

T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA DÜZENLİ YEREL FONKSİYONLAR

Arife ATAY

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DİYARBAKIR

Şubat 2016

T.C
DİCLE UNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
DİYARBAKIR

Arife ATAY tarafından yapılan “İdeal Topolojik Uzaylarda Düzenli Yerel Fonksiyonlar” konulu bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir

Jüri Üyesinin

<u>Ünvanı</u>	<u>Adı Soyadı</u>
---------------	-------------------

Başkan: Prof. Dr. H. İlhan TUTALAR

Üye: Prof. Dr. Rıza ERTÜRK

Üye: Prof. Dr. Fikret KUYUCU

Üye: Doç. Dr. Sedat İLHAN

Üye: Doç. Dr. Z. Fuat TOPRAK

Tez Savunma Sınavı Tarihi: 01/02/2016

Yukarıdaki bilgilerin doğruluğunu onaylarım.

.../02/2016

Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM

ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

(MÜHÜR)

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimi boyunca ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli hocam, **Prof. Dr. H. İlhan TUTALAR**'a minnettarım.

Bana duydukları sevgi, anlayış ve güvenle beni bugünüme getiren sevgili **Anneme ve Babama**,

Çalışmalarımın her aşamasında yanımda olan, benimle birlikte bıkmadan usanmadan koşuşturan sevgili eşim **Cihad ATAY**'a

Tezin yazımı esnasında sahip oldukları tecrübeleri ve bilgileri aktarmaktan çekinmeyen, samimiyetlerinin içtenliğine canı gönülden inandığım hocalarım **Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY**, **Doç. Dr. Sedat İLHAN** ile Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Elemanlarına ve arkadaşım **Arş. Gör. Dr. Seçil YALAZ**'a

Dünyanın en onurlu mesleği olan anneliği bana bahşeden ve sevgileriyle yalnız olmadığımı her defasında bir kez daha bana hatırlatan, kızlarım Ceren ve Heja' ya,

katkılarından dolayı sonsuz teşekkürler...

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
ÖZET	III-IV
ABSTRACT	V-IV
KISALTMA VE SİMGELER	VII-X
1. GİRİŞ	1
1.1. Genel Tanım ve Özellikler.....	1
1.2. Topolojik Uzaylar.....	2
2. KAYNAK ÖZETLERİ	11
3. MATERYAL ve METOT	13
3.1. Materyal.....	13
3.2. Metot.....	13
3.2.1. Yarı Açık Kümeler.....	13
3.2.2. Düzenli açık Kümeler.....	16
3.2.3. İdeal Topolojik Uzaylar	20
3.2.3.1. Yerel Fonksiyonlar.....	22
3.2.4. Kuratowski Kapanış Operatörü.....	29
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	33
4.1. Düzenli İdeal Uzaylar.....	33
4.2. Düzenli Yerel Fonksiyon.....	33
4.2.1. k_I^{*d} Operatörü ve τ^{*d} topolojisi	40
4.3. ψ_d Operatörü.....	41
4.4. DA - Eş Yoğun İdeal.....	45
4.5. Düzenli uyumlu İdeal.....	47
4.6. $\psi_d - C$ Kümeler.....	51
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	55
6. KAYNAKLAR	57
Türkçe İngilizce Sözlük.....	59
İngilizce Türkçe Sözlük.....	65
Dizin.....	71
Özgeçmiş.....	75

ÖZET

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA DÜZENLİ YEREL FONKSİYONLAR

DOKTORA TEZİ

Arife ATAY

DİCLE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2016

İdeal topolojik uzayların önemi çok iyi bilinmektedir ve öneminden ötürü güncel literatürde yeterince yer almaktadır. Son zamanlarda ideal topolojik uzaylar ile ilgili yerel fonksiyon fikrinden yola çıkılarak yapılan ve çeşitli yerel fonksiyonların tanımlandığı birçok araştırma makalesi bulunmaktadır. Bunlardan biri, topolojik uzaylardaki yarı-açık küme kavramı yardımı ile elde edilen “Yarı Yerel Fonksiyonlar” üzerine bir çalışmadır. Bir diğeri ise yine topolojik uzaylarda bilinen pre-açık (ön açık) kümeler ile elde edilen “ $(\)^p$ -Operatörü” için yapılan çalışmadır. Ayrıca bir başka araştırma makalesinde topolojik uzaylarda açık kümenin kapanışı kullanılarak ideal topolojik uzaylarda “Kapanış Yerel Fonksiyonlar” tanımlanmış ve ilgili sonuçlara yer verilmiştir. İdeal topolojik uzaylarda yerel fonksiyonların yardımı ile bir Kuratowski Kapanış operatörünün elde edilişi önemli bir ayrıntıdır. Ancak bahsedilen araştırma makalelerinde yer alan bu yerel fonksiyonların birçoğunda bir Kuratowski kapanış operatörü elde etmek ve dolayısıyla devamında yer alan çalışmaları yapmak mümkün olmamıştır. Bu tezin ana amacı da bu olumsuzluğu içermeyen bir başka yerel fonksiyonun varlığını araştırmak olmuştur. Diğer taraftan ideal topolojik uzaylar için tanımlanmış düzenli yerel fonksiyonlara güncel literatürde rastlanmamıştır. Bu eksiği gidermek üzere ideal topolojik uzaylar için düzenli yerel fonksiyonlar ilk olarak bu tez kapsamında tanımlanmıştır. Üstelik düzenli yerel fonksiyonlar yardımı ile k_f^{*d} Kuratowski Kapanış operatörü ve τ^{*d} topolojisi elde edilebilmiştir. Yapılan yeni tanımlamaya göre literatürdeki ilgili birçok teorem revize edilmiştir. Revize edilmiş yeni teoremler ve bunlardan elde edilen diğer sonuçlar da bu tezde yer almaktadır.

Genel bilgiler verildikten sonra çalışma boyunca sıklıkla ihtiyaç duyulan düzenli açık kümeler ve yarı açık kümeler tanımlanarak çalışmanın asıl konusu olan düzenli yerel fonksiyonlar için zemin oluşturulmuştur. İdeal topolojik uzaylarda yerel fonksiyon, yarı-yerel fonksiyon ve düzenli yerel fonksiyon tanımları verilmiş ve karşılaştırmaları yapılmıştır. Daha sonra düzenli yerel fonksiyonlardan yararlanılarak tanımlanan ψ_d operatörünün sağladığı koşullar aktarılmıştır. Ayrıca ideal topolojik uzay

üzerinde ideal ile topolojinin düzenli uyumu ve $\psi_d - C$ küme tanımı başlıkları altında elde edilen sonuçlar araştırma bulguları bölümünde yer almaktadır.

Tez beş ana başlıktan meydana gelmektedir. Giriş bölümünden sonra, yapılan literatür taraması sonucu, tezin ortaya çıkması ve oluşturulması aşamasında yol gösterici olan kaynaklar kısa özetleri ile yer almaktadır. Çalışmanın kaynağında yer alan yarı açık kümeler ve düzenli (regüler) açık kümelerin tanıtımı, ideal topolojik uzaylar, yerel fonksiyonlar ve ilgili teoremler üçüncü bölümde verilmiştir. Dördüncü ana başlık Araştırma Bulguları olup, bu bölümde topolojik uzaylarda bilinen yerel fonksiyon tanımından yola çıkılarak elde edilen düzenli yerel fonksiyonların tanımı ile sağladığı ve sağlamadığı koşullar verilmiştir. Düzenli yerel fonksiyonlarla literatürde yer alan diğer yerel fonksiyonlar arasındaki ilişkilere değinilmiştir. Ayrıca düzenli yerel fonksiyonlar yardımı ile yeni bir kapanış operatörü ve yeni bir topoloji elde edilmiştir. Daha birçok alt başlık düzenli yerel fonksiyonlar tabanlı olarak bu bölümde incelenmiştir. Tartışma ve Sonuç beşinci bölümde verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İdeal Topolojik Uzaylar, Kuratowski kapanış operatörü, yerel fonksiyonlar, düzenli yerel fonksiyonlar, ψ_d -operatörü, düzenli uyumlu ideal, $\psi_d - C$ kümeler

ABSTRACT

REGULAR LOCAL FUNCTIONS IN IDEAL TOPOLOGICAL SPACES

PHd THESIS

Arife ATAY

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF DICLE

2016

The importance of ideal topological spaces is well known. Due to its importance, ideal topological spaces are discussed in the current literature. Recently many published works made on local function used in ideal topological spaces can be found in related literature. “Semi Local Functions in Ideal Topological Spaces”, “Closure Local Functions”, and “ $(\cdot)^p$ and ψ_p -Operator” can be mentioned among such works those aim to define such functions. In general, the researchers prefer using the generalized open sets instead of topology in ideal topological spaces. Obtaining a Kuratowski closure operator with the help of local functions is an important detail in ideal topological space. However, it is not possible to obtain a Kuratowski closure operator from many of these local functions proposed by the above mentioned works. In order to address the lack of such an operator, the main goal of this thesis is to introduce another local function to give possibility of obtaining a Kuratowski closure operator. On the other hand, regular local functions defined for ideal topological spaces have not been found in the current literature. Therefore, again to address the lack of such a function, regular local functions for the ideal topological spaces has been described within this thesis. This is the second goal of the thesis. Moreover, with the help of regular local functions Kuratowski closure operators k_l^{*d} and τ^{*d} topology are obtained. Many theorems in the literature have been revised according to the definition of regular local functions. The revised new theorems and other derived results are also included in this thesis.

With the respect of above mentioned goals first, the fundamentals of the subject are presented in the thesis. Later, the regular open sets and semi open sets those often needed throughout the study are defined to create a base for deriving regular local functions. Local functions, semi-local functions and regular local functions are defined in ideal topological spaces and their interrelations are compared. Then, the new conditions which provided by ψ_a -operators defined with the help of regular local functions are presented. Additionally, a new topology extracted from ψ_a -operator is given. The regular compatibility between the topology and ideality in the ideal topological space are also included by this thesis together

with the obtained results presented under the title namely “ $\psi_d - C$ sets definition” as the research findings.

This thesis consists of five chapters. After an introduction, a review on the published works available in current literature is presented. The works are summarized and briefly discussed in this chapter. Definition of semi-open sets and regular open sets, ideal topological spaces, local functions and related theorems are given in Chapter Three. The conditions of regular local functions which are extracted from definition of local functions in topological spaces can be found in the next chapter. Chapter Four includes comparison of regular local functions with the other local functions. A new closure operator and a new topology have obtained with the help of regular local functions in the same chapter. Finally, the study is discussed and concluded in the last part of the thesis.

Keywords: Ideal topological spaces, Kuratowski closure operator, local functions, regular local function, ψ_d -operators, regular compatible ideal, $\psi_d - C$ sets.

KISALTMA VE SİMGELER

Mantık

$=$: Eşittir

$\neq$: Farklıdır

$\Rightarrow$: İse, Gerektirir, İçin gerek şart

$\Leftarrow$: Ancak, İçin yeter şart

$\Leftrightarrow$: Ancak ve ancak, İçin gerek ve yeter şart

Niceleyiciler

$\forall$: Her, Bütün

$\exists$: Vardır, En az bir

Kümeler

$\in$: Elemanıdır

$\notin$: Elemanı değildir

$\subseteq$: Altkümesidir

$\supseteq$: Kapsar

$\cup$: Birleşim

$\cap$: Kesişim

$A - B$: A kümesinin B kümesinden farkı

$\bigcup$: Çoklu birleşim

$\cap$: Çoklu kesişim

$\emptyset$: Boş Küme

f^{-1} : f fonksiyonunun tersi

Bazı Özel Kümeler, Sınıflar ve Fonksiyonlar

2^X : Bir X kümesinin kuvvet kümesi (bütün alt kümelerini içeren sınıf)

$\mathbb{R}$: Gerçek sayılar kümesi

(X, τ) : X kümesi ve τ topolojisinden oluşan topolojik uzay

$(\mathbb{R}, \tau_a)$: Adi topolojik uzay

$\mathcal{K}$: τ topolojisinin kapalı kümeler ailesi

τ_0 : Ayrık olmayan topoloji

τ_1 : Ayrık topoloji

τ_A : X üzerindeki τ topolojisinin $A \subseteq X$ alt kümesine indirgenmiş alt uzay topolojisi

$\eta(x)$: x noktasının bütün komşuluklar ailesi

N_x : x noktasının bir komşuluğu

T_x : x noktasın kapsayan bir açık küme

A^c : A nın tümleyeni

A^o : A nın içi

$\bar{A}$: A nın kapanışı

$\tilde{A}$: A nın yığılma noktaları kümesi

$yoğ(A)$: A nın yoğunlaşma noktaları kümesi

$YA(X, \tau)$: X in tüm yarı-açık alt kümelerinin ailesi

$YK(X, \tau)$: X in tüm yarı-kapalı alt kümelerinin ailesi

$yk(A)$: A nın (X, τ) uzayındaki yarı-kapanışı

$yiç(A)$: A nın (X, τ) uzayındaki yarı-içi

$DA(X, \tau)$: X in tüm düzenli açık alt kümelerinin ailesi

$DK(X, \tau)$: X in tüm düzenli kapalı alt kümelerinin ailesi

$dk(A)$: A nın (X, τ) uzayındaki düzenli kapanışı

$diç(A)$: A nın (X, τ) uzayındaki düzenli içi

I : X kümesi üzerinde bir ideal

(X, τ, I) : İdeal topolojik uzay

I_{so} : Sonlu alt kümeler ideali

I_{sa} : Sayılabilir alt kümeler ideali

$\tau(X, x)$: X in, x elemanını içeren, açık alt kümelerinin ailesi

$A^*(I, \tau) = A^*$: A nın, I ve τ ile ilgili yerel fonksiyonu

$k^* = A \cup A^*$: (X, τ, I) uzayı üzerinde tanımlı Kuratowski kapanış operatörü

τ^* : k^* operatörü yardımıyla üretilen topoloji

ψ : (X, τ, I) uzayında $(\)^*$ fonksiyonu yardımı ile tanımlı operatör

$YA(X, x)$: X in, x elemanını içeren, yarı-açık alt kümelerinin ailesi

$A_*(I, \tau) = A_*$: A nın, I ve τ ile ilgili yarı-yerel fonksiyonu

$(X, DA(X, \tau), I)$: Düzenli ideal uzay

$DA(X, x)$: X in, x elemanını içeren, düzenli açık alt kümelerinin ailesi

τ_s : $DA(X, \tau)$ ailesinden üretilen topoloji

$A^{*d}(I, \tau) = A^{*d}$: A nın, I ve $DA(X, \tau)$ ile ilgili düzenli yerel fonksiyonu

$k_I^{*d} = A \cup A^{*d}$: $(X, DA(X, \tau), I)$ uzayı üzerinde tanımlı Kuratowski kapanış operatörü

τ^{*d} : k^{*d} operatörü yardımıyla üretilen topoloji

ψ_d : $(X, DA(X, \tau), I)$ uzayında $(\)^{*d}$ fonksiyonu yardımı ile tanımlı operatör

$DA(X, \tau) \sim_d I$: $DA(X, \tau)$ uzayının I ideali ile uyumlu olduğunu gösterir

$A = B \pmod{I}$: A ve B nin mod I denklğini ifade eder

$\mathfrak{B}_d(X, DA(X, \tau), I)$: $DA(X, \tau)$ ve I ile ilgili tüm Baire kümelerin sınıfı

Parantez Benzeri İşaretlerin Kullanımı

(a, b) : a, b uçlu açık aralığı

$(a, b], [a, b)$: a, b uçlu yarı açık aralığı

$\{a, b\}$: Elemanları a ve b olan küme

1. GİRİŞ

1.1 Genel Tanım ve Özellikler

Bu kısımda, topolojik uzaylar ve ideal topolojik uzayların anlaşılabilmesi için zemin oluşturacak genel tanım ve özelliklerin aktarılması hedeflenmektedir. Ayrıca hemen hemen tüm genel topoloji kitaplarında bulunabileceğinden birçok teorem ispatsız olarak verilecektir.

$X \neq \emptyset$ bir küme, I indis kümesi ve $A, B \subseteq X$ olmak üzere;

- i. Eğer A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı ise A, B nin bir **alt kümesidir** (veya B, A tarafından **kapsanır**) denir ve $A \subseteq B$ (veya $B \supseteq A$) ile gösterilir.
- ii. $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ oluyorsa A ve B kümelerine **eşit kümeler** denir ve $A = B$ ile gösterilir.
- iii. $A - B = \{x \in A : x \notin B\}$ kümesine **A kümesinin B kümesinden farkı** denir.
- iv. $X - A = A^c = \{x \in X : x \notin A\}$ kümesine **A nın tümleyeni** denir.
- v. $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X : \exists i \in I : x \in A_i\}$ kümesi **A_i alt kümelerinin birleşimini** tanımlar.
- vi. $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X : \forall i \in I \text{ için } x \in A_i\}$ kümesi **A_i alt kümelerinin arakesitini** tanımlar.

Kümeler için tümleyen, fark, arakesit, birleşim gibi işlemler ile ilgili kimi özellikler genel olarak aşağıda verilmektedir:

- i. $B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i),$
- ii. $B \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i),$
- iii. $X - (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (X - A_i),$
- iv. $X - (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (X - A_i).$

X ve Y birer küme, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. I ve J indis kümeleri için $A_i \subseteq X$ ve $B_j \subseteq Y$ olarak alınsın. f^{-1} , f fonksiyonunun tersini göstermek üzere aşağıdaki önermeler doğrudur.

- i. $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ ve $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j),$

- ii. $f(\cap_{i \in I} A_i) \subseteq \cap_{i \in I} f(A_i)$ ve $f^{-1}(\cap_{j \in J} B_j) = \cap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$,
- iii. Eğer f birebir bir fonksiyon ise $f(\cap_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I} f(A_i)$ olur,
- iv. $B \subseteq Y$ olmak üzere $f^{-1}(B^c) = X - f^{-1}(B) = [f^{-1}(B)]^c$ olur,
- v. $A \subseteq X$ olmak üzere $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ olup, f birebir ise eşitlik geçerlidir,
- vi. $B \subseteq Y$ olmak üzere $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ olup, f örten ise eşitlik geçerlidir,

1.2 Topolojik Uzaylar

Topoloji, H.Poincare ile 19. yüzyılın sonlarına doğru temellerine oturtulmuş, 1950 li yıllarda çalışmalar doruğa ulaşmış ve F.Hausdorff tarafından 20. yüzyılda zenginleştirilmiştir. Genel anlamda topoloji, geometrik şekillerin uzatma, sıkıştırma, bükme ya da germe ile deformasyon sonrasında değişmez kalan özelliklerini inceler.

Topolojinin çalışma alanı çok geniştir. Dolayısıyla analizden geometriye kadar geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bir fonksiyonlar kümesi, bir kümeler sınıfı, bir eğriler ailesi veya bir yüzey, bir eğri uygun birer (altkümeleri) aile(si) ile topolojik uzay olarak düşünülebilirler.

Özel anlamıyla bir topoloji, aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Topoloji dalının temel uğraş konusu olan **topolojik uzaylar**, boş kümeden farklı bir X kümesi ile onun aşağıdaki varsayımları sağlayan alt kümelerinin **topoloji** adı verilen bir τ ailesinden oluşur:

- I. $\emptyset, X \in \tau$
- II. τ sonlu arakesit altında kapalıdır
- III. τ keyfi birleşim altında kapalıdır

Bu durumda τ ya X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir **topolojik uzay** denir. Ayrıca τ ailesinin öğelerine de X **kümesinin açıkları** denir. Tümleyeni açık olan kümelere de X **kümesinin kapalı alt kümeleri** denir.

(X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{K} = \{K: K^c \in \tau\}$ ailesine τ **topolojisinin kapalı kümeler ailesi** denir ve aşağıdaki koşulları sağlar:

- I. $\emptyset, X \in \mathcal{K}$
- II. $\mathcal{K}$ keyfi arakesit altında kapalıdır

III. $\mathcal{K}$ sonlu birleşim altında kapalıdır

Bir $X \neq \emptyset$ kümesi için bazı özel topolojiler aşağıdaki gibi sıralanmıştır:

- i. $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$ **ayrık olmayan topoloji**
- ii. $\tau_1 = 2^X$ [X in kuvvet kümesi] **ayrık topoloji**
- iii. $\tau_A = \{A \cap T : T \in \tau\}$ ailesi A kümesi üzerinde bir topoloji olup, **τ topoloji ile A üzerinde üretilen alt uzay topolojisi** adını alır.

Yukarıda verilen özel topolojilerle oluşturulan (X, τ_0) ve $(X, 2^X)$ ikililerine sırasıyla **ayrık olmayan topolojik uzay** ve **ayrık topolojik uzay** denir. (A, τ_A) ikilisine de (X, τ) topolojik uzayının **alt uzayı** adı verilir.

τ ve τ' , $X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde iki topoloji olmak üzere;

- i. Eğer $\tau \subseteq \tau'$ ise τ ya τ' den daha **kaba topoloji** veya τ' ye τ dan daha **ince topoloji** adı verilir. Buna göre,
- ii. τ_1 **en ince topoloji** τ_0 ise **en kaba topoloji** olmaktadır.

Bundan sonraki kısımda önemine binaen tanımlar ve teoremler, Tanım1.2.1, Teorem 1.2.1 vs, formatında verilecektir.

Tanım 1.2.1

(X, τ) topolojik uzay, $A, T \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun.

- i. $x \in T \subseteq A$ olacak şekilde $T \in \tau$ varsa A kümesine x **noktasının bir komşuluğu** denir ve x in bütün komşuluklarının ailesi de $\eta(x)$ ile gösterilir.
- ii. Her $N \in \eta(x)$ için, $A \cap N$ kümesi sayılamaz sonsuz sayıda elemen içeriyorsa x **noktasına A kümesinin bir yoğunlaşma noktası** denir (Kuratowski 1933). A kümesinin bütün yoğunlaşma noktalarını göstermek üzere $\text{yoğ}(A)$ gösterimi kullanılacaktır.
- iii. Her $N \in \eta(x)$ için, $A \cap (N - \{x\}) \neq \emptyset$ ise, x **noktasına A kümesinin bir yığılma noktası** denir. A kümesinin bütün yığılma noktalarını göstermek üzere $\tilde{A}$ gösterimi kullanılacaktır. Diğer bir ifadeyle;

$$\tilde{A} = \{x \in X : x \in \overline{A - \{x\}}\}$$

yazılabilir.

(X, τ) topolojik uzayında X in açık olmayan bir alt kümesinin anlaşılabilmesi adına bu kümenin en büyük açık alt kümesinin bilinmesi, topolojik uzay ile ilgili kavramların anlaşılabilmesini kolaylaştıracaktır. Benzer bir düşünce kapalı kümeler için de vardır. Bu yaklaşım bizi aşağıdaki tanımlara yönlendirir:

Uyarı: Bir topolojik uzayın bir alt kümesinin açık olmaması kapalı olacağı anlamına gelmez. Topolojik uzaylarda ne açık ne kapalı olan kümeler olacağı gibi hem açık hem de kapalı olan kümeler de vardır.

Tanım 1.2.2

(X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in A$ olsun.

$$A^\circ = \bigcup_{T \subseteq A, T \in \tau} T$$

kümesine **A nın içi** denilir ve A° ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle

$$A^\circ = \{x \in A : \exists T \in \tau : T \subseteq A\}$$

yazılabilir. A° nın elemanlarına da **A kümesinin iç noktaları** denir.

Tanım 1.2.3

(X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun.

$$\bar{A} = \bigcap_{K \supseteq A, K^c \in \tau} K$$

kümesine **A kümesinin kapanışı** denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. Başka bir deyişle

$$\bar{A} = \{x \in X : \forall T \in \tau \text{ için } T \cap A \neq \emptyset\}$$

olarak yazılabilir. $\bar{A}$ nın elemanlarına da **A kümesinin kapanış noktaları** denir.

Aşağıda ispatsız verilecek olan lemma, doğruluğu kolayca gösterilebilir olup oldukça kullanışlıdır.

Lemma 1.2.1

$A \subseteq X$, $x \in X$ için bir komşuluk ise A yı kapsayan her küme de x için bir komşuluktur.

Teorem 1.2.1

(X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ olmak üzere, A nın açık olması için gerek ve yeterli koşul A nın her noktasının komşuluğu olmasıdır.

Teorem 1.2.2

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Buna göre aşağıdaki koşullar sağlanır:

- i. A° , A kümesinin en büyük açık alt kümesidir,
- ii. A açıktır $\Leftrightarrow A = A^\circ$,
- iii. $\emptyset^\circ = \emptyset$, $X^\circ = X$,
- iv. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$,
- v. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,
- vi. $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$.

Teorem 1.2.3

Bir (X, τ) topolojik uzayı üzerinde $A, B \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır:

- i. $\bar{A}$, A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümedir,
- ii. A kapalıdır $\Leftrightarrow A = \bar{A}$,
- iii. $\bar{\emptyset} = \emptyset$, $\bar{X} = X$,
- iv. $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$
- v. $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$,
- vi. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Teorem 1.2.4

Bir (X, τ) topolojik uzayının iki $A, B \subseteq X$ kümesi için aşağıdakiler doğrudur:

- i. $\bar{A} = \tilde{A} \cup A$,
- ii. A kapalıdır $\Leftrightarrow \tilde{A} \subseteq A$,
- iii. $A \subseteq B \Rightarrow \tilde{A} \subseteq \tilde{B}$

Tanım 1.2.4

(X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olsun. $B_i \in \mathcal{B}$ olmak üzere, eğer her $T \in \tau$ için $T = \bigcup_{i \in I} B_i$ oluyorsa $\mathcal{B}$ ailesine (X, τ) topolojik uzayı için bir **tabandır** denir.

X kümesi üzerinde belli bir topoloji belirtilmeden de bir $\mathcal{B}$ ailesi, X üzerindeki bir topoloji için taban olarak verilebilir. Bununla ilgili önerme aşağıda verilmiştir.

Lemma 1.2.2

- a) Eğer (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subseteq \tau$ bir taban ise aşağıdaki i. ve ii. koşulları sağlanır.
- b) Tersine $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X üzerindeki bir topoloji için bir taban olur ve bu $\mathcal{B}$ ailesinin ürettiği

$$\tau_{\mathcal{B}} = \{G \subseteq X : x \in G \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}; x \in B \subseteq G\}$$

topolojisiidir.

- i. $\forall x \in X$ için $\exists B \in \mathcal{B} : x \in B$,
- ii. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ ve $\forall x \in B_1 \cap B_2$ için $\exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Örnek 1.2.1

$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$ olmak üzere $\mathcal{B}$ ailesi için

$$a, b, c \in \{a, b, c\} \in \mathcal{B} \text{ ve } d \in \{b, c, d\} \in \mathcal{B}$$

olduğu ve $\mathcal{B}$ ailesinin arakesit özelliğini gerçeklediği de açıktır. Örneğin $B_1 = \{a, b, c\}$, $B_2 = \{b, c, d\}$ kümeleri dikkate alındığında $B_1 \cap B_2 = \{b, c\}$ ve

$$b \in \{b\} = B_3 \subseteq B_1 \cap B_2, \quad c \in \{c\} = B_4 \subseteq B_1 \cap B_2$$

dir. Ayrıca $X = B_1 \cup B_2$ olur. Dolayısıyla verilen $\mathcal{B}$ ailesi X üzerindeki bir topoloji için bir taban olur.

Uyarı: Bir $\mathcal{B}$ tabanı için $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ olmak üzere $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ olması gerekmez. Bu duruma uygun bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 1.2.2

$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi ve $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ topolojisini düşünelim. $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ ailesi (X, τ) topolojik uzayı için bir tabandır ve $B_1 = \{a, b, c\}$, $B_2 = \{a, b, d\}$ için $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ olmasına karşın $B_1 \cap B_2 = \{a, b\} \notin \mathcal{B}$ olmaktadır.

Aşağıda ispatları her düzey topoloji kitaplarında bulunabilecek bazı lemmalar ispatsız olarak verilecektir.

Lemma 1.2.3

(X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olsun.

$\mathcal{B}, \tau$ için bir tabandır $\Leftrightarrow \forall T \in \tau, x \in T, x \in B \subseteq T$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ vardır

Lemma 1.2.4

$\mathcal{B}$, bir (X, τ) topolojik uzayı, $\mathcal{B}'$ ise bir (X, τ') topolojik uzayı için birer taban olsunlar.

$$\tau \subseteq \tau' \Leftrightarrow x \in B \in \mathcal{B} \text{ için } \exists B' \in \mathcal{B}' : x \in B' \subseteq B$$

Lemma 1.2.5

$\mathcal{B}, (X, \tau)$ topolojik uzayı için bir taban ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$$

ailesi A üzerindeki τ_A alt uzay topolojisi için bir taban olur.

Teorem 1.2.5

(X, τ) bir topolojik uzay, $\mathcal{B}$ ailesi τ için bir taban ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda,

- i. $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x$ elemanını içeren her $T \in \tau$ kümesi için $T \cap A \neq \emptyset$
- ii. $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x$ elemanını içeren her $B \in \mathcal{B}$ kümesi için $B \cap A \neq \emptyset$.

İspat:

- i. $x \in \bar{A}$ olsun. Ayrıca $x \in T$ ve $A \cap T = \emptyset$ olacak şekilde bir $T \in \tau$ var olsun. Bu durumda, $X - T$ kapalı küme olur ve A yı kapsar. $\bar{A}$ kümesi A kümesini kapsayan en küçük küme olduğundan, $\bar{A} \subset X - T$ yazılır. $x \in T$ olduğundan

$$x \notin X - T \text{ ve dolayısıyla } x \notin \bar{A}$$

olur. Bu da bir çelişkidir. O halde x elemanını içeren her $T \in \tau$ kümesi için $T \cap A \neq \emptyset$ sağlanır.

Diyelim ki x elemanını içeren her $T \in \tau$ kümesi için

$$T \cap A \neq \emptyset \text{ ve } x \notin \bar{A}$$

olsun. $X - \bar{A}$ kümesi açık ve $x \in X - \bar{A}$ olduğundan $T = X - \bar{A}$ olarak alınabilir. Yani $A \cap (X - \bar{A}) \neq \emptyset$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $x \in \bar{A}$ olur.

- ii. $x \in \bar{A}$ olsun. i gereği x elemanını içeren her $T \in \tau$ kümesi için $T \cap A \neq \emptyset$ olur. $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olduğundan x elemanını içeren her $B \in \mathcal{B}$ kümesi için $B \cap A \neq \emptyset$ dir.

Diğer taraftan, x elemanını içeren her $B \in \mathcal{B}$ kümesi için $B \cap A \neq \emptyset$ olsun. x elemanını içeren bir $T \in \tau$ açık kümesini düşünelim. Taban tanımına göre $x \in B \subseteq T$ olacak şekilde $B \in \mathcal{B}$ taban elemanı vardır. Kabule göre x elemanını içeren $B \in \mathcal{B}$ kümesi için

$$B \cap A \neq \emptyset \text{ ve böylece } T \cap A \neq \emptyset$$

olur. Buradan, i. şıkka göre $x \in \bar{A}$ bulunur. ■

Lemma 1.2.6

(X, τ) bir topolojik uzay ve $T \in \tau$ olsun. O zaman her $A \subseteq X$ kümesi için $\overline{(T \cap A)} = \overline{(T \cap \bar{A})}$ olur.

İspat:

$A \subseteq \bar{A}$ olduğundan ve Teorem 1.2.3/v gereği

$$A \subseteq \bar{A} \Rightarrow T \cap A \subseteq T \cap \bar{A} \Rightarrow \overline{(T \cap A)} \subseteq \overline{(T \cap \bar{A})}$$

doğrudur. Kapsamın diğer tarafı için, $x \in \overline{(T \cap \bar{A})}$ olsun. $x \in \overline{(T \cap A)}$ olduğunu göstermek için $x \in T'$, $T' \in \tau$ olan bir T' alalım. Bu durumda, $x \in \overline{(T \cap \bar{A})}$ kabulü ve Teorem 1.2.5/i kullanılarak $T' \cap (T \cap \bar{A}) \neq \emptyset$ olur. $T' \cap (T \cap \bar{A}) = (T' \cap T) \cap \bar{A} \neq \emptyset$ olduğundan, en az bir $y \in X$ için $y \in (T' \cap T) \cap \bar{A}$ yani $y \in T' \cap T$ ve $y \in \bar{A}$ olur. Böylece $T' \cap T \in \tau$, $y \in T' \cap T$ ve $y \in \bar{A}$ olduğundan Teorem 1.2.5/i den

$$(T' \cap T) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow T' \cap (T \cap A) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{(T \cap A)}$$

elde edilir. ■

Teorem 1.2.6

- i. $X - \bar{A} = (X - A)^o$,
- ii. $\overline{(X - A)} = X - A^o$,
- iii. $(\bar{A} - A)^o = \emptyset$,
- iv. $A^o = X - \overline{(X - A)} = (\bar{A}^c)^c$

İspat:

- i. $\bar{A}$ kümesi kapalı ve $A \subseteq \bar{A}$ olduğundan $X - \bar{A}$ kümesi, $X - A$ kümesinin açık alt kümesidir. Ayrıca $X - A$ nın en büyük açık alt kümesi $(X - A)^o$ olduğundan

$$X - \bar{A} \subseteq (X - A)^o \quad (1)$$

yazılır.

Diğer taraftan, $x \in (X - A)^o$ olsun.

$$x \in (X - A)^o \Rightarrow \exists T \in \tau; x \in T \subseteq X - A \Rightarrow x \in T \in \tau, T \cap A = \emptyset$$

olur ki buradan Teorem 1.2.5/i kullanılarak

$$x \notin \bar{A} \Rightarrow x \in X - \bar{A}$$

elde edilir. Yani,

$$(X - A)^o \subseteq X - \bar{A} \quad (2)$$

(1) ve (2) den istenen çıkar.

- ii. Tanımdan $x \in A^o \Leftrightarrow x \in T \subseteq A$ olacak şekilde $T \in \tau$ vardır. Dolayısıyla

$$x \in (A^o)^c \Leftrightarrow \forall T \in \tau: T \cap A^c \neq \emptyset$$

yazılabilir. Böylece Teorem 1.2.5/i gereğince $x \in \overline{(A^c)}$ bulunur.

- iii. $(\bar{A} - A)^o \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda en az bir $x \in X$ için $x \in (\bar{A} - A)^o$ olur. Buradan

$$\exists T \in \tau; x \in T \subseteq \bar{A} - A \Rightarrow x \in \bar{A} \text{ ve } x \notin A$$

olur. Ayrıca $x \in T \in \tau$ ve $x \in \bar{A}$ olduğundan Teorem 1.2.5\i gereği $A \cap T \neq \emptyset$ dir. Böylece

$$\exists y \in X, y \neq x; y \in A \cap T \Rightarrow y \in T \text{ ve } y \in A$$

elde edilir. Diğer taraftan $T \subseteq \bar{A} - A$ olduğundan

$$y \in \bar{A} - A \Rightarrow y \notin A$$

olur ki bu da bir çelişkidir. O halde $(\bar{A} - A)^o = \emptyset$ dir.

- iv. ii kullanılarak, $X - \overline{(X - A)} = X - (X - A^o) = A^o$ olur. ■

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Açıkgöz ve ark. 2004'de; ideal topolojik uzaylar üzerinde süreklilik ve sürekli fonksiyonlar üzerinde durulmuştur.

Samuels 1975'de; verilen bir ideal topolojik uzay yardımıyla elde edilen yeni bir topolojinin tanımı verilerek özellikleri incelenmiştir.

Stone 1937; temel topoloji bilgilerinin yanı sıra Boolean halkalar ile ilgili konu başlıklarına yer verilmiş bir kitaptır.

Vaidyanathaswamy 1960; bu topoloji kitabı, kapanış operatörü, açık ve kapalı kümeler, komşuluk topolojisi, topolojik dönüşümler ile Boolean cebir ana başlıklarıyla tezin hazırlanması aşamasında yardımcı olmuştur.

Vadivel ve Navuluri 2013'de; topolojik uzaylarda tanımlı olan düzenli yarı açık kümeler yardımı ile ideal topolojik uzaylarda tanımlı yeni bir yerel fonksiyon tanımlanarak tüm özellikleri detaylı olarak incelenmiştir.

Vadivel ve Vairamanickam 2009'da; düzenli açık kümeler yardımı ile ideal topolojik uzaylarda yeni açık kümeler ve beraberinde yeni kapalı kümeler tanımlanarak daha önce tanımlanan farklı açık kümeler ile ilişkileri incelenmiş ve bir diyagram oluşturulmuştur.

Omari ve Noiri 2013; ideal topolojik uzaylar için kullanışlı bir küme fonksiyonu olan yerel kapanış fonksiyonu ve özelliklerine değinilen bu araştırma makalesi tezin ortaya çıkması aşamasında önemli rol oynamıştır.

Jankovic ve Hamlett 1990; ideal yapısı ile elde edilen yeni bir topolojiden bahseden ve bu topolojinin özelliklerini inceleyen bir çalışmadır.

Kuratowski 1966; özellikle topolojik uzaylar için bilinmesi gerekenleri en ince ayrıntısına kadar aktaran ve Kuratowski topolojisi ile Kuratowski kapanış operatörünü anlatan önemli bir kaynak kitaptır.

Khan ve Noiri 2010'da; topolojik uzaylarda bilinen yarı-açık kümeler yardımı ile ideal topolojik uzaylarda yarı-yerel fonksiyon tanımı verilerek özellikleri incelenmiştir.

Paul 2013'de; ideal topolojik uzaylar için yeni bir kapalı küme tanımı verilerek diğer kapalı küme çeşitleri ile aralarındaki ilişkiler araştırılıp elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Levine 1963; yarı-açık kümelerin ilk kez tanımlanıp sonrasında yarı-süreklilik fonksiyonların elde edildiği ve ilgili sonuçların içinde bulunduğu önemli kaynaklardan biridir.

Mistry ve Modak 2012; topolojik uzaylar için tanımlanan pre-açık (ön-açık) küme ile elde edilen, ideal topolojik uzaylar üzerindeki $(\)^{*p}$ yerel fonksiyonu ve ψ_p operatörü ile bu küme fonksiyonları için elde edilen sonuçlardan oluşan bu makalenin de çalışmamızdaki rolü büyüktür.

Modak ve Bandyopadhyay 2007'de; ideal topolojik uzaylar için tanımlı olan ψ – operatörünün detaylı incelemesi yapılmıştır.

Hamlett ve Jankovic 1990; topolojik uzaylar için ideal yapısı üzerinde önemli sonuçların elde edildiği bir çalışmadır.

Vaidyanathaswamy 1945; küme topolojisi için yerelleme teorisi üzerine araştırmaları ve elde edilen sonuçları içermektedir

Karaca, 2013; <http://fen.ege.edu.tr/~ismetkaraca/topoloji.pdf>topolojik uzaylar için temel bilgilerin bulunduğu ders notlarını içeren bir pdf dökümüdür.

Dugundji,1966; topoloji üzerine yazılmış önemli kaynaklardan biri olarak tezin topolojik uzaylar ile ilgili olan temel bilgilerin oluşturulmasına katkı sağlamıştır.

Newcomb 1967'de; ideal topolojik uzaylar için modül yapısından bahsedilmiştir.

3.MATERYAL VE METOT

3.1 Materyal

Bu doktora tez çalışmasında temelde materyal olarak “topolojik uzaylar” ve “ideal topolojik uzaylar” yapısı kullanılmış olup, alt başlıklarda yer alan ve çalışmaya yön veren temel tanım ve teoremler ile ideal topolojik uzaylar metot bölümünde anlatılmıştır.

Bu çalışma boyunca (X, τ) topolojik uzayı ve (X, τ, I) ideal topolojik uzayı, hiçbir ayırma aksiyomunu sağlama zorunluluğu olmayan uzaylar olarak alınmıştır.

3.2 Metot

Bu kesimde ideal topolojik uzaylar, yerel fonksiyonlar, Kuratowski kapanış operatörü, yerel fonksiyonlar yardımı ile elde edilmiş kapanış operatörü ve ilgili topolojik kavramların tanımları verilecektir. Ayrıca bu tanımların yanı sıra temel sonuçlar ve teoremler ispatları ile birlikte verilecektir.

Tezin dördüncü bölümü olan araştırma bulgularında anlatılacak olan “düzenli yerel fonksiyon” ile “yarı yerel fonksiyon” kavramı için “düzenli açık” ve “yarı açık” kümelerin tam olarak anlaşılabilmesi gerekir. Ayrıca bu kesimde, ileriki çalışmalara ışık tutması bakımından yarı-açık ve düzenli açık kümelerin özellikleri ve açık kümeler ile aralarındaki kimi ilişkiler belirlenecektir.

3.2.1 Yarı Açık Kümeler

Yarı açık kümeler ilk kez 1963 yılında Norman Levine tarafından çalışılmış ve bu çalışmayla önemli sonuçlar elde edilmiştir. Burada yarı açık kümelerle ilgili ve bu çalışma boyunca gerekli olacak tanım ve sonuçlar verilmektedir.

Tanım 3.2.1.1

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in bir A alt kümesi için eğer $T \subseteq A \subseteq \bar{T}$ olacak şekilde en az bir $T \in \tau$ açık kümesi varsa **A ya yarı-açık küme** yarı-açık kümenin tümleyenine de **yarı-kapalı küme** denir.

X in tüm yarı-açık (yarı-kapalı) kümelerinin ailesini $YA(X, \tau)$ ($YK(X, \tau)$) ile göstereceğiz. A nın (X, τ) uzayındaki **yarı-kapanışı** $yk(A)$, A kümesini kapsayan tüm

yarı-kapalı kümelerin arakesiti olarak tanımlanır. A nın kapsadığı tüm yarı-açık kümelerin birleşimine ise **A kümesinin yarı-içi** denir ve $yiç(A)$ ile gösterilir (Levine 1963). Bu tanımlara göre

$$yk(A) = \bigcap \{B \subseteq X : B \in YK(X, \tau), A \subseteq B\}$$

$$yiç(A) = \bigcup \{U \subseteq X : U \in YA(X, \tau), U \subseteq A\}$$

yazılabilir.

Teorem 3.2.1.1

Bir (X, τ) topolojik uzayının bir A alt kümesinin uzayın yarı-açık bir alt kümesi olması için gerek ve yeterli koşul $A \subseteq \overline{(A^o)}$ olmasıdır.

İspat:

$A \subseteq \overline{(A^o)}$ olsun. O zaman $A^o \subseteq A \subseteq \overline{(A^o)}$ ve $T = A^o$ olarak alınırsa

$$T \subseteq A \subseteq \bar{T}$$

sağlanır. Yani A yarı-açık bir kümedir.

A yarı-açık bir küme olsun. Bu durumda en az bir T açık kümesi için

$$T \subseteq A \subseteq \bar{T}$$

yazılabilir. Ancak A tarafından kapsanan en büyük açık alt küme A^o olduğundan $T \subseteq A^o$ ve dolayısıyla $\bar{T} \subseteq \overline{(A^o)}$ olur. Buradan da $A \subseteq \overline{(A^o)}$ çıkar. ■

Teorem 3.2.1.2

(X, τ) topolojik uzayı ve $A, B \subseteq X$ alt kümeleri için aşağıdakiler doğrudur.

- i. $\tau \subseteq YA(X, \tau)$,
- ii. $A \in YA(X, \tau), A \subseteq B \subseteq \bar{A} \Rightarrow B \in YA(X, \tau)$.

İspat:

- i. Her $A \in \tau$ açık alt kümesinin yarı-açık olduğunu göstermeliyiz:

$$x \in A \xrightarrow{A=A^o} x \in A^o \xrightarrow{A \subseteq \bar{A}} x \in \overline{(A^o)}$$

yani $A \subseteq \overline{(A^o)}$ olur ki bu da $A \in \tau$ kümesinin yarı-açık olduğunu gösterir.

- ii. $A \in YA(X, \tau)$ ve $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ olsun. O zaman $T \subseteq A \subseteq \bar{T}$ olacak şekilde en az bir $T \in \tau$ açık kümesi vardır.

$$A \subseteq B \text{ ve } T \subseteq A \Rightarrow T \subseteq B \quad (1)$$

sağlanır. Diğer taraftan

$$A \subseteq \bar{T} \Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{(\bar{T})} \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{T} \xRightarrow{B \subseteq \bar{A}} B \subseteq \bar{T} \quad (2)$$

olur. (1) ve (2) den $T \subseteq B \subseteq \bar{T}$ olur ki buda B kümesinin yarı-açık olduğunu gösterir. ■

Teorem 3.2.1.3

Yarı açık kümeler için verilen aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- i. Yarı-açık kümelerin keyfi birleşimi yarı-açıktır.
- ii. Bir yarı-açık küme ile açık kümenin arakesiti bir yarı-açık küme olur.

İspat:

- i. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $i \in I$ için $A_i \in YA(X, \tau)$ yarı-açık kümelerini düşünelim. $A_i \in YA(X, \tau)$ olduğundan her $i \in I$ için

$$T_i \subseteq A_i \subseteq \bar{T}_i$$

olacak şekilde $T_i \in \tau$ vardır. O zaman

$$\bigcup_{i \in I} T_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} \bar{T}_i \subseteq \overline{\left(\bigcup_{i \in I} T_i \right)}$$

yazılabilir ki burada $\bigcup_{i \in I} T_i = T$ olarak alınırsa $\bigcup_{i \in I} A_i$ keyfi birleşimin yarı-açık olduğu görülür.

- ii. $A \in YA(X, \tau)$ ve $B \in \tau$ olsun. O zaman $T \subseteq A \subseteq \bar{T}$ olacak şekilde en az bir $T \in \tau$ vardır. Son yazdığımız ifadenin B ile arakesiti alınır

$$T \cap B \subseteq A \cap B \subseteq \bar{T} \cap B$$

bulunur. Ayrıca $\bar{T} \cap B \subseteq \overline{(\bar{T} \cap B)}$ gerçeği ve Lemma 1.2.6 kullanılırsa

$$T \cap B \subseteq A \cap B \subseteq \overline{(\bar{T} \cap B)} = \overline{(T \cap B)}$$

elde edilir. Ayrıca $T, B \in \tau$ olduğundan $T \cap B \in \tau$ dir. O halde $A \cap B$ kümesi yarı-açık olur. ■

Yarı-açık kümelerin arakesiti yarı-açık olmak zorunda değildir. Bu durum aşağıdaki örnekte açıkça görülmektedir:

Örnek 3.2.1.1

$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$ olmak üzere (X, τ) topolojik uzayını düşünelim. Bu durumda X in kapalı, yarı-açık ve yarı-kapalı alt kümeleri,

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$$

$$YA(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}\}$$

$$YK(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$$

olur. Burada $\{a, b\}$ ile $\{a, c, d\}$ yarı-açık kümelerdir ancak $\{a, b\} \cap \{a, c, d\} = \{a\}$ kümesi yarı-açık değildir.

3.2.2 Düzenli (Regüler) Açık Kümeler

Düzenli (regüler) açık küme yapısı 1937 de Stone tarafından tanıtılmıştır. Düzenli açık kümeler için bilinen önemli sonuçlar bu kısımda verilmiştir.

Tanım 3.2.2.1

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in bir A alt kümesi için eğer $A = (\bar{A})^o$ koşulu sağlanıyorsa ***A ya düzenli açık küme*** denir. X in tüm düzenli açık kümelerinin ailesi $DA(X, \tau)$ ile gösterilecektir. A nın kapsadığı tüm düzenli açık kümelerin birleşimine ***A kümesinin düzenli içi*** denir ve ***diç(A)*** ile gösterilir.

Tanım 3.2.2.2

(X, τ) topolojik uzayında X in bir A alt kümesi için eğer $A = \overline{(A^o)}$ koşulu sağlanıyorsa ***A ya düzenli kapalı küme*** denir. Diğer bir ifadeyle, düzenli açık kümenin tümleyenine ***düzenli kapalı küme*** denir. A nın (X, τ) uzayındaki ***düzenli kapanışı*** ***dk(A)***, A kümesini kapsayan tüm düzenli kapalı kümelerin arakesitidir. X in tüm düzenli kapalı kümelerinin ailesi $DK(X, \tau)$ ile gösterilecektir.

Örnek 3.2.2.1

$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ olsun. Bu durumda X in kapalı alt kümeleri ailesi

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, X, \{d\}, \{a, d\}, \{b, c, d\}\}$$

olur. Buna göre,

$$DA(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$$

ve

$$YA(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$$

bulunur.

Teorem 3.2.2.1

(X, τ) topolojik uzayı için;

- i. Her düzenli açık küme açıktır (yani $DA(X, \tau) \subseteq \tau$),
- ii. Hem açık hem kapalı olan her küme düzenli açıktır.

İspat:

- i. $A \subseteq X$ alt kümesi düzenli açık olsun. O halde

$$A = (\bar{A})^o \quad (1)$$

yazılır. Her iki tarafın içi alınır

$$A^o = ((\bar{A})^o)^o$$

olur. Teorem 1.2.2 iv. şık gereği

$$A^o = (\bar{A})^o \quad (2)$$

olur. (1) ve (2) den $A^o = A$ bulunur. Bu da A nın açık olduğunu gösterir.

- ii. $A \subseteq X$ alt kümesi hem açık hem kapalı olsun. O halde $A = A^o = \bar{A}$ yazılabilir. Bu durumda;

$$(\bar{A})^o = (A^o)^o = A^o = A$$

olur ki bu da A kümesini düzenli açık olduğunu gösterir. ■

Örnek 3.2.2.2

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi ve τ_a , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı adi topoloji (açık aralıkların ürettiği topoloji) olsun. Bu durumda $(\mathbb{R}, \tau_a)$ üzerinde tanımlı açık aralıkların tümü aynı zamanda düzenli açık olurlar. Çünkü bilindiği üzere gerçel sayılar kümesinde tanımlı her açık aralık adi topolojiye göre bir açık kümedir. Ayrıca $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere (a, b) açık aralığı için

$$\overline{(a, b)} = [a, b] \text{ ve } [a, b]^o = (a, b)$$

olduğundan

$$((a, b))^o = (a, b)$$

olur ki bu da açık aralıkların düzenli açık olduklarını gösterir.

Yarı açık kümelerin arakesitinin aksine düzenli açık kümelerin sonlu arakesitinin yine bir düzenli açık küme olduğunu gösteren teorem aşağıda yer almaktadır.

Teorem 3.2.2.2

Düzenli açık kümelerin sonlu arakesiti de düzenli açıktır.

İspat:

(X, τ) bir topolojik uzay ve $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ olsun. Her $i \in I$ için $A_i \subseteq X$ birer düzenli açık küme olmak üzere $A_i = (\bar{A}_i)^o$ yazılır. Şimdi $\bigcap_{i=1}^n A_i$ sonlu arakesitinin düzenli açık olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} \left(\overline{\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)} \right)^o &= \left(\overline{\left[X - \left(X - \bigcap_{i=1}^n A_i \right) \right]} \right)^o = \left(X - \left(X - \bigcap_{i=1}^n A_i \right)^o \right)^o \\ &= \left(X - \left(\bigcup_{i=1}^n (X - A_i) \right)^o \right)^o = \left(\overline{\left(X - \bigcup_{i=1}^n (X - A_i) \right)} \right)^o \\ &= \left(\overline{\left(\bigcap_{i=1}^n (X - (X - A_i)) \right)} \right)^o \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^n \overline{(X - (X - A_i))} \right)^o \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \right)^o = \bigcap_{i=1}^n (\bar{A}_i)^o = \bigcap_{i=1}^n A_i \end{aligned}$$

Diğer taraftan düzenli açık kümeler açık olduğundan

$$\bigcap_{i=1}^n A_i$$

de açık ve böylece

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^o = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

olur. O halde

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)^o \subseteq \left(\overline{\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)} \right)^o$$

olur. Böylece

$$\left(\overline{\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right)} \right)^o = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

elde edilir. ■

Düzenli açık kümelerin sonlu arakesit altında kapalı olduğunu gösteren bu teorem ile $DA(X, \tau)$ ailesi, X üzerindeki bir topolojinin tabanı olur. $DA(X, \tau)$ ailesi ile üretilen topoloji τ_s ile gösterilir ve τ topolojisinin yarı düzenliliği olarak bilinir. Yani bir (X, τ) topolojik uzayındaki tüm düzenli açık kümelerin ailesi, $DA(X, \tau)$, (X, τ) topolojik uzayının yarı düzenli uzayı (X, τ_s) için bir taban olur. $DA(X, \tau) \subseteq \tau$ olduğundan $\tau_s \subseteq \tau$ olur. Eğer $\tau_s = \tau$ oluyor ise (X, τ) topolojik uzayı yarı-düzenli uzay adını alır (Stone 1937).

Yine yarı açıklar için bilinenin aksine düzenli açık kümelerin birleşiminin düzenli açık olması gerekmez. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilmiştir:

Örnek 3.2.2.3

$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$ olmak üzere (X, τ) topolojik uzayını düşünelim. Bu durumda X in kapalı alt kümeleri ailesi

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$$

olarak bulunur. X kümesinin $A = \{b\}$ ve $B = \{c, d\}$ alt kümelerini düşünelim.

$$(\bar{A})^o = (\overline{\{b\}})^o = \{a, b\}^o = \{b\} \text{ olduğundan } A = \{b\} \text{ kümesi düzenli açıktır.}$$

$(\bar{B})^o = (\overline{\{c, d\}})^o = \{a, c, d\}^o = \{c, d\}$ olup, $B = \{c, d\}$ kümesi de düzenli açık olur.

$(\overline{A \cup B})^o = (\overline{\{b, c, d\}})^o = X^o = X$ olduğundan $A \cup B = \{b, c, d\}$ kümesi düzenli açık değildir.

Örnek 3.2.2.4

$(\mathbb{R}, \tau_a)$ adi topolojik uzayı üzerinde $(0, \frac{1}{2})$ ve $(\frac{1}{2}, 1)$ açık kümelerini (dolayısıyla düzenli açık kümeleri) düşünelim.

$$\left[\overline{\left(\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \right)} \right]^o = \left[\overline{\left(0, \frac{1}{2}\right)} \cup \overline{\left(\frac{1}{2}, 1\right)} \right]^o = \left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right)^o = ([0,1])^o = (0,1)$$

olduğundan

$$\left[\overline{\left(\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \right)} \right]^o \neq \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

olur. Yani düzenli açık kümelerin birleşimi düzenli açık olmayabilir.

Şimdi ideal topolojik uzaylara giriş yapılacaktır.

3.2.3 İdeal Topolojik Uzaylar

İdeal topolojik uzaylar ilk kez Kuratowski tarafından 1930 yılında çalışıldı. Yine yerel fonksiyonlar ilk defa 1933 yılında Kuratowski tarafından tanımlanarak özellikleri incelendi. 1945 yılında Vaidyanathaswamy yerel fonksiyon tanımından yola çıkarak yeni bir kapanış işlemi tanımladı. Sonrasında Vaidyanathaswamy bu işlemden yararlanarak ideal topolojik uzayları oluşturdu ve bu topolojinin bir tabanını elde etti. Bu alan pek çok matematikçi tarafından zenginleştirilmiştir. Hamlett ve Jankovic, Modak ve Bandyopadhyay, yerel fonksiyonların yardımıyla tanımlanan kapanış operatörü üzerinde çalışarak önemli sonuçlar elde etmiş ve bu çalışmalar neticesinde elde edilen yeni topoloji üzerinde durmuşlardır.

Samuels 1975 yılında idealleri değiştirerek yerel fonksiyonun bazı ideallerde genel topolojide bilinen kapanış noktası, yoğunlaşma noktası, II. kategoriden nokta ve yığılma noktası kavramlarıyla çakıştığını gösterdi. 1990 yılında Jankovic ve Hamlett geçmişte yapılmış tüm bu çalışmaları inceleyerek ideal topolojilerin gelişmesi ve zenginleşmesini sağlayan kapsamlı çalışmalar yaptılar.

Son zamanlarda ise birçok matematikçi tarafından, topolojinin yerine genelleştirilmiş açık kümeler kullanılarak yeni yerel fonksiyon tanımları verilerek özelliklerinin ayrıntılı biçimde incelendiği çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bazıları şunlardır:

1. "()^{*p} and ψ_p Operator" (Mistry and Modak 2012)
2. "Semi Local Functions in Ideal Topological Spaces" (Khan and Noiri 2010)
3. "Local Closure Functions in Ideal Topological Spaces" (Omari and Noiri 2013)

Çalışmamızda, öncelikle topolojik uzaylardaki açık kümelerin genelleştirilmiş bir hali olan düzenli açık kümelerin oluşturduğu sınıf kullanılmış ve $DA(X, \tau)$ olarak gösterilmiştir. İdeal topolojik uzaylar üzerinde tanımlı yerel fonksiyon tanımında yer alan τ topolojisinin yerine $DA(X, \tau)$ sınıfı alınmış ve yeni bir yerel fonksiyon tanımı verilmiştir. Ayrıca bu fonksiyonun özellikleri ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir.

Tanım 3.2.3.1

(X, τ) bir topolojik uzay ve I ailesi de, X kümesinin alt kümelerinin boş olmayan bir sınıfı olsun. I ailesine, aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda **X kümesi üzerinde bir ideal** denir.

- i. $A \in I, B \in I \Rightarrow A \cup B \in I$ (sonlu toplamsal özelliği),
- ii. $A \in I, B \subseteq A \Rightarrow B \in I$ (kalıtsal özelliği)

Bu tanımla birlikte (X, τ, I) üçlüsüne **ideal topolojik uzay** denir.

Bir (X, τ) topolojik uzayı için bilinen en basit idealler,

$$\text{maksimum ideal olan } I = 2^X$$

ve

$$\text{minimum ideal olan } I = \{\emptyset\}$$

idealleridir. Bunların dışında I_{so} ve I_{sa} idealleri ile sırasıyla **sonlu alt kümeler idealini** ve **sayılabilir alt kümeler idealini** göstereceğiz. Adlarından da anlaşılacağı üzere

$$I_{so} = \{A \subseteq X : A \text{ sonlu}\}$$

ve

$$I_{sa} = \{A \subseteq X : A \text{ sayılabilir}\}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Şimdi çalışmanın temelinde yer alan yerel fonksiyon tanımı verilecektir.

3.2.3.1 Yerel Fonksiyonlar

İdeal topolojik uzaylar için yerel fonksiyonlar bu çalışma için ilham kaynağı olmuştur. Bu nedenle araştırma bulguları bölümünde yer alan sonuçların anlaşılabilmesi adına, bu kesimde yerel fonksiyonlar ve ilgili teoremler ayrıntılı olarak işlenecektir.

Tanım 3.2.3.1.1

(X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. X in x elemanını bulunduran açık alt kümelerinden oluşan aileyi $\tau(X, x)$ ile gösterelim. Bu durumda

$$A^*(I, \tau) = \{x \in X: \forall T \in \tau(X, x), A \cap T \notin I\}$$

kümesine ***A*nın, *I* ve τ ile ilgili, yerel fonksiyonu** denir. Bu çalışma boyunca bir karışıklık yaratmıyorsa $A^*(I, \tau)$ yerine kısaca A^* yazılacaktır.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi bir kümenin yerel fonksiyonu, ele alınan idealin değişmesiyle ilgili olarak farklılaşır. Buna göre bir (X, τ) topolojik uzayı için tanımlanan ve Tanım 3.2.3.1 den hemen sonra yer verdiğimiz bazı idealler için bir $A \subseteq X$ kümesine karşılık A^* elde edilirken, aşağıda görüldüğü gibi farklı farklı sonuçlar ortaya çıkmıştır.

$$A^*({\emptyset}, \tau) = \{x \in X: \forall T \in \tau(X, x), A \cap T \neq \emptyset\} = \bar{A}$$

$$A^*(2^X, \tau) = \{x \in X: \forall T \in \tau(X, x), A \cap T \notin 2^X\} = \emptyset$$

$$A^*(I_{so}, \tau) = \{x \in X: \forall T \in \tau(X, x), A \cap T \text{ kümesi sonsuz}\} = \tilde{A}$$

$$A^*(I_{sa}, \tau) = \{x \in X: \forall T \in \tau(X, x), A \cap T \text{ kümesi sayılamaz}\} = \text{yoğ}(A)$$

A kümesi için; $A^*(I, \tau)$ yerel fonksiyonunun, $\bar{A}$, $\tilde{A}$ ve $\text{yoğ}(A)$ kümelerinin birer genelleştirilmesi olduğu (Samuels 1975) de verilmiştir.

Tanım 3.2.3.1.2

(X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda ***A*nın *I* ve τ ile ilgili yarı-yerel fonksiyonu**

$$A_*(I, \tau) = \{x \in X: \forall U \in YA(X, x), A \cap U \notin I\}$$

ile tanımlıdır. Burada $YA(X, x)$, X in x elemanını bulunduran yarı-açık alt kümelerinden oluşan aileyi göstermektedir. Bu çalışma boyunca bir karışıklık yaratmıyorsa $A_*(I, \tau)$ yerine kısaca A_* yazılacaktır.

Teorem 3.2.3.1.1

(X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve I_1, I_2 X kümesi üzerinde idealler olmak üzere, eğer $I_1 \subseteq I_2$ ise $A^*(I_2, \tau) \subseteq A^*(I_1, \tau)$ sağlanır.

İspat:

$x \in A^*(I_2)$ olsun. Bu durumda yerel fonksiyon tanımı gereği her $T \in \tau(X, x)$ açık kümesi için, $A \cap T \notin I_2$ yazılabilir. $I_1 \subseteq I_2$ olduğundan yine her $T \in \tau(X, x)$ için $A \cap T \notin I_1$ olacağı açıktır. Buradan $x \in A^*(I_1)$ yazılır ki bu da

$$A^*(I_2) \subseteq A^*(I_1)$$

olduğunu gösterir. ■

Teorem 3.2.3.1.2

(X, τ, I) bir ideal topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır.

- i. $\emptyset^* = \emptyset$,
- ii. $A \subseteq B \Rightarrow A^* \subseteq B^*$,
- iii. $A^* = \overline{(A^*)} \subseteq \bar{A}$ yani A^* kümesi (X, τ) üzerinde kapalıdır.
- iv. $(A^*)^* \subseteq A^*$,

İspat:

- i. Her $T \in \tau(X, x)$ için $\emptyset \cap T = \emptyset \in I$ olduğundan

$$\emptyset^*(I, \tau) = \{x \in X : \forall T \in \tau(X, x), \emptyset \cap T \notin I\} = \emptyset$$
 olur.
- ii. $x \in A^*$ ise, Tanım 3.2.3.1.1 den her $T \in \tau(X, x)$ açık kümesi için, $A \cap T \notin I$ olur. $A \subseteq B$ ise, $A \cap T \subseteq B \cap T$ olur. Eğer $B \cap T \in I$ olsaydı I idealinin kalıtsal özelliğinden, $A \cap T \in I$ olurdu ki bu bir çelişkidir. O halde her $T \in \tau(X, x)$ açık kümesi için, $B \cap T \notin I$ olur. Yani Tanım 3.2.3.1.1 gereği, $x \in B^*$ olur.
- iii. Öncelikle $A^* = \overline{(A^*)}$ eşitliğini gösterelim. Bir topolojik uzayda her $A \subseteq X$ alt kümesi için, $A \subseteq \bar{A}$ olduğunu biliyoruz. Bu sonuç A kümesinin yerel fonksiyonu için de sağlanacağından,

$$A^* \subseteq \overline{(A^*)} \quad (1)$$

elde edilir.

Şimdi de $\overline{(A^*)} \subseteq A^*$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $x \in \overline{(A^*)}$ noktası için varsayalım ki $x \notin A^*$ olsun.

$$x \notin A^* \Rightarrow \exists U \in \tau(X, x): U \cap A \in I \quad (2)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} x \in \overline{(A^*)} &\Rightarrow \forall T \in \tau(X, x), T \cap A^* \neq \emptyset \xrightarrow{U \in \tau(X, x)} U \cap A^* \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists y \in X: y \in A^*, y \in U \text{ ve } U \in \tau(X, y) \\ &\xrightarrow{y \in A^*} \forall V \in \tau(X, y), V \cap A \notin I \xrightarrow{U \in \tau(X, y)} U \cap A \notin I \end{aligned} \quad (3)$$

yazılır. (2) ve (3) çelişir. O halde

$$\overline{(A^*)} \subseteq A^* \quad (4)$$

sağlanır.

Diğer taraftan, $x \in A^*$ olsun. Tanım 3.2.3.1.1 den her $T \in \tau(X, x)$ için $T \cap A \notin I$ olur. I bir ideal olduğundan $\emptyset \in I$ ve dolayısıyla

$$T \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A} \Rightarrow A^* \subseteq \bar{A} \quad (5)$$

dir.

(1), (4), (5) ifadelerinden

$$A^* = \overline{(A^*)} \subseteq \overline{(A)}$$

elde edilir.

iv. Herhangi bir $x \in (A^*(I))^*(I)$ noktasını alalım. Tanım 3.2.3.1.1 gereğince,

$$x \in (A^*(I))^*(I) = \{x \in X: \forall T \in \tau(X, x), (A^* \cap T) \notin I\}$$

olurdu. Her $T \in \tau(X, x)$ açık kümesi ve her I ideali için,

$$(A^* \cap T) \notin I \text{ ve } \{\emptyset\} \in I \text{ olduğundan } A^* \cap T \notin \{\emptyset\}, \text{ yani } A^* \cap T \neq \emptyset$$

dir. Teorem 1.2.5'i kullanılırsa $x \in \overline{(A^*)}$ olur. iii. şık gereğince, $\overline{(A^*)} = A^*$ olması $x \in A^*$ olduğunu gösterir. $x \in (A^*)^*$ noktası için, $x \in A^*$ olduğundan $(A^*)^* \subseteq A^*$ elde edilir. ■

Örnek 3.2.3.2.1:

$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{c, d\}\}$ olmak üzere (X, τ) topolojik uzayı üzerinde $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ idealini düşünelim. Bu durumda X in kapalı alt kümeleri

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$a \in X$ elemanını içeren açık kümelerin sınıfı $\{X\}$,

$b \in X$ elemanını içeren açık kümelerin sınıfı $\{X\}$,

$c \in X$ elemanını içeren açık kümelerin sınıfı $\{X, \{c, d\}\}$,

$d \in X$ elemanını içeren açık kümelerin sınıfı $\{X, \{c, d\}\}$

şeklindedir.

Böylece X kümesinin her A alt kümesi için aşağıda görülen bir tablo hazırlanabilir.

A	A^o	$\bar{A}$	A^*	$(A^*)^o$	$\overline{(A^*)}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
X	X	X	X	X	X
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\emptyset$	$\{a, b\}$
$\{b\}$	$\emptyset$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\emptyset$	$\{a, b\}$
$\{c\}$	$\emptyset$	X	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{d\}$	$\emptyset$	X	X	X	X
$\{a, b\}$	$\emptyset$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\emptyset$	$\{a, b\}$
$\{a, c\}$	$\emptyset$	X	$\{a, b\}$	$\emptyset$	$\{a, b\}$
$\{a, d\}$	$\emptyset$	X	X	X	X
$\{b, c\}$	$\emptyset$	X	$\{a, b\}$	$\emptyset$	$\{a, b\}$
$\{b, d\}$	$\emptyset$	X	X	X	X
$\{c, d\}$	$\{c, d\}$	X	X	X	X
$\{a, b, c\}$	$\emptyset$	X	$\{a, b\}$	$\emptyset$	$\{a, b\}$
$\{a, b, d\}$	$\emptyset$	X	X	X	X
$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	X	X	X	X
$\{b, c, d\}$	$\{c, d\}$	X	X	X	X

Bu tablonun hazırlanmasındaki amaç, konular işlendikçe vereceğimiz örneklerde yer alacak olan tablolarda her defasında sütun eklenmek zorunda kalınacağı için, karşılaştırılacak kümelerin artabilecek olması ve bu durumu tablo üzerinde açıkça göstermek istememizdir.

Teorem 3.2.3.2.2

(X, τ, I) bir ideal topolojik uzay, $A, B \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki koşullar geçerlidir.

- i. $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$,
- ii. $(A \cap B)^* \subseteq A^* \cap B^*$,
- iii. $A^* - B^* = (A - B)^* - B^* \subseteq (A - B)^*$,
- iv. $T \in \tau \Rightarrow T \cap A^* = T \cap (T \cap A)^* \subseteq (T \cap A)^*$,
- v. $I_0 \in I \Rightarrow (A \cup I_0)^* = A^* = (A - I_0)^*$.

İspat:

- i. Tanım 3.2.3.1.1 gereğince A ve B kümelerinin yerel fonksiyonları,

$$A^*(I) = \{x \in X: \forall T \in \tau(X, x), A \cap T \notin I\} \quad (1)$$

$$B^*(I) = \{x \in X: \forall T \in \tau(X, x), B \cap T \notin I\} \quad (2)$$

olur. (1) ve (2) ifadelerinin birleşimlerini alırsak,

$$A^*(I) \cup B^*(I) = \{x \in X: \forall T \in \tau(X, x), A \cap T \notin I \text{ veya } B \cap T \notin I\}$$

$$A^*(I) \cup B^*(I) = \{x \in X: \forall T \in \tau(X, x), [(A \cap T) \cup (B \cap T)] \notin I\}$$

$$A^*(I) \cup B^*(I) = \{x \in X: \forall T \in \tau(X, x), [T \cap (A \cup B)] \notin I\}$$

elde edilir. Tanım 3.2.3.1.1 den $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$ bulunur.

- ii. $A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ olduğundan, Teorem 3.2.3.1.1, iii. gereği,

$$(A \cap B)^* \subseteq A^* \text{ ve } (A \cap B)^* \subseteq B^*$$

sağlanır. O halde $(A \cap B)^* \subseteq A^* \cap B^*$ olduğu açıktır.

- iii. $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ eşitliği her zaman doğrudur. i özelliğinden

$$A^* = [(A - B) \cup (A \cap B)]^* = (A - B)^* \cup (A \cap B)^* \subseteq (A - B)^* \cup B^*$$

elde edilir. Böylece

$$A^* - B^* \subseteq (A - B)^* - B^*$$

sonucuna varılır. Ayrıca Teorem 3.2.3.1.1, iii. gereği $(A - B)^* \subseteq A^*$ olur ve böylece

$$(A - B)^* - B^* \subseteq A^* - B^*$$

bulunur. Buradan da

$$A^* - B^* = (A - B)^* - B^*$$

yazılır. Yani

$$A^* - B^* = (A - B)^* - B^* \subseteq (A - B)^*$$

sağlanır.

- iv. Herhangi bir $x \in T \cap A^*$ noktasını alalım. Kesişim işlemi tanımından $x \in T$ ve $x \in A^*$ olur. Tanım 3.2.3.1.1 gereği

$$\text{her } T' \in \tau(X, x) \text{ açık kümesi için, } (A \cap T') \notin I$$

olur. $x \in T$ ve $T \in \tau$ olduğundan komşuluk tanımı gereği $T \in \tau(X, x)$ olur. Bir noktayı içeren açık kümelerin kesişimi yine o noktayı içeren bir açık küme olduğundan $T \cap T' \in \tau(X, x)$ olur ve $x \in A^*$ olduğundan

$$[(T' \cap T) \cap A] = [T' \cap (T \cap A)] \notin I$$

ifadesi elde edilir. Tanım 3.2.3.1.1 den,

$$x \in (T \cap A)^*$$

bulunur. $x \in T \cap A^*$ noktası için, $x \in (T \cap A)^*$ olduğundan,

$$T \cap A^* \subseteq (T \cap A)^* \quad (1)$$

olur. (1) ifadesinde her iki tarafın T ile arakesiti alınır,

$$[T \cap (T \cap A^*)] \subseteq [T \cap (T \cap A)^*]$$

ve böylece

$$(T \cap A^*) \subseteq [T \cap (T \cap A)^*] \quad (2)$$

elde edilir. $T \cap A \subseteq A$ ve Teorem 3.2.3.1.1, ii. gereği $(T \cap A)^* \subseteq A^*$ bulunur ve her iki tarafın T ile arakesiti alınır

$$T \cap (T \cap A)^* \subseteq T \cap A^* \quad (3)$$

olur. O halde (2) ve (3) den

$$T \cap A^* = T \cap (T \cap A)^*$$

eşitliği yazılabilir. Buradan da

$$T \cap A^* = T \cap (T \cap A)^* \subseteq (T \cap A)^*$$

çıkar.

- v. $A \cup I_0 = (A - I_0) \cup I_0$ eşitliği her zaman doğrudur. Bu eşitlikte her iki tarafın $(\)^*$ işlemi alınır,

$$(A \cup I_0)^* = [(A - I_0) \cup I_0]^*$$

elde edilir. i gereğince

$$(A \cup I_0)^* = A^* \cup I_0^* = (A - I_0)^* \cup I_0^*$$

olur. $I_0 \in I$ olduğundan, her $T \in \tau(X, x)$ için $T \cap I_0 \in I$ olacaktır ve Tanım 3.2.3.1.1 kullanılarak

$$I_0^* = \{x \in X: \forall T \in \tau(X, x), T \cap I_0 \notin I\} = \emptyset$$

bulunur. O halde yukarıdaki son eşitlikte $I_0^* = \emptyset$ yazılırsa,

$$(A \cup I_0)^* = A^* = (A - I_0)^*$$

elde edilir. ■

Örnek 3.2.3.2.2:

$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$ olmak üzere (X, τ) topolojik uzayı üzerinde $I = \{\emptyset, \{d\}\}$ idealini düşünelim. Böylece

A	$(A)^o$	$\overline{(A)}$	A^*	$(A^*)^o$	$\overline{(A^*)}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
X	X	X	X	X	X
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\{c\}$	$\emptyset$	$\{a, c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$
$\{d\}$	$\emptyset$	$\{a, c, d\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\{a, c\}$	$\emptyset$	$\{a, c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$
$\{a, d\}$	$\emptyset$	$\{a, c, d\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{b, c\}$	$\{b\}$	X	X	X	X
$\{b, d\}$	$\{b\}$	X	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\{c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$
$\{a, b, c\}$	$\{b\}$	X	X	X	X
$\{a, b, d\}$	$\{b\}$	X	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$
$\{b, c, d\}$	$\{b, c, d\}$	X	X	X	X

tablosu oluşturulabilir. Ayrıca

$$\tau(X, a) = \{X\},$$

$$\tau(X, b) = \{X, \{b\}, \{b, c, d\}\},$$

$$\tau(X, c) = \{X, \{c, d\}, \{b, c, d\}\},$$

$$\tau(X, d) = \{X, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

şeklindedir. Böylece $A = \{a, b\}$ kümesi için $A^*(I) = \{a, b\} = \overline{(A^*)}$ olarak bulunur.

3.2.4 Kuratowski Kapanış Operatörü

Tanım 3.2.4.1

$A, B \in 2^X$ olmak üzere $f: 2^X \rightarrow 2^X$ fonksiyonuna aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda **Kuratowski kapanış operatörü** denir (Kuratowski 1933).

- i. $f(\emptyset) = \emptyset$,
- ii. $A \subseteq f(A)$,
- iii. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
- iv. $f(f(A)) = f(A)$.

$\mathcal{K} = \{A \subseteq X: A = f(A)\}$ ailesine de

$$\tau = \{U \subseteq X: X - U \in \mathcal{K}\} = \{U \subseteq X: X - U = f(X - U)\}$$

topolojisine göre kapalılar ailesi denir (Kuratowski 1933).

2^X kuvvet kümesi üzerinde tanımlı bir g fonksiyonu, $A, B \in 2^X$ olmak üzere;

- i. $g(\emptyset) = \emptyset$,
- ii. $g(A \cup B) = g(A) \cup g(B)$,
- iii. $g(g(A)) \subseteq g(A)$.

koşullarını sağlasın. Bu durumda, 2^X kuvvet kümesi üzerinde $f(A) = A \cup g(A)$ olarak tanımlanan fonksiyon Kuratowski kapanış operatörü olur (Jankovic 1990): Bunun doğruluğu için $f(A) = A \cup g(A)$ fonksiyonunun, Tanım 3.2.4.1 de yer alan koşulları sağladığını göstermeliyiz.

- i. f fonksiyonunun tanımından, $f(\emptyset) = \emptyset \cup g(\emptyset) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$,
- ii. Birleşim işlemi gereği, $A \subseteq A \cup g(A) \Rightarrow A \subseteq f(A)$,
- iii. f ve g fonksiyonlarının tanımları kullanılarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$f(A \cup B) = (A \cup B) \cup g(A \cup B) = (A \cup B) \cup g(A) \cup g(B)$$

$$= [A \cup g(A)] \cup [B \cup g(B)]$$

$$= f(A) \cup f(B)$$

- iv. $f(f(A)) = f(A \cup g(A)) = f(A) \cup f(g(A))$

$$= [A \cup g(A)] \cup [g(A) \cup g(g(A))]$$

olur. Diğer taraftan $g(g(A)) \subseteq g(A)$ olduğundan $g(A) \cup g(g(A))$ yerine $g(A)$ yazılabilir. Bu durumda

$$f(f(A)) = A \cup g(A) = f(A)$$

elde edilir. ■

O halde $f: 2^X \rightarrow 2^X$ küme fonksiyonu Tanım 3.2.4.1 de yer alan koşulları sağlar.

Bu gerçeğe dayanarak, (X, τ, I) uzayında, her $A \subseteq X$ için

$$k^*: 2^X \rightarrow 2^X, \quad k^*(A) = A \cup A^*$$

şeklinde tanımlanan bu işlemin bir Kuratowski kapanış operatörü olduğu gösterilmiştir (Jankovic 1990).

k^* fonksiyonu yardımıyla üretilen τ^* topolojisi aşağıda olduğu gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.4.2

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı üzerinde

$$\tau^*(I, \tau) = \{U \subseteq X: k^*(X - U) = X - U\}$$

şeklinde tanımlanan aileye **k^* fonksiyonu tarafından üretilen topoloji** denir ve kısaca $\tau^*(I)$ (veya τ^*) ile gösterilir (Jankovic 1990).

$I = \{\emptyset\}$ minimum ideali için, $\tau^* = \tau$ ve $I = 2^X$ maksimum ideali için, $\tau^* = 2^X$ olup X kümesi üzerindeki her I ideali için, $\emptyset \subseteq I \subseteq 2^X$ olduğundan Teorem 3.2.3.1.1 den $\tau \subseteq \tau^* \subseteq 2^X$ bağıntısı elde edilir.

Tanım 3.2.4.3

(X, τ, I) ideal topolojik uzay olsun. Her $A \subseteq X$ için

$$\psi(A) = \{x \in X : \exists T_x \in \tau : T_x - A \in I\}$$

şeklinde tanımlanan $\psi: 2^X \rightarrow \tau$ fonksiyonuna **ψ operatörü** denir. Ayrıca $\psi(A)$ için

$$\psi(A) = X - (X - A)^*$$

olduğunu görmek zor değildir (Hamlett ve Jankovic 1990, Jankovic ve Hamlett 1990).

İdeal topolojik uzaylar, yerel fonksiyonlar, ψ -operatörü ve ilgili birçok konu başlığı için ayrıntılı bir kazanım elde edebilmek adına kaynaklar bölümünde yer alan kitap ve makalelerden yararlanılabilir.

Bundan sonraki bölümde düzenli açık kümeler ile oluşturulan $DA(X, \tau)$ ailesi üzerine kurulan düzenli uzay yapısı için düzenli yerel fonksiyonlar, ilgili yapılar ve elde edilen sonuçlardan bahsedilmiştir.

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu çalışma temelde düzenli yerel fonksiyonlar üzerine kurgulanmıştır. Öncelikle Materyal ve Metot bölümünde çalışılan ideal topolojik uzaylar yapısından yola çıkılarak oluşturulan düzenli ideal uzaylar tanıtılıp sonrasında düzenli ideal uzaylar üzerinde düzenli yerel fonksiyonlar kavramı verilmiştir. Hemen arkasında, düzenli yerel fonksiyonlar yardımı ile tanımlanan ψ_d operatörü yer almıştır. Tezin son kısımlarında bulunan diğer alt başlıkların anlaşılabilmesi ve ilgili sonuçların aktarılabilmesi adına ψ_d operatörünün özellikleri ayrıntılı olarak işlenmiştir. Devamında düzenli yerel fonksiyonlar ve ψ_d operatörü ile ilişkili olan ve çalışmanın önemli bir kısmının yer alacağı konu başlıkları; düzenli eş yoğun ideal, düzenli uyumlu ideal ve $\psi_d - C$ kümeler yine bu bölümde aktarılmıştır.

4.1 Düzenli İdeal Uzaylar

$DA(X, \tau)$ sınıfı her zaman bir topoloji belirtmediğinden, düzenli açık kümeler yardımıyla oluşturulan bu yapı yerine “düzenli ideal uzay” yapısı kurulmuştur.

Tanım 4.1.1

(X, τ) bir topolojik uzay ve I, X üzerinde tanımlı bir ideal olsun. Bu durumda $DA(X, \tau)$, (X, τ) üzerinde tanımlı tüm düzenli açık kümelerin sınıfını göstermek üzere $(X, DA(X, \tau), I)$ üçlüsüne **düzenli ideal uzay** denir.

Şimdi düzenli ideal uzaylar üzerindeki çalışmaların verilebilmesi için gerekli olan düzenli yerel fonksiyon tanımını vereceğiz.

4.2 Düzenli Yerel Fonksiyon

Tanım 4.2.1

$(X, DA(X, \tau), I)$ bir düzenli ideal uzay, $A \subseteq X$ olsun. X in x elemanını kapsayan düzenli açık alt kümelerinden oluşan aileyi $DA(X, x)$ ile gösterelim. Bu durumda

$$A^{*d}(I, DA(X, \tau)) = \{x \in X: \forall U \in DA(X, x), A \cap U \notin I\}$$

kümesine **A nın I ve $DA(X, \tau)$ ile ilgili düzenli yerel fonksiyonu** denir. Bu çalışma boyunca $A^{*d}(I, DA(X, \tau))$ yerine kısaca A^{*d} yazılmıştır.

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzayında $A \subseteq X$ alt kümesini düşünelim. X uzayının aşikar idealleri için A^{*d} kümesi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$A^{*d}(\{\emptyset, DA(X, \tau)\}) = \{x \in X: \forall U \in DA(X, x), U \cap A \neq \emptyset\} = dk(A)$$

$$A^{*d}(2^X, DA(X, \tau)) = \{x \in X: \forall U \in DA(X, x), U \cap A \notin 2^X\} = \emptyset$$

Örnek 4.2.1 :

$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$ olmak üzere (X, τ) topolojik uzayı üzerinde $I = \{\emptyset, \{d\}\}$ idealini düşünelim. (X, τ) topolojik uzayı üzerindeki tüm düzenli açıkların ailesi $DA(X) = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c, d\}\}$ ve düzenli kapalı kümelerin sınıfı ise $DK(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$ olacaktır. Buradan

$$DA(X, a) = \{X\},$$

$$DA(X, b) = \{X, \{b\}\},$$

$$DA(X, c) = \{X, \{c, d\}\},$$

$$DA(X, d) = \{X, \{c, d\}\}$$

şeklindedir. Böylece $A = \{a, b, c\}$ için $A^{*d}(I) = X = dk(A^{*d})$ olarak bulunur.

Teorem 4.2.1

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzayında $A \subseteq X$ için aşağıda yer alan bilgiler doğrudur.

- i. $A_* \subseteq A^* \subseteq A^{*d}$,
- ii. $DA(X, \tau) = YA(X, \tau) \Rightarrow A^{*d} = A_*$,
- iii. $A \in I \Rightarrow A^{*d} = \emptyset$,
- iv. $\emptyset^{*d} = \emptyset$,

İspat:

- i. $x \in A_*$ olsun. O zaman her $U \in YA(X, x)$ için $A \cap U \notin I$ olur. Şimdi x elemanını içeren herhangi bir $T \in \tau$ için $T \in YA(X, x)$ olduğundan $A \cap T \notin I$ sağlanır ki bu da $A_* \subseteq A^*$ olduğunu gösterir.

Eğer $x \in A^*$ ise benzer düşünceyle $x \in A^{*d}$ olur yani $A^* \subseteq A^{*d}$ sağlanır.

- ii. Düzenli yerel ve yarı-yerel fonksiyon tanımları ile $DA(X, \tau) = YA(X, \tau)$ oluşu kullanılırsa

$$A^{*d} = \{x \in X : \forall U \in DA(X, x), A \cap U \notin I\} = \{x \in X : \forall U \in YA(X, x), A \cap U \notin I\} = A_*$$

bulunur.

- iii. $A \in I$ ve $A^{*d} \neq \emptyset$ olsun O halde en az bir $x \in X$ için $x \in A^{*d}$ olur. Düzenli yerel fonksiyon tanımı kullanılırsa her bir $U \in DA(X, x)$ için $A \cap U \notin I$ olur. Oysa X kümesi de x elemanını içeren bir düzenli açık küme olduğundan $A \cap X = A \notin I$ olur ki bu $A \in I$ oluşu ile çelişir. O halde $A^{*d} = \emptyset$ dir.
- iv. $\emptyset \in I$ olduğundan iii gereği $\emptyset^{*d} = \emptyset$ olur. ■

i özelliğinde bulunan kapsamın tersi genelde doğru değildir. Bu durumu açıklayan bir örnek aşağıda verilmiştir:

Örnek 4.2.2:

$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{c, d\}\}$ olmak üzere (X, τ) topolojik uzayı üzerinde $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ idealini düşünelim. Böylece (X, τ) topolojik uzayı üzerindeki tüm düzenli açıkların ailesi $DA(X, \tau) = \{\emptyset, X\}$ olduğundan X kümesinin her bir elemanı için o elemanı içeren tek düzenli açık küme X kümesi olacaktır. Buradan $A = \{a, b\}$ için $A^* = \{a, b\} = \overline{(A^*)}$ ve $A^{*d}(I) = X = dk(A^{*d})$ olur ki bu $A^{*d} \not\subseteq A^*$ olduğunu gösterir.

Sonuç 4.2.1

Bir $(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzayında $A \subseteq X$ için ne $A \subseteq A^{*d}$ ve ne de $A^{*d} \subseteq A$ genellemesi yapılamaz. Aşağıda bunun için uygun bir örnek yer almaktadır.

Örnek 4.2.3:

Örnek 4.2.1 de verilen topolojik uzay için $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ olarak alınsın. Topolojik uzay değişmediği için düzenli açık kümelerin sınıfı yine $DA(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c, d\}\}$ şeklindedir.

$$A = \{a\} \text{ olarak alınırsa, } A^{*d} = \emptyset \text{ olup } A^{*d} \subset A,$$

$$A = \{a, c\} \text{ için } A^{*d} = \{a, c, d\} \text{ bulunur yani } A \subset A^{*d},$$

$A = \{a, b\}$ kümesinin düzenli yerel fonksiyonu ise $A^{*d} = \{a, b\}$ şeklindedir ki burada da $A^{*d} = A$ eşitliği vardır.

Teorem 4.2.2

$(X, DA(X, \tau), I)$ uzayında $A, B \subseteq X$ olsun ve X üzerinde $I \subseteq J$ olacak şekildeki J idealini düşünelim. O zaman

- i. $A \subseteq B \Rightarrow A^{*d} \subseteq B^{*d}$,
- ii. $A^{*d}(J) \subseteq A^{*d}(I)$.

İspat:

- i. $x \in A^{*d}$ olsun. O zaman x elemanını içeren her $U \in DA(X, \tau)$ için $U \cap A \notin I$ olur. $U \cap A \subseteq U \cap B$ olduğundan ve I idealinin kalıtsal oluşundan $U \cap B \notin I$ bulunur. O halde $x \in B^{*d}$ dir.
- ii. $x \in A^{*d}(J)$ ise her $U \in DA(X, \tau)$ için $U \cap A \notin J$ olur. $I \subseteq J$ olduğundan $U \cap A \notin I$ ve böylece $x \in A^{*d}(I)$ çıkar. ■

Teorem 4.2.3

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzayını ve $A, B \subseteq X$ alt kümelerini düşünelim. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- i. $A^{*d} = \overline{(A^{*d})} \subseteq dk(A)$, A^{*d} kümesi (X, τ) topolojik uzayında kapalıdır.
- ii. $(A^{*d})^{*d} \subseteq A^{*d}$,
- iii. $(A \cap A^{*d})^{*d} \subseteq A^{*d}$
- iv. $A^{*d} \cup B^{*d} = (A \cup B)^{*d}$,
- v. $(A \cap B)^{*d} \subseteq A^{*d} \cap B^{*d}$,
- vi. $A^{*d} - B^{*d} = (A - B)^{*d} - B^{*d} \subseteq (A - B)^{*d}$,

İspat:

- i. Genel olarak kapanışın özelliğinden

$$A^{*d} \subseteq \overline{(A^{*d})} \quad (1)$$

olduğunu biliyoruz. $x \in \overline{(A^{*d})}$ olsun ve bir $U \in DA(X, \tau)$ verilsin. O zaman Teorem 1.2.5/i. den x elemanını içeren her $T \in \tau$ için $A^{*d} \cap T \neq \emptyset$ olur. U aynı zamanda açık olduğundan $A^{*d} \cap U \neq \emptyset$ ve böylece

$$\begin{aligned} \exists y \in X; y \in A^{*d} \cap U, U \in DA(X, \tau) &\Rightarrow y \in A^{*d} \Rightarrow A \cap U \notin I \Rightarrow x \in A^{*d} \\ &\Rightarrow \overline{(A^{*d})} \subseteq A^{*d} \end{aligned} \quad (2)$$

olur. (1) ve (2) den $A^{*d} = \overline{(A^{*d})}$ sağlanır. O halde A^{*d} kapalıdır.

Diğer taraftan $x \in A^{*d}$ ise o zaman

$$\text{her } U \in DA(X, x) \text{ için } A \cap U \notin I$$

dir. Buradan da $\emptyset \in I$ olduğundan her $U \in DA(X, x)$ için $A \cap U \neq \emptyset$ ve böylece $x \in dk(A)$ elde edilir. Yani $A^{*d} \subseteq dk(A)$ olur.

- ii. $x \in (A^{*d})^{*d}$ alalım. Buradan düzenli yerel fonksiyon tanımı gereği her $U \in DA(X, x)$ için

$$A^{*d} \cap U \notin I$$

ve böylece

$$A^{*d} \cap U \neq \emptyset$$

yazılır. Diyelim ki $y \in A^{*d} \cap U$ olsun. O zaman $U \in DA(X, y)$ ve $y \in A^{*d}$ olur. Buradan da $A \cap U \notin I$ bulunur yani $x \in A^{*d}$ sonucuna ulaşılır. O halde $(A^{*d})^{*d} \subseteq A^{*d}$ dir.

- iii. $x \in (A \cap A^{*d})^{*d}$ ve $U \in DA(X, x)$ olsun. Düzenli yerel fonksiyon tanımı gereği

$$U \cap (A \cap A^{*d}) \notin I \Rightarrow U \cap (A \cap A^{*d}) \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in X; y \in U \cap (A \cap A^{*d})$$

olur. $y \in U$ ve $y \in A \cap A^{*d}$ olduğundan

$$y \in A^{*d} \text{ ve } U \in DA(X, y) \Rightarrow y \in A^{*d} \Rightarrow A \cap U \notin I$$

olur ki bu

$$x \in A^{*d}$$

demektir. Yani $(A \cap A^{*d})^{*d} \subseteq A^{*d}$ dir.

- iv. Teorem 4.2.2/i özelliğinden

$$A^{*d} \cup B^{*d} \subseteq (A \cup B)^{*d} \quad (1)$$

olur. Ters kapsamı göstermek için $x \notin A^{*d} \cup B^{*d}$ alalım. O zaman x elemanı ne A^{*d} kümesine ne de B^{*d} kümesine aittir. O halde

$$A \cap U_x \in I \text{ ve } B \cap V_x \in I$$

olacak şekilde $U_x, V_x \in DA(X, x)$ kümeleri bulunabilir. I sonlu toplamsal olduğundan

$$(A \cap U_x) \cup (B \cap V_x) \in I$$

yazılır. Diğer taraftan $(A \cap U_x) \cup (B \cap V_x)$ için

$$\begin{aligned} (A \cap U_x) \cup (B \cap V_x) &= [(A \cap U_x) \cup V_x] \cap [(A \cap U_x) \cup B] \\ &= (U_x \cup V_x) \cap (A \cup V_x) \cap (B \cup U_x) \cap (A \cup B) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $A \cup V_x \supseteq V_x$, $B \cup U_x \supseteq U_x$ ve $U_x \cup V_x \supseteq U_x \cap V_x$ olduğundan

$$(U_x \cup V_x) \cap (A \cup V_x) \cap (B \cup U_x) \cap (A \cup B) \supseteq (U_x \cap V_x) \cap (A \cup B)$$

elde edilir. I nın kalıtsal oluşu ile $(U_x \cap V_x) \cap (A \cup B) \in I$ yazılabilir.

Düzenli açık kümelerin sonlu arakesit altında kapalı olma özelliğinden $U_x \cap V_x \in DA(X, x)$ ve böylece $x \notin (A \cup B)^{*d}$, buradan da,

$$(X - A^{*d}) \cap (X - B^{*d}) \subseteq X - (A \cup B)^{*d}$$

veya eşiti olarak

$$(A \cup B)^{*d} \subseteq A^{*d} \cup B^{*d} \quad (2)$$

yazılır. (1) ve (2) den istenen sonuca ulaşılır.

v. Teorem 4.2.2/i gereği

$$(A \cap B)^{*d} \subseteq A^{*d} \text{ ve } (A \cap B)^{*d} \subseteq B^{*d}$$

yazılır. Böylece $(A \cap B)^{*d} \subseteq A^{*d} \cap B^{*d}$ bulunur.

vi. Kümeler üzerindeki işlemler için bilinen genel bilgiler kullanılarak

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

yazılabilir. Düzenli yerel fonksiyonların özellikleri ile

$$A^{*d} = [(A - B) \cup (A \cap B)]^{*d} = (A - B)^{*d} \cup (A \cap B)^{*d} \subseteq (A - B)^{*d} \cup B^{*d}$$

$$\Rightarrow A^{*d} - B^{*d} \subseteq (A - B)^{*d} - B^{*d}$$

olur. Diğer taraftan $A - B \subseteq A$ olduğundan

$$(A - B)^{*d} \subseteq A^{*d} \Rightarrow (A - B)^{*d} - B^{*d} \subseteq A^{*d} - B^{*d}$$

elde edilir. O halde

$$A^{*d} - B^{*d} = (A - B)^{*d} - B^{*d}$$

sağlanır. ■

Teorem 4.2.4

$(X, DA(X, \tau), I)$ uzayında $A \subseteq X$ olmak üzere,

- i. $I_0 \in I \Rightarrow (A - I_0)^{*d} = A^{*d} = (A \cup I_0)^{*d}$,
- ii. $U \subseteq X \Rightarrow U \cap (U \cap A)^{*d} \subseteq U \cap A^{*d}$,
- iii. $A \subseteq X$ ve $U \in DA(X, \tau)$ için $U \cap A \in I \Rightarrow U \cap A^{*d} = \emptyset$

önergeleri sağlanır.

İspat:

- i. $I_0 \in I$ olduğundan Teorem 4.2.1/iii gereği $I_0^{*d} = \emptyset$ ve Teorem 4.2.3/vi özelliği kullanılarak $A^{*d} = (A - I_0)^{*d}$ elde edilir. Diğer taraftan Teorem 4.2.3/iv gereği

$$(A \cup I_0)^{*d} = A^{*d} \cup I_0^{*d} = A^{*d} \cup \emptyset = A^{*d}$$

olduğu açıktır.

- ii. Kümelerde kesişimin özelliğinden $U \cap A \subseteq A$ olduğundan ve Teorem 4.2.2/ i özelliğinden

$$(U \cap A)^{*d} \subseteq A^{*d}$$

olur. Buradan

$$U \cap (U \cap A)^{*d} \subseteq U \cap A^{*d}$$

elde edilir.

- iii. $U \cap A \in I$ olsun. Ayrıca $U \in DA(X, \tau)$ olduğundan her bir $x \in U$ için $x \notin A^{*d}$ sonucu çıkar. Dolayısıyla $U \cap A^{*d} = \emptyset$ olur. ■

Khan ve Noiri 2010' da yaptıkları bir çalışmada $(A \cup B)_* = A_* \cup B_*$ eşitliğinin sağlandığını göstermelerine karşın yarı yerel fonksiyonlar için yazılan eşitliğin doğru olmadığı aşağıda verilmiş olan örnek gösterilmiştir.

Örnek 4.2.4:

$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{d\}, \{a, c\}, \{a, c, d\}\}$ olmak üzere X uzayı üzerinde $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ idealini düşünelim. Bu durumda (X, τ) topolojik uzayı için yarı açık kümeler,

$$YA(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{d\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$$

şeklinde bulunur. $A = \{a\}$ ve $B = \{d\}$ olarak alındığında $A \cup B = \{a, d\}$ olacaktır. Buna göre

$$A_* = \{a, c\}, B_* = \{d\} \text{ ve } (A \cup B)_* = X$$

olur. Ancak açıkça görüldüğü gibi $A_* \cup B_* = \{a, c, d\}$ olur ki bu da $A_* \cup B_* \neq (A \cup B)_*$ olduğunu gösterir.

4.2.1 k_I^{*d} Operatörü ve τ^{*d} Topolojisi

Bu kesimde $(X, DA(X, \tau), I)$ uzayı üzerinde tanımlı düzenli yerel fonksiyonlar yardımıyla elde edilen $k_I^{*d}: 2^X \rightarrow 2^X$ kapanış operatörü verilmiş ve bu operatörün gerçekten Kuratowski kapanış operatörü olma koşullarını sağladığı gösterilmiştir. Sonrasında ise k_I^{*d} ile üretilen τ^{*d} topolojisinden bahsedilerek $\tau \subseteq \tau^{*d}$ olduğu verilmiştir.

$(X, DA(X, \tau), I)$ uzayı üzerinde $k_I^{*d}(A) = A \cup A^{*d}$ ile tanımlı $k_I^{*d}: 2^X \rightarrow 2^X$ küme fonksiyonu Kuratowski kapanış operatörü koşullarını sağlar:

- i. $k_I^{*d}(\emptyset) = \emptyset \cup (\emptyset)^{*d} = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$,
- ii. $A \subseteq A \cup A^{*d}$ olduğundan $A \subseteq k_I^{*d}(A)$
- iii. $k_I^{*d}(A \cup B) = (A \cup B) \cup (A \cup B)^{*d} = (A \cup B) \cup A^{*d} \cup B^{*d}$
 $= [A \cup A^{*d}] \cup [B \cup B^{*d}] = k_I^{*d}(A) \cup k_I^{*d}(B)$,
- iv. k_I^{*d} operatörünün tanımından,

$$k_I^{*d}(k_I^{*d}(A)) = k_I^{*d}(A \cup A^{*d}) = k_I^{*d}(A) \cup k_I^{*d}(A^{*d}) = [A \cup A^{*d}] \cup [A^{*d} \cup (A^{*d})^{*d}]$$

olur. Ayrıca $(A^{*d})^{*d} \subseteq A^{*d}$ olduğundan

$$A^{*d} \cup (A^{*d})^{*d} = A^{*d}$$

elde edilir. Böylece

$$k_I^{*d}(k_I^{*d}(A)) = A \cup A^{*d} = k_I^{*d}(A)$$

bulunur.

O halde $k_I^{*d}: 2^X \rightarrow 2^X$ küme fonksiyonu gerçekten bir Kuratowski kapanış operatörüdür.

$(X, DA(X, \tau), I)$ uzayı üzerinde tanımlanan k_I^{*d} kapanış operatörü

$$\tau^{*d}(I) = \{A \in 2^X: k_I^{*d}(X - A) = X - A\}$$

şeklinde bir topoloji üretir.

k_I^{*d} Kuratowski kapanış operatörü olduğundan $\tau^{*d}(I)$ gerçekten bir topoloji olur. $\tau^{*d}(I)$ yerine kısaca τ^{*d} yazılmıştır.

Şimdi bu bölümde elde edilen sonuçlardan yararlanılarak τ^{*d} topolojisi ile τ topolojisi arasındaki ilişkiye değinilmiştir.

$A \in 2^X$ kümesi için $A \in \tau$ olsun. O halde

$$A \in \tau \Rightarrow A \in DA(X, \tau) \Rightarrow X - A \in DK(X, \tau) \Rightarrow X - A = dk(X - A)$$

olur. $X - A \subseteq k_I^{*d}(X - A)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $A^{*d} \subseteq dk(A)$ olduğundan

$$k_I^{*d}(X - A) = (X - A) \cup (X - A)^{*d} \subseteq (X - A) \cup dk(X - A) = X - A$$

elde edilir. Yani

$$k_I^{*d}(X - A) = X - A$$

sağlanır. O halde $A \in \tau^{*d}$ dir. Buradan $\tau \subseteq \tau^{*d}$ bulunur. Yani τ^{*d} topolojisi τ topolojisinden daha incedir.

4.3 ψ_d -Operatörü

Topolojik uzaylarda $\bar{A} = X - (X - A)^o$ eşitliğinin varlığı bilinmektedir (Kuratowski 1966). Birçok kullanışlı sonuç da bu eşitlik kullanılarak ispatlanmıştır. Bu bağıntı ψ_d operatörünü tanımlamak için bize ilham kaynağı olmuştur.

Tanım 4.3.1

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzay olsun. Her $A \subseteq X$ için

$$\psi_d(A) = \{x \in X: \exists U_x \in DA(X, x): U_x - A \in I\}$$

şeklinde tanımlanan $\psi_d: 2^X \rightarrow \tau$ fonksiyonuna **ψ_d operatörü** denir.

Ayrıca $\psi_d(A) = X - (X - A)^{*d}$ olduğunu görmek zor değildir. Bunun için önce $(X - A)^{*d}$ kümesini bulalım.

$$\begin{aligned} (X - A)^{*d} &= \{x \in X: \forall U_x \in DA(X, x), U_x \cap (X - A) \notin I\} \\ &= \{x \in X: \forall U_x \in DA(X, x), U_x \cap A^c \notin I\} \\ &= \{x \in X: \forall U_x \in DA(X, x), U_x - A \notin I\} \end{aligned}$$

Buradan

$$X - (X - A)^{*d} = \{x \in X: \exists U_x \in DA(X, x): U_x - A \in I\} = \psi_d(A)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 4.3.1

$(X, DA(X, \tau), I)$ bir düzenli ideal uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda,

- i. $\psi_d(A) \supseteq di\check{c}(A)$,
- ii. $\psi_d(A) \in \tau$,
- iii. $A \subseteq B \Rightarrow \psi_d(A) \subseteq \psi_d(B)$,
- iv. $\psi_d(A) \cup \psi_d(B) \subseteq \psi_d(A \cup B)$,
- v. $\psi_d(A \cap B) = \psi_d(A) \cap \psi_d(B)$,
- vi. $\psi_d(A) \subseteq \psi(A)$.

İspat:

- i. Teorem 4.2.3/i özelliğinden

$$\psi_d(A) = X - (X - A)^{*d} \supseteq X - dk(X - A)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$di\check{c}(A) = X - dk(X - A)$$

olduğundan $\psi_d(A) \supseteq di\check{c}(A)$ elde edilir.

- ii. Her $A \subseteq X$ için A^{*d} kapalı olduğundan $(X - A)^{*d}$ kümesi de kapalıdır. O halde

$$X - (X - A)^{*d} = \psi_d(A)$$

kümesi (X, τ) topolojik uzayı üzerinde açık olur.

- iii. $A \subseteq B \Rightarrow X - A \supseteq X - B \Rightarrow (X - A)^{*d} \supseteq (X - B)^{*d}$

$$\Rightarrow X - (X - A)^{*d} \subseteq X - (X - B)^{*d}$$

$$\Rightarrow \psi_d(A) \subseteq \psi_d(B)$$

- iv. $A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$ olduğundan iii özelliğinden

$$\psi_d(A) \subseteq \psi_d(A \cup B), \psi_d(B) \subseteq \psi_d(A \cup B)$$

olur. Buradan da

$$\psi_d(A) \cup \psi_d(B) \subseteq \psi_d(A \cup B)$$

elde edilir.

- v. $\psi_d(A \cap B) = X - [X - (A \cap B)]^{*d}$

$$= X - [(X - A) \cup (X - B)]^{*d}$$

$$= X - [(X - A)^{*d} \cup (X - B)^{*d}]$$

$$= [X - (X - A)^{*d}] \cap [X - (X - B)^{*d}]$$

$$= \psi_d(A) \cap \psi_d(B)$$

vi. Teorem 4.2.1/i kullanılarak;

$$\begin{aligned}(X - A)^* &\subseteq (X - A)^{*d} \Rightarrow X - (X - A)^{*d} \subseteq X - (X - A)^* \\ &\Rightarrow \psi_d(A) \subseteq \psi(A)\end{aligned}$$

bulunur. ■

Teorem 4.3.2

$(X, DA(X, \tau), I)$ uzayı ve $A, B \subseteq X$ alt kümeleri için aşağıdaki önermeler doğrudur.

- i. $\psi_d(A) = \psi_d(\psi_d(A)) \Leftrightarrow (X - A)^{*d} = [(X - A)^{*d}]^{*d},$
- ii. $A \in DA(X, \tau) \Rightarrow A \subseteq \psi_d(A),$
- iii. $I_0 \in I \Rightarrow \psi_d(A - I_0) = \psi_d(A),$
- iv. $I_0 \in I \Rightarrow \psi_d(A \cup I_0) = \psi_d(A),$
- v. $(A - B) \cup (B - A) \in I \Rightarrow \psi_d(A) = \psi_d(B).$

İspat:

- i. İspat için $\psi_d(A)$ tanımını kullanmak yeterli olacaktır. Gerçekten;

$$\psi_d(\psi_d(A)) = X - [X - (X - (X - A)^{*d})]^{*d} = X - [(X - A)^{*d}]^{*d}$$

elde edilir ki bu da ispat için yeterlidir.

- ii. $A \in DA(X, \tau)$ için $(X - A) \in DK(X, \tau)$ ve böylece

$$(X - A) = dk(X - A)$$

bulunur. Teorem 4.2.3/i özelliğinden,

$$\begin{aligned}(X - A)^{*d} &\subseteq dk(X - A) = (X - A) \Rightarrow (X - A)^{*d} \subseteq (X - A) \\ &\Rightarrow A \subseteq X - (X - A)^{*d} \\ &\Rightarrow A \subseteq \psi_d(A)\end{aligned}$$

elde edilir.

- iii. Teorem 4.2.4/i özelliği ile,

$$\begin{aligned}\psi_d(A - I_0) &= X - [X - (A - I_0)]^{*d} \\ &= X - [(X - A) \cup I_0]^{*d} \\ &= X - (X - A)^{*d} \\ &= \psi_d(A)\end{aligned}$$

bulunur.

iv. Yine Teorem 4.2.4/i kullanılarak aşağıdaki gibi ispat edilir.

$$\begin{aligned}\psi_d(A \cup I_0) &= X - [X - (A \cup I_0)]^{*d} \\ &= X - [(X - A) - I_0]^{*d} \\ &= X - (X - A)^{*d} \\ &= \psi_d(A)\end{aligned}$$

v. Diyelim ki $(A - B) \cup (B - A) \in I$ olsun. Ayrıca $A - B = I_1$ ve $B - A = I_2$ olarak alınsın. İdealin kalıtsal özelliğinden $I_1, I_2 \in I$ olur. Küme işlemlerinden

$$B = (A - I_1) \cup I_2$$

olduğunu görmek kolaydır. Böylece iii ve iv kullanılarak,

$$\psi_d(A) = \psi_d(A - I_1) = \psi_d((A - I_1) \cup I_2) = \psi_d(B)$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki örnek, Teorem 4.3.2/ii koşulunun tersinin doğru olmadığını yani $A \subseteq \psi_d(A)$ koşulunu sağlayan ancak düzenli açık olmayan bir $A \subseteq X$ kümesinin varlığını gösterir.

Örnek 4.3.1

$X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$ ve $I = \{\emptyset, \{d\}\}$ olsun. $A = \{c\}$ düzenli açık bir küme değildir ancak $\psi_d(A) = \{c, d\} \supseteq A$ sağlanır.

Teorem 4.3.3

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzay olmak üzere $A \subseteq X$ için aşağıdakiler sağlanır.

- i. $\psi_d(A) = \bigcup \{U \in DA(X, \tau) : U - A \in I\},$
- ii. $\psi_d(A) \supseteq \bigcup \{U \in DA(X, \tau) : (U - A) \cup (A - U) \in I\}$

İspat:

- i. $\psi_d(A)$ operatörünün tanımından kolayca çıkar.
- ii. I kalıtsal olduğundan

$$\bigcup \{U \in DA(X, \tau) : (U - A) \cup (A - U) \in I\} \subseteq \bigcup \{U \in DA(X, \tau) : U - A \in I\} = \psi_d(A)$$

olur. ■

4.4 DA-Eşyoğun İdeal

İdeal topolojik uzaylara eşyoğun ideal kavramı eklendiğinde (Jankowic and Hamlett 1990) idealler üzerindeki çalışmalar yeni bir boyut kazanmıştır. Bu bölümde düzenli açık kümeler ile oluşturulan ideal uzaylar için benzer bir kavram verilmiştir. Öncelikle DA -eşyoğun ifadesinin tanımı ve sonrasında da ilgili teoremler yer alacaktır.

Tanım 4.4.1

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzayı ve $A \subseteq X$ için eğer $DA(X, \tau) \cap I = \{\emptyset\}$ oluyorsa I ideale ***DA-eşyoğun ideal*** denir.

Teorem 4.4.1

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzay olsun. Eğer $I, DA(X, \tau)$ ile bir DA -eşyoğun ideal ise o zaman $X = X^{*d}$ olur.

İspat:

$X^{*d} \subseteq X$ olduğu açıktır. Bir $x \in X$ için $x \notin X^{*d}$ olsun. O zaman $U_x \cap X \in I$ olacak şekilde en az bir $U_x \in DA(X, \tau)$ vardır. Yani

$$U_x \cap X = U_x \in I$$

olur ki bu da $DA(X, \tau) \cap I = \{\emptyset\}$ kabulü ile çelişir. O halde $X = X^{*d}$ sağlanır. ■

Teorem 4.4.2

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzayı için aşağıdakiler denktir:

- i. $DA(X, \tau) \cap I = \{\emptyset\}$,
- ii. $\psi_d(\emptyset) = \emptyset$,
- iii. Eğer $I_0 \in I$ ise o zaman $\psi_d(I_0) = \emptyset$,

İspat:

i $\Rightarrow$ ii : $DA(X, \tau) \cap I = \{\emptyset\}$ olsun. ψ_d operatörünün tanımından ve Teorem 4.4.1 den

$$\psi_d(\emptyset) = X - (X - \emptyset)^{*d} = X - X^{*d} = \emptyset$$

elde edilir.

ii $\Rightarrow$ iii : $I_0 \in I$ ve $\psi_d(\emptyset) = \emptyset$ olsun. Ayrıca Teorem 4.2.4/i gereği

$$(X - I_0)^{*d} = X^{*d}$$

olur. Buradan

$$\psi_d(I_0) = X - (X - I_0)^{*d} = X - X^{*d} = \psi_d(\emptyset) = \emptyset$$

bulunur.

iii $\Rightarrow$ i : $A \in DA(X, \tau) \cap I$ olsun. O zaman $A \in I$ ve iii den $\psi_d(A) = \emptyset$ bulunur. Aynı zamanda $A \in DA(X, \tau)$ ve $A \subseteq \psi_d(A)$ olduğundan $A \subseteq \psi_d(A) = \emptyset$ ve böylece $A = \emptyset$ dolayısıyla $DA(X, \tau) \cap I = \{\emptyset\}$ olur. ■

Teorem 4.4.3

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzayı için eğer I , $DA(X, \tau)$ ile bir DA -eşyoğun ideal ise her $A \subseteq X$ için $\psi_d(A) \subseteq A^{*d}$ olur.

İspat:

Bir $x \in X$ için $x \in \psi_d(A)$ ancak $x \notin A^{*d}$ olsun. O zaman

$$x \notin A^{*d} \Rightarrow \exists T_x \in DA(X, x): T_x \cap A \in I$$

olur. $x \in \psi_d(A)$ olduğundan Teorem 4.3.3/i gereği

$$x \in \bigcup \{U \in DA(X, \tau): U - A \in I\}$$

elde edilir ve buradan $x \in V$ ve $V - A \in I$ da olacak şekilde $V \in DA(X, \tau)$ vardır sonucuna ulaşılır. $T_x \cap V$, x i bulunduran bir düzenli açık küme olacağından ve I nın kalıtsallığından

$$(T_x \cap V) \cap A \in I \text{ ve } (T_x \cap V) - A \in I$$

bulunur. I nın sonlu toplamsal oluşundan

$$T_x \cap V = [(T_x \cap V) \cap A] \cup [(T_x \cap V) - A] \in I$$

olur. $T_x \cap V$ boştan farklı düzenli açık bir küme olduğundan

$$I \cap DA(X, \tau) \neq \{\emptyset\}$$

bulunur ki bu da I nın DA -eşyoğun oluşu ile çelişir. O halde $x \in A^{*d}$ olur. ■

Sonuç 4.4.1

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer I bir DA -eşyoğun ideal ise o zaman $\psi_d(A) \subseteq dk(A)$ olur.

İspat:

Teorem 4.4.3 den $\psi_d(A) \subseteq A^{*d}$ ve ayrıca Teorem 4.2.3/i den istenen çıkar. ■

4.5 Düzenli Uyumlu İdeal

Bu bölümde idealin özel bir durumu ve özellikleri verilmiştir. İdealin bu özel hali aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 4.5.1

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzay olsun. Eğer her $A \subseteq X$ altkümesi için,

“Her bir $x \in A$ için $U \cap A \in I$ olacak şekilde bir $U \in DA(X, x)$ varsa $A \in I$ olur”

koşulu sağlanıyorsa **$DA(X, \tau)$, I ideali ile düzenli uyumludur** denir. Bu durumu anlatmak için $DA(X, \tau) \sim_d I$ gösterimi kullanılmıştır.

Teorem 4.5.1

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzayında $DA(X, \tau) \sim_d I$ olması için gerek ve yeterli koşul her $A \subseteq X$ için $\psi_d(A) - A \in I$ olmasıdır.

İspat:

$DA(X, \tau) \sim_d I$ ve $A \subseteq X$ için $x \in \psi_d(A) - A$ olsun. O halde

$$x \in \psi_d(A), x \notin A \Rightarrow x \in X - (X - A)^{*d}, x \notin A \Rightarrow x \notin (X - A)^{*d}, x \notin A$$

$$\Rightarrow \exists U \in DA(X, x); U \cap (X - A) \in I, x \notin A$$

$$\xrightarrow{DA(X, \tau) \sim_d I} X - A \in I, x \in X - A$$

olur ki bu da I nın kalıtsallığından $\psi_d(A) - A \subseteq X - A \in I$ olduğunu verir.

Tersine her $A \subseteq X$ için $\psi_d(A) - A \in I$ olsun. Her $x \in A$ için $U \cap A \in I$ olacak şekilde en az bir $U \in DA(X, x)$ var olsun. O halde

$$x \notin A^{*d} \Rightarrow x \in X - A^{*d} \Rightarrow A \subseteq X - A^{*d}$$

olur. O zaman

$$\psi_d(X - A) - (X - A) = \left[X - (X - (X - A))^{*d} \right] - (X - A) = (X - A^{*d}) \cap A$$

eşitliği ve $A \subseteq X - A^{*d}$ gerçeği ile $\psi_d(X - A) - (X - A) = A$ olur. Her $A \subseteq X$ için $\psi_d(A) - A \in I$ sağlandığından $\psi_d(X - A) - (X - A) = A \in I$ bulunur. ■

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5.1

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzay ve $DA(X, \tau) \sim_d I$ olsun. O zaman her $A \subseteq X$ için $\psi_d(\psi_d(A)) = \psi_d(A)$ olur.

İspat:

$\psi_d(A) \subseteq \psi_d(\psi_d(A))$ olduğu biliniyor. Teorem 4.5.1 kullanılırsa $I_0 \in I$ için

$$\psi_d(A) \subseteq A \cup I_0$$

olur ve böylece

$$\psi_d(\psi_d(A)) \subseteq \psi_d(A \cup I_0) = \psi_d(A) \Rightarrow \psi_d(\psi_d(A)) \subseteq \psi_d(A)$$

elde edilir. Buradan

$$\psi_d(\psi_d(A)) = \psi_d(A)$$

bulunur. ■

Tanım 4.5.2

$A, B \subseteq X$ ve I, X de bir ideal olmak üzere eğer $(A - B) \cup (B - A) \in I$ olursa **A ve $B \bmod I$ denktir** denir. A ve B nin mod I denkliği sembolik olarak

$$(A - B) \cup (B - A) \in I \Leftrightarrow A = B(\bmod I)$$

ile gösterilir (Newcomb 1967).

Bu çalışmada ise Teorem 4.3.2/v göz önüne alınarak aşağıdaki ifade verilebilir:

$$“A = B(\bmod I) \Rightarrow \psi_d(A) = \psi_d(B)”$$

Şimdi $(X, DA(X, \tau), I)$ uzayında Baire küme tanımını verelim.

Tanım 4.5.3

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer $A = U(\bmod I)$ olacak şekilde $U \in DA(X, \tau)$ varsa **A ya $DA(X, \tau)$ ve I ile ilgili Baire küme** denir ve bu durum $A \in \mathfrak{B}_d(X, DA(X, \tau), I)$ ile gösterilir.

Teorem 4.5.2

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzay ve $DA(X, \tau) \sim_d I$ olsun. Bu durumda eğer $U, V \in DA(X, \tau)$ ve $\psi_d(U) = \psi_d(V)$ ise o zaman $U = V(\text{mod } I)$ olur.

İspat:

$U \in DA(X, \tau)$ olduğundan $U \subseteq \psi_d(U)$ ve böylece Teorem 4.5.1 gereği

$$U - V \subseteq \psi_d(U) - V = \psi_d(V) - V \in I$$

olur. Benzer şekilde,

$$V - U \subseteq \psi_d(V) - U = \psi_d(U) - U \in I$$

bulunur. Buradan

$$U - V \in I \text{ ve } V - U \in I$$

olur. I nin toplamsallık özelliğinden

$$(U - V) \cup (V - U) \in I$$

elde edilir. Böylece $U = V(\text{mod } I)$ sağlanır. ■

Bir (X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $A, B, C \subseteq X$ için $A = B(\text{mod } I)$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır, gerçekten

- i. $(A - A) \cup (A - A) = \emptyset \in I \Rightarrow A = A(\text{mod } I)$
- ii. $(A - B) \cup (B - A) \in I \Rightarrow (B - A) \cup (A - B) \in I \Rightarrow B = A(\text{mod } I)$
- iii. $(A - B) \cup (B - A) \in I$ ve $(B - C) \cup (C - B) \in I$ olsun. O halde I nin toplamsallık özelliğinden

$$(A - B) \cup (B - A) \cup (B - C) \cup (C - B) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C) \in I$$

bulunur. Ayrıca

$$(A - C) \cup (C - A) \subseteq (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$$

ve I kalıtsal özelliğe sahip olduğundan,

$$(A - C) \cup (C - A) \in I \Rightarrow A = C(\text{mod } I)$$

olur. ■

Teorem 4.5.3

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzay ve $DA(X, \tau) \sim_d I$ olsun. Bu durumda eğer $A, B \in \mathfrak{B}_d(X, DA(X, \tau), I)$ ve $\psi_d(A) = \psi_d(B)$ ise o zaman $A = B(\text{mod } I)$ olur.

İspat:

$A, B \in \mathfrak{B}_d(X, DA(X, \tau), I)$ olduğundan $A = U(\text{mod } I)$ ve $B = V(\text{mod } I)$ olacak şekilde $U, V \in DA(X, \tau)$ vardır. $(\text{mod } I)$ tanımı ve Teorem 4.3.2/v özelliğinden,

$$A = U(\text{mod } I) \Rightarrow \psi_d(A) = \psi_d(U),$$

$$B = V(\text{mod } I) \Rightarrow \psi_d(B) = \psi_d(V)$$

yazılır. Ayrıca $\psi_d(A) = \psi_d(B)$ olduğundan $\psi_d(U) = \psi_d(V)$ ve böylece Teorem 4.5.2 den $U = V(\text{mod } I)$ olur. $(\text{mod } I)$ bir denklik bağıntısı olduğundan geçişme özelliği ile $A = B(\text{mod } I)$ bulunur. ■

Teorem 4.5.4

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzay olsun.

- i. Eğer $B \in \mathfrak{B}_d(X, DA(X, \tau), I) - I$ ise o zaman $B = A(\text{mod } I)$ olacak şekilde $A \in DA(X, \tau) - \{\emptyset\}$ vardır.
- ii. $DA(X, \tau) \cap I = \{\emptyset\}$ olmak üzere $B \in \mathfrak{B}_d(X, DA(X, \tau), I) - I$ olması için gerek ve yeter koşul $B = A(\text{mod } I)$ olacak şekilde $A \in DA(X, \tau) - \{\emptyset\}$ ögesinin var olmasıdır.

İspat:

- i. $B \in \mathfrak{B}_d(X, DA(X, \tau), I) - I$ olsun. O zaman $B \in \mathfrak{B}_d(X, DA(X, \tau), I)$ olur. İddianın aksine $B = A(\text{mod } I)$ olacak şekilde hiçbir $A \in DA(X, \tau) - \{\emptyset\}$ bulunmasın. Bu durumda

$$B = \emptyset(\text{mod } I) \Rightarrow B \in I$$

olur ki bu kabul ile çelişir.

- ii. $\Leftarrow$: $B = A(\text{mod } I)$ olacak şekilde $A \in DA(X, \tau) - \{\emptyset\}$ olsun. Tanım 4.5.2 den $B \in \mathfrak{B}_d(X, DA(X, \tau), I)$ olur. Ayrıca

$$I_1 = A - B \in I \text{ ve } I_2 = B - A$$

olarak alınırsa

$$A = (B - I_2) \cup I_1$$

yazılabilir. Eğer $B \in I$ olursa idealin kalıtsal ve toplamsal oluşundan $A \in I$ olur.

Oysa kabulden

$$A \in DA(X, \tau) - \{\emptyset\}$$

dir. Bu ise $DA(X, \tau) \cap I = \{\emptyset\}$ oluşu ile çelişir.

İspatın diğer tarafı için i özelliğine bakmak yeterli olacaktır. ■

4.6 $\psi_d - C$ Kümeler

Modak ve Bandyopadhyay tarafından ideal topolojik uzaylarda ψ operatörü yardımı ile genelleştirilmiş küme tanımı verilmiştir. Bu kesimde $(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzay üzerinde ψ_d operatörü yardımı ile $\psi_d - C$ küme oluşturularak bu kümenin özellikleri üzerinde durulmuştur.

Tanım 4.6.1

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzay olsun. $A \subseteq X$ için eğer $A \subseteq dk(\psi_d(A))$ oluyorsa A ya **$\psi_d - C$ küme** denir. Tüm $\psi_d - C$ kümelerin sınıfı $\psi_d(X, DA)$ ile gösterilmiştir.

Teorem 4.6.1

$(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzay olsun. Eğer $A \in DA(X, \tau)$ ise o zaman $A \in \psi_d(X, DA)$ olur. Yani $DA(X, \tau) \subseteq \psi_d(X, DA)$ dir.

İspat:

$A \in DA(X, \tau)$ olduğundan Teorem 4.3.2/ii den $A \subseteq \psi_d(A)$ yazılabilir. Buradan

$$A \subseteq \psi_d(A) \subseteq dk(\psi_d(A)) \Rightarrow A \in \psi_d(X, DA)$$

bulunur. ■

Yukarıdaki teoremin tersi her zaman doğru değildir, bunu doğrulamak için aşağıdaki örneğe yer verilmiştir.

Örnek 4.6.1:

$X = \{a, b, c, d\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}\}$ olmak üzere (X, τ) topolojik uzayı üzerinde $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ idealini düşünelim. (X, τ) topolojik uzayı üzerindeki tüm düzenli açıkların ailesi $DA(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, d\}\}$ düzenli kapalıların ailesi ise $DK(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c, d\}\}$ olacaktır. Bununla birlikte $\psi_d - C$ kümelerin sınıfı

$$\psi_d(X, DA) = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$$

bulunur. $\{b, c\}$ bir $\psi_d - C$ küme olmasına karşın düzenli açık değildir.

Teorem 4.6.2

$\{A_i: i \in I\}$, $(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzayda tanımlı boştan farklı $\psi_d - C$ kümelerin bir sınıfı olsun. Bu durumda $\bigcup_{i \in I} A_i \in \psi_d(X, DA)$ olur.

İspat:

Her bir $i \in I$ için $A_i \subseteq dk(\psi_d(A_i)) \subseteq dk(\psi_d(\bigcup_{i \in I} A_i))$ olur. Buradan

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq dk\left(\psi_d\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\right) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \psi_d(X, DA)$$

elde edilir. ■

Aşağıdaki örnek, $(X, DA(X, \tau), I)$ uzayında iki $\psi_d - C$ kümenin arakesitinin $\psi_d - C$ küme olmayabileceğine dair bir örnektir.

Örnek4.6.2:

$X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}\}$ ve $I = \{\emptyset, \{d\}\}$ olsun.

A	A^o	$\bar{A}$	$(\bar{A})^o$	A^{*d}	$\psi_d(A)$	$dk(\psi_d(A))$	$k^{*d}(A)$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
X	X	X	X	X	X	X	X
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
$\{c\}$	$\emptyset$	$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{a, c, d\}$
$\{d\}$	$\emptyset$	$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{d\}$
$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
$\{a, c\}$	$\emptyset$	$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{a, c, d\}$
$\{a, d\}$	$\emptyset$	$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a, d\}$
$\{b, c\}$	$\{b\}$	X	X	X	$\{b, c, d\}$	X	X
$\{b, d\}$	$\{b\}$	X	X	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, d\}$
$\{c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{a, c, d\}$
$\{a, b, c\}$	$\{b\}$	X	X	X	X	X	X
$\{a, b, d\}$	$\{b\}$	X	X	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b, d\}$
$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{a, c, d\}$
$\{b, c, d\}$	$\{b, c, d\}$	X	X	X	$\{b, c, d\}$	X	X

(X, τ) uzayı için düzenli açık kümeler $DA(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c, d\}\}$ ve düzenli kapalı kümeler $DK(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$ şeklinde bulunur.

Yukarıdaki tablo $(X, DA(X, \tau), I)$ ideal uzayının bir takım özel küme sınıflarını göstermektedir. Tablo göz önüne alındığında tüm $\psi_a - \mathcal{C}$ kümelerinin sınıfı,

$$\psi_a(X, DA) = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

olarak bulunur. Buradan kolaylıkla görülebilir ki $A = \{a, b\}$ ve $B = \{a, c\}$ olarak alınırsa,

$$A, B \in \psi_a(X, DA), A \cap B = \{a\} \notin \psi_a(X, DA)$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\tau^{*d} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$$

olup $\tau \subseteq \tau^{*d}$ olduğu görülür.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu doktora tezi temelde, $(X, DA(X, \tau), I)$ düzenli ideal uzay üzerinde bir yerel fonksiyon olan $(\)^d$ düzenli yerel fonksiyonlar ve düzenli yerel fonksiyonlar yardımı ile elde edilen bir operatör olan ψ_d –operatörünü kapsayan bir çalışmadır.

Literatürde (Jankovic ve Hamlett 1990) ideal topolojik uzaylar için yerel fonksiyonlardan yararlanılarak $k^*(A) = A \cup A^*$ Kuratowski kapanış operatörü elde edilebilmiştir. Ayrıca ideal topolojik uzaylarda Omari ve Noiri tarafından elde edilen yerel kapanış fonksiyonları (Omari ve Noiri 2013) kullanılarak da yeni bir Kuratowski kapanış operatörü elde edilebilir, çünkü her iki yerel fonksiyon da araştırma bulguları bölümünde yer alan Teorem 4.2.3/iv özelliğini sağlar.

Ancak (Vadivel ve Navuluri 2013), (Khan ve Noiri 2010) ile (Mistry ve Modak 2012) tarafından yapılan çalışmalarda yer alan yerel fonksiyonlar ilgili teoremi sağlamamakta ve dolayısıyla yeni bir Kuratowski kapanış operatörü elde edilememektedir. Bu durum (Vadivel ve Navuluri 2013) ve (Mistry ve Modak 2012) tarafından yayınlanan makalelerde açıkça ifade edilmesine karşın, (X, τ, I) ideal topolojik uzayı üzerinde tanımlı A_* yarı yerel fonksiyonu için (Khan ve Noiri 2010 da) $(A \cup B)_* = A_* \cup B_*$ eşitliğinin sağlandığı ifade edilmiştir. Fakat yarı yerel fonksiyonlar için yazılan eşitliğin doğru olmadığı araştırma bulguları bölümünde verilmiş olan örnekle gösterilmiştir. Dolayısıyla birleşim işlemi için eşitliği sağlayan fonksiyonlar, “yerel fonksiyonlar” (Kuratowski 1966), “yerel kapanış fonksiyonları” (Omari ve Noiri 2013) ve bu tez çalışmasında yer alan “düzenli yerel fonksiyonlar” olarak verilebilir.

Bu tezde elde edilen sonuçlar, ileriki çalışmalarımıza ışık tutması bakımından da önemlidir. Tezde yer verdiğimiz çıkarımların Grill topolojik uzaylar içindeki davranışı bizim için bir merak konusudur. Ayrıca ideal topolojik uzaylar için, farklı bir yaklaşımla elde edilebilecek kapalı kümelerin varlığı da gözlemlenmiştir.

6. KAYNAKLAR

Kitap

Bizim, O. 2013. Genel Topology, Dora Basım-Yayın Dağıtım Ltd. Şti., Bursa.

Dugundji, J. 1966. Topology, Allynand Bacon, Boston,.

Kuratowski, K. 1966. Topology, Academic Press, NewYork 1.

Stone, M.H. 1937, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, TAMS 41, 375-381.

Vaidyanathaswamy, R. 1945. The localization theory in set topology, Proc. Indian Acad.Sci 20, 51-61.

Vaidyanathaswamy, R. 1960. Set topology, Chelsea Publishing Company, New York.

Dergi

Açıkgöz A. ,Noiri T. , Yüksel Ş. 2004. A decomposition of continuity in ideal topological spaces, Acta. Math.Hungar. , Vol. 105(4) ,285-289.

Hamlett T.R. and Jankovic D. 1990. Ideals in topological spaces and the set operator, Bull. U.M.I., 7, no. 4-B, 863-874.

Hayashi, E. 1964. Topologies defined by local properties, Math. Ann., 156, 205-215. Long P.E. and Herrington L.L. 1981, J. Korean Math.Soc. Vol 18, No. 1.

Jankovic D. and Hamlett T.R. 1990.New topologies from old via ideals, Amer. Math. Monthly 97, 295 310.

Khan M. and Noiri T. 2010. Semi local functions in ideal topological spaces, Journal of Advenced Research in Pure Mathematics (2010), 36-42.

Levine N. 1963. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Am. Math. Mon.70(1963), 36-41.

Mistry, S. and Modak, S. 2012. $(\)^{*p}$ and ψ_p Operator, International Math-ematical Forum 7, no.2, 89-96.

Modak, S. and Bandyopadhyay, C. 2007. A note on ψ - operator, Bull. Malyas. Math. Sci. Soc. 30, no. (2), 43-48.

Newcomb R.L. 1967. Topologies which are compact modulo an ideal, Ph.D. Dissertation, Univ. of Cal. at Santa Barbara.

Noiri, T. 1980. On δ -Continuous functions, Jour. of the Korean Math. Soc., 16, No. 2 pp. 161-166.

Omari, A. and Noiri, T. 2013. Local closure functions in ideal topological spaces, Novi Sad J. Math. 43, (), 139-149.

Paul, N. R. 2013. RgI-closed sets in ideal topological spaces, International Journal of Computer Applications 69(), no.4.

Samuels, P. 1975. A topology for med from a given topology and ideal, J. London Math. Hungar. Soc.(2),Vol. 10, 409-416.

Velicko, N.V. ,1968, H-closed topological spaces, Amer. Math. Soc. Transl.,Vol. 78, 103-118.

Vadivel, A. and Navuluri, M. 2013. Regular semi local functions in ideal topological spaces, Journal of Advanced Research in Scientific Computing 5, 1-6.

Vadivel, A. and Vairamanickam, K. 2009. Rg-Closed Sets and rg-Open Sets in Topological Spaces, Int. Journal of Math. Analysis 3, 1803 - 1819.

İnternet Belgesi

Karaca, İ. 2013, Topoloji Ders Notları <http://fen.ege.edu.tr/~ismetkaraca/topoloji.pdf>

SÖZLÜK

TÜRKÇE-İNGİLİZCE

A

Açık	■ Open
Adi topoloji	■ Ordinary (usual) topology
Aile (sınıf)	■ Class
Alt aile	■ Subclass
Alt küme	■ Subset
Alt uzay	■ Subspace
Alt uzay topolojisi	■ Relative topology
Aksiyom (belit)	■ Axiom
Aralık	■ Interval
Aşık	■ Trivial
Ayırma aksiyomları	■ Separation axioms
Ayrık (topoloji)	■ Discrete (topology)
Ayrık olmayan (topoloji)	■ Indiscrete (topology)

B

Bileşke fonksiyon	■ Composite (compound, product) function
Bire-bir	■ Injective
Bire-bir ve örten	■ Bijective
Birim (özdeşlik) (fonksiyonu)	■ Identity function
Birleşim	■ Union

TÜRKÇE-İNGİLİZCE

Boş küme	■ Empty set
Ç	
Çelişki	■ Contradiction
D	
Değişken	■ Variable
Değme noktası	■ Point of contact
Denklik bağıntısı	■ Equivalence relation
Dönüşüm	■ Mapping
Düzenli açık küme	■ Regular open set
Düzenli iç	■ Regular interior
Düzenli ideal uzay	■ Regular ideal sapace
Düzenli kapanış	■ Regular closure
Düzenli uyumlu	■ Regular compatible
Düzenli yerel fonksiyon	■ Regular local function
E-F	
Eğri	■ Curve
Eleman (öğ)	■ Member
Fark	■ Difference
Fonksiyon	■ Function
G	
Genel topoloji	■ General topology
Gerçel sayılar	■ Reel number

TÜRKÇE-İNGİLİZCE

Gösterim (temsil)	■ Representation
<i>H</i>	
Has	■ Proper
<i>I</i>	
İç nokta	■ Interior point
İçi (bir kümenin)	■ Interior
İdeal	■ Ideal
İdeal topolojik uzay	■ Ideal topological space
İkili	■ Binary
İnce topoloji	■ Thin topology
İndirgeme	■ Reduction
İspat	■ Proof
<i>K</i>	
Kaba topoloji	■ Heavy topology
Kapalı küme	■ Closed
Kapalılık özelliği	■ Closed property
Kapanış	■ Closure
Kapsama	■ Inclusion
Kesişim	■ Intersection
Kısıtlama	■ Restriction
Komşuluk	■ Neighborhood
Kuratowski kapanış operatörü	■ Kuratowski closure operator

TÜRKÇE-İNGİLİZCE

Kuvvet kümesi	■ Power set
Küme	■ Set
Ö	
Öklit uzay	■ Euclidean space
Önerme	■ Proposition
Örten	■ Surjective
Örtü, örten	■ Covering
Örtmek	■ Cover
P-R	
Pozitif gerçel sayılar	■ Positive reel number
S-Ş	
Sayılabilir	■ Countable
Sayılamaz	■ Uncountable
Sayılabilir alt kümeler ideali	■ Countable subset ideal
Sembol	■ Symbol
Sonlu	■ Finite
Sonlu alt kümeler ideali	■ Finite subset ideal
Sonsuz	■ Infinite
Sonuç	■ Remark, corollary
T	
Taban	■ Base
Tanım kümesi	■ Domain

TÜRKÇE-İNGİLİZCE

Tek nokta kümesi	■ Singleton
Teorem	■ Theorem
Topoloji	■ Topology
Topolojik uzay	■ Topological space
Tümleyen	■ Complement
$U-\dot{U}$	
Uzay	■ Space
Üzerine	■ Onto
Y	
Yarı açık aralık	■ Half open interval
Yarı-açık küme	■ Semi-open set
Yarı-düzenli	■ Semi-regular
Yarı-düzenlilik	■ Semi-regularization
Yarı iç	■ Semi interior
Yarı kapanış	■ Semi closure
Yarı yerel fonksiyon	■ Semi local function
Yerel fonksiyon	■ Local function
Yığılma noktası	■ Accumulation (cluster, derived) point
Yoğun	■ Dense

SÖZLÜK

İNGİLİZCE-TÜRKÇE

A

Accumulation (cluster, derived) point	■ Yığılma noktası
Axiom	■ Aksiyom

B

Base	■ Taban
Bijjective	■ Bire-bir ve örten
Binary	■ İkili

C

Class	■ Sınıf (aile)
Closed-property	■ Kapalılık özelliği
Closed set	■ Kapalı Küme
Closure	■ Kapanış
Codense ideal	■ Eşyoğun ideal
Complement	■ Tümlen
Composite (compound, product) function	■ Bileşke fonksiyon
Contradiction	■ Çelişki
Countable	■ Sayılabilir
Countable complement topology	■ Sayılabilir tümlenler topolojisi
Cover	■ Örtmek
Covering	■ Örtü, örtü

İNGİLİZCE-TÜRKÇE

D

Dense	■ Yoğun
Difference	■ Fark
Dimension	■ Boyut
Discrete (topology)	■ Ayrık topoloji
Domain	■ Tanım kümesi

E-F

Embedding	■ Gömme
Empty set	■ Boş küme
Equivalence relation	■ Denklik bağıntısı
Eş yoğun ideal	■ Codense ideal
Euclidean space	■ Öklit uzay
Finite	■ Sonlu
Function	■ Fonksiyon

G-H

General topology	■ Genel Topoloji
Half open interval	■ Yarı açık aralık
Heavy topology	■ Kaba topoloji

I

Ideal	■ İdeal
Inclusion	■ Kapsama
Indiscrete (topology)	■ Ayrık olmayan topoloji

İNGİLİZCE-TÜRKÇE

Infinite	■ Sonsuz
Injective	■ Bire-bir
Interior	■ İçi (bir kümenin)
Interior point	■ İç nokta
Intersection	■ Kesişim
Interval	■ Aralık
Inverse	■ Ters
<i>K-L</i>	
Local function	■ Yerel fonksiyon
Kuratowski closure operator	■ Kuratowski kapanış operatörü
<i>M-N</i>	
Mapping	■ Dönüşüm
Member	■ Eleman (öğe)
Neighborhood	■ Komşuluk
<i>O</i>	
Onto	■ Üzerine
Open	■ Açık
Ordinary (usual) topology	■ Adi (Bilinen) topoloji
<i>P-R</i>	
Point of contact	■ Değme noktası
Positive real number	■ Pozitif gerçel sayılar
Power set	■ Kuvvet kümesi

İNGİLİZCE-TÜRKÇE

Proof	■ İspat
Proper	■ Has
Proposition	■ Önerme
Reduction	■ İndirgeme
Reel number	■ Gerçel sayılar
Regular closure	■ Düzenli kapanış
Regular compatible	■ Düzenli uyumlu
Regular ideal space	■ Düzenli ideal uzay
Regular interior	■ Düzenli iç
Regular local function	■ Düzenli yerel fonksiyon
Regular open	■ Düzenli açık
Relative topology	■ Alt uzay topolojisi
Remark, corollary	■ Sonuç
Representation	■ Gösterim (temsili)
Restriction	■ Kısıtlama
S	
Semi open set	■ Yarı-açık küme
Semi closure	■ Yarı kapanış
Semi closure function	■ Yarı kapanış fonksiyonu
Semi interior	■ Yarı iç
Semi-regular	■ Yarı-düzenli
Semi-regularization	■ Yarı-düzenlilik

İNGİLİZCE-TÜRKÇE

Set	■ Küme
Space	■ Uzak
Subclass	■ Alt aile
Subspace	■ Alt uzak
Subset	■ Alt küme
Surjective	■ Örtlen
Symbol	■ Sembol
<i>T</i>	
Theorem	■ Teorem
Thin topology	■ İnce topoloji
Topological space	■ Topolojik uzak
Topology	■ Topoloji
Trivial	■ Aşıkâr
<i>U-V-W</i>	
Uncountable	■ Sayılamaz
Union	■ Birleşim
Variable	■ Değişken

DİZİN

A

Açık küme

Topolojik uzayda~; 2

Düzenli~; 16

Yarı~; 13

Alt uzay; 3

Alt uzay topolojisi; 3

Arakesit; 1

Ayrık

~topoloji; 3

~olmayan topoloji; 3

~topolojik uzay; 3

~olmayan topolojik uzay; 3

B

Birleşim; 1

Baire küme; 48

D- E-F

DA-eşyoğun ideal; 45

Düzenli uyumlu ideal; 47

Fark; 1

İ

İç

Topolojik uzayda~; 4

Düzenli~; 16

Yarı~; 14

İç nokta

Topolojik uzayda~; 4

İdeal; 22

Düzenli~ uzay;33

~topolojik uzay; 21

Maksimum~; 21

Minimum~; 21

İnce topoloji; 3

K

Kaba topoloji; 3

Kapalı küme

Topolojik uzayda~; 2

Düzenli~; 16

Yarı~; 13

~ler ailesi; 2

Kapanış

~noktası; 4

Topolojik uzayda~; 4

Düzenli~; 16

Yarı~; 13

Komşuluk

Topolojik uzayda~; 3

Kuratowski kapanış operatörü; 29

M-O

Mod I denklik; 48

Operatör

k^* ~; 30

k_I^{*d} ~; 40

ψ ~; 31

ψ_d ~; 41

ψ_d -C küme; 51

S

Sayılabilir alt küme ideali; 21

Sonlu alt küme ideali; 21

T

Taban

Topolojik uzayda~;6

Topoloji; 2

$\tau^* \sim_{si}; 30$

$\tau^{*d} \sim_{si}; 40$

$\tau_s \sim_{si}; 16$

Topolojik uzay; 2

Tümleyen; 1

Y- Z

Yerel Fonksiyon; 22

Düzenli~;33

Yarı~;22

Yığılma noktası; 3

Yoğunlaşma noktası; 3

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Diyarbakır da doğdum. İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimimi Diyarbakır da tamamladım. 2000 yılında Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım ve 2004 yılında mezun oldum. 2004 yılında Birey Dershanesinde Matematikçi olarak başlayıp bir yıl görev yaptım. Halen görev yerim olan Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde 2007 yılında Araştırma Görevlisi olarak göreve başladım. 2007 yılında Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans yapmaya hak kazandım ve 2010 yılında yüksek lisansımı tamamladım. 2011 yılında ise yine Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde doktora programına başladım.

Evli ve iki çocuk annesiyim.



T.C.
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS / DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI İNTİHAL RAPORU
FORMU

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ

ADI VE SOYADI	Arife ATAY
ÖĞRENCİ NO	11 804 502
EĞİTİM – ÖĞRETİM YILI	2015-2016
YARIYIL	☒ Güz ☐ Bahar
ANABİLİM DALI	Matematik
PROGRAM	☐ Yüksek Lisans ☒ Doktora ☐ Tezsiz Yüksek Lisans (Dönem Projesi)
TEZ KONUSU	İdeal Topolojik Uzaylarda Düzenli Yerel Fonksiyonlar

İNTİHAL RAPORU BİLGİLERİ

RAPOR TÜRÜ	☐ Tez Savunma Sınavı Öncesi ☒ Tez Savunma Sınavı Sonrası
SAYFA SAYISI	75
BENZERLİK ORANI	% 5
RAPORLAMA TARİHİ	24/02/2016

Yukarıda başlığı/konusu gösterilen tez çalışmamın kapak sayfası, giriş, ana bölümler, sonuç ve tartışma kısımlarından oluşan toplam 75 sayfalık kısmına ilişkin, 24/02/2016 tarihinde tez danışmanım tarafından *Turnitin* adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 5 ‘tir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐ Kabul/Onay sayfaları hariç,
- ☒ Kaynakça hariç
- ☒ Alıntılar dâhil
- ☒ Diğer: 5 kelime filitrelemesi

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Programlarda Tez Çalışması İntihal Raporu Uygulama Esasları’nı inceledim ve bu Uygulama Esasları’nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edilmesi durumunda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

(İmza)

Arife ATAY

(İmza)

24/02/2016

Prof. Dr. H. İlhan TUTALAR
Tez Danışmanı

(İmza)

24/02/2016

Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY
Anabilim Dalı Başkanı