

**T.C.
HARRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**BANACH UZAYLARINDA ASİMTOTİK OLARAK GENİŞLEMİYEN
DÖNÜŞÜMLERİN KAPALI İTERASYON DİZİLERİ İÇİN YAKINSAKLIK
TEOREMLERİ**

Harun ÇİÇEK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ŞANLIURFA
2015**

Prof.Dr. Seyit TEMİR danışmanlığında, Harun ÇİÇEK'in hazırladığı **“Banach Uzaylarında Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümlerin Kapalı İterasyon Dizileri İçin Yakınsaklık Teoremleri”** konulu bu çalışma 15/06/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

İmza

Danışman : Prof. Dr. Seyit TEMİR

Üye : Doç. Dr. Aydın İZGİ

Üye :Yrd. Doç. Dr. Müzeyyen ERTÜRK

Bu Tezin Matematik Anabilim Dalında Yapıldığını ve Enstitümüz Kurallarına Göre Düzenlendiğini onaylarım.

Prof. Dr. Sinan UYANIK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
1.GİRİŞ	1
2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
2.1.Diziler.....	3
2.2.Metrik Uzaylar	4
2.3.Normlu Lineer Uzaylar.....	6
2.4.Banach Uzayları	8
3.MATERYAL ve METOD	12
3.1 İterasyon Metodları.....	12
3.2. Genişlemeyen Dönüşümler ve İlgili Temel Teoremler.....	14
4.ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	17
4.1. Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümlerin Sonlu Bir Ailesi İçin Kapalı İterasyon Sürecinin Kuvvetli Yakınsaklık Teoremi.....	17
4.2 Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümün İterasyon Dizileri İçin Yakınsaklıkları	18
4.2.1 Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümler İçin Kapalı İterasyon Sürecinin Yakınsaklık Analizi	18
4.2.2.Banach Uzaylarında Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümlerin Sonlu Bir Ailesi İçin Ishikawa Kapalı İterasyon Sürecinin Zayıf ve Kuvvetli Yakınsaklık Teoremleri	21
4.3. Banach Uzaylarında Sonlu İki Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşüm Ailesi İçin Kapalı İterasyon Dizilerinin Yakınsaklık Teoremleri	23
5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	38

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BANACH UZAYLARINDA ASİMTOTİK OLARAK NONEXPANSİVE DÖNÜŞÜMLERİN KAPALI İTERASYON DİZİLERİ İÇİN YAKINSAKLIK TEOREMLERİ

Harun ÇİÇEK

Harran Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Seyit TEMİR
Yıl: 2015, Sayfa: 38

Bu çalışmada Banach uzayında asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin iki sonlu ailesi için hata içeren kapalı iterasyon süreci gözönüne alınmaktadır. Bu tezin amacı, düzgün konveks Banach uzaylarında asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi için kapalı iterasyon sürecinin zayıf ve kuvvetli yakınsaklık teoremlerini incelemektir. Bu çalışmada kaynaklar kısmında verilen Sun (2003), Qin ve ark. (2009) ve Cianciaruso ve ark. (2010)'nun ve diğerlerinin çalışmaları incelenmekte ve geliştirilmektedir.

ANAHTAR KELİMELER: ortak sabit nokta, asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümler, kapalı iterasyon süreci, yakınsaklık teoremleri

ABSTRACT

MSc Thesis

CONVERGENCE THEOREMS FOR IMPLICIT ITERATION SEQUENCE of ASYMPTOTICALLY NONEXPANSIVE MAPPINGS in BANACH SPACES

Harun ÇİÇEK

**Harran University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Seyit TEMİR

Year: 2015, Page:38

In this paper, we consider an implicit iterative process with errors for two finite families for asymptotically nonexpansive mappings in the framework of Banach space. The purpose of this thesis is to establish weak and strong convergence theorems of the implicit iteration process for two finite families of asymptotically nonexpansive mappings in uniformly convex Banach spaces. Our results improve and extend the corresponding ones announced by Sun (2003), Qin et al. (2009) and Cianciaruso et al.(2010) and many others.

KEY WORDS: common fixed point, asymptotically nonexpansive mapping, implicit iteration process, convergence theorems.

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlarken yardımlarını esirgemeyen bilgi ve tecrübesiyle bu çalışmaya değer katan danışman hocam olan Prof.Dr. Seyit TEMİR’e en içten teşekkürlerimi arz ederim.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten ve sonsuz güvenden dolayı aileme ve nişanlım Şeyma GÜNHAN'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

1. GİRİŞ

“Sabit Nokta Teorisi” çalışmaları 19. yüzyıl başlarına dayanmaktadır. Matematikte sabit nokta teorisi adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığını, tekliğini ve bir integral denklemde çözümün varlığını göstermek amacıyla kurulmuştur.

Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi, Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak bu noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini de göstermektedir.

Banach ve metrik uzaylarında genişlemeyen, sözde genişlemeyen dönüşümler, asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşümler ve asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümler için de iterasyon dizilerinin sabit noktaya yaklaşımı ile ilgili problemler birçok yazar tarafından çalışılmaktadır. Petryshyn ve Williamson 1973’de iterasyon dizisinin sözde genişlemeyen dönüşümlerinin sabit noktaya zayıf ve kuvvetli yakınsaklığını incelemişler ve çeşitli özel durumlarda Dotson (1970) tarafından çalışılan ve Mann (1953), tarafından sunulan Mann (bir-adım) iterasyon dizisinin yakınsaklığı ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

Asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, genişlemeyen dönüşümlerin sınıfının doğal bir genişlemesidir. Goebel ve Kirk (1972), asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin notasyonunu sunarak, konveks Banach uzayının K boş olmayan sınırlı konveks bir alt kümesi üzerinde tanımlanan asimtotik olarak genişlemeyen T dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olduğunu ispatladılar.

Banach uzaylarında sözde genişlemeyen dönüşümler için Ishikawa (1974), tarafından sunulan Ishikawa (iki-adım) iterasyon dizilerinin yakınsaklığı, Ghosh ve Debnath (1997), tarafından incelenmiştir. Daha sonra, Liu (2002), tarafından asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşümler için Ishikawa iterasyon dizilerinin sabit noktaya yakınsaklığı için gerekli ve yeterli koşullar gösterilmiştir. Chang ve Zhou (2003), Banach uzayında asimtotik olarak sözde genişlemeyen tipli dönüşümlerin karışık hatalı Ishikawa dizilerinin Banach uzayında sabit noktaya yakınsaklığı için gerekli ve yeterli koşulları çalışmışlardır.

Noor (2000), ilk olarak Hilbert uzaylarında değişimsel eklemenin yaklaşım çözümlerini çalışmış ve üç-adım iterasyon dizisini kurmuştur. Glowinski ve Tallec (1989), üç adım iterasyon şemasının Mann ve Ishikawa iterasyon şemalarından daha iyi sonuç verdiğini göstermişlerdir. Ayrıca Xu ve Noor (2002), Banach uzaylarında üç-adım iterasyonu için asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalara yaklaşımını göstermişlerdir. Chidume ve ark. (2003), $T: K \rightarrow K'$ ’ya asimtotik olarak genişlemeyen T dönüşümlerinin genelleştirilmesinde olduğu gibi $T: K \rightarrow K'$ ’ya

olmayan asimtotik olarak genişlemeyen T dönüşümlerinin genel yapısını tanımlamıştır.

Xu ve Ori (2001), sonlu genişlemeyen dönüşümler ailesi için kapalı iterasyonların sürecini tanımlamışlardır.

Xu ve Ori (2001), Hilbert uzaylarında kapalı iterasyon için sonlu genişlemeyen dönüşümlerin ailesinin ortak sabit noktasına zayıf yakınsak olduklarını göstermişlerdir. Zhou ve Chang (2002), Banach uzaylarında kapalı iterasyon için sonlu genişlemeyen dönüşümlerin ailesinin ortak sabit noktasına kuvvetli ve zayıf yakınsak olduklarını ispatlamışlardır. Sun (2003), Xu ve Ori'nin kapalı iterasyonunun faydalanarak Banach uzaylarında asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşümünün ortak sabit noktaya yakınsaklığını ispatlamıştır. Qin ve ark. (2009), düzgün konveks Banach uzaylarında asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin iki sonlu ailesi için alınan kapalı iterasyonun kuvvetli ve zayıf yakınsaklıklarını çalışmışlardır. Cianciaruso ve ark. (2010), Banach uzaylarında Ishikawa iterasyonu için sonlu asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit noktalarına kuvvetli ve zayıf yakınsak olduğunu ispatlamışlardır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. 2. Bölümde konuyla ilgili temel kavramlar ve ön bilgiler verilmektedir. 3. Bölümde ise genel olarak kullanılan iterasyon metodları verilerek genişlemeyen ve onun genişlemeleri olan dönüşümler için Xu ve Ori (2001), kapalı iterasyon dizisi incelenecektir. Son bölümde kaynak kısmında verilen Sun (2003), Qin ve ark. (2009) ve Cianciaruso ve ark. (2010), çalışmaları incelenmektedir.

Bu çalışmalar gözönüne alınarak Banach uzayında asimtotik olarak olarak genişlemeyen dönüşümlerin iki sonlu ailesi için hata içeren kapalı iterasyon süreci göz önüne alınmaktadır. Bu iterasyon süreci kullanılarak asimtotik olarak olarak genişlemeyen dönüşümlerin iki sonlu ailesi için kuvvetli ve zayıf yakınsaklık teoremleri ispatlanmaktadır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu kısımda, çalışmamızda kullanacağımız bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

2.1. Diziler

Tanım 2.1.1. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine tanımlanan her fonksiyona bir reel terimli dizi veya kısaca dizi denir ve $\{x_n\}$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine üstten sınırlıdır denir. M sayısına da bu dizinin bir üst sınırı adı verilir. Üst sınırlarının en küçüğüne de dizinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir. $\sup x_n$ veya $\text{eküs}x_n$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq K$ olacak şekilde bir K reel sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine alttan sınırlıdır denir. K sayısına da bu dizinin bir alt sınırı adı verilir. Alt sınırlarının en büyüğüne dizinin en büyük alt sınırı veya infimumu denir. $\inf x_n$ veya $\text{ebas}x_n$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| \leq L$ olacak şekilde bir L pozitif reel sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine sınırlı dizi denir.

Tanım 2.1.5 (x_n) bir reel sayı dizisi olsun ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - x_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa $\{x_n\}$ dizisi x_0 'a yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ veya $\{x_n\} \rightarrow x_0$ şeklinde gösterilir. Yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.1.6. Bir $\{x_n\}$ dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < x_{n+1}$ ise bu diziye monoton artan dizi denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > x_{n+1}$ ise monoton azalan dizi denir.

Tanım 2.1.7. $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $x(n) = x_n$ dizisi verilsin. $n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n(k) = n_k$ dizisi bir artan dizi olmak üzere $(x \circ n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ bileşke fonksiyonuna $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi denir ve $(x \circ n)(k) = x(n(k)) = x(n_k) = x_{n_k}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.8. Gerçek değerli bir $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak ve limitinin L olması için gerekli ve yeterli koşul $\{x_n\}$ dizisinin bütün $\{x_{n_k}\}$ alt dizilerinin de aynı L limitine yakınsamasıdır. Her sınırlı reel sayı dizisinin en az bir yakınsak alt dizisi vardır (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.1.9 Herhangi bir X uzayında $\{x_n\}$ dizisi verilsin. O zaman

$$\overline{\lim}x_n = \limsup x_n = \inf_{m \geq 1} \left(\sup_{n \geq m} (x_n) \right)$$

şeklinde tanımlanan limit değerine $\{x_n\}$ dizisinin üst limiti denir.

Benzer olarak $\underline{\lim}x_n = \liminf x_n = \sup_{m \geq 1} \left(\inf_{n \geq m} (x_n) \right)$

şeklinde tanımlanan limit değerine $\{x_n\}$ dizisinin alt limiti denir.

Teorem 2.1.10. $\{x_n\}$ sınırlı bir dizi ise $\limsup x_n$ ve $\liminf x_n$ sırasıyla $\{x_n\}$ dizisinin en büyük ve en küçük limit noktasıdır ve $\liminf x_n \leq \limsup x_n$ ve $\liminf (-x_n) = -\limsup x_n$ 'dir (Royden, 1968).

Teorem 2.1.11. $\{x_n\}$ reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. O zaman

$\overline{\lim}x_n = \underline{\lim}x_n = x \Leftrightarrow \lim x_n = x$ 'dir (Royden, 1968).

Tanım 2.1.12. $\{x_n\}$ reel terimli bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşı gelen bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $m, n \geq n_0$ alındığında $|x_m - x_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabiliyorsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi adı verilir.

2.2. Metrik Uzaylar

Tanım 2.2.1. X boş olmayan bir küme olsun. $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x, y, z \in X$ için

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0$$

$$(M2) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(M3) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

koşullarını sağlıyorsa d 'ye X üzerinde bir metrik adı verilir. (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir. (X, d) metrik uzayı kısaca X ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. X bir metrik uzay ile bu uzayın bir x_0 noktası ve pozitif bir r reel sayısı verilsin. Bu durumda

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

kümesine de x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.2.3. $\mathbb{R}$ 'nin bazı alt kümelerinin bir $\mathfrak{M}$ sınıfı göz önüne alınsın. Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesi için, $A \subset \bigcup_{\lambda \in A} A_\lambda$, $A_\lambda \in \mathfrak{M}$ yazılabiliyorsa $\mathfrak{M}$ sınıfına A kümesinin bir örtüsü adı verilir. Bu durumda A kümesinin her noktası $\mathfrak{M}$ sınıfı içinde bulunur. $\mathfrak{M}$ deki bütün kümeler açıksa bu sınıf bir açık örtü adını alır. $\mathfrak{M}$ sınıfı $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ gibi kümelerin oluşturduğu sayılabilir bir sınıfsa ve $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ yazılabiliyorsa $\mathfrak{M}$ sınıfına A 'nın sayılabilir örtüsü denir.

Tanım 2.2.4. $\supset$ sınıfı bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin bir örtüsü olsun. $\mathfrak{N}$, her üyesi $\supset$ 'nin içinde olan bir alt kümeler sınıfıysa ve $\mathfrak{N}$ sınıfı da A kümesinin bir örtüsü ise $\mathfrak{N} \subset \supset$ alt sınıfı A 'nın bir alt örtüsü adını alır.

Tanım 2.2.5. Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A 'ya kompakt küme adı verilir.

Önerme 2.2.6. Bir metrik uzayın kompakt alt kümesi kapalı ve sınırlıdır (Bayraktar, 1992).

Tanım 2.2.7. X kompakt bir küme ise X metrik uzayına kompakt metrik uzay denir. Her kompakt metrik uzay tamdır (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.2.8. X bir metrik uzay ve $A \subset X$ 'in bir alt kümesi olsun. Bir $x \in X$ noktasının A kümesine uzaklığı bu noktanın A 'nın tüm noktalarına uzaklıklarının infimumudur. $d(x, A) = \inf \{d(x, y) : y \in A\}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.9. X bir metrik uzay ve A ile B , X 'in birer alt kümesi olsun. A ve B kümesinin birbirine uzaklığı, $x \in A$ ve $y \in B$ için;

$$d(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

dir. Bu tanımda $d(A, B) = d(B, A)$ olduğu açıktır. İki küme arasındaki uzaklığın sıfır olmasının bu kümelerin aynı olduğunu ifade etmediği açıktır.

Tanım 2.2.10. X metrik uzayının bir alt kümesi A olsun. Bir A alt kümesinin çapı, $d(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$ ile tanımlanır.

Tanım 2.2.11. X bir metrik uzay, bu uzay içinde bir dizi $\{x_n\}$ ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n_0 \leq n$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ ya da $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsıyor denir. Bu durum $x_n \rightarrow x$ ya da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ şeklinde ifade edilir.

Önerme 2.2.12. Bir (X, d) metrik uzayında yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.2.13. X bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.2.14. Bir X metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde yakınsak ise X metrik uzayına tam metrik uzay denir (Kolmogorov, Fomin, 1970).

2.3. Normlu Lineer Uzaylar

Tanım 2.3.1. X boş olmayan bir küme ve $\mathcal{F}$ bir sayı cismi olsun. Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ için

1) $x + y = y + x$

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

3) $x + \theta = x$ olacak biçimde bir θ ögesi var

4) $x + x = \theta$ olacak biçimde bir $x \in X$ ögesi var

5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

8) $1.x = x$

koşulları sağlanıyorsa X kümesine $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay denir.

Tanım 2.3.2. X bir lineer uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer $x, y \in A$ için $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y \in A$ oluyorsa A kümesine konveks küme denir.

Tanım 2.3.3. X bir lineer uzay olsun. $N : X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için;

$$N1) N(x) \geq 0 \text{ ve } N(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N2) N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$$

$$N3) N(x + y) = N(x) + N(y)$$

koşullarını sağlıyorsa bu dönüşüme norm denir. X bir lineer uzay ve bu uzay üzerinde bir norm tanımlanmış olsun. Bu uzaya normlu lineer uzay denir. Genel olarak, N norm dönüşümü yerine $\| \cdot \|$ sembolü kullanılır.

X normlu bir lineer uzay olmak üzere, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$; $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlanan d dönüşümü X uzayı üzerinde bir metriktir. Bu metriğe norm metriği denir. Bu nedenle her normlu uzay bir metrik uzaydır (Bayraktar, 1992).

Tanım 2.3.4. $(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzayının alt kümesi A olsun. Eğer

$$R_A = \sup \{ \|x - y\| : x \in A, y \in A \} < \infty$$

oluyorsa A kümesine X içinde sınırlı küme denir.

Tanım 2.3.5. $(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzayı içinde bir $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\|x_n - x\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsaktır denir ve $x_n \rightarrow x$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.3.6. $(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzayı içinde yakınsak her dizi sınırlıdır ve limiti tektir (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.3.7. $(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzayı içinde $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $\|x_m - x_n\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi adı verilir.

Önerme 2.3.8. $(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzayı içinde her Cauchy dizisi sınırlıdır (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Önerme 2.3.9. $(X, \| \cdot \|)$ normlu lineer uzayında $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi, $x \in X$ noktasına yakınsak bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisine sahip ise $\{x_n\}$ dizisi de x 'e yakınsaktır (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.3.10. $(X, \|\cdot\|_1)$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ birer normlu lineer uzay, X uzayından Y içine f bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\|x - x_0\|_1 < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_2 < \varepsilon$ ya da $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında sürekli denir.

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu lineer uzayının her noktasında sürekli olan f dönüşümüne X üzerinde sürekli bir fonksiyon adı verilir.

2.4. Banach Uzayları

Tanım 2.4.1. X normlu lineer uzay olsun. X , norm metriğine göre tam ise X uzayına Banach uzayı denir.

Tanım 2.4.2. X 'in normlu reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayına, reel veya kompleks Banach uzayı denir.

Tanım 2.4.3. X ve Y aynı bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. $T: X \rightarrow Y$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathcal{F}$ için

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot T(x)$$

ya da buna denk olarak her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ için

$$T(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot T(x) + \beta \cdot T(y)$$

şartını sağlıyorsa T dönüşümüne lineer dönüşüm denir. Eğer T dönüşümü yukarıdaki şartlardan herhangi birini gerçekleştirmezse T dönüşümüne lineer olmayan dönüşüm denir.

Tanım 2.4.4. $(X, \|\cdot\|)$ ve $(Y, \|\cdot\|)$ iki normlu uzay ve $T: X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için $\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\|$ olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti varsa, T dönüşümüne sınırlı dönüşüm denir.

Tanım 2.4.5. X bir lineer uzay olsun. Bu uzayın bir vektörüne bir skaler sayı karşı getiren bir $f: X \rightarrow \mathbb{F}$ fonksiyonu lineer fonksiyonel olarak adlandırılır. Lineer fonksiyonellerin oluşturduğu $X^* = L(X, \mathbb{F})$ lineer uzayına da X uzayının cebirsel duali adı verilir.

Tanım 2.4.6. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzayı üzerindeki tüm sürekli lineer fonksiyonellerin oluşturduğu lineer uzayına X uzayının topolojik duali adı verilir.

$f' : X \rightarrow \mathbb{F}$ sınırlı lineer fonksiyonların oluşturduğu topolojik dual $X' = B(X, \mathbb{F})$ ile gösterilir. X' de bir normlu lineer uzaydır ve $\mathbb{F}$ tam olduğu için X tam olmasa bile X' daima bir Banach uzaydır. X' topolojik dualinin, X^* cebirsel dualin alt uzayı olduğu açıktır.

Tanım 2.4.7. X normlu lineer uzayının X' duali de normlu lineer uzay olduğundan bu uzayın da duali, yani X üzerinde her sınırlı sürekli fonksiyonele bir skaler sayı karşı getiren sürekli lineer fonksiyonların oluşturduğu lineer uzay tanımlanabilir. $(X')' = X''$ lineer uzayına X 'in biduali (ikinci duali) adı verilir. X'' bir Banach uzaydır.

Tanım 2.4.8. $\Gamma : X \rightarrow X''$ fonksiyonu lineerdir. Γ fonksiyonuna X uzayının X'' uzayı içine kanonik dönüşümü adı verilir. Γ kanonik dönüşümünün erişim uzayı X'' bidualinin tümünü kapsarsa yani $\mathfrak{R}(\Gamma) = X''$ ise X uzayı norm refleksif ya da kısaca refleksif olarak adlandırılır. X'' daima tam olduğundan bir X normlu lineer uzayı ancak Banach uzayı ise refleksif olabilir. Bir Banach uzayı ancak ve ancak duali refleksif ise refleksif olur.

Tanım 2.4.9. X bir Banach uzayı olsun. Eğer $x, y \in X$ ve herhangi bir $\varepsilon \in (0, 2]$ için

$$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ ve } \|x - y\| > \varepsilon \text{ iken } \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \delta \text{ olacak biçimde bir } \delta = \delta(\varepsilon) > 0$$

sayısı bulunabiliyorsa X uzayına düzgün konveks Banach uzayı denir. Düzgün konveks Banach uzayı refleksifdir.

Tanım 2.4.10. X normlu lineer uzayı içinde bir dizi $\{x_n\}$ ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi x_0 noktasına kuvvetli yakınsıyor denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.4.11. X normlu lineer uzayı içinde bir dizi $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer, her $f \in X'$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ olacak biçimde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa $\{x_n\}$ dizisi x_0 'a zayıf yakınsıyor denir ve $x_n \xrightarrow{z} x_0$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.4.12. X normlu lineer uzayı üzerinde sınırlı lineer fonksiyonların bir dizisi (f_n) olsun. Eğer her $x \in X$ için $f_n(x) \rightarrow f(x)$ olacak şekilde bir $f \in X'$ fonksiyoneli varsa, (f_n) dizisi f ye $*$ -zayıf yakınsar denir ve $f_n \xrightarrow{z^*} f$ şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.4.13. X bir Banach uzayı, x_n ve x X 'in elemanları, f_n ve f 'de X 'in elemanları olsun. ($n \in \mathbb{N}$)

$$\text{a) } x_n \rightarrow x_0, f_n \rightarrow f$$

$$\text{b) } x_n \xrightarrow{z} x_0, f_n \xrightarrow{k} f$$

$$\text{c) } x_n \xrightarrow{k} x_0, f_n \xrightarrow{z^*} f$$

ise $n \rightarrow \infty$ iken $f_n(x_n) \xrightarrow{k} f(x)$ 'dir. Bir refleksif normlu lineer uzayda her sınırlı dizinin zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Teorem 2.4.14. X normlu lineer uzayı içinde $\{x_n\}$ bir dizi olsun. Bu takdirde;

1) $\{x_n\}$ kuvvetli yakınsak ise zayıf yakınsaktır.

2) (i) şartının tersi genelde doğru değildir.

3) X normlu uzayının sonlu boyutlu olması durumunda $\{x_n\}$ zayıf yakınsak ise aynı zamanda kuvvetli yakınsaktır (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Örnek 2.4.15. Bir refleksif Banach uzayında her sınırlı dizi, zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir.

Tanım 2.4.16. $T, \mathbb{R}$ uzayından $\mathbb{R}$ içine tanımlı bir dönüşüm olmak üzere $F_T = \{x \in \mathbb{R} : T(x) = x\}$ şeklinde bir küme tanımlansın. F_T kümesinin her bir x elemanına T dönüşümünün sabit noktası, F_T kümesine de T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi denir.

Tanım 2.4.17. (X, d) bir metrik uzay olsun ve $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu bu uzayı kendi içine döndürsün. Her $x, y \in X$ nokta çifti ve $k > 1$ koşulunu sağlayan bir k reel sayısı için $d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ koşulu sağlanıyorsa f 'ye Lipschitz sürekli fonksiyonu adı verilir. k ise Lipschitz sabiti olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.18. (X, d) bir metrik uzay olsun ve $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu bu uzayı kendi içine döndürsün. Her $x, y \in X$ nokta çifti ve $0 < k < 1$ koşulunu sağlayan bir k reel sayısı için $d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ koşulu sağlanıyorsa f 'ye bir büzülme dönüşümü adı verilir. Bir büzülme dönüşümünün Lipschitz sürekli bir fonksiyon olduğu açıktır. k Lipschitz sabiti bu durumda büzülme sabiti olarak adlandırılır.

Teorem 2.4.19. Tam metrik uzay üzerinde her daralma dönüşümü, bir sabit noktaya sahiptir (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Teorem 2.4.20. X bir tam metrik uzay ve f bir büzülme dönüşümü ise f fonksiyonunun tek bir sabit noktası vardır. Büzülme olmayan dönüşümlerin de sabit noktası vardır, hatta tek olabilir (Kolmogorov, Fomin, 1970).

Tanım 2.4.21. X bir Banach uzayı, K' da X 'in kapalı, sınırlı bir alt kümesi olsun. Eğer, her $T: K \rightarrow K$ genişlemeyen dönüşümü boş olmayan bir sabit nokta kümesine sahip ise K 'ya sabit nokta özelliğine (fixed point property-fpp) sahiptir denir. $Tk = k$ ($k \in K$) denkleminin çözümü T 'nin bir sabit noktasıdır ve F_T olarak gösterilir.

Örnek 2.4.22. $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $K = \mathbb{R}$ olmak üzere $Tk = k^2 + 7k + 9$ ise $F_T = \{-3\}$ olur.

Örnek 2.4.23. $T: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $K = \mathbb{R}$ olmak üzere $Tk = k$ ise $F_T = \mathbb{R}$ olur.

Örnek 2.4.24. $K \neq \emptyset$ olmak üzere $I: K \rightarrow K$ özdeşlik dönüşümü için K 'nın her noktası sabit noktadır.

Örnek 2.4.25. $K = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: K \rightarrow K$, $Tk = a + k$ ($a \in \mathbb{R}$) şeklindeki öteleme dönüşümlerinin sabit noktaları yoktur.

Örnek 2.4.26. $K = \mathbb{R}^2$ olmak üzere $T: K \rightarrow K$, $T(k, l) = (k, -l)$ dönüşümü için $F_T = \{(k, 0): k \in \mathbb{R}\}$ 'dir.

K boştan farklı bir küme ve $T_1, T_2: K \rightarrow K$ herhangi dönüşümler olsun. Eğer $T_1k = T_2k = k$ olacak şekilde bir $k \in K$ varsa, bu k noktasına T_1 ve T_2 'nin ortak sabit noktası denir. Bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F_{T_1} \cap F_{T_2}$ ile gösterilir. Örneğin ;

Örnek 2.4.27. $K = \mathbb{R}$, $T_1, T_2: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $T_1k = k^2 - 6k + 12$ $T_2k = k^2 - 5k + 9$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F_{T_1} \cap F_{T_2} = \{3\}$ ' tür.

Örnek 2.4.28. $K = \mathbb{R}^2$, $T_1, T_2: K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $T_1(k, l) = (-k, l)$ $T_2(k, l) = (3k, l)$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F_{T_1} \cap F_{T_2} = \{(0, l)\}$ ' dir.

3. MATERYAL ve METOD

3.1 İterasyon Metodları

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken kullanılan çeşitli iterasyon metotları vardır. Bunlardan bazıları Picard iterasyon metodu, Kirk iterasyon metodu ve bunlar gibi bilinen iterasyon metotlarıdır. Ayrıca son zamanlarda 1-adım, 2-adım, 3-adım iterasyonları olarak da bilinen sırasıyla Mann, Ishikawa, Noor iterasyon metotları ve Rhoades'in n -adım iterasyon metodu sıkça kullanılmaktadır.

Şimdi bu iterasyon metotlarından bazılarını verelim:

X herhangi bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $T^n(x)$ 'i herhangi bir $x \in X$ için $T^n(x) = x$ ve $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ olacak şekilde tanımlayabiliriz. $T^n(x)$, x 'in T altındaki n . iterasyonu denir. $T^n(n \geq 1)$ dönüşümü de T 'nin n . iterasyonu olarak adlandırılır. Notasyonları basitleştirmek için $T(x)$ yerine Tx kullanılacaktır (Berinde, 2006).

Picard iterasyon metodu: (X, d) bir metrik uzay, K da X in kapalı bir alt kümesi ve $T : K \rightarrow K$ dönüşümü en az bir sabit noktaya sahip olsun. Picard iterasyonu, $x_0 \in X$ olmak üzere

$$(3.1) \quad x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanır (Picard, 1890).

Picard iterasyonu, bazen ardışık yaklaşıklıkların dizisi (sequence of successive approximations) olarak da adlandırılır. Picard iterasyonu, quasi-contractive operatörlerin bir sınıfı için Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsar (Berinde, 2004).

Krasnoselskij iterasyon metodu: $(N, \|\cdot\|)$ reel normlu uzay ve $T : N \rightarrow N$ bir dönüşüm olsun. Krasnoselskij iterasyonu, $x_0 \in N$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$(3.2) \quad x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda Tx_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanır. Bu iterasyon $\lambda = 1$ için Picard iterasyonuna indirgenir (Krasnoselskij, 1955).

Kirk iterasyon metodu: X keyfi bir Banach uzayı ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Kirk iterasyonu $x_0 \in X$ olmak üzere

$$(3.3) \quad x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 T x_n + \alpha_2 T^2 x_n + \dots + \alpha_k T^k x_n$$

şeklinde tanımlanır. Burada $k \geq 1$ tamsayı ve $i = 0, 1, 2, \dots, k$ için $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$$

dir.

Bu (3.3) eşitliği ile verilen Kirk iterasyonu, $k = 0$ için Picard iterasyonuna $k = 1$ için de Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Kirk, 1971).

Mann iterasyon metodu: W. R. Mann tarafından 1953 yılında kurulmuş ve Banach daralma ilkesini sağlamayan bir çok dönüşümün bir sabit noktaya sahip olduğunu göstermek için kullanılmıştır. Mann iterasyon metodu, X keyfi bir Banach uzayı, K da X ' in boş olmayan konveks bir alt kümesi $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu,

$$(3.4) \quad x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n, \quad n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\} \in (0,1)$ 'dir

(Mann, 1953). (3.4) eşitliği ile verilen Mann iterasyonundaki $\alpha_n = \lambda$ (sabit) olarak alınır bu Mann iterasyonu açık olarak Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Berinde, 2006).

Ishikawa iterasyon metodu: 1974 yılında S. Ishikawa tarafından kurulmuştur Ishikawa iterasyonu ise, X keyfi bir Banach uzayı, K ' da X ' in boş olmayan konveks alt kümesi $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in B$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu

$$(3.5) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T y_n, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\} \in (0,1)$ 'dir (Ishikawa, 1974).

Bu (3.5) eşitliği ile verilen iterasyonda, $\beta_n = 0$ alınması durumunda Ishikawa iterasyonunun Mann iterasyonuna indirgendiği aşikar olmasına rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde, 2006).

Noor iterasyon metodu: 2000 yılında M. A. Noor tarafından kurulmuştur. Bu iterasyon ise, X keyfi bir Banach uzayı, K ' da X ' in boş olmayan konveks alt kümesi, $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm ve $u_1 \in B$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu

$$(3.6) \quad \begin{aligned} u_{n+1} &= (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n T v_n, \\ v_n &= (1 - \beta_n)u_n + \beta_n T w_n, \\ w_{n+1} &= (1 - \gamma_n)u_n + \gamma_n T u_n, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in (0,1)$ 'dir (Noor, 2000).

Noor, çözümler yenileyen değişik teknikler kullanarak Hilbert uzaylardaki çeşitli eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerini çalışmak için 3-adım (Noor) iterasyonunu analiz etmiş ve tanıtmıştır. Xu ve Noor, düzgün olarak konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesinde kendi üzerinde tanımlanmış asimtotik olarak genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktası için Noor iterasyonunun yakınsaklığını çalışmışlardır.

3.2. Genişlemeyen Dönüşümler ve İlgili Temel Teoremler

Tanım 3.2.1. X bir normlu uzay, K 'da X 'in boş olmayan alt kümesi ve $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in K$ için $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ ise T 'ye genişlemeyen dönüşüm denir. Eğer $p \in F_T \neq \emptyset$ ve $\forall x \in K$ için $\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$ ise T 'ye sözde genişlemeyen dönüşüm denir. $F_T \neq \emptyset$ olması durumunda, genişlemeyen bir dönüşüm, sözde genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat tersi doğru değildir.

Tanım 3.2.2. X bir Banach uzayı, $K \subseteq X$ ve $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in K$ için $\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|$ olduğunda $k_n \rightarrow 1$ olacak şekilde bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa T 'ye asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm denir.

Tanım 3.2.3. X bir normlu uzay ve K' da X 'in boş olmayan alt kümesi ve $T : K \rightarrow K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F_T$ ve $\forall x \in K$ ve $\forall n \geq 1$ için $\|T^n x - p\| \leq (1 + r_n) \|x - p\|$ olacak şekilde $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ şartını sağlayan bir $\{r_n\} \in [0, \infty)$ dizisi varsa bu T dönüşümüne asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşüm denir.

Teorem 3.2.4. X düzgün konveks Banach uzayı, K' da X 'in boş olmayan kapalı, konveks alt kümesi ve $T : K \rightarrow K$ bir genişlemeyen operatör olsun. Bu durumda T en az bir $p \in K$ sabit noktasına sahiptir (Berinde, 2006).

Lemme 3.2.5. X , düzgün konveks Banach uzayı ve $\{\alpha_n\}$, uygun bir $\varepsilon \in (0, 1)$ için $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ 'da bir dizi olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}, r \geq 0$ için $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq r, \limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq r$ ve $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) y_n\| = r$ olacak şekilde X' de iki dizi olsun. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$ dır (Schu, 1991).

Lemma 3.2.6. X bir Banach uzayı, $p > 1$ ve $R > 1$ olsun. Bu durumda X 'in düzgün konveks olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in B(0, R) = \{x \in E : \|x\| \leq R\}$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^p \leq \lambda \|x\|^p + (1 - \lambda)\|y\|^p - w_p(\lambda)g(\|x - y\|)$ olacak şekilde sürekli, kesin artan, konveks ve $g(0) = 0$ şartını sağlayan bir $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunun vardır. Burada $W_p(\lambda) = \lambda(1 - \lambda)^p + \lambda^p(1 - \lambda)$ olarak alınmıştır (Xu, 1991).

Lemma 3.2.7. $\{s_n\}$ ve $\{t_n\}$, $s_{n+1} \leq s_n + t_n \quad \forall n \geq 1$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq \infty$ olacak şekilde negatif olmayan reel diziler olsun. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ limiti vardır. Üstelik $j \rightarrow \infty$ iken $s_{n_j} \rightarrow 0$ olacak şekilde $\{s_n\}$ 'nin bir $\{s_{n_j}\}$ alt dizisi varsa o zaman $n \rightarrow \infty$ için $s_n \rightarrow 0$ olur (Tan ve Xu, 1993).

Tanım 3.2.8. X bir Banach uzayı olsun, K 'da X 'in boş olmayan kapalı alt kümesi olsun. Eğer $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$ olacak şekilde K içinde herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n_i} \rightarrow x^* \in K$ olacak şekilde $\{x_n\}$ 'nin bir $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi varsa $T : K \rightarrow K$ dönüşümüne yarı kompakt denir.

Tanım 3.2.9. X bir Banach uzayı olsun, K 'da X 'in boş olmayan kapalı alt kümesi olsun. K içinde herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi için $\{x_n\}$ dizisi x_0 'a zayıf olarak, $Tx_n \rightarrow 0$ 'a kuvvetli olarak yakınsar ve $Tx_0 = 0$ eşitliği sağlanırsa $T : K \rightarrow K$ dönüşümüne orijinde yarı kapalıdır denir.

Lemma 3.2.10. X , bir düzgün konveks Banach uzayı olsun, K 'da X 'in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun ve $T : K \rightarrow K, F(T) \neq \emptyset$ ile asimtotik olarak genişlemeyen bir dönüşüm olsun. O zaman, $I \rightarrow K$ sıfıra yarı kapalıdır, yani K 'daki her bir $\{x_n\}$ dizisi için; eğer $\{x_n\}$, $p \in K$ 'ya zayıf yakınsak olursa, $\{(I - K)x_n\}$ 'de kuvvetli yakınsak olursa, bu durumda $(I - T)p = 0$ olur (Chang, Cho, Zhou, 2001).

Lemma 3.2.11. Sonlu genişlemeyen dönüşümlerin ailesi için kapalı iterasyonların süreci aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır. K , H Hilbert uzayının kapalı konveks boş olmayan bir alt kümesi olsun. $(T_i), i = 1, \dots, N$ olmak üzere $\{T_i\}_i^N = 1$ N tane genişlemeyen dönüşüm olsun ve $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$ K 'nın sabit noktalarının ortak kümesi olsun; $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ ve $x_0 \in K$ için;

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x_0 + (1 - \alpha_1) T_1 x_1 \\ x_2 &= \alpha_2 x_1 + (1 - \alpha_2) T_2 x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_N = \alpha_N x_{N-1} + (1 - \alpha_N) T_N x_N$$

$$x_{N+1} = \alpha_{N+1} x_N + (1 - \alpha_{N+1}) T_{N+1} x_{N+1}$$

Genel olarak

$$(3.2.1) \quad x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) T_n x_n, \quad n \geq 1$$

elde edilir.

Burada $T_n = T_{n(\bmod N)}$ 'dir (Xu ve Ori, 2001).

4.ARASTIRMA BULGULARI ve TARTISMA

Bu bölümde, kaynaklar kısmında verilen çalışmalar detaylı olarak incelenerek mevcut sonuçlar karşılaştırılacaktır. Banach uzaylarında geliştirilmiş kapalı iterasyon dizileri için kaynaklar kısmında verilen çalışmalar ışığında asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin ve onun genişlemeleri olan dönüşümlerin sabit noktalara ve sonlu sayıdaki böyle dönüşümlerin ortak sabit noktalara yaklaşımı incelenecektir.

4.1.Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümlerin Sonlu Bir Ailesi İçin Kapalı İterasyon Sürecinin Kuvvetli Yakınsaklık Teoremi

Bu bölümde Xu ve Ori (2001)'nin (3.2.1)'deki iterasyonu Zhao-hong Sun (2003) tarafından sonlu asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşümlerin bir ailesi için tanımlanan $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ aralığında reel bir dizi ve $x_0 \in K$ başlangıç noktası ile aşağıda iterasyona genişlemesi şeklinde tanımlanır.

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x_0 + (1 - \alpha_1) T_1 x_1 \\ &\vdots \\ x_N &= \alpha_N x_{N-1} + (1 - \alpha_N) T_N x_N \\ x_{N+1} &= \alpha_{N+1} x_N + (1 - \alpha_{N+1}) T_1^2 x_{N+1} \\ &\vdots \\ x_{2N} &= \alpha_{2N} x_{2N-1} + (1 - \alpha_{2N}) T_N^2 x_{2N} \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifade aşağıdaki gibi kompakt bir formda yazılabilir. Burada $l = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ olsun.

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) T_i^k x_n, \quad n \geq 1 \quad (4.1.1)$$

Burada $n = (k-1)N + i, i \in l$ şeklinde tanımlanır (Sun, 2003).

Teorem 4.1.1. X reel bir Banach uzayı olsun. K ise X' in boş olmayan kapalı alt kümesi olsun. $T_i, i \in l$ K 'nin kendinden kendine N tane asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşümü olsun. Yani tüm $x \in K, p_i \in F(T_i), i \in l$ için

$$\|T_i^n - p_i\| \leq (1 + u_{i_n})x\|x - p_i\|$$

olur. $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$ ve $x_0 \in K, i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ için $\sum_{n=1}^{\infty} u_{i_n}$ ve $s \in (0, 1)$ için $\{\alpha_n\} \subset (s, 1 - s)$ olduğunu kabul edelim o zaman (4.1.1) iterasyonu ile üretilen x_n kapalı iterasyon dizisi F içinde bir sabit noktaya yakınsar ancak ve ancak $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf d(x_n, F) = 0$ 'dır (Sun, 2003).

Sonuç 4.1.2. Teorem 4.1.1.'deki şartlarla beraber, (4.1.1) tarafından üretilen kapalı

iterasyon dizisi $\{x_n\}$, ortak bir sabit nokta olan $p \in F$ 'ye yakınsaktır ancak ve ancak $p \in F$ 'ye yakınsayan $\{x_n\}$ 'nin $\{x_{n_j}\}$ sonsuz alt dizisi vardır (Sun, 2003).

Teorem 4.1.3. X , reel düzgün konveks bir Banach uzayı olsun. K ise X 'in kapalı konveks alt kümesi olsun. T_i ise bütün $i \in I$ için $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{in} < +\infty$ olacak şekilde K 'nin N tane düzgün L -Lipschitzian asimtotik olarak sözde genişlemeyen dönüşümleri olsun. $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$ ve yarı kompakt olacak şekilde $\{T_i, i \in I\}$ 'nin bir elemanı T olsun. Bazı $s \in (0,1)$ için $x_0 \in K$ ve $\{\alpha_n\} \subset (s, 1-s)$ olsun. Bu takdirde kapalı iterasyon süreci (4.1.1) tarafından tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi $\{T_i, i \in I\}$ dönüşümünün ortak bir sabit noktasına kuvvetli bir şekilde yakınsar (Sun, 2003).

Teorem 4.1.4. X reel düzgün konveks bir Banach uzayı olsun. K ise X 'in kapalı konveks alt kümesi olsun. T_i ise bütün $i \in I$ için $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{in} < +\infty$ olacak şekilde K 'nin N tane asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümleri olsun. $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$ ve yarı kompakt olacak şekilde $\{T_i, i \in I\}$ 'nin bir elemanı T olsun. Bazı $s \in (0,1)$ için $x_0 \in K$ ve $\{\alpha_n\} \subset (s, 1-s)$ olsun. Bu takdirde kapalı iterasyon süreci (4.1.1) tarafından tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi $\{T_i, i \in I\}$ dönüşümünün ortak bir sabit noktasına kuvvetli bir şekilde yakınsar (Sun, 2003).

4.2.Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümün İterasyon Dizileri İçin Yakınsakları

4.2.1.Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümleri İçin Kapalı İterasyon Sürecinin Yakınsaklık Analizi

Bu bölümde, Xu ve Ori'nin çalışması göz önünde bulundurularak reel bir Banach uzayında sonlu asimtotik olarak genişlemeyen iki dönüşüm ailesi için genel bir kapalı iterasyon sürecini ele alan Xiaolong Qin ve ark.(2009) 'nin çalışması incelenmektedir.

K , X 'in $K + K \subset K$ şartını sağlayan ve $x_0 \in K$ 'nin başlangıç noktası olmak üzere boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ ve $\{S_1, S_2, \dots, S_N\} : K \rightarrow K$ asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümünün iki sonlu ailesi olsun. $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ $[0,1]$ 'de iki reel dizi olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1 x_0 + (1 - \alpha_1) T_1 [\beta_1 x_1 + (1 - \beta_1) S_1 x_1 + v_1] + u_1, \\
x_2 &= \alpha_2 x_1 + (1 - \alpha_2) T_2 [\beta_2 x_2 + (1 - \beta_2) S_2 x_2 + v_2] + u_2, \\
&\vdots \\
x_N &= \alpha_N x_{N-1} + (1 - \alpha_N) T_N [\beta_N x_N + (1 - \beta_N) S_N x_N + v_N] + u_N, \\
x_{N+1} &= \alpha_{N+1} x_N + (1 - \alpha_{N+1}) T_1 [\beta_{N+1} x_{N+1} + (1 - \beta_{N+1}) S_1 x_{N+1} + v_{N+1}] + u_{N+1}, \\
&\vdots \\
x_{2N} &= \alpha_{2N} x_{2N-1} + (1 - \alpha_{2N}) T_N^2 [\beta_{2N} x_{2N} + (1 - \beta_{2N}) S_N^2 x_{2N} + v_{2N}] + u_{2N}, \\
x_{2N+1} &= \alpha_{2N+1} x_{2N} + (1 - \alpha_{2N+1}) T_1^3 [\beta_{2N+1} x_{2N+1} + (1 - \beta_{2N+1}) S_1^3 x_{2N+1} + v_{2N+1}] + u_{2N+1},
\end{aligned}$$

Her bir $n \geq 1$ değeri için $n = (k-1)N + i$ eşitliği elde edilebilir. Burada $i = i(n) \in \{1, 2, \dots, N\}$ $k = k(n) \geq 1$ pozitif bir tam sayıdır ve $n \rightarrow \infty$ iken $k(n) \rightarrow \infty$ dur. Bu sebeple yukarıdaki eşitlikleri aşağıdaki gibi kompakt formda yazılabilir.

$$x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) T_{i(n)}^{k(n)} [\beta_n x_n + (1 - \beta_n) S_{i(n)}^{k(n)} x_n + v_n] + u_n, \quad \forall n \geq 1 \quad (4.2.1)$$

(4.2.1) de $y_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) S_{i(n)}^{k(n)} x_n + v_n$ yazılarak aşağıdaki kompakt form elde edilir.

$$\begin{aligned}
y_n &= \beta_n x_n + (1 - \beta_n) S_{i(n)}^{k(n)} x_n + v_n, \\
x_n &= \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) T_{i(n)}^{k(n)} y_n + u_n \quad \forall n \geq 1 \quad (4.2.2)
\end{aligned}$$

olur (Qin ve ark., 2009).

Önerme 4.2.1.1. X , Banach uzayı olsun ve K X 'in boş olmayan kapalı alt kümesi olsun. $\{T_i\}_{i=1}^N$ ve $\{S_i\}_{i=1}^N$ K 'nın kendisi üzerinde asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümleri olsun. Bu durumda

$$\|T_i^n x - T_i^n y\| \leq h_n \|x - y\|, \quad \forall n \geq 1, x, y \in K, i = 1, 2, \dots, N$$

$$\|S_i^n x - S_i^n y\| \leq h_n \|x - y\|, \quad \forall n \geq 1, x, y \in K, i = 1, 2, \dots, N$$

olacak şekilde $h_n \rightarrow 1$ ile $\{h_n\} \subset [1, \infty)$ vardır (Qin ve ark., 2009).

Önerme 4.2.1.2. $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ ve $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ Önerme 4.2.1.1'deki gibi olsun. Bu durumda $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ ve $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ bir Lipschitzian sabiti olan $L \geq 1$ ile düzgün Lipschitzidir, diğer bir deyişle

$$\|T_i^n x - T_i^n y\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall n \geq 1$$

$$\|S_i^n x - S_i^n y\| \leq L \|x - y\|, \quad \forall n \geq 1$$

olacak şekilde bir $L \geq 1$ sabiti vardır (Qin ve ark., 2009).

Teorem 4.2.1.3. X Opial şartını sağlayan düzgün bir konveks Banach uzayı olsun; K ise X 'in boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ ve

$\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$, $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$ olacak şekilde K 'nın kendi üzerinde asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerinin iki sonlu ailesi olsun. Burada $F(T) = \bigcap_i F(T_i)$ ve $F(S) = \bigcap_i F(S_i)$ 'dir. $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ K 'da iki sınırlı dizi olsun. $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $(0,1)$ aralığında reel diziler olarak kabul edilsin. $\{h_n\}$ Önerme 4.2.1.1.'de tanımlanan bir dizi ve $L \geq \sup_{n \geq 1} h_n \geq 1$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa;

$$1) \sum_{n=1}^N \|u_n\| < \infty, \sum_{n=1}^N \|v_n\| < \infty;$$

$$2) \sum_{n=1}^N (h_n - 1) < \infty,$$

$$3) \text{ Bütün } n \geq 1 \text{ için } a_1 \leq \alpha_n, \beta_n \leq a_2, L < \frac{1}{1-a_2} \text{ olacak şekilde } a_1, a_2 \in (0,1) \text{ vardır,}$$

Bu durumda (4.2.2) ile tanımlanmış olan $\{x_n\}$ dizisi $p \in F$ 'ye zayıf yakınsar (Qin ve ark., 2009).

Teorem 4.2.1.4. X , düzgün bir konveks Banach uzayı olsun; K ise X 'in boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ ve $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$, $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$ olacak şekilde K 'nın kendi üzerinde asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin iki sonlu ailesi olsun. Burada $F(T) = \bigcap_i F(T_i)$ ve $F(S) = \bigcap_i F(S_i)$ 'dir. $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ ve $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ içindeki dönüşümlerden birisini yarı-kompakt olduğunu kabul edelim. $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ K 'da iki sınırlı dizi olsun. $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $(0,1)$ aralığında reel diziler olarak kabul edilsin. $\{h_n\}$ Önerme 4.2.1.1'de tanımlanan bir dizi ve $L \geq \sup_{n \geq 1} h_n \geq 1$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa;

$$1) \sum_{n=1}^N \|u_n\| < \infty, \sum_{n=1}^N \|v_n\| < \infty;$$

$$2) \sum_{n=1}^N (h_n - 1) < \infty,$$

$$3) \text{ Bütün } n \geq 1 \text{ için } a_1 \leq \alpha_n, \beta_n \leq a_2, L < \frac{1}{1-a_2} \text{ olacak şekilde } a_1, a_2 \in (0,1) \text{ vardır,}$$

Bu durumda (4.2.2) ile tanımlanmış olan $\{x_n\}$ dizisi $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ ve $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ 'lerin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar (Qin ve ark., 2009).

Teorem 4.2.1.5. X , düzgün bir konveks Banach uzayı olsun; K ise X 'in boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ ve $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$, $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$ olacak şekilde K 'nın kendi üzerinde asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin iki sonlu ailesi olsun. Burada $F(T) = \bigcap_i F(T_i)$ ve $F(S) = \bigcap_i F(S_i)$ 'dir. $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ ve $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ içindeki dönüşümlerden

birisini yarı-kompakt olduğunu kabul edelim. $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ K 'da iki sınırlı dizi olsun. $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $(0,1)$ aralığında reel diziler olarak kabul edilsin. $\{h_n\}$ Önerme 4.2.1.1.'de tanımlanan bir dizi ve $L \geq \sup_{n \geq 1} h_n \geq 1$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa;

- 1) $\sum_{n=1}^N \|u_n\| < \infty$, $\sum_{n=1}^N \|v_n\| < \infty$;
- 2) $\sum_{n=1}^N (h_n - 1) < \infty$,
- 3) Bütün $n \geq 1$ için $a_1 \leq \alpha_n$, $\beta_n \leq a_2$, $L < \frac{1}{1-a_2}$ olacak şekilde $a_1, a_2 \in (0,1)$ vardır,

Bu durumda (4.2.2) ile tanımlanmış olan $\{x_n\}$ dizisi $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$ ve $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ 'lerin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar, ancak ve ancak $\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n, F) = 0$ (Qin ve ark., 2009).

4.2.2.Banach Uzaylarında Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşümlerin

Sonlu Bir Ailesi İçin Ishikawa Kapalı İterasyon Sürecinin Zayıf ve Kuvvetli Yakınsaklık Teoremleri

Bu bölümde aşağıda verilen bir sonlu asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm ailesi için bir kapalı iterasyon süreci çalışan Filomena Cianciaruso ve ark. (2010), çalışması incelenmektedir. $n = (k(n) - 1) + i(n)$, $i(n) \in \{1, \dots, N\}$ için

$$\begin{aligned} x_n &= (1 - \alpha_n - \gamma_n)(x_n - 1) + \alpha_n T_{i(n)}^{k(n)} y_n + \gamma_n u_n, \quad n \geq 1 \\ y_n &= (1 - \beta_n - \delta_n)x_n + \beta_n T_{i(n)}^{k(n)} y_n + \delta_n v_n, \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

$\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\delta_n\}$ $[0,1]$ kapalı aralığında $\alpha_n + \gamma_n \leq 1$ ve $\beta_n + \delta_n \leq 1$ şartlarını sağlayan dört reel dizi, $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ X Banach uzayında K alt kümesi içindeki sınırlı diziler ve $x_0 \in K$ başlangıç noktası alalım.

Lemma 4.2.2.1. X , düzgün konveks bir Banach uzayı olsun. K ise X ' in boş olmayan kapalı ve konveks alt kümesi olsun $T_1, \dots, T_N : K \rightarrow K$, $F(T) \neq \emptyset$ ile birlikte N tane asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ K ' da iki sınırlı dizi olsun ve $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\delta_n\}$ $[0,1]$ kapalı aralığında aşağıdaki şartları karşılayan dört reel dizi olsun:

- 1) Bütün $n \geq 1$; için $\alpha_n + \gamma_n \leq 1$ ve $\beta_n + \delta_n \leq 1$
- 2) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$
- 3) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$; $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$; $\sum_{n=1}^{\infty} (\bar{h}_n - 1) < \infty$

O zaman (4.2.3) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ tüm $p \in F(T)$ için vardır ve $\{\bar{h}_n\}$ dizisi için $\bar{h}_n \in [1, +\infty]$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 1$ dir (Cianciaruso ve ark., 2010).

Lemma 4.2.2.2. X , düzgün konveks bir Banach uzayı olsun. K ise X 'in boş olmayan kapalı ve konveks alt kümesi olsun $T_1, \dots, T_n : K \rightarrow K$, $F(T) \neq \emptyset$ ile birlikte N tane asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ K 'da iki sınırlı dizi olsun ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\} [0,1]$ kapalı aralığında aşağıdaki şartları karşılayan dört reel dizi olsun:

- 1) Bütün $n \geq 1$; için $\alpha_n + \gamma_n \leq 1$ ve $\beta_n + \delta_n \leq 1$
- 2) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$
- 3) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$; $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$; $\sum_{n=1}^{\infty} (\bar{h}_n - 1) < \infty$

O zaman (4.2.3) ile tanımlanan $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri için;

$$\begin{aligned} \text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_{i(n)}^{k(n)} y_n\| &= 0 \\ \text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_{i(n)}^{k(n)} x_n\| &= 0 \end{aligned}$$

limitleri vardır (Cianciaruso ve ark., 2010).

Sonuç 4.2.2.3. Lemma 4.2.2.2'deki aynı hipotezle ayrıca aşağıdaki eşitlikleri de elde ederiz. $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n-1} - T_{i(n)}^{k(n)} x_n) = 0$ ise $\{x_n\}$ asimtotik olarak düzgündür, yani: $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1}) = 0$ olur (Cianciaruso ve ark., 2010).

Teorem 4.2.2.4. X , Opial şartını sağlayan düzgün konveks Banach uzayı olsun. K ise X 'in boş olmayan kapalı ve konveks alt kümesi olsun $T_1, \dots, T_n : K \rightarrow K$, N tane ortak sabit nokta kümesi boştan farklı olan asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$, K 'da iki sınırlı dizi olsun ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\} [0,1]$ kapalı aralığında aşağıdaki şartları karşılayan dört reel dizi olsun:

- 1) Bütün $n \geq 1$; için $\alpha_n + \gamma_n \leq 1$ ve $\beta_n + \delta_n \leq 1$
- 2) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$
- 3) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$; $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$; $\sum_{n=1}^{\infty} (\bar{h}_n - 1) < \infty$

Bu durumda (4.2.3) ile tanımlanan $\{x_n\}$ Ishikawa kapalı iteratif dizisi K 'da $T_1, \dots, T_n$ 'nin ortak bir sabit noktasına zayıf yakınsar (Cianciaruso ve ark., 2010).

Teorem 4.2.2.5. X , düzgün konveks Banach uzayı olsun. K ise X 'in boş olmayan kapalı ve konveks alt kümesi olsun $T_1, \dots, T_n : K \rightarrow K$, N tane ortak sabit nokta kümesi boştan farklı ve T_i ($i \in I$)'lerden en az biri yarı kompakt olan asimtotik olarak

genişlemeyen dönüşüm ailesi olsun. $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ K' da iki sınırlı dizi olsun ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\} [0,1]$ kapalı aralığında aşağıdaki şartları sağlayan dört reel dizi olsun:

- 1) Bütün $n \geq 1$; için $\alpha_n + \gamma_n \leq 1$ ve $\beta_n + \delta_n \leq 1$
- 2) $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$
- 3) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$; $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$; $\sum_{n=1}^{\infty} (\bar{h}_n - 1) < \infty$

Bu durumda (4.2.3) ile tanımlanan $\{x_n\}$ Ishikawa kapalı iteratif dizisi K 'da $T_1, \dots, T_n$ 'nin ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar (Cianciaruso ve ark., 2010).

Teorem 4.2.2.6. X , düzgün konveks Banach uzayı olsun. K ise X 'in boş olmayan kapalı ve konveks alt kümesi olsun $T_1, \dots, T_n : K \rightarrow K$, N tane ortak sabit nokta kümesi boştan farklı olan asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ K 'da iki sınırlı dizi olsun ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\} [0,1]$ kapalı aralığında aşağıdaki şartları sağlayan dört reel dizi olsun:

- 1) Bütün $n \geq 1$; için $\alpha_n + \gamma_n \leq 1$ ve $\beta_n + \delta_n \leq 1$
- 2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$; $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$; $\sum_{n=1}^{\infty} (\bar{h}_n - 1) < \infty$

Bu durumda (4.2.3) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi K 'da ortak bir sabit noktaya kuvvetli bir şekilde yakınsar ancak ve ancak $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf d(x_n F(T)) = 0$ limiti vardır (Cianciaruso ve ark., 2010).

4.3. Banach Uzaylarında Sonlu İki Asimtotik Olarak Genişlemeyen Dönüşüm Ailesinin Kapalı İterasyon Dizileri İçin Yakınsaklık Teoremleri

Bu bölümde Banach uzaylarında asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi için aşağıdaki kapalı iterasyonların kuvvetli ve zayıf yakınsaklık teoremlerini inceleyeceğiz. Bu çalışmada Xu ve Ori (2001), Gun (2006), Qin ve ark. (2009) ve Cianciaruso ve ark. (2010), kaynakları ışığında aşağıdaki asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi için iterasyon sürecini tanıtalım. K , X Banach uzayının boş olmayan kümesi olsun, $\{T_i\}_{i=1}^N$ ve $\{S_i\}_{i=1}^N$ K 'daki asimtotik olarak

genişlemeyen dönüşümlerin N tane iki sonlu ailesi olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\delta_n\} [0,1]$ 'de $n \geq 1$ için $\alpha_n + \gamma_n \leq 1$ ve $\beta_n + \delta_n \leq 1$ gösterimini sağlayan dört reel dizi olsun ve $\{u_n\}, \{v_n\}$ sınırlı diziler olsun.

Sonra $x_0 \in K$ başlangıç noktası olmak üzere $\{x_n\}$ dizisinin tanımı:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1 - \alpha_1 - \gamma_1)x_0 - \alpha_1 T_1 \left[(1 - \beta_1 - \delta_1)x_1 - \beta_1 S_1 x_1 - \delta_1 v_1 \right] + \gamma_1 u_1, \\
x_2 &= (1 - \alpha_2 - \gamma_2)x_1 - \alpha_2 T_2 \left[(1 - \beta_2 - \delta_2)x_2 - \beta_2 S_2 x_2 - \delta_2 v_2 \right] + \gamma_2 u_2, \\
&\vdots \\
x_N &= (1 - \alpha_N - \gamma_N)x_{N-1} - \alpha_N T_N \left[(1 - \beta_N - \delta_N)x_N - \beta_N S_N x_N - \delta_N v_N \right] + \gamma_N u_N, \\
x_{N+1} &= (1 - \alpha_{N+1} - \gamma_{N+1})x_N - \alpha_{N+1} T_1^2 \left[(1 - \beta_{N+1} - \delta_{N+1})x_{N+1} - \beta_{N+1} S_1^2 x_{N+1} - \delta_{N+1} v_{N+1} \right] + \gamma_{N+1} u_{N+1}, \\
&\vdots \\
x_{2N} &= (1 - \alpha_{2N} - \gamma_{2N})x_{2N-1} - \alpha_{2N} T_N^2 \left[(1 - \beta_{2N} - \delta_{2N})x_{2N} - \beta_{2N} S_N^2 x_{2N} - \delta_{2N} v_{2N} \right] + \gamma_{2N} u_{2N}, \\
x_{2N+1} &= (1 - \alpha_{2N+1} - \gamma_{2N+1})x_{2N} - \alpha_{2N+1} T_1^3 \left[(1 - \beta_{2N+1} - \delta_{2N+1})x_{2N+1} - \beta_{2N+1} S_1^3 x_{2N+1} - \delta_{2N+1} v_{2N+1} \right] \\
&+ \gamma_{2N+1} u_{2N+1}, \\
&\text{şeklindedir.}
\end{aligned}$$

$x_0 \in K$ verilen keyfi bir nokta olsun. (3.2.1) tarafından üretilen kapalı iterasyon $\{x_n\}$ dizisi aşağıdaki kompakt form şeklinde yazılmalıdır;

$$(4.3.1) \quad \begin{cases} y_n = (1 - \beta_n - \delta_n)x_n + \beta_n S_{i(n)}^{k(n)} + y_n + \delta_n v_n; \\ x_n = (1 - \alpha_n - \gamma_n)x_{n-1} + \alpha_n T_{i(n)}^{k(n)} + y_n + \gamma_n u_n; \end{cases}$$

Burada $\forall n \geq 1$ için $n = (k(n) - 1)N + i(n) \in \{1, 2, \dots, N\}, k(n) \geq 1$

X bir Banach uzayı olsun ve K' da X 'in boş olmayan kapalı bir alt kümesi olsun.

$\{T_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ve $\{S_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ 'de K' dan K' ya, N 'er tane asimtotik olarak genişlemeyen dönüşüm olsun. Tüm $x, y \in K$ ve $n \geq 1$ için $\|T_i^n x - T_i^n y\| \leq \lambda_n^i \|x - y\|$ $i = 1, \dots, N$; için $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda_n^i \rightarrow 1$ olacak şekilde $\{\lambda_n^i\}, [1, \infty)$ aralığında bir dizi vardır.

Yine benzer şekilde $n \geq 1$ ve $x, y \in K$ için $\|S_i^n x - S_i^n y\| \leq \mu_n^i \|x - y\|$ $i = 1, \dots, N$ için; $n \rightarrow \infty$ iken $\mu_n^i \rightarrow 1$ ile $\{\mu_n^i\}$ dizisi $[1, \infty)$ aralığında bir dizi vardır. $h_n = \max\{\lambda_n^1, \lambda_n^2, \dots, \lambda_n^N, \mu_n^1, \mu_n^2, \dots, \mu_n^N\}$ denilirse $n \rightarrow \infty$ iken $h_n \rightarrow 1$ olacak şekilde $\{h_n\}, [1, \infty)$ aralığında bir dizi vardır.

Bu durumda tüm $x, y \in K$ ve her bir $i = 1, \dots, N$ için;

$$\|T_i^n x - T_i^n y\| \leq \lambda_n^i \|x - y\| \leq h_n \|x - y\|$$

ve

$$\|S_i^n x - S_i^n y\| \leq \mu_n^i \|x - y\| \leq h_n \|x - y\|$$

olur.

Ayrıca $\{T_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ve $\{S_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ K' dan K' ya asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümler ailesi olsun. Tüm $x, y \in K$ ve $n \geq 1$ için $L = \sup\{h_n : n \geq 1\}$ olduğunda $\|T_i^n x - T_i^n y\| \leq L\|x - y\|$ ve $\|S_i^n x - S_i^n y\| \leq L\|x - y\|$ olacak şekilde Lipschitzian sabit sayısı $L \geq 1$ ile $\{T_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ve $\{S_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ düzgün Lipschitzian'dır.

Tanım 4.3.1. Eğer tüm $x \in K$ 'lar için $\max_{1 \leq l \leq N} \left(\frac{1}{2} \|x - T_l x\| + \|x - S_l x\| \right) \geq f(d(x, F))$ olacak şekilde tüm $r \in [0, \infty)$ için $f(0) = 0$, $f(r) > 0$ ile $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ azalmayan bir dönüşüm varsa, $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i) \neq \emptyset$ olacak şekilde $\{T_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ailesi K' dan K' ya N tane asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümü ve $\{S_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ailesi K' dan K' ya N tane asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümü K' da **(A) şartını** sağlıyor denir.

X bir Banach uzayı ve K' da X 'in boş olmayan kapalı bir alt kümesi olsun. $\{T_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ve $\{S_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ 'de K' nın N 'er tane asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin iki sonlu ailesi olsun $\alpha_n + \gamma_n, \beta_n + \delta_n \in [0, 1]$ olacak şekilde $\{\alpha_n\}, \{\gamma_n\}, \{\beta_n\}, \{\delta_n\} \in [0, 1]$ ve herhangi bir $x_{n-1}, u_n, v_n \in K$ dizileri için $C_n : K \rightarrow K$ dönüşümü ;

$$C_n(x) = (1 - \alpha_n - \gamma_n)x_{n-1} + \alpha_n T_{i(n)}^{k(i)} \left[(1 - \beta_n - \delta_n)x + \beta_n S_{i(n)}^{k(n)} x + \delta_n v_n \right] + \gamma_n u_n \text{ olur.}$$

Herhangi $x, y \in K$ için aşağıdaki ifade yazılır.

$$\begin{aligned} \|C_n(x) - C_n(y)\| &= \left\| (1 - \alpha_n - \gamma_n)x_{n-1} + \alpha_n T_{i(n)}^{k(i)} \left[(1 - \beta_n - \delta_n)x + \beta_n S_{i(n)}^{k(n)} x + \delta_n v_n \right] + \gamma_n u_n \right. \\ &\quad \left. - (1 - \alpha_n - \gamma_n)x_{n-1} + \alpha_n T_{i(n)}^{k(i)} \left[(1 - \beta_n - \delta_n)y + \beta_n S_{i(n)}^{k(n)} y + \delta_n v_n \right] + \gamma_n u_n \right\| \\ &\leq \alpha_n L \left\| (1 - \beta_n - \delta_n)x + \beta_n S_{i(n)}^{k(n)} x + \delta_n v_n - (1 - \beta_n - \delta_n)y + \beta_n S_{i(n)}^{k(n)} y + \delta_n v_n \right\| \\ &\leq \alpha_n L \left[(1 - \beta_n - \delta_n)\|x - y\| + \beta_n \|S_{i(n)}^{k(n)} x - S_{i(n)}^{k(n)} y\| \right] \\ &\leq \alpha_n L \left[(1 - \beta_n - \delta_n)\|x - y\| + \beta_n L\|x - y\| \right] \\ &\leq \alpha_n L \left[(1 - \beta_n - \delta_n) + \beta_n L\|x - y\| \right] \\ &\leq \alpha_n L^2 \|x - y\| \end{aligned}$$

Eğer tüm $n \geq 1$ için $L^2 < \frac{1}{\alpha_n}$ olursa C_n bir büzülme dönüşümüdür. Teorem

2.4.20.'den $x_n \in K$ tek sabit noktası vardır:

$x_n = C_n(x) = (1 - \alpha_n - \gamma_n)x_{n-1} + \alpha_n T_{i(n)}^{k(i)} \left[(1 - \beta_n - \delta_n)x_n + \beta_n S_{i(n)}^{k(n)} x_n + \delta_n v_n \right] \gamma_n u_n$
yani (4.3.1) kapalı iterasyon süreci iyi tanımlıdır .

Lemma 4.3.2. X bir reel Banach uzayı olsun ve K 'da X 'in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $\{T_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ve $\{S_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ' de

$$F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i) \neq \emptyset$$

ile K 'dan K 'ya asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerinin sonlu iki ailesi olsun. $\{u_n\}, \{v_n\}$ 'ler ise K 'daki iki sınırlı dizi ve $\alpha_n + \gamma_n, \beta_n + \delta_n \in [0, 1]$ olacak şekilde $\{\alpha_n\}, \{\gamma_n\}, \{\beta_n\}, \{\delta_n\} \in [0, 1]$ dört reel dizi olsun. $\{h_n\}$ $n \rightarrow \infty$ iken $h_n \rightarrow 1$ olacak şekilde $[1, \infty)$ aralığında bir dizi ve $L = \sup \{h_n : n \geq 1\}$ olsun.

Aşağıdaki şartlar sağlanırsa;

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - 1) \alpha_n < \infty$$

$$2) \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1 ; 0 < \tau_1 = \inf \{\alpha_n : n \geq 1\} \leq \sup \{\alpha_n : n \geq 1\} = \tau < \frac{1}{L^2}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty , \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$$

O halde verilen herhangi bir $x_0 \in K$ noktası ve $\{x_n\}$ de (4.3.1) ile tanımlandığında

tüm $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i) \neq \emptyset$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ vardır.

İspat: (4.3.1)'den aşağıdaki eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} (4.1) \quad \|y_n - p\| &= \left\| \left((1 - \beta_n - \delta_n)x_n + \beta_n S_{i(n)}^{k(n)} x_n + \delta_n v_n \right) - p \right\| \\ &\leq (1 - \beta_n - \delta_n) \|x_n - p\| + \beta_n \|S_{i(n)}^{k(n)} x_n - p\| + \delta_n \|v_n - p\| \\ &\leq (1 - \beta_n - \delta_n) \|x_{n-1} - p\| + \beta_n h_n \|x_n - p\| + \delta_n \|v_n - p\| \end{aligned}$$

olsun. O zaman $M_2 = \sup_{n \geq 1} \|v_n - p\|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (4.2) \quad \|y_n - p\| &= (1 - \beta_n - \delta_n + \beta_n h_n) \|x_n - p\| + \delta_n M_2 \\ &\leq h_n \|x_n - p\| + \delta_n M_2 \end{aligned}$$

yazılır.

Böylece $\|y_n - p\| \leq h_n \|x_n - p\| + \delta_n M_2$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{Ayrıca} \quad \|x_n - p\| &= \left\| \left((1 - \alpha_n - \gamma_n)x_{n-1} + \alpha_n T_{i(n)}^{k(n)} y_n + \gamma_n u_n - p \right) \right\| \\ &\leq (1 - \alpha_n - \gamma_n) \|x_{n-1} - p\| + \alpha_n \|T_{i(n)}^{k(n)} y_n - p\| + \gamma_n \|u_n - p\| \end{aligned}$$

$$\leq (1 - \alpha_n - \gamma_n) \|x_{n-1} - p\| + \alpha_n h_n \|y_n - p\| + \gamma_n \|u_n - p\|$$

(4.1) , (4.2) 'de yerine yazılır ve $M_1 = \sup_{n \geq 1} \|u_n - p\|$ alınır.

$$(4.3) \quad \|x_n - p\| = (1 - \alpha_n - \gamma_n) \|x_{n-1} - p\| + \alpha_n h_n^2 \|x_{n-1} - p\| + \alpha_n h_n \delta_n M_2 + \gamma_n M_1$$

elde edilir. $K_n = \alpha_n h_n \delta_n M_2 + \gamma_n M_1$ olsun.

Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{h_n\}$ dizilerinin sınırlılığı ve 3) şartından $\sum_{k=1}^{\infty} K_n < \infty$ elde edilir. 2) şartından $\alpha_n h_n^2 \leq \tau L^2 < 1$ ve böylece $1 - (\alpha_n h_n^2) \geq 1 - \tau L^2 > 0$ elde edilir. (4.3)'den

$$(4.4) \quad \|x_n - p\| \leq \frac{(1 - \alpha_n)}{(1 - \alpha_n h_n^2)} \|x_{n-1} - p\| + \frac{K_n}{(1 - \alpha_n h_n^2)}$$

bulunur. Şimdi

$$\frac{1 - \alpha_n}{1 - \alpha_n h_n^2} = 1 + \frac{(h_n^2 - 1)\alpha_n}{1 - \alpha_n h_n^2} \leq 1 + \frac{(h_n^2 - 1)\alpha_n}{1 - \tau L^2}$$

ve

$$\frac{(h_n^2 - 1)\alpha_n}{1 - \tau L^2} \leq \frac{(h_n - 1)(h_n + 1)\alpha_n}{1 - \tau L^2} \leq \frac{(h_n - 1)\alpha_n(L + 1)}{1 - \tau L^2}$$

eşitsizliklerinden

$$(4.5) \quad \|x_n - p\| \leq (1 - \sigma_n) \|x_{n-1} - p\| + t_n$$

elde edilir. Burada $\sigma_n = \frac{(h_n - 1)\alpha_n(L + 1)}{1 - \tau L^2}$ ve $t_n = \frac{K_n}{(1 - \alpha_n h_n^2)}$ verilen kabullerden

$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} t_n < \infty$ elde edilir.

Buna göre her $p \in F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ vardır.

Böylece ispat biter.

Teorem 4.3.3. X , bir reel Banach uzayı olsun ve K 'da X 'in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $\{T_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ve $\{S_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ' de

$$F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i) \neq \emptyset$$

ile K 'dan K 'ya asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerinin sonlu iki ailesi olsun. $\{u_n\}, \{v_n\}$ 'ler ise K 'daki iki sınırlı dizi ve $\alpha_n + \gamma_n, \beta_n + \delta_n \in [0, 1]$ olacak şekilde $\{\alpha_n\}, \{\gamma_n\}, \{\beta_n\}, \{\delta_n\} \in [0, 1]$ dört reel dizi olsun. $\{h_n\}$ $n \rightarrow \infty$ iken $h_n \rightarrow 1$ olacak şekilde $[1, \infty)$ aralığında bir dizi ve $L = \sup\{h_n : n \geq 1\}$ olsun.

Aşağıdaki şartlar sağlanırsa;

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - 1) \alpha_n < \infty$$

$$2) \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1 ; 0 < \tau_1 = \inf\{\alpha_n : n \geq 1\} \leq \sup\{\alpha_n : n \geq 1\} = \tau < \frac{1}{L^2}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$$

o zaman (4.3.1)'de tanımlanmış $\{x_n\}$ dizileri $p \in F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i)$ ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsaktır ancak ve ancak

$$(4.6) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0 \text{ olur.}$$

İspat: Gerekliklik aşıkardır. Şimdi de Teorem 4.3.3'nin yeterliliğini göstereceğiz.

$p \in F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i)$ için (4.5), $d(x_n, F) \leq (1 + \sigma_n)d(x_{n-1}, F) + t_n$ elde edilir.

Burada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$ 'dur. Böylece bütün $n \geq 1$ için

$$(4.7) \quad d(x_n, F) \leq (1 + \sigma_n)d(x_{n-1}, F) + t_n$$

elde edilir.

(4.7)'den ve Lemma 4.3.2'den $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F)$ vardır. $\liminf_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ olur.

Şimdi $\{x_n\}$ 'nin K 'da Cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz.

Bütün $z > 0$ için $1 + z \leq \exp(z)$ olduğu Ortalama Değer Teoreminden bilinmektedir.

(4.6) dan herhangi bir $p \in F$ için m ve n doğal sayıları verildiğinde;

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - p\| &\leq \exp\left(\sum_{i=n+1}^{n+m} \sigma_i\right) \|x_n - p\| + \exp\left(\sum_{i=n+2}^{n+m} \sigma_i\right) \left(\sum_{i=n+1}^{n+m} t_i\right) \\ &\leq M \|x_n - p\| + M \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} t_i\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $M = \exp\left\{\sum_{i=n+1}^{\infty} \sigma_n\right\} < +\infty$ 'dir. Burada $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ olduğu için

herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, burada bütün $n \geq N_0$ için $d(x_n, F) < \frac{\varepsilon}{2(1+M)}$ ve

$\sum_{i=n+1}^{\infty} t_i < \frac{\varepsilon}{2M}$ olacak şekilde bir N_0 doğal sayısı vardır. $\|x_n - p_1\| < \frac{\varepsilon}{2(1+M)}$ olacak

şekilde $p_1 \in F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i)$ vardır. Böylece tüm $n \geq N_0$ ve $m \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - p_1\| + \|x_n - p_1\| \\ &\leq (1+M) \|x_n - p_1\| + M \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} t_i\right) \end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{(1+M)\varepsilon}{2(1+M)} + \frac{M\varepsilon}{2M} \right) = \varepsilon \text{ elde edilir.}$$

Bu durum $\{x_n\}$ dizisinin K 'da bir Cauchy dizisi olduğunu göstermektedir.

X uzayı tam olduğundan $\{x_n\}$ yakınsaktır. $\{x_n\}$ 'nin bir p noktasında yakınsadığını kabul edelim. Bu durumda $p \in K$ olur. Çünkü K , X 'in kapalı bir alt kümesidir.

$F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i)$ kümesi kapalıdır. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ olması $d(p, F) = 0$

sonucunu vermektedir. Böylece $p \in F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i)$ 'dir.

Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.3.4. X bir reel Banach uzayı olsun ve K 'da X 'in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $\{T_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ve $\{S_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ' de

$$F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i) \neq \emptyset$$

ile K 'dan K 'ya asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerinin sonlu iki ailesi olsun. $\{u_n\}, \{v_n\}$ 'ler ise K 'daki iki sınırlı dizi ve $\alpha_n + \gamma_n, \beta_n + \delta_n \in [0, 1]$ olacak şekilde $\{\alpha_n\}, \{\gamma_n\}, \{\beta_n\}, \{\delta_n\} \in [0, 1]$ dört reel dizi olsun. $\{h_n\}$ $n \rightarrow \infty$ iken $h_n \rightarrow 1$ olacak şekilde $[1, \infty)$ aralığında bir dizi ve $L = \sup \{h_n : n \geq 1\}$ olsun.

Aşağıdaki şartlar sağlarsa ;

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - 1) \alpha_n < \infty$$

$$2) \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1 ; 0 < \tau_1 = \inf \{\alpha_n : n \geq 1\} \leq \sup \{\alpha_n : n \geq 1\} = \tau < \frac{1}{L^2}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$$

o halde verilen $x_0 \in K$ noktası için $\{x_n\}$ 'de (4.3.1) tarafından tanımlandığında tüm

$F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i) \neq \emptyset$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ vardır. Yani $p \in K$ için, $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$

dizileri (4.3.1) tarafından tanımlanırsa;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_l x_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_l x_n - x_n\| = 0, \forall l = 1, 2, \dots, N$$

elde edilir.

İspat:

Lemma 4.3.2'den $p \in F$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ vardır.

$$(4.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = d$$

olsun. Eğer $d = 0$ olursa ispat tamamlanır. Şimdi $d > 0$ olsun. O zaman (4.8) ve (4.3.1)'den

$$\|x_n - p\| = \|(1 - \alpha_n)[(x_{n-1} - p) + \gamma_n(u_n - x_{n-1})] + \alpha_n[T_{i(n)}^{k(n)} y_n - p] + \gamma_n(u_n - x_{n-1})\| \quad (4.9)$$

elde edilir.

(4.8) ve (3) şartına göre elimizde

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)[(x_{n-1} - p) + \gamma_n(u_n - x_{n-1})]\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha_n) \|x_{n-1} - p\| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n \|u_n - x_{n-1}\| = d \quad (4.10)$$

yazılır.

Buradan

$$\begin{aligned} (4.11) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(T_{i(n)}^{k(n)} y_n - p) + \gamma_n(u_n - x_{n-1})\| & \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(T_{i(n)}^{k(n)} y_n - p)\| \\ & \quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \gamma_n \|u_n - x_{n-1}\| \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (h_n) \|y_n - p\| \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} h_n \|x_n - p\| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n \|v_n - x_{n-1}\| = d \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

(4.9) – (4.11)'den

$$(4.12) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(T_{i(n)}^{k(n)} y_n - x_{n-1})\| = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

(4.2) ve (4.12)'den

$$\begin{aligned} \|x_n - x_{n-1}\| &= \|(1 - \alpha_n - \gamma_n)x_{n-1} - x_{n-1} + \alpha_n T_{i(n)}^{k(n)} y_n + \gamma_n u_n\| \\ &\leq \alpha_n \|T_{i(n)}^{k(n)} y_n - x_{n-1} + \gamma_n(u_n - x_{n-1})\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(4.13) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{n-1}\| = 0$ elde edilir. Buradan $\forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$ için

$$(4.14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{n+j}\| = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \|x_n - p\| &= \|(1 - \alpha_n - \gamma_n)x_{n-1} + x_{n-1} + \alpha_n T_{i(n)}^{k(n)} y_n + \gamma_n u_n - p\| \\ &\leq (1 - \alpha_n - \gamma_n) \|x_{n-1} - p\| + \alpha_n \|T_{i(n)}^{k(n)} y_n - p\| + \gamma_n \|u_n - p\| \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|x_{n-1} - T_{i(n)}^{k(n)} y_n\| + \|T_{i(n)}^{k(n)} y_n - p\| + \gamma_n \|u_n - x_{n-1}\| \end{aligned}$$

ifadesinden $\|y_n - p\| \leq d$ elde edilir.

Ayrıca (4.1) eşitsizliğinin her iki tarafına limsup uygulanırsa

$$(4.15) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| \leq d \text{ bulunur.}$$

Buradan

$$(4.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - p\| = \|(1 - \beta_n)x_n - p + \delta_n(v_n - x_n) + \beta_n S_{i(n)}^{k(n)} x_n - p + \delta_n(v_n - x_n)\|$$

olduğundan

$$(4.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \beta_n)x_n - p + \delta_n(v_n - x_n)\| \leq d$$

ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|S_{i(n)}^{k(n)} x_n - p + \delta_n(v_n - x_n)\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|S_{i(n)}^{k(n)} x_n - p\| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n(v_n - x_n)\| \leq d$$

olur.

(4.16) ve (4.17)'den

$$(4.18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{i(n)}^{k(n)} x_n - x_n\| = 0$$

ve

$$(4.19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{i(n)}^{k(n)} x_n - x_{n-1}\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{i(n)}^{k(n)} x_n - x_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_{n-1}\| = 0 \text{ olur.}$$

Gerçekten de $n > N$, $n = (n - N)(\text{mod } N)$ ve $n = (k(n) - 1)N + i(n)$, $i(n) \in \{1, \dots, N\}$

için $\varphi_n = \|S_{i(n)}^{k(n)} x_n - x_{n-1}\|$ alınırsa (4.19)'dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = 0$ olur.

O zaman

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \|S_n x_n - x_{n-1}\| &\leq \|S_{i(n)}^{k(n)} x_n - x_{n-1}\| + \|S_{i(n)}^{k(n)} x_n - S_n x_n\| \\ &\leq \varphi_n + \|S_{i(n)}^{k(n)} x_n - S_{i(n)} x_n\| \\ &\leq \varphi_n + L \|S_{i(n)}^{k(n)-1} x_n - x_n\| \\ &\leq \varphi_n + L \|S_{i(n)}^{k(n)-1} x_n - S_{i(n-N)}^{k(n)-1} x_n - N\| \\ &\quad + \|S_{i(n)}^{k(n)-1} x_n - x_{(n-N)-1}\| + \|x_n - x_{(n-N)-1}\| \end{aligned}$$

yazılabilir.

Her $n > N$, $n = (n - N)(\text{mod } N)$ ve $n = (k(n) - 1)N + i(n)$ için

$n - N = (k(n) - 1)N + i(n) = (k(n - N) - 1) + i(n - N)$ olur.

Diğer bir değişle $k(n - N) = k(n) - 1$ and $i(n - N) = i(n)$ ' dir.

Böylece aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \|S_{i(n)}^{k(n)-1} x_n - S_{i(n-N)}^{k(n)-1} x_{(n-N)}\| &= \|S_{i(n)}^{k(n)-1} x_n - S_{i(n)}^{k(n)-1} x_{n-N}\| \\ &\leq L \|x_n - x_{(n-N)}\| \end{aligned}$$

$$(4.22) \quad \|S_{i(n-N)}^{k(n)-1} x_{n-N} - x_{(n-N)-1}\| = \|S_{i(n-N)}^{k(n-N)} x_{n-N} - x_{(n-N)-1}\| = \varphi_{n-N}$$

(4.21) ve (4.22), (4.20)'de yerine yazılırsa:

$$(4.23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n x_n - x_{n-1}\| = 0 \text{ elde edilir.}$$

Böylece (4.13)'ten

$$(4.24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n x_n - x_n\| = 0 \text{ olur.}$$

Böylece $\forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$ için (4.14) ve (4.24)'ten

$$(4.25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{n+j} x_n - x_n\| = 0 \text{ olur.}$$

Bunu da $\bigcup_{j=1}^N \left\{ \|S_{n+j} x_n - x_n\| \right\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty)$ için yazılabilir.

Buradan

$$(4.26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_l x_n - x_n\| = 0, \forall l \in \{1, 2, \dots, N\} \text{ elde edilir.}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} & \|T_{i(n)}^{k(n)} x_n - x_n\| \\ & \leq \|T_{i(n)}^{k(n)} x_n - T_{i(n)}^{k(n)} x_{n-1}\| + \|T_{i(n)}^{k(n)} y_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_n\| \\ & \leq (1 + h_n) \|x_{n-1} - x_n\| + h_n \|x_{n-1} - y_n\| + \|T_{i(n)}^{k(n)} y_n - x_{n-1}\| \\ & = (1 + h_n) \|x_{n-1} - x_n\| + h_n \left\| x_{n-1} - \left[(1 - \beta_n - \delta_n) x_n + \beta_n S_{i(n)}^{k(n)} x_n + \delta_n v_n \right] \right\| + \|T_{i(n)}^{k(n)} y_n - x_{n-1}\| \\ & = (1 + h_n) \|x_{n-1} - x_n\| + h_n \left\| (1 - \beta_n)(x_n - x_{n-1}) + \beta_n (S_{i(n)}^{k(n)} x_n - x_{n-1}) + \delta_n (v_n - x_n) \right\| + \|T_{i(n)}^{k(n)} y_n - x_{n-1}\| \\ & \leq (1 + h_n) \|x_{n-1} - x_n\| + h_n \left[(1 - \beta_n) \|x_n - x_{n-1}\| + \beta_n \|S_{i(n)}^{k(n)} x_n - x_{n-1}\| + \delta_n \|v_n - x_n\| \right] + \|T_{i(n)}^{k(n)} y_n - x_{n-1}\| \end{aligned}$$

bulunur.

Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının $\lim_{n \rightarrow \infty}$ alınırsa (4.12), (4.13), (4.19) ve 3)

şartından ; $\forall l \in \{1, 2, \dots, N\}$ için

$$(4.27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{i(n)}^{k(n)} x_n - x_n\| = 0$$

Benzer şekilde ;

$$(4.28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_l x_n - x_n\| = 0$$

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.5. X bir reel Banach uzayı olsun ve K 'da X 'in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $\{T_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ve $\{S_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ' de

$$F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i) \neq \emptyset$$

ile K 'dan K 'ya asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerinin sonlu iki ailesi olsun. $\{u_n\}, \{v_n\}$ 'ler ise K 'daki iki sınırlı dizi ve $\alpha_n + \gamma_n, \beta_n + \delta_n \in [0, 1]$ olacak şekilde $\{\alpha_n\}, \{\gamma_n\}, \{\beta_n\}, \{\delta_n\} \in [0, 1]$ dört reel dizi olsun. $\{h_n\}$ $n \rightarrow \infty$ iken $h_n \rightarrow 1$ olacak şekilde $[1, \infty)$ aralığında bir dizi ve $L = \sup \{h_n : n \geq 1\}$ olsun.

Aşağıdaki şartlar sağlanırsa;

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - 1) \alpha_n < \infty$$

$$2) \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1 ; 0 < \tau_1 = \inf \{ \alpha_n : n \geq 1 \} \leq \sup \{ \alpha_n : n \geq 1 \} = \tau < \frac{1}{L^2}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty , \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$$

Bu şartlarla (4.3.1) tarafından tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi $\{T_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ve $\{S_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ortak sabit noktasına zayıf yakınsaktır.

İspat: $p \in F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i)$ olsun. Bu durumda Lemma 4.3.2.'deki gibi $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ vardır ve $n \geq 1$ için $\{x_n\}$, K 'da sınırlıdır. X 'in refleksif olması ve $\{x_n\}$ 'in sınırlılığı dolayısıyla $\{x_n\}$ 'nin $\{x_{n_j}\} \rightarrow p$ zayıf yakınsak olacak şekilde $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi vardır. Lemma 3.2.10.'dan bütün $i \in \{1, \dots, N\}$ için $\omega(x_n) \subset F(T_i)$ ve $\omega(x_n) \subset F(S_i)$ elde ederiz. Böylece $\omega(\{x_n\}) \subset F$ olur. Son olarak $\{x_n\}$ 'nin p 'ye yakınsaklığını gösterelim. $p, q \in \omega(\{x_n\})$ olduğunu kabul edelim. Burada $\omega(\{x_n\})$ $\{x_n\}$ 'in zayıf limit kümesi anlamına gelir.

$\{x_{n_j}\}$ ve $\{x_{m_j}\}$, $\{x_n\}$ 'in sırasıyla p ve q 'ya zayıf bir şekilde yakınsayan iki alt dizisi olsun. Opial şartı gereği $\omega(x_n)$ tek olur. Dolayısıyla $p = q$ olur. Böylece $\{x_n\}$ $p \in F$ 'ye zayıf yakınsaktır.

Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.6. X bir reel Banach uzayı olsun ve K 'da X 'in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $\{T_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ve $\{S_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ 'de

$$F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap F(S_i) \neq \emptyset$$

ile K 'dan K 'ya asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerinin sonlu iki ailesi olsun. $\{u_n\}, \{v_n\}$ 'ler ise K 'daki iki sınırlı dizi ve $\alpha_n + \gamma_n, \beta_n + \delta_n \in [0, 1]$ olacak şekilde $\{\alpha_n\}, \{\gamma_n\}, \{\beta_n\}, \{\delta_n\} \in [0, 1]$ dört reel dizi olsun. $\{h_n\}$ $n \rightarrow \infty$ iken $h_n \rightarrow 1$ olacak şekilde $[1, \infty)$ aralığında bir dizi ve $L = \sup \{h_n : n \geq 1\}$ olsun.

Aşağıdaki şartlar sağlanırsa ;

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - 1) \alpha_n < \infty$$

$$2) \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1 ; 0 < \tau_1 = \inf \{ \alpha_n : n \geq 1 \} \leq \sup \{ \alpha_n : n \geq 1 \} = \tau < \frac{1}{L^2}$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty , \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$$

O halde $x_0 \in K$ verilen herhangi bir nokta ve (4.3.1) tarafından tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi tüm $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$ 'ler için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ vardır.

Yani $\{T_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ve $\{S_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ dönüşümleri yarı kompakt veya (A) şartını sağlıyorsa, o halde (4.3.1) tarafından tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi $\{T_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ve $\{S_i : i \in \{1, \dots, N\}\}$ ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsaktır.

İspat:

$\{T_1\}$ ve $\{S_1\}$ 'nin yarı kompakt olduğunu veya (A) şartını sağladığını kabul edelim.

Lemma 4.3.4.'teki (4.26) ve (4.28)'e göre $\{T_1\}$ ve $\{S_1\}$ 'in yarı kompakt oluşuyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_1 x_n\| = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - S_1 x_n\| = 0 \text{ dır.}$$

$\{x_n\}$ 'nin $j \rightarrow \infty$ iken $\{x_{n_j}\} \rightarrow p \in F$ olan $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi vardır. Lemma 4.3.4.'teki (4.26) ve (4.28)'den bütün $l = \{1, 2, \dots, N\}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T_l x_{n_j}\| = \|p - T_l p\| = 0 \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - S_l x_{n_j}\| = \|p - S_l p\| = 0 \text{ 'dır}$$

Buna göre $p \in F$ 'dir. $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F)) = 0$ olduğu için $\{x_n\}$ 'in F 'de sabit bir noktaya yakınsadığını gösterir. Eğer $\{T_1\}$ ve $\{S_1\}$ (A) şartını sağlıyorsa $\liminf_{n \rightarrow \infty} f(d(x_n, F)) = 0$ 'dır. Teorem 4.3.3.'den $\{x_n\}$ 'nin F 'de sabit bir noktaya kuvvetli yakınsadığını gösterir.

Bu durum ispatı tamamlamaktadır.

5.SONUÇ ve ÖNERİLER

Genellikle iterasyon dizilerinin yakınsaklıkları genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümler için son zamanlarda çok çalışılan bir konudur. Özellikle, yakın tarihlerde sunulan Mann (bir-adım), Ishikawa (iki-adım) ve Noor (üç-adım) iterasyon dizilerinin genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan dönüşümler için kuvvetli ve zayıf yakınsaklıkları için yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmada, Banach uzaylarında asimtotik olarak genişlemeyen dönüşümlerin kapalı iterasyon dizileri oluşturarak kaynaklar kısmında verilen çalışmalar ışığında asimtotik genişlemeyen dönüşümlerin ve onun genişlemeleri olan dönüşümlerin sabit noktalara ve sonlu sayıdaki böyle dönüşümlerin ortak sabit noktaya yaklaşımı elde edilmeye çalışılmaktadır. Bunların ışığında, yeni geliştirilmiş iterasyon dizilerinin genişlemeyen ve onun genelleşmeleri olan sonlu sayıdaki iki dönüşüm için ortak sabit noktaya yaklaşımı incelenebilir.

KAYNAKLAR

- BAYRAKTAR, M., 1992. Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Yayınları, 2
- BERİNDE, V., 2004. Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators, *Fixed Point Theory and Applications*, V:2004-2, 97-106
- BERİNDE, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, *Lecture Notes in Math.*
- BERİNDE, V., BORCUT, V. , 2011. Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces. *Nonlinear Anal*, 74 : 4889–4897.
- BROWDER, F. E., 1976. Nonlinear operators an nonlinear equations of evolution in Banach spaces. *Proc Sympos Pure MATH.*, 18; 2, Amer. Math. Soc. Providence.
- CHANG, S.S. and ZHOU, Y.Y., 2003. Some convergence theorems for mapping of asymptotically quasi-nonexpansive type in Banach spaces. *J. Appl. Math & Computing*, 112:119–127.
- CHANG, S. S., CHO, Y. J. and ZHOU, H., 2001. Demi-closed principle and weak convergence problem for asymptotically nonexpansive mappings, *J.Korean Math. Soc.*, 38, 1245-1260
- CHIDUME, C.E., OFOEDU, E. U., ZEGEYE, H., 2003. Strong and weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 280: 364–374.
- CIANCIARUSO, F., MARINO, G. and WANG, X., 2010. Weak and strong convergence of the Ishikawa iterative process for a finite family of asymptotically nonexpansive mappings, *Appl. Math. and Comp.* 216: 3558–3567.
- DOTSON, W.G.J., 1970. On the Mann iterative process. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 149: 65–73.
- GUO, F., 2007. Convergence of implicit iterative process with errors for a finite family of asymptotically nonexpansive mappings. *Acta Mathematica Scientia*, 26(A) 7: 1131–1143.
- GHOSH, M.K. and DEBNAHT, L., 1997. Convergence of Ishikawa iterates of quasi nonexpansive mapping. *J. Math. Anal. Appl.*, 207: 96–103.
- GLOWINSKI, R., TALLEC, P. L. , 1989. Augmented Lagrangian and Operator Splitting Methods in Nonlinear Mechanics. SIAM, Philadelphia.
- GOEBEL, K. and KIRK, W.A., 1972. A fixed point theorem for asymptotically non-expansive mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 35: 171–174.
- GOEBEL, K. and KIRK, W.A., 1990. Topics in metric fixed point theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 28:252
- OPIAL, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 73 : 591–597
- ISHIKAWA, S., 1974. Fixed points by a new iteration method. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 44: 147–150.
- KIRK, W. A., 1971. On successive approximation for nonexpansive mappings in Banach spaces, *Glasgow Math. J.*, 6-9.
- KOLMOGOROV, A.N., FOMIN, S.V., 1970. Introductory Real Analysis. Prentice-Hall Inc. , London.

- KRASNOSELSKIJ, M.A., 1955. Two remarks on the method of successive approximations, *Uspahi Math. Nauk* 10 no:1 (63) ,123-127
- LIU, J.A., 2002. Some convergence theorems of implicit iterative process for non-expansive mappings in Banach spaces. *Mathematical Communications* 7: 113–118.
- MANN, W.R., 1953. Mean value methods in iteration. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4: 506-510.
- NOOR, M.A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities. *J. Math. Anal. Appl.*, 251: 217–229.
- PETRYSHYN, W.V. and WILLIAMSON, T.E., 1973. Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mapping. *J. Math. Anal. Appl.*, 43: 459–497.
- PICARD, E.(Charles), 1890. *Jour. de Math.*, (4) 6, 145-210
- QIN, X. , CHO, Y.J. , SHANG, M., 2009. Convergence analysis of implicit iterative algorithms for asymptotically nonexpansive mappings , *Convergence Anal. App. Maths and Comp*, 210, 542–550
- ROYDEN, H. L., 1968. *Real Analysis* (2nd eddition). Mcmillan, New York.
- SCHU, J., 1991. Iterative construction of a fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, 158, 407-413.
- SUN, Z.H., 2003. Strong convergence of an implicit iteration process for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings . *J. Math. Anal. Appl.*, 286: 351–358.
- TAN, K.K. and XU, H.K., 1993. The nonlinear ergodic theorem for asymptotically nonexpansive mapping in Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 114, 2: 399–411.
- ZHOU Y. and CHANG, S.S., 2002. Convergence of implicit iteration process for a finite family of asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 23: 911–921.
- XU, H. K., 1991. Inequalities in Banach spaces with applications. *Nonlinear Anal.*, 16, 1127-1138.
- XU H. K. and ORI R. G., 2001. An implicit iteration process for nonexpansive mappings, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 22, 5–6: 767–773.
- XU, B.L. and NOOR, M.A., 2002. Fixed-point iterations for asymptotically non-expansive mappings in Banach spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 267: 444–453.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

ADI, SOYADI : Harun ÇİÇEK
UYRUĞU : T.C.
DOĞUM YERİ VE TARİHİ : BİTLİS \26.05.1989
TELEFON : 0(551) 408 62 01
e-mail : haruncicek@harran.edu.tr

EĞİTİM

DERECE	ADI	İL	BİTİRME YILI
LİSE	: Selahaddin Eyyubi Lisesi	BİTLİS	2007
ÜNİVERSİTE	: Dumlupınar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	KÜTAHYA	2012
YÜKSEK LİSANS:	Harran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	ŞANLIURFA	2015

İŞ DENEYİMİ

YIL	KURUM	GÖREV
2013-Halen	Harran Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

UZMANLIK ALANI : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

YABANCI DİL : İngilizce (KPDS: 77.5)

YAYIN VE BİLDİRİLER: XXVI. Ulusal Matematik Sempozyumu “Asimtotik Non-expansive Dönüşümlerin İki Sonlu Ailesi İçin Kapalı İterasyon Sürecinin Kuvvetli ve Zayıf Yakınsaklıkları” konulu bildiri sunumu (4-7 Eylül 2013, DİYARBAKIR).