r, e), \quad d_1(r, e, e', l) = (r, e + e'), \quad d_2(r, e, e', l) = (r + \partial_1(e), e' + \partial_2(l)),$$

şeklinde tanımlanır ve bu morfizmler de yine simplesel formda:

$$\begin{aligned}
d_0 \left(\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & r+\partial_1(e)+\partial_1(e') & \\ \nearrow^{e+e'} & \uparrow & \\ r & \boxed{1} & e'+\partial_2(l) \\ \searrow_e & & \\ & r+\partial_1(e) & \end{array} \end{array} \right) = \left(r \xrightarrow{e} (r+\partial_1(e)) \right), \\
d_1 \left(\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & r+\partial_1(e)+\partial_1(e') & \\ \nearrow^{e+e'} & \uparrow & \\ r & \boxed{1} & e'+\partial_2(l) \\ \searrow_e & & \\ & r+\partial_1(e) & \end{array} \end{array} \right) = \left(r \xrightarrow{e+e'} (r+\partial_1(e)+\partial_1(e')) \right), \\
d_2 \left(\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & r+\partial_1(e)+\partial_1(e') & \\ \nearrow^{e+e'} & \uparrow & \\ r & \boxed{1} & e'+\partial_2(l) \\ \searrow_e & & \\ & r+\partial_1(e) & \end{array} \end{array} \right) = \left(r+\partial_1(e) \xrightarrow{e'+\partial_2(l)} (r+\partial_1(e)+\partial_1(e')) \right).
\end{aligned}$$

şeklinde resmedilir.

Yukarıda tanımlanan morfizmlerin indislerinin, 2- simpleksin yüzeyleri ile ilişkisi:



şeklinde. Dikkat edilirse burada her bir d_i morfizmi, 2-simpleksi farklı şekilde dejenere ederek, i olarak numaralandırılan kenarı ortadan kaldırarak 1-simplekse dönüştürür.

Not 3.9 Yine benzer şekilde, bu iki farklı simpleks arasında:

$$s_{0,1} : \mathcal{A}_1 = R \ltimes_{\blacktriangleright} E \longrightarrow (R \ltimes_{\blacktriangleright} E) \ltimes_{\blacktriangleright, \bullet} (E \ltimes_{\blacktriangleright} L) = \mathcal{A}_2$$

biçiminde iki farklı dejenere morfizmi:

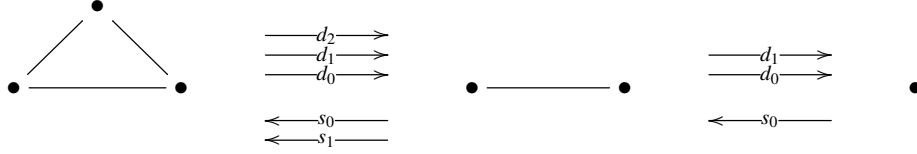
$$s_0(r, e) = (r, e, 0, 0), \quad s_1(r, e) = (r, 0, e, 0),$$

şeklinde tanımlanır ve morfizmler simplisel formda:

$$s_0 \left(r \xrightarrow{e} (r+\partial_1(e)) \right) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & r+\partial_1(e) & \\ \nearrow^e & \uparrow & \\ r & \boxed{0} & 0 \\ \searrow_e & & \\ & r+\partial_1(e) & \end{array} \end{array} \quad \text{ve} \quad s_1 \left(r \xrightarrow{e} (r+\partial_1(e)) \right) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & r+\partial_1(e) & \\ \nearrow^e & \uparrow & \\ r & \boxed{0} & e \\ \searrow_0 & & \\ & r & \end{array} \end{array}$$

şeklinde resmedilir.

Not 3.10 $\mathcal{A}$ üzerinde yukarıda inşaa edilen, 0-, 1- ve 2-simpleksler arasındaki morfizmlerin simplisel özdeşlikler olarak bilinen [26] tüm şartları sağladığı açıktır. Böylece mevcut 0-, 1- ve 2- simpleksler ve bu yapılar arasında tanımlanan morfizmler yardımıyla (aşağıdaki şekilde resmedebilen) bir 2-truncated simplisel cebir yapısı elde edilir.



Not 3.11 Elde edilen mevcut 2-truncated simplisel inşası genişletilerek, [4, 2, 1] de verilen, simplisel cebirler kategorisi ile 2-çaprazlanmış modüller kategorisinin denkliğine (Teorem 2.12) alternatif bir ispat olarak anlam kazanır. Ayrıca birazdan verilecek 3-simpleks yapısı da yine bu denkliğin 3-truncated simplisel yapı yardımıyla [16] da Lie cebirleri için verilen ispatın değişmeli cebirler için karşılığına denk gelerek yine bu iki kategorinin denkliğine bir başka alternatif ispat vermektedir.

3.5 3- Simpleksler

Öncelikle, 3-simplekslerin inşasında temel oluşturacak ve direkt olarak kullanılacak olan birkaç yeni etki tanımlanacaktır.

3.5.1 Bazı yardımcı cebir etkileri

Yardımcı Teorem 3.12 $E \ltimes L$ nin L üzerine:

$$(e, l) \blacktriangleright_* l' = e \blacktriangleright' l' + ll'$$

şeklinde bir $\blacktriangleright_*$ etkisi mevcuttur.

İspat: 2-çaprazlanmış modül tanımından E nin L üzerine etkisinin gereği:

$$\begin{aligned} (e, l) \blacktriangleright_* l' l'' &= e \blacktriangleright' (l' l'') + l(l' l'') \\ &= [e \blacktriangleright' l'] l'' + [ll'] l'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [e \blacktriangleright' l' + ll'] l'' \\
&= [(e, l) \blacktriangleright_* l'] l''
\end{aligned}$$

ve ayrıca:

$$\begin{aligned}
[(e, l) (e', l')] \blacktriangleright_* l'' &= [ee', e \blacktriangleright' l' + e' \blacktriangleright l + ll'] \blacktriangleright_* l'' \\
&= (ee') \blacktriangleright' l'' + [e \blacktriangleright' l' + e' \blacktriangleright l + ll'] l'' \\
&= e \blacktriangleright' (e' \blacktriangleright' l'') + (e \blacktriangleright' l') l'' + (e' \blacktriangleright' l) l'' + (ll') l'' \\
&= e \blacktriangleright' (e' \blacktriangleright' l'') + e \blacktriangleright' (l' l'') + l (e' \blacktriangleright' l'') + l (l' l'') \\
&= e \blacktriangleright' [e' \blacktriangleright' l'' + l' l''] + l [e' \blacktriangleright' l'' + l' l''] \\
&= (e, l) \blacktriangleright_* [e' \blacktriangleright' l'' + l' l''] \\
&= (e, l) \blacktriangleright_* [(e', l') \blacktriangleright_* l'']
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Tanımlanan bu $\blacktriangleright_*$ etkisi yardımıyla,

$$(E \ltimes_{\blacktriangleright'} L) \ltimes_{\blacktriangleright_*} L$$

şeklinde yeni bir yarı-direkt çarpım cebiri elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.13 E nin $((E \ltimes_{\blacktriangleright'} L) \ltimes_{\blacktriangleright_*} L)$ üzerine,

$$e \blacktriangleright_e^1 (e', l, l') = (ee', \partial_1(e) \blacktriangleright l - \{e' \otimes e\}, \partial_1(e) \blacktriangleright l')$$

şeklinde bir etkisi mevcuttur.

İspat: Öcelikle,

$$\begin{aligned}
e \blacktriangleright_e^1 [(f, l, l')(g, k, k')] &= e \blacktriangleright_e^1 (fg, f \blacktriangleright' k + g \blacktriangleright' l + lk, f \blacktriangleright' k' + lk' + g \blacktriangleright' l' + kl' + l'k') \\
&= (e(fg), \partial_1(e) \blacktriangleright (f \blacktriangleright' k + g \blacktriangleright' l + lk) - \{fg \otimes e\}, \\
&\quad \partial_1(e) \blacktriangleright (f \blacktriangleright' k' + lk' + g \blacktriangleright' l' + kl' + l'k'))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (efg, \partial_1(e) \blacktriangleright (f \blacktriangleright' k) + \partial_1(e) \blacktriangleright (g \blacktriangleright' l) + \partial_1(e) \blacktriangleright (lk) - \{fg \otimes e\}, \\
&\quad \partial_1(e) \blacktriangleright (f \blacktriangleright' k') + \partial_1(e) \blacktriangleright (lk') + \partial_1(e) \blacktriangleright (g \blacktriangleright' l') + \partial_1(e) \blacktriangleright (kl') + \partial_1(e) \blacktriangleright (k'l')) \\
&= ((ef)g, (ef) \blacktriangleright' k + g \blacktriangleright' (\partial_1(e) \blacktriangleright l - \{f \otimes e\}) + (\partial_1(e) \blacktriangleright l - \{f \otimes e\})k, \\
&\quad (ef) \blacktriangleright' k' + (\partial_1(e) \blacktriangleright l - \{f \otimes e\})k' + g \blacktriangleright' (\partial_1(e) \blacktriangleright l') + k(\partial_1(e) \blacktriangleright l' + (\partial_1(e) \blacktriangleright l')k')) \\
&= (ef, \partial_1(e) \blacktriangleright l - \{f \otimes e\}, \partial_1(e) \blacktriangleright l') (g, k, k') = [e \blacktriangleright_e^1 (f, l, l')] (g, k, k').
\end{aligned}$$

elde edilir. Dikkat edilirse yukarıdaki adımlarda:

$$\begin{aligned}
\partial_1(e) \blacktriangleright (f \blacktriangleright' k) &= \partial_1(e) \blacktriangleright \{f \otimes \partial_2(k)\} \\
&= \{\partial_1(e) \blacktriangleright f \otimes \partial_2(k)\} \\
&= \{fe - \partial_2\{f \otimes e\} \otimes \partial_2(k)\} \\
&= \{fe \otimes \partial_2(k)\} - \{\partial_2\{f \otimes e\} \otimes \partial_2(k)\} \\
&= (fe) \blacktriangleright' k - \{f \otimes e\}k
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\{fg \otimes e\} &= \{gf \otimes e\} \\
&= \{g \otimes fe\} - \partial_1(e) \blacktriangleright \{g \otimes f\} \\
&= \{g \otimes fe\} - \{g \otimes \partial_1(e) \blacktriangleright f\} \\
&= \{g \otimes fe - \partial_1(e) \blacktriangleright f\} \\
&= \{g \otimes \partial_2\{f \otimes e\}\} \\
&= g \blacktriangleright' \{f \otimes e\}
\end{aligned}$$

özellikleri kullanılmıştır.

Diğer yandan:

$$\begin{aligned}
(e_1 e_2) \blacktriangleright_e^1 (e', l, l') &= ((e_1 e_2) e', \partial_1(e_1 e_2) \blacktriangleright l - \{e' \otimes (e_1 e_2)\}, \partial_1(e_1 e_2) \blacktriangleright l') \\
&= ((e_1(e_2 e'), \partial_1(e_1) \blacktriangleright (\partial_1(e_2) \blacktriangleright l) - \{e' \otimes (e_1 e_2)\}, \partial_1(e_1) \blacktriangleright (\partial_1(e_2) \blacktriangleright l')) \\
&= (e_1(e_2 e'), \partial_1(e_1) \blacktriangleright (\partial_1(e_2) \blacktriangleright l) - \partial_1(e_1) \blacktriangleright \{e' \otimes e_2\}) \\
&\quad - \{e_2 e' \otimes e_1\}, \partial_1(e_1) \blacktriangleright (\partial_1(e_2) \blacktriangleright l')) \quad (\because \mathbf{2XM3}) \\
&= (e_1(e_2 e'), \partial_1(e_1) \blacktriangleright (\partial_1(e_2) \blacktriangleright l - \{e' \otimes e_2\}) - \{e_2 e' \otimes e_1\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_1(e_1) \blacktriangleright (\partial_1(e_2) \blacktriangleright l') \\
&= e_1 \blacktriangleright_e^1 (e_2 e', \partial_1(e_2) \blacktriangleright l - \{e' \otimes e_2\}, \partial_1(e_2) \blacktriangleright l') \\
&= e_1 \blacktriangleright_e^1 (e_2 \blacktriangleright_e^1 (e', l, l'))
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Yardımcı Teorem 3.14 R nin $((E \rtimes_{\blacktriangleright'} L) \rtimes_{\blacktriangleright_*} L)$ üzerine:

$$r \blacktriangleright_r^1 (e', l, l') = (r \blacktriangleright e', r \blacktriangleright l, r \blacktriangleright l')$$

şeklinde bir etkisi mevcuttur.

İspat:

$$\begin{aligned}
r \blacktriangleright_r^1 [(f, l, l')(g, k, k')] &= r \blacktriangleright_r^1 (fg, f \blacktriangleright' k + g \blacktriangleright' l + lk, f \blacktriangleright' k' + lk' + g \blacktriangleright' l' + kl' + l'k') \\
&= [r \blacktriangleright (fg), r \blacktriangleright (f \blacktriangleright' k + g \blacktriangleright' l + lk), \\
&\quad r \blacktriangleright (f \blacktriangleright' k' + lk' + g \blacktriangleright' l' + kl' + l'k')] \\
&= [(r \blacktriangleright f)g, r \blacktriangleright (f \blacktriangleright' k) + r \blacktriangleright (g \blacktriangleright' l) + r \blacktriangleright (lk), \\
&\quad r \blacktriangleright (f \blacktriangleright' k') + r \blacktriangleright (lk') + r \blacktriangleright (g \blacktriangleright' l') + r \blacktriangleright (kl') + r \blacktriangleright (l'k')] \\
&= [(r \blacktriangleright f)g, (r \blacktriangleright f) \blacktriangleright' k + g \blacktriangleright' (r \blacktriangleright l) + (r \blacktriangleright l)k, \\
&\quad (r \blacktriangleright f) \blacktriangleright' k' + (r \blacktriangleright l)k' + g \blacktriangleright' (r \blacktriangleright l') + k(r \blacktriangleright l') + (r \blacktriangleright l')k'] \\
&= [r \blacktriangleright f, r \blacktriangleright l, r \blacktriangleright l'] (g, k, k') \\
&= [r \blacktriangleright_r^1 (f, l, l')] (g, k, k')
\end{aligned}$$

elde edilir. Dikkat edilirse burada (2.1) gereği:

$$r \blacktriangleright (e \blacktriangleright' l) = (r \blacktriangleright e) \blacktriangleright' l$$

eşitliği kullanılmıştır.

Diğer yandan ikinci etki şartı kontrol edilirse:

$$(rr') \blacktriangleright_r^1 (e', l, l') = ((rr') \blacktriangleright e', (rr') \blacktriangleright l, (rr') \blacktriangleright l')$$

$$\begin{aligned}
&= \left((rr') \blacktriangleright e', (rr') \blacktriangleright l, (rr') \blacktriangleright l' \right) \\
&= \left(r \blacktriangleright (r' \blacktriangleright e), r \blacktriangleright (r' \blacktriangleright l), r \blacktriangleright (r' \blacktriangleright l') \right) \\
&= r \blacktriangleright_r^1 (r' \blacktriangleright e, r' \blacktriangleright l, r' \blacktriangleright l') \\
&= r \blacktriangleright_r^1 (r' \blacktriangleright_r^1 (e, l, l'))
\end{aligned}$$

elde edilerek ispat tamamlanır. $\square$

Böylece, yukarıda verilen son iki yardımcı teorem yardımıyla aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilir:

Yardımcı Teorem 3.15 $(R \ltimes_{\blacktriangleright} E)$ nin $((E \ltimes_{\blacktriangleright} L) \ltimes_{\blacktriangleright_*} L)$ üzerine:

$$(r, e) \blacktriangleright^1 (e', l, l') = (r \blacktriangleright e' + ee', r \blacktriangleright l + \partial_1(e) \blacktriangleright l - \{e' \otimes e\}, r \blacktriangleright l' + \partial_1(e) \blacktriangleright l')$$

şeklinde bir $\blacktriangleright^1$ etkisi mevcuttur.

Fakat bir sonraki adımın inşasında, Yardımcı Teorem 3.13 dekinden bağımsız olan, aşağıdaki şekilde tanımlı yeni bir etkiye ihtiyaç duyulmaktadır:

Yardımcı Teorem 3.16 Ayrıca E nin $((E \ltimes_{\blacktriangleright} L) \ltimes_{\blacktriangleright_*} L)$ üzerine:

$$e \blacktriangleright_e^2 (e', l, l') = (ee', e \blacktriangleright' l, \partial_1(e) \blacktriangleright l' - \{\partial_2(l) + e' \otimes e\})$$

şeklinde bir başka etkisi mevcuttur.

İspat: Öncelikle, E nin $((\{0\} \ltimes_{\blacktriangleright} \{0\}) \ltimes_{\blacktriangleright_*} L)$ üzerine etkisi:

$$\begin{aligned}
e \blacktriangleright_e^2 [(0, 0, l')(0, 0, k')] &= e \blacktriangleright_e^2 (0, 0, l'k') \\
&= (0, 0, \partial_1(e) \blacktriangleright (l'k')) \\
&= (0, 0, (\partial_1(e) \blacktriangleright l')k') \\
&= (0, 0, \partial_1(e) \blacktriangleright l')(0, 0, k') \\
&= [e \blacktriangleright_e^2 (0, 0, l')] (0, 0, k')
\end{aligned}$$

formunda olup açıktır.

Şimdi E nin $((E \ltimes_{\blacktriangleright} L) \ltimes_{\blacktriangleright_*} \{0\})$ üzerine etkisi ele alınsın. Burada aşağıdaki şekilde iki farklı durum ortaya çıkacaktır:

$$\begin{aligned}
 e \blacktriangleright_e^2 [(0, l, 0)(0, k, 0)] &= e \blacktriangleright_e^2 (0, lk, 0) \\
 &= (0, e \blacktriangleright' (lk), -\{\partial_2(lk) \otimes e\}) \\
 &= (0, e \blacktriangleright' l, -\{\partial_2(l) \otimes e\})(0, k, 0) \\
 &= [e \blacktriangleright_e^2 (0, l, 0)] (0, k, 0)
 \end{aligned}$$

ve:

$$\begin{aligned}
 e \blacktriangleright_e^2 [(f, 0, 0)(g, 0, 0)] &= e \blacktriangleright_e^2 (fg, 0, 0) \\
 &= (e(fg), 0, -\{fg \otimes e\}) \\
 &= ((ef)g, 0, -g \blacktriangleright' \{f \otimes e\}) \\
 &= ((ef)g, 0, g \blacktriangleright' (-\{f \otimes e\})) \\
 &= (ef, 0,)(g, 0, 0) \\
 &= [e \blacktriangleright_e^2 (f, 0, 0)] (g, 0, 0)
 \end{aligned}$$

dir. Dikkat edilirse yukarıdaki adımlarda:

$$\begin{aligned}
 g \blacktriangleright' \{f \otimes e\} &= \{g \otimes \partial_2 \{f \otimes e\}\} \\
 &= \{g \otimes fe - \partial_1(e) \blacktriangleright f\} \\
 &= \{g \otimes fe\} - \{g \otimes \partial_1(e) \blacktriangleright f\} \\
 &= \{gf \otimes e\} + \partial_1(e) \blacktriangleright \{g \otimes f\} - \{g \otimes \partial_1(e) \blacktriangleright f\} \\
 &= \{gf \otimes e\} + \partial_1(e) \blacktriangleright \{g \otimes f\} - \partial_1(e) \blacktriangleright \{g \otimes f\} \\
 &= \{gf \otimes e\} \\
 &= \{fg \otimes e\}
 \end{aligned}$$

ve (2-çaprazlanmış modülün **2XM3** askiyomu yardımıyla):

$$\begin{aligned}
 (e_1 e_2) \blacktriangleright_e^2 (e', l, l') &= ((e_1 e_2) e', (e_1 e_2) \blacktriangleright' l, \partial_1(e_1 e_2) \blacktriangleright l' - \{\partial_2(l) + e' \otimes (e_1 e_2)\}) \\
 &= (e_1(e_2 e'), e_1 \blacktriangleright' (e_2 \blacktriangleright' l), \\
 &\quad \partial_1(e_1) \blacktriangleright (\partial_1(e_2) \blacktriangleright l' - \{\partial_2(l) + e' \otimes e_2\}) - \{\partial_2(e_2 \blacktriangleright l) + e_2 e' \otimes e_1\})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e_1 \blacktriangleright_e^2 (e_2 e', e_2 \blacktriangleright' l, \partial_1(e_2) \blacktriangleright l' - \{\partial_2(l) + e' \otimes e_2\}) \\
&= e_1 \blacktriangleright_e^2 (e_2 \blacktriangleright_e^2 (e', l, l')).
\end{aligned}$$

özellikleri kullanılmıştır. $\square$

Sıradaki yardımcı teorem yine basit işlemler yardımıyla açık olup, yardımcı teorem 3.5.1 yardımıyla bir sonraki yardımcı teorem direkt olarak verilebilir:

Yardımcı Teorem 3.17 L nin $((E \ltimes_{\blacktriangleright'} L) \ltimes_{\blacktriangleright_*} L)$ üzerine:

$$k \blacktriangleright_l^2 (e', l, l') = (0, e' \blacktriangleright' k + kl, -\{\partial_2(l) + e' \otimes \partial_2(k)\})$$

etkisi mevcuttur.

Yardımcı Teorem 3.18 $(E \ltimes_{\blacktriangleright'} L)$ nin $((E \ltimes_{\blacktriangleright'} L) \ltimes_{\blacktriangleright_*} L)$ üzerine:

$$(e, l'') \blacktriangleright^2 (e', l, l') = (ee', e \blacktriangleright' l + e' \blacktriangleright' l'' + l''l, \partial_1(e) \blacktriangleright l' - \{\partial_2(l) + e' \otimes \partial_2(l'') + e\})$$

şeklinde bir $\blacktriangleright^2$ etkisi mevcuttur.

Son olarak da, (yardımcı teorem 3.15 ve 3.18 yardımıyla) 3-simplekslerin inşasında temel oluşturacak olan sıradaki etki verilebilir:

Yardımcı Teorem 3.19 $((R \ltimes_{\blacktriangleright} E) \ltimes_{\blacktriangleright_*} (E \ltimes_{\blacktriangleright'} L))$ nin $((E \ltimes_{\blacktriangleright'} L) \ltimes_{\blacktriangleright_*} L)$ üzerine:

$$(0, 0, e, l'') \blacktriangleright_{\dagger} (e', l, l') = (e, l'') \blacktriangleright^2 (e', l, l'),$$

ve

$$(r, e, 0, 0) \blacktriangleright_{\dagger} (e', l, l') = (r, e) \blacktriangleright^1 (e', l, l').$$

şeklinde tanımlı bir $\blacktriangleright_{\dagger}$ etkisi mevcuttur.

3.5.2 3- Simpleksler

Tanım 3.20 $\mathcal{A}$ üzerindeki **3- simpleks** cebirini yarı-direkt çarpım yardımıyla:

$$\mathcal{A}_3 \doteq ((R \ltimes_{\blacktriangleright} E) \ltimes_{\blacktriangleright_*} (E \ltimes_{\blacktriangleright'} L)) \ltimes_{\blacktriangleright_{\dagger}} ((E \ltimes_{\blacktriangleright'} L) \ltimes_{\blacktriangleright_*} L)$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca her bir $(r, e, e', l, e'', l', l'') \in \mathcal{A}_3$ elemanı da simplisel form yardımıyla:

$$\begin{array}{c}
 r + \partial_1(e) + \partial_1(e') + \partial_1(e'') \\
 \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 e'' + \partial_2(l') + \partial_2(l'') \quad \quad \quad e' + e'' + \partial_2(l) + \partial_2(l') \\
 \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 \boxed{l' + l''} \quad r + \partial_1(e) + \partial_1(e') \quad \boxed{l''} \\
 \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 e + e' \quad \quad \quad e' + \partial_2(l) \\
 \boxed{l} \\
 r \quad \quad \quad r + \partial_1(e)
 \end{array}
 \quad (3.3)$$

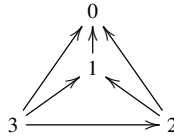
şeklinde resmedilir.

Not 3.21 Tanımlanan 3-simpleks ve 2-simpleksler arasında $d_{0,1,2,3}: \mathcal{A}_3 \rightarrow \mathcal{A}_2$ olarak,

$$\begin{aligned}
 d_0(r, e, e', l, e'', l', l'') &= (r, e, e', l), \\
 d_1(r, e, e', l, e'', l', l'') &= (r, e, e' + e'', l + l'), \\
 d_2(r, e, e', l, e'', l', l'') &= (r, e + e', e'', l' + l''), \\
 d_3(r, e, e', l, e'', l', l'') &= (r + \partial_1(e), e' + \partial_2(l), e'' + \partial_2(l'), l'').
 \end{aligned}$$

şeklinde dört farklı yüzey morfizmi mevcuttur.

Dikkat edilirse bu dört morfizmin her biri, yukarıda tanımlanan tetrahedronun (3.3) farklı bir yüzüne sınır dönüşümü olarak:



şeklinde bir numaralandırma ile aşağıdaki şekilde karşılık gelmektedir:

$$d_0 \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \right) = \begin{array}{c} r + \partial_1(e) + \partial_1(e') \\ \uparrow \\ e + e' \quad \quad \quad \boxed{l} \quad e' + \partial_2(l) \\ \uparrow \\ r \quad \quad \quad r + \partial_1(e) \\ e \end{array}$$

$$\begin{aligned}
d_1 \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \bullet \end{array} \right) &= \begin{array}{c} r+\partial_1(e)+\partial_1(e')+\partial_1(e'') \\ \nearrow e+e'+e'' \quad \boxed{l+l'} \quad \nwarrow e'+e''+\partial_2(l)+\partial_2(l') \\ r \xrightarrow{e} r+\partial_1(e) \end{array} \\
d_2 \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \bullet \end{array} \right) &= \begin{array}{c} r+\partial_1(e)+\partial_1(e')+\partial_1(e'') \\ \nearrow e+e'+e'' \quad \boxed{l'+l''} \quad \nwarrow e''+\partial_2(l')+\partial_2(l'') \\ r \xrightarrow{e+e'} r+\partial_1(e)+\partial_1(e') \end{array} \\
d_3 \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \bullet \end{array} \right) &= \begin{array}{c} r+\partial_1(e)+\partial_1(e')+\partial_1(e'') \\ \nearrow e'+e''+\partial_2(l)+\partial_2(l') \quad \boxed{l''} \quad \nwarrow e''+\partial_2(l')+\partial_2(l'') \\ r+\partial_1(e) \xrightarrow{e'+\partial_2(l)} r+\partial_1(e)+\partial_1(e') \end{array}
\end{aligned}$$

Not 3.22 Benzer şekilde bu iki simpleks arasında, $s_{0,1,2}: \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_3$ olarak,

$$s_0(r, e, e', l) = (r, e, e', l, 0, 0, 0),$$

$$s_1(r, e, e', l) = (r, e, 0, 0, e', l, 0),$$

$$s_2(r, e, e', l) = (r, 0, e, 0, e', 0, l).$$

şeklinde üç farklı dejenere morfizmi tanımlıdır ve bu morfizmler simplisel formda:

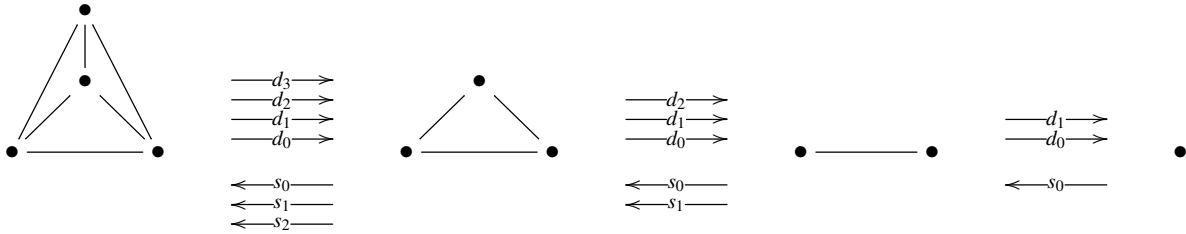
$$s_0 \left(\begin{array}{c} \nearrow e+e' \quad \nwarrow \\ r \xrightarrow{e} r+\partial_1(e) \end{array} \right) = \begin{array}{c} r+\partial_1(e)+\partial_1(e') \\ \nearrow e+e' \quad \boxed{0} \quad \nwarrow e' \\ \boxed{0} \quad r+\partial_1(e)+\partial_1(e') \quad \boxed{0} \\ \nearrow e+e' \quad \boxed{l} \quad \nwarrow e'+\partial_2(l) \\ r \xrightarrow{e} r+\partial_1(e) \end{array}$$

$$\begin{aligned}
s_1 \left(\begin{array}{c} r \xrightarrow{e+e'} r+\partial_1(e)+\partial_1(e') \\ \quad \quad \quad \uparrow \boxed{1} \quad \quad \quad \uparrow e'+\partial_2(l) \\ r \xrightarrow{e} r+\partial_1(e) \end{array} \right) &= \begin{array}{c} r+\partial_1(e)+\partial_1(e') \\ \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ e+e' \quad \quad \quad e'+\partial_2(l) \\ \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \boxed{1} \quad \quad \quad \boxed{0} \\ r \xrightarrow{e} r+\partial_1(e) \quad \quad \quad r+\partial_1(e) \end{array} \\
s_2 \left(\begin{array}{c} r \xrightarrow{e+e'} r+\partial_1(e)+\partial_1(e') \\ \quad \quad \quad \uparrow \boxed{1} \quad \quad \quad \uparrow e'+\partial_2(l) \\ r \xrightarrow{e} r+\partial_1(e) \end{array} \right) &= \begin{array}{c} r+\partial_1(e)+\partial_1(e') \\ \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ e+e' \quad \quad \quad e'+\partial_2(l) \\ \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \boxed{1} \quad \quad \quad \boxed{1} \\ r \xrightarrow{e} r+\partial_1(e) \quad \quad \quad r+\partial_1(e) \end{array}
\end{aligned}$$

şeklinde

resmedilmektedir.

Not 3.23 Böylece 3-simpleks cebir yapısının da inşaa edilmesi sonucu, Not 3.10 de bahsedildiği üzere, aşağıdaki şekilde resmedilen bir 3-truncated simplisel cebir yapısı elde edilmektedir:



4. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL MORFİZMLERİNİN HOMOTOPİSİ ve GRUBOİD

4.1 Giriş

Bu bölümde çaprazlanmış modül morfizmleri arasındaki homotopi tanımlanacaktır. Ardından, herhangi iki keyfi $\mathcal{A} = (E, R, \partial)$ ve $\mathcal{A}' = (E', R', \partial')$ çaprazlanmış modülü için; $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ şeklinde tanımlı çaprazlanmış modül morfizmleri ve bunlar arasındaki homotopiler yardımıyla da bir gruboid yapısı oluşturulacaktır.

4.2 Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopisi

Gruboidler üzerinde çaprazlanmış kompleks morfizmlerinin homotopisi ilk olarak Brown ve Golasinski tarafından [6] de tanımlanmıştır. Çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisi ise gruplar için Gohla ve Martins tarafından [20] de ele alınmıştır. Burada ise aynı durum ve sonuçlar değişmeli cebirler üzerinde incelenecektir.

Bu kısımdaki tüm tanımlama ve incelemeler iki sabit (keyfi) $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}'$ çaprazlanmış modülleri üzerinde yapılacaktır.

Tanım 4.1 $f_0: R \rightarrow R'$ bir cebir morfizmi olsun. Bu durumda, $s: R \rightarrow E'$ κ -lineer dönüşümü (her $r, r' \in R$ için):

$$s(rr') = f_0(r) \blacktriangleright s(r') + f_0(r') \blacktriangleright s(r) + s(r)s(r') \quad (4.1)$$

şartını sağlıyorsa, bir **f_0 -derivasyon** olarak adlandırılır.

Teorem 4.2 $f = (f_1, f_0): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ bir çaprazlanmış modül morfizmi ve $s: R \rightarrow E'$ bir f_0 -derivasyon olmak üzere ($e \in E$ ve $r \in R$ için):

$$\begin{aligned} g_0(r) &= f_0(r) + (\partial' \circ s)(r), \\ g_1(e) &= f_1(e) + (s \circ \partial)(e) \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanan $g = (g_1, g_0)$ ikilisi $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ şeklinde yeni bir çaprazlanmış modül morfizmidir.

İspat: Öncelikle g_0 ve g_1 in birer cebir morfizmi olduğu gösterilmelidir. Bu durumda her $r, r' \in R$ ve $k \in \kappa$ için,

$$g_0(r + r') = g_0(r) + g_0(r') \quad \text{ve} \quad g_0(kr) = k g_0(r)$$

olduğu (benzer şekilde g_1 için de), s nin κ -lineer olmasından dolayı açıktır. Ayrıca:

$$\begin{aligned} (g_0 \circ \partial)(r) &= f_0(\partial(r)) + (\partial' \circ s)(\partial(r)) \\ &= \partial'(f_1(r)) + \partial'((s \circ \partial)(r)) \\ &= \partial(f_1(r) + (s \circ \partial)(r)) \\ &= (\partial' \circ g_1)(r) \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\partial} & R \\ g_1 \downarrow & & \downarrow g_0 \\ E' & \xrightarrow{\partial'} & R' \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Diğer yandan her $r, r' \in R$ için:

$$\begin{aligned} g_0(rr') &= f_0(rr') + (\partial' \circ s)(rr') \\ &= f_0(r)f_0(r') + \partial'(s(rr')) \\ &= f_0(r)f_0(r') + \partial'(f_0(r) \blacktriangleright s(r') + f_0(r') \blacktriangleright s(r) + s(r)s(r')) \\ &= f_0(r)f_0(r') + \partial'(f_0(r) \blacktriangleright s(r')) + \partial'(f_0(r') \blacktriangleright s(r)) + \partial'(s(r)s(r')) \\ &= f_0(r)f_0(r') + f_0(r)\partial'(s(r')) + f_0(r')\partial'(s(r)) + \partial'(s(r))\partial'(s(r')) \\ &= f_0(r)f_0(r') + f_0(r)(\partial' \circ s)(r') + f_0(r')(\partial' \circ s)(r) + (\partial' \circ s)(r)(\partial' \circ s)(r') \\ &= [f_0(r) + (\partial' \circ s)(r)][f_0(r') + (\partial' \circ s)(r')] \\ &= g_0(r)g_0(r') \end{aligned}$$

olup o halde g_0 bir cebir morfizmidir. Benzer şekilde g_1 de bir cebir morfizmidir.

Son olarak, R nin E üzerine etkisinin g altında korunduğu, yani her $r \in R$ ve $e \in E$ için:

$$g_1(r \blacktriangleright e) = f_1(r \blacktriangleright e) + s(\partial(r \blacktriangleright e))$$

$$\begin{aligned}
&= f_0(r) \blacktriangleright f_1(e) + s(r\partial(e)) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright f_1(e) + f_0(r) \blacktriangleright s(\partial(e)) + f_0(\partial(e)) \blacktriangleright s(r) + s(r)s(\partial(e)) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright f_1(e) + f_0(r) \blacktriangleright s(\partial(e)) + \partial'(f_1(e)) \blacktriangleright s(r) + s(r)s(\partial(e)) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright f_1(e) + f_0(r) \blacktriangleright s(\partial(e)) + f_1(e)s(r) + s(r)s(\partial(e)) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright f_1(e) + f_0(r) \blacktriangleright s(\partial(e)) + s(r)f_1(e) + s(r)s(\partial(e)) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright f_1(e) + f_0(r) \blacktriangleright s(\partial(e)) + \partial'(s(r) \blacktriangleright f_1(e)) + \partial'(s(r) \blacktriangleright s(\partial(e))) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright [f_1(e) + (s \circ \partial)(e)] + \partial'(s(r)) \blacktriangleright [f_1(e) + (s \circ \partial)(e)] \\
&= [f_0(r) + (\partial' \circ s)(r)] \blacktriangleright [f_1(e) + (s \circ \partial)(e)] \\
&= g_0(r) \blacktriangleright g_1(e)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada dikkat edilirse, son iki adımda ikinci Peiffer-Whitehead kuralı (**XM2**; Tanım 2.3) kullanılmıştır. Dolayısıyla bu teoremin genel olarak ön-çaprazlanmış modüller için geçerli olmayacağı söylenebilir. $\square$

✓ Sonuç olarak, (f_0, s) ikilisi, f morfizmini g morfizmine bağlayan **bir noktasal homotopi** olarak adlandırılır ve kısaca:

$$f \xrightarrow{(f_0, s)} g \quad (4.3)$$

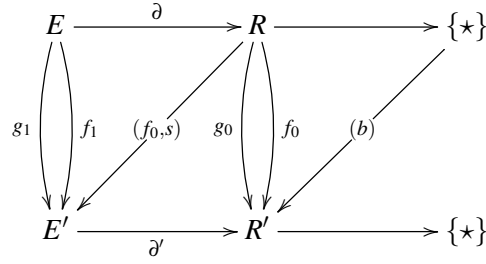
şeklinde gösterilir.

Tüm bu verilenler diyagramatik olarak aşağıdaki şekilde özetlenir:

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{\partial} & R \\
\downarrow g_1 & \searrow (f_0, s) & \downarrow g_0 \\
E' & \xrightarrow{\partial'} & R'
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\downarrow f_1 \\
\downarrow f_0
\end{array}$$

Not 4.3 (Neden Noktasal?) Literatürde “noktasal” homotopi kavramı ilk kez grup hali için [9] de yer almaktadır. Burada tanımlanan noktasal olmayan, bir başka deyişle daha genel biçimdeki homotopi tanımı paralel olarak değişmeli cebirler için düşünüldüğü takdirde mevcut homotopi;

$\{\star\}$ sıfır objesi ile birlikte $b \in R'$ elemanı (morfizmi) ve:



diagramı yardımıyla, (4.2) de verilen şartların daha da genelleştirilmesi sonucu:

$$\begin{aligned} g_0(r) &= b(f_0(r) + (\partial' \circ s)(r)) \\ g_1(e) &= b \blacktriangleright (f_1(e) + (s \circ \partial)(e)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanır. Bu ise değişmeli cebirler için ancak $b^2 = b$ olması durumunda (ya da farklı henüz incelenmemiş durumlarda) mümkündür. Dolayısıyla noktasal olmayan homopinin detaylı olarak incelenmesi başka bir çalışmaya bırakılmıştır.

Dolayısıyla tezin genelinde hem çaprazlanmış, hem de 2-çaprazlanmış modüller için sadece noktasal homotopi kavramı ele alınacak olup, bu kavramdan da kısaca ve sadece homotopi diye söz edilecektir.

4.3 Gruboid

Bir gruboid yapısının oluşturulabilmesi için morfizmler arasında bir kompozisyon tanımlanmalı ve bu kompozisyonun asosyatif olduğu gösterilmelidir. Dahası bu kompozisyon için sağ ve sol birimler ve her bir morfizmin tersinin de tanımlanması gerekir. Bu kısımda objeleri $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ arasındaki çaprazlanmış modül morfizmleri ve morfizmleri de bu bunlar arasında tanımlanan homotopiler olan bir gruboid yapısı oluşturulacaktır.

Yardımcı Teorem 4.4 (Birim eleman) $f = (f_1, f_0): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ bir çaprazlanmış modül morfizmi için,

$$0_s : r \in R \mapsto 0_{E'} \in E'$$

biçiminde tanımlanan sıfır morfizmi için:

$$f \xrightarrow{(f_0, 0_s)} f \quad (4.5)$$

olur.

İspat: Her $r, r' \in R$ için:

$$f_0(r) = f_0(r) + (\partial' \circ 0_s)(r), \quad f_1(r) = f_1(r) + (0_s \circ \partial)(r)$$

ve diğer yandan cebir etkisinin özelliği gereği:

$$0_s(rr') = f_0(r) \blacktriangleright 0_s(r') + f_0(r') \blacktriangleright 0_s(r) + 0_s(r)0_s(r')$$

olup gerekli şartlar sağlanmış olur. $\square$

Yardımcı Teorem 4.5 (Ters eleman) $f = (f_1, f_0)$ ve $g = (g_1, g_0)$ ikilileri $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{A}'$ ye tanımlı çaprazlanmış modül morfizmleri ve:

$$f \xrightarrow{(f_0, s)} g$$

olsun. Bu durumda her $r \in R$ için:

$$\bar{s}(r) = -s(r) \tag{4.6}$$

biçiminde tanımlanan $\bar{s} = -s: R \rightarrow E'$ dönüşümü için:

$$g \xrightarrow{(g_0, -s)} f \tag{4.7}$$

olur.

İspat: s bir f_0 -derivasyon olduğu için:

$$f_0(r) = g_0(r) + (\partial' \circ \bar{s})(r) \quad \text{ve} \quad f_1(r) = g_1(r) + (\bar{s} \circ \partial)(r)$$

eşitlikleri kolayca elde edilir ve (4.2) şartları sağlanır. Ayrıca (4.1) şartı kontrol edilirse:

$$\begin{aligned} \bar{s}(rr') &= -(s(rr')) \\ &= -(f_0(r) \blacktriangleright s(r')) - (f_0(r') \blacktriangleright s(r)) - (s(r)s(r')) \\ &= -(f_0(r) \blacktriangleright s(r')) - (f_0(r') \blacktriangleright s(r)) - s(r)s(r') + s(r)s(r') - s(r)s(r') \\ &= -(f_0(r) \blacktriangleright s(r')) - ((\partial'_1 \circ s)(r) \blacktriangleright s(r')) - (f_0(r') \blacktriangleright s(r)) \\ &\quad - ((\partial'_1 \circ s)(r') \blacktriangleright s(r)) + s(r)s(r') \quad (\because \text{2. Peiffer-Whitehead şartı}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(f_0(r) + (\partial'_1 \circ s)(r)) \blacktriangleright s(r') - (f_0(r) + (\partial'_1 \circ s)(r)) \blacktriangleright s(r) + s(r)s(r') \\
&= (f_0(r) + (\partial'_1 \circ s)(r)) \blacktriangleright -s(r') + (f_0(r) + (\partial'_1 \circ s)(r)) \blacktriangleright -s(r) + s(r)s(r') \\
&= g_0(r) \blacktriangleright -s(r') + g_0(r') \blacktriangleright -s(r) + s(r)s(r') \\
&= g_0(r) \blacktriangleright \bar{s}(r') + g_0(r') \blacktriangleright \bar{s}(r) + \bar{s}(r)\bar{s}(r').
\end{aligned}$$

olup $\bar{s}$ bir g_0 -derivasyon tanımlar. $\square$

Yardımcı Teorem 4.6 (Kompozisyon) $f, g, h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ çaprazlanmış modül morfizimleri olmak üzere:

$$f \xrightarrow{(f_0, s)} g \quad \text{ve} \quad g \xrightarrow{(g_0, s')} h$$

verilsin. Bu verilenlerle birlikte:

$$(s + s')(r) = s(r) + s'(r) \tag{4.8}$$

biçiminde tanımlanan $(s + s'): R \rightarrow E'$ κ -lineer dönüşümü için:

$$f \xrightarrow{(f_0, s+s')} h \tag{4.9}$$

olur.

İspat: Mevcut $f \xrightarrow{(f_0, s)} g$ ve $g \xrightarrow{(g_0, s')} h$ homotopileri yardımıyla:

$$h_0(r) = f_0(r) + (\partial' \circ (s + s'))(r), \quad h_1(e) = f_1(e) + ((s + s') \circ \partial)(e)$$

olup (4.2) şartlarının sağlandığı açıktır. Dolayısıyla kontrol edilmesi gereken tek şey, $s + s'$ nün (4.1) da verilen f_0 -derivasyon şartını sağlayıp sağlamadığıdır. Her $r, r' \in R$ için:

$$\begin{aligned}
(s + s')(rr') &= s(rr') + s'(rr') \\
&= f_0(r) \blacktriangleright s(r') + f_0(r') \blacktriangleright s(r) + s(r)s(r') + g_0(r) \blacktriangleright s'(r') \\
&\quad + g_0(r') \blacktriangleright s'(r) + s'(r)s'(r') \\
&= f_0(r) \blacktriangleright s(r') + f_0(r') \blacktriangleright s(r) + s(r)s(r') + (f_0(r) + (\partial'_1 \circ s)(r)) \blacktriangleright s'(r') \\
&\quad + (f_0(r') + (\partial'_1 \circ s)(r')) \blacktriangleright s'(r) + s'(r)s'(r') \\
&= f_0(r) \blacktriangleright s(r') + f_0(r') \blacktriangleright s(r) + s(r)s(r') + f_0(r) \blacktriangleright s'(r') + (\partial'_1 \circ s)(r) \blacktriangleright s'(r') \\
&\quad + f_0(r') \blacktriangleright s'(r) + (\partial'_1 \circ s)(r') \blacktriangleright s'(r) + s'(r)s'(r')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_0(r) \blacktriangleright s(r') + f_0(r') \blacktriangleright s(r) + s(r)s(r') + f_0(r) \blacktriangleright s'(r') + s(r)s'(r') \\
&\quad + f_0(r') \blacktriangleright s'(r) + s(r')s'(r) + s'(r)s'(r') \quad (\because \text{XM2 şartı}) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright (s + s')(r') + f_0(r') \blacktriangleright (s + s')(r) + (s + s')(r)(s + s')(r'),
\end{aligned}$$

olup $(s + s')$ dönüşümünün f ile h yi bağlayan bir f_0 -derivasyon olduğu görülür. $\square$

♣ Burada toplama işlemimin özelliği gereği, homotopilerin kompozisyon işleminin asosyatif olduğu açıktır.

Not 4.7 Dikkat edilirse son iki yardımcı teoremden, çaprazlanmış modülün ikinci Peiffer-Whitehead şartı (XM2; Tanım 2.3) sıklıkla kullanılmıştır. Dolayısıyla bu elde edilen sonuçlar önçaprazlanmış modüller ya da 2-çaprazlanmış modüller üzerinde çalışıldığı takdirde geçerli olmayacaktır. Zaten tezin ileriki kısımlarında 2-çaprazlanmış modüllerin homotopisinde en önemli nokta, bu sorunun nasıl üstesinden gelinebileceği olacaktır. Bu amaçla da A olarak bir serbest 2-çaprazlanmış modülün sabitlenmesine ihtiyaç duyulacaktır ve yeri geldiğinde bu durum sebebiyle birlikte detaylıca açıklanacaktır.

Sonuç olarak bölümün esas teoremi aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 4.8 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}'$ (değişmeli cebirlerin) herhangi iki keyfi çaprazlanmış modülü olsun. Bu durumda **objeleri** çaprazlanmış modül morfizmleri; **morfizmleri** de bunların homotopileri olan ve kısaca $\text{HOM}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ ile gösterilen bir gruboid yapısı elde edilir.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.9 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}'$ (değişmeli cebirlerin) herhangi iki keyfi çaprazlanmış modülü olmak üzere, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ şeklindeki çaprazlanmış modül morfizmleri kümesi üzerinde tanımlı:

$$“f \simeq g \iff f \text{ ile } g \text{ yi bağlayan bir } f_0\text{-derivasyonu mevcuttur}” \quad (4.10)$$

bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

5. 2-ÇAPRAZLANMIŞ MODÜL MORFİZMLERİNİN HOMOTOPİSİ ve GRUBOİD

5.1 Giriş

Bu bölümde, bir önceki bölümde çaprazlanmış modüller için verilen tanımlama ve elde edilen sonuçlar bir boyut ileri taşınarak 2-çaprazlanmış modüller için ele alınacaktır. Dolayısıyla da öncelikle 2-çaprazlanmış modül morfizmleri arasında homotopi tanımlanacak ve daha sonra çaprazlanmış modül morfizmleri ve bu morfizmler arasındaki homotopiler yardımıyla gruboid yapısı elde edilecektir.

Yine bu bölümde aksi belirtilene dek, **en genel halde**, yani herhangi bir kısıtlama olmadan tanımlı $\mathcal{A} = (L, E, R, \partial_1, \partial_2, \{, \})$ ve $\mathcal{A}' = (L', E', R', \partial'_1, \partial'_2, \{, \})$ şeklinde iki sabit 2-çaprazlanmış modül üzerinde çalışılacaktır.

5.2 2-Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin Homotopisi

Tanım 5.1 $f = (f_2, f_1, f_0): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi olsun. $s: R \rightarrow E', t: E \rightarrow L'$ şeklinde tanımlı κ -linear dönüşümleri (her $r, r' \in R$ ve $e, e' \in E$ için):

$$s(rr') = f_0(r) \blacktriangleright s(r') + f_0(r') \blacktriangleright s(r) + s(r)s(r')$$

ve:

$$\begin{aligned} t(ee') &= \{(s \circ \partial_1)(e) \otimes f_1(e')\} + \{(s \circ \partial_1)(e') \otimes f_1(e)\} + f_1(e) \blacktriangleright' t(e') \\ &\quad + f_1(e') \blacktriangleright' t(e) + (s \circ \partial_1)(e) \blacktriangleright' t(e') + (s \circ \partial_1)(e') \blacktriangleright' t(e) + t(e)t(e'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(r \blacktriangleright e) &= f_0(r) \blacktriangleright t(e) + (\partial'_1 \circ s)(r) \blacktriangleright t(e) + \{s(r) \otimes f_1(e)\} \\ &\quad - \{f_1(e) \otimes s(r)\} - \{(s \circ \partial_1)(e) \otimes s(r)\} \end{aligned}$$

şartları sağlanıyorsa (s, t) ikilisine bir **kuadratik f-derivasyon** denir.

Dikkat edilirse burada s bir f_0 -derivasyondur (Tanım 4.1).

Yardımcı Teorem 5.2 $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi ve (s, t) bir kuadratik f -derivasyon olmak üzere, her $l, l' \in L$ ve $r \in R$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned} t(\partial_2(l)\partial_2(l')) &= f_2(l)(t \circ \partial_2)(l') + f_2(l')(t \circ \partial_2)(l) + (t \circ \partial_2)(l)(t \circ \partial_2)(l'), \\ t(r \blacktriangleright \partial_2(l)) &= f_0(r) \blacktriangleright (t \circ \partial_2)(l) + (\partial'_1 \circ s)(r) \blacktriangleright f_2(l) + (\partial'_1 \circ s)(r) \blacktriangleright (t \circ \partial_2)(l) \end{aligned}$$

İspat: Tezin geri kalanında, uzun işlem gerektiren ispatların daha kompakt gözükebilmesi açısından, bileşke işlemi “ $\circ$ ” kullanılmayacak olup, ayrıca $\{e \otimes f\}$ Peiffer liftingi yerine sadece $\{e, f\}$ notasyonu kullanılacaktır.

2-çaprazlanmış modülün tanımından hatırlanacağı üzere, $(\partial_2: L \rightarrow E, \blacktriangleright')$ bir çaprazlanmış modül olup, **XM2** şartı gereği (her $r \in R$ ve $l, l' \in L$ için):

$$\begin{aligned} &t(\partial_2(l)\partial_2(l')) \\ &= \{(s\partial_1)(\partial_2(l)), f_1(\partial_2(l'))\} + \{(s\partial_1)(\partial_2(l')), f_1(\partial_2(l))\} \\ &\quad + f_1(\partial_2(l)) \blacktriangleright' t(\partial_2(l')) + f_1(\partial_2(l')) \blacktriangleright' t(\partial_2(l)) \\ &\quad + (s\partial_1)(\partial_2(l)) \blacktriangleright' t(\partial_2(l')) + (s\partial_1)(\partial_2(l')) \blacktriangleright' t(\partial_2(l)) + t(\partial_2(l))t(\partial_2(l')) \\ &= \{s((\partial_1\partial_2)(l)), (f_1\partial_2)(l')\} + \{s((\partial_1\partial_2)(l')), (f_1\partial_2)(l)\} \\ &\quad + (f_1\partial_2)(l) \blacktriangleright' (t\partial_2)(l') + (f_1\partial_2)(l') \blacktriangleright' (t\partial_2)(l) \\ &\quad + s((\partial_1\partial_2)(l)) \blacktriangleright' (t\partial_2)(l') + s((\partial_1\partial_2)(l')) \blacktriangleright' (t\partial_2)(l) + (t\partial_2)(l)(t\partial_2)(l') \\ &= \{s(0_G), (f_1\partial_2)(l')\} + \{s(0_G), (f_1\partial_2)(l)\} \\ &\quad + (\partial'_2 f_2)(l) \blacktriangleright' (t\partial_2)(l') + (\partial'_2 f_2)(l') \blacktriangleright' (t\partial_2)(l) \\ &\quad + s(0_G) \blacktriangleright' (t\partial_2)(l') + s(0_G) \blacktriangleright' (t\partial_2)(l) + (t\partial_2)(l)(t\partial_2)(l') \\ &= \{0_{E'}, (f_1\partial_2)(l')\} + \{0_{E'}, (f_1\partial_2)(l)\} \\ &\quad + \partial'_2(f_2(l)) \blacktriangleright' (t\partial_2)(l') + \partial'_2(f_2(l')) \blacktriangleright' (t\partial_2)(l) \\ &\quad + 0_{E'} \blacktriangleright' (t\partial_2)(l') + 0_{E'} \blacktriangleright' (t\partial_2)(l) + (t\partial_2)(l)(t\partial_2)(l') \\ &= f_2(l)(t\partial_2)(l') + f_2(l')(t\partial_2)(l) + (t\partial_2)(l)(t\partial_2)(l'), \end{aligned}$$

ve ayrıca:

$$t(r \blacktriangleright \partial_2(l)) = f_0(r) \blacktriangleright t(\partial_2(l)) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright t(\partial_2(l)) + \{s(r), f_1(\partial_2(l))\}$$

$$\begin{aligned}
& -\{f_1(\partial_2(l)), s(r)\} - \{(s\partial_1)(\partial_2(l)), s(r)\} \\
& = f_0(r) \blacktriangleright (t\partial_2)(l) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright (t\partial_2)(l) + \{s(r), (f_1\partial_2)(l)\} \\
& \quad - \{(f_1\partial_2)(l), s(r)\} - \{(s(\partial_1\partial_2)(l)), s(r)\} \\
& = f_0(r) \blacktriangleright (t\partial_2)(l) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright (t\partial_2)(l) + \{s(r), (\partial'_2 f_2)(l)\} \\
& \quad - \{(\partial'_2 f_2)(l), s(r)\} - \{(s(0_G), s(r)\} \\
& = f_0(r) \blacktriangleright (t\partial_2)(l) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright (t\partial_2)(l) + \{s(r), \partial'_2(f_2(l))\} \\
& \quad - \{\partial'_2(f_2(l)), s(r)\} - \{0_{E'}, s(r)\} \\
& = f_0(r) \blacktriangleright (t\partial_2)(l) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright (t\partial_2)(l) + s(r) \blacktriangleright' f_2(l) \\
& \quad - [s(r) \blacktriangleright' f_2(l) - \partial'_1(s(r)) \blacktriangleright f_2(l)] \\
& = f_0(r) \blacktriangleright (t\partial_2)(l) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright (t\partial_2)(l) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright f_2(l)
\end{aligned}$$

olur. $\square$

Teorem 5.3 $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi ve (s, t) bir kuadratik f -derivasyon olmak üzere (her $r \in R$, $e \in E$ ve $l \in L$ için):

$$\begin{aligned}
g_0(r) &= f_0(r) + (\partial'_1 \circ s)(r), \\
g_1(e) &= f_1(e) + (s \circ \partial_1)(e) + (\partial'_2 \circ t)(e), \\
g_2(l) &= f_2(l) + (t \circ \partial_2)(l)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanan $g = (g_2, g_1, g_0)$ üçlüsü $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ şeklinde yeni bir 2-çaprazlanmış modül morfizmidir.

İspat: Öncelikle g_0 , g_1 ve g_2 nin cebir morfizmi olduğu gösterilmelidir. Bunun için,

$$g_0(r + r') = g_0(r) + g_0(r') \quad \text{ve} \quad g_0(kr) = k g_0(r)$$

olduğu (benzer şekilde g_1 ve g_2 için) s ve t nin κ -lineer oluşu gereği açıktır. Ayrıca ilk Peiffer-Whitehead şartını kullanarak her $r, r' \in R$ ve $k \in \kappa$ için:

$$\begin{aligned}
g_0(rr') &= f_0(rr') + (\partial'_1 s)(rr') \\
&= f_0(r)f_0(r') + (\partial'_1(s(rr'))) \\
&= f_0(r)f_0(r') + \partial'_1[f_0(r) \blacktriangleright s(r') + f_0(r') \blacktriangleright s(r) + s(r)s(r')] \\
&= f_0(r)f_0(r') + \partial'_1(f_0(r) \blacktriangleright s(r')) + \partial'_1(f_0(r') \blacktriangleright s(r)) + \partial'_1(s(r)s(r'))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_0(r)f_0(r') + f_0(r)(\partial'_1(s(r'))) + f_0(r')(\partial'_1(s(r)) + \partial'_1(s(r))\partial'_1(s(r'))) \\
&= [f_0(r) + (\partial'_1 s)(r)][f_0(r') + (\partial'_1 s)(r')] \\
&= g_0(r)g_0(r')
\end{aligned}$$

olup g_0 bir cebir morfizmi olduğu görülür. Benzer şekilde, her $e, e' \in E$ için:

$$\begin{aligned}
g_1(ee') &= f_1(ee') + (s\partial_1)(ee') + (\partial'_2 t)(ee') \\
&= f_1(e)f_1(e') + s(\partial_1(ee')) + \partial'_2(t(ee')) = f_1(e)f_1(e') + s(\partial_1(e)\partial_1(e')) + \partial'_2(t(ee')) \\
&= f_1(e)f_1(e') + f_0(\partial_1(e)) \blacktriangleright s(\partial_1(e')) + f_0(\partial_1(e')) \blacktriangleright s(\partial_1(e)) + s(\partial_1(e))s(\partial_1(e')) \\
&\quad + \partial'_2[\{(s\partial_1)(e), f_1(e')\} + \{(s\partial_1)(e'), f_1(e)\} + f_1(e) \blacktriangleright t(e') + f_1(e') \blacktriangleright t(e) \\
&\quad + (s\partial_1)(e) \blacktriangleright t(e') + (s\partial_1)(e') \blacktriangleright t(e) + t(e)t(e')]] \\
&= f_1(e)f_1(e') + (f_0\partial_1)(e) \blacktriangleright (s\partial_1)(e') + (f_0\partial_1)(e') \blacktriangleright (s\partial_1)(e) + (s\partial_1)(e)(s\partial_1)(e') \\
&\quad + \partial'_2\{(s\partial_1)(e), f_1(e')\} + \partial'_2\{(s\partial_1)(e'), f_1(e)\} + \partial'_2(f_1(e) \blacktriangleright t(e')) \\
&\quad + \partial'_2(f_1(e') \blacktriangleright t(e)) + \partial'_2((s\partial_1)(e) \blacktriangleright t(e')) + \partial'_2((s\partial_1)(e') \blacktriangleright t(e)) + \partial'_2(t(e)t(e')) \\
&= f_1(e)f_1(e') + (\partial'_1 f_1)(e) \blacktriangleright (s\partial_1)(e') + (\partial'_1 f_1)(e') \blacktriangleright (s\partial_1)(e) + (s\partial_1)(e)(s\partial_1)(e') \\
&\quad + (s\partial_1)(e)f_1(e') - \partial'_1(f_1(e')) \blacktriangleright (s\partial_1)(e) + (s\partial_1)(e')f_1(e) - \partial'_1(f_1(e)) \blacktriangleright (s\partial_1)(e') \\
&\quad + f_1(e)\partial'_2(t(e')) + f_1(e')\partial'_2(t(e)) + (s\partial_1)(e)\partial'_2(t(e')) + (s\partial_1)(e')\partial'_2(t(e)) \\
&\quad + \partial'_2(t(e))\partial'_2(t(e')) \\
&= f_1(e)f_1(e') + \partial'_1(f_1(e)) \blacktriangleright (s\partial_1)(e') + \partial'_1(f_1(e')) \blacktriangleright (s\partial_1)(e) + (s\partial_1)(e)(s\partial_1)(e') \\
&\quad + (s\partial_1)(e)f_1(e') - \partial'_1(f_1(e')) \blacktriangleright (s\partial_1)(e) + (s\partial_1)(e')f_1(e) - \partial'_1(f_1(e)) \blacktriangleright (s\partial_1)(e') \\
&\quad + f_1(e)(\partial'_2 t)(e') + f_1(e')(\partial'_2 t)(e) + (s\partial_1)(e)(\partial'_2 t)(e') + (s\partial_1)(e')\partial'_2(t(e)) \\
&\quad + (\partial'_2 t)(e)(\partial'_2 t)(e') \\
&= f_1(e)f_1(e') + (s\partial_1)(e)(s\partial_1)(e') + (s\partial_1)(e)f_1(e') + (s\partial_1)(e')f_1(e) + f_1(e)(\partial'_2 t)(e') \\
&\quad + f_1(e')(\partial'_2 t)(e) + (s\partial_1)(e)(\partial'_2 t)(e') + (s\partial_1)(e')\partial'_2(t(e)) + (\partial'_2 t)(e)(\partial'_2 t)(e') \\
&= [f_1(e) + (s\partial_1)(e) + (\partial'_2 t)(e)][f_1(e') + (s\partial_1)(e') + (\partial'_2 t)(e')] \\
&= g_1(e)g_1(e'),
\end{aligned}$$

olup g_1 cebir morfizmidir. Son olarak Yrd. Teo. 5.2 gereği (her $l, l' \in L$ için):

$$g_2(ll') = f_2(ll') + (t\partial_2)(ll')$$

$$\begin{aligned}
&= f_2(l)f_2(l') + t(\partial_2(l')) \\
&= f_2(l)f_2(l') + t(\partial_2(l)\partial_2(l')) \\
&= f_2(l)f_2(l') + f_2(l)((t\partial_2)(l')) + f_2(l')((t\partial_2)(l)) + (t\partial_2)(l)(t\partial_2)(l') \\
&= [f_2(l) + (t\partial_2)(l)][f_2(l') + (t\partial_2)(l')] \\
&= g_2(l)g_2(l')
\end{aligned}$$

elde edilir ve g_2 nin de bir cebir morfizmi olduğu görülür.

Ayrıca,

$$\begin{array}{ccccc}
L & \xrightarrow{\partial_2} & E & \xrightarrow{\partial_1} & R \\
\downarrow g_2 & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 \\
L' & \xrightarrow{\partial'_2} & E' & \xrightarrow{\partial'_1} & R'
\end{array}$$

diagramının değişmeli olduğu Teorem 4.2 in ispatındaki benzer şekilde açıktır.

Son olarak da bu morfizmlerin etkileri ve Peiffer liftingi koruduğu gösterilmelidir. Bunun için ($l \in L$, $e, e' \in E$ ve $r \in R$ olmak üzere):

$$\begin{aligned}
g_1(r \blacktriangleright e) &= f_1(r \blacktriangleright e) + (s\partial_1)(r \blacktriangleright e) + (\partial'_2 t)(r \blacktriangleright e) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright f_1(e) + s(\partial_1(r \blacktriangleright e)) + \partial'_2(t(r \blacktriangleright e)) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright f_1(e) + s(r\partial_1(e)) + \partial'_2(t(r \blacktriangleright e)) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright f_1(e) + f_0(r) \blacktriangleright s(\partial_1(e)) + f_0(\partial_1(e)) \blacktriangleright s(r) + s(r)s(\partial_1(e)) \\
&\quad + \partial'_2[f_0(r) \blacktriangleright t(e) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright t(e) + \{s(r), f_1(e)\} - \{f_1(e), s(r)\} \\
&\quad - \{(s\partial_1)(e), s(r)\}] \\
&= f_0(r) \blacktriangleright f_1(e) + f_0(r) \blacktriangleright (s\partial_1)(e) + (f_0\partial_1)(e) \blacktriangleright s(r) + s(r)(s\partial_1)(e) \\
&\quad + \partial'_2(f_0(r) \blacktriangleright t(e)) + \partial'_2((\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright t(e)) + \partial'_2\{s(r), f_1(e)\} \\
&\quad - \partial'_2\{f_1(e), s(r)\} - \partial'_2\{(s\partial_1)(e), s(r)\} \\
&= f_0(r) \blacktriangleright f_1(e) + f_0(r) \blacktriangleright (s\partial_1)(e) + (\partial'_1 f_1)(e) \blacktriangleright s(r) + s(r)(s\partial_1)(e) \\
&\quad + f_0(r) \blacktriangleright \partial'_2(t(e)) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright \partial'_2(t(e)) + s(r)f_1(e) - \partial'_1(f_1(e)) \blacktriangleright s(r) \\
&\quad - f_1(e)s(r) + \partial'_1(s(r)) \blacktriangleright f_1(e) - (s\partial_1)(e)s(r) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright (s\partial_1)(e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_0(r) \blacktriangleright f_1(e) + f_0(r) \blacktriangleright (s\partial_1)(e) + f_0(r) \blacktriangleright \partial'_2(t(e)) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright \partial'_2(t(e)) \\
&\quad + \partial'_1(s(r)) \blacktriangleright f_1(e) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright (s\partial_1)(e) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright f_1(e) + f_0(r) \blacktriangleright (s\partial_1)(e) + f_0(r) \blacktriangleright (\partial'_2 t)(e) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright \partial'_2(t(e)) \\
&\quad + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright f_1(e) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright (s\partial_1)(e) \\
&= [f_0(r) + (\partial'_1 s)(r)] \blacktriangleright [f_1(e) + (s\partial_1)(e) + (\partial'_2 t)(e)] \\
&= g_0(r) \blacktriangleright g_1(e)
\end{aligned}$$

ve diğ er yandan yine Yrd. Teo. 5.2 in yardımıyla:

$$\begin{aligned}
g_2(r \blacktriangleright l) &= f_2(r \blacktriangleright l) + (t\partial_2)(r \blacktriangleright l) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright f_2(l) + t(\partial_2(r \blacktriangleright l)) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright f_2(l) + t(r \blacktriangleright \partial_2(l)) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright f_2(l) + f_0(r) \blacktriangleright (t\partial_2)(l) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright f_2(l) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright (t\partial_2)(l) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright (f_2(l) + (t\partial_2)(l)) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright (f_2(l) + (t\partial_2)(l)) \\
&= [f_0(r) + (\partial'_1 s)(r)] \blacktriangleright [f_2(l) + (t\partial_2)(l)] \\
&= g_0(r) \blacktriangleright g_2(l)
\end{aligned}$$

olup etkiler korunur. Ayrıca:

$$\begin{aligned}
g_2(\{e, e'\}) &= f_2(\{e, e'\}) + (t\partial_2)(\{e, e'\}) \\
&= \{f_1(e), f_1(e')\} + t(\partial_2\{e, e'\}) \\
&= \{f_1(e), f_1(e')\} + t(ee' - \partial_1(e') \blacktriangleright e) \\
&= \{f_1(e), f_1(e')\} + t(ee') - t(\partial_1(e') \blacktriangleright e) \\
&= \{f_1(e), f_1(e')\} + \{(s\partial_1)(e), f_1(e')\} + \{(s\partial_1)(e'), f_1(e)\} + f_1(e) \blacktriangleright t(e') \\
&\quad + f_1(e') \blacktriangleright t(e) + (s\partial_1)(e) \blacktriangleright t(e') + (s\partial_1)(e') \blacktriangleright t(e) + t(e)t(e') \\
&\quad - f_0(\partial_1(e')) \blacktriangleright t(e) - (\partial'_1 s)(\partial_1(e')) \blacktriangleright t(e) - \{s(\partial_1(e')), f_1(e)\} + \{f_1(e), s(\partial_1(e'))\} \\
&\quad + \{(s\partial_1)(e), s(\partial_1(e'))\} \\
&= \{f_1(e), f_1(e')\} + \{(s\partial_1)(e), f_1(e')\} + \{(s\partial_1)(e'), f_1(e)\} + \{f_1(e), \partial'_2(t(e'))\} \\
&\quad + f_1(e') \blacktriangleright t(e) + \{(s\partial_1)(e), \partial'_2(t(e'))\} + (s\partial_1)(e') \blacktriangleright t(e) + \{\partial'_2(t(e)), \partial'_2(t(e'))\} \\
&\quad - \partial'_1(f_1(e')) \blacktriangleright t(e) - (\partial'_1 s)(\partial_1(e')) \blacktriangleright t(e) - \{s(\partial_1(e')), f_1(e)\} + \{f_1(e), s(\partial_1(e'))\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{(s\partial_1)(e), s(\partial_1(e'))\} \\
& = \{f_1(e), f_1(e')\} + \{f_1(e), (s\partial_1)(e')\} + \{f_1(e), (\partial'_2 t)(e')\} \\
& \quad + \{(s\partial_1)(e), f_1(e')\} + \{(s\partial_1)(e), (s\partial_1)(e')\} + \{(s\partial_1)(e), (\partial'_2 t)(e')\} \\
& \quad + \{(\partial'_2 t)(e), f_1(e')\} + \{(\partial'_2 t)(e), (s\partial_1)(e')\} + \{(\partial'_2 t)(e), (\partial'_2 t)(e')\} \\
& = \{f_1(e) + (s\partial_1)(e) + (\partial'_2 t)(e), f_1(e') + (s\partial_1)(e') + (\partial'_2 t)(e')\} \\
& = \{g_1(e), g_1(e')\}
\end{aligned}$$

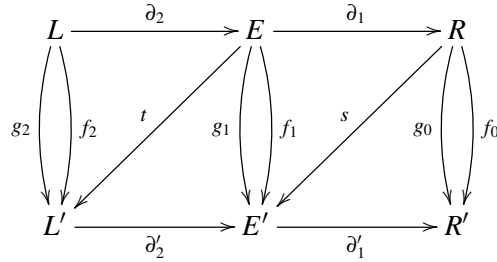
olup Peiffer liftinginin korunduğu görülür. $\square$

✓ Sonuç olarak, (f, s, t) üçlüsü, f morfizmini g morfizmine bağlayan bir **homotopi** olarak adlandırılır ve kısaca:

$$f \xrightarrow{(f,s,t)} g \quad (5.2)$$

şeklinde gösterilir.

Tüm bu verilenler diyagramatik olarak aşağıdaki şekilde özetlenir:



5.3 Gruboid

Yardımcı Teorem 5.4 $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere, sıfır morfizmler yardımıyla tanımlanan $(0_s, 0_t)$ ikilisi için:

$$f \xrightarrow{(f, 0_s, 0_t)} f \quad (5.3)$$

olur.

İspat: Yrd. Teo. 4.4 in ispatına benzer niteliktedir. $\square$

5.3.1 XMod homotopisi - 2XMod homotopisi karşılaştırması

Bu karşılaştırmaya geçmeden önce, Bölüm 4.3 de çaprazlanmış modül morfizmleri ve bu morfizmler arasındaki homotopiler yardımıyla inşaa edilen gruboid yapısının (Teorem 4.8) tekrar gözden geçirilerek hatırlanması tavsiye edilir.

Tahmin 5.5 $f, g: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ birer 2-çaprazlanmış modül morfizmi ve (s, t) ikilisi f ile g yi bağlayan bir kuadratik f -derivasyon olsun. Çaprazlanmış modül durumunda olduğu gibi bu dönüşümlerin toplamsal negatifleri yardımıyla tanımlanan $(-s, -t)$ ikilisi ele alınsın.

Bu durumda;

Problem 5.6 $(-s, -t)$ ikilisi genel olarak bir kuadratik g -derivasyon değildir. Hatta daha da ötesinde, $-s$ bir f_0 -derivasyon dahi tanımlamaz. Bunun temel sebebi, 2-çaprazlanmış modülün $(\partial_1: E \rightarrow R, \blacktriangleright)$ kısmının sadece bir ön-çaprazlanmış modül olması ve dolayısıyla işlemlerde ikinci Peiffer-Whitehead şartının kullanılamamasıdır (Not 4.7).

Tahmin 5.7 $f, g, h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ birer 2-çaprazlanmış modül morfizmleri olmak üzere,

$$f \xrightarrow{(f, s, t)} g \quad \text{ve} \quad g \xrightarrow{(g, s', t')} h$$

homotopileri verilsin. Bu durumda mevcut homotopiler için Teorem 5.3 gereği:

$$\begin{aligned} h_0(r) &= f_0(r) + (\partial'_1 \circ (s + s'))(r), \\ h_1(e) &= f_1(e) + ((s + s') \circ \partial_1)(e) + (\partial'_2 \circ (t + t'))(e), \\ h_2(l) &= f_2(l) + ((t + t') \circ \partial_2)(l) \end{aligned}$$

eşitlikleri kolayca elde edilebilir. Bu yaklaşım da sezgisel olarak, f ile h yi birbirine bağlayacak yeni homotopinin yine çaprazlanmış modül durumunda olduğu gibi toplama işlemi yardımı ile elde edilebileceği fikrini verir.

Fakat:

Problem 5.8 $(s + s')$ ikilisi genel olarak bir f_0 -derivasyon tanımlamaz. Bunun sebebi de yine bir önceki problemde ifade edildiği gibi **XM2** özelliğinin eksikliğidir (Not 4.7).

Uyarı 5.9 Dolayısıyla, çaprazlanmış modüllerin homotopilerinin birbirine bağlanması için kullanılan ikili işlem olan toplama işlemi, ve bu işlem için ters eleman niteliğindeki toplamsal ters; 2-çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopileri (kuadratik derivasyonlar) üzerinde geçerli bir fikir değildir.

Uyarı 5.10 Yukarıda elde edilen tüm gözlem ve yorumlar çaprazlanmış modül durumunun aksine, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ şeklindeki 2-çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotop olma bağıntısının bir denklik bağıntısı olmadığını göstermektedir. Bu durum, grup hali için [20] de detaylı olarak örneklendirilerek incelenmiştir.

Tezin giriş kısmı hatırlanacak olursa; model kategori perspektifinden [15] bakıldığı takdirde (cofibrant-fibrant obje hususu dolayısıyla) bu aslında zaten beklenmedik bir durum değildir.

5.3.2 Anahtar fikir

Not 5.11 Yukarıda bahsedilen bu problemin çözülebilmesi için, öncelikle belirli bir kısıtlama getirilmesi ve çalışmaya bu durum altında devam edilmesi gerekecektir. Bunun için de $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ arasında tanımlanan 2-çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisi için tezin bundan sonraki kısmında $\mathcal{A} = (L, E, R, \partial_1, \partial_2, \{, \})$ bir serbest₁ 2-çaprazlanmış modül olarak sabitlenecektir. Daha önce kısaca bahsedildiği gibi, burada tanım gereği R , sabit bir $B \subset R$ tabanı üzerinde tanımlı bir serbest (değişmeli) cebir; yani dolayısıyla polinomlar cebiri olacaktır (Tanım 2.7). Bu özel durum da muhtemelen değişmeli cebirlerin 2-çaprazlanmış modül kategorisi üzerindeki bir model kategori [15] yapısında cofibrant objeye karşılık gelecektir. Bu durum gruplar için [20] de detaylı olarak incelenmiş olup değişmeli cebirler için model kategori kısmına bu tezde değinilmeyerek ileriki bir başka çalışmada ele alınacaktır.

Yardımcı Teorem 5.12 $f = (f_2, f_1, f_0): \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere $s: R \rightarrow E'$ şeklindeki f_0 -derivasyonu ile

$$\phi: r \in R \longmapsto (f_0(r), s(r)) \in R' \ltimes_{\blacktriangleright} E' \doteq \mathcal{A}'_1$$

şeklinde tanımlı cebir morfizmi arasında bire-bir eşleme vardır.

Ortaya çıkan bu özelliklerle birlikte aşağıda verilecek olan yardımcı teorem, mevcut problemin çözümünde anahtar rolü üstlenecektir.

Yardımcı Teorem 5.13 R (B tabanlı) bir serbest cebir olsun. Bu durumda $s: R \rightarrow E'$ f_0 -derivasyonu, serbest cebirin evrensellik özelliği gereği, $B \subset R$ serbest tabanı altındaki değerler yardımıyla biricik şekilde tanımlanabilir.

Böylece herhangi bir $s^*: B \rightarrow E'$ fonksiyon ailesi,

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\text{incl}} & R \\ & \searrow (f_0, s^*) & \downarrow \exists! (f_0, s) \\ & & \mathcal{A}'_1 \end{array}$$

değişmeli diyagramı altında genişleyerek, biricik $s: R \rightarrow E'$ f_0 -derivasyonu tanımlar.

Bu özellik, öncelikle yukarıda açıklanan problemlerin çözümüne kavuşması ve ayrıca tezin geri kalan kısmındaki her bir adım için anahtar fikir olarak büyük rol oynayacaktır. Dolayısıyla da bu fikir aslında tezin en önemli noktasıdır.

5.3.3 Homotopilerin kompozisyonu

$f, g, h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ birer 2-çaprazlanmış modül morfizmleri olmak üzere,

$$f \xrightarrow{(f, s, t)} g \quad \text{ve} \quad g \xrightarrow{(g, s', t')} h$$

homotopileri (kuadratik derivasyonları) verilsin.

Tanım 5.14 $s \boxplus s': R \rightarrow E'$ derivasyonu, $s + s'$ fonksiyonunun (B ye kısıtlaması), serbest cebirin evrensellik özelliği (Yrd. Teo. 5.13) altında genişlemesi, yani:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\text{incl}} & R \\ & \searrow (f_0, s+s') & \downarrow \exists! (f_0, s \boxplus s') \\ & & \mathcal{A}'_1 \end{array} \tag{5.4}$$

değişmeli diyagramıyla elde edilen biricik f_0 -derivasyon olarak tanımlansın.

Burada diyagramın değişmeli olmasından dolayı, serbest tabanın her $b \in B$ elemanı için:

$$(s \boxplus s')(b) = (s + s')(b)$$

şeklindedir.

♣ Şimdi, yukarıda diyagramatik olarak elde edilen bu yeni $s \boxplus s'$ kuadratik derivasyonunun cebirsel olarak açık formülünün neye karşılık geldiği elde edilmeye çalışılacaktır. Bu amaçla da bazı yardımcı fonksiyon ve morfizmlerin tanımlanmasına ihtiyaç duyulacaktır:

Öncelikle $\mathcal{A}' = (L', E', R', \partial'_1, \partial'_2)$ üzerindeki 2-simpleks tanımı kullanılarak,

$$\zeta: B \rightarrow (R' \ltimes_{\blacktriangleright} E') \blacktriangleright_{\bullet} (E' \ltimes_{\blacktriangleright'} L') = \mathcal{A}'_2$$

fonksiyonu ($b \in B$ olmak üzere):

$$\zeta(b) = (f_0(b), s(b), s'(b), 0)$$

biçiminde tanımlansın. Bu fonksiyon geometrik olarak 2-simpleksler yardımıyla:

$$b \in B \xrightarrow{\zeta} \begin{array}{ccc} & f_0(b) + \partial_1(s(b)) + \partial_1(s'(b)) & \\ s(b) + s'(b) \nearrow & \uparrow \boxed{0} & s'(b) + \partial_2(0) \\ f_0(b) \xrightarrow{s(b)} & f_0(b) + \partial_1(s(b)) & \end{array} = \begin{array}{ccc} & h_0(b) & \\ (s+s')(b) \nearrow & \uparrow \boxed{0} & s'(b) \\ f_0(b) \xrightarrow{s(b)} & g_0(b) & \end{array}$$

şeklindedir.

Bu durumda serbest cebirin evrensellik özelliği gereği, ζ fonksiyonunun

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\text{incl}} & R \\ & \searrow \zeta & \downarrow \exists! X^{(s,s')} \\ & & \mathcal{A}'_2 \end{array} \quad (5.5)$$

diyagramı altında genişlemesi yardımıyla biricik

$$X^{(s,s')} : R \longrightarrow (R' \ltimes_{\blacktriangleright} E') \blacktriangleright_{\bullet} (E' \ltimes_{\blacktriangleright'} L') = \mathcal{A}'_2$$

cebir morfizmi mevcuttur.

Yine diyagramın değişmeliliği gereği her $b \in B$ için:

$$X^{(s,s')}(b) = (f_0(b), s(b), s'(b), 0) = \zeta(b)$$

olur. Burada genel olarak $r \in R$ için bu eşitliğin geçerli olmayıp açıktır:

$$X^{(s,s')}(r) \neq (f_0(r), s(r), s'(r), 0) = \zeta(r)$$

dir.

Şimdi $X^{(s,s')}(r) \in \mathcal{A}'_2$ elemanının ne olduğu açıkça tanımlanabilmesi amacıyla, Tanım 3.8 de verilen d_1 morfizmi ve Yardımcı Teorem 5.13 den faydalanarak, biricik şekilde tanımlı bir $w^{(s,s')}: R \rightarrow L'$ dönüşümünün yardımı ile birlikte, $X^{(s,s')}(r)$ elemanı aşağıdaki 2-simpleksle görselleştirilir:

$$X^{(s,s')}(r) = \begin{array}{ccc} & & h_0(r) \\ & \nearrow^{(s \boxplus s')(r)} & \uparrow s'(r) \\ f_0(r) & \xrightarrow{s(r)} & g_0(r) \end{array} \quad (5.6)$$

$w^{(s,s')}(r)$

Özel olarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

Yardımcı Teorem 5.15 Yukarıda tanımlanan $w^{(s,s')}: R \rightarrow L'$ dönüşümü, her $r, r' \in R$ için:

$$\begin{aligned} w^{(s,s')}(rr') &= f_0(r) \blacktriangleright w^{(s,s')}(r') + f_0(r') \blacktriangleright w^{(s,s')}(r) + s'(r') \blacktriangleright w^{(s,s')}(r) \\ &\quad + s(r') \blacktriangleright w^{(s,s')}(r) + s'(r) \blacktriangleright w^{(s,s')}(r') + s(r) \blacktriangleright w^{(s,s')}(r') \\ &\quad - \{s'(r') \otimes s(r)\} - \{s'(r) \otimes s(r')\} - w^{(s,s')}(r)w^{(s,s')}(r') \end{aligned} \quad (5.7)$$

şartını sağlayan bir κ -lineer dönüşümdür.

Ayrıca 2-simpleksin tanımını gereği, $w^{(s,s')}$ dönüşümü için (her $r \in R$ için):

$$(s \boxplus s')(r) = s(r) + s'(r) - (\partial'_2 \circ w^{(s,s')})(r) \quad (5.8)$$

şeklindedir.

Burada dikkat edilirse $w^{(s,s')}$ dönüşümü $(s \boxplus s')(r)$ ile $(s + s')(r)$ arasındaki cebirsel farkın ∂'_2 morfizmi yardımıyla ölçülmesini sağlar.

İspat: İlk (5.7) eşitliği, yarı-direkt çarpım tanımı (Tanım 3.1) ve Yrd. Teo. 3.6 da verilen etki gereği 2-simpleks cebir yapısının (3.1) bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır.

Diğer yandan (5.8) ise; (3.2) de verilen simplisel formunun (5.6) üzerinde uygulanarak çözülmesi sonucu direk olarak elde edilir. $\square$

Not 5.16 $w^{(s,s')}(r)$ elemanı $r \in B \subset R$ durumunda sıfıra eşittir.

Şimdi (5.6) de tanımlanan üçgen (2-simpleks) dekompoze edilerek sıralı dörtlü biçimindeki gösterime geçilir ve aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.17 Aşağıdaki şekilde tanımlı bir cebir homomorfizmi mevcuttur:

$$\begin{aligned} X^{(s,s')} : R &\longrightarrow (R' \ltimes_{\blacktriangleright} E') \blacktriangleright_{\bullet} (E' \ltimes_{\blacktriangleright} L') \\ r &\longmapsto (f_0(r), s(b), s'(r) - (\partial'_2 \circ w)(r), w^{(s,s')}(r)) \end{aligned}$$

Burada $X^{(s,s')}$ morfizminin (5.5) diyagramındaki biricik morfizmden yola çıkarak tanımlandığını tekrar hatırlamakta fayda vardır.

Şimdi $w^{(s,s')} : R \rightarrow L'$ dönüşümüne ait birkaç önemli özellik üzerinde durulacaktır:

Yardımcı Teorem 5.18 s ya da s' derivasyonlarından herhangi biri sıfır ise:

$$w^{(s,s')} = 0$$

olur.

İspat: Öncelikle $s = 0$ durumu ele alınsın. $X^{(s,s')} : R \rightarrow \mathcal{A}'_2$ morfizminin tanımı hatırlanacak

olursa, her $b \in B$ için:

$$X^{(s,s')}(b) =$$

elde edilir. Kabul gereği $s' = 0$ olduğundan dolayı da mevcut $X^{(s,s')}(b) \in \mathcal{A}'_2$ elemanı:

$$X^{(s,s')}(b) =$$

şekline indirgenir.

Elde edilen bu elemanın da aslında, Not 3.9 ve Yardımcı Teorem 5.12 yardımıyla:

$$\begin{aligned} s_0 \left(f_0(b) \xrightarrow{s(b)} (f_0(b) + \partial_1(s(b))) \right) &= s_0(f_0(b), s(b)) \\ &= (s_0 \circ \phi)(b) \end{aligned}$$

dönüşümüne eşit olduğu görülür. Yani her $b \in B \subset R$ serbest taban elemanı için:

$$X^{(s,s')}(b) = (s_0 \circ \phi)(b)$$

elde edilir. Bu iki elemanın eşit olması, serbest cebirin evrensellik özelliği altında genişlemeleri olan $R \rightarrow \mathcal{A}'_2$ cebir morfizmlerinin de her $r \in R$ için:

$$X^{(s,s')}(r) = (s_0 \circ \phi)(r)$$

şeklinde birbirine eşit olmasını gerektirir.

Bu eşitlik ise, $X^{s,s'}$ nün tanımı diyagramı (5.6) ve ayrıca s_0 dönüşümünün simplisel formu 3.9 yardımıyla:

$$\begin{array}{ccc}
 & f_0(r) + \partial_1(s(r)) & \\
 \nearrow^{s(r) - \partial_2(w^{(s,0)}(r))} & \uparrow \boxed{w^{(s,0)}(r)} & \nearrow^{f_0(r) + \partial_1(s(r))} \\
 f_0(r) & \xrightarrow{s(r)} f_0(r) + \partial_1(s(r)) & = \\
 & \downarrow -\partial_2(w^{(s,0)}(r)) & \\
 & f_0(r) + \partial_1(s(r)) & \\
 \nearrow^{s(r)} & \uparrow \boxed{0} & \nearrow^{f_0(r) + \partial_1(s(r))} \\
 f_0(r) & \xrightarrow{s(r)} f_0(r) + \partial_1(s(r)) & \\
 & \downarrow 0 & \\
 & f_0(r) + \partial_1(s(r)) &
 \end{array}$$

yani bir başka deyişle her $r \in R$ için:

$$w^{(s,0)}(r) = 0$$

sonucunu verir. Benzer şekilde $s' = 0$ için de $w^{(0,s')}(r) = 0$ olduğu ispatlanır. $\square$

Yardımcı Teorem 5.19 $0_s: R \rightarrow E'$ sıfır dönüşümü için:

$$s \boxplus 0_s = s \quad \text{ve} \quad 0_s \boxplus s = s \quad (5.9)$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: $\boxplus$ işleminin diyagramatik tanımı (5.4) gereği, s in kendisinin halihazırda bir derivasyon olmasının yardımıyla istenilen sonuçlar elde edilir. Buna alternatif olarak (5.8) in bir sonucu olarak Yardımcı Teorem 5.18 kullanılarak da ispatlanabilir. $\square$

Şimdi homotopilerin kompozisyonundaki ikinci bileşen üzerinde durulacaktır:

Tanım 5.20 Mevcut $f \xrightarrow{(f,s,t)} g$ ve $g \xrightarrow{(g,s',t')} h$ homotopileri için:

$$(t \boxplus t')(e) = t(e) + t'(e) + (w^{(s,s')} \circ \partial_1)(e) \quad (5.10)$$

şeklinde tanımlansın.

Not 5.21 Yardımcı Teorem 5.18 gereği, s' ya da s nin sıfır olması durumunda sırasıyla:

$$t \boxplus 0_t = t \quad \text{ve} \quad 0_{t'} \boxplus t' = t' \quad (5.11)$$

elde edilir.

Yukarıdaki mevcut tanımlamalarla birlikte aşağıdaki verilecek olan teorem tezin en önemli teoremlerinden birisi olacaktır:

Teorem 5.22 $f, g, h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ şeklindeki 2-çaprazlanmış modül morfizmleri için:

$$f \xrightarrow{(f,s,t)} g \quad \text{ve} \quad g \xrightarrow{(g,s',t')} h$$

homotopileri verilsin. Bu durumda $(s \boxplus s', t \boxplus t')$ ikilisi, f ile g yi bağlayan:

$$f \xrightarrow{(f, s \boxplus s', t \boxplus t')} h \quad (5.12)$$

şeklinde bir homotopi (kuadratik f -derivasyon) tanımlar.

İspat: Burada $s \boxplus s'$ dönüşümü zaten tanımı gereği bir f_0 -derivasyondur. Diğer yandan $t \boxplus t'$ şeklinde tanımlanan dönüşüm de Tanım 5.1 de verilen şartı (5.7) yardımıyla sağladığı uzun işlemler dizisi sonucu görülmektedir. Böylece $(s \boxplus s', t \boxplus t')$ ikilisi bir kuadratik derivasyon olmakta, daha da ötesinde, (5.1) de verilen şartların da geçerli olması sebebi ile f ile h yi bağlayan bir kuadratik derivasyon olmaktadır. $\square$

5.3.4 Ters kuadratik derivasyon

$f, g: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 2-çaprazlanmış modül morfizmleri için:

$$f \xrightarrow{(f,s,t)} g$$

homotopisi verilsin. Burada halen $\mathcal{A} = (L, E, R, \partial_1, \partial_2, \{, \})$ nın serbest₁ 2-çaprazlanmış modül ($B \subset R$ sabit tabanıyla) olarak sabitlendiği unutulmamalıdır.

Şimdi, g ile f yi bağlayacak ve aynı zamanda gruboid yapısı için (s, t) kuadratik derivasyonun tersini oluşturacak:

$$g \xrightarrow{(f, \bar{s}, \bar{t})} f$$

homotopisi, yani $(\bar{s}, \bar{t})$ kuadratik g -derivasyonu tanımlanacaktır.

Mevcut $f \xrightarrow{(f,s,t)} g$ homotopisini kullanarak:

$$g_0(r) = f_0(r) + (\partial'_1 \circ s)(r) \quad \text{ya da} \quad f_0(r) = g_0(r) + (\partial'_1 \circ -s)(r)$$

eşitlikleri kolayca elde edilir. Burada, $-s: R \rightarrow E'$ dönüşümü her ne kadar homotopinin $\bar{s}$ bileşeni için doğru bir tercih gibi gözüксе de $-s$ genel olarak bir g_0 -derivasyon olmadığından dolayı (Problem 5.6) iyi bir fikir değildir.

Tanım 5.23 $\bar{s}: R \rightarrow E$ derivasyonu $-s$ nin (B ye kısıtlaması) serbest cebirin evrensellik özelliği altında genişlemesi (yardımcı teorem 5.13), yani:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\text{incl}} & R \\ & \searrow (f_0, -s) & \downarrow \exists! (f_0, \bar{s}) \\ & & \mathcal{A}'_1 \end{array} \quad (5.13)$$

değişmeli diyagramıyla elde edilen biricik g_0 -derivasyon olarak tanımlansın.

Yardımcı Teorem 5.24 Yukarıdaki şekilde tanımlı $\bar{s}$ için:

$$s \boxplus \bar{s} = 0_s \quad \text{ve} \quad \bar{s} \boxplus s = 0_s$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat: Yardımcı teorem 5.13 ve $\boxplus$ işleminin diyagramatik tanımı (5.4) gereği; her $B \subset R$ elemanı için:

$$(s + \bar{s})(b) = (s + (-s))(b) = 0$$

olup, bu fonksiyonun genişlemesi olan $s \boxplus \bar{s}$ derivasyonu için de sonuç sıfır morfizmidir (sıfır morfizminin halihazırda derivasyon olduğunu hatırlayınız). Benzer ispat diğer durum için de geçerlidir. $\square$

Şimdi ters homotopinin ikinci bileşeni incelenecektir:

Tanım 5.25 Yukarıda tanımlı şartlar dahilinde,

$$\bar{t} = -t - (w^{(s, \bar{s})} \circ \partial_1)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda Tanım 5.10 gereği:

$$t \boxplus \bar{t} = 0_t \quad \text{ve} \quad \bar{t} \boxplus t = 0_t$$

olduğu açıktır.

Sonuç olarak:

Teorem 5.26 $f, g: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 2-çaprazlanmış modül morfizmleri ve $f \xrightarrow{(f,s,t)} g$ homotopisi için yukarıdaki şekilde tanımlı $(\bar{s}, \bar{t})$ ikilisi, g ile f yi bağlayan

$$g \xrightarrow{(f, \bar{s}, \bar{t})} f \quad (5.14)$$

şeklinde bir homotopi (kuadratik g -derivasyon) tanımlar.

İspat: Teorem 5.22 nin ispatıyla aynıdır. $\square$

5.3.5 Kompozisyonunun asosyatifliği

$f, g, h, k: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ birer 2-çaprazlanmış modül morfizmleri olmak üzere:

$$f \xrightarrow{(f,s,t)} g \quad g \xrightarrow{(g,s',t')} h \quad h \xrightarrow{(h,s'',t'')} k$$

homotopileri tanımlansın.

Serbest tabandan seçilen her $b \in B \subset R$ elemanı için:

$$(s \boxplus (s' \boxplus s''))(b) = ((s \boxplus s') \boxplus s'')(b)$$

olduğu açıktır. Böylece, Yardımcı Teorem 5.13 gereği, bu iki elemanın genişlemeleri olan derivasyonlar (homotopiler) için de yine, her $r \in R$ için:

$$(s \boxplus (s' \boxplus s''))(r) = ((s \boxplus s') \boxplus s'')(r) \quad (5.15)$$

şeklinde olup, homotopinin ilk bileşeni için asosyatiflik kolayca sağlanmış olur.

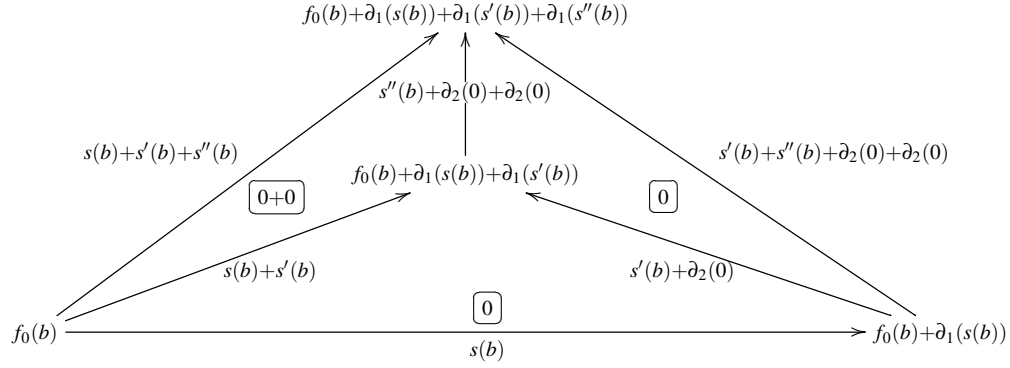
♣ Şimdi işin zor olan ve teknik detay gerektiren kısmını, yani homotopilerin kompozisyonunun ikinci bileşen düzeyinde de asosyatif olduğu ispatlanacaktır. Burada yine daha önceden olduğu gibi bazı yardımcı fonksiyon ve morfizmlere ihtiyaç duyulacaktır:

Öncelikle 3-simpleks tanımından (Bölüm 3.5) faydalananarak:

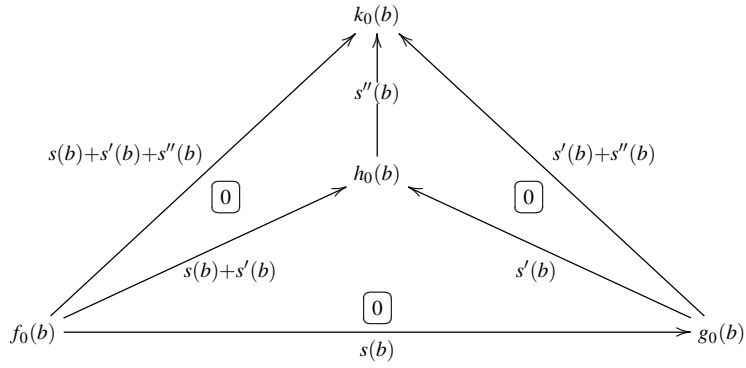
$$\begin{aligned} \lambda: B &\longrightarrow ((R' \ltimes_{\blacktriangleright} E') \ltimes_{\blacktriangleright \bullet} (E' \ltimes_{\blacktriangleright'} L')) \ltimes_{\blacktriangleright \dagger} ((E' \ltimes_{\blacktriangleright'} L') \ltimes_{\blacktriangleright *} L') = \mathcal{A}'_3 \\ b &\longmapsto (f_0(b), s(b), s'(b), 0, s''(b), 0, 0) \end{aligned} \quad (5.16)$$

fonksiyonu tanımlansın.

Diğer yandan, tanımlanan bu $\lambda(b)$ fonksiyonu simplisel formda :



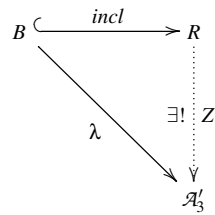
ya da kısaca:



(5.17)

şeklinde görselleştirilir.

Serbest cebirin evrensellik özelliği gereği $\lambda: B \rightarrow \mathcal{A}'_3$ fonksiyonunun değişmeli:



(5.18)

diyagramı altında genişlemesi ile tanımlı bir $Z: R \rightarrow \mathcal{A}'_3$ cebir morfizmi mevcuttur.

Not 3.21 de tanımlanan $d_{0,1,2,3}$ morfizmleri ve Yrd. Teo. 5.13 kullanılarak, $r \in R$ için:

$$Z(r) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & k_0(r) & \\ (s \boxplus s' \boxplus s'')(r) \nearrow & \uparrow s''(r) & \nwarrow (s' \boxplus s'')(r) \\ \boxed{w^{(s \boxplus s', s'')}(r)} & & \boxed{w^{(s', s'')}(r)} \\ & h_0(r) & \\ (s \boxplus s')(r) \nearrow & \nwarrow s'(r) & \\ \boxed{w^{(s, s')}(r)} & & \\ f_0(r) \xrightarrow{s(r)} & g_0(r) & \end{array} \end{array} \quad (5.19)$$

simplesel formu elde edilir.

Şimdi, Bölüm 5.3.3 dekine benzer mantıkla, mevcut 3-simpleksi dekompoze edilerek sıradaki teorem verilecektir:

Teorem 5.27 Aşağıdaki şekilde tanımlı bir cebir morfizmi mevcuttur:

$$Z: R \longrightarrow ((R' \ltimes_{\blacktriangleright} E') \ltimes_{\blacktriangleright \bullet} (E' \ltimes_{\blacktriangleright'} L')) \ltimes_{\blacktriangleright \dagger} ((E' \ltimes_{\blacktriangleright'} L') \ltimes_{\blacktriangleright *} L'), \quad (5.20)$$

her $r \in R$ için:

$$r \xrightarrow{Z} \left(f_0(r), s(r), s'(r) - (\partial'_2 \circ w^{(s', s'')})(r), w^{(s', s'')}(r), \right. \\ \left. s''(r) - (\partial'_2 \circ w^{(s \boxplus s', s'')})(r), w^{(s \boxplus s', s'')}(r) - w^{(s', s'')}(r), w^{(s', s'')}(r) \right).$$

Dikkat edilirse bu morfizm, yukarıdaki diyagramı değişmeli yapan biricik morfizmdir.

Şimdi $W = d_1 \circ Z: R \rightarrow \mathcal{A}_2$ şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. Burada Not 3.21 hatırlanacak olursa, tanımlanan bu dönüşüm (5.19) deki tetrahedronun arka yüzeyini, yani bir başka deyişle, $r \in R$ için:

$$W(r) = \begin{array}{ccc} & k_0(r) & \\ (s \boxplus s' \boxplus s'')(r) \nearrow & & \nwarrow (s' \boxplus s'')(r) \\ & \boxed{w^{(s, s')}(r) - w^{(s', s'')}(r) + w^{(s \boxplus s', s'')}(r)} & \\ f_0(r) \xrightarrow{s(r)} & g_0(r) & \end{array} \quad (5.21)$$

üçgenini verecektir. Bu 2-simpleks $b \in B$ serbest taban elemanı için:

$$W(b) = \begin{array}{ccc} & k_0(b) & \\ (s+s'+s'')(b) \nearrow & & \nwarrow (s'+s'')(b) \\ f_0(b) & \xrightarrow{s(b)} & g_0(b) \end{array} \quad (5.22)$$

formundadır.

Şimdi öncelikle $X^{(s,s')}: R \rightarrow \mathcal{A}_2$ nin tanımının (Bölüm 5.3.3) kullanılacağını söylemekte fayda vardır. Bilindiği üzere, herhangi bir $B \rightarrow \mathcal{A}_2$ fonksiyonunun evrensellik özelliği altında genişlemesi olan $R \rightarrow \mathcal{A}_2$ cebir morfizmi biriciktir.

Diğer yandan, dikkat edilirse (5.15) gereği her $b \in B$ için:

$$W(b) = X^{(s,s' \boxplus s'')}(b)$$

olup, yukarıda ifade edilen sebepten dolayı her $r \in R$ için:

$$W(r) = \begin{array}{ccc} & k_0(r) & \\ (s \boxplus s' \boxplus s'')(r) \nearrow & & \nwarrow (s' \boxplus s'')(r) \\ f_0(r) & \xrightarrow{s(r)} & g_0(r) \end{array} = X^{(s,s' \boxplus s'')}(r) \quad (5.23)$$

elde edilir.

Sonuç olarak (5.21) ve (5.23) deki tetrahedronlara bakılırsa: her $r \in R$ için:

$$w^{(s,s')}(r) - w^{(s',s'')}(r) + w^{(s \boxplus s', s'')}(r) = w^{(s, s' \boxplus s'')}(r),$$

ya da:

$$w^{(s,s')}(r) + w^{(s \boxplus s', s'')}(r) = w^{(s, s' \boxplus s'')}(r) + w^{(s', s'')}(r). \quad (5.24)$$

sonucu elde edilir.

Artık homotopinin ikinci bileşeni için de asosyatifliği söylenebilir:

Teorem 5.28 Her $r \in R$ için:

$$(t \boxplus t') \boxplus t'' = t \boxplus (t' \boxplus t'') \quad (5.25)$$

olup işlem asosyatiftir.

İspat: Yukarıda elde edilen (5.24) özelliği kullanılarak, her $e \in E$ için:

$$\begin{aligned} ((t \boxplus t') \boxplus t'')(e) &= (t \boxplus t')(e) + t''(e) + (w^{(s \boxplus s', s'')} \circ \partial_1)(e) \\ &= t(e) + t'(e) + (w^{(s, s')} \circ \partial_1)(e) + t''(e) + (w^{(s \boxplus s', s'')} \circ \partial_1)(e) \\ &= t(e) + t'(e) + w^{(s, s')}(\partial_1(e)) + t''(e) + w^{(s \boxplus s', s'')}(\partial_1(e)) \\ &= t(e) + t'(e) + t''(e) + w^{(s', s'')}(\partial_1(e)) + w^{(s, s' \boxplus s'')}(\partial_1(e)) \\ &= t(e) + t'(e) + t''(e) + (w^{(s', s'')} \circ \partial_1)(e) + (w^{(s, s' \boxplus s'')} \circ \partial_1)(e) \\ &= t(e) + (t' \boxplus t'')(e) + (w^{(s, s' \boxplus s'')} \circ \partial_1)(e) \\ &= (t \boxplus (t' \boxplus t''))(e) \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Böylece tezin esas amaçlarından biri olan aşağıdaki teoremin ispatı tamamlanmıştır:

Teorem 5.29 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}'$ birer 2-çaprazlanmış modül ve $\mathcal{A} = (L, E, R, \partial_1, \partial_2, \{, \})$ özel olarak $B \subset R$ serbest tabanı yardımıyla tanımlı serbest₁ 2-çaprazlanmış modül olsun.

Bu durumda **objeleri** $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ arasında tanımlı 2-çaprazlanmış modül morfizmleri, **morfizmleri** de bunların homotopileri olan ve kısaca $\text{HOM}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ ile gösterilen bir gruboid yapısı elde edilir.

Bu groudoidin işlemi:

$$\boxplus: ((s, t), (s', t')) \longrightarrow (s \boxplus s', t \boxplus t')$$

şeklinde homotopilerin kompozisyonu (5.3.3) olup bu işlem (5.15) ve (5.25) gereği asosyatiftir. Ayrıca gruboidin bu işlem altındaki ters elemanı ise gruboid ters homotopi (5.3.4) olarak tanımlıdır.

Burada dikkat edilmesi gereken, mevcut tüm yapıyı belirleyen unsurun en baştan seçilerek sabitlenen $B \subset R$ serbest tabanına bağımlı olduğudur.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem de verilebilir:

Teorem 5.30 $\mathcal{A}$ serbest₁ 2-çaprazlanmış modül ve $\mathcal{A}'$ keyfi bir 2-çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ arasında tanımlı 2-çaprazlanmış modül morfizmleri kümesi üzerinde tanımlı:

$$“f \simeq g \iff f \text{ ile } g \text{ yi bağlayan bir kuadratik } f\text{-derivasyonu mevcuttur}” \quad (5.26)$$

bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

6. 2-HOMOTOPİ ve 2-GRUBOİD

6.1 Giriş

Bilindiği üzere 2-homotopi kavramı kısaca, homotopileri birbirine bağlayan bir üst boyutlu homotopi olarak açıklanmaktadır.

Hatırlanacağı gibi bir önceki bölümde 2-çaprazlanmış modül morfizmlerinin homotopisi tanımlanmıştı. Dolayısıyla da bu bölümde öncelikle bir üst boyuta çıkılarak 2-çaprazlanmış modül morfizmleri için 2-homotopi tanımı yapılacaktır. Ardından da bu mevcut 2-homotopi ve önceki bölümlerde elde edilen yapılar kullanılarak sonuç olarak bir 2-gruboid yapısı inşa edilecektir.

Bu bölümde öncelikle herhangi bir kısıtlama olmadan genel halde iki $\mathcal{A} = (L, E, R, \partial_1, \partial_2)$ ve $\mathcal{A}' = (L', E', R', \partial'_1, \partial'_2)$ 2-çaprazlanmış modülü ele alınacak, aksi belirtilene dek bu en genel haldeki sabit 2-çaprazlanmış modüller üzerinde çalışılacaktır.

6.2 2-Çaprazlanmış Modül Morfizmlerinin 2-Homotopisi

Tanım 6.1 (Kuadratik 2-derivasyon) $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi ve (s, t) bir kuadratik f -derivasyon olsun. Bu durumda $q: R \rightarrow L'$ κ -lineer dönüşümü (her $r, r' \in R$ için):

$$q(rr') = f_0(r) \blacktriangleright q(r') + f_0(r') \blacktriangleright q(r) + s(r) \blacktriangleright' q(r') + s(r') \blacktriangleright' q(r) + q(r)q(r') \quad (6.1)$$

şartını sağlıyorsa, bir **kuadratik (f, s, t) -2-derivasyon** olarak adlandırılır.

Teorem 6.2 $f, g: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 2-çaprazlanmış modül morfizmleri ile birlikte $f \xrightarrow{(f, s, t)} g$ homotopisi (kuadratik derivasyonu) mevcut olsun. Bu durumda $q: R \rightarrow L'$ bir kuadratik (f, s, t) -2-derivasyon olmak üzere (her $r \in R$ ve $e \in E$ için):

$$\begin{aligned} s'(r) &= s(r) + (\partial'_2 \circ q)(r) \\ t'(e) &= t(e) - (q \circ \partial_1)(e) \end{aligned} \quad (6.2)$$

şeklinde tanımlanan (s', t') ikilisi f ile g arasında $f \xrightarrow{(f, s', t')} g$ şeklinde yeni bir kuadratik derivasyon tanımlar.

İspat: Öncelikle Tanım 5.1 de verilen kuadratik derivasyon şartlar kontrol edilecektir. Bu amaçla da her $e, e' \in E$ ve $r, r' \in R$ için:

$$\begin{aligned}
s'(rr') &= s(rr') + (\partial'_2 q)(rr') \\
&= f_0(r) \blacktriangleright s(r') + f_0(r') \blacktriangleright s(r) + s(r)s(r') + \partial'_2[q(rr')] \\
&= f_0(r) \blacktriangleright s(r') + f_0(r') \blacktriangleright s(r) + s(r)s(r') + \partial'_2[f_0(r) \blacktriangleright q(r') \\
&\quad + f_0(r') \blacktriangleright q(r) + s(r) \blacktriangleright q(r') + s(r') \blacktriangleright q(r) + q(r)q(r')] \\
&= f_0(r) \blacktriangleright s(r') + f_0(r') \blacktriangleright s(r) + s(r)s(r') + \partial'_2(f_0(r) \blacktriangleright q(r')) \\
&\quad + \partial'_2(f_0(r') \blacktriangleright q(r)) + \partial'_2(s(r) \blacktriangleright q(r')) + \partial'_2(s(r') \blacktriangleright q(r)) + \partial'_2(q(r)q(r')) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright s(r') + f_0(r') \blacktriangleright s(r) + s(r)s(r') + f_0(r) \blacktriangleright (\partial'_2 q)(r') \\
&\quad + f_0(r') \blacktriangleright (\partial'_2 q)(r) + s(r)(\partial'_2 q)(r') + s(r')\partial'_2 q(r) + (\partial'_2 q)(r)(\partial'_2 q)(r') \\
&= f_0(r) \blacktriangleright [s(r') + (\partial'_2 q)(r')] + f_0(r') \blacktriangleright [s(r) + (\partial'_2 q)(r)] \\
&\quad + [s(r) + (\partial'_2 q)(r)][s(r') + (\partial'_2 q)(r')] \\
&= f_0(r) \blacktriangleright s'(r') + f_0(r') \blacktriangleright s'(r) + s'(r)s'(r')
\end{aligned}$$

olup s' bir f_0 -derivasyon olur. Yukarıdaki hesaplamalarda; R -cebiri özelliğinden dolayı $\partial'_2(r \blacktriangleright e) = r \blacktriangleright \partial'_2(e)$ özelliğini ve ayrıca $(\partial'_2: L' \rightarrow E', \blacktriangleright')$ nin çaprazlanmış modül olmasından (2.1) dolayı da XM2 aksiyomu kullanılmıştır. Diğer yandan ikinci bileşen için:

$$\begin{aligned}
t'(ee') &= t(ee') - (q\partial_1)(ee') \\
&= t(ee') - q(\partial_1(e)\partial_1(e')) \\
&= \{(s\partial_1)(e), f_1(e')\} + \{(s\partial_1)(e'), f_1(e)\} + f_1(e) \blacktriangleright' t(e') + f_1(e') \blacktriangleright' t(e) \\
&\quad + (s\partial_1)(e) \blacktriangleright' t(e') + (s\partial_1)(e') \blacktriangleright' t(e) + t(e)t(e') - [f_0(\partial_1(e)) \blacktriangleright q(\partial_1(e')) \\
&\quad + f_0(\partial_1(e')) \blacktriangleright q(\partial_1(e)) + s(\partial_1(e)) \blacktriangleright' q(\partial_1(e')) + s(\partial_1(e')) \blacktriangleright' q(\partial_1(e)) \\
&\quad + q(\partial_1(e))q(\partial_1(e'))] \\
&= \{(s\partial_1(e)), f_1(e')\} + \{(\partial'_2 q)(\partial_1(e)), f_1(e')\} + \{(s\partial_1(e')), f_1(e)\} \\
&\quad + \{(\partial'_2 q)(\partial_1(e')), f_1(e)\} + f_1(e) \blacktriangleright' t(e') - f_1(e) \blacktriangleright' (q\partial_1)(e') \\
&\quad + f_1(e') \blacktriangleright' t(e) - f_1(e') \blacktriangleright' (q\partial_1)(e) + (\partial'_2 q)(\partial_1(e)) \blacktriangleright' t(e') \\
&\quad + s(\partial_1(e)) \blacktriangleright' t(e') - s(\partial_1(e)) \blacktriangleright' (q\partial_1)(e') - (\partial'_2 q)(\partial_1(e)) \blacktriangleright' (q\partial_1)(e') \\
&\quad + s(\partial_1(e')) \blacktriangleright' t(e) - s(\partial_1(e')) \blacktriangleright' (q\partial_1)(e) + (\partial'_2 q)(\partial_1(e')) \blacktriangleright' t(e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\partial'_2 q)(\partial_1(e')) \blacktriangleright' (q\partial_1)(e) + t(e)t(e') - t(e)(q\partial_1)(e') \\
& - (q\partial_1)(e)t(e') + (q\partial_1)(e)(q\partial_1)(e') \\
& = \{s(\partial_1(e)) + (\partial'_2 q)(\partial_1(e)), f_1(e')\} + \{s(\partial_1(e')) + (\partial'_2 q)(\partial_1(e')), f_1(e)\} \\
& + f_1(e) \blacktriangleright' [t(e') - (q\partial_1)(e')] + f_1(e') \blacktriangleright' [t(e) - (q\partial_1)(e)] \\
& + [s(\partial_1(e)) + (\partial'_2 q)(\partial_1(e))] \blacktriangleright' [t(e') - (q\partial_1)(e')] \\
& + [s(\partial_1(e')) + (\partial'_2 q)(\partial_1(e'))] \blacktriangleright' [t(e) - (q\partial_1)(e)] \\
& + [t(e) - (q\partial_1)(e)][t(e') - (q\partial_1)(e')] \\
& = \{(s'\partial_1)(e), f_1(e')\} + \{(s'\partial_1)(e'), f_1(e)\} + f_1(e) \blacktriangleright' t'(e') + f_1(e') \blacktriangleright' t'(e) \\
& + (s'\partial_1)(e) \blacktriangleright' t'(e') + (s'\partial_1)(e') \blacktriangleright' t'(e) + t'(e)t'(e')
\end{aligned}$$

ve ayrıca 2XM2, 2XM4, 2XM5 aksiyomları yardımıyla:

$$\begin{aligned}
t'(r \blacktriangleright e) &= t(r \blacktriangleright e) - (q\partial_1)(r \blacktriangleright e) \\
&= t(r \blacktriangleright e) - q(\partial_1(r \blacktriangleright e)) \\
&= t(r \blacktriangleright e) - q(r\partial_1(e)) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright t(e) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright t(e) + \{s(r), f_1(e)\} - \{f_1(e), s(r)\} - \{(s\partial_1)(e), s(r)\} \\
&\quad - f_0(r) \blacktriangleright q(\partial_1(e)) + f_0(\partial_1(e)) \blacktriangleright q(r) + s(r) \blacktriangleright' q(\partial_1(e)) + s(\partial_1(e)) \blacktriangleright' q(r) \\
&\quad + q(r)q(\partial_1(e)) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright t(e) - f_0(r) \blacktriangleright (q\partial_1)(e) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright t(e) - (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright (q\partial_1)(e) \\
&\quad + \partial'_1(\partial'_2 q(r)) \blacktriangleright t(e) - \partial'_1(\partial'_2 q(r)) \blacktriangleright (q\partial_1)(e) + \{s(r), f_1(e)\} + f_1(e) \blacktriangleright' q(r) \\
&\quad - (\partial_1 f_1)(e) \blacktriangleright q(r) - \{f_1(e), s(r)\} - f_1(e) \blacktriangleright' q(r) - \{(s\partial_1)(e), s(r)\} \\
&\quad - (s\partial_1)(e) \blacktriangleright' q(r) - s(r) \blacktriangleright' (q\partial_1)(e) + (\partial'_1 s)(r) \blacktriangleright (q\partial_1)(e) - (q\partial_1)(e)q(r) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright t'(e) + (\partial'_1 s')(r) \blacktriangleright t'(e) + \{s'(r), f_1(e)\} - \{f_1(e), s'(r)\} - \{(s'\partial_1)(e), s'(r)\}.
\end{aligned}$$

elde edilir, yani sonuç olarak (s', t') bir kuadratik f -derivasyondur.

Son olarak ise, (s', t') kuadratik derivasyonunun:

$$f \xrightarrow{(f, s', t')} g$$

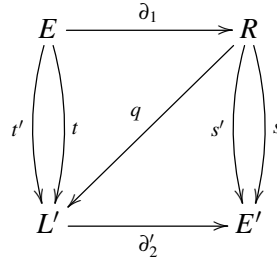
şeklinde f yi g ye bağlayan homotopi olduğu, yani (5.1) daki şartların sağlandığı açıktır. $\square$

✓ Sonuç olarak, (f, s, t, q) dörtlüsü, (f, s, t) ve (f, s', t') homotopilerini birbirine bağlayan bir **2-homotopi** olarak adlandırılır ve kısaca:

$$(f, s, t) \xRightarrow{(f, s, t, q)} (f, s', t')$$

şeklinde gösterilir.

Tüm bu verilenler diyagramatik olarak aşağıdaki şekilde özetlenir:



6.2.1 Bazı cebirsel özellikleri

$\mathcal{A} = (L, E, R, \partial_1, \partial_2, \{, \})$ 2-çaprazlanmış modülü üzerinde tanımlanan $\mathcal{A}_1 \doteq R \ltimes E$ yani 1-simpleksin tanımı göz önüne alınarak bulundurarak, aşağıdaki yardımcı teoremi verilir:

Yardımcı Teorem 6.3 $\mathcal{A}_1$ in L üzerine, $(r \in R, e \in E$ ve $l \in L$ olmak üzere):

$$(r, e) \triangleright l = r \blacktriangleright l + e \blacktriangleright' l$$

şeklinde tanımlı bir etkisi mevcuttur.

Yukarıda tanımlanan etki ve yarı-direkt çarpım yardımıyla:

$$Q \doteq (R \ltimes_{\blacktriangleright} E) \ltimes_{\triangleright} L \quad (6.3)$$

değişmeli cebiri elde edilir.

Yardımcı Teorem 6.4 Dikkat edilirse, Q nun tanımı ve işlemi göz önüne alındığında, kuadratik 2-derivasyonlar ile (her $r \in R$ için):

$$\psi : r \in R \longmapsto (f_0(r), s(r), q(r)) \in (R' \ltimes_{\blacktriangleright} E') \ltimes_{\triangleright} L' \quad (6.4)$$

şeklinde tanımlı cebir homomorfizmi arasında bire-bir eşleme mevcuttur.

Böylece:

Yardımcı Teorem 6.5 $\mathcal{A}$ serbest₁ 2-çaprazlanmış modül olmak üzere, $q: R \rightarrow L'$ kuadratik 2- (f, s, t) -derivasyonu, serbest cebirin evrensellik özelliği gereği, $B \subset R$ altındaki değerler yardımıyla biricik şekilde tanımlanabilir.

Böylece herhangi bir $q^*: B \rightarrow L'$ fonksiyon ailesi, değişmeli:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\text{incl}} & R \\
 & \searrow (f_0, s^*, q^*) & \downarrow \exists! (f_0, s, q) \\
 & & Q'
 \end{array} \quad (6.5)$$

diagramı altında genişleyerek, biricik q kuadratik 2- (f, s, t) -derivasyonunu tanımlar.

Diğer yandan:

Yardımcı Teorem 6.6 $\mathcal{A}'$ üzerindeki $\mathcal{A}'_2 = (R' \ltimes_{\blacktriangleright} E') \ltimes_{\blacktriangleright} (E' \ltimes_{\blacktriangleright} L')$ 2-simpleks cebiri ele alın-
sın. $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ bir 2-çaprazlanmış modül morfizmi için (s, t) bir kuadratik f derivasyon ve q bir
kuadratik (f, s, t) -2-derivasyon olsun. Bu durumda her $r \in R$ için:

$$r \xrightarrow{\Omega} (f_0(r), s(r), (\partial'_2 \circ q)(r), -q(r)) = \begin{array}{ccc} & & g_0(r) \\ & \nearrow s'(r) & \uparrow \\ f_0(r) & \xrightarrow{s(r)} & g_0(r) \end{array} \quad (6.6)$$

$\begin{array}{c} \boxed{-q(r)} \\ 0 \end{array}$

şeklinde tanımlı $\Omega: R \rightarrow A'_2$ bir cebir homomorfizmidir.

İspat: Öncelikle κ -lineerlik gereği $\Omega(r + r') = \Omega(r) + \Omega(r')$ ve $\Omega(kr) = k\Omega(r)$ olduğu açıktır. Gerekli hesaplamalar sonucu A'_2 üzerindeki:

$$(r, e, e', l)(r_2, e_2, e'_2, l_2) = (a, b, c, d)$$

çarpma işleminin:

$$a = rr_2$$

$$\begin{aligned}
b &= r \blacktriangleright e_2 + r_2 \blacktriangleright e + ee_2 \\
c &= ee'_2 + r \blacktriangleright e'_2 + e_2e' + r_2 \blacktriangleright e' + e'e'_2 \\
d &= \partial_1(e) \blacktriangleright l_2 + r \blacktriangleright l_2 - \{e'_2, e\} + \partial_1(e_2) \blacktriangleright l + r_2 \blacktriangleright l - \{e', e_2\} \\
&\quad + e' \blacktriangleright l_2 + e'_2 \blacktriangleright l + ll_2
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlandığı görülür. Bundan yararlanılarak da:

$$\begin{aligned}
\Omega(r)\Omega(r') &= (f_0(r), s(r), (\partial'_2 \circ q)(r), -q(r)) (f_0(r'), s(r'), (\partial'_2 \circ q)(r'), -q(r')) \\
&= (f_0(r)f_0(r'), f_0(r) \blacktriangleright s(r') + f_0(r') \blacktriangleright s(r) + s(r)s(r'), \\
&\quad s(r)(\partial'_2 \circ q)(r') + f_0(r) \blacktriangleright (\partial'_2 \circ q)(r') + s(r')(\partial'_2 \circ q)(r) \\
&\quad + f_0(r') \blacktriangleright (\partial'_2 \circ q)(r) + (\partial'_2 \circ q)(r)(\partial'_2 \circ q)(r'), \\
&\quad \partial_1(s(r)) \blacktriangleright -q(r') + f_0(r) \blacktriangleright -q(r') - \{(\partial'_2 \circ q)(r'), s(r)\} + \partial_1(e_2) \blacktriangleright -q(r) \\
&\quad + f_0(r') \blacktriangleright -q(r) - \{(\partial'_2 \circ q)(r), s(r')\} + (\partial'_2 \circ q)(r) \blacktriangleright -q(r') \\
&\quad + (\partial'_2 \circ q)(r') \blacktriangleright -q(r) + q(r)q(r')) \\
&= (f_0(rr'), s(rr')), \\
&\quad \partial'_2 (f_0(r) \blacktriangleright q(r') + f_0(r') \blacktriangleright q(r) + s(r) \blacktriangleright' q(r') + s(r') \blacktriangleright' q(r) + q(r)q(r')), \\
&\quad - \partial_1(s(r)) \blacktriangleright q(r') - f_0(r) \blacktriangleright q(r') - s(r) \blacktriangleright q(r') + \partial_1(s(r')) \blacktriangleright q(r') \\
&\quad - \partial_1(s(r')) \blacktriangleright q(r) - f_0(r') \blacktriangleright q(r) - s(r') \blacktriangleright q(r) + \partial_1(s(r')) \blacktriangleright q(r) \\
&\quad - q(r)q(r') - q(r')q(r) + q(r)q(r')) \\
&= (f_0(rr'), s(rr'), \partial'_2 (q(rr'))), \\
&\quad - f_0(r) \blacktriangleright q(r') - s(r) \blacktriangleright q(r') - f_0(r') \blacktriangleright q(r) - s(r') \blacktriangleright q(r) - q(r)q(r')) \\
&= (f_0(rr'), s(rr'), (\partial'_2 \circ q)(rr'), -q(rr')) \\
&= \Omega(rr')
\end{aligned}$$

yani böylece Ω nın cebir morfizmi olduğu gösterilmiş olur. $\square$

6.3 Dikey Kompozisyon

Bu alt bölümde de yine herhangi bir kısıtlama olmadan iki (keyfi) sabit $\mathcal{A} = (L, E, R, \partial_1, \partial_2)$ ve $\mathcal{A}' = (L', E', R', \partial'_1, \partial'_2)$ 2-çaprazlanmış modülü üzerinde çalışılmaya devam edilecektir.

Teorem 6.7 $f, g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 2-çaprazlanmış modül morfizmleri için:

$$f \xrightarrow{f,s,t} g \quad f \xrightarrow{f,s',t'} g \quad f \xrightarrow{f,s'',t''} g$$

homotopileri (kuadratik derivasyonları) ve

$$(f, s, t) \xrightarrow{(f,s,t,q)} (f, s', t') \quad (f, s', t') \xrightarrow{(f,s',t',q')} (f, s'', t'')$$

2-homotopileri (q, q' kuadratik 2-derivasyonları) tanımlansın. Bu durumda:

$$(q \star q')(r) = q(r) + q'(r) \quad (6.7)$$

şeklinde tanımlı $q \star q' : R \rightarrow L'$ dönüşümü (f, s, t) ile (f, s'', t'') yi bağlayan

$$(f, s, t) \xrightarrow{(f,s,t,q \star q')} (f, s'', t'')$$

homotopisini (kuadratik (f, s, t) -2-derivasyonunu) tanımlar. Yani bir başka deyişle $\star$ işlemi kuadratik 2-derivasyonların dikey kompozisyonunu verir.

Tüm bu verilenler aşağıdaki diyagramla özetlenebilir:

$$\begin{array}{ccc} & (f, s, t) & \\ & \Downarrow & \\ f & \xrightarrow{(f,s,t,q)} & g \\ & \Downarrow & \\ & (f, s', t') & \\ & \Downarrow & \\ & (f, s', t', q') & \\ & \Downarrow & \\ & (f, s'', t'') & \end{array} = \begin{array}{ccc} & (f, s, t) & \\ & \Downarrow & \\ f & \xrightarrow{(f,s,t,q \star q')} & g \\ & \Downarrow & \\ & (f, s', t') & \\ & \Downarrow & \\ & (f, s'', t'') & \end{array} \quad (6.8)$$

İspat: Öncelikle her $r, r' \in R$ için:

$$\begin{aligned} (q \star q')(rr') &= q(rr') + q'(rr') \\ &= f_0(r) \blacktriangleright q(r') + f_0(r') \blacktriangleright q(r) + s(r) \blacktriangleright' q(r') + s(r') \blacktriangleright' q(r) + q(r)q(r') \\ &\quad + f_0(r) \blacktriangleright q'(r') + f_0(r') \blacktriangleright q'(r) + s'(r) \blacktriangleright' q'(r') + s'(r') \blacktriangleright' q'(r) + q'(r)q'(r') \\ &= f_0(r) \blacktriangleright q(r') + f_0(r') \blacktriangleright q(r) + s(r) \blacktriangleright' q(r') + s(r') \blacktriangleright' q(r) + q(r)q(r') \\ &\quad + f_0(r) \blacktriangleright q'(r') + f_0(r') \blacktriangleright q'(r) + [s(r) + (\partial'_2 \circ q)(r)] \blacktriangleright' q'(r') \\ &\quad + [s(r) + (\partial'_2 \circ q)(r)] \blacktriangleright' q'(r) + q'(r)q'(r') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_0(r) \blacktriangleright q(r') + f_0(r') \blacktriangleright q(r) + s(r) \blacktriangleright' q(r') + s(r') \blacktriangleright' q(r) + q(r)q(r') \\
&\quad + f_0(r) \blacktriangleright q'(r') + f_0(r') \blacktriangleright q'(r) + s(r) \blacktriangleright' q'(r') + s(r') \blacktriangleright' q'(r) + q'(r)q'(r') \\
&\quad + q(r)q'(r') + q'(r)q(r') \quad (\because \text{XM2}) \\
&= f_0(r) \blacktriangleright (q \star q')(r') + f_0(r') \blacktriangleright (q \star q')(r) + s(r) \blacktriangleright' (q \star q')(r') \\
&\quad + s(r') \blacktriangleright' (q \star q')(r) + (q \star q')(r)(q \star q')(r')
\end{aligned}$$

olup (6.1) şartı sağlanmış olur. Diğer yandan bu yeni quadratik 2-derivasyonun:

$$(f, s, t) \xrightarrow{(f, s, t, q)} (f, s'', t'')$$

şeklinde (f, s, t) yi (f, s'', t'') ye bağladığı, yani (6.2) deki şartların sağlandığı açıktır. $\square$

♣ Dikey kompozisyon işleminin asosyatif olduğu açıktır. Ayrıca diğer yandan, sıfır morfizm-ler yardımıyla elde edilen sıfır kuadratik (f, s, t) -2-derivasyonu da bu kompozisyon işlemi için birim eleman niteliğindedir. Böylece aşağıdaki teoremin ispatı tamamlanmış olur:

Teorem 6.8 $f, g: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 2-çaprazlanmış modül morfizmleri üzerinde tanımlı: **objeleri** $f \xrightarrow{(f, s, t)}$ g şeklindeki homotopiler; **morfizmleri** de bu homotopiler arasındaki $(f, s, t) \xrightarrow{(f, s, t, q)} (f, s', t')$ şeklindeki 2-homotopiler olan ve kısaca $\text{HOM}_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}')_1$ ile gösterilen bir kategori yapısı elde edilir. Bu kategoride $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}'$ için herhangi bir kısıtlama olmadığının tekrar altını çizmekte fayda vardır. Dahası, sıradaki yardımcı teoremle birlikte tanımlanan bu $\text{HOM}_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}')_1$ kategorisinin bir **gruboid** olduğu görülecektir:

Yardımcı Teorem 6.9 $(f, s, t) \xrightarrow{(f, s, t, q)} (f, s', t')$ yani q quadratic (f, s, t) -2-derivasyonu verilsin. Bu durumda:

$$\bar{q}(r) = -q(r)$$

şeklinde tanımlı $\bar{q}: R \rightarrow L'$ dönüşümü, (f, s', t') ile (f, s, t) yi bağlayan:

$$(f, s', t') \xrightarrow{(f, s, t, \bar{q})} (f, s, t)$$

kuadratik 2-derivasyonunu tanımlar. Ayrıca bu 2-homotopilerin dikey kompozisyon işlemi altında q nun tersi olduğu $\star$ işleminin tanımı gereği açıktır.

İspat: Her $r, r' \in R$ için:

$$\begin{aligned}
\bar{q}(rr') &= -(q(rr')) \\
&= -[f_0(r) \blacktriangleright q(r') + f_0(r') \blacktriangleright q(r) + s(r) \blacktriangleright' q(r') \\
&\quad + s(r') \blacktriangleright' q(r) + q(r)q(r')] \\
&= -f_0(r) \blacktriangleright q(r') - f_0(r') \blacktriangleright q(r) - s(r) \blacktriangleright' q(r') - s(r') \blacktriangleright' q(r) - q(r)q(r') \\
&\quad + q(r)q(r') - q(r)q(r') \\
&= -f_0(r) \blacktriangleright q(r') - f_0(r') \blacktriangleright q(r) - s(r) \blacktriangleright' q(r') - s(r') \blacktriangleright' q(r) - q(r)q(r') \\
&\quad + (\partial'_2 \circ q)(r) \blacktriangleright' q(r') - (\partial'_2 \circ q)(r) \blacktriangleright' q(r') \\
&= -f_0(r) \blacktriangleright q(r') - f_0(r') \blacktriangleright q(r) \\
&\quad - (s(r) + (\partial'_2 \circ q)(r)) \blacktriangleright' q(r') - (s(r') + (\partial'_2 \circ q)(r')) \blacktriangleright' q(r) + q(r)q(r') \\
&= f_0(r) \blacktriangleright -q(r') + f_0(r') \blacktriangleright -q(r) - s'(r) \blacktriangleright' q(r') - s'(r') \blacktriangleright' q(r) + q(r)q(r') \\
&= f_0(r) \blacktriangleright \bar{q}(r') + f_0(r') \blacktriangleright \bar{q}(r) + s'(r) \blacktriangleright' \bar{q}(r') + s'(r') \blacktriangleright' \bar{q}(r) + \bar{q}(r)\bar{q}(r')
\end{aligned}$$

olup (6.1) şartı sağlanır yani $\bar{q}$ bir kuadratik (f, s', t') -2-derivasyondur.

Yukarıdaki adımlarda $(\partial'_2: L' \rightarrow E', \blacktriangleright')$ nin çaprazlanmış modül olmasından (2.1) dolayı XM2 şartı kullanılmıştır. İspatın geri kalan kısmı, yani bu kuadratik 2-derivasyonun 6.2 daki eşitlikleri sağlayarak g ile f yi bağladığı basit hesaplamalarla açıktır. $\square$

6.4 Sesquigrouboid

Şimdi buradan itibaren, bölüm başında keyfi olarak seçilen ve sabitlenen $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}'$ 2-çaprazlanmış modüllerinden $\mathcal{A} = (L, E, R, \partial_1, \partial_2)$ (yani domain), serbest₁ 2-çaprazlanmış modül ile değiştirilerek sabitlenecek ve bundan sonra bu durum üzerinden devam edilecektir. Burada R nin sabitlenmiş bir $B \subset R$ serbest tabanı üzerinde tanımlı olduğuna dikkat edilmelidir.

Öncelikle, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 2-çaprazlanmış modül morfizmleri ve bunların homotopileri yardımıyla tanımlanan $\text{HOM}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ gruboid yapısının (Bölüm 5.3, Teorem 5.29) tekrar hatırlanmasında fayda vardır.

6.4.1 Sağ-Whiskering

Literatürde **whiskering** olarak yer alan kelime, 2-kategori yapısındaki 1-morfizmlerin 2-morfizmlerle kompoze edilmesi anlamını taşımaktadır. Tezdeki karşılığı ise, 2-kategori yapısının 1-morfizmleri olan 1-homotopiler ile 2-morfizmleri olan 2-homotopilerin birbiriyle kompoze edilerek yeni bir 2-homotopi elde edilmesi olacaktır.

$f, g, h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 2-çaprazlanmış modül morfizmleri için:

$$f \xrightarrow{(f,s,t)} g, \quad f \xrightarrow{(f,s',t')} g, \quad g \xrightarrow{(g,u,v)} h$$

homotopileri ve ayrıca bu homotopiler için de:

$$(f, s, t) \xRightarrow{(f,s,t,q)} (f, s', t')$$

şeklindeki 2-homotopisi, yani q kuadratik 2- (f, s, t) -derivasyonu verilsin. Tüm bu veriler kısaca aşağıdaki diyagramla özetlenir:

$$\begin{array}{ccccc} & (f,s,t) & & & \\ & \curvearrowright & & & \\ f & & (f,s,t,q) & & g \xrightarrow{(g,u,v)} h \\ & \curvearrowleft & & & \\ & (f,s',t') & & & \end{array} \quad (6.9)$$

Burada sağ whiskering, yani 2-homotopinin 1-fold homotopi ile kompozisyonunun tanımlanması için, aşağıdaki diyagramda görüleceği üzere, $(f, s \boxplus u, t \boxplus v)$ ile $(f, s' \boxplus u, t' \boxplus v)$ yi bağlayan $(q \odot u)$ kuadratik 2-derivasyonun tanımlaması gerekir:

$$\begin{array}{ccccc} & (f,s \boxplus u, t \boxplus v) & & & \\ & \curvearrowright & & & \\ f & & (f,s \boxplus u, t \boxplus v, q \odot u) & & h \\ & \curvearrowleft & & & \\ & (f,s' \boxplus u, t' \boxplus v) & & & \end{array} \quad (6.10)$$

Bu amaçla:

$(q \odot u)$ kuadratik 2- $(f, s \boxplus u, t \boxplus v)$ -derivasyonu, (yardımcı teorem 6.5) $q|_R$ nun serbest cebirin

evrensellik özelliği gereği, $B \subset R$ altındaki değerler ve değişmeli:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\text{incl}} & R \\
 & \searrow (f_0, s+u, q) & \downarrow \exists! (f_0, s \boxplus u, q \odot u) \\
 & & Q'
 \end{array} \quad (6.11)$$

diyagramı yardımıyla elde edilen biricik kuadratik 2-derivasyon olarak tanımlansın.

Burada dikkat edilirse serbest tabandan seçilen her $b \in B$ için:

$$(q \odot u)(b) = q(b)$$

şeklindedir.

Tanım gereği, $q \odot u$ dönüşümü bir kuadratik $(f, s \boxplus u, t \boxplus v)$ -2-derivasyondur. Şimdi bu kuadratik 2-derivasyonun $(f, s \boxplus u, t \boxplus v)$ ile $(f, s' \boxplus u, t' \boxplus v)$ yi birbirine bağladığı gösterecektir. Bunun için teorem 6.2 deki şartları kontrol edilmesi gerekir.

Aşağıdaki şekilde tanımlı:

$$\zeta: b \in B \mapsto (f_0(b), (s+u)(b), (\partial'_2 \circ q)(b), -q(b)) \in \mathcal{A}'_2 \quad (6.12)$$

fonksiyonu göz önüne alınırsa, bu fonksiyon geometrik olarak:

$$\zeta(b) = \begin{array}{ccc}
 & & f_0(b) + \partial'_1((s+u)(b)) + \partial'_1((\partial'_2 \circ q)(b)) \\
 & \nearrow (s+u)(b) + (\partial'_2 \circ q)(b) & \uparrow \boxed{-q(b)} \\
 f_0(b) & \xrightarrow{(s+u)(b)} & f_0(b) + \partial'_1((s+u)(b)) \\
 & & \uparrow (\partial'_2 \circ q)(b) + \partial'_2(-q(b))
 \end{array} \quad (6.13)$$

ya da kısaca:

$$\zeta(b) = \begin{array}{c} \nearrow^{(s'+u)(b)} \\ \begin{array}{c} \boxed{-q(b)} \\ 0 \end{array} \\ \xrightarrow{(s+u)(b)} \end{array} \begin{array}{c} h_0(b) \\ h_0(b) \end{array} \quad (6.14)$$

şeklinde resmedilir.

Bu ζ fonksiyonunun yrd teo 5.13 gereği yardımıyla genişlemesi olan biricik

$$Y^{(s,s',u)} : R \rightarrow \mathcal{A}'_2$$

cebiri morfizmi vardır. Bu cebir morfizmi de yrd. teo. 6.6 gereği geometrik olarak:

$$Y^{(s,s',u)}(r) = \begin{array}{c} \nearrow^{(s' \boxplus u)(r)} \\ \begin{array}{c} \boxed{-(q \odot u)(r)} \\ 0 \end{array} \\ \xrightarrow{(s \boxplus u)(r)} \end{array} \begin{array}{c} h_0(r) \\ h_0(r) \end{array} \quad (6.15)$$

şeklinde resmedilir. Böylece $Y^{(s,s')}$ cebir morfizminin açık formu yine yrd. teo. 6.6 gereği, herhangi bir $\rho : R \rightarrow E'$ dönüşümü ile birlikte:

$$Y^{(s,s',u)}(r) = (f_0(r), (s \boxplus u)(r), \rho(r), -(q \odot u)(r))$$

şeklinde dir. Dahası, 2-simpleksin özelliği hatırlanacak olursa:

$$\rho(r) - \partial_2((q \odot u)(r)) = 0$$

yani böylece:

$$\rho(r) = \partial'_2((q \odot u)(r))$$

olduğu görülür. Böylece (3.2) gereği $Y^{(s,s',u)}$ cebir morfizminin açık formülü:

$$Y^{(s,s',u)}(r) = (f_0(r), (s \boxplus u)(r), \partial'_2((q \odot u)(r)), -(q \odot u)(r))$$

şeklinde elde edilir. Son olarak da yrd. teo. 6.6 kullanılarak::

$$(s' \boxplus u)(r) = (s \boxplus u)(r) + (\partial'_2 \circ (q \odot u))(r) \quad (6.16)$$

sonucu elde edilir ki bu da bize teorem 6.2 deki (6.2) şartlarından ilkinin sağladığı.

Yardımcı Teorem 6.10 Yukarıda elde edilenler gereği aşağıdaki eşitlik geçerlidir::

$$\partial'_2((q \odot u)(r)) = \partial'_2(q(r) + w^{(s,u)}(r) - w^{(s',u)}(r)) \quad (6.17)$$

İspat: Bir önceki teorem gereği:

$$(s' \boxplus u)(r) = (s \boxplus u)(r) + (\partial'_2 \circ (q \odot u))(r)$$

olduğu açıktır. Bu eşitlik kullanılarak ilk olarak:

$$(s \boxplus u)(r) + (\partial'_2 \circ (q \odot s''))(r) = s(r) + u(r) - (\partial'_2 \circ w^{(s,u)})(r) + (\partial'_2 \circ (q \odot u))(r)$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan:

$$\begin{aligned} (s' \boxplus u)(r) &= s'(r) + u(r) - (\partial'_2 \circ w^{(s',u)})(r) \\ &= s(r) + (\partial'_2 \circ q)(r) + u(r) - (\partial'_2 \circ w^{(s',u)})(r) \end{aligned}$$

olup istenen sonuç elde edilir. $\square$

Şimdi $(f, s \boxplus u, t \boxplus v) \xrightarrow{(f, s \boxplus u, t \boxplus v), q \odot u} (f, s' \boxplus u, t' \boxplus v)$ 2-homotopisi gösterilecektir:

Yardımcı Teorem 6.11 Aşağıdaki diyagramı geçerli kılacak şartlarda 2-çaprazlanmış modül morfizmleri, 1-fold ve 2-fold homotopileri mevcut olsun:

$$\begin{array}{ccccc} & & (f, s, t) & & \\ & \searrow & \parallel & \nearrow & \\ f & & (f, s, t, q) & & g \xrightarrow{(g, u, v)} h \\ & \swarrow & \downarrow & \nwarrow & \\ & & (f, s', t') & & \end{array} \quad (6.18)$$

Bu durumda:

$$(q \hat{\odot} u)(r) = q(r) + w^{(s,u)}(r) - w^{(s',u)}(r) \quad (6.19)$$

şeklinde tanımlı $q\hat{\odot}u: R \rightarrow L'$ dönüşümü bir kuadratik 2- $(f, s \boxplus u, t \boxplus v)$ -derivasyon tanımlar. Dahası, $(q \odot u)$ ve $(q\hat{\odot}u)$ dönüşümlerinin $B \subset R$ serbest tabanı altındaki değerleri eşit olduğundan dolayı, bunların genişlemesi olarak, $R \rightarrow L'$ için de:

$$(q \odot u) = (q\hat{\odot}u)$$

sonucu elde edilir.

İspat: Öncelikle tanım 6.1 deki şartının edilmesi gerekir:

$$\begin{aligned} (q\hat{\odot}u)(rr') &= f_0(r) \blacktriangleright (q\hat{\odot}u)(r') + f_0(r') \blacktriangleright (q\hat{\odot}u)(r) \\ &\quad + (s \boxplus u)(r) \blacktriangleright' (q \odot u)(r') + (s \boxplus u)(r') \blacktriangleright' (q \odot u)(r) \\ &\quad + (q\hat{\odot}u)(r)(q\hat{\odot}u)(r'). \end{aligned}$$

Eğer eşitliğin sol tarafını açılırsa:

$$\begin{aligned} (q\hat{\odot}u)(rr') &= q(rr') + w^{(s,u)}(rr') - w^{(s',u)}(rr') \\ &= f_0(r) \blacktriangleright q(r') + f_0(r') \blacktriangleright q(r) + s(r) \blacktriangleright' q(r') + s(r') \blacktriangleright' q(r) + q(r)q(r') \\ &\quad + f_0(r) \blacktriangleright w^{(s,u)}(r') + f_0(r') \blacktriangleright w^{(s,u)}(r) + u(r') \blacktriangleright' w^{(s,u)}(r) \\ &\quad + s(r') \blacktriangleright' w^{(s,u)}(r) + u(r) \blacktriangleright' w^{(s,u)}(r') + s(r) \blacktriangleright' w^{(s,u)}(r') \\ &\quad - \{u(r'), s(r)\} - \{u(r), s(r')\} - w^{(s,u)}(r)w^{(s,u)}(r') \\ &\quad - [f_0(r) \blacktriangleright w^{(s',u)}(r') + f_0(r') \blacktriangleright w^{(s',u)}(r) + u(r') \blacktriangleright' w^{(s',u)}(r) \\ &\quad + s'(r') \blacktriangleright' w^{(s',u)}(r) + u(r) \blacktriangleright' w^{(s',u)}(r') + s'(r) \blacktriangleright' w^{(s',u)}(r') \\ &\quad - \{u(r'), s'(r)\} - \{u(r), s'(r')\} - w^{(s',u)}(r)w^{(s',u)}(r')] \end{aligned}$$

elde edilip, diğer yandan eşitliğin sağ tarafı da açıldığında:

$$\begin{aligned} &f_0(r) \blacktriangleright (q\hat{\odot}u)(r') + f_0(r') \blacktriangleright (q \odot u)(r) + (s \boxplus u)(r) \blacktriangleright' (q\hat{\odot}u)(r') \\ &\quad + (s \boxplus u)(r') \blacktriangleright' (q\hat{\odot}u)(r) + (q\hat{\odot}u)(r)(q\hat{\odot}u)(r') \\ &= f_0(r) \blacktriangleright [q(r') + w^{(s,u)}(r') - w^{(s',u)}(r')] + f_0(r') \blacktriangleright [q(r) + w^{(s,u)}(r) - w^{(s',u)}(r)] \\ &\quad + [s(r) + u(r) - (\partial'_2 \circ w^{(s,u)})(r)] \blacktriangleright' [q(r') + w^{(s,u)}(r') - w^{(s',u)}(r')] \\ &\quad + [s(r') + u(r') - (\partial'_2 \circ w^{(s,u)})(r')] \blacktriangleright' [q(r) + w^{(s,u)}(r) - w^{(s',u)}(r)] \\ &\quad + [q(r) + w^{(s,u)}(r) - w^{(s',u)}(r)][q(r') + w^{(s,u)}(r') - w^{(s',u)}(r')] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_0(r) \blacktriangleright q(r') + f_0(r) \blacktriangleright w^{(s,u)}(r') - f_0(r) \blacktriangleright w^{(s',u)}(r') \\
&\quad + f_0(r') \blacktriangleright q(r) + f_0(r') \blacktriangleright w^{(s,u)}(r) - f_0(r') \blacktriangleright w^{(s',u)}(r) \\
&\quad + s(r)q(r') + s(r)w^{(s,u)}(r') - s(r)w^{(s',u)}(r') \\
&\quad + u(r)q(r') + u(r)w^{(s,u)}(r') - u(r)w^{(s',u)}(r') \\
&\quad - (\partial'_2 \circ w^{(s,u)})(r)q(r') - (\partial'_2 \circ w^{(s,u)})(r)w^{(s,u)}(r') \\
&\quad + (\partial'_2 \circ w^{(s,u)})(r)w^{(s',u)}(r') \\
&\quad + s(r')q(r) + s(r')w^{(s,u)}(r) - s(r')w^{(s',u)}(r) \\
&\quad + u(r')q(r) + u(r')w^{(s,u)}(r) - u(r')w^{(s',u)}(r) \\
&\quad - (\partial'_2 \circ w^{(s,u)})(r')q(r) - (\partial'_2 \circ w^{(s,u)})(r')w^{(s,u)}(r) \\
&\quad + (\partial'_2 \circ w^{(s,u)})(r')w^{(s',u)}(r) \\
&\quad + q(r)q(r') + q(r')w^{(s,u)}(r') - q(r)w^{(s',u)}(r') \\
&\quad + w^{(s,u)}(r)q(r') + w^{(s,u)}(r)w^{(s,u)}(r') - w^{(s,u)}(r)w^{(s',u)}(r') \\
&\quad - w^{(s',u)}(r)q(r') - w^{(s',u)}(r)w^{(s,u)}(r') + w^{(s',u)}(r)w^{(s',u)}(r')
\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu iki farklı sonucun,

- ∂'_2 nin çaprazlanmış modül olma özelliğinden dolayı XM2 aksiyomu
- $s'(r) = s(r) + (\partial'_2 \circ q)(r)$ eşitliği
- 2-çaprazlanmış modülün 2XM5 aksiyomu

kullanılarak eşit olduğu görülür. $\square$

Teorem 6.12 Yukarıda tanımlanan $(q \odot u)$ kuadratik 2- $(f, s \boxplus u, t \boxplus v)$ -derivasyonu $(f, s \boxplus u, t \boxplus v)$ ile $(f, s' \boxplus u, t' \boxplus v)$ yi bağlayan 2-homotopidir. Tüm bunlar aşağıdaki diyagramla özetlenir:

$$\begin{array}{ccc}
& (f, s \boxplus u, t \boxplus v) & \\
& \curvearrowright & \\
f & \begin{array}{c} \Downarrow \\ (f, s \boxplus u, t \boxplus v, q \odot u) \\ \Downarrow \end{array} & h \\
& \curvearrowleft & \\
& (f, s' \boxplus u, t' \boxplus v) &
\end{array} \tag{6.20}$$

İspat: Teorem 6.2 deki (6.2) şartlarının sağlandığı gösterilmelidir. Hatırlanırsa bu şartlardan ilki, (6.16) de ispatlanmıştı. Dolayısıyla ikinci şartı ele alırsak, her $e \in E$ için:

$$(t' \boxplus v)(e) = (t \boxplus v)(e) - ((q \odot u) \circ \partial_2')(e)$$

olduğu gösterilmelidir. $(q \odot u)$ nun tanım gereği:

$$\begin{aligned} (t' \boxplus v)(e) &= t'(e) + v(e) + (w^{(s',u)} \circ \partial_1)(e) \\ &= t(e) - (q \circ \partial_1)(e) + v(e) + (w^{(s',u)} \circ \partial_1)(e) \end{aligned}$$

elde edilip eşitliğin diğer tarafından:

$$\begin{aligned} (t \boxplus v)(e) - ((q \odot u) \circ \partial_1)(e) &= t(e) + t''(e) + (w^{(s,u)} \circ \partial_1)(e) \\ &\quad - (q(\partial_1(e)) + w^{(s',u)}(\partial_1(e)) - w^{(s,u)}(\partial_1(e))) \\ &= t(e) + v(e) - (q(\partial_1(e)) + w^{(s',u)}(\partial_1(e))) \end{aligned}$$

sonucu elde edilip (6.2) nin ikinci şartı için istenen eşitlik elde edilir. $\square$

Teorem 6.13 Teorem 5.29 ve Teorem 6.8 de verilen gruboid tanımları göz önüne alındığında, sağ-whiskering yardımıyla:

$$(q, u) \in \text{HOM}_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}')_1 \times \text{HOM}(\mathcal{A}, \mathcal{A}') \mapsto q \odot u \in \text{HOM}_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}')_1$$

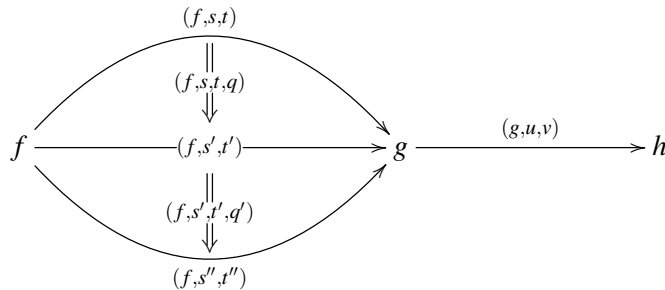
şeklinde $\text{HOM}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ nin $\text{HOM}_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}')_1$ üzerine bir (sağ) gruboid etkisi mevcuttur.

İspat: Burada ispatlanması gereken, uygun source ve target yardımıyla verilen q, q' kuadratik 2-derivasyonları ve u, m kuadratik derivasyonları için:

$$\begin{aligned} (q + q') \odot u &= (q \odot u) + (q' \odot u) \\ q \odot (u \boxplus m) &= (q \odot u) \odot m \end{aligned}$$

şartlarının sağlandığını göstermektir.

Öncelikle, ilk şartın ispatı için aşağıdaki diyagram ele alınırsa:

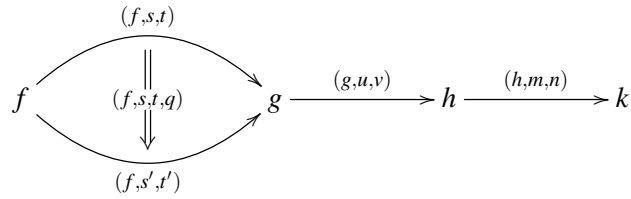


verilenlerle birlikte:

$$\begin{aligned}
 (q + q') \odot u &= q + q' + w^{(s,u)} - w^{(s'',u)} \\
 &= (q + w^{(s,u)} - w^{(s',u)}) + (q' + w^{(s',u)} - w^{(s'',u)}) \\
 &= (q \odot u) + (q' \odot u)
 \end{aligned}$$

elde edilip ilk şart sağlanmış olur.

Diğer şart için de,



diagramındaki veriler mevcut olsun. Gerekli eşitliğin sol tarafı:

$$q \odot (u \boxplus m) = q + w^{(s, u \boxplus m)} - w^{(s', u \boxplus m)}$$

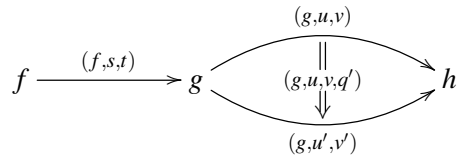
olup, sağ taraf genişletildiği takdirde:

$$\begin{aligned}
 (q \odot u) \odot m &= (q \odot u) + w^{(s \boxplus u, m)} - w^{(s' \boxplus u, m)} \\
 &= q + w^{(s, u)} - w^{(s', u)} + w^{(s \boxplus u, m)} - w^{(s' \boxplus u, m)}
 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu iki ifade de (5.24) gereği birbirine eşit olur. $\square$

6.4.2 Sol-Whiskering

Şimdi, benzer şekilde sol-whiskering üzerinde durulacaktır. $f, g, h, k: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 2-çaprazlanmış modül morfizmleri olmak üzere; $f \xrightarrow{(f, s, t)} g, g \xrightarrow{(g, u, v)} h, g \xrightarrow{(g, u', v')} h$ homotopileri ve ayrıca (g, u, v, q') 2-homotopisi;



diagramıyla birlikte verilmiş olsun. Sol-whiskering'in tanımlanabilmesi için, $(f, s \boxplus u, t \boxplus v)$ ile $(f, s \boxplus u', t \boxplus v')$ yi bağlayan $(f, s \boxplus u, t \boxplus v)$ -2-derivasyonunun tanımlanması gerekmektedir.

Daha önce olduğu gibi, $(s \odot q')$, (6.5 yardımıyla), q'_B nun serbest cebirin evrensellik özelliği gereği değişmeli:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{\text{incl}} & R \\
 & \searrow (f_0, s+u, q') & \downarrow \exists! (f_0, s \boxplus u, s \odot q') \\
 & & Q'
 \end{array}$$

diyagramı altında genişlemesi olarak elde edilen biricik kuadratik 2- $(f, s \boxplus u, t \boxplus v)$ -derivasyon olarak tanımlansın. Burada dikkat edilirse serbest tabanın her $b \in B$ elemanı için:

$$(s \odot q')(b) = q'(b)$$

şeklindedir.

Devamındaki ispatlar sağ-whiskering'e tamamen benzer nitelikte olduğundan verilmeyecektir.

Teorem 6.14 Yukarıda tanımlanan biricik $(s \odot q')$ kuadratik 2-derivasyonu, $(f, s \boxplus u, t \boxplus v)$ ile $(f, s \boxplus u', t \boxplus v')$ yi bağlayan bir 2-homotopi tanımlar ve bu homotopi diyagramatik olarak aşağıdaki diyagramla özetlenir:

$$\begin{array}{ccc}
 & (f, s \boxplus u, t \boxplus v) & \\
 & \downarrow \parallel & \\
 f & \xrightarrow{\quad} & h; \\
 & \downarrow \parallel & \\
 & (f, s \boxplus u', t \boxplus v') &
 \end{array}$$

Dahası, her $r \in R$ için:

$$(s \odot q')(r) = q'(r) + w^{(s,u)}(r) - w^{(s,u')}(r)$$

şeklinde formülize edilir.

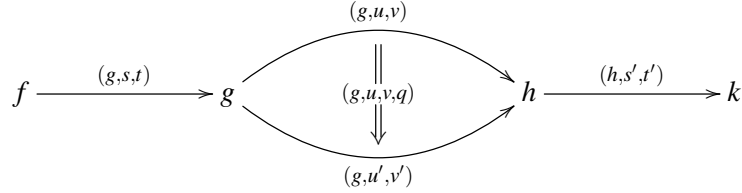
Teorem 6.15 Teorem 5.29 ve Teorem 6.8 de verilen gruboid tanımları göz önüne alındığında sol-whiskering yardımıyla $\text{HOM}(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ in $\text{HOM}_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}')_1$ üzerine bir sol gruboid etkisi mevcuttur.

Sıradaki teorem sağ ve sol whiskering arasında önemli bir özelliği vermektedir:

Teorem 6.16 Sağ-whiskering ile sol-whiskering sıralamadan bağımsız olarak:

$$(s \odot q) \odot s' = s \odot (q \odot s').$$

şeklinde olup, bu özellik aşağıdaki diyagram üzerinde anlam kazanır:



İspat: w dönüşümünün (5.24) de verilen özelliği kullanılarak:

$$\begin{aligned} (s \odot q) \odot s' &= [q + w^{(s,u)} - w^{(s,u')}] \odot s' \\ &= q + w^{(s,u)} - w^{(s,u')} + w^{(s \boxplus u, s')} - w^{(s \boxplus u', s')} \\ &= q + w^{(u, s')} - w^{(u', s')} + w^{(s, u \boxplus s')} - w^{(s, u' \boxplus s')} \\ &= s \odot [q + w^{(u, s')} - w^{(u', s')}] \\ &= s \odot (q \odot s') \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Tanımlanan sağ ve sol whiskeringler ve sahip olduğu özellikler yardımıyla da aşağıdaki teorem verilir:

Teorem 6.17 $\mathcal{A}$ bir serbest₁ 2-çaprazlanmış modül olmak üzere: **objeleri** $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ arasındaki 2-çaprazlanmış modül morfizmleri; **morfizmleri** bu morfizmler arasında tanımlı homotopiler; son olarak da **2-morfizmleri** de bu homotopiler arasındaki 2-homotopiler olan ve kısaca $\text{HOM}_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}')_2$ şeklinde gösterilen bir **sesquigruboid** yapısı [31] elde edilir.

6.5 2-Gruboid

$\mathcal{A}$ serbest₁ çaprazlanmış modül olmak şartıyla, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{A}'$ birer 2-çaprazlanmış modül olmak üzere, yukarıda tanımlanan $\text{HOM}_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}')_2$ sesquigroupoid'inin bir **2-gruboid** olması için gösterilmesi gereken, aşağıda verilen **interchange law**'ın sağlatılmasıdır:

Teorem 6.18 $f, g, h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ şeklinde tanımlı 2-çaprazlanmış modülleri ile birlikte aşağıdaki diyagramda yer alan homotopiler ve 2-homotopiler mevcut olsun:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (f, s, t) & & (f, u, v) \\
 & \nearrow & \Downarrow & \searrow & \Downarrow \\
 f & & (f, s, t, q) & & (f, s, t, q') & & h \\
 & \searrow & \Downarrow & \nearrow & \Downarrow \\
 & & (f, s', t') & & (f, u', v')
 \end{array} \quad (6.21)$$

Bu durumda interchange law geçerlidir. Bir başka deyişle aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$(q \odot u) \star (s' \odot q') = (s \odot q') \star (q \odot u').$$

Açık olarak, eşitliği her iki tarafı $q'(r) + q'(r) + w^{(s,u)}(r) - w^{s',u'}(r)$ ifadesine eşittir.

Dolayısıyla, bir önceki teoreme ek olarak, (6.21) diyagramı üzerinde:

$$(q \otimes q')(r) = q(r) + q'(r) + w^{(s,u)}(r) - w^{(s',u')}(r)$$

şeklinde tanımlanan yatay kompozisyonla birlikte $\text{HOM}_2(\mathcal{A}, \mathcal{A}')_2$ artık bir 2-gruboid yapısı oluşturmaktadır.

İspat:

$$\begin{aligned}
 (q \odot u) \star (s' \odot q') &= [q + w^{(s,u)} - w^{(s',u)}] \star [q' + w^{(s',u)} - w^{(s',u')}] \\
 &= q + w^{(s,u)} - w^{(s',u)} + q' + w^{(s',u)} - w^{(s',u')} \\
 &= q + w^{(s,u)} + q' - w^{(s',u')} \\
 &= q' + w^{(s,u)} - w^{(s,u')} + q + w^{(s,u')} - w^{(s',u')} \\
 &= [q' + w^{(s,u)} - w^{(s,u')}] \star [q + w^{(s,u')} - w^{(s',u')}] \\
 &= (s \odot q') \star (q \odot u')
 \end{aligned}$$

olup ispatın geri kalanı daha önceden tanımlı mevcut özellikler gereği açıktır. $\square$

7. SONUÇ ve ÖNERİLER

Tezde sonuç olarak çaprazlanmış modüller kategorisi için herhangi bir kısıtlamaya gidilmeden bir gruboid yapısı kolayca elde edilebilmiş, 2-çaprazlanmış modüllere geçildiğinde ise yine bilinen model kategori yapısında olması gerekenden daha hafif bir kısıtlama ile sadece serbest₁ 2-çaprazlanmış modüller kullanılarak öncelikle bir gruboid yapısı (denklik bağıntısı) ve ardından da 2-homotopiler yardımıyla bir 2-gruboid yapısı elde edilmiştir.

Giriş kısmında da bahsedildiği gibi, hem çaprazlanmış hem de 2-çaprazlanmış modüller için bu tezde ele alınan tüm yapılar henüz model kategori açısından bir netliğe kavuşturulmamıştır. Dolayısıyla da tüm mevcut durum ve sonuçların model kategori altında açıkça incelenmesi yeni ve güzel bir çalışma ortaya çıkartacaktır.

Diğer yandan bilindiği üzere 2-çaprazlanmış modüller kategorisi, Moore kompleksi 2 olan simplisel cebirler kategorisine denk olmaktadır. Bu durumda akla artık "acaba simplisel cebirlerin homotopisi ile 2-çaprazlanmış modüllerin homotopisi arasında da yakın bir ilişki var mıdır?" sorusu gelmektedir. Acaba bu homotopiler arasında geçişi sağlayacak bir kategori ve fonktor yapısı oluşturulabilir mi? En cezbedici kısmı ise acaba simplisel cebirler için de homotop olma bağıntısı yardımıyla bir denklik bağıntısı ve dolayısıyla da bir gruboid yapısı elde edilir mi; ki bu durumda yukarıda bahsedilen geçiş de bu iki gruboid arasında tanımlanabilecek bir fonktor sorusuna dönüşmektedir.

Ayrıca tezin içinde bahsedilen, noktasal olmayan genel homotopinin cebirler için belirtilen koşullarda tanımlanması ve bu tanımlama yardımıyla da yeni ve farklı olarak neler elde edilebileceği bir başka merak konusudur.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] Z. Arvasi. Crossed squares and 2-crossed modules of commutative algebras. *Theory Appl. Categ.*, 3:160–181, 1997. [4](#), [11](#), [30](#)
- [2] Z. Arvasi and T. Porter. Simplicial and crossed resolutions of commutative algebras. *J. Algebra*, 181(2):426–448, art. no. 0128, 1996. [11](#), [30](#)
- [3] Z. Arvasi and T. Porter. Higher dimensional Peiffer elements in simplicial commutative algebras. *Theory Appl. Categ.*, 3:1–23, 1997. [4](#)
- [4] Z. Arvasi and T. Porter. Freeness conditions for 2-crossed modules of commutative algebras. *Appl. Categ. Struct.*, 6(4):455–471, 1998. [11](#), [30](#)
- [5] H.J. Baues. *Combinatorial homotopy and 4-dimensional complexes*. Berlin etc.: Walter de Gruyter, 1991. [1](#)
- [6] R. Brown and M. Golasinski. A model structure for the homotopy theory of crossed complexes. *Cah. Topologie Géom. Différ. Catégoriques*, 30(1):61–82, 1989. [1](#), [40](#)
- [7] R. Brown and P.J. Higgins. Tensor products and homotopies for ω -groupoids and crossed complexes. *J. Pure Appl. Algebra*, 47:1–33, 1987. [2](#)
- [8] R. Brown, P.J. Higgins, and R. Sivera. *Nonabelian algebraic topology. Filtered spaces, crossed complexes, cubical homotopy groupoids. With contributions by Christopher D. Wensley and Sergei V. Soloviev*. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2011. [1](#), [2](#), [3](#)
- [9] R. Brown and İ. İçen. Homotopies and automorphisms of crossed modules of groupoids. *Appl. Categ. Struct.*, 11(2):185–206, 2003. [42](#)
- [10] R. Brown and J.L. Loday. Van Kampen theorems for diagrams of spaces. *Topology*, 26(3):311 – 335, 1987. [3](#)
- [11] J.G. Cabello and A.R. Garzón. Quillen’s theory for algebraic models of n-types. *Extracta Mathematicae*, 9(1):42–47, 1994. [3](#)

- [12] J.G. Cabello and A.R. Garzón. Closed model structures for algebraic models of n -types. *J. Pure Appl. Algebra*, 103(3):287–302, 1995. [1](#), [2](#), [3](#)
- [13] D. Conduché. Modules croisés généralisés de longueur 2. *J. Pure Appl. Algebra*, 34:155–178, 1984. [2](#), [3](#), [6](#)
- [14] J.L. Doncel, A.R. Grandjeán, and M.J. Vale. On the homology of commutative algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 79(2):131 – 157, 1992. [4](#), [6](#)
- [15] W.G. Dwyer and J. Spalinski. Homotopy theories and model categories. In *Handbook of algebraic topology*, pages 73–126. Amsterdam: North-Holland, 1995. [2](#), [4](#), [55](#)
- [16] G.J. Ellis. Homotopical aspects of lie algebras. *Journal of the Australian Mathematical Society (Series A)*, 54:393–419, 6 1993. [30](#)
- [17] C. Elvira-Donazar and L.J. Hernandez-Paricio. Closed model categories for the n -type of spaces and simplicial sets. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 118:93–103, 7 1995. [1](#)
- [18] J. Faria Martins. The fundamental 2-crossed complex of a reduced CW-complex. *Homology Homotopy Appl.*, 13(2):129–157, 2011. [3](#)
- [19] B. Gohla. Mapping spaces of Gray-categories. *Theory Appl. Categ.*, 29:100–187, 2014. [3](#)
- [20] B. Gohla and J. Faria Martins. Pointed homotopy and pointed lax homotopy of 2-crossed module maps. *Adv. Math.*, 248:986–1049, 2013. [3](#), [4](#), [40](#), [55](#)
- [21] A.R. Grandjeán and M.J. Vale. *2-módulos cruzados en la cohomología de André-Quillen*. Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid: Serie de ciencias exactas. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, 1986. [4](#)
- [22] J. Huebschmann. Crossed n -folds extensions of groups and cohomology. *Commentarii mathematici Helvetici*, 55:302–313, 1980. [2](#)
- [23] K.H. Kamps and T. Porter. *Abstract Homotopy and Simple Homotopy Theory*. World Scientific, 1997. [11](#), [12](#)

- [24] S. Lack. A Quillen model structure for Gray-categories. *J. K-Theory*, 8(2):183–221, 2011. [3](#)
- [25] J.L. Loday. Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 24(2):179 – 202, 1982. [1](#)
- [26] J.P. May. *Simplicial Objects in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1992. [10](#), [30](#)
- [27] A. Mutlu and T. Porter. Freeness conditions for 2-crossed modules and complexes. *Theory Appl. Categ.*, 4:174–194, 1998. [2](#)
- [28] B. Noohi. Notes on 2-groupoids, 2-groups and crossed modules. *Homology Homotopy Appl.*, 9(1):75–106, 2007. [2](#)
- [29] T. Porter. Homology of commutative algebras and an invariant of Simis and Vasconcelos. *J. Algebra*, 99:458–465, 1986. [4](#), [6](#)
- [30] D.G. Quillen. *Homotopical Algebra*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1967. [1](#)
- [31] R. Street. Categorical structures. volume 1 of *Handbook of Algebra*, pages 529 – 577. North-Holland, 1996. [5](#), [88](#)
- [32] J.H.C. Whitehead. On adding relations to homotopy groups. *Ann. of Math. (2)*, 42:409–428, 1941. [1](#), [6](#)
- [33] J.H.C. Whitehead. Note on a previous paper entitled “On adding relations to homotopy groups”. *Ann. of Math. (2)*, 47:806–810, 1946. [1](#), [2](#), [6](#)

ÖZGEÇMİŞ

Kadir Emir 1986 yılında Bursa’da doğmuştur. Lise öğrenimini 2004 yılında Nilüfer Milli Piyango Anadolu Lisesi’nde tamamlayıp aynı yıl üniversite sınavında ilk tercihi olan Uludağ Üniversitesi Matematik Bölümü’ne başlamıştır. Böylece çocukluğundan beri süregelen matematik ilgisini, akademik kariyer hayalleriyle birlikte lisans öğrenimine taşımayı başarmıştır.

Cebir ve Sayılar Teorisi kavramını, lisans yıllarında almış olduğu temel cebir dersleriyle tanımış ve ardından matematiğin bu alanına özel ilgi duymaya başlamıştır. Nitekim 2008 yılında üniversiteden mezun olduğu aynı yıl Eskişehir Osmangazi Üniversitesi’nde Cebir ve Sayılar Teorisi anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine, devamında ise 2012 yılında doktora öğrenimine başlamıştır.

Kendisi 2010’dan itibaren Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü’nde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır. Ayrıca 2014/15 öğretim yılını konuk araştırmacı sıfatıyla Portekiz’in Lizbon şehrinde bulunan Universidade Nova de Lisboa’da geçirmiş olup; yine aynı üniversitenin matematik araştırma merkezi olan "Centro de Matemática e Aplicações" adlı biriminin aktif üyesidir.