

**T.C.
İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İNTEGRALLENEBİLİR DENKLEMLER İÇİN SOLİTON
ÇÖZÜMLER VE UYGULAMALARI**

Büşra Kutlu

Danışman

Prof. Dr. Doğan Kaya

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
İSTANBUL-2015**

KABUL VE ONAY SAYFASI

BÜŞRA KUTLU tarafından hazırlanan “**İNTEGRALLENEBİLİR DENKLEMLER İÇİN SOLİTON ÇÖZÜMLER VE UYGULAMALARI**” adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri üyeleri önünde İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman **Prof. Dr. Doğan KAYA**
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. İsmail KÜÇÜK**
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. İsmail KÖMBE**
İstanbul Ticaret Üniversitesi

Enstitü Müdürü: **Prof. Dr. Doğan KAYA**

AKADEMİK VE ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

Tarih

İmza

Büşra Kutlu

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1.GİRİŞ	1
2.LİTERATÜR ÖZETİ	4
3.TEMEL KAVRAMLAR	9
3.1 İntegrallenebilirlik.....	13
3.2 Painlevé Analizi ve İntegrallenebilirlik	14
3.3 Adi Diferansiyel Denklemler İçin Painlevé Analizi (ARS Algoritması)	15
3.4 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler İçin Painlevé Analizi (WTC Algoritması) ...	18
3.5 Painlevé Analizi için Yeni bir Yaklaşım.....	20
4. HİROTA METODU	24
5. BASİTLEŞTİRİLMİŞ HİROTA METODU	28
6. KORTEWEG-de VRIËS-BURGERS' DENKLEMİ	30
6.1 Burgers' Denklemi	31
6.2 KdV Denklemi	32
6.3 KdVB Denkleminin Tam Çözümü Üzerine Yeni Bir Yaklaşım.....	36
7. GENELLEŞTİRİLMİŞ KAWAHARA DENKLEMİ	43
7.1 Genelleştirilmiş Kawahara Denklemin Tam Çözümü Üzerine Yeni Bir Yaklaşım.....	45
8. SONUÇ VE ÖNERİLER	54
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	59

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İNTEGRALLENEBİLİR DENKLEMLER İÇİN SOLİTON ÇÖZÜMLER VE UYGULAMALARI

Büşra Kutlu

İstanbul Ticaret Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Doğan Kaya
2015, 59 sayfa

Bu çalışmada, Korteweg- de Vries-Burgers denkleminin ve genelleştirilmiş Kawahara denkleminin integrallenemez olduğu Painlevé testi kullanılarak gösterilmiştir. Her iki denklem için Painlevé analizinin yeni bir yaklaşımı, teorik olarak kurulmuştur. Daha sonra integrallenemez bir denklemin genel değil özel tam çözümünün olacağı belirtilmiştir. Denklemlerin tam çözümü ise Hirota metodu ve basitleştirilmiş Hirota metodu ile bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Basitleştirilmiş Hirota metodu, Genelleştirilmiş Kawahara denklemi, Hirota metodu, Painlevé testi, Korteweg-de Vries-Burgers denklemi, soliton.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

SOLITON SOLUTIONS TO INTEGRABLE EQUATIONS WITH APPLICATIONS

BüşraKutlu

**Istanbul Commerce University
Institute of Science and Technology
Department of Mathematics**

**Supervisor: Prof. Dr. Doğan Kaya
2015, 59 pages**

In this study, by using Painlevé test, it is determined that the Korteweg- de Vries-Burgers' equation and generalized Kawahara equation are nonintegrable. Painlevé analysis was established as a new approach to both theoretical equations. Then, it is expressed that a nonintegrable equation has exact solution not general solution. As a final, the exact solutions of the equations are obtained by using a simplified Hirota method.

Keywords: Generalized Kawahara Equation, Hirota Method, Painlevé test, Korteweg-de Vries-Burgers Equation, Simplified Hirota Method, Solitons.

TEŞEKKÜR

Bu alıŐma için beni yönlendiren, bilgi ve tecrübesiyle karŐılaŐtıđım her türlü zorlukları aŐmamda yardımcı olan kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Doğan Kaya'ya teŐekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca her konuda destek veren ve yardımcı olan değerli hocam Doç. Dr. Necip ŐimŐek'e ve arkadaŐım ArŐ. Gör. Elif Nuray'a teşekkür ederim. Ayrıca araŐtırmanın yürütülmesinde Mathematica programlama dilini öğrenmemde yardımcı olan İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü'nden Yard. Doç. Dr. Mehmet Cevri hocama teşekkür ederim.

Tezimin her aŐamasında ihmal ettiğim aileme sevgi ve saygılarımı sunar teŐekkürü bir borç bilirim.

Büşra Kutlu
İSTANBUL, 2015

ŞEKİLLER

	Sayfa
Şekil 1.1. Russell'ın dalga çevrimi.....	2
Şekil 1.2. Bir solitary dalga.....	3
Şekil 1.3. İlerleyen dalga.....	3
Şekil 2.1. Kırık dalga	4
Şekil 2.2. Periyodik dalga.....	5
Şekil 2.3. Tepe noktalı dalga.....	5
Şekil 2.4. İki solitonun çarpışarak sağa doğru hareket etmesi.....	6
Şekil 6.1. 3D-KdV denkleminin bir soliton çözümü.....	35
Şekil 6.2. 2D-KdV denkleminin bir soliton çözümü.....	35
Şekil 6.3.1. 3D-KdVB denkleminin bir soliton çözümü.....	41
Şekil 6.3.2. 2D-KdVB denkleminin bir soliton çözümü.....	41
Şekil 7.1. 3D-Genelleştirilmiş Kawahara denkleminin bir soliton çözümü...	53
Şekil 7.2. 2D-Genelleştirilmiş Kawahara denkleminin bir soliton çözümü...	53

SİMGELER VE KISALTMALAR

ADD	Adi diferansiyel denklem
ARS	Ablowitz- Ramani-Segur algoritması
GKD	Genelleştirilmiş Kawahara denklemi
KdV	Korteweg-de Vries denklemi
KdVB	Korteweg-de Vries-Burgers' denklemi
KDD	Kısmi diferansiyel denklem
KD	Kawahara denklemi
KP	KadomtsevPetviashvili denklemi
P-türünden	Painlevé özelliğine sahip
WTC	Weiss-Tabor-Carnavale algoritması

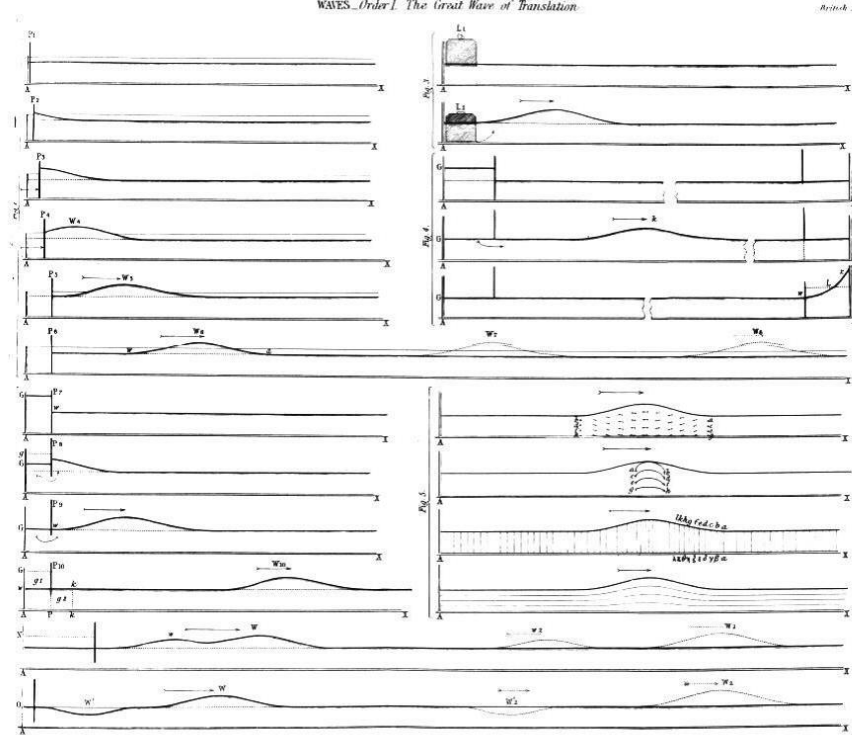
1. GİRİŞ

Doğadaki birçok olay lineer değildir. Lineer olmayan bir olayın matematiksel modellenmesi ise genellikle zamana bağlı diferansiyel denklemler ile açıklanır. Modellemesi yapılan olayların diferansiyel denkleminin çözümü, bize olayların durumu hakkında değerli bilgiler verir. Bu yüzden lineer olmayan olaylar araştırmacılar tarafından, üzerinde oldukça yoğunlaşılacak bir konu olmuştur. Hayatımızda ise bizi etkileyen ve yaşantımızı kolaylaştıran birçok durum dalga kavramı ile açıklanmaktadır. Dalga, bir cismin ortamdaki sarsıntıyla yeni düzene geçtiği hal olarak tanımlanabilir. Dalgalara; deprem esnasındaki yer küre hareketi sonucu oluşan tsunamiler, radyo, televizyon, telefon vb. cihazlardaki elektromanyetik dalgalar ve ses dalgaları örnek olarak verilebilir. Bir taş, suya atıldığında, taşın çevresinde oluşan su dalgaları görülür. Sarsıntının çevresinde, su üzerinde yüzen bir cisim varsa cismin aşağı yukarı hareket ettiği; fakat sarsıntının olduğu yerden başka yöne doğru hareket etmediği görülür. Yani sarsıntı meydana geldiği zaman, hareket eden su değil, dalgadır (Whitham, 1974).

Dalgalar, oluşması esnasında ve sonrasında şekillerini değiştirmiyorsa, bu dalgalara "solitary dalga" adı verilmektedir. Solitary dalgalar ilk olarak, 1834 yılında İskoçyalı bilim adamı J. Scott Russell tarafından gözlemlenmiştir. Russell, Edinburg-Glasgow kanalında fark ettiği dalgaları, "Dalgalar Raporu" adlı bilimsel raporunda (York Eylül 1844 (Londra 1845)) şu cümleleri ile anlatmıştır:

"Ben iki at gücüyle giden bir botun, dar bir kanaldan geçerken hareketini gözlüyordum. Bot aniden durunca kanalda hareketli olan su kitlesinin birikmediğini gördüm. Bu su kitlesi, botun uç kısmı etrafında birikti. Ve daha sonra aniden arkaya doğru yayıldı. Büyük bir hızla öne doğru tek başına bir su dalgasının meydana geldiğini fark ettim. Bu yuvarlanmış belirgin su kütesinin hızının azalmadan ve şeklinin değişmeden kanal boyunca ilerleyişinin devam ettiğini fark ettim. Onu at sırtında takip ettim, ona yetiştiğimde saatte 8-9 mil hızla ilerleyişine devam ettiğini gördüm. Onu 1-2 mil takip ettikten sonra kanalın dönüşünde kaybettim. Böylece

1834'ün Ağustos ayında benim büyük dalga kayması olarak adlandırdığım ilk gözlemlerimi tanıtma şansım oldu" (Jager, 2006).

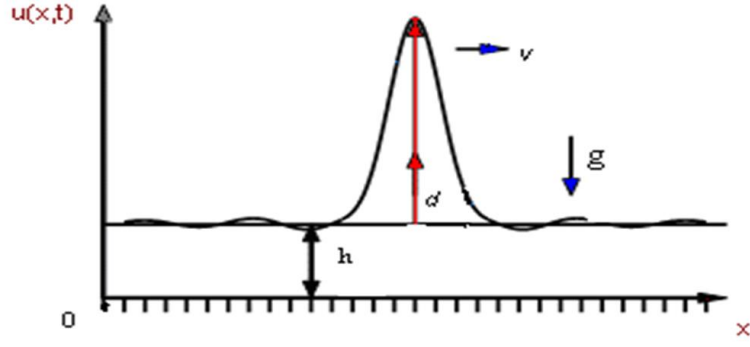


Şekil 1.1. Russell'ın dalga çevirimi (Duritt, 2005)

Şekil 1.1'de Russell'ın üzerinde deney yaptığı dalgaların bir modeli görülmektedir. Russell, solitary dalgalar üzerinde yaklaşık on yıl çalıştıktan sonra 1844 yılında "Dalgalar Üzerine Kayıtlar" adlı çalışmasını yayımlamıştır. Çalışmaları sonucunda dalganın hızını (v); g yerçekimi ivmesi, d su yüzeyi üzerinde dalganın genliği ve h suyun derinliği olmak üzere

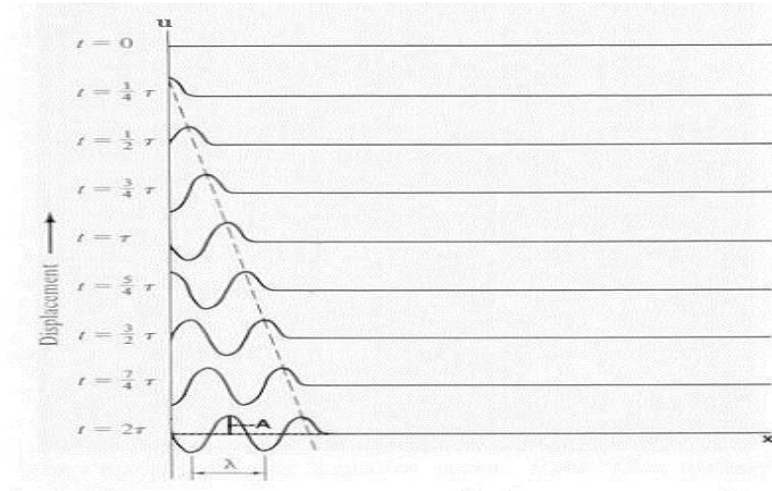
$$v = \sqrt{g(d+h)} \quad (1.1)$$

olarak bulmuştur. Bu eşitliğin oluşum modeli Şekil1.2' de görülmektedir.



Şekil 1.2. Bir solitary dalga

Dalgalar, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çalışmalarında görülmektedir ve ilerlemeleri esnasında şekillerini ve genliklerini korumaktadır. Bu dalga hareketinin bir görüntüsü de Şekil 1.3'te görülmektedir. Sabit bir v hızı ile ilerleyen dalganın yer değiştirirken şeklini ve A genliğini koruduğu saptanmıştır.



Şekil 1.3. İlerleyen dalga

$u(x, t)=f(x-vt)$ ile ifade edilen dalganın $v>0$ olması halinde, x ekseninin pozitif yönünde; $v<0$ olduğunda ise x ekseninin negatif yönünde hareket ettiğini belirtmektedir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

1895 yılına gelindiğinde, Diederik Johannes Korteweg ve onun doktora öğrencisi Gustav de Vries adlı iki Alman bilim insanı, yayımladıkları makale ile Russell'ın çalışmalarını doğrulamışlardır (Eckhaus ve Harten, 1981). Onlar, solitary dalgaların varlığında sığ su yüzeyinin yüksekliğini modellemek için, lineer olmayan bir diferansiyel denklem türetmişlerdir. Korteweg –de Vries denklemi (KdV) olarak literatüre geçen denklem;

$$u_t(x,t) + 6u(x,t)u_x(x,t) + u_{xxx}(x,t) = 0 \quad (2.1)$$

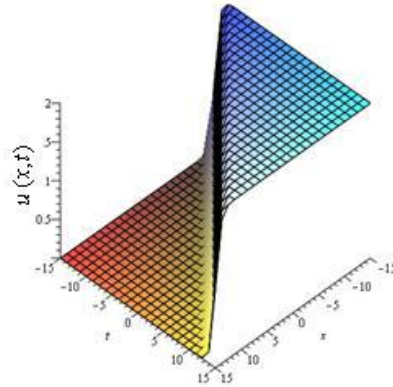
şeklinde tanımlanmışlardır. Daha sonraları 1967 yılında, Gardner, Greene, Kruskal ve Miura ters saçılım dönüşümü yöntemiyle KdV denkleminin analitik çözümünü,

$$u(x,t) = a \operatorname{sech}^2(\gamma(x-vt)), \quad v = 2a = 4\gamma^2 \quad (2.2)$$

şeklinde bulunarak solitary dalga çözümlerinin ailesi ifade edilmiştir (Gardner vd., 1967; Drazin ve Johnson, 1989; Bundgaard, 2011).

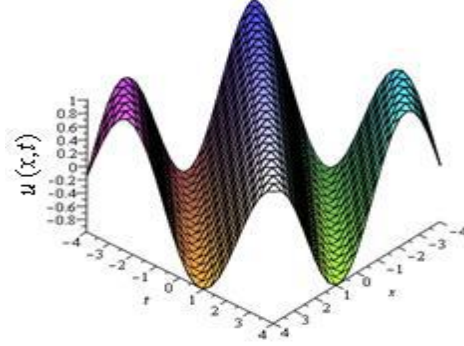
Dalgalar ilerlemeleri esnasında farklı şekillerde görülmektedirler.

- **Kırık Dalgalar (Kink Waves):** Asimptotik durumda ilerleyen dalgalardır. Bunlar sonsuzda bir sabite yaklaşır. Standart Burgers' denklemi ile modellenen denklem, kırık dalgaların çözümlerinin iyi bilinen bir denklemidir. Kırık dalganın grafiksel olarak ifadesi Şekil 2.1.'de gösterilmiştir:



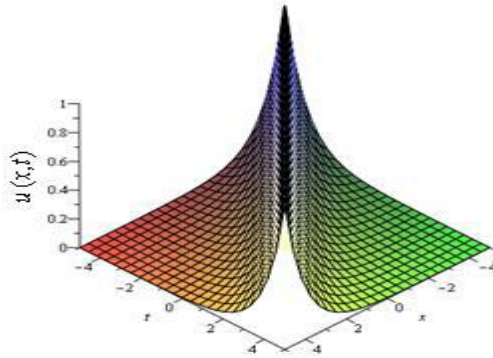
Şekil 2.1. Kırık dalga

- **Periyodik Dalgalar** (Periodic Waves): $\cos(x-t)$ fonksiyonu gibi periyodik olarak ilerleyen dalgalardır. Standart dalga denklemi; $u_{tt} = u_{xx}$ olan denklem, periyodik çözümler verir. Grafik olarak, Şekil 2.2’de gösterilmiştir:



Şekil 2.2. Periyodik dalga

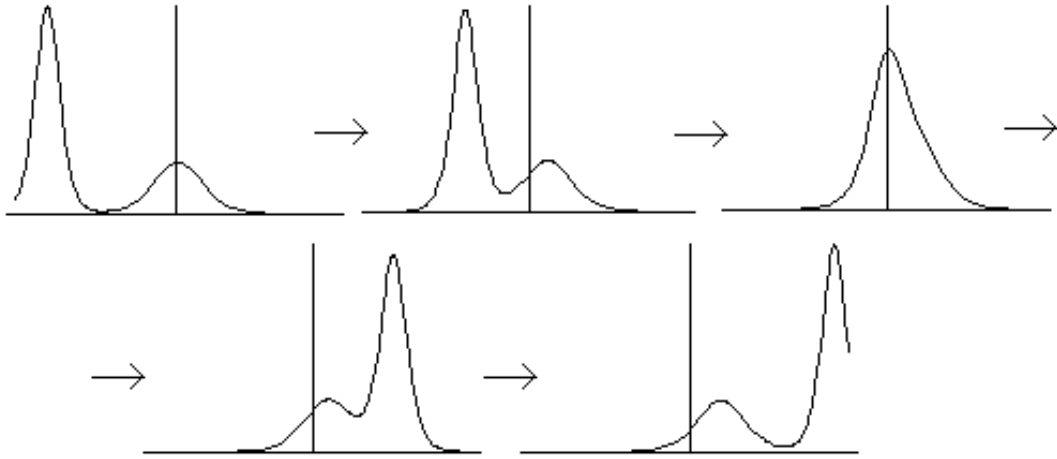
- **Tepe Noktalı Dalgalar** (Peakons): Tek dalga çözümleridir. Bu durumda ilerleyen dalgalar, tepe noktasının köşesi hariç düzdür. Etkileşim sonrasında hız ve şekillerini koruyan çözümlerdir. Grafikselle gösterimi ise Şekil 2.3’te verilmiştir:



Şekil 2.3. Tepe noktalı dalga

1960'lara kadar verilmesi gereken ilgiyi göremeyen “solitary dalgalar”, 1965 yılına gelindiğinde Zabusky ve Kruskal tarafından solitary dalgalarının birbiriyle etkileşiminin incelenmesi sebebiyle tekrar gündeme gelmiştir. Zabusky ve Kruskal, KdV denklemi üzerine yaptıkları çalışmalar neticesinde, bu denklemin integrallenebileceğini göstermeleri sonucunda, solitary dalgalara ilgi tekrardan

artmıştır. Çalışmalarında, solitary dalgaların birbirleriyle etkileşimini keşettikten sonra, şeklini ve genliğini koruyan dalgaların bu etkileşim ile ortaya çıktığını gözlemlemişlerdir. Şekillerini koruyan ve karakterlerini küçük parçalarına kadar aktaran solitary dalgalara, “soliton” deyip, soliton kavramının doğuşuna vesile olmuşlardır.



Şekil 2.4. İki solitonun çarpışarak sağa doğru hareket etmesi

Solitonlar; plazma fiziği, astrofizik, akışkanlar dinamiği gibi pek çok bilim dalında çalışmaları etkilemiştir. KdV ya da diğer diferansiyel denklemlerin tek soliton çözümü varsa tek dalga, birden fazla çözümü varsa “solitonlar” olarak adlandırılır.

Bir bilginin, iletilmesi anında dış ve iç etkilerle, zarara uğramadan başka bir yere taşınması çok önemlidir. Bu noktada solitonların rolü fark edilmektedir. Soliton dalgalar, 10.000 km'ye kadar özelliklerini değiştirmeden ilerleyebilmektedir. Çarpıştıklarında, şekillerini değiştirmediklerinden, dalgalar optik fiberler boyunca her iki yönde de iletilebilmektedir. Şekil 2.4'te bu durum görülmektedir. Kısaca; solitonlar yaşantımızın çoğu alanındaki sinyal iletiminde çok önemlidir.

1971 yılına gelindiğinde Ryogo Hirota "Hirota direct method" adlı bir makale yayınlamıştır. Yayınladığı makalede KdV denkleminin tam çözümlerinin

bulunmasında çoklu soliton çözümlerini bulmak için bir yöntem sunmuştur. Hirota metodunun temel düşüncesi, solitonlar için üstel çözüm bulmaya çalışmaktır. Yöntemin amacı lineer olmayan bir diferansiyel denklemi lineer hale getirmek için uygun bir dönüşüm yapmaktır. Dönüşüm yardımıyla denklem "bilineer form" denilen forma dönüştürülmektedir. Denklem "Hirota D operatör" denilen özel bir diferansiyel operatörü ile bilinear forma getirilmektedir. Son olarak denkleme perturbasyon genişlemesi yaparak uygun, aynı kuvvetteki terimlerin ortak paranteze alınmasıyla soliton çözümlere ulaşılmaya çalışılmaktadır (Hirota, 2004).

"İntegrallenebilirlik kavramı nedir?" Diye sorulduğunda, bilim adamları tarafından verilen tek bir tanım yoktur. Denklemlerin integrallenebilir olması, çözümlerinin var olduğunun ispatı için oldukça önemlidir. Ayrıca sistemin davranışı hakkında bize değerli bilgiler sunmaktadır (Mikhailov, 2009). Hirota metodu uygulanan denklemlere "integrallenebilen denklemler" denilebilir. Hirota metodu ya da Hirota bilinear formuna göre, integrallenebilen denklemlerin çoklu solitona kadar çözümleri bulunabilir. Ancak integrallenemeyen denklemler, sadece iki soliton çözüm içerebilir. Hietarinta tarafından yayımlanan makalelerde de yeni integrallenebilir denklemler üretilmiştir (Hietarinta, 1997; 2005; 2009).

Hirota dönüşüm metodu yanında, lineer olmayan diferansiyel denklemleri lineer hale getirip çözümlerine ulaşmak için birçok metot geliştirilmiştir: Bäcklund dönüşümü (Papachristou, 2015), Cole-Hopf ve Miura dönüşümü (Gesztesy ve Holden, 1998), Ters saçılma dönüşümü (Caudrelier, 2015), Darboux dönüşümü (Zhou, 2014), Painlevé açılım metodu, Tanh metodu (Abazari, 2014) bu metotlardan bazılarıdır.

20. yüzyılın sonlarına doğru Paul Painlevé ve onunla çalışan arkadaşları, bu çalışmada ayrıntılı bir şekilde ele alacağımız Painlevé analizini incelemişlerdir. Yaptıkları çalışmalar sonucunda, lineer olmayan denklemlerin çözümünü tekil (singüler) nokta açısından ele almışlar ve hareketli tekillikleri sadece kutuplar olan bir denklem sınıfını ortaya koymuşlardır. Daha sonraları 1980 yılında Ablowitz, Ramani ve Segur, adi diferansiyel denklemler (ADD) için Painlevé analizini, Ablowitz-Ramani-Segur algoritması (ARS algoritması) olarak geliştirmişler

(Abowitz vd. 1980). 1983 yılında ise Weiss, Tabor ve Carnavale, ARS algoritmasının kısmi diferansiyel denklemler (KDD) için bir genellemesi olan Weiss-Tabor-Carnavale metodu (WTC metodu) nu ifade etmişlerdir (Weiss vd. 1983). KDD'lerin Painlevé özelliğine sahip olup olmadığını anlamak amacıyla, yani integrallenebilir olup olmadığını ispatlamak için WTC metodu yanında, Kruskal'ın basitleştirme metodu (Kruskal, 1992), Conte'nin değişmezlik metodu (Conte, 1999) gibi farklı metotlar da geliştirilmiştir. Hangi metot kullanılırsa kullanılsın, sonuç olarak alınan denklemin veya sistemin integrallenebilir olup olmadığı ile ilgili aynı çıktılar elde edilecektir (Gui-Qiong, 2003; 2005, Xu ve Li, 2005).

Biz bu çalışmada, klasik olarak yapılanları anlamaya çalıştık. Yakın zamanda yeni yayınlanmış (Kudryashov, 2015) olan Painlevé testini; klasik testi ve yeni bir yaklaşımı, Korteweg-de Vries-Burgers' ve genelleştirilmiş Kawahara denklemlerine uyguladık.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 3.1

Bir bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun muhtelif türevlerini içeren matematiksel denklemlere *diferansiyel denklemler* denir. Bir denklemde belirli bir değişkene göre türev alınıyorsa, o değişkene *bağımsız değişken*; denklemde türevi alınan değişkene ise *bağımlı değişken* denir.

Bir tek bağımsız değişken içeren diferansiyel denkleme *adi diferansiyel denklem* denir ve genel olarak *n. mertebeden adi bir diferansiyel denklem*;

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3.1)$$

şeklinde gösterilir.

İki veya daha fazla bağımsız değişken içeren diferansiyel denkleme *kısmi diferansiyel denklem* denir ve *n. mertebeden bir kısmi diferansiyel denklem*,

$$F(x, y, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}) = 0, \quad (3.2)$$

olarak yazılır.

Tanım 3.2

Bir diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve türevlerinin katsayıları bağımsız değişken ihtiva ediyor ise bu diferansiyel denkleme *lineer diferansiyel denklem* denir. Eğer diferansiyel denklemde bağımlı değişken, üstel, logaritmik veya trigonometrik olarak bulunuyorsa ya da bağımlı değişkenin kendisi veya herhangi bir türevinin derecesi birden büyük ise bu tür diferansiyel denklemlere de *lineer olmayan diferansiyel denklem* denir.

Tanım 3.3

Bir $a < x < b$ aralığında tanımlı bir ϕ fonksiyonu bu aralıkta bulunan her x için tanımlı ve n . mertebeden türeve sahip fonksiyonu,

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad (3.3)$$

ise ϕ fonksiyonuna (3.1) denkleminin *çözümüdür* denir. Bir adi diferansiyel denklemin genel çözümü, diferansiyel denklemin mertebesi kadar sabit içerir. Çözüm fonksiyonundaki sabitlere verilen her bir değere karşılık bulunan çözüme de *özel çözüm* denir. Bir adi diferansiyel denklemin çözümü eğri ailesine karşılık gelmesine rağmen, bir kısmi diferansiyel denklemin çözümü yüzey ailesine karşılık gelir.

Özel olarak, ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem göz önüne alındığında bu tip denklemlerin çözümleri iki sabit içerdiğinden bu sabitleri bulmak için iki ek şart verilmelidir. Eğer şartlar; bağımlı değişken ve türevlerinin, bağımsız değişkenin aynı değeri için verilen şartlarında ise *başlangıç şartları*; bağımsız değişkenin farklı değerleri için verilen şartlar şeklinde ise *sınır şartları* ile tanımlanır. Bir diferansiyel denklemin başlangıç şartları ile incelenmesine *başlangıç değer problemi*; sınır şartları ile incelenmesine *sınır değer problemi* denir.

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (3.4)$$

(3.1) ve (3.4) ile birlikte verilen problem başlangıç değer veya Cauchy Problemi olarak bilinir. Ayrıca,

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n)}(x_0) = y_n, \quad (3.5)$$

(3.1) ve (3.5) ile birlikte verilen denkleme sınır değer problemi denir.

Diferansiyel denklem bir fiziksel olayın modeli olduğundan, kolaylık olması açısından genellikle ikinci mertebeden sabit katsayılı bir kısmi diferansiyel denklem alınarak sınıflandırmaya gidilir. İkinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemin genel hali;

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0, \quad (3.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada a, b, c, d, e, f ve g sabitler, $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere;

$\Delta = 0$ ise denklem Parabolik (Difüzyon Denklemi),

$\Delta > 0$ ise denklem Hiperbolik (Dalga Denklemi),

$\Delta < 0$ ise denklem Eliptik (Laplace Denklemi),

olarak sınıflandırılmaktadır. Parabolik tipteki bir kısmi diferansiyel denkleme örnek olarak; difüzyon (ısı) denklemi, hiperbolik tipteki bir kısmi diferansiyel denklem dalga denklemi, eliptik tipteki bir kısmi diferansiyel denkleme ise Laplace denklemi verilebilir.

Tanım 3.4

Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir. X ve Y lineer uzaylar ve $T : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere her $x_1, x_2 \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2) \quad (3.7)$$

şartı sağlanırsa T fonksiyonuna bir *lineer operatör* veya *lineer dönüşüm* denir. $Y = R$ veya $Y = C$ olması durumunda ise T fonksiyonu bir lineer fonksiyoneldir denir.

Teorem 3.1 (Tekil Nokta)

Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu herhangi bir z_0 noktasının komşuluğundaki her bir z için türevlenebiliyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir. $f(z)$ fonksiyonunun analitik olmadığı nokta $f(z)$ fonksiyonunun bir tekil noktasıdır.

Tekil noktaların durumu Laurent serileri yardımıyla incelenebilir. Yani

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (3.8)$$

biçiminde seriye açılabilir. Burada $a_n, n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ katsayıları herhangi basit kapalı pozitif yönlü C eğrisi için

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (3.9)$$

şeklinde tek türlü belirlidir.

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ serisine Laurent serisi, a_n katsayılarına ise z_0 noktasındaki $f(z)$ fonksiyonunun Laurent katsayıları denir.

$f(z)$ fonksiyonu $z = z_0$ noktasında tekil noktaya ve $z < |z - z_0| < R$ bölgesinde Laurent seri açılımına sahip olsun. Bu durumda $z - z_0$ in kuvvetlerine göre durumları inceleyerek:

- 1) Seride $z - z_0$ in negatif kuvvetleri yoksa yani $n = -1, -2, -3, \dots$ için $a_n = 0$ ise z_0 noktasına, $f(z)$ fonksiyonunun kaldırılabilir tekil noktasıdır denir.
- 2) Seride, $f(z)$ fonksiyonunun açılımı $(z - z_0)^{-k}$ ($k \in \mathbb{N}^+$) şeklinde yazılabiliyorsa yani $a_{-k-1} = a_{-k-2} = \dots = 0$ ise z_0 noktası k . mertebeden bir kutup noktasıdır denir. Yani $n = -k - 1, -k - 2, \dots$ için $a_n = 0$ ve $a_{-k} \neq 0$ ise z_0 noktasına k . mertebeden bir kutup noktasıdır denir. Eğer $k = 1$ ise $z = z_0$ tekil noktası basit kutup adını alır.
- 3) Seride $z - z_0$ in sonsuz çoklukta negatif kuvveti varsa, z_0 noktasına esas tekil nokta denir. Yani sonsuz çoklukta n tamsayısı için $a_{-n} \neq 0$ ise z_0 noktasına esas tekil nokta denir.

Tanım 3.5 (Sabit ve Hareketli Tekillikler)

Diferansiyel denklemlerde çözümler integral sabitlerini içerdiğinden, tekil noktalar integral sabitlerine dolayısıyla problemin başlangıç ve sınır şartlarına bağlı olabilirler. Böyle tekil noktalara hareketli tekil noktalar denir. Eğer tekil noktalar integral sabitlerine bağlı değilse, bu tekil noktalara sabit tekil noktalar denir.

Tanım 3.6 (Bağdaşabilirlik Şartı)

Eğer verilen diferansiyel denklem sistemi en az bir noktada özdeş olarak sıfırı sağlıyorsa bu denklem sistemi bağdaşabilirlik şartı sağlıyor denir.

Tanım 3.7 (Meromorf Fonksiyon)

Bir f fonksiyonunun D bölgesindeki tekil noktaları sadece kutup noktaları ise f fonksiyonuna, D bölgesinde bir meromorf fonksiyondur denir.

Tanım 3.8 (Cebirsel Dallanma)

$n > 1$ pozitif tamsayı olmak üzere

$$w = f(z) = (z - z_0)^{\frac{1}{n}} \quad (3.10)$$

şeklindeki çözüm $z = z_0$ noktasında cebirsel dallanma tekilliğine sahiptir denir.

3.1 İntegrallenebilirlik

İntegrallenebilirlik kavramı, ilk olarak Fuchs tarafından ortaya atılmış olup birçok bilim insanı bu kavram hakkında çalışmalar yapmıştır (Fuchs, 1884). Bu çalışmalar neticesinde integrallenebilirliğin en önemli özelliklerinden biri de, denklem sisteminin davranışları hakkında genel bir bilgi vermesidir.

Matematikte klasik dinamik sistemlerinin zamana bağlı davranışları, lineer olmayan diferansiyel denklemler ile temsil edilirler. Lineer olmayan bu diferansiyel denklemler; bağımlı değişkenlere, dış kuvvetlere ve sistemin enerjisine bağlı olarak, çözümün düzenli yörüngelerinin yanı sıra düzensiz yörüngeler de ortaya çıkarırlar. Dinamik sistemlerin düzgün ve düzgün olmayan yörüngelerin belirlenmesi ve bu yörüngeleri incelenmeye yarayacak iyi tanımlı analitik tekniklerin bulunması birçok bilim insanının araştırma sahası olmuştur. Lineer olmayan dinamik sistemlerde, verilen sistemin hareketinin ne zaman düzgün olduğunu bulmak önemli bir problemdir. Bu safhada, integrallenebilirliğin ne olduğu ve onun ne zaman bulunabileceği soruları doğal olarak ortaya çıkar. Lineer olmayan bir sistemin de lineer denklem sistemine indirgenmesi mümkündür. Bu lineer denklem sistemi integre edilebilir özelliklere sahiptir ve genel çözümlerinin integral gösterimleri

vardır. Eğer uygun sayıda integraller elde edilirse bu durumda integrallenebilirlik tam integrallenebilirlik olarak adlandırılır. İntegrallenebilirlik, dinamik sistemi genel olarak anlamak için daha fazla önsezi gücü ve nicel bilgi elde etme işinde başarı ile kullanılabilen matematiksel bir özellik olarak düşünülebilir. İntegrallenebilirlik kavramı, dinamik sistemlerde daha yaygın olarak kullanılmasına rağmen, fiziksel olayların modellenmesinde ve integral denklemlerde de kullanılmaktadır. İntegrallenebilirlik kavramı ile çözülebilirlik kavramı bazı yönleri ile ilişkisi olsa da birbirinden farklı kavramlardır. Matematikçilerin ilgilendikleri en önemli husus tam olarak tanımının belirli olmamasından ötürü verilen denklemin integrallenebilir olup olmadığıdır. İntegrallenebilirlik kavramı bazı bakımlardan iyi tanımlı olmadığından, hangi şartlar altında ne zaman tam integrallenebilirliği hakkında bir şey söylenemez. Ayrıca integrallenebilirlik hallerini ortaya çıkaracak iyi tanımlı bir ölçütün yokluğu nedeni ile ne zaman düzensiz hareket alanına geçerek integrallenemez olduğu hakkında bir şeyler söylemek çok daha zordur (Yokuş, 2011; Bekir, 2005). Lineer olmayan denklemlerin integrallenebilir olup olmadığını tespit etmede birçok yöntem geliştirilmiştir: Painlevé analizi bunlardan birine örnektir (Painlevé, 1888).

3.2 Painlevé Analizi ve İntegrallenebilirlik

Painlevé analizi yani tekil nokta analizinin amacı, serbest değişken içeren kompleks düzlemde genel çözümün sahip olduğu tekillikleri bulup cinslerini belirlemek ve çözümün hangi şartlar altında meromorfik olduğunu belirtmektir. Bunun sonucu olarak, bir diferansiyel denklemin Painlevé özelliğine (P-özelligi) sahip olması için gerek yeter şart genel çözümde hareketli tekilliklerin sadece kutup noktası olmasıdır.

Verilen lineer olmayan dinamik sistem, Painlevé özelliğine sahip bir diferansiyel denklem sistemi ile ilişkilendiriliyorsa bu dinamik sistemin integrallenebilir olması ve çözümünün hareketli bir tekil nokta civarında Laurent serisine açılması beklenir.

Literatürde, adi diferansiyel denklemler için Painlevé özelliğinin bilinen üç tanımı vardır:

- 1) Diferansiyel denklemin çözümlerinin hareketli tekillikleri kutupsa, özelleştirilmiş Painlevé özelliğine sahiptir.
- 2) Diferansiyel denklemin çözümleri, bütün hareketli tekilliklerin etrafında tek değerli ise Painlevé özelliğine sahiptir.
- 3) Genel çözüm, bütün hareketli tekilliklerin civarında tek değerli ise genelleştirilmiş Painlevé özelliğine sahiptir (Conte ve Musette, 2008).

3.3 Adi Diferansiyel Denklemler için Painlevé Analizi (ARS algoritması)

Tanım 3.3.1

Bir adi diferansiyel denklemin veya sistemin Painlevé özelliğine (P-türünden) sahip olması için sadece sabit tekil noktalara sahip olması gerekmektedir.

Bu tanım 1978 yılında Ablowitz, Ramani ve Segur tarafından verilmiştir.

$$\frac{d^n w}{dz^n} = F(z, w, w', \dots, w^{(n-1)}) \quad (3.3.1)$$

şeklinde $w, w', \dots, w^{(n-1)}$ değişkenlerine göre rasyonel, z değerine göre analitik olan n . mertebeden bir adi diferansiyel denklem alalım. 1980 yılında Ablowitz, Ramani ve Segur tarafından bu diferansiyel denklemlerin çözümü için bir algoritma geliştirilmiştir (Ablowitz vd. 1980). ARS algoritması ile hareketli bir z_0 tekil noktası civarında Laurent seri çözümünün var olduğu kabul edilerek bir çözüm aranacaktır. ARS algoritması olarak anılan algoritmada üç adım vardır:

- i. z_0 hareketli tekil nokta civarında Laurent serisinin baş terim (ilk terim) davranışının belirlenmesi,
- ii. Rezonansların yani denklemin çözümünün keyfi sabitlerinin (integral sabitlerinin) Laurent serisi açılımına girebildikleri kuvvetlerin bulunması,
- iii. Hareketli tekil noktalara rastlamadan yeter sayıda keyfi (integral) sabitin varlığının doğrulanmasıdır.

Baş Terim (İlk Terim) Davranışı

n . mertebeden (3.3.1) diferansiyel denklemi için $w(z)$ fonksiyonunun z_0 keyfi hareketli tekilliğinin bir komşuluğunda

$$w(z) = w_0(z - z_0)^p, \quad z \rightarrow z_0 \quad (3.3.2)$$

şeklinde bir çözüm arayalım. $\text{Re}(p)z < 0$ olsun. p nin değerini belirlemek için (3.3.2), (3.3.1) denkleminde yerine yazılır. p nin bazı değerleri için diferansiyel denklem dengeye gelirken, bazı terimlerin dengelemeye imkan vermediği görülür ki bu terimler ihmal edilir. p nin her seçimi için dengelenen terimlere baş terimler (ilk terim) denir. p değerlerinden en az birisi irrasyonel ya da kompleks sayı ise (2.2.1) denkleminin P-tipi olmadığını söyleyebiliriz. Bu durumda algoritmaya son verilir. p değerlerinden herhangi birisi rasyonel sayı ise baş terim davranışından p inci basamaktan cebirsel dallanma gösterir. Eğer p değerleri tamsayı ise çözüm her bir p için $w(z) = w_0(z - z_0)^p$, hareketli kutup noktasının delinmiş komşuluğunda geçerli Laurent serisinde ilk terimi gösteriyor olabilir. Bu durumda (3.3.1) in çözümü:

$$w(z) = (z - z_0)^p \sum_{j=0}^{\infty} w_j (z - z_0)^j, \quad 0 < |z - z_0| < R \quad (3.3.3)$$

şeklindedir. Bu Laurent serisi çözümünde z_0 , hem keyfi sabit hem de tekilliğin bulunduğu yerdir. Bu çözümde w_j katsayıların $(n-1)$ tanesi daha keyfi ise bunlar z_0 da dahil olmak üzere verilen diferansiyel denkleminin n tane integrasyon sabitleridir. Laurent açılımında bu keyfi w_j sabitlerinin bulunduğu $z - z_0$ in kuvvetlerine rezonans denir.

Rezonanslar

$$w(z) = (z - z_0)^p \sum_{j=0}^{\infty} w_j (z - z_0)^j, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

biçimindeki Laurent seri açılımında elde edilen her bir (p, w_0) için sadece etkin terimler (dengeleme yapılan terimler) alınarak ilk diferansiyel denklem basitleştirilir ya da kesmeye tabi tutulur. Basitleştirilmiş denklemde,

$$w(z) = w_0(z - z_0)^p + w_r(z - z_0)^{p+r} \quad (3.3.4)$$

ifadesi yerine yazılır ve w_r ye göre lineer olan terimler bir araya getirilerek

$$Q(r) = w_r(z - z_0)^{p'}, \quad p' \geq p + r - n \quad (3.3.5)$$

ifadesi elde edilir. Burada n , denklemin mertebesini gösterir. $Q(r)$ polinomunun kökleri, rezonansları belirtir. $Q(r) = 0$, düzgün tekil nokta komşuluğunda bir lineer diferansiyel denkleminin çözümlerinin bulunmasında kullanılan Frobenius yöntemindeki indisel denkleme benzer nitelik göstermektedir. $Q(r) = 0$, denkleminin bir kökü daima -1 dir ki bu durum z_0 tekil noktasının keyfiliğini yani hareketli olduğunu gösterir. r bir rasyonel sayı ise cebirsel hareketli dallanmayı ifade ettiğinden çözüm P-tipinde olmaz ve algoritma sona erer. Laurent seri açılımının diferansiyel denklemin genel çözümü olması için $Q(r) = 0$ denkleminin $(n-1)$ tane negatif olmayan birbirinden farklı tamsayı kökü olmalıdır. (p, w_0) için $Q(r) = 0$ polinomunun böyle köklerinin sayısı $(n-1)$ den az ise genel çözüm mevcut değildir ve algoritma sona erer.

Keyfi İntegrasyon Sabitlerini Bulmak

Son adımda ise Laurent seri açılımında, verilen denklemin mertebesi kadar integral (keyfi) sabitleri araştırılır. Birinci adımda elde edilen her bir (p, w_0) için $s \leq n-1$ olmak üzere, $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_s$ sayıları $Q(r) = 0$ polinomunun negatif olmayan tamsayı kökleri olsun. Buna göre adi diferansiyel denklemde,

$$w(z) = w_0(z - z_0)^p \sum_{j=1}^{r_s} w_j(z - z_0)^{p+j} \quad (3.3.6)$$

serisini yerine yazalım. $(z - z_0)^{p+j-n}$ in artan kuvvetlerine göre düzenlenir ve katsayısı sıfıra eşitlenirse

$$Q(j)w_j - R_j(z_1; a_1, a_2, \dots, a_{j-1}) = 0 \quad (3.3.7)$$

olur. $j \leq r_1$ için yukarıdaki denklemden a_j katsayıları belirlenir ve $j = r_1$ için $Q(r_1) = 0$ olur. Bu noktada iki durum ortaya çıkar. $R_{r_1}(z_0; a_0, a_1, \dots, a_{r_1-1}) = 0$ ise a_{r_1} bir keyfi

sabittir, Laurent serisinin n tane keyfi sabiti elde edilinceye kadar devam edilir. Böylece adi diferansiyel denklem P-tipindedir. $R_{r_1}(z_0; a_0, a_1, \dots, a_{r_1-1}) \neq 0$ ise yukarıdaki eşitlik özdeş olarak sağlanamaz ve a_{r_1} bir keyfi sabit değilse ele aldığımız adi diferansiyel denklemin (3.3.3) şeklinde bir çözümü yoktur. Algoritmanın bu adımı lineer diferansiyel denklemler için Frobenius yöntemine çok benzerdir (Bekir, 2005; Öğün 2008).

3.4 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler için Painlevé Analizi (WTC Algoritması)

ARS algoritmasının geliştirilmiş durumu olan ve kısmi türevli denklemler için uygulanan WTC algoritması ilk defa 1983 yılında Weiss, Tabor ve Carnavela tarafından ortaya konmuştur (Weiss vd. 1983). Aynı zamanda algoritma KDD testi olarak da adlandırılır.

Tanım 3.4.1

Bir kısmi diferansiyel denklemin genel çözümünün karakteristik olmayan hareketli dallanma tekillikleri kutup noktaları ise kısmi diferansiyel denklem Painlevé özelliğine sahiptir denir.

Kısmi türevli denklemde, z_0 keyfi sabiti yerine $\phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ keyfi analitik fonksiyonu alınsın ve seri bu $\phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$ tekil manifold civarında açılınsın. $u = u(z_1, z_2, \dots, z_n)$ de kısmi diferansiyel denklemin bir çözümü olsun. Bu durumda,

$$u(x, t) = \phi(x, t)^p \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x, t) \phi(x, t)^j \quad (3.4.1)$$

eşitliğinin olduğunu varsayalım. Bu açılım Laurent seri açılımı ya da Painlevé açılımı olarak adlandırılır. Bu durumda bir tamsayı; $u_0 \neq 0$, $\phi = \phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ ve

$u_j = u_j(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$ manifold komşuluğunda (z_1, z_2, \dots, z_n) in analitik fonksiyonlarıdır. Adi diferansiyel denklemlerdeki duruma benzer tarzda algoritma, rezonanslardaki bağdaşabilirlik şartının eklenmesi ile dört adımdan oluşur:

i) Baş terim (İlk terim) davranışı

p reel sayı ve $\phi(x, t)$ keyfi fonksiyon olmak üzere

$$u(x, t) = u_0(x, t)\phi(x, t)^p \quad (3.4.2)$$

şeklindeki çözümü kısmi türevli diferansiyel denklemdeki etkin terimler (dengelenen terimler) de yerine yazılır ve bulunabilecek tüm p değerleri belirlenir. $\text{Re}(p) < 0$ olması gerekir. Bulunan p değerlerinden $u_0(x, t)$ baş terimi elde edilir.

ii) Rezonanslar

İlk adımda bulunan p ve u_0 değerleri kullanılarak kısmi türevli diferansiyel denklemin etkin terimlerinde,

$$u(x, t) = u_0(x, t)\phi(x, t)^p + u_j(x, t)\phi(x, t)^{p+j} \quad (3.4.3)$$

ifadesi yerine yazıldıktan sonra u_j , çeşitli düzenlemeler ile $\phi(x, t)^{p+j-n}$ teriminin

$$Q'(j) = Q(j)u_j \quad (3.4.4)$$

şeklindeki katsayılarından, rezonansları belirleyen

$$Q(j) = 0 \quad (3.4.5)$$

denklemini elde edilir. Burada n kısmi diferansiyel denklemin mertebesidir. $j = -1$, $Q(j) = 0$ denkleminin her zaman bir köküdür ve ϕ manifoldunun keyfi olması anlamına gelir. Hareketli kritik manifoldların olmaması için -1 hariç diğer bütün köklerin birbirinden farklı negatif olmayan tamsayılar olması gerekir.

iii) Keyfi fonksiyonların bulunması

İkinci adımda bulunan rezonansların en büyüğü j_s olsun. Bu durumda $u = \sum_{j=0}^{j_s} u_j \phi^{p+j}$ sonlu toplamı, kısmi türevli diferansiyel denklemde yerine yazılır ve ϕ^{p+j-n} in katsayılarının bulunması ile

$$Q(j)u_j R_j = 0 \quad (3.4.6)$$

elde edilir. R_j , $k = 0, 1, \dots, j-1$ olmak üzere ϕ ve u_k nin kısmi türevlerini içeren bir polinomdur. j rezonansı için $Q(j) = 0$ olduğundan R_j özdeş olarak sıfır ise (3.4.6) denkleminde u_j nin keyfi olduğu söylenebilir. Eğer değilse verilen denklem P-tipinde değildir.

iv) Rezonanslardaki Bağdaşabilirlik Şartları

Üçüncü adımda bulunan rezonans değerlerinden sonra $u_j(x, t)$ fonksiyonları hesaplanır. ϕ fonksiyonu 0 ise $u_j(x, t)$ fonksiyonu keyfi olarak seçilebildiğinden rezonansın bağdaşabilir olduğu söylenir. Eğer sıfırdan farklı ise $\phi(x, t)$ keyfiliği için (2.3.1) açılımı yoktur. Denklemin Painlevé özelliğini sağlaması için rezonansların bağdaşabilir olması gerekir (Ablowitz ve Clarkson, 1991; Bekir, 2005; Kangalgil, 2008; Ögün, 2008; Porsezian, 1997).

3.5 Painlevé Analizi için Yeni bir Yaklaşım (Kudryashov, 2015)

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için birçok metot kullanılabilir. Ama öncelikle dikkat edilmesi gereken nokta, denklemin tam çözümü ile integrallenebilirlik kavramı arasındaki ilişki nedir; bilmek gerekir. Verilen denklemin bazı tam çözümleri ne zaman bulunabilir, ne zaman bulunamaz? Bu sorunun cevabı için lineer olmayan diferansiyel denklemin genel çözümünün hareketli kritik noktalarını analiz edeceğiz. Painlevé analizi, lineer olmayan adi diferansiyel denklemin integrallenebilirliği hakkındaki soruların cevaplarını içerir.

Birçok genelleştirilmiş KdV denklemi,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = F(u, u_x, u_{xx}) \quad (3.5.1)$$

formunda yazılabilir.

$F(u) = \gamma u_{xx}$ varsayımı ile (3.5.1) denklemi dalgaların tanımlanmasında kullanılan Korteweg-de Vries- Burgers' (KdVB) denklemini içerir. Bu denklemin tam çözümü Bölüm 5'te vereceğiz. Ayrıca çözümlerde, $F(u)$ fonksiyonunun başka bağımlıları da vardır. Genelleştirilmiş KdV denklemini,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = F_n(u), \quad (3.5.2)$$

şeklinde alalım. $F_n(u)$ polinom biçimindedir. Yani;

$$F_n(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + \dots + a_nu^n, \quad n = 4, 5, 6, \dots \quad (3.5.3)$$

şeklinindedir. Burada $a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ katsayıları birer sabittir.

Aşağıda verilen ilerleyen dalga çözümünü kullanarak,

$$u(x, t) = w(z), \quad z = kx + \omega t,$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklem biçimini,

$$k^3 w_{zzz} + 6kw w_z + \omega w_z = a_0 + a_1w + a_2w^2 + a_3w^3 + \dots + a_nw^n \quad (3.5.4)$$

olarak elde ederiz.

(3.5.4) denklemi için integrallenebilirlik durumunu içeren genelleştirilmiş KdV denklemini ele alalım. Bu amaçla, Painlevé testi için Kovalevskaya'nın yoluna başvurabiliriz (Ablowitz ve Clarkson, 1991).

Teorem 3.5.1

(3.5.4) denklemi $n = 3$ ve $n \geq 5$ olduğu zaman Painlevé testinin birinci adımını geçemez.

İspat

Bilindiği gibi Painlevé testinin ilk adımı Laurent serisindeki genel çözümün açılımında ilk terimi bulmaktır. Eğer ilk terim, $(z - z_0)$ ın negatif tamsayı kuvvetine sahip ise denklem Painlevé testini geçer ve ikinci adıma geçilir. z_0 , lineer olmayan diferansiyel denklemin genel çözümü için hareketli kutup noktasıdır. (3.5.4) denklemi özerk yapıdadır ve $(z - z_0)$ hariç z değişkeni kullanabiliriz.

$$w = b_0 z^p \quad (3.5.5)$$

ifadesini (2.6.4) bütün terimlerinde yerine yazalım. Böylece etkin terimleri içeren denklemi elde ederiz. $F_1(u)$ ve $F_2(u)$ durumlarında etkin terimlerin olduğu denklem

$$w_{zzz} + 6ww_z = 0 \quad (3.5.6)$$

biçimindedir. (3.5.4) denklemi (3.5.5) denkleminde yerine yazılırsa;

$$b_0(p)(p-1)(p-2)z^{p-3} + 6b_0^2 pz^{2p-1} = 0$$

bulunur. Etkin terimler arasında dengeleme yapılırsa $p = -2$ olur yani denklem ikinci dereceden bir kutba sahip olur.

$n \geq 3$ durumunda etkin terimlerin olduğu denklem,

$$w_{zzz} - a_n w^n = 0, \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (3.5.7)$$

biçimindedir. Ayrıca $n = 3$ durumunda; $b_0(p)(p-1)(p-2)z^{p-3} - a_3 b_0^3 z^{3p} = 0$.

Etkin terimler arasında dengeleme yapılırsa $p = -\frac{3}{2}$ kutup değerine sahiptir ve denklem,

$$k^3 w_{zzz} + 6kww_z + \omega w_z = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3$$

şeklinde elde edilir ve kutup değerinden görüleceği gibi denklem Painlevé testini geçmez.

$n = 4$ durumunda ise $b_0(p)(p-1)(p-2)z^{p-3} - a_4 b_0^4 z^{4p} = 0$ olur. Buradan dengeleme yapılırsa $p = -1$ kutup değerine sahiptir ve bir genelleştirilmiş KdV denkleminin,

$$k^3 w_{zzz} + 6k w w_z + \omega w_z = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + a_4 w^4$$

şeklinde tam çözümüne sahip oluruz. Bunlara ilaveten $n \geq 5$ durumunda genel çözümün kutup noktaları için $p \leq \frac{3}{4}$ bulunur. Böylece $n = 3$ ve $n \geq 5$ durumlarında (3.5.4) denklemi Painlevé testini geçemez. Bununla birlikte $n = 2$ ve $n = 4$ olan durumlarda Painlevé testine devam edebiliriz (Kudryashov, 2015).

Bu yaklaşımda, klasik Painlevé testinden farklı bir ele alışıla integrallenebilirlik tartışılmıştır. Bu yeni yaklaşıma göre, çözümü seri şeklindeki polinom ile eşleştirerek Painlevé testine başlanılmıştır. Yukarıda da görülmüştür ki Painlevé testinin ilk adımında, denklem n in durumlarına göre Painlevé testinin ilk adımını geçer. Klasik Painlevé testine göre daha kolay şekilde testin ilk adımını geçip geçmediğine karar verme imkanı tanır.

4. HİROTA METODU

Bu bölümde Hirota metodu ile ilgili bilgileri vereceğiz.

Tanım 4.1

$S : C^n \rightarrow C$ diferansiyellenebilen fonksiyonların bir uzayı olsun. Hirota D operatörü

$$[D_x^{m_1} D_t^{m_2} \dots] \{f \cdot g\} = [(\partial_x - \partial_{x'})^{m_1} (\partial_t - \partial_{t'})^{m_2} \dots] f(x, t, \dots) \cdot g(x', t', \dots) \Big|_{x=x', t=t', \dots} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Pekcan, 2005). Burada $m_i, i = 1, 2, 3, \dots$ pozitif tamsayılar ve x, t, \dots bağımsız değişkenlerdir.

Bu tanım, Hirota D operatöründen D_t ve D_x ile aşağıdaki şekilde de verilmiştir (Hirota 1980)

$$D_t^n D_x^m (f \cdot g) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m f(x, t) \cdot g(x', t') \Big|_{x=x', t=t', \dots} \quad (4.2)$$

Burada m ve n negatif olmayan tamsayılardır. Bu tip diferansiyel operatöre bilinear operatör de denir.

Yukarıda verilen ifadenin birkaç türevi açık olarak verilmek istenirse

- $D_x (f \cdot g) = f' g - g' f$

$$(\partial_x f \cdot g = f_x g + g_x f)$$

- $D_x^2 (f \cdot g) = f'' g - 2f' g' + g'' f$

$$(\partial_x^2 f \cdot g = f_{xx} g + 2f_x g_x + f g_{xx})$$

- $D_x^3 (f \cdot g) = f''' g - 3f'' g' + 3g'' f' - g''' f$

- $D_x^4 (f \cdot g) = f^{iv} g - 4f''' g' + 6f'' g'' - 4f' g''' + f g^{iv}$.

Tanıma göre aşağıdaki özellikler kolayca görülmektedir,

- $D_x^m(f \cdot 1) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^m f$,
- $D_x^m(f \cdot g) = (-1)^m D_x^m(g \cdot f)$,
- $D_x^m(f \cdot f) = 0$, m çift ise,
- $D_x^m(f \cdot f) = 2D_x^{m-1}(f_x \cdot f)$, m tek ise,
- $D_x^m(f \cdot g) = D_x^{m-1}(f_x g - f g_x)$,
- $D_x D_t(f \cdot f) = 2D_x(f_t \cdot f) = 2D_t(f_x \cdot f)$,
- $D_x^m e^{p_1 x} \cdot e^{p_2 x} = (p_1 - p_2)^m e^{(p_1 + p_2)x}$,
- $D_x(f \cdot g \cdot h) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) gh + f D_x(g \cdot h)$,
- $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{D_x(f \cdot g)}{g^2}$,
- $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{D_x^2(f \cdot g)}{g^2} - \left(\frac{f}{g} \right) \frac{D_x(f \cdot f)}{g^2}$,
- $\partial x^2 \log f = \frac{D_x^2(f \cdot f)}{2f^2}$,

(Curry, 2008; Goldstein, 2007; Martinez; Matsuno, 1984; Newell, 1986).

Şimdi Hirota metodunun sonuçlarının uygulamasını aşağıda verilen KP denklemine uygulayalım.

Örnek 4.1 Kadomtsev-Petviashvili (KP) denklemi

Matematik ve fizikte yaygın olarak bilinen Kadomtsev-Petviashvili denklemi ya da KP denklemi, Boris Borisovich Kadomtsev ve Vladimir İosifovich Petviashvili tarafından doğrusal olmayan dalga hareketini tanımlamak için bir kısmi diferansiyel denklemdir (Kadomtsev ve Petviashvili, 1970). KP denklemi, tek boyutlu KdV denkleminin iki boyutlu, x ve y 'ye bir genellemesi olarak,

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x - 3u_{yy} = 0 \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır. KdV denklemi gibi KP denklemi de tamamen integrallenebilirdir.

$$u = -2\partial_x^2 \log f \quad (4.4)$$

dönüşümü ile KP denkleminin bilinear formu,

$$ff_{xt} - 3f_x f_t + 3f_{xx}^2 + ff_{xxxx} - 4f_x f_{xxx} + 3f_{yy} f - 3f_y^2 = 0 \quad (4.5)$$

elde edilir. Bu bilinear formdan yola çıkıp, KP denkleminin Hirota D operatörü kullanılarak yazılan Hirota bilinear formu,

$$(D_x D_t + D_x^4 + 3D_y^2)\{f.f\} = 0 \quad (4.6)$$

dır. Bazı denklemler için bilinear form daha karmaşık bulunduğundan Hirota bilinear formu gruplandırılarak ifade edilmeye çalışılır.

Hirota Perturbatif Genişlemesi

Yukarıda adım adım verdiğimiz Hirota bilinear formu bulma işleminden sonra çözüme ulaşmak için perturbatif genişleme yapılabilir. Bu amaçla,

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \quad (4.7)$$

ifadesi bilinear biçime getirilen ifadede yerine yazılır. Burada f_0 sabit; f_m , $m=1,2,\dots$ katsayılarıdır. ε ise perturbasyon parametresi denilen bir sabittir. Genelliği bozmaksızın $f_0 = 1$ alınabilir. Böylece $f.f$ çarpımı,

$$f \cdot f = 1 \cdot 1 + \varepsilon(f_1 \cdot 1 + 1 \cdot f_1) + \varepsilon^2(f_3 \cdot 1 + f_2 \cdot f_1 + f_1 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3) + \dots \quad (4.8)$$

şeklindedir. Hirota D operatörü kullanarak, $P(D_x, D_t)\{f \cdot f\} = B(f \cdot f)$ şeklinde tanımlayabiliriz. B , Hirota D operatörünün bilineer formunun polinomal halini ifade etmek üzere,

$$B\{f \cdot f\} = B\{1 \cdot 1\} + \varepsilon B\{f_1 \cdot 1 + 1 \cdot f_1\} + \varepsilon^2 B\{f_3 \cdot 1 + f_2 \cdot f_1 + f_1 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3\} + \dots = 0 \quad (4.9)$$

olur. Burada ε^m , $m=0,1,2,\dots$ nin tüm katsayılarını ayrı ayrı sıfıra eşitlemeliyiz. ε^0 in katsayısı aşikar olarak sıfırdır. ε^1 in katsayısından,

$$B\{f_1 \cdot 1 + 1 \cdot f_1\} = 2B(\partial)f_1 = 0 \quad (4.10)$$

olduğu kolaylıkla görülür. Bu denklemin çözümlerinden biri üstel fonksiyondur. Burada Hirota metodunun etkisi ortaya çıkar. Böylece bundan sonra bulunacak bütün solitonlar için adım adım ifadeleri sıfıra eşitleyip gerekli soliton çözümlere ulaşılır (Pekcan, 2005; Wang, 2010; Wazwaz, 2009; Qiao, 2010).

5. BASİTLEŞTİRİLMİŞ HIROTA METODU

Lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklem Hirota metodu ile bilinear forma dönüştürülebilir. Bilinear forma dönüştürülebilen KDD nin çoklu soliton çözümleri bulunabilir. Ancak bazı lineer olmayan diferansiyel denklemler vardır ki onların bilinear formunu bulmak oldukça güçtür. Bu noktada, basitleştirilmiş Hirota metodu yardımıyla bilinear forma dönüştürülemeyen denklemin, solitary ve soliton çözümleri bulunabilir (Hereman ve Zuang, 1994). Basitleştirilmiş Hirota metodu ile denklemin çoklu soliton çözümlerini elle hesaplamak çok zor olduğundan bilgisayarda sembolik işlem paketleri kullanmak işimizi kolaylaştırmaktadır. Sembolik paketlerden *Mathematica*, Hirota metodu ve basitleştirilmiş Hirota metodu için son zamanlarda kullanılan etkin programlama dillerindedir biridir (Hereman ve Nuseir, 1997). Biz de gerekli gördüğümüz hesaplamalar ve çizimlerde Mathematica paket programını kullandık. Basitleştirilmiş Hirota metodu aşağıda verileceği gibi beş adımdan oluşan bir algoritma ile gösterilebilir:

1. Adım

Lineer olmayan bir KDD

$$F(u, u_x, u_t, u_{xt}, u_{xx}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (5.1)$$

şeklinde verilmiş olsun.

2. Adım

Lineer olmayan bir dönüşüm olarak

$$u \propto f(w) \quad (5.2)$$

ifadesini alalım. Burada $w = w(x, t)$ dir. (5.2) dönüşümünü (5.1) de yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yapılırsa

$$Q(w) = 0 \quad (5.3)$$

şeklinde bir ifade elde edilir.

3. Adım

2. adımda bulduğumuz $Q(w)$ polinomal ifadesini, verilen kısmi türevli diferansiyel denklemin tüm kuvvetlerine göre düzenlediğimizde; lineer olan operatörü $L \cdot$ ve lineer olmayan operatörü $N_1 \cdot, N_2 \cdot, N_3 \cdot, \dots$ ifadeleri ile tanımlayarak gruplandırmalar yapılır.

4. Adım

Eğer,

$$w(x,t) = 1 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \varepsilon^3 w_3 + \dots + \varepsilon^r w_r + \dots \quad (5.4)$$

perturbasyon ifadesini 2.adımdaki (5.2) ifadesinde yerine yazarsak ε un kuvvetlerine bağlı bir tür dizi elde ederiz.

5. Adım

ε un artan kuvvetlerine göre gruplandırma yapıp her biri sıfıra eşitlenirse

$$O(\varepsilon^1): L \cdot w_1 = 0$$

$$O(\varepsilon^2): L \cdot w_2 = N_1(w_1, w_2) + \dots \quad (5.5)$$

$$O(\varepsilon^3): L \cdot w_3 = N_2(w_1, w_2) + \dots$$

⋮

ifadesi elde edilir. Burada tekrarlayıcı terimler arasında (5.5) den aşağı doğru sağ taraftaki her ifade önceki denklemin çözümüne bağlı tekrarlı denklemlerin olduğu yerdir. Bu tekrarlamalı yöntem ile w_1, w_2, w_3, \dots gibi çözümlerin bir serisini içerir. Bu çözümler arasında eğer i soliton ise $w_i = 0$ olur, bundan sonraki tüm solitonlar aşağı doğru adım adım çözümlenerek bulunur. Böylece (5.4) serisi kesilmiş olur ve (5.1) in çözümleri içerilebilir (Zhang, 2012).

6. KORTEWEG-de VRIES-BURGERS' DENKLEMİ

Bu bölümde, KdV, Burgers' ve Korteweg-de Vries- Burgers' (KdVB) denklemlerini ele alacağız. Öncelikle denklemlerin integrallenebilir olup olmadığını, klasik Painlevé testi ile inceleyeceğiz. Ayrıca KdVB denklemine, Painlevé analizine getirilen yeni yaklaşımı uygulayacağız. Daha sonra basitleştirilmiş Hirota metodunu kullanarak, denklemin bir tam çözümünü bulacağız.

$$u_t + \gamma u^m u_x + \beta u_{xxxx} = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{4x}) \quad (6.1)$$

ifadesini ele alalım. Burada

i) $\beta = 0$, $m = 1$, $F(u) = pu_{xx}$ olduğu zaman denklem; Burgers' denklemi,

ii) $\beta = 0$, $m = 1$, $F(u) = qu_{xxx}$ olduğu zaman denklem; KdV denklemi,

iii) $\beta = 0$, $m = 1$, $F(u) = pu_{xx} + \alpha u_{xxx}$ olduğu zaman denklem; KdVB denklemi,

iv) $\beta = 1$, $F(u) = \mu u_x + \alpha u_{xxx}$ olduğu zaman denklem; genelleştirilmiş Kawahara denklemidir.

Yukarıda (6.1) denklemine dört ayrı gruptandırma yaptık. Bu gruptandırma ile verdiğimiz denklemleri, aşağıda tek tek ele alacağız.

(6.1) denkleminde üçüncü maddedeki Korteweg-de Vries- Burgers' (KdVB) denklemini ele alalım,

$$u_t + \varepsilon uu_x - pu_{xx} - qu_{xxx} = 0 \quad (6.2)$$

biçimindedir. Burada ε ve p pozitif parametrelerdir, q ise negatif parametredir. KdVB denklemi olarak da adlandırılan (6.2) denklemi Su ve Gardner tarafından türetilmiştir (Su ve Gardner, 1969). Hem sönüm hem de dağılım içerdiği için zayıf nonlineerlik ve uzun dalga boyu benzerliklerinde lineer olmayan sistemlerin geniş bir sınıfı için bir denklem modelidir. (6.2) denklemi zayıf nonlineer plazma dalgalarının tanımında elektron hareketsizlik etkilerini içerdiği zamanki yapıdadır (Kaya, 2004). KdVB denklemi birçok fiziksel olayı içermektedir. Örneğin gaz kabarcıklarını içeren sıvı akışı, elastik bir tüp içinde dalgaların yayılması ile dolu viskoz akışkan, zayıf

lineer olmayan plazma dalgaları ve türbülans süreçlerini anlatmada kullanılan bir denklem modelidir (Feng ve Meng, 2007). KdVB denkleminin çözümlerinin bulunmasında birçok güzel yöntem, matematikçiler ve fizikçiler tarafından geliştirilmiştir.

Çözümü bulmaya geçmeden öncelikle, denklemin çözümün mevcut olduğunu dolayısıyla integrallenebilir bir denklem olduğunu ispatlamak gerekmektedir. İyi bilindiği gibi KdVB denklemini integrallenemeyen bir denklemdir. *Wkptest* (Xu ve Li, 2005) dört adımda bize bu sonucu vermektedir. Etkin terim analizi ile birlikte $\varepsilon = 1$ için

$$\alpha = -2 \text{ ve } u_0(x, t) = 12q\phi_x^2 \quad (6.3)$$

elde edilir. (6.2) denkleminin rezonans değerleri ise

$$\{-1, 4, 6\} \quad (6.4)$$

dır. Kruskal'ın $\phi(x, t) = x - \psi(t)$ tekil manifoldu için (6.2) denkleminin birbiri ardınca u_0, u_1, u_2, u_3 ve u_5 in değerleri $r = 6$ rezonans koşulunda;

$$p(2p^5 - 2500pq^3u_4 + 562q^3\psi_{tt}) = 0 \quad (6.5)$$

ifadesi keyfi $\psi(t)$ fonksiyonu için açıkça belirli değildir. Bu yüzden genel olarak, bu mertebede (3.8) serisine giren bir logaritmik terim sunmak gereklidir. Böylece (6.2) denklemini Painlevé testi için başarısızdır ve integrallenemezdir (Gui-Qiong ve Zhi-Bin, 2004).

6.1 Burgers' Denklemini

(6.1) denkleminin birinci durumunda,

$$u_t + \varepsilon uu_x - pu_{xx} = 0 \quad (6.1.1)$$

şeklinde verilen ifade, Burgers' denklemi olur. Bu denklem 1939 yılında Hollandalı bilim adamı Johannes Martinus Burgers' (1895-1981) tarafından tanımlanmıştır. Burgers' denklemi akışkanlar mekaniğinde görülen nonlinear, parabolik temel bir kısmi diferansiyel denklemdir. Gaz dinamiği ve trafik akışının modellenmesi olarak uygulamalı matematik alanında, fizik ve astrofizik alanlarında uygulamaları vardır.

İntegrallenebilirlik koşulunu araştırmak için Painlevé analizi uygulanabilir. Painlevé testine göre etkin terim analizi yapılırsa

$$\alpha = -1 \text{ ve } u_0(x,t) = -(-2b + \psi\psi_t - x\psi_t) \quad (6.1.2)$$

bulunur. Rezonans değerleri, $u_0(t)\phi^\alpha + u_j(t)\phi^{j+t}$ ifadesi (6.1.1) de yerine yazılarak

$$j = \{-1, 2\} \quad (6.1.3)$$

şeklinde bulunur. $j = -1$ ϕ fonksiyonunun keyfiliğine karşılık gelir. Uyumluluk durumunu araştırırken, en büyük rezonans değeri olan $j = 2$ için

$$u(x,t) = \phi^{-1} \sum_{j=0}^2 \phi^j u_j(t) \text{ kesikli açılımı (6.1.1) denkleminde yerine yazılır. } \phi \text{ nin}$$

kuvvetlerinin katsayıları eşitlenir. Eğer Burgers' denklemi Painlevé testini geçerse ϕ ve u_2 kesikli açılımda keyfi fonksiyonlar olmalıdır. Detaylı hesaplamalar ile $u_0 = 2p$, $u_1 = \psi_t$; u_2 , $\psi = \psi(t)$ keyfi fonksiyonlar ve Burgers' denkleminin çözümü

$$u(x,t) = \frac{-2q}{x-\psi} + 2\psi_t + (x-\psi)u_2 \quad (6.1.4)$$

dir. Böylece üç adım boyunca Burgers' denkleminin Painlevé integrallenebilirliği doğrulanmış olur (Shingareva ve Lizarraga-Celaya, 2011).

6.2 KdV Denklemi

(6.1) denkleminin ikinci durumunu inceleyecek olursak, $q = -\sigma$ olması durumunda KdV denklemi

$$u_t + uu_x + \sigma u_{xxx} = 0 \quad (6.2.1)$$

dir. İlk olarak Lord Rayleigh ve Boussinesq (1871 ve 1876) tarafından tanıtılmıştır (Boussinesq, 1877). KdV olarak bilinen solitary dalgaların varlığında sığ su yüzeyinin yüksekliğini modellemek için türettikleri lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. KdV denklemi daha sonraları birçok fiziksel olayın açıklanmasında kullanılmıştır. Bir yoğunluk tabakalı okyanusta uzun iç dalgalar, iyon plazma akustik dalgalar, bir kristal kafeste akustik dalgaları ifade eden denklemdir (Jager, 2006).

KdV denkleminin integrallenebilir olduğunu göstermek için Painlevé analizine başvurabiliriz. Painlevé analizi için etkin terim analizi yapılırsa,

$$\alpha = -2 \text{ ve } u_0 = -12\sigma\phi_x^2 \quad (6.2.2)$$

olarak bulunur. Böylece KdV'nin Laurent seri çözümü,

$$u(x, t) = \phi^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k u_k(t) \quad (6.2.3)$$

formundadır. Rezonans değerleri için

$$u = u_0(t)\phi^{-2} + u_j(t)\phi^{j-2} \quad (6.2.4)$$

eşitliği (6.2.1) da yerine yazılır ve

$$j = -1, 4, 6 \quad (6.2.5)$$

rezonans değerleri bulunur. $j = -1$ rezonansı ϕ fonksiyonunun keyfilğine karşılık gelir. Uyumluluk durumu araştırılırken, en büyük rezonans değeri için

$$u(x, t) = \phi^{-2} \sum_{j=0}^6 \phi^j u_j(t) \quad (6.2.6)$$

kesikli açılımı (6.2.1) denkleminde yerine yazılır. ϕ nin benzer kuvvetlerinin terimleri toplanıp gruplandırma yapılır. Böylece rezonans değerlerinde u_4 ve u_6 fonksiyonlarının keyfi kaldığı görülür. Bu durum, KdV denkleminin (3.8) şeklinde

Laurent seri açılımında üç tane keyfi fonksiyon içerdiğini göstermektedir. Böylece KdV denkleminin Painlevé özelliğine sahip olduğu yani integrallenebilir olduğu söylenir (Bekir, 2005; Conte ve Musette, 2008).

KdV denkleminin, integrallenebilir olduğunu belirttikten sonra birçok metot yardımıyla çözümü bulunabilir. Biz Hirota metodunu kullanarak bir soliton çözümünü araştıralım.

Bilineer forma dönüştürülen KdV denklemine

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \quad (6.2.7)$$

perturbatif genişlemesi yapabiliriz. Burada, $f_i, i = 1, 2, \dots; x, t, \dots$ ye bağlı fonksiyonlar, ε perturbasyon parametresi denilen bir sabittir. Bir soliton çözüm için

$$f = f_0 + \varepsilon f_1, \quad (6.2.8)$$

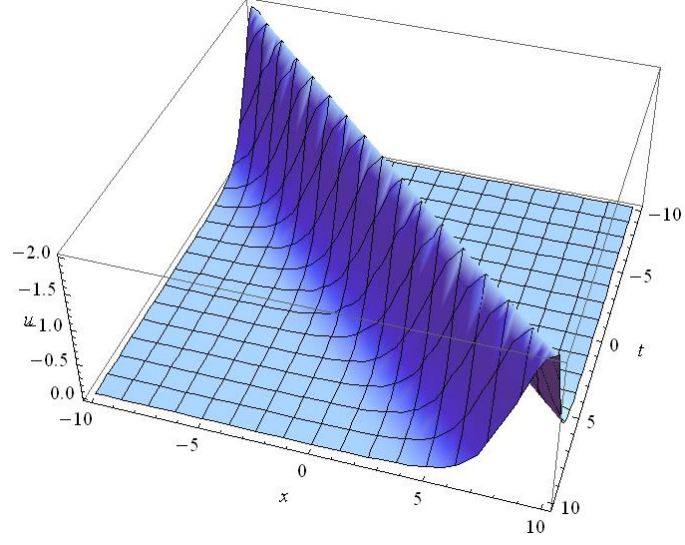
alalım. Burada $f_1 = e^{\theta_1}$ ve $\theta_1 = k_1 x + w_1 t + \alpha_1$ dir. Dikkat edersek her $i \geq 2$ için $f_i = 0$ dir. Bu durumda f (6.2.1) denkleminde yerine yazılır ve $\varepsilon^m, m=0, 1, 2, \dots$ katsayılarının yok olduğu görülür. ε^0 katsayısından $P(0,0)\{1\} = 0$ olduğundan $P(D)\{1.1\} = 0$ dir. ε^1 in katsayısında düzenlemeler yapılırsa,

$$w_1 = -k_1^3 \quad (6.2.9)$$

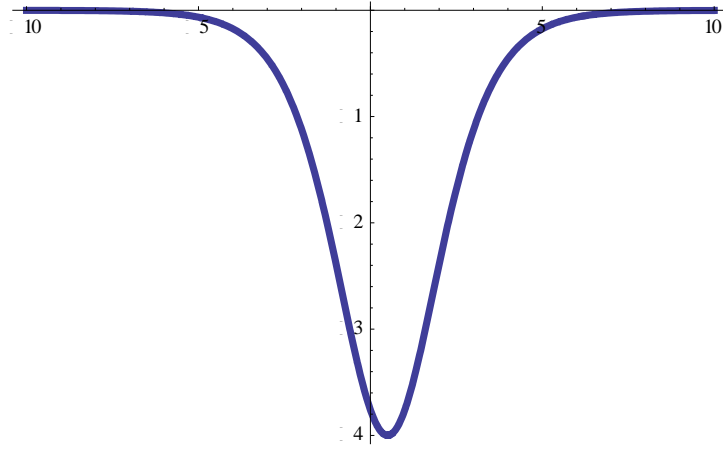
bulunur. ε^2 nin katsayısı da aşikar olarak yok olur. Genelliği bozmamak adına $\varepsilon = 1$ alınabilir ve böylece $f = 1 + e^{\theta_1}$ olur. Sonuç olarak KdV denkleminin bir soliton çözümü

$$u(x, t) = -\frac{k_1^2}{2 \cosh^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)} = -2k_1^2 \operatorname{Sech}^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \quad (6.2.10)$$

şeklinde bulunur. Burada $\theta_1 = k_1 x - k_1^3 t + \alpha_1, x \in R, t \geq 0$ dir.



Şekil 6.1. 3D-KdV denkleminin bir soliton çözümü



Şekil 6.2. 2D-KdV denkleminin bir soliton çözümü

Yukarıda KdV denkleminin, Şekil 6.1’de bir soliton çözümü için 3D dalga modeli ve Şekil 6.2’de ise bir soliton çözümünün 2D görseli görülmektedir. İki, üç ve N solitona kadar çözümler referanslarda ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir (Martinez).

Burgers’ ve KdV denklemlerinin Painlevé testini geçerek integrallenebilirliği gösterildikten sonra çözümlerinin olacağı belirtilip çözümleri birer örnek ile gösterildi.

Kısmi diferansiyel denklemler için Painlevé testi iki durumda özetlenebilir: Eğer KDD Painlevé testini geçerse bir genel çözüm bulunabilir, eğer Painlevé testini geçmezse tek değerli özel bir çözüm bulunabilir. Ayrıca Hirota metodu ya da Hirota bilinear formuna göre integrallenebilir denklemlerin çoklu solitona kadar çözümleri bulunabilir. Ancak integrallenemeyen denklemler için sadece iki soliton çözüm bulunabilir (Shingareva ve Lizarraga-Celaya, 2011). Bu yüzden integrallenemeyen KdVB denkleminin bir soliton çözümü basitleştirilmiş Hirota metodu ile bulunabilir. Basitleştirilmiş Hirota metodu, Hirota D operatörü ile bilinear forma getirilmesi zor olan ya da mümkün olmayan denklemlerde başvurulan bir metottur (Hereman ve Nuseir, 1997).

6.3 KdVB Denkleminin Tam Çözümü Üzerine Yeni Bir Yaklaşım

KdV denkleminin genel halini aldığımız

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = F(u, u_x, u_{xx}) \quad (6.3.1)$$

biçimindeki ifade de $F(u) = \gamma u_{xx}$ varsayarsak (6.3.1) denklemi dalgaların tanımlanmasında kullanılan KdVB denklemini olur. Burada $\gamma = 1$ ve (6.1) denkleminin üçüncü durumunda, KdVB denkleminin genel halini verdiğimiz denkleme uygunluk açısından $\varepsilon = 1, p = 1, q = -1$ alınırsa KdVB denklemini,

$$u_t + uu_x - u_{xx} + u_{xxx} = 0$$

haline gelir. Biz bu ifadeyi

$$u_t + uu_x - u_{xx} + u_{xxx} = F_n(u) \quad (6.3.2)$$

şeklinde alalım. Burada,

$$F_n(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + \dots + a_nu^n, \quad n = 4, 5, 6, \dots$$

polinomal formda, a_i katsayıları birer sabit olsun. Aşağıda verilen ilerleyen dalga çözümü kullanılır,

$$u(x, t) = w(z), \quad z = kx + \omega t, \quad (6.3.3)$$

ve bu dönüşümü, (6.3.2) denkleminde yerine yazarsak sol taraf,

$$k^3 w_{zzz} - k^2 w_{zz} + k w w_z + \omega w_z \quad (6.3.4)$$

biçiminde olur. Lineer olmayan adi diferansiyel denklem formunda alırsak,

$$k^3 w_{zzz} - k^2 w_{zz} + k w w_z + \omega w_z = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + \dots + a_n w^n \quad (6.3.5)$$

şeklinde yazılır. (6.3.5) denkleminin integrallenebilirlik şartı için KdVB denklemini alalım. Painlevé testini uygularken Kovalevskaya'nın yolunu kullanabiliriz.

Teorem 6.3.1

(6.3.5) denkleminin $n = 3$ ve $n \geq 5$ olduğu zaman Painlevé testinin birinci adımını geçemez.

İspat

Bilindiği gibi Painlevé testinin ilk adımı Laurent serisindeki genel çözümün açılımında ilk terimi bulmaktır. Eğer ilk terim, $(z - z_0)$ in negatif tamsayı kuvvetine sahip ise yani hareketli kutba sahip ise, denklem Painlevé testini geçer ve ikinci adıma geçilir. z_0 , lineer olmayan diferansiyel denklemin genel çözümü için hareketli kutup noktasıdır. (5.3.5) denkleminin özerk yapısıdır ve $(z - z_0)$ hariç z değişkeni kullanabiliriz.

$$w = b_0 z^p \quad (6.3.6)$$

İfadesini (6.3.5) her bir teriminde yerine yazalım. Böylece etkin terimlerle birlikte denklemleri bulabiliriz. $F_1(u)$ ve $F_2(u)$ durumlarında etkin terimlerin olduğu denklem

$$w_{zzz} + w w_z = 0 \quad (6.3.7)$$

formuna sahiptir. (6.3.6) ifadesini (6.3.7) denkleminde yerine yazarsak;

$b_0(p)(p-1)(p-2)z^{p-3} + b_0^2 p z^{2p-1} = 0$ olur. Etkin terimler arasında dengeleme yapılırsa $p = -2$, ikinci dereceden bir kutba sahip olduğunu buluruz.

$n \geq 3$ durumunda etkin terimlerin olduğu denklem,

$$w_{zzz} - a_n w^n = 0, \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (6.3.8)$$

formundadır. Ayrıca $n = 3$ durumunda; $b_0(p)(p-1)(p-2)z^{p-3} - a_3 b_0^3 z^{3p} = 0$.

Etkin terimler arasında dengeleme yapılırsa $p = -\frac{3}{2}$ kutup değerine sahiptir ve denklem,

$$k^3 w_{zzz} - k^2 w_{zz} + k w w_z + \omega w_z = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3$$

dır ve Painlevé testini geçmez.

$n = 4$ durumunda $b_0(p)(p-1)(p-2)z^{p-3} - a_4 b_0^4 z^{4p} = 0$ olur, dengeleme yapılırsa $p = -1$ kutup değerine sahiptir ve bir KdVB denkleminin

$$k^3 w_{zzz} - k^2 w_{zz} + k w w_z + \omega w_z = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + a_4 w^4$$

tam çözümüne sahip oluruz. Bunlara ilaveten $n \geq 5$ durumunda genel çözümün kutup noktaları için $p \leq \frac{3}{4}$ bulunur. Böylece $n = 3$ ve $n \geq 5$ durumlarında (6.3.5)

denklemini Painlevé testini geçemez. Bununla birlikte $n = 2$ ve $n = 4$ olan durumlarda Painlevé testine devam edebiliriz.

Tam çözümü bulmak için bilinear forma dönüştürülmesi zor olduğundan basitleştirilmiş Hirota metodunu kullanabiliriz.

Bir soliton çözüm

(6.1) denkleminin üçüncü durumunda $\varepsilon = 1, p = 1$ ve $q = -1$ olarak alınırsa KdVB denklemini

$$u_t + uu_x - u_{xx} + u_{xxx} = 0 \quad (6.3.9)$$

formuna dönüştür. Denkleme

$$u = 2 \frac{\partial^2 \ln f}{\partial x^2} \quad (6.3.10)$$

şeklinde dönüşüm yapılır. Dönüşümü u_t de yerine yazıp, diğer terimler ile denklem x e göre bir kez integrali alınarak,

$$2(\ln f)_{xt} + \frac{u^2}{2} - u_x + u_{xx} = 0 \quad (6.3.11)$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra (6.3.10) dönüşümünün gerekli türevleri alınarak (6.3.11) da yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$f^3(f_{xt} - f_{xxx} + f_{xxx}) + f^2(-f_x f_t - 2f_{xx}^2 + 3f_{xx} f_x - 4f_{xxx} f_x) + f(10f_{xx} f_x^2 - 2f_x^3) + (-5f_x^4) = 0 \quad (6.3.12)$$

ifadesi bulunur. Operatör form ile yazılmak istenirse;

$$f^3 L(f) + f^2 N_1(f, f) + f N_2(f, f, f) + N_3(f, f, f, f) = 0 \quad (6.3.13)$$

ifadesi elde edilir. Lineer ve lineer olmayan operatörler, $f(x, t)$ den $j(x, t)$ kadar olan keyfi fonksiyonlarla sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır;

$$L \cdot = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^3 \cdot}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 \cdot}{\partial x^4} \quad (6.3.14)$$

ve

$$N_1(f, g) = -f_x g_t - 2f_{xx} g_{xx} + 3f_{xx} f_x - 4f_{xxx} g_x \quad (6.3.15)$$

$$N_2(f, g, h) = 10f_{xx} g_x h_x - 2f_x g_x h_x \quad (6.3.16)$$

$$N_3(f, g, h, k) = -5f_x g_x h_x k_x \quad (6.3.17)$$

$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$ perturbasyon formunun bir çözümünü araştırmak için, perturbe ifadesi (6.3.4) denkleminde yerine yazılır ve ε un farklı kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek perturbatif formunun ilk üç denklemini aşağıdaki şekilde verilir;

$$\varepsilon^1 : L \cdot f_1 = 0 \quad (6.3.18)$$

$$\varepsilon^2 : L \cdot f_2 = -3f_1 L \cdot f_1 - N_1(f_1, f_1) \quad (6.3.19)$$

$$\varepsilon^3 : L \cdot f_3 = -3f_1 L \cdot f_2 - (3f_2 + 3f_1^2) L \cdot f_1 - N_1(f_1, f_2) - 2f_1 N_1(f_1, f_1). \quad (6.3.20)$$

$\theta = kx - wt + \delta$ olmak üzere $f_1 = e^\theta$ alınır. (6.3.18) denkleminde yerine yazılırsa w ,

$$w = k^3 - k^2 \quad (6.3.21)$$

olarak bulunur. (6.3.19) denklemi çözümlerse, sağ taraftaki ifade aşağıdaki gibidir

$$-N_1(f_1, f_1) = 5k^4 - 2k^3 e^{2\theta}. \quad (6.3.22)$$

Böylece f_2 formu,

$$f_2 = a e^{2\theta} \quad (6.3.23)$$

dır. a değerini bulmak için (6.3.19) denkleminin sol tarafı çözümü

$$L \cdot f_2 = a(-3k^4 + 3k^3) e^{2\theta} \quad (6.3.24)$$

bulunur ve (6.3.19)nın sağ tarafı ile eşitlenirse

$$a = \frac{5k^4 - 2k^3}{-3k^4 + 3k^3} \quad (6.3.25)$$

ifadesi bulunur. $n \geq 3$ için $f_n = 0$ olduğu doğrudan görülür. Böylece yapılan u dönüşümü $\varepsilon = I$ ile birlikte

$$f = 1 + e^\theta + \frac{5k^4 - 2k^3}{-3k^4 + 3k^3} e^{2\theta}, \quad (6.3.26)$$

dır ve denklemin çözümü ise

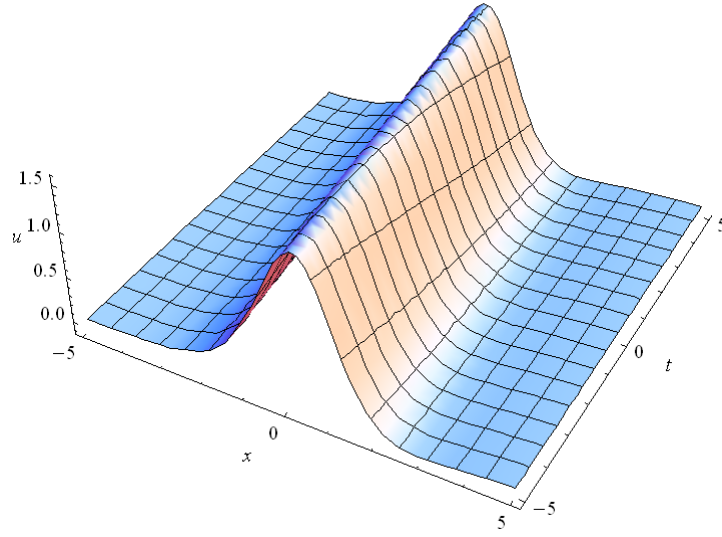
$$u(\theta) = \frac{3(-1+k) \left(-e^\theta k^2 \left(3-3k+e^\theta \left(-5+17k+5e^\theta (-2+5k) \right) \right) + 4e^{2\theta} k(-2+5k) k e^\theta - 3(-1+k) k e^{2\theta} \right)}{\left(3-3k+e^\theta \left(3-3k+e^\theta (-2+5k) \right) \right)^2}$$

$$(6.3.27)$$

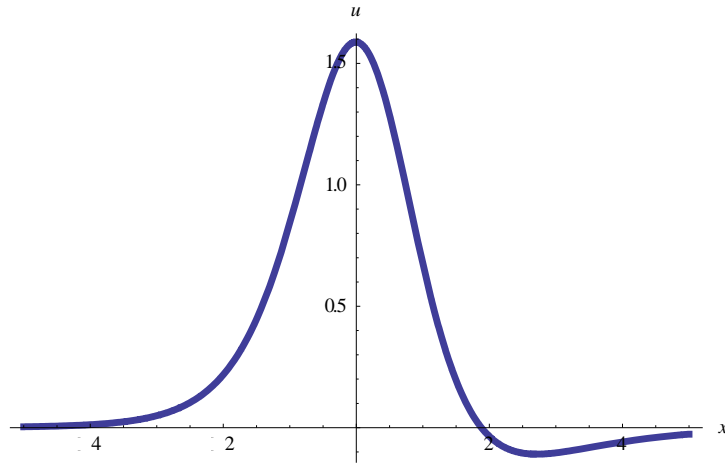
ya da

$$u(\theta) = \frac{e^\theta k^2 + e^{2\theta} k^2 - \frac{8e^{2\theta} k^5}{3k^3-3k^4} - \frac{10e^{3\theta} k^5}{3k^3-3k^4} + \frac{20e^{2\theta} k^6}{3k^3-3k^4} + \frac{25e^{3\theta} k^6}{3k^3-3k^4} + \frac{8e^{2\theta} k^4 k e^\theta}{3k^3-3k^4} - \frac{20e^{2\theta} k^5 k e^\theta}{3k^3-3k^4} - k e^{2\theta}}{\left(1 + e^\theta - \frac{2e^{2\theta} k^3}{3k^3-3k^4} + \frac{5e^{2\theta} k^4}{3k^3-3k^4}\right)^2} \quad (6.3.28)$$

şeklindedir. Burada $\theta = kx + (-k^3 + k^2)t + \alpha$, k ve δ keyfi reel sabitlerdir ve $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ dir.



Şekil 6.3.1. 3D-KdVB denkleminin bir soliton çözümü



Şekil 6.3.2. 2D KdVB denkleminin bir soliton çözümü

Yukarıda KdVB denkleminin bir soliton çözümünün $k=0.9$ ve $a=-1$ değerleri için 3D görseli verilmiştir. $t=-2.5$, $k=0.9$ ve $a=-1$ değerlerinde ise bir soliton çözümünün 2D görseli görülmektedir.

7. GENELLEŞTİRİLMİŞ KAWAHARA DENKLEMİ

Çalışmamızın bu bölümünde, genelleştirilmiş Kawahara denklemini ele alacağız. Öncelikle denklemin integrallenebilirliğini Painlevé analizi ile inceleyeceğiz. Painlevé analizinde düşünülen yeni yaklaşımı, genelleştirilmiş Kawahara denkleminde uygulayıp üzerinde teoriler kuracağız. Daha sonra denklemin bir tam çözümünü, basitleştirilmiş Hirota metodu ile bulacağız.

Kawahara denklemini (KD), 1972 yılında Takuji Kawahara tarafından türetilmiştir. Beşinci mertebeden KdV denkleminin genellemesi olan bir denklemdir. Fiziksel birçok olayda örneğin, yüzey gerilimi ile birlikte sığ su dalgaları, kılcak yerçekimi su dalgaları, plazma dalgaları gibi birçok dalga modelinde ortaya çıkar.

(6.1) denkleminin dördüncü durumunda ele alınan Genelleştirilmiş Kawahara denklemini (GKD),

$$u_t - \mu u_x + \varepsilon u^m u_x + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxx} = 0 \quad (7.1)$$

olarak verilir. Burada μ, γ, α ve β fiziksel parametreler, n bir tamsayıdır.

- ✓ $m=1$ olması durumunda magneto-akustik dalgaya karşılık gelir.
- ✓ $m=2$ olması durumunda ise sığ su yaklaşımı içindir.

(Suarez ve Morales, 2014).

Yukarıda verilen durumlardaki denklemler için analitik çözümleri incelenmiş durumdadır. Fakat genel çözümleri henüz bulunamamıştır. “Genelleştirilmiş Kawahara denkleminin bulunamayan genel çözümüne karşılık özel bir çözüm var mı?” Sorusu ortaya çıkmaktadır. Denklemin soliton çözümlerini bulabilmek için integrallenebilir olup olmadığını göstermek gerekmektedir. Bunun için Painlevé testi kullanmak bize oldukça yardımcı olmaktadır. Painlevé testi için Kruskal metodu, genelleştirilmiş Kawahara denkleminin Painlevé testini geçemediğini göstermektedir (Biswas, 2009).

- $\mu = -1, \varepsilon = 1$ alınırsa genelleştirilmiş Kawahara denklemi

$$u_t + u_x + u^m u_x + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxxx} = 0 \quad (7.2)$$

(Basitlik açısından $\alpha = a$ ve $\beta = b$ şeklinde düşünülebilir.)

(Öncelikle $m = 2$ olarak düşünelim.)

formuna dönüşür. Düzenlemiş olduğumuz genelleştirilmiş Kawahara denklemine Painlevé testini uygulayabiliriz.

Kruskal metodu üç adımda genelleştirilmiş Kawahara denklemi için uygulanırsa;

1.Adım Baş terim analizi

Genelleştirilmiş Kawahara denkleminin çözümünün Laurent serisi şeklinde bir çözümü olduğunu varsayalım. Etkin terimini bulmak için

$$u \propto \phi^{-\rho} u_0 \quad (7.3)$$

ifadesi (7.2) denkleminde yerine yazılır. Burada $u_0(t)$ analitik bir fonksiyondur. (7.2) denkleminde yerine yazıldıktan sonra

$$\begin{aligned} & -\rho \phi^{4-2\rho} u_0^3 + \phi^5 u_{0t} + \rho u_0 (-24b - 2a\phi^2 - \phi^4 - 50b\rho - 3a\phi^2\rho - 35b\rho^2 - a\phi^2\rho^2) \\ & -10b\rho^3 - b\rho^4 + \phi^4 \psi'(t) \end{aligned} \quad (7.4)$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra en yüksek mertebedeki lineer olmayan terimlerde dengeleme yapılırsa

$$\rho = 2 \text{ ve } u_0 = \mp \sqrt{(-360b - 12a\phi^2 - \phi^4 + \phi^4 \psi'(t))} \quad (7.5)$$

olarak bulunur. Burada ρ pozitif tamsayı olduğundan Painlevé testinin birinci adımı gerçekleşmiş olur.

2.Adım Rezonansları bulmak

Laurent serisindeki ϕ fonksiyonunun kuvvetleri, yani; serideki keyfi katsayıların belirlenmesi rezonans analizi ile olur. Bunun için asıl denkleminiz olan genelleştirilmiş Kawahara denkleminde

$$u_0(t)\phi^{-\rho} + u_j(t)\phi^{j-\rho} \quad (7.6)$$

ifadesini yazılır. ϕ fonksiyonunun en küçük kuvveti parantezinde gruplandırılır ve gerekli düzenlemelerden sonra

$$Q(j) = (j+1)(j-8)(j^2 - 7j + 30) = 0 \quad (7.7)$$

polinom ifadesi elde edilir. Buradan rezonans değerleri

$$\{-1, 6, 8, (7 + i\sqrt{71/2}), (7 - i\sqrt{71/2})\} \quad (7.8)$$

şeklinde elde edilir. $j = -1$ rezonansı ϕ fonksiyonunun keyfiliğine karşılık gelir. Fakat rezonans değerleri içerisinde kompleks rezonans noktaları da vardır. Painlevé testinin devam edebilmesi için *kompleks rezonans köklerinin bulunmaması* gerekmektedir. Bu noktada Painlevé analizi sona erer. Böylece genelleştirilmiş Kawahara denklemi Painlevé testi ile de ispat edilmiştir ki integrallenemez bir denklemdir. Genelleştirilmiş Kawahara denklemi için aynı sonuç Conte tarafından da bulunmuştur (Shingareva ve Lizarraga-Celaya, 2011).

7.1 Genelleştirilmiş Kawahara Denkleminin Tam Çözümü Üzerine Yeni Bir Yaklaşım

(7.3) denkleminde ele aldığımız genelleştirilmiş Kawahara denklemi $\alpha = 1, \beta = 1$ olmak üzere,

$$u_t + u_x + u^m u_x + u_{xx} + u_{xxxx} = 0 \quad (7.1.1)$$

olur.

$$u_t + u_x + u^m u_x + u_{xx} + u_{xxxx} = F_n(u)$$

şeklinde alalım.

$F_n(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + \dots + a_nu^n$, $n = 4, 5, 6, \dots$ polinomal formda, a_i katsayıları birer sabit olsun. İlerleyen dalga çözümü kullanılarak,

$$u(x, t) = w(z), \quad z = kx + \omega t, \quad (7.1.2)$$

dönüşümünü, denklemde yerine yazarsak sol taraftaki ifade,

$$k^5 w_{zzzzz} + k^3 w_{zzz} + k^2 w^m w_z + k w_z + \omega w_z \quad (7.1.3)$$

olur. Lineer olmayan adi diferansiyel denklem formunda alırsak,

$$k^5 w_{zzzzz} + k^3 w_{zzz} + k^2 w^m w_z + k w_z + \omega w_z = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + \dots + a_n w^n \quad (7.1.4)$$

şeklinde yazılır. (7.1.4) denkleminin integrallenebilirlik şartı için genelleştirilmiş Kawahara denklemini alalım. Amacımız Kovalevskaya'nın yolu ile Painlevé testine başvurmaktır.

Teorem 7.1.1

(7.1.4) denklemi $m \geq n$ olduğu zaman $m = 1, 2, 4$ durumlarında Painlevé testinin birinci adımını geçer. $m < n$ olduğu zaman $n = 6$ ve $n \geq 7$ durumlarında Painlevé testinin birinci adımını geçemez.

İspat

Bilindiği gibi Painlevé testinin ilk adımı Laurent serisindeki genel çözümün açılımında ilk terimi bulmaktır. Eğer ilk terim, $(z - z_0)$ in negatif tamsayı kuvvetine sahip ise yani hareketli kutba sahip ise, denklem Painlevé testini geçer ve ikinci adıma geçilir. z_0 , lineer olmayan diferansiyel denklemin genel çözümü için hareketli kutup noktasıdır. (7.1.4) denklemi özerk yapıdadır ve $(z - z_0)$ hariç z değişkeni kullanabiliriz.

$$w = b_0 z^p \quad (7.1.5)$$

ifadesini (7.1.4) denkleminin her bir teriminde yerine yazalım.

$m \geq n$ olduğu zaman $F_1(u), F_2(u), F_3(u)$ ve $F_4(u)$ durumlarında etkin terimlerin olduğu denklem

$$w_{zzzz} + w^m w_z = 0 \quad (7.1.6)$$

formuna sahiptir. (7.1.5) ifadesini (7.1.4) denkleminin etkin terimlerinde yerine yazıp dengeleme yaparsak;

$$p = -\frac{4}{m}$$

bulunur. p kutup değerinin tam sayı olması, m değerlerinin ancak ve ancak $\{1,2,4\}$ olması durumlarında mümkündür. Böylece (7.1.4) denkleminin sırasıyla $-1, -2, -4$ kutup değerlerine sahip olduğunu buluruz. Kutup değerinin tam sayı olmasından dolayı $m \geq n$ durumunda, $m=1,2,4$ olduğu zaman denklem Painlevé testinin ilk adımını geçer.

$m < n$ durumunda etkin terimlerin olduğu denklem formu,

$$w_{zzzz} - a_n w^n = 0 \quad (7.1.7)$$

şeklindedir. $n=5$ olduğu zaman (7.1.5) ifadesi etkin terimlerde yerine yazılıp dengeleme yapılırsa, denklem $p = -\frac{5}{4}$ kutup değerine sahip olur ve Painlevé testinin ilk adımını geçemez. $n=6$ olduğu durumda $p = -1$ kutup değeri bulunur ve denklem,

$$k^5 w_{zzzz} + k^3 w_{zzz} + k w^m w_z + k w_z + \omega w_z = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + a_4 w^4 + a_5 w^5 + a_6 w^6 \quad (7.1.8)$$

biçimindedir ve (7.1.5) denklemini Painlevé testinin ilk adımını geçer. $n=7$ olduğu durumda ise $p = -\frac{5}{6}$ bulunur ve (7.1.5) denklemini Painlevé testinin ilk adımını geçemez. Bunlara ilaveten $n \geq 7$ durumunda genel çözümün kutup noktaları için $p \leq \frac{5}{6}$ bulunur ve (7.1.5) denklemini Painlevé testinin ilk adımını geçemez. Bununla birlikte $n=1, n=2, n=4$ ve $n=6$ olan durumlarda Painlevé testine devam edebiliriz.

Teorem 7.1.2

(7.1.8) denklemi $a_2 \neq 0$, $a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ olduğu zaman tam çözüme sahip olur.

İspat

$a_2 \neq 0$, $a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$ alalım. O halde (7.1.8) denklemi

$$k^5 w_{zzzz} + k^3 w_{zzz} + k w^m w_z + k w_z + \omega w_z = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 \quad (7.1.9)$$

şeklinde yazılır. Laurent serisinin başlangıç değerini ve kutup değerlerini bulmak için (7.1.4) denklemi (7.1.9) denkleminin etkin terimlerinde yerine yazılır. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$p = -\frac{4}{m}$$

bulunur.

$$m = 1 \text{ için } p = -4$$

bulunur. Etkin terimlerde yerine yazılır ve başlangıç terimi $b_0 = -1680k^4$

elde edilir. O halde

$$w = -1680k^4 z^{-4} + b z^{r-4}$$

şeklinde çözümü, rezonans değerlerini bulmak için etkin terimlerde yerine yazılır. Burada gerekli düzenlemeler ile rezonans değerleri

$$r = \{-1, 8, 12, \frac{1}{2}(11-i\sqrt{159}), \frac{1}{2}(11+i\sqrt{159})\}$$

olarak bulunur.

$$m = 2 \text{ için } p = -2$$

bulunur. Etkin terimlerde yerine yazılır ve başlangıç terimi $b_0 = \sqrt{-360}k^2$

elde edilir. O halde

$$w = \sqrt{-360}k^2z^{-2} + bz^{r-2}$$

şeklinde çözümleri, rezonans değerlerini bulmak için etkin terimlerde yazılır. Burada gerekli düzenlemeler ile rezonans değerleri

$$r = \{-1, 6, 8, (7-i\sqrt{\frac{72}{2}}), (7+i\sqrt{\frac{72}{2}})\}$$

şeklinde bulunur.

$$m = 4 \text{ için } p = -1$$

bulunur. Etkin terimlerde yerine yazılır ve başlangıç terimi $b_0 = (-120)^{\frac{1}{4}}k$

elde edilir. O halde

$$w = (-120)^{\frac{1}{4}}kz^{-1} + bz^{r-1}$$

şeklinde çözümleri, rezonans değerlerini bulmak için etkin terimlerde yazılır. Burada gerekli düzenlemeler ile rezonans değerleri

$$r = \{-1, 5, 6, \frac{1}{2}(5-i\sqrt{39}), \frac{1}{2}(5+i\sqrt{39})\}$$

şeklinde bulunur. Üç durumdan da görüldüğü gibi -1 rezonans değeri z fonksiyonunun keyfiliğine karşılık gelir. Fakat bundan sonraki köklerde kompleks rezonans değerleri bulunmuştur. Bu durum, başka bir keyfi fonksiyonun Laurent serisine giremeyeceğini göstermektedir. Yani dört tane daha keyfi fonksiyonun bulunması beklenirken bu durum mümkün olamamaktadır. Painlevé analizi burada sona erer. Dolayısıyla (7.1.8) denklemi Painlevé testini geçemez. Teori gereği integrallenemeyen denklemlerin tam çözümü mevcuttur. (7.1.8) denklemi tam çözüme sahiptir.

Genelleştirilmiş Kawahara denkleminin integrallenemez olduğu yukarıda gösterildi. Eğer bir kısmi diferansiyel denklem Painlevé testini geçemezse; genel bir çözüm değil, tek değerli özel bir çözüm bulunabiliyordu. Nonlinear KDD denklemlerinin soliton çözümlerini bulabilmek için en çok kullanılan yöntemlerden biri Hirota metodudur. Hirota metodunda uygun dönüşüm yapıldıktan sonra Hirota D operatörü ile bilinear formda yazılır. Ancak bazı denklemler uygun dönüşüm sonrasında uzun

ve karmaşık hale gelebilmektedir. Hirota D operatörü ile bilineer formda yazılamamaktadır. Bu noktada, basitleştirilmiş Hirota metodu sorunun çözülmesinde yardımcı olmaktadır. Bu çalışmada, basitleştirilmiş Hirota metodu yardımı ile integrallenemeyen genelleştirilmiş Kawahara denkleminin bir çözümünü araştıracağız.

Bir soliton çözüm

(7.3) denkleminde $\alpha = \beta = 1, m = 2$ alınırsa genelleştirilmiş Kawahara denklemi,

$$u_t + u_x + u^2 u_x + u_{xxx} + u_{xxxx} = 0 \quad (7.1.1)$$

ifadesine dönüşür. Denkleme,

$$u = 2 \frac{\partial^2 \ln f}{\partial x^2} \quad (7.1.2)$$

dönüşümü yapılır. Dönüşümü u_t de yerine yazıp, diğer terimler ile denklem x e göre bir kez integrali alınarak,

$$2(\ln f)_{xt} + u + \frac{u^3}{3} + u_{xx} + u_{xxxx} = 0 \quad (7.1.3)$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra (7.1.2) dönüşümünün gerekli türevleri alınarak (7.1.3) de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} & f^5 (f_{xt} + f_{xx} + f_{xxx} + f_{xxxx}) + f^4 (-f_x f_t - f_x^2 - 4f_{xx} f_x - 3f_{xx}^2 - 6f_{xxxx} f_x - 15f_{xxx} f_{xx} \\ & - 10f_{xx}^2) + f^3 \left(\frac{94}{3} f_{xx}^3 + 12f_{xx} f_x^2 + 30f_{xxx} f_x^2 + 120f_{xxx} f_{xx} f_x \right) + f^2 (-4f_{xx}^2 f_x^2 - 6f_x^4 \\ & - 120f_{xxx} f_x^3 - 270f_{xx}^2 f_x^2) + f(364f_{xx} f_x^4) + (-364f_x^6) = 0 \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

elde edilir. Operatör form ile

$$\begin{aligned} & f^5 L(f) + f^4 N_1(f, f) + f^3 N_2(f, f, f) + f^2 N_3(f, f, f, f) + f N(f, f, f, f, f) \\ & + N_5(f, f, f, f, f, f) = 0. \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

şeklinde yazılır.

Lineer ve lineer olmayan operatörler, $f(x, t)$ den $j(x, t)$ ye kadar olan keyfi fonksiyonlarla aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir,

$$L = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial_x \partial_t} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial_x^2} + \frac{\partial^4 \cdot}{\partial_x^4} + \frac{\partial^6 \cdot}{\partial_x^6} \quad (7.1.6)$$

ve

$$N_1(f, g) = -f_x g_t - f_x g_x + 4f_{xxx} f_x - 3f_{xx} g_{xx} - 6f_{xxxx} f_x - 15f_{xxxx} f_{xx} - 10f_{xx} g_{xx} \quad (7.1.7)$$

$$N_2(f, g, h) = -\frac{94}{3} f_{xx} g_{xx} h_{xx} + 12f_{xx} f_x g_x + 30f_{xxxx} f_x g_x + 120f_{xx} f_{xx} f_x \quad (7.1.8)$$

$$N_3(f, g, h, k) = -4f_{xx} g_{xx} f_x g_x - 6f_x g_x h_x k_x - 120f_{xxx} f_x g_x h_x - 270f_{xx} g_{xx} f_x g_x \quad (7.1.9)$$

$$N_4(f, g, h, k, l) = 364f_{xx} f_x g_x h_x k_x \quad (7.1.10)$$

$$N_5(f, g, h, k, l, j) = \frac{364}{3} f_x g_x h_x k_x l_x j_x \quad (7.1.11)$$

$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$ perturbatif genişlemesinin bir çözümünü araştırmak için, perturbatif ifadeyi, (7.1.4) denkleminde yerine yazıp ε un farklı kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek belirtilir. Biz ilk üç denklemin perturbatif genişlemesini vermek istersek,

$$\varepsilon^1 : L \cdot f_1 = 0 \quad (7.1.12)$$

$$\varepsilon^2 : L \cdot f_2 = -5f_1 L \cdot f_1 - N_1(f_1, f_1) \quad (7.1.13)$$

$$\varepsilon^3 : L \cdot f_3 = -5f_1 L \cdot f_2 - (5f_2 + 10f_1^2) L \cdot f_1 - N_1(f_2, f_1) - 4f_1 N_1(f_1, f_1) - N_2(f_1, f_1, f_1) \quad (7.1.14)$$

olarak ifade edilir.

Bir soliton çözüm için $f_1 = e^\theta$ alınır, burada $\theta = kx - wt + \delta$, $x \in R$, $t \geq 0$ dır. Bu ifade (7.1.12) denkleminde yerine yazılır ve w ,

$$w = -(k^5 + k^3 + k) \quad (7.1.15)$$

olarak bulunur. (7.1.13) denklemini çözmek için öncelikle sağ tarafı hesaplırsak,

$$N_1(f_1, f_1) = -(20k^6 + 16k^4)e^{2\theta} \quad (7.1.16)$$

elde edilir. Böylece f_2 ,

$$f_2 = ae^{2\theta} \quad (7.1.17)$$

formuna dönüşür. a değerini bulmak için (7.1.13) denkleminin sol tarafı çözümlerse

$$L \cdot f_2 = a(68k^6 + 20k^4 + 8k^2)e^{2\theta} \quad (7.1.18)$$

bulunur. Böylece (7.1.13) denkleminin her iki yanını eşitlenirse a değeri

$$a = -\frac{5k^6 + 4k^4}{17k^6 + 5k^4 + 2k^2} \quad (7.1.19)$$

olarak bulunur. $n \geq 3$ için $f_n = 0$ olduğu doğrudan görülür. Böylece $\varepsilon=1$ ile birlikte f fonksiyonu,

$$f = 1 + e^\theta + \left(-\frac{5k^6 + 4k^4}{17k^6 + 5k^4 + 2k^2}\right)e^{2\theta} \quad (7.1.20)$$

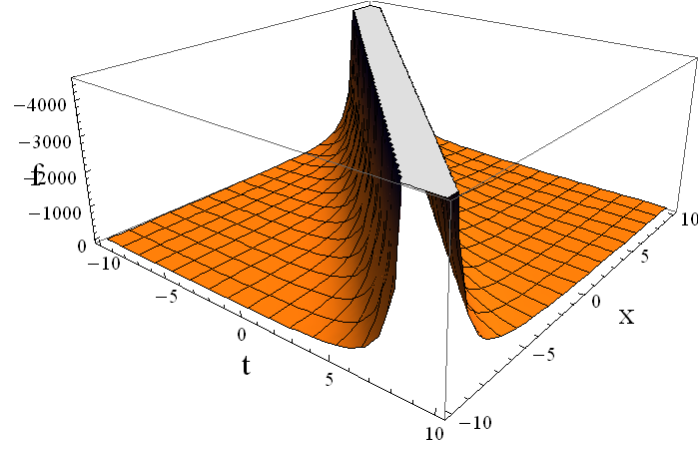
dır ve u çözümü

$$u(\theta) = \frac{2 \left(e^\theta k^2 \left(1 - \frac{4e^\theta k^2 (4+5k^2)}{2+5k^2+17k^4} \right) \left(1 + e^\theta - \frac{e^{2\theta} k^2 (4+5k^2)}{2+5k^2+17k^4} \right) - \frac{(2e^{2\theta} k(-2+5k) - 3(-1+k)ke^\theta)^2}{9(-1+k)^2} \right)}{\left(1 + e^\theta - \frac{e^{2\theta} k^2 (4+5k^2)}{2+5k^2+17k^4} \right)^2} \quad (7.1.21)$$

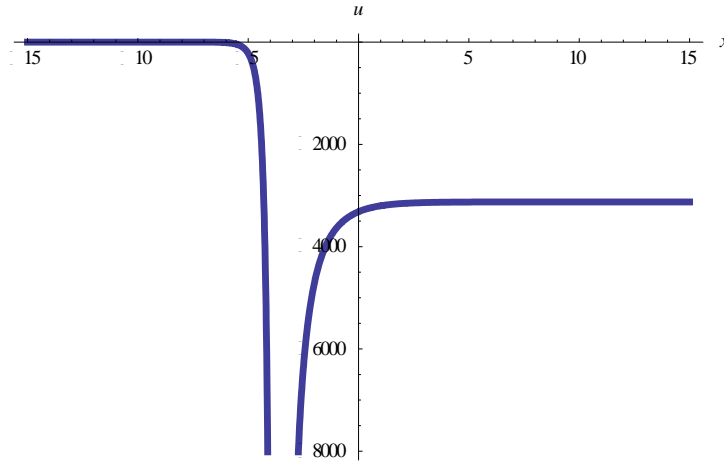
ya da

$$u(\theta) = \frac{2 \left(\left(e^\theta k^2 - \frac{16e^{2\theta} k^6}{2k^2+5k^4+17k^6} - \frac{20e^{2\theta} k^8}{2k^2+5k^4+17k^6} \right) \left(1 + e^\theta + \frac{e^{2\theta} (-4k^4-5k^6)}{2k^2+5k^4+17k^6} \right) - \left(-\frac{4e^{2\theta} k^4}{3k^3-3k^4} + \frac{10e^{2\theta} k^5}{3k^3-3k^4} + ke^\theta \right)^2 \right)}{\left(1 + e^\theta + \frac{e^{2\theta} (-4k^4-5k^6)}{2k^2+5k^4+17k^6} \right)^2} \quad (7.1.22)$$

şeklindedir. Burada $\theta = kx + (k^5 + k^3 + k)t + \delta$, k ve δ keyfi reel sabitlerdir, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ dır.



Şekil 7.1. 3D-Genelleştirilmiş Kawahara denkleminin bir soliton çözümü



Şekil 7.2. 2D- Genelleştirilmiş Kawahara denkleminin bir soliton çözümü

Yukarıda genelleştirilmiş Kawahara denkleminin bir soliton çözümünün $k = 0.9$ ve $a = 0.2$ değerleri için 3D görseli verilmiştir. $t = 2$, $k = 0.9$ ve $a = 0.1$ değerlerinde ise bir soliton çözümünün 2D görseli görülmektedir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Korteweg-de Vries-Burgers' denkleminin ve genelleştirilmiş Kawahara denkleminin integrallenemez olduğu Painlevé testi ile gösterilmiştir. Çalışmanın orijinal kısımlarını oluşturan Painlevé analizi üzerine yeni bir yaklaşım bulunup üzerinde teoriler kurulmuştur.

İntegrallenemeyen bir denklemin tek değerli özel tam çözümü bulunabilmektedir. Bu nedenle her iki denklemin de tek değerli özel çözümleri Hirota metodu ve basitleştirilmiş Hirota metodu ile bulunmuştur. Bulunan çözümlerin Mathematica paket programında 3D ve 2D grafikleri çizilmiştir. Neticede integrallenemeyen denklemlerin neden integrallenemez olduğu ispat edilip tam çözümleri bulunabilir.

Son zamanlarda üzerinde yoğunlaşılın Painlevé analizi ve integrallenebilirlik kavramları yeni çalışmalara ışık tutmuştur. Biz de bu yeni çalışmaların üzerinde odaklandık. Painlevé testine uygulanılan yeni yaklaşım ile Painlevé testi daha basit hale getirilmiş olmaktadır. Aynı yaklaşımların başka tam sayılı diferansiyel denklemlere ve kesirli kesirli diferansiyel denklemlere uygulanabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Ablowitz, M. J., Ramani, A., Segur, H., 1980. A connection between Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type I, II, *Journal of Mathematical Physics*. 21: 715-721, 1006–1015.
- Abazari, R., 2014. Application of Extended Tanh Function Method on KdV- Burgers Equation With Forcing Term, *Mathematical and Theoretical Physics*, 59, 3-11.
- Ablowitz M.J. and Clarkson P.A., 1991. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge University Press, 528s, Cambridge.
- Bundgaard J., 2011. *A Survey of the History and Properties of Solitons*. Colorado School of Mines.
- Bekir, A., 2005. Lineer Olmayan Denklemlerin Painlevé Analizi, Tam Çözümleri ve Simetrisi. Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, Türkiye.
- Biswas, A., 2009. Solitary wave solution for the generalized Kawahara equation. *Applied Mathematics Letters*. 22, 208-210.
- Boussinesq, J., 1877. Essai sur la théorie des eau courantes, Mémoires présentes par divers savants. l'Acad. des Science Institut National France, 680p, France.
- Caudrelier, V., 2015. On the Inverse Scattering Method for Integrable PDEs on a Star Graph. *Communications in Mathematical Physics*, 338, 893-917.
- Conte R. and Musette M., 2008. *Painlevé Hand Book*. Springer, 256p, Netherlands.
- Conte, R. 1999. The Painlevé Approach to Nonlinear Ordinary Differential Equations, CRM Series in Mathematical Physics, 77-180
- Curry J., 2008. Soliton Solutions of Integrable Systems and Hirota's Method. *Mathematical Reviews*, 2, 43-59.
- Drazin P.G. and Johnson R.S., 1989. *Solitons: An Introduction*. Cambridge University Press, 226p, USA.
- Druitt F., 2005. Hirota's Direct Method and Sato's Formalism in Soliton Theory. Honors' Thesis, Melbourne University, Australia.
- Eckhaus W. and Harten A., 1981. *The Inverse Scattering Transformation and the Theory of Soliton*. North Holland, 221p, Netherlands.
- Feng Z. and Meng Q., 2007. Burgers'-Korteweg-de Vries equation and its traveling solitary waves. *Science China Mathematics*, 50, 412-422.

- Fuchs, L., 1884. Über Differential gleich ungerader Integrale ferte Verzweigungs punkte besitzen. *Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften* . (Berlin) 32, 669.
- Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M. 1967. "Method for solving the Korteweg–de Vries equation", *Physical Review Letters* 19,1095–1097.
- Gesztesy F. and Holden H., 1998. The Cole Hopf and Miura Transformations Revisited. arXiv:solv-int/9812025v1
- Goldstein P., 2007. Hints on the Hirota Bilinear Method. *Acta Physica Polonica*, 112, 1171-1184.
- Gui Qiong, X. and Bin, L.Z., 2003. A Maple Package for the Painlevé Test of Nonlinear Partial Differential Equations. *Chinese Physics Letters*, 20, 7-975.
- Gui Qiong, X. and Zhi-Bin, L., 2004. Symbolic Computation of the Painlevé Test for Nonlinear Partial Differential Equations Using Maple. *Computer Physics. Communication*, 161, 65-75.
- Gui-Qiong, X. and Zhi-Bin, L., 2005. PDEtest: a package for the Painlevé test of nonlinear partial differential equations. *Computer Science and Applied Mathematics*, 169, 1364-1379.
- Hereman W. and Nuseir, A., 1997. Symbolic methods to construct exact solutions of nonlinear partial differential equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 43, 13-27.
- Hereman W. and Zhuang, W., 1994. Symbolic Computation of Solitons via Hirota's Bilinear Method. Department of Mathematical and Computer Sciences Colorado School of Mines Golden, CO 80401-1887, USA.
- Hietarinta J., 2004. Introduction to the Hirota bilinear method. *Lecture Notes in Physics*, 638, 95-105.
- Hietarinta J., 2005. Hirota's Bilinear Method and Soliton Solutions. *Physics American, University in Cairo*, 15,31-37.
- Hietarinta J., 2009. Hirota's Bilinear Method and Its Connection with Integrability. *Lecture Notes in Physics*, 767, 279-314.
- Hirota, R., 2004. *The Direct Method in Soliton Theory*. Cambridge University Press, 200p, Cambridge.
- Jager, E.M., 2006. On the origin of the Korteweg-de Vries equation. v1. arXiv:math/0602661
- Kadomtsev B. and Petviashvili B., 1970. On the stability of solitary waves in weakly

- Dispersive media. Soviet Physics Doklady, 15, 539-541.
- Kaya, D., 2004. An Application of the Decomposition Method for the KdVB Equation. Computers and Mathematics Applications, 152, 279-288.
- Kangalgil, F., 2008. Painlevé Analizi ile Bazı Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklemlerin İntegrallenebilirliği ve Soliton Çözümleri Üzerine. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Ankara, Türkiye.
- Kudryashov, N.A., 2015. Painlevé analysis and exact solutions of the Korteweg-de Vries equation with a source. Applied Mathematics Letters, 41, 41-45.
- Kruskal, M. D., Clarkson, P. A., 1992. The Painlevé-Kowalevski and poly-Painlevé tests for integrability. Studied Applied Mathematics, 86, 87-165.
- Martinez, J., An introduction to the Hirota bilinear method. Rokko, Kobe 657-8501, Japan. jesusmtz.public.iastate.edu/.../Hirota%20Bilinea...
- Matsuno, Y., 1984. Bilinear Transformation Method. Academic Press, 222p, London.
- Mikhailov, A. (Ed), 2009. Integrability. Lecture Notes in Physics, 330p, Springer, Berlin Heidelberg.
- Newell, A. and Yunbo, Z., 1986. The Hirota Conditions. Journal of Mathematical Physics. 27, 8.
- Öğün, A., 2008. Painlevé Analizi ve Bäcklund Dönüşümü Yardımıyla Lineer Olmayan Kısmi Türevli Denklemlerin İncelenmesi. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara, Türkiye.
- Painlevé, P., 1888. Sur les équations différentielles du premier ordre, C.R. Academic Science, Paris, 107, 221–224, 320–323, 724–726.
- Papachristou, C. J., 2015. The Maxwell equations as a Bäcklund transformation. 2015arXiv150507094P
- Pekcan, A., 2005. The Hirota Direct Method. Doktora Tezi, Bilkent Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.
- Porsezian, K., 1997. Painlevé Analysis and Integrability Aspects of some Nonlinear Partial Differential Equations. Pramana, 48, 143-161.
- Shingareva, I. and Lizarraga-Celaya, C., 2011. Solving Nonlinear Partial Differential Equations with Maple and Mathematica. Springer Science & Business Media, 370p, Wien.
- Suárez, P. U. and Morales, J. H., 2014. Fourier Splitting Method for Kawahara Type Equations. Journal of Computational Methods in Physics. Article ID 894956, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/894956>.

- Su, C.H. and Gardner, C.S, 1969. Derivation of the Korteweg-de Vries and Burgers' Equation. *Journal of Mathematical Physics*, 10, 536-539.
- Qiao, Z., 2010. Multi Soliton Solutions to a Model Equation for Shallow Water Waves. Master Thesis, Texas-Pan American Universities, USA.
- Xu, G. and Li, Z., 2005. The Painlevé Test of Nonlinear Partial Differential Equations and It's Implementation Using Maple. *Lecture Notes in Computer Science*, 3519, 179-190.
- Wang, H., 2010. Soliton Solutions to Integrable Equations. Master Thesis, Texas-Pan American Universities, USA.
- Wazwaz, A.M., 2009. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Springer Science & Business Media, 700p, Germany.
- Weiss, J., Tabor, M., and Carnevale G., 1983. The Painlevé property for partial differential equations. *Journal of Mathematical Physics*, 24,522–526.
- Whitham, G.B., 1974. *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons, 660p, Canada
- Yokuş, A., 2011. Bazı Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Elde Edilmesi ve Bu Çözümlerin Karşılaştırılması. Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Elazığ, Türkiye.
- Zhang, J., 2012. Using the Simplified Hirota's Method to Investigate Multi-Soliton Solutions of the Fifth-Order KdV Equation. *International Mathematical Forum*, 7, 917-924.
- Zhou, R., 2014. A Darboux transformation of the $sl(2|1)$ super KdV hierarchy and a super lattice potential KdV equation, *Physics Letters A*, 378, 1816-1819.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Büşra KUTLU
Doğum Yeri ve Yılı : Sarıyahşi, 16/01/1990
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dil : İngilizce
E-posta : busrakutlu_187@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Şereflikoçhisar Anadolu Lisesi, 2008
Lisans : İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik, 2012
Ön Lisans : Anadolu Üniversitesi, Açık öğretim Fakültesi, İlahiyat, 2014
Yüksek Lisans : İstanbul Ticaret Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2015

Katıldığı Konferans ve Sempozyumlar

- Soliton Solutions to Integrable Equations and Kawahara Equation, 3rd International Conference on "Applied Mathematics & Approximation Theory - AMAT 2015" May 28-31, 2015, Ankara – TURKEY, Konuşmacı.
- Painlevé Analysis and Soliton Solutions for Nonlinear Differential Equation, "International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics ICRAPAM- 2015" June3-6 2015, İstanbul - TURKEY, Konuşmacı.