



**ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
SALINIMLILIĞI**

Abdullah AHMETOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MART 2015

Abdullah AHMETOĞLU tarafından hazırlanan “ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Başkan :Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye :Doç. Dr. Fatma KARAKOÇ

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 27/03/2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün ve orijinal olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

27.03.2015

Abdullah AHMETOĞLU

ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIĞI
(Yüksek Lisans Tezi)

Abdullah AHMETOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mart 2015

ÖZET

Bu tezde üçüncü basamaktan diferansiyel denklemler üzerine çalışılmıştır. Konuyla ilgili önemli tanım ve teoremlere yer verildikten sonra üçüncü basamaktan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığına ilişkin literatürdeki bazı önemli sonuçlara sistematik biçimde yer verilmiştir. Daha sonra yakın zamanda incelenen bir denklem sınıfının çözümlerin salınımlılığı üzerine yapılmış bir çalışma ağırlıklı olarak irdelenmiş ve bu çalışmadaki bazı hatalara yer verilerek yeni bir koşul önerisi getirilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.138

Anahtar Kelimeler : Diferansiyel Denklemler, Salınımlılık Teorisi

Sayfa adedi : 53

Danışman : Doç. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

OSCILLATION OF THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

(M. Sc. Thesis)

Abdullah AHMETOĞLU

GAZI UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

March 2015

ABSTRACT

This thesis is about oscillation of third order differential equations. After important definitions and theorems regarding the topic have been mentioned, some important results about oscillation of solutions of some third order differential equations have been given systematically. Then oscillation of solutions of certain class of equation, which has recently investigated, has been thoroughly analyzed and some important mistakes in the article that has been investigated are mentioned and a new result is given.

Science Code : 204.1.138

Keywords: : Differential Equations, Oscillation Theory

Page number: : 53

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bana her türlü desteği veren ve emeğini esirgemeyen tez danışmanım sayın Doç.Dr.Mustafa Fahri AKTAŞ'a ve bana zaman ayırıp yol gösteren Sayın Doç.Dr.Devrim ÇAKMAK'a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca bütün bu süreç boyu bana destek olan aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
3. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI	9
3.1. $y'''(t) + a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$ Denkleminin Çözümlerinin Salınımlılığı.....	9
3.1.1. $a(t) \geq 0$, $b(t) \leq 0$ ve $c(t) > 0$ Durumu.....	9
3.1.2. $a(t) \leq 0$, $b(t) \leq 0$ ve $c(t) > 0$ Durumu.....	11
3.1.3. $a(t) \leq 0$, $b(t) \leq 0$ ve $c(t) < 0$ Durum.....	12
3.1.4. $a(t) \geq 0$, $b(t) \leq 0$ ve $c(t) < 0$ Durumu.....	14
3.1.5. $a(t) \geq 0$, $b(t) \geq 0$ ve $c(t) > 0$ Durumu.....	15
3.1.6. $a(t) \leq 0$, $b(t) \geq 0$ ve $c(t) < 0$ Durumu	16
3.2. $(r_2(t)(r_1(t)y'(t)))' + r_3(t)y(t) = 0$ Diferansiyel Denkleminin Salınımlılığı.....	18
3.3. Lineer Olmayan Üçüncü Basamaktan Diferansiyel Denklemlerin Salınımlılığı.....	21
4. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA	27
4.1. Üçüncü Basamaktan Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler İçin Salınımlılık Kriterleri	27

	Sayfa
5. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIK KRİTERİLERİ İÇİN YENİ BİR KOŞUL	45
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	49
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	53

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemlerin geniş uygulama alanına sahip olduğu bilinmektedir. Bu nedenle her denklemin çözümünü bilmek istememiz doğaldır. Ancak çok az sayıdaki denklem tiplerinin elemanter çözümlerini elde edebilme gerçeği araştırmacıları, denklemin çözümünü elde etmeksizin verilen denklemden hareketle çözümlerin özelliklerini araştırmaya yöneltmiştir. Bu anlamda çözümlerin salınımlılığı, salınımsızlığı, sınırlılığı, kararlılığı ve uzun zaman davranışı gibi kalitatif incelemeler literatürde yer alan pek çok çalışmanın konusu olmuştur. İkinci basamaktan diferansiyel denklemlerin salınımlılık ve salınımsızlık problemi üzerine son yıllarda çok ilgi duyulmuş ve bu konuda yapılan bilimsel yayınlarla oldukça geniş bir literatür meydana gelmiştir. Ancak, üçüncü basamaktan diferansiyel denklemlerin salınımlılığı ve salınımsızlığına ilişkin çalışmalara bakıldığında ikinci basamaktaki kadar geniş bir literatüre sahip değildir.

Tezde önce, amaca yönelik temel kavramlar ve bazı teoremlere yer verilecektir. Daha sonra üçüncü basamaktan bazı denklemler tanıtılacak ve bu denklemlerinin çözümlerin salınımlılığına ilişkin bir dizi önemli sonuçlar sunulacaktır.

Dördüncü bölümde yakın zamanda Shoukaku [1] tarafından ele alınan $t > 0$ için üçüncü basamaktan

$$y'''(t) + a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + \sum_{i=1}^m c_i(t)\varphi_i(y(\sigma_i(t))) = 0$$

denklemini üzerinde ağırlıklı olarak durulacak ve çalışmada yer alan sonuçlar ayrıntılı olarak tanıtılacaktır. Bu sonuçlarda hatalar uyarılar şeklinde verilecektir. Beşinci bölümde de dördüncü bölümdeki çalışmada yer alan bu hatalara değinilecek ve yeni bir koşul önerisi verilerek bu hatalar düzeltilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Diferansiyel denklem kuramı, vektör fonksiyonlarının üstün yanları nedeniyle en iyi biçimde birinci basamaktan eşdeğer bir sistem ile incelenir ve irdelenir. Her basamaktan lineer denklem ve en yüksek basamaktan türevi diğerleri cinsinden yazılabilen her lineer olmayan diferansiyel denklem

$$x' = F(t, x) \quad (2.1)$$

biçiminde yazılır. y bilinmeyen skaler fonksiyon olmak üzere, $n \geq 1$ için n -inci basamaktan

$$y^{(n)} = G(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

diferansiyel denklemine,

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \dots, x_n = y^{(n-1)}$$

değişken değişimi yapılırsa

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = x_3$$

.

.

.

$$x'_{n-1} = x_n$$

$$x'_n = y^{(n)} = G(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

sistemi elde edilir. Bu sistem

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n),$$

$$F(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), \dots, f_n(t, x))$$

olmak üzere

$$x' = F(t, x)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca başlangıç koşulları

$$x(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)) = (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)) = x_0$$

şeklinde yazılabileceğinden birinci basamaktan

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.2}$$

başlangıç değer problemi elde edilir.

Buna göre oldukça geniş bir denklem sınıfı içeren ve genelde $x = x(t)$ bilinmeyen n -boyutlu bir vektör fonksiyonu $F(t, x)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ in bir alt kümesinden $\mathbb{R}^n$ içine bir dönüşüm olmak üzere sadece birinci basamaktan $x' = F(t, x)$ denklemini göz önüne almak yetecektir. $n = 1$ olduğunda $x' = F(t, x)$ denklemi birinci basamaktan skaler diferansiyel denklem, $n > 1$ olduğunda sistem veya yüksek basamaktan denklemleri içeren vektör diferansiyel denklemdir. Bu nedenle diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğine ilişkin Varlık ve Teklik Teoremi $x' = F(t, x)$ denklemi üzerine kurulur.

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu kesimde, yeri geldikçe kullanılacak bazı önemli tanım, teorem ve sonuçlar üzerinde durulacaktır. [2-6].

2.1.1. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ açık irtibatlı bir küme olmak üzere $(t, x(t)) \in \Omega, x(t_0) = x_0, x$ türevlenebilir ve t_0 ı kapsayan bir I aralığında her $t \in I$ için $x'(t) = F(t, x(t))$ denklemini özdeş olarak sağlayan $x = x(t)$ fonksiyonuna, I üzerinde Eş. 2.2 nin bir çözümü denir.

Eş. 2.2 başlangıç değer probleminin çözümüne ilişkin olarak iki temel yapıya dayalı Varlık ve Teklik Teoremleri vardır. Bunlardan biri, bir bölgede $i=1,2,...,n$ için $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ fonksiyonlarının sürekliliğine, diğeri de aynı bölgede $F(t,x)$ fonksiyonunun Lipschitz Koşulunu sağlaması durumuna dayanır.

2.1.2. Tanım

$F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektör değerli fonksiyonuna, $\mathbb{R}^{n+1}$ in $n+1$ boyutlu

$$D = \{(t, x) = (t, x_1, x_2, \dots, x_n) : |t - t_0| \leq r_0, |x_1 - a_1| \leq r_1, \dots, |x_n - a_n| \leq r_n\}$$

bölgesinde her $(t, x), (t, y) \in D$ için

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leq k \|x - y\|$$

olacak şekilde pozitif bir k sayısı mevcut ise D bölgesinde Lipschitz koşulunu sağlıyor denir.

Buradaki norm Euclidean Normu olabileceği gibi, amaca yönelik olmak üzere başka normlar da olabilir.

2.1.1. Teorem

F fonksiyonu, $\mathbb{R}^{n+1}$ de kapsanan D bölgesinde sürekli ve Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda D de her (t_0, x_0) noktasına karşılık $x' = F(t, x)$ denkleminin $x(t_0) = x_0$ koşulunu sağlayan bir tek $x = x(t)$ çözümü vardır.

2.1.2. Teorem

F ve $i=1,2,...,n$ için $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ fonksiyonları, $\mathbb{R}^{n+1}$ de kapsanan D bölgesinde sürekli olsun. Bu

durumda D de her (t_0, x_0) noktasına karşılık $x' = F(t, x)$ denkleminin $x(t_0) = x_0$ koşulunu sağlayan bir tek $x = x(t)$ çözümü vardır.

Dikkat edilirse yukarıdaki teoremler Eş. 2.2 probleminin çözümüne ilişkin Lokal Varlık ve Teklik teoremleridir. Eş. 2.2 probleminin çözümlerinin kalitatif incelenmesi içerisinde yer alan salınımlılık, kararlılık ve sınırlılığa ilişkin incelemeler için çözümlerin global varlığı, örneğin; $t_0 \geq 0$ olmak üzere $[t_0, \infty)$ aralığında çözümlerin varlığı önemlidir. Şimdi buna ilişkin temel bazı sonuçları verelim.

2.1.3. Teorem

$\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ olmak üzere $g(t, u)$, her sabit $t \in \mathbb{R}^+$ için u ya göre monoton azalmayan ve $g \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ olmak üzere her $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ için

$$\|F(t, x)\| \leq g(t, \|x\|)$$

ve $F \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca, her $t_0 > 0$ ve $u_0 > 0$ için

$$u' = g(t, u), \quad u(t_0) = u_0$$

skaler başlangıç değer probleminin $t \geq t_0$ için bir $u(t) = u(t, t_0, u_0)$ çözümüne sahip olduğunu kabul edilsin. Bu durumda, $\|x_0\| \leq u_0$ olacak şekildeki her $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve $t \geq t_0$ için $\|x(t)\| \leq u(t)$ yi sağlayan Eş. 2.2 probleminin en az bir $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ çözümü vardır.

2.1.1. Sonuç

$a(t)$ ve $b(t)$, $\mathbb{R}^+$ da negatif olmayan sürekli fonksiyonlar olmak üzere $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ için

$$\|F(t, x)\| \leq a(t)\|x\| + b(t)$$

ve $F \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca $u(t)$, $u_0 > 0$ için $\|x_0\| \leq u_0$ olacak şekilde

$$u' = a(t)u + b(t), \quad u(t_0) = u_0$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olsun. Bu durumda Eş. 2.2 başlangıç değer problemi her $t \geq t_0$ için bir $x(t)$ çözümüne sahiptir.

2.1.2. Sonuç

$S = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| < \infty, |x| < \infty\}$ olsun. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve f ,

$$S_a = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| < a, |x| < \infty\}$$

şerit bölgede Lipschitz koşulunu sağlasın. Bu durumda $(t_0, x_0) \in S_a$ olmak üzere

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

başlangıç değer problemi $-a < t < a$ aralığında tanımlı bir tek çözüme sahiptir. Eğer $a \rightarrow \infty$ ise çözüm her $t \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır.

2.1.3. Tanım

Bir $y(t) : [T_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ çözümü, $t \geq T_0$ için keyfi sayıda yeterince büyük sayıda büyük sıfırlara sahip ise yani; $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ olacak şekilde çözümün sıfırlarının bir $\{t_n\}$ dizisi mevcut ise çözüme salınımlıdır denir. Üçüncü basamaktan bir diferansiyel denkleminin en az bir çözümü salınımlı ise denkleme salınımlı denklemdir.

2.1.4. Tanım

$y(t)$ çözümü, salınımlı değilse salınımsızdır. Salınımsız bir $y(t)$ çözümüne, $t \geq T_1$ için $y(t) > 0$ ($y(t) < 0$) olacak şekilde yeterince büyük bir reel T_1 sayısı mevcut ise pozitif çözüm (negatif çözüm) denir.

3. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

3.1. $y'''(t) + a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$ Denkleminin Çözümünün Salınımlılığı

Bu bölümde üçüncü basamaktan

$$y'''(t) + a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \quad (3.1)$$

denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili sonuçlar verilmiştir. Burada $a(t) \in C^2([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $b(t) \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$, $c(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ ve $t_0 \in \mathbb{R}^+$ dir.

3.1.1. $a(t) \geq 0$, $b(t) \leq 0$ ve $c(t) > 0$ Durumu

3.1.1. Teorem [7, Teorem 8]

$a'(t) \leq 0$ olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + c(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş. 3.1 denklemini salınımlıdır.

3.1.2. Teorem [8]

$b(t) - a'(t) \leq 0$ olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + \frac{a(t)a'(t)}{3} + c(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t) + a'(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty \quad (3.2)$$

ise Eş. 3.1 denklemini salınımlıdır.

3.1.3. Teorem [9]

$$ta(t) \leq 3 \text{ ve } 1 - t^2b(t) + \frac{t^2a^2(t)}{3} + t^2a'(t) \geq 0$$

olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[\frac{2t^2a^3(t)}{27} - \frac{t^2a(t)b(t)}{3} + t^2c(t) - \frac{2}{3}a(t) + tb(t) + \frac{t^2a(t)a'(t)}{3} - ta'(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t} \left(1 - t^2b(t) + \frac{1}{3}t^2a^2(t) + t^2a'(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty \quad (3.3)$$

ise Eş. 3.1 denklemini salınımlıdır.

3.1.4. Teorem [9]

$ta(t) \geq 3$ ve $2ta(t) - t^2b(t) + t^2a'(t) > 2$ olsun. Eğer Eş.3.3 sağlanıyorsa Eş. 3.1 denklemini salınımlıdır.

Örnek

$t \geq 1$ için üçüncü basamaktan

$$y'''(t) + \frac{1}{t}y''(t) - \frac{1}{t^2}y'(t) + \frac{3}{t^3}y(t) = 0$$

diferansiyel denklemini göz önüne alınsın. Teorem 3.1.3 ün tüm koşulları sağlandığından

denklem salınımlıdır. Özel olarak, $y_1(t) = t^{3/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log t\right)$ ve $y_2(t) = t^{3/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log t\right)$

bu denklemin salınımlı çözümleridir.

Örnek

$t \geq 1$ için üçüncü basamaktan

$$y'''(t) + \frac{6}{t} y''(t) - \frac{1}{t^2} y'(t) + \frac{25}{t^3} y(t) = 0$$

diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. Teorem 3.1.4 ün tüm koşulları sağlandığından diferansiyel denklem salınımlıdır. Özel olarak, $y_1(t) = t \cos(2 \log t)$ ve $y_2(t) = t \sin(2 \log t)$ bu denklemin salınımlı çözümleridir.

3.1.5. Teorem [7, Teorem 4]

Eş.3.1 denklemi salınımlı bir çözüme sahip olsun ve $\lim_{t \rightarrow \infty} t^2 b(t) \neq 0$ olsun. $y(t)$, Eş.3.1 denkleminin salınımsız bir çözümü ise $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ dır.

3.1.6. Teorem [7, Teorem 5]

Eş.3.1 denklemi salınımlı bir çözüme sahip olsun ve $\int_{t_0}^{\infty} c(t) dt = \infty$ olsun. $y(t)$, Eş.3.1 denkleminin salınımsız bir çözümü ise $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ dır.

3.1.2. $a(t) \leq 0$, $b(t) \leq 0$ ve $c(t) > 0$ Durumu

3.1.7. Teorem [10, Teorem 2.1]

$b(t) \leq a'(t)$ olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + c(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t) + a'(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty \quad (3.4)$$

ise Eş. 3.1 denklemi salınımlıdır.

3.1.8. Teorem [9]

$$-\infty < \lim_{t \rightarrow \infty} ta(t) \leq 0 \text{ ve } 1 - t^2 b(t) + \frac{1}{3} t^2 a^2(t) + t^2 a'(t) \geq 0$$

olsun. Eğer Eş. 3.4 sağlanıyorsa Eş. 3.1 denklemi salınımlıdır.

3.1.9. Teorem [10, Teorem 3.8]

Eş.3.1 denkleminin salınımlı çözümü ve sifıra yaklaşan salınımsız bir çözümü olsun. Bu durumda Eş.3.1 denkleminin tüm salınımsız çözümleri $t \rightarrow \infty$ iken sifıra yaklaşırlar.

3.1.10. Teorem [10, Teorem 3.10]

$\int_{t_0}^{\infty} a(s)ds \neq -\infty$ olsun. Bu durumda Eş.3.1 denkleminin salınımlı olması için gerek ve

yeter şart Eş.3.1 denkleminin tüm salınımsız çözümlerinin $t \rightarrow \infty$ iken sifıra yaklaşmasıdır.

3.1.3. $a(t) \leq 0$, $b(t) \leq 0$ ve $c(t) > 0$ Durumu

3.1.11. Teorem [11, Teorem 17]

$a'(t) \geq 0$, $b(t) - 2a'(t) \leq 0$ ve $c(t) - b'(t) + a''(t) < 0$ olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[-\frac{2}{27} a^3(t) + \frac{1}{3} a(t)b(t) - c(t) - \frac{2}{3} a(t)a'(t) + b'(t) - a''(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t) + 2a'(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş.3.1 denklemi salınımlıdır.

3.1.12. Teorem [9]

$$b(t) - 2a'(t) \leq 0, \quad c(t) - b'(t) + a''(t) < 0, \quad ta(t) \geq -3 \quad \text{ve} \quad 1 - t^2b(t) + \frac{t^2a^2(t)}{3} + t^2a'(t) \geq 0$$

olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[-\frac{2t^2a^3(t)}{27} + \frac{t^2a(t)b(t)}{3} - t^2c(t) + \frac{2}{3}a(t) + tb(t) - \frac{t^2a(t)a'(t)}{3} - ta'(t) \right. \\ \left. - t^2a''(t) + t^2b'(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(1 - t^2b(t) + \frac{1}{3}t^2a^2(t) + t^2a'(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty \quad (3.5)$$

ise Eş.3.1 denklemini salınımlıdır.

3.1.13. Teorem [9]

$$b(t) - 2a'(t) \leq 0, \quad c(t) - b'(t) + a''(t) < 0, \quad ta(t) \leq -3 \quad \text{ve} \quad 2ta(t) + t^2b(t) - t^2a'(t) < -2 \quad \text{olsun.}$$

Eğer Eş. 3.5 sağlanıyorsa Eş.3.1 denklemini salınımlıdır.

Örnek

$t \geq 1$ için üçüncü basamaktan

$$y'''(t) - \frac{6}{t}y''(t) - \frac{1}{t^2}y'(t) - \frac{63}{t^3}y(t) = 0$$

diferansiyel denklemini göz önüne alınsın. Teorem 3.1.13 ün tüm koşulları sağlandığından denklem salınımlıdır. Özel olarak, $y_1(t) = \cos(\sqrt{7} \log t)$ ve $y_2(t) = \sin(\sqrt{7} \log t)$ bu denklemin salınımlı çözümleridir.

3.1.4. $a(t) \geq 0$, $b(t) \leq 0$ ve $c(t) < 0$ Durumu

3.1.14. Teorem [9]

$b(t) - a'(t) \leq 0$, $b(t) - 2a'(t) \leq 0$ ve $c(t) - b'(t) + a''(t) < 0$ olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[-\frac{2a^3(t)}{27} + \frac{a(t)b(t)}{3} - c(t) + b'(t) - a''(t) - \frac{2a(t)a'(t)}{3} \right. \\ \left. - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t) + a'(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş.3.1 denklemi salınımlıdır.

3.1.15. Teorem [9]

$$1 - t^2 b(t) + \frac{1}{3} t^2 a^2(t) + t^2 a'(t) \geq 0, \quad b(t) - 2a'(t) \leq 0, \quad c(t) - b'(t) + a''(t) < 0 \quad \text{ve}$$

$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} ta(t) < \infty$ olsun. Eğer Eş. 3.5 sağlanıyorsa Eş.3.1 denklemi salınımlıdır.

3.1.1. Lemma [8, Lemma 2.4.3]

$y(t)$, Eş.3.1 denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Bu durumda $t \geq t_1$ için $y(t)y'(t) \leq 0$ veya $y(t)y'(t) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır.

3.1.1. Sonuç [8, Sonuç 2.4.2]

Eş.3.1 denkleminin salınımlı bir çözümü varsa Eş.3.1 denkleminin sınırlı her çözümü salınımlıdır.

3.1.15. $a(t) \geq 0$, $b(t) \geq 0$ ve $c(t) > 0$ Durumu

3.1.16. Teorem [12, Teorem 2.3]

$2c(t) - a(t)b(t) - b'(t) \geq 0$, $ta(t) \geq 3$ ve $2ta(t) - t^2b(t) + t^2a'(t) > 2$ olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[\frac{2t^2a^3(t)}{27} + \frac{t^2a(t)a'(t)}{3} + tb(t) + t^2c(t) - ta'(t) - \frac{2}{3}a(t) \right. \\ \left. - \frac{t^2a(t)b(t)}{3} - \frac{2}{3\sqrt{3}t} \left(1 + \frac{t^2a^2(t)}{3} + t^2a'(t) - t^2b(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty \quad (3.6)$$

ise Eş.3.1 denklemi salınımlıdır.

3.1.17. Teorem [12, Teorem 2.4]

$2c(t) - a(t)b(t) - b'(t) \geq 0$ olsun ve Eş. 3.6 sağlansın. Eğer $ta(t) \leq 3$ ve

$$1 + \frac{t^2a^2(t)}{3} + t^2a'(t) - t^2b(t) \geq 0$$

ise Eş.3.1 denklemi salınımlıdır.

3.1.18. Teorem [12, Teorem 2.5]

$2c(t) - a(t)b(t) - b'(t) \geq 0$ ve $\frac{a^2(t)}{3} - b(t) + a'(t) \geq 0$ olsun. Eş. 3.2 sağlanıyorsa Eş.3.1

denklemi salınımlıdır.

3.1.19. Teorem [12, Teorem 2.6]

$2c(t) - a(t)b(t) - b'(t) \geq 0$ ve $a'(t) \leq 0$ olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} c(t)dt = \infty$$

ise Eş.3.1 denklemi salınımlıdır.

3.1.6. $a(t) \leq 0$, $b(t) \geq 0$ ve $c(t) < 0$ Durumu

3.1.20. Teorem [9]

$2c(t) - a(t)b(t) - b'(t) \leq 0$ olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} b(t)dt = \infty$$

ise Eş.3.1 denklemi salınımlıdır.

3.1.21. Teorem [9]

$2c(t) - a(t)b(t) - b'(t) \leq 0$ olsun. Eğer $t \geq \sigma$ için $t^2 b(t) > 1$ ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{t^2 b(t) - 1}{t} dt = \infty$$

ise Eş.3.1 denklemi salınımlıdır.

3.1.22. Teorem [9]

$b(t) - \frac{a^2(t)}{3} - a'(t) \leq 0$ ve $\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + c(t) - \frac{a''(t)}{3} > 0$ olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[\frac{2t^2 a^3(t)}{27} - \frac{t^2 a(t)b(t)}{3} + t^2 c(t) - \frac{t^2 a''(t)}{3} + tb(t) - \frac{ta^2(t)}{3} \right]$$

$$-ta'(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t} \left(1 - t^2b(t) + \frac{1}{3}t^2a^2(t) + t^2a'(t) \right)^{3/2} \Big] dt = \infty$$

ise Eş.3.1 denklemleri salınımlıdır.

3.1.23. Teorem [9]

$$b(t) - \frac{a^2(t)}{3} - a'(t) \leq 0 \quad \text{ve} \quad \frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + c(t) - b'(t) + \frac{2a(t)a'(t)}{3} + \frac{2a''(t)}{3} < 0 \quad \text{olsun.}$$

Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[\frac{-2t^2a^3(t)}{27} + \frac{t^2a(t)b(t)}{3} - t^2c(t) + t^2b'(t) - \frac{2t^2a(t)a'(t)}{3} - \frac{2t^2a''(t)}{3} \right. \\ \left. + tb(t) - \frac{t^2a(t)}{3} - ta'(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t} \left(1 - t^2b(t) + \frac{1}{3}t^2a^2(t) + t^2a'(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş.3.1 denklemleri salınımlıdır.

3.1.24. Teorem [13]

$$2c(t) - a(t)b(t) - b'(t) \leq 0 \quad \text{olsun. Eğer}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} (2c(t) - a(t)b(t) - b'(t)) e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} dt = -\infty$$

ise Eş.3.1 denklemleri salınımlıdır.

Örnek

$t \geq 1$ için üçüncü basamaktan

$$y'''(t) - \frac{1}{t}y''(t) + \left(2 + \frac{2}{t}\right)y'(t) - \left(\frac{1}{t} + \frac{4}{t^2}\right)y(t) = 0 \quad (3.7)$$

diferansiyel denklemi ele alınsın. $2c(t) - a(t)b(t) - b'(t) = -\frac{4}{t^2} < 0$ ve $\int_1^\infty b(t)dt = \infty$

olduğundan Teorem 3.1.20 den Eş. 3.7 denklemi bir salınımlı çözüme sahiptir. Teorem 3.1.21 bu denkleme uygulanabilir. Fakat

$\int_1^\infty (2c(t) - a(t)b(t) - b'(t))e^{\int_1^t a(s)ds} dt = -\int_1^\infty \frac{4}{t^3} dt > -\infty$ olduğundan Teorem 3.1.24 bu denkleme uygulanamaz.

3.2. $(r_2(t)(r_1(t)y'(t)))' + r_3(t)y(t) = 0$ Diferansiyel Denkleminin Salınımlılığı

Bu bölümde $r_1(t) > 0$, $r_2(t) > 0$ ve $r_3(t) > 0$ fonksiyonları $[\sigma, \infty)$ aralığında ikinci mertebeden türevlenebilir ve sürekli olan fonksiyonlardır.

3.2.1. Teorem [8, Teorem 2.7.3]

Eğer

$$\int_{t_0}^\infty r_3(t) \int_{t_0}^t \frac{1}{r_1(s)} \int_{t_0}^s \frac{1}{r_2(u)} du ds dt < \infty$$

ise

$$(r_2(t)(r_1(t)y'(t)))' + r_3(t)y(t) = 0 \quad (3.8)$$

diferansiyel denklemi salınımlıdır.

3.2.2. Teorem [8, Teorem 2.7.4]

Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} r_3(t) \int_{t_0}^t \frac{1}{r_2(s)} \int_{t_0}^s \frac{1}{r_1(u)} du ds dt < \infty$$

ise

$$(r_2(t)(r_1(t)y'(t)))' - r_3(t)y(t) = 0 \quad (3.9)$$

denklemini salınımlıdır.

3.2.3. Teorem [8, Teorem 2.7.5]

i) Eğer

$$a) \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{r_2(t)} \int_{t_0}^t r_3(s) \int_{t_0}^s \frac{1}{r_1(u)} du ds dt < \infty$$

$$b) \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{r_1(t)} \int_{t_0}^t \frac{1}{r_2(s)} \int_{t_0}^s r_3(u) du ds dt < \infty$$

durumlarından herhangi biri sağlanırsa Eş. 3.8 denklemini salınımsızdır.

ii) Eğer

$$a) \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{r_2(t)} \int_{t_0}^t \frac{1}{r_1(s)} \int_{t_0}^s r_3(u) du ds dt < \infty$$

$$b) \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{r_1(t)} \int_{t_0}^t r_3(s) \int_{t_0}^s \frac{1}{r_2(u)} du ds dt < \infty$$

durumlarından herhangi biri sağlanırsa Eş. 3.9 denklemi salınımsızdır.

3.2.4. Teorem [8, Teorem 2.7.7]

Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{r_2(t)} = \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{r_1(t)} = \infty$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty} r_3(t) \int_{t_0}^t \frac{1}{r_1(s)} ds dt = \infty$$

ise Eş. 3.8 denklemi salınımlıdır.

3.2.5. Teorem [8, Teorem 2.7.8]

Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{r_2(t)} = \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{r_1(t)} = \infty$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty} r_3(t) \int_{t_0}^t \frac{1}{r_2(s)} ds dt = \infty$$

ise Eş. 3.9 denklemi salınımlıdır.

3.3. Lineer Olmayan Üçüncü Basamaktan Diferansiyel Denklemlerin Salınımlılığı

1966 da Waltman [14], $t \geq \sigma$ için üçüncü basamaktan

$$y'''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y^\alpha(t) = 0 \quad (3.10)$$

ve

$$y'''(t) + b(t)y'(t) + c(t)f(y(t)) = 0 \quad (3.11)$$

lineer olmayan diferansiyel denklemleri için salınımlılık teoremleri buldu. Burada $b(t) \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{R})$ ve $c(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R})$ dir. Bu teoremler Eş. 3.10 ve Eş.3.11 denklemlerinin sıfıra sahip herhangi bir çözümünün salınımlı olması ile ilgilidir.

Bu bölümde

$$(H1) \quad b(t) \geq 0 \text{ ve } c(t) > 0$$

$$(H2) \quad b(t) \leq 0 \text{ ve } c(t) > 0$$

$$(H3) \quad b(t) \leq 0 \text{ ve } c(t) < 0$$

$$(H4) \quad b(t) \geq 0 \text{ ve } c(t) < 0$$

şeklinde dört farklı durum için Eş. 3.10 ve Eş. 3.11 denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı ve salınımsızlığı incelenmiştir.

3.3.1. Teorem [8, Teorem 4.1.1]

(H1) sağlansın ve $b'(t) \leq 0$ olsun. Eğer

$$b'(t) \geq 0, \quad \int_{t_0}^{\infty} b(t)dt = \infty$$

veya

$$\int_{t_0}^{\infty} c(t)dt = \infty$$

durumlarından herhangi biri sağlanıyorsa bu durumda $T_x \geq \sigma$ ve herhangi bir $t_0 \geq T_x$ için $F[y(t_0)] \geq 0$ olmak üzere $[T_x, \infty)$ aralığında Eş. 3.9 denkleminin $y(t)$ çözümü salınımlıdır. Burada

$$F[y(t)] = (y'(t))^2 - 2y(t)y''(t) - b(t)y^2(t) \quad (3.12)$$

dir.

3.3.1. Lemma [8, Lemma 4.1.2]

(H1) sağlansın ve $t \geq \sigma$ için $b'(t) \leq 0$ olsun. $F[y(t)]$, Eş.3.11 de tanımlanmış fonksiyon olmak üzere $y(t)$, Eş. 3.10 veya Eş.3.11 un $F[y(t_0)] \geq 0$ koşulunu sağlayan çözümü olsun. Bu durumda $y(t)$ ya salınımlıdır ya da $t \geq T$ için

$$y(t) > 0, y'(t) > 0, y''(t) > 0, y'''(t) \leq 0$$

veya

$$y(t) < 0, y'(t) < 0, y''(t) < 0, y'''(t) \geq 0$$

olacak şekilde $T \geq t_0$ vardır.

f , $u \neq 0$ için $\frac{f(u)}{u} \geq \beta > 0$ koşulunu sağlasın ve $\alpha > 0$ tek tamsayıların oranı olsun. Bu durumda Eş. 3.11 için Lemma 3.3.1 deki $b'(t) \leq 0$ koşulundan daha zayıf koşul olan $t \geq \sigma$ için

$$2\beta c(t) - b'(t) \geq 0 \quad (3.13)$$

koşulu ile değiştirilebilir.

3.3.2. Teorem [15, Teorem 3.1]

Lemma 3.3.1 in koşulları sağlansın, her $t > 0$ için $t^2 b(t) \leq \frac{1}{4}$ ve $\alpha \geq 1$ olsun. Eğer her $\mu > 0$ için

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[\mu t^2 c(t) + tb(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t} (1 - t^2 b(t))^{3/2} \right] dt = \infty \quad (3.14)$$

ise Eş. 3.10 denkleminin bir sıfıra sahip her çözümü salınımlıdır.

3.3.3. Teorem [15, Teorem 3.2]

Lemma 3.3.1 in koşulları ve Eş. 3.12 sağlansın ve her $t > 0$ için $t^2 b(t) \leq \frac{1}{4}$ olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[t^2 \beta c(t) + tb(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t} (1 - t^2 b(t))^{3/2} \right] dt = \infty \quad (3.15)$$

ise Eş. 3.11 denkleminin bir sıfıra sahip her çözümü salınımlıdır.

3.3.4. Teorem [15, Teorem 3.3]

Lemma 3.3.1 in koşulları sağlansın, her $t > 0$ için $t^2 b(t) \leq \frac{1}{4}$ ve $\alpha < 1$ olsun. Eğer her $\mu > 0$ için

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[\mu t^2 c(t) + tb(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t} (1 - t^2 b(t))^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş. 3.9 denkleminin bir sıfıra sahip her sınırlı çözümü salınımlıdır.

3.3.5. Teorem [15, Teorem 2.1]

$\alpha \geq 1$ olsun. Eğer Eş.3.13 sağlanıyorsa Eş. 3.9 denkleminin bir sıfıra sahip her çözümü salınımlıdır.

3.3.6. Teorem [15, Teorem 2.2]

$\alpha < 1$ olsun. Her $\mu > 0$ için Eş. 3.14 sağlanıyorsa Eş.3.10 denkleminin bir sıfıra sahip her çözümü salınımlıdır.

3.3.7. Teorem [15, Teorem 2.3]

$u \neq 0$ için $\frac{f(u)}{u} \geq \beta > 0$ olsun ve Eş.3.15 sağlansın. Bu durumda Eş. 3.11 denkleminin bir sıfıra sahip her çözümü salınımlıdır.

3.3.8. Teorem [8]

(H2) sağlansın, $b(t)$ sınırlı olmak üzere $b'(t) \leq 0$ ve $\alpha \geq 1$ olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[c(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t} (-b(t))^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise Eş. 3.10 denkleminin sıfıra sahip her çözümü salınımlıdır.

3.3.1. Tanım

Eş. 3.10 veya Eş. 3.11 denkleminin her $y(t)$ çözümü salınımlı ya da $t \geq t_0 \geq \sigma$ için

$$y(t)y'(t) < 0, \quad y(t)y''(t) > 0$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y''(t) = 0$$

ise Eş. 3.10 veya Eş. 3.11 denklemi A özelliğine sahiptir denir.

3.3.2. Tanım [8, Tanım 4.1.1]

Eş. 3.10 veya Eş. 3.11 denkleminin her $y(t)$ çözümü salınımlı ya da yeterince büyük t ler için

$$y(t)y'(t) > 0, \quad y(t)y''(t) > 0$$

ve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |y'(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |y''(t)| = \infty$$

ise Eş. 3.10 veya Eş. 3.11 denklemi B özelliğine sahiptir denir.

3.3.9. Teorem [8, Teorem 4.1.22]

(H3) sağlansın ve $b'(t) \geq 0$ olsun. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} c(t) dt = -\infty \tag{3.16}$$

ise Eş.3.10 denkleminin sınırlı her çözümü ya salınımlıdır ya da $t \rightarrow \infty$ iken sıfıra yaklaşır.

3.3.10. Teorem [16, Teorem 3]

(H4) sağlansın, $b(t)$ sınırlı olmak üzere $b'(t) \geq 0$ olsun ve Eş. 3.15 sağlansın. Bu durumda Eş. 3.10 denkleminin her sınırlı çözümü salınımlıdır.

4. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

4.1. Üçüncü Basamaktan Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler İçin Salınımlılık Kriterileri

Shoukaku[1] nun makalesinde, lineer olmayan üçüncü basamaktan $t > 0$ için

$$y'''(t) + a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + \sum_{i=1}^m c_i(t)\varphi_i(y(\sigma_i(t))) = 0 \quad (4.1)$$

fonksiyonel diferansiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgilenilmiştir. Bu bölüm boyunca, aşağıdaki şartlar kabul edilmiştir:

(H1) $i = 1, 2, \dots, m$ için $a(t), b(t), c_i(t) \in C((0, \infty), [0, \infty))$.

(H2) $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $\sigma_j'(t) \geq \sigma$ ve $t \geq \sigma_j(t)$ olacak şekilde bir pozitif σ sabiti vardır.

Ayrıca, $i = 1, 2, \dots, m$ için $\sigma_i(t) \in C([0, \infty); \mathbb{R})$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_i(t) = \infty$.

(H3) $i = 1, 2, \dots, m$ için $\varphi_i \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $s \geq 0$ için $\varphi_i(s) = -\varphi_i(s)$, $s > 0$ ve $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $\varphi_j'(s) > 0$ ve $\varphi_j'(s)$ azalmayandır.

4.1.1. Tanım

Eş.4.1 denkleminin çözümü olan fonksiyon

$$t_y = \min\{0, \min_{1 \leq i \leq m} \{\inf_{t \geq 0} \sigma_i(t)\}\}$$

olmak üzere herhangi bir $T_y \geq t_y$ için $\sup\{|y(t)|; t > T_y\} > 0$ koşulunu sağlayan $y(t) \in C^3([T_y, \infty); \mathbb{R})$ fonksiyonudur. Eş.4.1 in bir çözümü eğer keyfi sayıda yeterince büyük sıfırlara sahipse salınımlı olarak adlandırılır, aksi halde salınımsızdır.

4.1.2. Tanım

$D_0 = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t > s > t_1\}$ ve $D = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t \geq s \geq t_1\}$ olsun.

(i) $t \geq t_1$ için $H(t, t) = 0$; $(t, s) \in D_0$ için $H(t, s) > 0$

(ii) Her $(t, s) \in D_0$ için $\frac{\partial H}{\partial s}(t, s) = -h(t, s)H(t, s)$ olacak şekilde ikinci değişkene göre

türevlenebilen ve $\frac{\partial H(t, s)}{\partial s} < 0$ şartını sağlayan $H \in C(D, \mathbb{R})$ fonksiyonuna H sınıfındandır

denir.

Hanan[16] ın çalışması yayınlandıktan sonrabir çok yazar özel durumlarda üçüncü basamaktan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı konusundageniş çapta araştırmalar yapmıştır[17-26]. Bu üçüncü basamaktan diferansiyel denklemlerin mekanik,fiziksel ve biyolojik problemlerde önemli uygulama alanlarına sahip olmaları ve Eş. 4.1 denkleminin kontrol teorisinde önemli bir rol oynamasının sonucu olabilir.

On dokuzuncu yüzyılın ortalarında; Maxwell, Watt's Governorn kararlılık problemini inceledi ve sabit katsayılı üçüncü basamaktan lineer diferansiyel denklemlerin kararlılık koşulları hakkında çıkarımlar yaptı. Sonrasında, Routh ve Hurwitz, günümüzde Routh-Hurtwitz kararlılık kriteri olarak bilinen daha genel kararlılık koşullarını türettiler. 1976 da Erbe [20], α pozitif tek tamsayıların oranı olmak üzere

$$y'''(t) + a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y^\alpha(t) = 0 \quad (4.2)$$

denklemine ait çözümlerin salınımlılıkları ve asimptotik davranışları hakkında çalışmalar yaptı.

4.1.1.Teorem [20, Teorem 4.9]

$a(t)b(t) + b'(t) \leq 0$ ve $F[y(t)] = e^{A(t)}[2y''(t)y(t) - y'^2(t) + b(t)y^2(t)]$ olmak üzere

$F[y(t_0)] \leq 0$ iken $y(t)$, Eş. 4.2 nin aşikar olmayan bir çözümü olsun. Eğer herhangi bir

$0 < \lambda < 1/2$ için

$$(e^{A(t)} z'(t))' + e^{A(t)} \{b(t)z(t) + \lambda^\alpha t^\alpha c(t)z^\alpha(t)\} = 0 \quad (4.3)$$

diferansiyel denklemi salınımlı (Eş. 4.3 ün bütün çözümleri salınımlı) ise $y(t)$ salınımlıdır.

Agarwal ve diğerleri [17], Aktaş ve diğerleri [18] ve Tiryaki ve Aktaş [26] üçüncü basamaktan lineer olmayan

$$(r_2(t)(r_1(t)y'(t)))' + p(t)y'(t) + q(t)\phi(y(\sigma(t))) = 0 \quad (4.4)$$

diferansiyel denklemini incelemişlerdir. Aktaş ve diğerleri [18] her çözümün ya salınımlı olduğunu ya da sifıra yakınsadığını gösteren aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

4.1.2. Teorem[18, Teorem 3.1]

$t \rightarrow \infty$ iken

$$R_1(t, t_0) = \int_{t_0}^t \frac{ds}{r_1(s)} \rightarrow \infty, \quad R_2(t, t_0) = \int_{t_0}^t \frac{ds}{r_2(s)} \rightarrow \infty$$

ve

$$\rho_1'(t) \geq 0, \quad \phi(t) = (r_2(t)\rho_1'(t))'r_1(t) + \rho_1(t)p(t) \geq 0, \quad \phi'(t) \leq 0 \quad \text{ve} \quad \int_{t_0}^{\infty} \rho_1(t)q(t)dt = \infty$$

olacak şekilde $C([0, \infty); (0, \infty))$ da $\phi(t)$ ve $\rho_1(t)$ fonksiyonlarının var olduğunu kabul edilsin ve

$$(r_2(t)z'(t))' + \frac{p(t)}{r_1(t)}z(t) = 0$$

denklemini salınımsız olsun. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\sigma}^t \left[\rho_2(s)q(s) - \frac{\beta^2(s)}{4\alpha(s)} \right] ds = \infty$$

olacak şekilde bir $\rho_2(t) \in C^1([0, \infty); (0, \infty))$ fonksiyonu varsa Eş. 4.4 ün bütün çözümleri ya salınımlıdır ya da $t \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsar. Burada

$$\alpha(t) = \frac{K_0 R_2(\sigma(t), t) \sigma'(t)}{r_1(\sigma(t)) \rho_2(t)} \text{ ve } \beta(t) = \frac{\rho_2'(t)}{\rho_2(t)} - p(t) \frac{R_2(\sigma(t), t)}{r_1(t)}$$

dır.

Eş. 4.1 in sabit katsayılarla sahip olduğu durumda, Teorem 4.1.1 deki $a(t)b(t) + b'(t) \leq 0$ ve Teorem 4.1.2 deki $R_2(t, t_0) \rightarrow \infty$ durumlarının sağlanmadığını görmek kolaydır. Burada Eş. 4.2 denkleminin sabit katsayılı olduğu durumları da kapsayan bir salınım kriteri bulmak mümkün müdür? Bu bölümde bu soruya olumlu bir cevap aranmıştır.

4.1.1. Uyarı

Shoukaku [1] nun makalesinde, Eş. 4.1 in sabit katsayılarla sahip olduğu durumda, Teorem 4.1.1 deki $a(t)b(t) + b'(t) \leq 0$ ve Teorem 4.1.2 deki $R_2(t, t_0) \rightarrow \infty$ durumlarının sağlanmadığını iddia edilmektedir. Ancak bu iddialar doğru değildir.

Öncelikle bir sonraki lemmada kullanılacak ve temel sonuçları ispatlamak için gerekli olan

$$(H4) \quad a(t) \geq b(t) + 1$$

şartı sağlansın.

4.1.1.Lemma

(H4) şartı sağlansın.

$$A(t) = \int_0^t a(s)ds \text{ ve } \pi(t) = \int_t^\infty e^{-A(s)} ds$$

olmak üzere

$$\int_0^\infty \pi(t) e^{A(t)} \sum_{i=1}^m c_i(t) dt = \infty \quad (4.5)$$

ve $\forall t \geq t_0$ için $y(t)$, Eş.4.1 in salınımsız bir çözümü olsun. Bu durumda $\forall t \geq t_0$ için

$$y(t)y'(t) > 0 \quad (4.6)$$

olacak şekilde bir $t_0 > 0$ vardır.

İspat

$y(t)$, Eş. 4.1 in salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın $i=1,2,...,m$ için $y(t) > 0$ ve $y(\sigma_i(t)) > 0$ olsun. Eğer $y(t)$ negatif bir çözüm ise $-y(t)$ nin Eş. 4.1 in pozitif bir çözümü olduğuna dikkat edilmelidir.

$y'(t)$ nin salınımsız olduğu iddia edilsin. Eğer $y'(t)$ salınımlıysa $x(t) = -y'(t)$ salınımlıdır ve

$$(e^{A(t)}x'(t))' + b(t)e^{A(t)}x(t) = \sum_{i=1}^m c_i(t)e^{A(t)}\varphi_i(y(\sigma_i(t))) \geq 0 \quad (4.7)$$

eşitliğini sağlar. $t \in (\alpha, \beta)$ için $x'(\alpha) \geq 0$, $x'(\beta) \leq 0$ ve $x(t) \geq 0$ olacak şekilde $x(t)$, $t_0 < \alpha < \beta$ olmak koşuluyla α ve β da ardışık sıfırlara sahip olsun. Eş. 4.7 denklemini e^{-t} ile çarpılıp, $[\alpha, \beta]$ aralığında integralini alındığında

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{-t} (e^{A(t)} x'(t))' dt + \int_{\alpha}^{\beta} b(t) e^{A(t)} x(t) e^{-t} dt \geq 0$$

elde edilir. Kısmi integrasyon alınırsa

$$e^{A(\beta)-\beta} x'(\beta) - e^{A(\alpha)-\alpha} x'(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} e^{A(t)-t} x'(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} b(t) e^{A(t)-t} x(t) dt \geq 0$$

elde edilir. Tekrar kısmi integrasyon alınıp $x(\alpha) = x(\beta) = 0$ kullanılırsa

$$e^{A(\beta)-\beta} x'(\beta) - e^{A(\alpha)-\alpha} x'(\alpha) \geq \int_{\alpha}^{\beta} e^{A(t)-t} (a(t) - 1 - b(t)) x(t) dt \geq 0$$

olur. $x'(\alpha) \geq 0$ ve $x'(\beta) \leq 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik bir çelişkidir. Sonuç olarak, $x(t)$ salınımsızdır ve iki olası durum söz konusudur.

Durum 1: Yeterince büyük her t için $x(t) < 0$ dır. $x(t) = -y'(t)$ olduğundan yeterince büyük her t için $y(t) > 0$ iken $y'(t) > 0$ dır. Sonuç olarak, Eş. 4.6 sağlanır.

Durum 2: Yeterince büyük her t için $x(t) > 0$ dır. $y(t) > 0$ iken $y'(t) < 0$ dır. φ_j sürekli olduğundan

$$\varphi_j(y(\sigma_i(t))) \leq K_0$$

olacak şekilde pozitif bir K_0 sabiti vardır. Eş. 4.7 den

$$(e^{A(t)} x'(t))' + b(t) e^{A(t)} x(t) \leq K_0 e^{A(t)} \sum_{i=1}^m c_i(t) \quad (4.8)$$

elde edilir.

$$\nu(t) = x(t) + K_0 \int_t^\infty e^{-A(s)} \int_{t_0}^s e^{A(\xi)} \sum_{i=1}^m c_i(\xi) d\xi ds \quad (4.9)$$

olsun. Eş. 4.8 den

$$(e^{A(t)} \nu'(t))' \leq -b(t) e^{A(t)} x(t) \leq 0$$

bulunur. Bu eşitsizlikten, yeterince büyük her t için ya $\nu'(t) \geq 0$ ya da $\nu'(t) < 0$ olduğu görülür. Eş. 4.9 un türevi alınır

$$\nu'(t) = x'(t) - K_0 e^{-A(t)} \int_{t_0}^t e^{A(s)} \sum_{i=1}^m c_i(s) ds \leq x'(t) = -y''(t)$$

elde edilir. Eğer $\nu'(t) \geq 0$ ise $y''(t) \leq -\nu'(t) \leq 0$ dır. $y'(t) < 0$ ve $y''(t) \leq 0$ olduğundan $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\infty$ olur ve bu da $y(t) \geq 0$ olması ile çelişir. Sonuç olarak, $\nu'(t) < 0$ dır. $\nu(t) > 0$ ve $\nu'(t) < 0$ dan

$$K_1 > \nu(t) > K_0 \int_t^\infty e^{-A(s)} \int_{t_0}^s e^{A(\xi)} \sum_{i=1}^m c_i(\xi) d\xi ds$$

$$= K_0 \int_t^\infty (-\pi(s))' \left(\int_{t_0}^s e^{A(\xi)} \sum_{i=1}^m c_i(\xi) d\xi \right) ds \geq K_0 \int_{t_0}^t \pi(s) e^{A(s)} \sum_{i=1}^m c_i(s) ds$$

olacak şekilde $K_1 > 0$ sabiti vardır. Bu da Eş. 4.5 ile çelişir. Sonuç olarak, durum 2 gerçekleşemez. İspat tamamlanır.

Bir sonraki lemmada

(H5) $b(t) \geq a'(t)$ olacak şekilde bir $a(t) \in C^1((0, \infty); [0, \infty))$ vardır.

varsayımı kullanılmıştır.

4.1.2. Lemma

(H5) ve Eş. 4.5 in sağlandığı kabul edilsin. Eğer $y(t)$, Eş. 4.1 in salınımsız bir çözümü ise Eş. 4.6 yı sağlayacak şekilde bir $t_0 > 0$ vardır.

İspat

$y(t)$ nin Eş. 4.1 in salınımsız bir çözümü olduğu kabul edilsin. Genelliği bozmaksızın $i=1,2,...,m$ için $y(t) > 0$ ve $y(\sigma_i(t)) > 0$ olduğu varsayalım. Eğer $y(t)$ negatif bir çözüm ise $-y(t)$ Eş. 4.1 in pozitif bir çözümüdür.

$y'(t)$ nin salınımsız olduğunu iddia ediliyor. Eğer $y'(t)$ salınımlıysa $x(t) = -y'(t)$ salınımlıdır ve

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) \geq 0 \quad (4.10)$$

eşitsizliği sağlanır. $x(t)$, $x'(\alpha) \geq 0$ ve $x'(\beta) \leq 0$ olacak şekilde $t_0 < \alpha < \beta$ olmak

koşuluyla α ve β da ardışık sıfırlara sahip olsun. Eş. 4.10 $\frac{1}{a(t)} e^{\int_{t_0}^t \frac{b(s)}{a(s)} ds}$ ile çarpılıp $[\alpha, \beta]$ aralığında integrali alınırsa

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{1}{a(t)} e^{\int_{t_0}^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} x''(t) + \left(\frac{1}{a(t)} e^{\int_{t_0}^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} x'(t) \right)' \right\} dt \geq 0$$

olur. Kısmi integrasyon alınırsa

$$\frac{1}{a(\beta)} e^{\int_{t_0}^{\beta} \frac{b(t)}{a(t)} dt} x'(\beta) - \frac{1}{a(\alpha)} e^{\int_{t_0}^{\alpha} \frac{b(t)}{a(t)} dt} x'(\alpha) \geq \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{a(t)} e^{\int_{t_0}^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} \right)' x'(t) dt$$

eşitsizliği elde edilir. $x(\alpha) = x(\beta) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$0 \geq \frac{1}{a(\beta)} e^{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{b(t)}{a(t)} dt} x'(\beta) - \frac{1}{a(\alpha)} e^{\int_{\alpha}^{\beta} \frac{b(t)}{a(t)} dt} x'(\alpha)$$

$$\geq \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{a(t)} e^{\int_{\alpha}^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} \right)' x'(t) dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(b(t) - a'(t))}{a^2(t)} e^{\int_{\alpha}^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} x'(t) dt$$

olur bu da $[\alpha, \beta]$ aralığında $x'(t) \leq 0$ olmasını gerektirir. İspatın geri kalan kısmı Lemma 4.1.1 dekinin aynısıdır. Dolayısıyla ispatın geri kalan kısmına yer verilmemektedir.

4.1.2. Uyarı

Lemma 4.1.2 nin ispatının sonunda Shoukaku [1] $x'(t) \leq 0$ olduğunu ispatlamıştır. Bu ispatın yanlış olduğu tezin 5. bölümünde ele alınmıştır.

4.1.3. Teorem

(H1)-(H4) ya da (H1)-(H3), (H5) in sağlansın. Eğer Eş. 4.5 sağlanır ve yeterince büyük her $T > 0$ için $[T, \infty)$ aralığında $i = 1, 2$ için

$$z'(t) + \frac{1}{2} \frac{1}{P_i(t)} z^2(t) \leq -Q_i(t)$$

Riccati eşitsizliklerinin çözümü yoksa Eş. 4.1 in her çözümü salınımlıdır. Burada $i = 1, 2$ için ve $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ için

$$P_1(t) = 1, \quad Q_1(t) = -\frac{1}{2} a^2(t) + b(t) + K_1 c_j(t), \quad P_2(t) = \frac{1}{\sigma K_2 A_e(\sigma_j(t))},$$

$$Q_2(t) = c_j(t)e^{A(t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{b^2(t)A_e(\sigma_j(t))}{\sigma K_2} \right) \text{ ve } A_e(\sigma_j(t)) = \int^{\sigma_j(t)} e^{-A(s)} ds$$

dir.

İspat

$y(t)$, Eş. 1.1 in $t_0 \geq T > 0$ olmak koşuluyla $[t_0, \infty)$ aralığında salınımsız bir çözümü olsun. Böylece $t \geq t_1$ için $y(t) > 0$ ve $i=1,2,...,m$ için $y(\sigma_i(t)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır. Sadece bu durumu göz önüne almamız yeterlidir. Çünkü $y(t) < 0$ durumunda da ispat benzerdir. Eş. 4.1 den her $j \in 1,2,...,m$ için

$$(e^{A(t)}y''(t))' + b(t)e^{A(t)}y'(t) + c_j(t)e^{A(t)}\varphi_j(y(\sigma_j(t))) \leq 0$$

olur. Lemma 4.1.1 ya da Lemma 4.1.2 ye göre $y'(t) \geq 0$ dır. Yukarıdaki eşitsizlikten

$$(e^{A(t)}y''(t))' \leq 0$$

olur. Böylece, $y''(t) \geq 0$ ya da $y''(t) < 0$ dır. İlk olarak, $y''(t) < 0$ olduğu kabul edilsin.

$$w_1(t) = \frac{e^{A(t)}y''(t)}{y'(t)}$$

olsun. Bu durumda

$$w_1'(t) = \frac{(e^{A(t)}y''(t))'}{y'(t)} - e^{-A(t)}w_1^2(t) \leq -b(t)e^{A(t)} - c_j(t)e^{A(t)} \frac{\varphi_j(y(\sigma_j(t)))}{y'(t)} - e^{-A(t)}w_1^2(t)$$

olur. Diğer taraftan,

$$y(t) \geq K_0 \text{ ve } y'(t) \leq K_1$$

olacak şekilde K_0 ve K_1 sabitleri vardır.

$$w_1'(t) \leq - \left(b(t) + \frac{K_0}{K_1} c_j(t) \right) e^{A(t)} - e^{-A(t)} w_1^2(t)$$

olduğunu görmek kolaydır. Bu eşitsizlik $e^{-A(t)}$ ile çarpılırsa

$$\left(e^{-A(t)} w_1(t) \right)' + a(t) e^{-A(t)} w_1(t) \leq - \left(b(t) + \frac{K_0}{K_1} c_j(t) \right) - \left(e^{-A(t)} w_1(t) \right)^2 \quad (4.11)$$

eşitsizliği elde edilir. Hölder eşitsizliğinden

$$\left| a(t) e^{A(t)} w_1(t) \right| \leq \frac{1}{2} \left(a^2(t) + \left(e^{-A(t)} w_1(t) \right)^2 \right) \quad (4.12)$$

dir. Eş. 4.12, Eş. 4.11 de yerine yazılırsa

$$\left(e^{-A(t)} w_1(t) \right)' + \frac{1}{2} \left(e^{-A(t)} w_1(t) \right)^2 \leq - \left(-\frac{1}{2} a^2(t) + b(t) + \frac{K_0}{K_1} c_j(t) \right) \quad (4.13)$$

olur. Buradan $e^{-A(t)} w_1(t)$ nin Teorem 4.1.3 deki eşitsizliğin bir çözümü olduğu açıktır.

Ardından $y''(t) \geq 0$ olduğu kabul edilsin.

$$w_2(t) = \frac{e^{A(t)} y''(t)}{\varphi_j(y(\sigma_j(t)))}$$

olsun.

$$\begin{aligned} w_2'(t) &= \frac{\left(e^{A(t)} y''(t) \right)'}{\varphi_j(y(\sigma_j(t)))} - e^{A(t)} y''(t) \frac{\varphi'(y(\sigma_j(t))) y'(\sigma_j(t)) \sigma_j'(t)}{\varphi_j^2(y(\sigma_j(t)))} \\ &\leq - \frac{b(t) y'(t)}{\varphi_j(y(\sigma_j(t)))} - c_j(t) e^{A(t)} - e^{A(t)} y''(t) \frac{\sigma K_0 y'(\sigma_j(t))}{\varphi_j^2(y(\sigma_j(t)))} \end{aligned} \quad (4.14)$$

eşitsizliği elde edilir. $\left(e^{A(t)}y''(t)\right)' \leq 0$ olduğundan

$$y'(t) \geq y'(\sigma_j(t)) \geq \int_{t_0}^{\sigma_j(t)} e^{-A(s)} \left(e^{A(s)}y''(s)\right) ds \geq e^{A(\sigma_j(t))}y''(\sigma_j(t)) \int_{t_0}^{\sigma_j(t)} e^{-A(s)} ds$$

$$\geq e^{A(t)}y''(t) \int_{t_0}^{\sigma_j(t)} e^{-A(s)} ds = e^{A(t)}y''(t)A_e(\sigma_j(t))$$

olur. Bu bağıntıyı kullanarak, Eş. 4.13 yeniden

$$w_2'(t) \leq -b(t)A_e(\sigma_j(t))w_2(t) - c_j(t)e^{A(t)} - \sigma K_2 A_e(\sigma_j(t))w_2^2(t)$$

şeklinde yazılır. Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|b(t)A_e(\sigma_j(t))w_2(t)\right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b(t)A_e(\sigma_j(t))^2}{\sigma K_2 A_e(\sigma_j(t))} + \sigma K_2 A_e(\sigma_j(t)) \right) w_2^2(t)$$

olur. Buradan da

$$w_2'(t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b^2(t)A_e(\sigma_j(t))}{\sigma K_2} \right) - c_j(t)e^{A(t)} - \frac{1}{2} \sigma K_2 A_e(\sigma_j(t))w_2^2(t) \quad (4.15)$$

olduğu kolayca görülür ve $w_2(t)$ nin Teorem 4.1.3 deki eşitsizliğin bir çözümü olması anlamına gelir. Bu da varsayım ile çelişir ve ispat tamamlanır.

4.1.3. Lemma[27, Teorem 4]

Eğer $T_1 \geq T_0$ için

$$\int_{T_1}^{\infty} \left(\frac{\bar{p}(t)|\phi'(t)|^\beta}{\phi(t)} \right)^{1/(\beta-1)} dt < \infty, \int_{T_1}^{\infty} \frac{dt}{\bar{p}(t)(\phi(t))^{\beta-1}} = \infty \text{ ve } \int_{T_1}^{\infty} \phi(t) \bar{q}(t) dt = \infty$$

olacak şekilde bir $\phi(t) \in C^1([T_0, \infty); (0, \infty))$ fonksiyonu varsa $\beta > 1$, $\bar{p}(t) \in C([T_0, \infty); (0, \infty))$

ve $\bar{q}(t) \in C([T_0, \infty); \mathbb{R})$ olmak üzere

$$x'(t) + \frac{1}{\beta} \frac{1}{\bar{p}(t)} |x(t)|^\beta \leq -\bar{q}(t) \quad (4.16)$$

Riccati eşitsizliği yeterince büyük T için $[T, \infty)$ aralığında çözüme sahip değildir.

$v \in ([T, \infty); \mathbb{R})$ olmak üzere $t \geq \tau \geq T$ için

$$A_\tau^\rho(v, t) = \int_{\tau}^t H(t, s) v(s) \rho(s) ds$$

ile tanımlı integral operatörü A_τ^ρ olsun ve $\rho(s) \in C^1([0, \infty); (0, \infty))$ olsun. $A_\tau^\rho(v, t)$ nin lineer ve pozitif bir operatör olduğunu görmek kolaydır. Ek olarak, $A_\tau^\rho(v, t)$ aşağıdaki koşulları sağlar:

$$(H6) \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \text{ için } A_\tau^\rho(k_1 v_1 + k_2 v_2; r) = k_1 A_\tau^\rho(v_1; r) + k_2 A_\tau^\rho(v_2; r),$$

$$(H7) \quad v \geq 0 \text{ için } A_\tau^\rho \geq 0,$$

$$(H8) \quad A_\tau^\rho(v'; r) = -H(r, \tau) v(\tau) \rho(\tau) + A_\tau^\rho \left(\left(h - \frac{\rho'}{\rho} \right) v; r \right).$$

4.1.4. Lemma[28, Teorem 1]

Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} A_{\tau}^{\rho} \left(\left| \bar{q} - \frac{\beta-1}{\beta} \bar{p}^{\frac{1}{\beta-1}} \right| \left| h - \frac{\rho'}{\rho} \right|^{\frac{\beta}{\beta-1}}; t \right) = \infty$$

ise Eş. 4.16'nın yeterince büyük T için $[T, \infty)$ aralığında çözümü yoktur.

4.1.4. Teorem

(H1)-(H4) ya da (H1)-(H3), (H5) şartlarının sağlandığı varsayılın. Eğer Eş 4.5 sağlanırsa ve

$$i=1,2 \text{ için } \int_T^{\infty} \phi_i(t) Q_i(t) dt = \infty, \int_T^{\infty} \left(\frac{P_i(t)(\phi_i'(t))^2}{\phi_i(t)} \right) dt < \infty \text{ ve } \int_T^{\infty} \frac{dt}{P_i(t)\phi_i(t)} = \infty$$

olacak şekilde $i=1,2$ için $\phi_i(t) \in C^1([T_0, \infty); (0, \infty))$ varsa Eş. 4.1'in her $y(t)$ çözümü salınımlıdır.

Uygulama

Gazların kimyasal reaksiyondaki karışımlarının akışı, solar atmosfer diğer yıldızların atmosferleri ve roket motorunun yanma odasındaki gaz akışı gibi konulardaki çeşitli problemlerin incelenmesinde fonksiyonel bir rol oynar. Gazların belli türleri için küçük bozuklukların gaz üzerindeki yayılmasını zaman değişkeni t ye bağlı olarak

$$y'''(t) + ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

diferansiyel denklemi ile açıklandığı gösterilebilir. Denklemdaki a , b ve c sabitleri pozitif reel sayılardır. Bağımsız değişken $y(t)$ gazın basıncı ile orantılıdır. a, b ve c sabitleri genellikle ve gazın değişmez ve dengedeki ses hızı ile ilgilidir. Fiziksel özelliklerden $b > c$ olduğu bilinmektedir. Eğer diferansiyel denklem asimptotik olarak

kararlı ise gazdaki bütün bozukluklar sonunda mutlaka açığa çıkar. Çünkü kimyasal reaksiyonlar tarafından meydana gelirler. Eğer diferansiyel denklem asimptotik olarak kararlı değil ise bozukluklar t sonsuza giderken ($t \rightarrow \infty$) açığa çıkmazlar. Şok dalgaları gaz formunda olabilirler. Böylece $t > 0$ için üçüncü basamaktan

$$y'''(t) + \frac{3}{4}y''(t) + \frac{1}{4}y'(t) + \frac{3}{16}y(t) = 0 \quad (4.17)$$

diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. Burada $a(t) = \frac{3}{4}$, $b(t) = \frac{1}{4}$ ve $c(t) = \frac{3}{16}$ dır. $ab = c$ olduğunu görmek kolaydır. Bu da Eş. 4.17 nin asimptotik kararlı olmadığını gösterir. $b(t) > c(t)$ ve

$$a(t) = \frac{3}{4} < \frac{5}{4} = b(t) + 1$$

olduğundan (H4) sağlanmaz fakat (H5) sağlanır. Basit bir hesaplamayla

$$\int_0^{\infty} \pi(t) e^{A(t)} c(t) dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{3}{4} e^{-3t/4} \right) \left(e^{3t/4} \right) \left(\frac{3}{16} \right) dt = \infty$$

olduğu görülür. $\phi_1(t) = t^{1/2}$ ve $\phi_2(t) = e^{-t/2}$ seçilirse

$$\int_0^{\infty} \frac{P_1(t) \phi_1'(t)^2}{\phi_1(t)} dt = \int_0^{\infty} \frac{1 \cdot \left(\frac{1}{2} t^{-1/2} \right)^2}{t^{1/2}} dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} \frac{dt}{P_1(t) \phi_1(t)} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 \cdot t^{1/2}} = \infty,$$

$$\int_0^{\infty} \phi_1(t) Q_1(t) dt = \int_0^{\infty} (t^{1/2}) \left(\frac{5}{32} \right) dt = \infty,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{P_2(t) \phi_2'(t)^2}{\phi_2(t)} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{\frac{3}{4(1-e^{-3t/4})} \left(-\frac{1}{2} e^{-t/2} \right)^2}{e^{-t/2}} \right) dt < \infty$$

ve

$$\int \frac{dt}{P_2(t)\phi_2(t)} = \int \left(\frac{dt}{\frac{3}{4(1-e^{-3t/4})}e^{-t/2}} \right) = \infty$$

olduğu ispatlanır. Böylece Teorem 4.4 den Eş. 4.17nin her çözümü salınımlıdır. Ek olarak,

$$y(t) = \sin \frac{t}{2}, \text{ Eş. 4.17 nin salınımlı bir çözümüdür.}$$

4.1.3. Uyarı

Shoukaku [1] makalesinde Eş. 4.17 denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu iddia edilmektedir. Bunun yanlış olduğundan tezin 5.bölümünde bahsedilmiştir.

4.1.5. Teorem

(H1)-(H4) ya da (H1)-(H3), (H5) in sağlandığını varsayalım. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{H(t, T)} A_t^\rho \left(Q_i - p_i \left| h - \frac{\rho'}{\rho} \right|; t \right) = \infty$$

ise Eş. 4.1 in her çözümü salınımlıdır.

Şimdi $t > 0$ ve $i = 1, 2, \dots, m$ için $\sigma_i(t) \geq t$ olmak üzere Eş. 4.1in lineer olduğu

$$y'''(t) + a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + \sum_{i=1}^m c_i(t)y(\sigma_i(t)) = 0 \quad (4.18)$$

durumu göz önüne alınsın.

4.1.1. Sonuç

(H1)-(H4) ya da (H1)-(H3), (H5) in sağlandığını kabul edilsin. Eğer Eş. 4.5 sağlanırsa ve

$$\int \left[\frac{2}{27} a^3(t) - \frac{1}{3} a(t)b(t) + c_j(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^2(t)}{3} - (b(t) - a'(t)) \right)^{3/2} \right] dt = \infty$$

sağlanırsa Eş. 4.18 in her çözümü salınımlıdır.

İspat

$y(t)$ nin Eş. 4.18 in salınımsız bir çözümü olduğu kabul edilsin. Lemma 4.1 ya da Lemma 4.2 den $y(t)y'(t) > 0$ olur. $u(t)$,

$$u(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece

$$u''(t) = \frac{y'''(t)}{y(t)} - \frac{y'(t)y''(t)}{y^2(t)} - 2u'(t)u(t)$$

$$\leq -a(t)u'(t) - 3u'(t)u(t) - [u^3(t) + a(t)u^2(t) + b(t)u(t) + c_j(t)]$$

olduğu görülür ve böylece

$$[u'(t) + \frac{3}{2}u^2(t) + a(t)u(t)]'$$

$$\leq (u^3(t) + a(t)u^2(t) + (b(t) - a'(t))u(t) + c_j(t)) \equiv -F(u(t), t) \quad (4.19)$$

olur. $u(t) > 0$ için $F(u(t), t)$ nin

$$u(t) = \frac{-a(t) + \sqrt{a^2(t) - 3(b(t) - a'(t))}}{3}$$

de bir minimum değer aldığı görülür. Bu ve Eş. 4.19 birlikte

$$[u'(t) + \frac{3}{2}u^2(t) + a(t)u(t)]'$$

$$\leq - \left[\frac{2}{27}a^3(t) - \frac{1}{3}a(t)b(t) + c_j(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^2(t)}{3} - (b(t) - a'(t)) \right)^{3/2} \right]$$

olmasını gerektirir. $[t_0, t]$ aralığında integrali alınırsa

$$u'(t) \leq u(t_0) + \frac{3}{2}u^2(t_0) + a(t_0)u(t_0)$$

$$- \int_{t_0}^t \left[\frac{2}{27}a^3(s) - \frac{1}{3}a(s)b(s) + c_j(s) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^2(s)}{3} - (b(s) - a'(s)) \right)^{3/2} \right] ds$$

olur. Buradan yeterince büyük t ler için $u(t) < 0$ olmasını gerektirir. Bu çelişki ispatı tamamlar.

5. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIK KRİTERİLERİ İÇİN YENİ BİR KOŞUL

Bir önceki bölümde incelenen çalışmada önemli sonuçlar bulunmasına karşın Shoukakunun çalışmasında bazı hatalar vardır. Tezin bu bölümünde bu hatalar vurgulanmış ve en sonda Lemma 4.1.2 deki hatayı düzeltmek için yeni bir koşul önerisi getirilmiştir.

Tezde $t > 0$ için

$$y'''(t) + a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + \sum_{i=1}^m c_i(t)\varphi_i(y(\sigma_i(t))) = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümleri üzerine çalışma yapılmıştır. Lemma 4.1.1 deki ispat doğru yapılmasına karşın Lemma 4.1.2 de hata yapılmıştır. Daha sonraki kısımlarda Lemma 4.1.1 ve Lemma 4.1.2 doğru kabul edilerek teoremler ispatlandığı için bu teoremler de Lemma 4.1.2 düzeltilmediği sürece hatalıdır. Ayrıca makalenin uygulama kısmında verilen örnekte Teorem 4.1.4 ün koşulları sağlandığından örnekte verilen denklemin tüm çözümlerinin salınımlı olduğu söylenmiştir. Fakat bu iddia doğru değildir. Çünkü örnekte verilen denklemin salınımsız bir çözümü vardır.

Lemma 4.1.2 nin ispatında (H1), (H2), (H3), (H5) ve Eş. 4.5 doğru kabul edilerek Eş. 4.1 in salınımsız bir çözümü olan $y(t)$ için $y(t)y'(t) > 0$ olduğu ispatlanmaya çalışılmıştır. Tezin önceki bölümünde bu ispat anlatılmıştır. İspatın son kısmında ise

$$0 \geq \frac{1}{a(\beta)} e^{\int_0^\beta \frac{b(t)}{a(t)} dt} x'(\beta) - \frac{1}{a(\alpha)} e^{\int_0^\alpha \frac{b(t)}{a(t)} dt} x'(\alpha) \geq \int_\alpha^\beta \frac{(b(t) - a'(t))}{a^2(t)} e^{\int_0^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} x'(t) dt$$

eşitsizlikleri elde edilmiştir.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{(b(t) - a'(t))}{a^2(t)} e^{\int_0^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} x'(t) dt \leq 0$$

olduğundan dolayı $[\alpha, \beta]$ aralığında $x'(t) \leq 0$ olduğu söylenmiştir. Fakat bu doğru değildir.

Makaledeki (H5) koşulu yerine

$$(H5^*) \frac{b'(t) - a(t)a''(t) - 3b'(t)a'(t) + 2(a'(t))^2 + b^2(t)}{a^3(t)} < 0$$

koşulu getirilirse Lemma 4.1.2 çalışır.

Lemma

(H5*) ve Eş. 4.5 doğru olsun. Eğer $y(t)$, Eş. 4.1 in salınımsız bir çözümü ise Eş. 4.6 sağlanacak şekilde $t_0 > 0$ vardır.

İspat

$y(t)$ nin Eş. 4.1 in salınımsız bir çözümü olduğu kabul edilsin. Genelliği bozmaksızın $i = 1, 2, \dots, m$ için $y(t) > 0$ ve $y(\sigma_i(t)) > 0$ olduğu varsayılın. Eğer $y(t)$ negatif bir çözüm ise $-y(t)$ Eş. 4.1 in pozitif bir çözümüdür.

$y'(t)$ nin salınımsız olduğunu iddia edilsin. Eğer $y'(t)$ salınımlıysa $x(t) = -y'(t)$ salınımlıdır ve

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. $x(t)$, $x'(\alpha) \geq 0$ ve $x'(\beta) \leq 0$ olacak şekilde $t_0 < \alpha < \beta$ olmak

koşuluyla α ve β da ardışık sıfırlara sahip olsun. Eş. 4.10 $\frac{1}{a(t)} e^{\int_{t_0}^t \frac{b(s)}{a(s)} ds}$ ile çarpılıp $[\alpha, \beta]$

aralığında integrali alınırsa

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{1}{a(t)} e^{\int_{t_0}^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} x''(t) + \left(e^{\int_{t_0}^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} x(t) \right)' \right] dt \geq 0$$

olur. Kısmi integrasyon alınırsa

$$\frac{1}{a(\beta)} e^{\int_{t_0}^{\beta} \frac{b(s)}{a(s)} ds} x'(\beta) - \frac{1}{a(\alpha)} e^{\int_{t_0}^{\alpha} \frac{b(s)}{a(s)} ds} x'(\alpha) \geq \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{a(t)} e^{\int_{t_0}^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} \right)' x'(t) dt$$

eşitsizliği elde edilir. $x(\alpha) = x(\beta) = 0$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{1}{a(\beta)} e^{\int_{t_0}^{\beta} \frac{b(t)}{a(t)} dt} x'(\beta) - \frac{1}{a(\alpha)} e^{\int_{t_0}^{\alpha} \frac{b(t)}{a(t)} dt} x'(\alpha) \\ &\geq \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{a(t)} e^{\int_{t_0}^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} \right)' x'(t) dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{(b(t) - a'(t))}{a^2(t)} e^{\int_{t_0}^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} x'(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{(b(t) - a'(t))}{a^2(t)} e^{\int_{t_0}^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} x'(t) dt \leq 0$$

eşitsizlikteki integralde $u = \frac{b(t) - a'(t)}{a^2(t)} e^{\int_0^t \frac{b(s)}{a(s)} ds}$ ve $dv = x'(t)dt$ alınarak kısmi

integrasyon kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 0 &\geq - \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{(b'(t) - a''(t))a^2(t) - 2a(t)a'(t)(b(t) - a'(t))}{a^4(t)} e^{\int_0^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} + \frac{b(t) - a'(t)}{a^2(t)} \frac{b(t)}{a(t)} e^{\int_0^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} \right] x(t) dt \\
 &= - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{b'(t)a(t) - a''(t)a(t) - 2a'(t)b(t) + 2(a'(t))^2 + b^2(t) - a'(t)b(t)}{a^3(t)} e^{\int_0^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} x(t) dt \\
 &= - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{b'(t)a(t) - a''(t)a(t) - 3a'(t)b(t) + 2(a'(t))^2 + b^2(t)}{a^3(t)} e^{\int_0^t \frac{b(s)}{a(s)} ds} x(t) dt
 \end{aligned}$$

olur. Bu da çelişkidir. İspatın geri kalan kısmı Lemma 4.1 ile aynıdır.

Makalenin uygulama kısmındaki örnekte

$$y'''(t) + \frac{3}{4}y''(t) + \frac{1}{4}y'(t) + \frac{3}{16}y(t) = 0$$

diferansiyel denklemi incelenmiştir. Bu örnekte Teorem 4.4 ün tüm koşulları sağlandığından bu denklemin tüm çözümlerinin salınımlı olduğu iddia edilmiştir. Oysa

denklemin çözümlerinin $e^{-\frac{3}{4}t}$, $\cos \frac{t}{2}$ ve $\sin \frac{t}{2}$ olduğu açıktır. $y(t) = e^{-\frac{3}{4}t}$ çözümünün ise

salınımlı olmadığı açıktır. Dolayısıyla Teorem 4.4 ün hüküm kısmından denklemin en az bir çözümünün salınımlı olduğu söylenmelidir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezde öncelikle diferansiyel denklemlerle ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Daha sonra üçüncü basamaktan diferansiyel denklemlerin salınımlılığı ile ilgili tanım ve bazı denklemlerin salınımlılığı ile ilgili bazı sonuçlar sistematik biçimde verilmiştir. Dördüncü ve beşinci bölümlerde yakın zamanda yayımlanmış bir makale incelenmiş ve bu makaledeki hatalar vurgulanmıştır. Makaledeki hatalı lemma nın yerine yeni ve orijinal bir koşul önerisi getirilmiştir. Araştırmacılar bu öneriden yararlanarak belli denklem sınıfları ile ilgili yeni çalışmalar yapabilirler.

KAYNAKLAR

1. Shoukaku, Y. (2013). Oscillation Criteria for Third-Order Nonlinear Differential Equations with Functional Arguments. *Electron. J. Differential Equations*, 49, 1-10.
2. Grace, S. R. (1992). Oscillation Theorems for Nonlinear Differential Equations of Second Order. *J. Math. Anal. Appl.*, 171, 220-241.
3. Hartman, P. (1964). Ordinary Differential Equations. **Wiley**, New York.
4. Humi, P. and Miller, W. (1988). Second Course in Ordinary Differential Equations for Scientist and Engineers. **Springer-Verlag**, New York.
5. Rao, R. M. (1989). Ordinary Differential Equations. **Arnold Limited**, 53, 483-492.
6. Swanson, C. A. (1968). Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations. **Acad. Press**.
7. Parhi, N. and Das, P. (1990). Asymptotic Property of Solutions of a Class of Third Order Differential Equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 110, 387-393.
8. Padhi, S. and Pati, S. (2014). Theory of Third-Order Differential Equations. **Springer**, India.
9. Padhi, S. (1998). Contributions to the Oscillation Theory of Ordinary and Delay Differential Equations of Third Order. *Ph.D. Thesis, Berhampur University*, India.
10. Parhi, N. and Das, P. (1993). On Asymptotic Property of Solutions of Linear Homogenous Third Order Differential Equations. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 7-B, 775-786.
11. Parhi, N. and Das, P. (1998). On the Oscillation of a Class of Linear Homogenous Third Order Differential Equations. *Arch. Math.*, 34, 435-443.
12. Parhi, N. and Padhi, S. (2002). On Oscillatory Linear Third Order Differential Equations. *J. Indian Math. Soc.*, 69, 113-128.
13. Gera, M. (1988). Some Oscillation Conditions for a Linear Third Order Differential Equations. *Soviet Math. Dokl.*, 36, 277-280.
14. Waltman, P. (1966). Oscillation Criteria for Third Order Nonlinear Differential Equations. *Pacific J. Math.*, 18, 385-389.
15. Tiryaki, A. and Yaman, S. (2001). Oscillatory Behaviour of a Class of Nonlinear Differential Equations of Third Order. *Acta Math. Scientica*, 21, 182-188.
16. Gregus, M and Vencko, J. (1992). On Oscillatory Properties of Solutions of a Certain Nonlinear Third Order Differential Equation. *Czechoslovak Math. J.*, 42, 675-684.
17. Agarwal, R. P., Aktaş, M. F. and Tiryaki, A. (2009). On Oscillation Criteria for Third Order Nonlinear Delay Differential Equations. *Arch. Math. (Brno)*, 45, 1-18.

18. Aktaş, M. F., Tiriyaki, A. and Zafer, A. (2010) Oscillation Criteria for Third-Order Nonlinear Functional Differential Equations. **Appl. Math. Lett.**, 23, 756-762.
19. Baculikova, B., Agarwal, R. P., Li, T. and Dzurina, J. (2012). Oscillation of Third-Order Nonlinear Differential Equations with Mixed Arguments. **Acta Math. Hung.**, 134, 54-67.
20. Erbe, L. (1976). Existence of Oscillatory Solutions and Asymptotic Behavior for a Class of Third Order Linear Differential Equations. **Pacific J. Math.**, 64, 369-385.
21. Hanan, M. (1961). Oscillation Criteria for Third-Order Linear Differential Equations. **Pacific J. Math.**, 11, 919-944.
22. Noussair, E. S. and Swanson, C. A. (1968). Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations. **Math. in Sc. and Eng.**, New York.
23. Reiss, E. L., Callegari, A. J. and Ahluwalia, D. S. (1981). Ordinary Differential Equations with Applications. **Holt, Rinehart and Winston**.
24. Saker, S. H. (2007). Oscillation Criteria and Nehari Types for Third-Order Delay Differential Equations. **Comm. Appl. Anal.**, 11, 451-468.
25. Skerlik, A. (1992). Oscillation Theorems for Third Order Nonlinear Differential Equations. **Math. Slovaca**, 42, 471-484.
26. Tiriyaki, A. and Aktaş, M. F. (2007). Oscillation Criteria of a Certain Class of Third Order Nonlinear Delay Differential Equations with Damping. **J. Math. Anal. Appl.**, 325, 54-68.
27. Usami, H. (1998). Some Oscillation Theorem for a Class of Quasilinear Elliptic Equations. **Ann. Mat. Pura Appl.**, 175, 277-283.
28. Xu, Z. T. and Xing, H. Y. (2003). Oscillation Criteria of Kamenev-type for PDE with p -Laplacian. **Appl. Math. Comput.**, 145, 735-745.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı,adı :Ahmetoğlu, Abdullah
 Uyuğu :T.C.
 Doğumtarıhiveyeri :06.07.1979, Azerbaycan
 Medenihali :Evli
 Telefon :0(312) 202 10 78
 Faks :0 (312) 212 22 79
 e-mail :aahmetoglu@gazi.edu.tr



Eğitim

Derece	Okul/Program	Mezuniyet Tarihi
Lisans	ODTÜ/ Matematik	2002
Lise	Bakü, 95 nolu lise	1995

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2012-2013	Giresun Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2013-Halen	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce
 Rusça



GAZİ GELECEKTİR..