

39832

**WEYL HİPERYÜZEYLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ
LAGUERRE FONKSİYONU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Müh. Sezgin ALTAY

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Haziran 1994

Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Haziran 1994

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Aynur Uysal

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Abdülkadir Özdeğer

: Prof. Dr. Afet Özok

**H.A. YÜKSEK LİSANS TEZİ
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

HAZİRAN 1994

ÖNSÖZ

Bana kendisi ile çalışma olanağını veren ve çalışmalarım süresince yakın ilgi, teşvik ve bilgisinden yararlandığım saygıdeğer hocam Doç.Dr. Aynur Uysal'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Sezgin ALTAY



İÇİNDEKİLER

ÖZET	IV
SUMMARY	V
BÖLÜM 1. WEYL UZAYLARI	1
1.1 Giriş	1
1.2 Genelleştirilmiş Türev ve Genelleştirilmiş Kovaryant Türev	2
1.3 Weyl Uzayında Türev Formülleri	4
BÖLÜM 2. WEYL HİPERYÜZEYLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ KOVARYANT TÜREVLER.....	10
2.1 Weyl Hiperyüzeyleri	10
2.2 Frenet Formülleri	15
2.3 W_{n+1} Weyl Uzayına ait λ kongrüansına göre genelleştirilmiş kovaryant türev	18
BÖLÜM 3. WEYL HİPERYÜZEYLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ LAGUERRE FONKSİYONU	25
3.1 Genelleştirilmiş Laguerre Fonksiyonu	25
SONUÇLAR VE ÖNERİLER	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	37

ÖZET

Genelleştirilmiş Laguerre fonksiyonlarının incelendiği bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, bir Weyl uzayının metrik tensörüne ait uyduların genelleştirilmiş türevleri ve genelleştirilmiş kovaryant türevleri tanımlanarak, n -li dikgen bir şebekeye ait vektör alanlarına ve bunların karşıtlarına ait türev formülleri verilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde ise, W_{n+1} Weyl uzayına ait $\vec{n}$ normalinin W_n hiperyüzeyine ait $\vec{m}$ vektörü doğrultusundaki tendansının bu doğrultudaki normal eğriliğin negatifine eşit olduğu gösterilmiştir. W_n hiperyüzeyinin her noktasından bir eğrisi geçmek üzere W_{n+1} Weyl uzayına ait (λ) kongrüans eğrisinin $\vec{\lambda}$ teğet vektörünün kontravaryant bileşeninin C ve C' eğrileri doğrultusundaki genelleştirilmiş kovaryant türevleri bulunmuş; ayrıca ∇_j , genelleştirilmiş kovaryant türev sembolü olmak üzere bir D operatörü tanımlanmıştır. Ayrıca, C eğrisinin herhangi bir P noktasındaki λ kongrüansına göre normal eğrilikle ilgili bir teorem ispatlanmıştır.

Son bölümde ise, W_n de $\vec{m}$ teğet vektörüne sahip C eğrisinin bu doğrultudaki genelleştirilmiş Laguerre fonksiyonu ve Laguerre eğrisi tanımlanmıştır. Bununla ilgili olarak iki teorem ispatlanmış ve eğer (λ) kongrüansı normaller kongrüansı olarak alınırsa genelleştirilmiş Laguerre fonksiyonunun [7] deki koşulları sağladığını gösteren son bir teorem daha ispatlanmıştır. Bu bölümde son olarak Weyl uzayından Riemann uzayına geçildiğinde [8] de ki Riemann hiperyüzeylerine ait Laguerre fonksiyonu elde edilmiştir.

SUMMARY

LAGUERRE'S FUNCTION IN A WEYL HYPERSURFACE

An n -dimensional manifold W_n is said to be a Weyl space, if it has a conformal metric tensor g_{ij} and a symmetric connection satisfying the compatibility given by the equation $\nabla_k g_{ij} - 2T_k g_{ij} = 0$, where T_k denotes a covariant vector and $\nabla_k g_{ij}$ denotes usual covariant derivative. Under renormalization of the fundamental tensor of the form $\check{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij}$ the complementary vector T_i is transformed by the law $\check{T}_i = T_i + \partial_i \ln \lambda$, where λ is a function of the point. In n -dimensional Weyl space W_n , the independent vector fields V^i ($i = 1, 2, \dots, n$) determine an n -dimensional net $(V_1, V_2, \dots, V_n)$.

Let A be a satellite of g_{ij} with weight $\{k\}$. $\dot{\partial}_i A$ given by the equation

$$\dot{\partial}_i A = \partial_i A - k T_i A,$$

is said to be the prolonged derivative of A and $\dot{\nabla}_s A$, given by the equation

$$\dot{\nabla}_s A = \nabla_s A - k T_s A$$

is called the prolonged covariant derivative of A .

The prolonged covariant derivatives of the vector fields V^α_i and their reciprocals $\check{V}^\alpha_i$ are, respectively, given by

$$\dot{\nabla}_k V^\alpha_i = \check{T}^\sigma_k V^\alpha_i, \dot{\nabla}_k \check{V}^\alpha_i = \check{T}^\sigma_k \check{V}^\alpha_i \quad (i, k, \alpha, \sigma = 1, 2, \dots, n)$$

From these formulas, it follows that

$$\check{T}^\sigma_k \cos \varphi_\alpha = 0,$$

$$\frac{1}{2} R^i_{ski} + n \nabla_{[s} T_{k]} = 0,$$

$$\nabla_{[s} \check{T}^\alpha_{k]} + \check{T}^\sigma_{\alpha[k} \check{T}^\alpha_{\sigma s]} = 0$$

where R_{ski}^i and φ_α are, respectively, the curvature tensor of W_n and the angle between the directions determined by V_σ and V_α .

Let $W_n(g_{ij}, T_k)$ be a hypersurface, with coordinates $u^i (i = 1, 2, \dots, n)$, of a Weyl space $W_{n+1}(g_{ab}, T_c)$ with coordinates $x^a (a = 1, 2, \dots, n+1)$. Suppose that the metrics of W_n and W_{n+1} are elliptic and that they are given, respectively, by $g_{ij}du^i du^j$ and $g_{ab}dx^a dx^b$ which are connected by the relations

$$g_{ij} = g_{ab} x_i^a x_j^b \quad (a, b = 1, 2, \dots, n+1; i, j = 1, 2, \dots, n)$$

where x_i^a denotes the covariant derivative of x^a with respect to u^i . The prolonged covariant derivative of A , relative to W_n , and W_{n+1} , are related by

$$\dot{\nabla}_k A = x_k^c \dot{\nabla}_c A \quad (k = 1, 2, \dots, n; c = 1, 2, \dots, n+1) .$$

Let n^a be the contravariant components of the vector field in W_{n+1} normal to W_n , and let it be renormalized by the condition $g_{ab}n^a n^b = 1$. The moving frame $\{x_i^a, n_a\}$ on W_n , reciprocal to the moving frame $\{x_i^a, n_a\}$ is defined by the relations

$$n_a n^a = 1, \quad n_a x_i^a = 0, \quad n^a x_a^i = 0, \quad x_i^a x_a^j = \delta_i^j .$$

On the other hand, we have the covariant derivatives of x_i^a with respect to u^k

$$\nabla_k x_i^a = w_{ik} n^a .$$

We have the prolonged covariant derivatives of n^a with respect to u^k

$$\dot{\nabla}_k n^a = -g^{jl} w_{jk} x_l^a .$$

Let $C : u^i = u^i(s)$ be any curve in W_n passing through a point P and m^i, m^a , the contravariant components of the tangent vector to the curve C in W_n and W_{n+1} which are renormalized by the conditions $g_{ij}m^i m^j = 1$ and $g_{ab}m^a m^b = 1$, respectively. Hence

$$\vec{m} \nabla \vec{n} \vec{m} = -K_n$$

is said to be the tendency of the $\vec{n}$ in the direction of the vector $\vec{m}$ in W_n , where K_n is the normal curvature of the curve C .

Consider a curve C in W_n with tangent vector of components m_1^i and principal vector of components m_2^i relative to W_n .

According to [6], at any point P on the geodesic tangent to the curve C , we have the following Frenet formulae:

$$\frac{\delta}{\delta s} m_x^i = K_x m_{x+1}^i - K_{x-1} m_{x-1}^i \quad (x = 1, 2, \dots, n+1)$$

where $K_0 = K_{n+1} = 0$, and the vectors $m_1, m_2, \dots, m_{n+1}$ are mutually orthogonal in W_{n+1} .

In particular

$$\frac{\delta}{\delta s} m_1^i = K_1 m_2^i$$

where K_1 is the first curvature of the curve C and $\frac{\delta}{\delta s}$ is the symbol of the prolonged derivative in the direction of the curve C .

The normal curvature vector of C in the direction of n^a is denoted by K_n . We find

$$K_n = w_{ij} m_1^i m_2^j.$$

On the other hand, the function

$$\tau_g = w_{ij} m_1^i m_2^j$$

may be regarded as the invariants of the geodesic torsion of the curve C relative to the normal component n^a .

Let λ^a be the contravariant components in W_{n+1} , of the tangent vector $\vec{\lambda}$ to a curve of the congruence (λ) such that one curve of the congruence passes through each point of W_n . Resolving $\vec{\lambda}$ tangentially and normally to W_n , we have

$$\lambda^a = x_l^a t^l + r n^a$$

where $t = g_{ab}\lambda^a\lambda^b = g_{tm}t^lt^m + r^2$.

Choose a curve $C' : u^i = u^i(s')$ in W_n such that b_i and b^a are the contravariant components of the tangent vectors to the curve C' in W_n and W_{n+1} which are normalized by the conditions $g_{ij}b^ib^j = 1$ and $g_{ac}b^ab^c = 1$, respectively.

Hence the prolonged covariant derivative of λ^a with respect to the curve C is given by

$$\frac{\delta\lambda^a}{\delta s} = (K_{\lambda|n}n^a + K_{\lambda|g}z^a)t$$

and the prolonged covariant derivative of λ^a with respect to the curve C' is given by

$$\frac{\delta\lambda^a}{\delta s} = (\bar{K}_{\lambda|n}n^a + \bar{K}_{\lambda|g}\bar{z}^a)t.$$

where

- (i) $K_{\lambda|n}, K_{\lambda|g}$ are the normal curvature and geodesic curvature of the congruence (λ) with respect to C and $\bar{K}_{\lambda|n}, \bar{K}_{\lambda|g}$ are the normal curvature and geodesic curvature of the same congruence with respect to C' .
- (ii) $\vec{n}$ is the vector along the normal curvature vector of the congruence (λ) which is normalized by $g_{ab}n^an^b = 1$. $z, \bar{z}$ are the vectors along the geodesic curvature vector of congruence (λ) with respect to C and C' which are normalized by $g_{ab}z^az^b = 1$ and $g_{ab}\bar{z}^a\bar{z}^b = 1$, respectively.
- (iii) $\dot{\nabla}_i$ is the symbol for the prolonged covariant differentiation. We have expressed the prolonged covariant derivative of $\vec{\lambda}$ with respect to the curve C in the following form:

$$\frac{\delta\lambda^a}{\delta s} = m^j\dot{\nabla}_j\lambda^a$$

In addition, the prolonged covariant derivative $\vec{\lambda}$ with respect to the curve C' is given by

$$\frac{\delta\lambda^a}{\delta s} = b^j\dot{\nabla}_j\lambda^a$$

Let us define the operator D

$$D = x_i^a g^{ij} \dot{\nabla}_j$$

where the operator $\dot{\nabla}_j$ is the symbol of the prolonged covariant differentiation.

We find that

$$K_n = w_{ik} m_1^i m_1^k$$

$$K_g m_2^i = m_1^k \dot{\nabla}_k m_1^i$$

where K_n , K_g are the normal curvature and geodesic curvature of the congruence (λ) with respect to C , respectively.

Hence, we obtained

$$\vec{m} D \vec{m} = K_n n^a + K_g b^a$$

Similarly, we have

$$\vec{m} D \vec{\lambda} = (K_{\lambda|n} n^a + K_{\lambda|g} z^a) t$$

where $K_{\lambda|n}$, $K_{\lambda|g}$ are the normal curvature and geodesic curvature of the congruence (λ) with respect to C .

We obtained

$$K_{\lambda|n} t = m^j (\dot{\nabla}_j r + t^l w_{jl})$$

$$K_{\lambda|g} t z^l = m^j (\dot{\nabla}_j t^l - r g^{hl} w_{hj})$$

and

$$\overline{K}_{\lambda|n} t = b^j (\dot{\nabla}_j r + t^l w_{jl})$$

$$\overline{K}_{\lambda|g} t \bar{z}^l = b^j (\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij})$$

where $K_{\lambda|n}$, $\overline{K}_{\lambda|n}$ are the normal curvatures of the congruence (λ) with respect to C and C' , respectively and $K_{\lambda|g}$, $\overline{K}_{\lambda|g}$ are the geodesic curvatures of the congruence (λ) with respect to C and C' , respectively.

Let $q_j^l = \dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij}$, $s_j = w_{jl} t^l + \dot{\nabla}_j r$. Then we have

$$\dot{\nabla}_j \lambda^c = q_j^l x_l^c + s_j n^c$$

Hence

$$\vec{m} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m} = -m^h m^j m^k (\nabla_k q_{hj} - 2T_k q_{hj} - s_j w_{kh}).$$

We obtained

$$-m^j m^h m^k (\nabla_k q_{hj} - s_j w_{kh}) = -\vec{m} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m} - 2T_k q_{hj} m^j m^h m^k.$$

We shall call $-m^j m^h m^k (\nabla_k q_{hj} - s_j w_{kh})$ as the the generalised Laguerre function for the direction $\vec{m}$ and we may denote this by $L_{\lambda l}$. A curve in W_n for which the tangent vector $\vec{m}$ satisfies the equation $L_{\lambda l} = 0$ as generalised Laguerre line. Let s is the arc length along the curve C .

Hence

$$\begin{aligned} L_{\lambda l} = & \frac{\delta K_{\lambda l n}}{\delta s} + K_{\lambda l g} K_g \cos \phi + \bar{K}_{\lambda l g} K_g t \cos \theta \\ & + K_{\lambda l n} K_n t - g_{hl} T_j t^l K_g (b^h + b^j) \\ & - g_{hl} m^h m^j m^k \dot{\nabla}_k (T_j t^l) - 2T_k q_{hj} m^h m^j m^k \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \frac{\delta \vec{m}}{\delta s} D \vec{\lambda} \vec{m} &= \bar{K}_{\lambda l g} K_g t \cos \theta, \\ \vec{m} D \vec{\lambda} \frac{\delta \vec{m}}{\delta s} &= K_{\lambda l n} K_n t + K_{\lambda l g} K_g t \cos \phi \end{aligned}$$

When λ is normal to W_n and $P_1 = T_k m_1^k$, $\dot{\nabla}_k K_n = \nabla_k K_n$ hence

$$m_1^k m_1^j m_1^h \nabla_k w_{hj} = m_1^k \nabla_k K_n - 2K_1 \tau_g + 2P_1 K_n$$

We may denote this by L . Consider the Riemannian space, $T_k = 0$, $P_1 = 0$, $\tau_g = -\Gamma_2$ and $K_1 = K_g$.

Hence $\mathcal{L}$ can be put in the following form [8]:

$$\mathcal{L} = \frac{\delta K_n}{\delta s} + 2K_g \Gamma_2$$



BÖLÜM 1

WEYL UZAYLARI

1.1 Giriş

TANIM 1.1.1 Burulmasız bir konneksiyona sahip n -boyutlu bir W_n manifoldunda, g_{ij} konform metrik tensörü ile konneksiyon arasında

$$\nabla_k g_{ij} - 2g_{ij}T_k = 0 \quad (1.1.1)$$

uygunluk koşulu varsa, W_n manifolduna bir Weyl uzayı denir ve $W_n(g_{ij}, T_k)$ şeklinde gösterilir. Burada T_k bir kovaryant vektör olup Weyl uzayının komplementer vektörü adını alır[1]. λ bir skaler fonksiyon olmak üzere $W_n(g_{ij}, T_k)$ uzayında, metrik tensörün

$$\check{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij} \quad (1.1.2)$$

şeklindeki bir dönüşümü altında, T_k kovaryant vektörü

$$\check{T}_k = T_k + \partial_k \ln \lambda \quad (1.1.3)$$

şeklinde değişmektedir. Riemann geometrisindeki benzer şekilde Weyl uzayının g_{ij} metrik tensörünün kovaryant türevi,

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - g_{hj}\Gamma_{ik}^h - g_{ih}\Gamma_{jk}^h$$

dir. Burada Γ_{kl}^i ile gösterilen ($\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$) konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{kl}^i = \left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\} + g^{im}(g_{mk}T_l + g_{ml}T_k - g_{kl}T_m) \quad (1.1.4)$$

şeklinde dir. $\left\{ \begin{matrix} i \\ kl \end{matrix} \right\}$, g_{ij} ye ve türevlerine göre hesaplanmış ikinci cins Christoffel sembolleridir.

TEOREM 1.1.1 (1.1.1) bağıntısını sağlayan bir simetrik konneksiyon için g_{ij} metrik tensörü ve T_k komplemanter vektörü tek türlü belli değildir.

İSPAT : $\check{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij}$ ve $\check{T}_k = T_k + \partial_k \ln \lambda$ şeklinde tanımlanan $\check{g}_{ij}$ tensörü ve $\check{T}_k$ kovaryant vektörü için

$$\begin{aligned} \nabla_k \check{g}_{ij} - 2\check{g}_{ij} \check{T}_k &= \nabla_k (\lambda^2 g_{ij}) - 2\lambda^2 g_{ij} (T_k + \partial_k \ln \lambda) \\ &= \lambda^2 \nabla_k g_{ij} + 2\lambda (\partial_k \lambda) g_{ij} - 2\lambda^2 g_{ij} T_k - 2\lambda^2 g_{ij} \frac{\partial_k \lambda}{\lambda} \\ &= \lambda^2 (\nabla_k g_{ij} - 2g_{ij} T_k) \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre g_{ij} tensörü ve T_k kovaryant vektörü (1.1.1) koşulunu sağlarsa, $(\check{g}_{ij}, \check{T}_k)$ ikilisi de bu bağıntıyı sağlar.

SONUÇ Her Weyl uzayına, birbirlerine (1.1.2) ve (1.1.3) ile bağlı olan sonsuz sayıda (g_{ij}, T_k) , $(\check{g}_{ij}, \check{T}_k)$, tensör çifti karşı gelir.

TANIM 1.1.2 g_{ij} tensörünün $\check{g}_{ij} = \lambda^2 g_{ij}$ şeklindeki bir normlanmasına karşılık bir A büyüklüğü

$$\check{A} = \lambda^k A \quad (1.1.5)$$

şeklinde değişiyorsa, A ya g_{ij} tensörünün $\{k\}$ ağırlıklı bir uydusu denir[2].

1.2 Genelleştirilmiş Türev ve Genelleştirilmiş

Kovaryant Türev

TANIM 1.2.1 A, g_{ij} nin $\{k\}$ ağırlıklı bir uydusu olmak üzere,

$$\dot{\partial}_i A = \partial_i A - k T_i A \quad (1.2.1)$$

şeklinde tanımlanan $\dot{\partial}_i A$ ifadesine A 'nın genelleştirilmiş türevi denir[3].

TANIM 1.2.2 A, g_{ij} nin $\{k\}$ ağırlıklı bir uydusu olmak üzere,

$$\dot{\nabla}_s A = \nabla_s A - k T_s A \quad (1.2.2)$$

şeklinde tanımlanan $\dot{\nabla}_s A$ büyüklüğüne, A 'nın genelleştirilmiş kovaryant türevi denir. Burada $\nabla_s A$ alışılmış kovaryant türevdir[2].

TEOREM 1.2.2 g_{is} metrik tensörü ile bunun g^{is} karşıt tensörünün genelleştirilmiş kovaryant türevi sıfırdır.

İSPAT : (1.1.2) yardımıyla g_{is} tensörünün ağırlığı $\{2\}$ dir. g_{is} 'nin genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır, (1.1.1) den

$$\dot{\nabla}_k g_{is} = \nabla_k g_{is} - 2T_k g_{is} = 0 \quad (1.2.3)$$

elde edilir. g_{is} tensörünün g^{is} ile gösterilen karşıt tensörü arasındaki bağıntı

$$g_{is} g^{js} = \delta_i^j \quad (1.2.4)$$

şeklinde tanımlandığından, bu bağıntının her iki yanının genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır ve (1.2.3) gözönüne alınır,

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_k (g_{is} g^{js}) &= \dot{\nabla}_k (\delta_i^j) = 0 \\ &= (\dot{\nabla}_k g_{is}) g^{js} + g_{is} (\dot{\nabla}_k g^{js}) \\ &= g_{is} (\dot{\nabla}_k g^{js}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı g^{il} ile çarpılır ve i indisi üzerine toplam alınır

$$\begin{aligned} g^{il} g_{is} (\dot{\nabla}_k g^{js}) &= \delta_s^l \dot{\nabla}_k g^{js} \\ &= \dot{\nabla}_k g^{jl} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

elde edilir.

1.3 Weyl Uzayında Türev Formülleri

$W_n(g_{ij}, T_k)$ Weyl uzayında lineer bağımsız $V_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, n)$ vektör alanlarının kontravaryant bileşenleri

$$g_{is} V_\alpha^i V^s = 1 \quad (1.3.1)$$

koşulunu sağlarlar. g_{is} tensörünün ağırlığı $\{2\}$ olduğu için V_α^i kontravaryant vektör alanlarının ağırlığı $\{-1\}$ dir.

$V_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, n)$ vektör alanları n-boyutlu $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ şebekesini belirler.

$$\tilde{V}_s^\alpha V_\beta^s = \delta_\beta^\alpha, \quad \tilde{V}_s^\alpha V_\alpha^k = \delta_s^k \quad (1.3.2)$$

bağıntıları yardımı ile V_α^i vektör alanlarının karşıtları olan, $\{1\}$ ağırlıklı $\tilde{V}_i^\alpha$ kovaryant vektör alanları tanımlanmış olur[4].

V_α^i ve V_β^s doğrultuları arasındaki açı $\varphi_{\alpha\beta}$ ile gösterildiğine göre

$$g_{is} V_\alpha^i V_\beta^s = \cos \varphi_{\alpha\beta}$$

dır.

V_α^i kontravaryant vektör alanlarının genelleştirilmiş kovaryant türevi

$$\dot{\nabla}_k V_\alpha^i = \tilde{T}_{\alpha\sigma}^i V^{\sigma} \quad (i, k, \alpha, \sigma = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3.3)$$

şeklinde yazılabilir. $\tilde{V}_i^\alpha$ karşıt vektör alanlarının genelleştirilmiş kovaryant türevi ise

$$\dot{\nabla}_k \tilde{V}_i^\alpha = -\tilde{T}_k^{\alpha\sigma} \tilde{V}_i^\sigma \quad (1.3.4)$$

şeklindedir. Gerçekten, $\tilde{V}_i^\alpha V_\sigma^i = \delta_\sigma^\alpha$ eşitliğinin her iki yanının genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_k (\tilde{V}_i^\alpha V_\sigma^i) &= (\dot{\nabla}_k \tilde{V}_i^\alpha) V_\sigma^i + \tilde{V}_i^\alpha (\dot{\nabla}_k V_\sigma^i) \\ &= (\dot{\nabla}_k \delta_\sigma^\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

veya

$$\left(\dot{\nabla}_k \tilde{V}_i^\alpha\right) V^\sigma_i + \tilde{T}^\alpha_k = 0$$

bulunur. Son eşitliğin her iki yanını $\tilde{V}_j^\sigma$ ile çarpılıp σ indisi üzerinden toplanırsa

$$\left(\dot{\nabla}_k \tilde{V}_i^\alpha\right) V^\sigma_i \tilde{V}_j^\sigma = -\tilde{T}^\alpha_k \tilde{V}_j^\sigma,$$

$$\left(\dot{\nabla}_k \tilde{V}_i^\alpha\right) \delta_j^i = -\tilde{T}^\alpha_k \tilde{V}_j^\sigma,$$

$$\dot{\nabla}_k \tilde{V}_j^\alpha = -\tilde{T}^\alpha_k \tilde{V}_j^\sigma$$

elde edilir.

TEOREM 1.3.1 Bir Weyl uzayında $\tilde{T}^\sigma_k \cos \varphi_\alpha = 0$ bağıntısı mevcuttur.

İSPAT : (1.3.1) bağıntısının her iki yanının genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır, (1.3.3) yardımıyla

$$g_{is} \left(\dot{\nabla}_k V^\alpha_i\right) V^\sigma_\alpha + g_{is} V^\alpha_i \left(\dot{\nabla}_k V^\sigma_\alpha\right) = 0$$

$$g_{is} \tilde{T}^\sigma_k V^\alpha_i V^\sigma_\alpha + g_{is} V^\alpha_i \tilde{T}^\sigma_k V^\sigma_\alpha = 0$$

$$\tilde{T}^\sigma_k g_{is} V^\alpha_i V^\sigma_\alpha + \tilde{T}^\sigma_k g_{is} V^\alpha_i V^\sigma_\alpha = 0$$

$$\tilde{T}^\sigma_k \cos \varphi_\alpha = 0$$

bulunur[2].

TEOREM 1.3.2 R^i_{ski} , W_n uzayının eğrilik tensörü olmak üzere:

$$(a) \frac{1}{2} R^i_{ski} + n \nabla_{[s} T_{k]} = 0$$

$$(b) \nabla_{[s} \tilde{T}^\alpha_{k]} + \tilde{T}^\sigma_{[k} \tilde{T}^\alpha_{s]} = 0$$

dır.

İSPAT: Norden'e göre[1]

$$2 \nabla_{[r} \nabla_{s]} V^i = V^k R^i_{rsk},$$

(1.3.5)

$$R^i_{rsk} = \partial_r \Gamma^i_{sk} - \partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{mr} \Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{ms} \Gamma^m_{rk}$$

olup, ikinci bağıntıda $k = i$ konulursa

$$R_{ski}^i = \partial_r \Gamma_{si}^i - \partial_s \Gamma_{ri}^i + \Gamma_{mr}^i \Gamma_{si}^m - \Gamma_{ms}^i \Gamma_{ri}^m \quad (1.3.6)$$

bulunur. (1.1.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \partial_r \Gamma_{si}^i &= \partial_r \left(\left\{ \begin{matrix} i \\ si \end{matrix} \right\} - (\delta_s^i T_i + \delta_i^i T_s - g_{is} T_i) \right), \\ &= \partial_r \left(\left\{ \begin{matrix} i \\ si \end{matrix} \right\} - (T_s + n T_s - T_s) \right), \\ &= \partial_r \left\{ \begin{matrix} i \\ si \end{matrix} \right\} - n \partial_r T_s \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\partial_s \Gamma_{ri}^i = \partial_s \left\{ \begin{matrix} i \\ ri \end{matrix} \right\} - n \partial_s T_r$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \Gamma_{mr}^i \Gamma_{si}^m &= \left[\left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} - (\delta_m^i T_r + \delta_r^i T_m - g_{mr} T^i) \right] \times \\ &\quad \left[\left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} - (\delta_s^m T_i + \delta_i^m T_s - g_{is} T^m) \right] \\ &= \left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} (\delta_s^m T_i + \delta_i^m T_s - g_{is} T^m) \\ &\quad - \left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} (\delta_m^i T_r + \delta_r^i T_m - g_{mr} T^i) \\ &\quad + (\delta_m^i T_r + \delta_r^i T_m - g_{mr} T^i) (\delta_s^m T_i + \delta_i^m T_s - g_{is} T^m) \\ &= \left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ sr \end{matrix} \right\} T_i - \left\{ \begin{matrix} i \\ ir \end{matrix} \right\} T_s + \left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} g_{is} T^m - T_r \left\{ \begin{matrix} m \\ sm \end{matrix} \right\} \\ &\quad - T_m \left\{ \begin{matrix} m \\ sr \end{matrix} \right\} + g_{mr} T^i \left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} + \delta_m^i T_r \delta_s^m T_i + \delta_m^i T_r \delta_i^m T_s \\ &\quad - T_r g_{sm} T^m + T_s T_r + T_r T_s - g_{sr} T_m T^m - g_{sr} T_i T^i - T_r T_s + T_s T_r \\ &= \left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ sr \end{matrix} \right\} T_i - \left\{ \begin{matrix} m \\ sr \end{matrix} \right\} T_m + T_r T_s \end{aligned}$$

dir.

r ve s indislerini kendi aralarında deęiřtirerek

$$\Gamma_{ms}^i \Gamma_{ri}^m = \left\{ \begin{matrix} i \\ ms \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ri \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ rs \end{matrix} \right\} T_i - \left\{ \begin{matrix} m \\ rs \end{matrix} \right\} T_m + T_r T_s$$

bulunur. Bu ifadeler (1.3.5) de yerine konulursa

$$\begin{aligned} R_{rsi}^i = & \partial_r \left\{ \begin{matrix} i \\ si \end{matrix} \right\} - n \partial_r T_s - \partial_s \left\{ \begin{matrix} i \\ ri \end{matrix} \right\} + n \partial_s T_r \\ & + \left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} i \\ sr \end{matrix} \right\} T_i - \left\{ \begin{matrix} m \\ sr \end{matrix} \right\} T_m + T_r T_s \\ & - \left\{ \begin{matrix} i \\ ms \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ri \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} i \\ rs \end{matrix} \right\} T_i - \left\{ \begin{matrix} m \\ rs \end{matrix} \right\} T_m - T_r T_s \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ si \end{matrix} \right\} = \partial_s \log \sqrt{g}$$

olduğu hatırlanırsa

$$\partial_r \left\{ \begin{matrix} i \\ si \end{matrix} \right\} = \partial_r \partial_s \log \sqrt{g} = \partial_s \partial_r \log \sqrt{g} = \partial_s \left\{ \begin{matrix} i \\ ri \end{matrix} \right\}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ mr \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ si \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i \\ ms \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} m \\ ri \end{matrix} \right\}$$

dir. Bu deęerler R_{rsi}^i nin ifadesinde yerine konulursa

$$R_{rsi}^i = -n (\partial_r T_s - \partial_s T_r) \quad (1.3.7)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \nabla_r T_s - \nabla_s T_r &= (\partial_r T_s - T_k \Gamma_{rs}^k) - (\partial_s T_r - T_k \Gamma_{sr}^k) \\ &= (\partial_r T_s - \partial_s T_r) - T_k (\Gamma_{rs}^k - \Gamma_{sr}^k) \\ &= \partial_r T_s - \partial_s T_r \end{aligned}$$

olduğundan (1.3.7) ifadesi kullanılarak

$$R_{rsi}^i = -2n\nabla_{[r}T_{s]}$$

veya

$$\frac{1}{2}R_{rsi}^i + n\nabla_{[r}T_{s]} = 0$$

bulunur[2].

(b) V_α^i nın ağırlığı $\{-1\}$ olduğundan, (1.2.2) bağıntısına göre

$$\dot{\nabla}_k V_\alpha^i = \nabla_k V_\alpha^i + T_k V_\alpha^i$$

dir. $\dot{\nabla}_k V_\alpha^i$ yerine (1.3.3) deki değeri yazılırsa

$$\nabla_k V_\alpha^i = \overset{\sigma}{T}_{\alpha\alpha}^{\sigma} V_\alpha^i - T_k V_\alpha^i \quad (1.3.8)$$

elde edilir. $\nabla_k V_\alpha^i$ nın kovaryant türevi alınır,sa,

$$\begin{aligned} \nabla_s (\nabla_k V_\alpha^i) &= \dot{\nabla}_s (\nabla_k V_\alpha^i) - T_s (\nabla_k V_\alpha^i) \\ &= \dot{\nabla}_s (\overset{\sigma}{T}_{\alpha\alpha}^{\sigma} V_\alpha^i - T_k V_\alpha^i) - T_s (\overset{\sigma}{T}_{\alpha\sigma}^{\sigma} V_\alpha^i - T_k V_\alpha^i) \\ &= \dot{\nabla}_s (\overset{\sigma}{T}_{\alpha\sigma}^{\sigma} V_\alpha^i) - \dot{\nabla}_s (T_k V_\alpha^i) - T_s (\overset{\sigma}{T}_{\alpha\sigma}^{\sigma} V_\alpha^i + T_s T_k V_\alpha^i) \\ &= V_\sigma^i \dot{\nabla}_s \overset{\sigma}{T}_{\alpha\sigma}^{\sigma} + \overset{\sigma}{T}_{\alpha\sigma}^{\sigma} \dot{\nabla}_s V_\sigma^i - V_\alpha^i \dot{\nabla}_s T_k \\ &\quad - T_k \dot{\nabla}_s V_\alpha^i - T_s \overset{\sigma}{T}_{\alpha\sigma}^{\sigma} V_\alpha^i + T_s T_k V_\alpha^i \\ &= V_\sigma^i \nabla_s \overset{\sigma}{T}_{\alpha\sigma}^{\sigma} + \overset{\sigma}{T}_{\alpha\sigma}^{\sigma} \overset{\beta}{T}_{\sigma\beta}^{\beta} V_\sigma^i - V_\alpha^i \nabla_s T_k \\ &\quad - T_k \overset{\beta}{T}_{\alpha\beta}^{\beta} V_\sigma^i - T_s \overset{\sigma}{T}_{\alpha\sigma}^{\sigma} V_\sigma^i + T_s T_k V_\alpha^i \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Buradan, k ve s indislerinin yerleri değiştirilerek

$$\begin{aligned} \nabla_k (\nabla_s V_\alpha^i) &= V_\sigma^i \nabla_k \overset{\sigma}{T}_{\alpha\sigma}^{\sigma} + \overset{\sigma}{T}_{\alpha\sigma}^{\sigma} \overset{\beta}{T}_{\sigma\beta}^{\beta} V_\sigma^i - V_\alpha^i \nabla_k T_s \\ &\quad - T_s \overset{\beta}{T}_{\alpha\beta}^{\beta} V_\sigma^i - T_s \overset{\sigma}{T}_{\alpha\sigma}^{\sigma} V_\sigma^i + T_k T_s V_\alpha^i \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

bulunur. (1.3.9) ve (1.3.10) bağıntıları taraf tarafa çıkarılırsa,

$$V_{\sigma}^i \nabla_{[s} \tilde{T}_{\alpha k]}^{\sigma} + V_{\beta}^i \tilde{T}_{\alpha}^{\sigma} [\tilde{T}_{\sigma s]}^{\beta} + V_{\alpha}^i \nabla_{[k} T_{s]} - \nabla_{[s} \nabla_{k]} V_{\alpha}^i = 0$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanını $\tilde{V}_i^{\alpha}$ ile çarpılıp, i indisi üzerinden toplam alınır

$$\nabla_{[s} \tilde{T}_{\alpha k]}^{\alpha} + \tilde{T}_{\alpha}^{\sigma} [\tilde{T}_{\sigma s]}^{\alpha} + n \nabla_{[k} T_{s]} - \tilde{V}_i^{\alpha} \nabla_{[k} \nabla_{s]} V_{\alpha}^i = 0 \quad (1.3.11)$$

bulunur. (1.3.5) de verilen $2\nabla_{[s} \nabla_{k]} V^i = V^l R_{skl}^i$ bağıntısı V_{α}^i için yazılırsa $2\nabla_{[s} \nabla_{k]} V_{\alpha}^i = V_{\alpha}^l R_{skl}^i$ elde edilir. Bu bağıntının her iki tarafı $\tilde{V}_i^{\alpha}$ ile çarpılır ve α indisi üzerinden toplanır

$$\tilde{V}_i^{\alpha} \nabla_{[s} \nabla_{k]} V_{\alpha}^i = \frac{1}{2} \tilde{V}_i^{\alpha} V^l R_{skl}^i = \frac{1}{2} R_{ski}^i$$

bulunur. Son bağıntı kullanılırsa (1.3.11) bağıntısı

$$\nabla_{[s} \tilde{T}_{\alpha k]}^{\alpha} + \tilde{T}_{\alpha}^{\sigma} [\tilde{T}_{\sigma s]}^{\alpha} + n \nabla_{[k} T_{s]} - \frac{1}{2} R_{ski}^i = 0 \quad (1.3.12)$$

şekline girer. Teoremin (a) şıkkı gereğince (1.3.12) den

$$\nabla_{[s} \tilde{T}_{\alpha k]}^{\alpha} + \tilde{T}_{\alpha}^{\sigma} [\tilde{T}_{\sigma s]}^{\alpha} = 0$$

elde edilir[2].

BÖLÜM 2

WEYL HİPERYÜZEYLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ KOVARYANT TÜREVLERİ

2.1 Weyl Hiperüzeyleri

Koordinatları $x^a (a = 1, 2, \dots, n+1)$ olan $W_{n+1}(g_{ab}, T_c)$ Weyl uzayının, koordinatları $u^i (i = 1, 2, \dots, n)$ olan $W_n(g_{ij}, T_k)$ hiperüzeyini gözönüne alalım. W_{n+1} ve W_n 'e ait metriklerin, sırasıyla, $g_{ab}dx^a dx^b$ ve $g_{ij}du^i du^j$ ($a, b = 1, 2, \dots, n+1; i, j = 1, 2, \dots, n$) şeklinde verildiğini ve eliptik olduğunu kabul edelim. g_{ij} ile g_{ab} arasında

$$g_{ij} = g_{ab}x_i^a x_j^b \quad (2.1.1)$$

bağıntıları mevcut olup, burada x_i^a ; x^a nın u^i ye göre kovaryant türevini göstermektedir.

W_n nin T_k komplement vektörü ile W_{n+1} 'in T_c komplement vektörü birbirlerine

$$T_k = x_k^c T_c \quad (2.1.2)$$

bağıntıları ile bağlıdır.

TEOREM 2.1.1 Bir A uydusunun W_n ve W_{n+1} 'e göre genelleştirilmiş kovaryant türevleri arasında

$$\dot{\nabla}_k A = x_k^c \dot{\nabla}_c A \quad (k = 1, 2, \dots, n; c = 1, 2, \dots, n+1) \quad (2.1.3)$$

bağıntıları mevcuttur.

İSPAT: A uydusu invaryant olarak seçildiğinde A uydusunun u^k ya göre kısmi türevi ile kovaryant türevi birbirlerine eşit olmaktadır, yani $\nabla_k A = \frac{\partial A}{\partial u^k}$

olacaktır. A uydusu koordinat dönüşümleri altında invaryant olduğundan $\nabla_c A = \frac{\partial A}{\partial x^c}$ yazılabilir. A uydusunun ağırlığının $\{k\}$ olduğunu kabul edelim.

Yukarıdaki ifade ve (2.1.2), (1.2.2) de yerine yazılarak, her iki taraf x_k^c ile çarpıldığında

$$x_k^c \dot{\nabla}_c A = x_k^c \frac{\partial A}{\partial x^c} - k T_k A$$

bulunur. Burada x_k^c ; x^c nin u^k ya göre kovaryant türevini gösterdiğinden $x_k^c = \frac{\partial x^c}{\partial u^k}$ olacaktır. Dolayısıyla son eşitlik

$$x_k^c \dot{\nabla}_c A = \frac{\partial A}{\partial x^c} \frac{\partial x^c}{\partial u^k} - k T_k A$$

dır. Diğer taraftan

$$\frac{\partial A}{\partial x^c} \frac{\partial x^c}{\partial u^k} = \frac{\partial A}{\partial u^k} = \nabla_k A$$

olduğundan

$$x_k^c \dot{\nabla}_c A = \nabla_k A - k T_k A$$

elde edilir. (1.2.2) ifadesi gereğince

$$x_k^c \dot{\nabla}_c A = \dot{\nabla}_k A$$

bulunur.

W_{n+1} 'e ait $g_{ab} n^a n^b = 1$ olacak şekilde normlanmış olan, normal vektörün kontravaryant bileşenleri n^a olsun. W_n 'de tanımlı $\{x_i^a, n^a\}$ hareketli çatısı ile $\{x_a^i, n_a\}$ karşıt hareketli çatısı arasında

$$n_a n^a = 1, \quad n_a x_i^a = 0, \quad n^a x_a^i = 0, \quad x_i^a x_a^j = \delta_i^j \quad (2.1.4)$$

bağıntıları tanımlanmıştır[1]. x_i^a nin ağırlığının $\{0\}$ olduğu gözönüne alınarak, (2.1.4)₄ ifadesinin her iki yanının u^i ye göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_k (x_i^a x_a^j) &= \nabla_k (x_i^a x_a^j) = \nabla_k (\delta_i^j) = 0 \\ \dot{\nabla}_k (x_i^a x_a^j) &= (\dot{\nabla}_k x_i^a) x_a^j + x_i^a (\dot{\nabla}_k x_a^j) \\ &= (\nabla_k x_i^a) x_a^j + x_i^a (\nabla_k x_a^j) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

bulunur.

$$\nabla_k x_i^a = w_{ik} n^a \quad (2.1.6)$$

olduğu hatırlanırsa[1], (2.1.5) ve (2.1.4) bağıntılarından

$$w_{ik} n^a x_a^j + x_i^a \nabla_k x_a^j = x_i^a \nabla_k x_a^j = 0. \quad (2.1.7)$$

elde edilir. Buradan, x^a koordinatlarının bir fonksiyonu olarak düşünülen ve W_{n+1} 'e ait olan $\nabla_k x_a^j$ nın W_n 'e dik bir vektör olduğu anlaşılır. Bu durumda

$$\nabla_k x_a^j = \Omega_k^j n_a \quad (2.1.8)$$

şeklinde ifade edilir[5].

TEOREM 2.1.2 W_{n+1} 'e ait, $g_{ab} n^a n^b = 1$ olacak şekilde normlanmış olan normal vektörün kontravaryant bileşenleri n^a olmak üzere,

$$\dot{\nabla}_k n^a = -g^{ij} w_{ik} x_j^a$$

dir.

İSPAT: $g_{ab} n^a n^b = 1$ ifadesinin her iki tarafının u^k ya göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alındığında ve Teorem 1.2.2 kullanıldığında

$$g_{ab} \dot{\nabla}_k n^a n^b + g_{ab} \dot{\nabla}_k n^b n^a = 0$$

bulunur. g_{ab} fonksiyonu simetrik olduğundan a ve b indislerinin yerleri değiştirilebilir. Bu takdirde,

$$g_{ab} \dot{\nabla}_k n^a n^b = 0$$

elde edilir. Buradan, $\dot{\nabla}_k n^a$ ile $g_{ab} n^b$ ifadesinin birbirlerine dik olduğu sonucu ortaya çıkar. $g_{ab} n^b$, W_{n+1} 'e ait olan normal vektörün kontravaryant bileşenleri olduğundan, $\dot{\nabla}_k n^a$, W_n hiperyüzeyine ait bir vektör olacaktır. Bu nedenle,

$$\dot{\nabla}_k n^a = x_j^a A_k^j \quad (2.1.9)$$

şeklinde yazılabilir. (2.1.4)₂ ifadesinin her iki tarafının u^k ya göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır ve Teorem 1.2.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_k(x_i^a n_a) &= \dot{\nabla}_k(g_{ab}x_i^a n^b) \\ &= g_{ab}\dot{\nabla}_k x_i^a n^b + g_{ab}\dot{\nabla}_k n^b x_i^a \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.6) ifadesi yukarıdaki eşitlikte yerine yazılır ve $g_{ab}n^a n^b = 1$ olduğu hatırlanırsa

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_k(x_i^a n^a) &= w_{ik} + g_{ab}\dot{\nabla}_k n^b x_i^a \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.9) ve (2.1.1) ifadeleri yardımıyla,

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_k(x_i^a n_a) &= w_{ik} + g_{ij}A_k^j \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadenin her iki tarafı g^{il} ile çarpılırsa

$$A_k^l = -g^{il}w_{ik} \quad (2.1.10)$$

bulunur. (2.1.9) ifadesinde (2.1.10) yerine yazılırsa,

$$\dot{\nabla}_k n^a = -g^{ij}w_{ik}x_j^a \quad (2.1.11)$$

elde edilir.

TANIM 2.1.1 W_{n+1} 'e ait $g_{ab}n^a n^b = 1$ olacak şekilde normlanmış olan $\vec{n}$ normal vektörü ile aynı şekilde W_n 'e ait $g_{ij}m^i m^j = 1$ olacak şekilde normlanmış $\vec{m}$ vektörü için $\vec{m} \nabla \vec{n} \vec{m}$ ifadesine $\vec{n}$ normalinin $\vec{m}$ vektörü doğrultusundaki tendansı denir.

TEOREM 2.1.3 Normalin, yüzeye ait herhangi bir doğrultudaki tendansı, bu doğrultudaki normal eğriliğin negatifine eşittir, yani $\vec{m}$, W_n 'e ait bir vektör olmak üzere,

$$\vec{m} \nabla \vec{n} \vec{m} = -K_n$$

dir.

İSPAT: Normalize edilmiş $\vec{m}$ teğet vektörünün W_{n+1} ve W_n 'e göre kontravaryant bileşenleri, sırasıyla, m^b ve m^k olsun. $m^b = x_k^b m^k$ olduğu göz önüne alınır ve (2.1.3) ifadesi kullanılırsa,

$$\dot{\nabla}_k n^a = x_k^b \dot{\nabla}_b n^a$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitliğin her iki tarafı m^k ile çarpılırsa

$$m^k \dot{\nabla}_k n^a = m^k x_k^b \dot{\nabla}_b n^a = m^b \dot{\nabla}_b n^a \quad (2.1.12)$$

elde edilir. (2.1.11) ifadesi (2.1.12) ifadesinde yerine yazılırsa

$$m^b \dot{\nabla}_b n^a = -g^{ij} w_{ik} x_j^a m^k$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafı $g_{ac} m^c$ ile çarpılarak a ve c indisleri üzerinde toplam alınır ve $m^c = x_p^c m^p$ olduğu hatırlanırsa, (2.1.1)'e göre

$$\begin{aligned} (m^b \dot{\nabla}_b n^a) g_{ac} m^c &= -g^{ij} g_{ac} x_j^a x_p^c w_{ik} m^p m^k \\ &= -g^{ij} g_{jp} w_{ik} m^p m^k \\ &= -\delta_p^i w_{ik} m^p m^k \\ &= -w_{ik} m^i m^k \\ &= -K_n \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan, (1.2.2) ve (2.1.4)₂ den

$$\begin{aligned} (m^b \dot{\nabla}_b n^a) g_{ac} m^c &= m^b (\nabla_b n^a + T_k n^a) g_{ac} m^c \\ &= (m^b \nabla_b n^a) g_{ac} m^c + T_b g_{ac} n^a m^c m^b \\ &= (m^b \nabla_b n^a) g_{ac} m^c \end{aligned}$$

O halde

$$-K_n = (m^b \nabla_b n^a) g_{ac} m^c$$

dir.

SONUÇ: $\vec{m} \nabla \vec{n} \vec{m} = \vec{m} \dot{\nabla} \vec{n} \vec{m} = -K_n$ dir

2.2 Frenet Formülleri

TANIM 2.2.1 [6]'ya göre W_{n+1} 'e ait ikişer ikişer birbirlerine dik $(m_1, m_2, \dots, m_{n+1})$ vektörleri için herhangi bir P noktasında C eğrisine ait Frenet formülleri

$$\frac{\dot{\delta} m_x^i}{\delta s} = K_x m_{x+1}^i - K_{x-1} m_{x-1}^i \quad (x = 1, 2, \dots, n+1) \quad (2.2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $K_0 = K_{n+1} = 0$ dır.

W_n 'e ait bir C eğrisinin herhangi bir P noktasındaki normalize edilmiş $\vec{m}_1$ teğet vektörünün W_n ve W_{n+1} 'e göre kontravaryant bileşenleri, sırasıyla, m_1^i ve m_1^a , aynı şekilde $\vec{m}_2$ asal normalinin bileşenleri de m_2^i ve m_2^a olsun. Özel olarak (2.2.1) ifadesinde K_1 , C eğrisinin birinci eğriliğini, $\frac{\delta}{\delta s}$ sembolü de C doğrultusundaki genelleştirilmiş kovaryant türev sembolünü göstermek üzere

$$\frac{\dot{\delta} m_1^i}{\delta s} = K_1 m_2^i \quad (2.2.2)$$

elde edilir. m_2^a vektörünün C eğrisi doğrultusundaki genelleştirilmiş kovaryant türevi ise, (2.1.3) ve (2.1.6)'dan

$$m_1^c \dot{\nabla}_c m_2^a = m_1^k \dot{\nabla}_k m_2^a \quad (2.2.3)$$

$$= m_1^k \dot{\nabla}_k (x_i^a m_2^i)$$

$$= m_1^k \dot{\nabla}_k x_i^a m_2^i + m_1^k \dot{\nabla}_k m_2^i x_i^a$$

$$= (w_{ik} m_1^k m_2^i) n^a + (m_1^k \dot{\nabla}_k m_2^i) x_i^a \quad (2.2.3a)$$

şeklinde bulunur. $\frac{\dot{\delta} m_2^i}{\delta s} = m_1^k \dot{\nabla}_k m_2^i$ olduğundan (2.2.1)'e göre (2.2.3a) ifadesi

$$m_1^k \dot{\nabla}_k m_2^a = (w_{ik} m_1^k m_2^i) n^a + (K_2 m_3^i - K_1 m_1^i) x_i^a$$

dir.

$\frac{\delta m_2^a}{\delta s} = m_1^k \dot{\nabla}_k m_2^a$ ifadesi yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$\frac{\delta m_2^a}{\delta s} = (w_{ik} m_1^k m_2^i) n^a + (K_2 m_3^i - K_1 m_1^i) x_i^a \quad (2.2.4)$$

bulunur. (1.2.2) ifadesine göre

$$\nabla_k m_2^a = \dot{\nabla}_k m_2^a - T_k m_2^i x_i^a$$

yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı m_1^k ile çarpıldığında

$$m_1^k \nabla_k m_2^a = m_1^k \dot{\nabla}_k m_2^a - T_k m_1^k m_2^i x_i^a$$

$m_1^k \nabla_k m_2^a = \frac{\delta m_2^a}{\delta s}$ olduğundan

$$\frac{\delta m_2^a}{\delta s} = \frac{\delta m_2^a}{\delta s} - T_k m_1^k m_2^i x_i^a \quad (2.2.5)$$

elde edilir. (2.2.5) ifadesinde (2.2.4) ifadesini yerine yazarsak

$$\frac{\delta m_2^a}{\delta s} = (w_{ik} m_1^k m_2^i) n^a + (K_2 m_3^i - K_1 m_1^i - T_k m_1^k m_2^i) x_i^a$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifadede n^a 'nın katsayısına C eğrisinin n^a normal bileşenine göre geodezik burulması denir ve τ_g ile gösterilir. Bu durumda

$$\tau_g = w_{ik} m_1^k m_2^i \quad (2.2.6)$$

dir.

TEOREM 2.2.1 W_n 'e ait bir C eğrisinin herhangi bir P noktasındaki geodezik ve normal eğrilikleri, sırasıyla, K_g ve K_n ise,

$$K_n = w_{ik} m_1^i m_1^k$$

$$K_g m_2^i = m_1^k \dot{\nabla}_k m_1^i$$

dir.

İSPAT: m_1^a vektörünün C eğrisi doğrultusundaki genelleştirilmiş kovaryant türevi (2.1.3) ve (2.1.6) yardımıyla

$$\begin{aligned} m_1^c \dot{\nabla}_c m_1^a &= m_1^k \dot{\nabla}_k m_1^a \\ &= m_1^k \dot{\nabla}_k (x_i^a m_1^i) \dots \dots \dots \\ &= (w_{ik} m_1^i m_1^k) n^a + (m_1^k \dot{\nabla}_k m_1^i) x_i^a \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $\frac{\delta m_1^i}{\delta s} = m_1^k \dot{\nabla}_k m_1^i$ olduğu hatırlanırsa ve (2.2.2) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\frac{\delta m_1^a}{\delta s} = (w_{ik} m_1^i m_1^k) n^a + K_g m_2^i x_i^a \quad (2.2.7)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \frac{\delta m_1^a}{\delta s} &= m_1^k \nabla_k (x_i^a m_1^i) \\ &= (w_{ik} m_1^i m_1^k) n^a + (m_1^k \nabla_k m_1^i) x_i^a \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

dir.

Yukarıdaki eşitlikte normal bileşenin katsayısına normal eğrilik denirse

$$K_n = w_{ik} m_1^i m_1^k$$

olarak bulunur. Buna göre (2.2.7) ifadesi

$$\frac{\delta m_1^a}{\delta s} = K_n n^a + K_g m_2^i x_i^a \quad (2.2.9)$$

olarak bulunur. m_1^a vektörünün C eğrisi doğrultusundaki genelleştirilmiş kovaryant türevi alınırsa (2.2.5) ifadesine benzer olarak

$$\frac{\delta m_1^a}{\delta s} = \frac{\dot{\delta m_1^a}}{\delta s} - T_k m_1^k m_1^i x_i^a \quad (2.2.10)$$

elde edilir. (2.2.10) ifadesinde (2.2.8) ve (2.2.9) ifadeleri yerine yazılırsa

$$(w_{ik} m_1^i m_1^k) n^a + (m_1^k \nabla_k m_1^i) x_i^a = K_n n^a + (K_g m_2^i - T_k m_1^k m_1^i) x_i^a$$

bulunur.

Yukarıdaki ifadede normal ve teğetsel bileşenler ayrı ayrı eşitlenirse

$$\begin{aligned} K_g m_2^i - T_k m_1^i m_1^k &= m_1^k \nabla_k m_1^i \\ K_g m_2^i &= m_1^k \nabla_k m_1^i + T_k m_1^i m_1^k \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

(2.2.11) ifadesinde (1.2.2) ifadesi kullanılırsa

$$K_g m_2^i = m_1^k \dot{\nabla}_k m_1^i \quad (2.2.11a)$$

olarak bulunur.

2.3 W_{n+1} Weyl Uzayına Ait (λ) Kongrüansına Göre Genelleştirilmiş Kovaryant Türevler

$W_n(g_{ij}, T_k)$ hiperyüzeyinin her noktasından bir eğrisi geçmek üzere $W_{n+1}(g_{ab}, T_c)$ uzayına ait bir λ kongrüansını göz önüne alalım. λ kongrüans eğrisine ait $\vec{\lambda}$ teğet vektörünü

$$\lambda^a = x_i^a t^i + r n^a \quad (2.3.1)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $g_{ab} n^a n^b = 1$ normalizasyonu altında

$$t = g_{ab} \lambda^a \lambda^b = g_{lm} t^l t^m + r^2 \quad (2.3.2)$$

dir.

W_n de $u^i = u^i(s)$ ile verilen bir C eğrisinin normalize edilmiş birim teğet vektörünün W_n ve W_{n+1} 'e göre kontravaryant bileşenleri, sırasıyla, m^i ve m^a olsun W_n de $u^i = u^i(s')$ ile verilen bir C' eğrisinin normalize edilmiş birim teğet vektörünün W_n ve W_{n+1} 'e göre kontravaryant bileşenleri b^i ve b^a olsun.

λ kongrüans eğrisine ait $\vec{\lambda}$ teğet vektörünün kontravaryant bileşeninin C eğrisi doğrultusunda genelleştirilmiş kovaryant türevi

$$\frac{\delta \lambda^a}{\delta s} = (K_{\lambda|n} n^a + K_{\lambda|g} z^a) t \quad (2.3.3)$$

dir. Aynı kongrüans eğrisinin $\vec{\lambda}$ teğet vektörünün kontravaryant bileşeninin C' eğrisi doğrultusundaki genelleştirilmiş kovaryant türevi

$$\frac{\delta \lambda^a}{\delta s} = (\bar{K}_{\lambda|n} n^a + \bar{K}_{\lambda|g} \bar{z}^a) t \quad (2.3.4)$$

şeklindedir.

- i) $K_{\lambda|n}, K_{\lambda|g}$ W_n hiperyüzeyine ait C eğrisinin (λ) kongrüansına göre normal ve geodezik eğriliklerini, $\bar{K}_{\lambda|n}, \bar{K}_{\lambda|g}$ ise W_n hiperyüzeyine ait bir C' eğrisinin (λ) kongrüansına göre normal ve geodezik eğriliklerini göstermektedir.
- ii) $\vec{n}$, W_n hiperyüzeyine ait bir C eğrisinin (λ) kongrüansına göre normal eğrilik vektörü boyunca hareket eden normalize edilmiş birim vektörünü, $\vec{z}$ ve $\bar{\vec{z}}$ ise C ve C' eğrilerinin λ kongrüansına göre geodezik eğrilik vektörü boyunca hareket eden normalize edilmiş birim vektörleri gösterebilir.
- iii) $\dot{\nabla}_i$, W_n hiperyüzeyinde gözönüne alınan C ve C' eğrileri doğrultusundaki genelleştirilmiş kovaryant türev sembolüdür.

(2.3.1) ifadesinin her iki tarafının u^j 'ye göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır

$$\dot{\nabla}_j \lambda^a = \dot{\nabla}_j (x_i^a t^i + r n^a) \quad (2.3.5)$$

elde edilir. (2.1.6) ve (2.1.11) yardımıyla (2.3.5) ifadesi

$$\dot{\nabla}_j \lambda^a = (\dot{\nabla}_j t^i - r g^{il} w_{ij}) x_i^a + (t^i w_{ji} + \dot{\nabla}_j r) n^a \quad (2.3.6)$$

şekline dönüşür. W_n de C ve C' eğrilerinin normalize edilmiş birim teğet vektörlerinin W_n 'e göre kontravaryant bileşenleri m^j ve b^j olmak üzere, (λ) kongrüans eğrisine ait $\vec{\lambda}$ teğet vektörünün C eğrisi doğrultusundaki genelleştirilmiş kovaryant türevi

$$\frac{\delta \lambda^a}{\delta s} = m^j \dot{\nabla}_j \lambda^a \quad (2.3.7)$$

dir. Aynı şekilde (λ) kongürans eğrisine ait $\vec{\lambda}$ teğet vektörünün C' eğrisi doğrultusundaki genelleştirilmiş kovaryant türevi ise

$$\frac{\delta \lambda^a}{\delta s} = b^j \dot{\nabla}_j \lambda^a \quad (2.3.8)$$

dir. $\dot{\nabla}_j$ genelleştirilmiş kovaryant türev sembolü olmak üzere D operatörü

$$D = x_i^a g^{ij} \dot{\nabla}_j \dots \quad (2.3.9)$$

şeklinde tanımlansın.

$u^i = u^i(s)$ denklemi ile verilen C eğrisinin W_n ve W_{n+1} 'e göre normalize edilmiş birim teğet vektörlerinin kontravaryant bileşenleri, sırasıyla, m^i ve m^a olmak üzere, C eğrisi doğrultusundaki genelleştirilmiş kovaryant türevi

$$\frac{\delta m^a}{\delta s} = m^j \dot{\nabla}_j m^a \quad (2.3.10)$$

şeklindedir.

TEOREM 2.3.1 K_n ve K_g sırasıyla C eğrisinin normal ve geodezik eğrilerini göstermek üzere W_{n+1} 'e göre C eğrisinin normalize edilmiş m^a teğet vektörü için

$$\vec{m} D \vec{m} = K_n n^a + K_g b^a$$

dir.

İSPAT: (2.3.9) ifadesinin m^a teğet vektörüne uygulanmasıyla

$$D \vec{m} = g^{ij} x_i^a \dot{\nabla}_j m^a; \quad m^a = x_i^a m^i \quad (2.3.11)$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafı $\vec{m}$ ile çarpıldığında,

$$\begin{aligned} \vec{m} D \vec{m} &= g_{ab} m^b \left(g^{ij} x_i^a \dot{\nabla}_j m^a \right) \\ &= g_{ab} x_i^a x_j^b g^{ij} m^l \dot{\nabla}_j m^a \end{aligned}$$

bulunur. Son ifade (2.1.1)'e göre

$$\vec{m} D \vec{m} = m^j \dot{\nabla}_j m^a \quad (2.3.12)$$

olarak bulunur. (2.2.9) ifadesine benzer olarak

$$\frac{\dot{\delta} m^a}{\delta s} = K_n n^a + K_g b^a \quad (2.3.13)$$

elde edilir. (2.3.12) ifadesi, (2.3.10) ve (2.3.13) ifadeleri kullanılırsa

$$\vec{m} D \vec{m} = K_n n^a + K_g b^a \quad (2.3.14)$$

olarak bulunur.

TEOREM 2.3.2 $K_{\lambda|n}$ ve $K_{\lambda|g}$ sırasıyla C eğrisinin (λ) kongrüansına göre normal ve geodezik eğriliklerini göstermek üzere

$$\vec{m} D \vec{\lambda} = (K_{\lambda|n} n^a + K_{\lambda|g} z^a) t$$

dir.

İSPAT: (2.3.9) ifadesinin λ^a teğet vektörüne uygulanmasıyla

$$\vec{m} D \vec{\lambda} = g_{ab} m^b (g^{ij} x_i^a \dot{\nabla}_j \lambda^a); \quad m^b = x_l^b m^l \quad (2.3.15)$$

(2.1.1) ifadesi ve (2.1.4)₄ ifadeleri kullanılırsa

$$\vec{m} D \vec{\lambda} = m^j \dot{\nabla}_j \lambda^a \quad (2.3.16)$$

olarak bulunur. (2.3.16) ifadesinde (2.3.3) ve (2.3.7) ifadeleri kullanılırsa

$$\vec{m} D \vec{\lambda} = (K_{\lambda|n} n^a + K_{\lambda|g} z^a) t \quad (2.3.17)$$

olarak bulunur. $\vec{b}$, $u^i = u^i(s')$ ile verilen C' eğrisinin normalize edilmiş birim teğet vektörünü göstermek üzere, (2.3.16) ifadesine benzer olarak

$$\vec{b} D \vec{\lambda} = b^j \dot{\nabla}_j \lambda^a \quad (2.3.18)$$

olarak bulunur. (2.3.18) ifadesi (2.3.4) ve (2.3.8) ifadeleri kullanılırsa

$$\vec{b} D \vec{\lambda} = (\overline{K}_{\lambda|n} n^a + \overline{K}_{\lambda|g} \bar{z}^a) t \quad (2.3.19)$$

elde edilir.

TEOREM 2.3.3 W_{n+1} 'e ait herhangi bir $\vec{v}$ vektörünün kontravaryant bileşeni v^b olmak üzere

$$D\vec{v} = \dot{\nabla}_k v^k$$

dir.

İSPAT: $\vec{v}$ vektörünün W_n 'e göre kontravaryant bileşeni v^j olmak üzere $v^b = x_j^b v^j$ dir. (2.3.9) ifadesi $\vec{v}$ vektörüne uygulandığında

$$D\vec{v} = g_{ab} x_i^a g^{ik} \dot{\nabla}_k v^b$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte (2.1.6) ve (2.1.4)₂ ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} D\vec{v} &= g_{ij} g^{ik} \dot{\nabla}_k v^j \\ &= \dot{\nabla}_k v^k \end{aligned}$$

dir.

TEOREM 2.3.4 W_n de bir C eğrisinin herhangi bir P noktasındaki (λ) kongrüansına göre normal eğriliği

$$-K_{\lambda|n} = g_{hl} \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^h m^j - g_{hl} T_j t^l m^h m^j$$

dir.

İSPAT: Teorem 2.1.3 deki ifadeyi genelleştirirsek, $K_{\lambda|n}$ W_n de C eğrisinin (λ) kongrüansına göre normal eğriliğini göstermek üzere, (λ) kongrüansının yüzeye ait herhangi bir doğrultudaki tendansı, bu doğrultudaki normal eğriliğin negatifine eşittir. Buna göre $-K_{\lambda|n} = \vec{m} \nabla \vec{\lambda} \vec{m}$ dir. Yani

$$-K_{\lambda|n} = (m^b \nabla_b \lambda^a) g_{ac} m^c$$

(1.2.2) ifadesine göre $\dot{\nabla}_b \lambda^a = \nabla_b \lambda^a + T_b \lambda^a$ dir. Bu eşitliğin her iki yanını m^b ile çarpıldığında

$$m^b \dot{\nabla}_b \lambda^a = m^b \nabla_b \lambda^a + T_b m^b \lambda^a$$

bulunur. Bu ifadenin her iki yanını $g_{ac}m^c$ ile çarpılıp $(m^b \nabla_b \lambda^a) g_{ac}m^c$ ifadesi yalnız bırakıldığında

$$(m^b \nabla_b \lambda^a) g_{ac}m^c = (m^b \dot{\nabla}_b \lambda^a) g_{ac}m^c - m^b T_b \lambda^a g_{ac}m^c$$

olarak bulunur. O halde,

$$-K_{\lambda|n} = (m^b \dot{\nabla}_b \lambda^a) g_{ac}m^c - m^b T_b \lambda^a g_{ac}m^c \quad (2.3.20)$$

dir.

(2.1.12) ifadesine benzer olarak $m^b \dot{\nabla}_b \lambda^a = m^j \dot{\nabla}_j \lambda^a$ eşitliği (2.3.20) ifadesinde yerine yazılırsa

$$-K_{\lambda|n} = (m^j \dot{\nabla}_j \lambda^a) g_{ac}m^c - m^b T_b \lambda^a g_{ac}m^c \quad (2.3.21)$$

elde edilir. (2.1.1), (2.1.2), (2.1.4)₃, (2.3.1) ve (2.3.6) ifadeleri (2.3.21) de yerine yazılırsa

$$-K_{\lambda|n} = g_{hl} \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^h m^j - g_{hl} T_j t^l m^h m^j \quad (2.3.21a)$$

olarak bulunur.

TEOREM 2.3.5 W_n de C eğrisinin herhangi bir P noktasındaki (λ) kongrüansına göre normal eğriliği $K_{\lambda|n}$, geodezik eğriliği $K_{\lambda|g}$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} K_{\lambda|n} t &= m^j \left(\dot{\nabla}_j r + t^l w_{jl} \right) \\ K_{\lambda|g} t z^l &= m^j \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{hl} w_{hj} \right) \end{aligned}$$

dir.

İSPAT: (2.3.6) ifadesinin her iki tarafını m^j ile çarpılır ve (2.3.7) ifadesi kullanılırsa

$$\frac{\delta \lambda^a}{\delta s} = \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{hl} w_{hj} \right) m^j x_l^a + \left(t^l w_{jl} + \dot{\nabla}_j r \right) m^j n^a \quad (2.3.22)$$

bulunur. (2.3.22) ve (2.3.3) den

$$K_{\lambda|n}t = m^j \left(\dot{\nabla}_j r + t^l w_{jl} \right) \quad (2.3.23)$$

$$K_{\lambda|g}tz^l = m^j \left(\dot{\nabla}_j t^l - rg^{il}w_{ij} \right) \quad (2.3.24)$$

bulunur. (1.2.2)'ye göre

$$K_{\lambda|n}t = m^j \left(\nabla_j r + t^l w_{jl} \right) \quad (2.3.25)$$

$$K_{\lambda|g}tz^l = m^j \left(\nabla_j t^l - rg^{il}w_{ij} + T_j t^l \right) \quad (2.3.26)$$

dir.

Benzer şekilde, W_n de bir C' eğrisinin herhangi bir P noktasındaki (λ) kongrüansına göre normal eğriliği $\overline{K}_{\lambda|n}$, geodezik eğriliği $\overline{K}_{\lambda|g}$ ise

$$\overline{K}_{\lambda|n}t = b^j \left(\dot{\nabla}_j r + t^l w_{jl} \right) \quad (2.3.27)$$

$$\overline{K}_{\lambda|g}\bar{z}^l t = b^j \left(\dot{\nabla}_j t^l - rg^{il}w_{ij} \right) \quad (2.3.28)$$

dir

BÖLÜM 3

WEYL HİPERYÜZEYLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ LAGUERRE FONKSİYONU

3.1 Genelleştirilmiş Laguerre Fonksiyonu

$W_n(g_{ij}, T_k)$ hiperyüzeyinin her noktasından bir eğrisi geçmek üzere $W_{n+1}(g_{ab}, T_c)$ Weyl uzayına ait (λ) kongrüansını gözönüne alalım, öyle ki (λ) kongrüans eğrisine ait $\vec{\lambda}$ teğet vektörünün kontravaryant bileşeni λ^c ($c = 1, 2, \dots, n+1$) olsun. $\vec{\lambda}$ 'nın C eğrisine ait genelleştirilmiş kovaryant türevi (2.3.6) ifadesine göre

$$\dot{\nabla}_j \lambda^c = \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) x_i^c + \left(w_{jl} t^l + \dot{\nabla}_j r \right) n^c$$

dir. Burada

$$q_j^l = \dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij}, \quad s_j = w_{jl} t^l + \dot{\nabla}_j r \quad (3.1.1)$$

olarak alındığında yukarıdaki ifade

$$\dot{\nabla}_j \lambda^c = q_j^l x_i^c + s_j n^c \quad (3.1.2)$$

şeklinde yazılır.

W_n de s , C eğrisi boyunca yay uzunluğunu göstermek üzere $\vec{m} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m}$ ifadesini göz önüne alalım. Teorem 1.2.2 göz önüne alınarak (2.1.6), (2.3.9) ve (3.1.2) yardımıyla

$$\begin{aligned} \frac{\delta D \lambda}{\delta s} &= m^k \dot{\nabla}_k \left(x_i^a g^{ij} \dot{\nabla}_j \lambda^c \right) \\ &= m^k \left(w_{ik} n^a g^{ij} \dot{\nabla}_j \lambda^c + x_i^a g^{ij} \dot{\nabla}_k \dot{\nabla}_j \lambda^c \right) \\ &= w_{ik} n^a g^{ij} m^k \dot{\nabla}_j \lambda^c + x_i^a g^{ij} m^k \dot{\nabla}_k \dot{\nabla}_j \lambda^c \\ &= w_{ik} n^a g^{ij} m^k (q_j^l x_i^c + s_j n^c) + x_i^a g^{ij} m^k \dot{\nabla}_k \dot{\nabla}_j \lambda^c \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

elde edilir. (3.1.2) ifadesinin her iki tarafının u^k ya göre genelleştirilmiş kovaryant türevi alınır ve (2.1.6) ve (2.1.11) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\dot{\nabla}_k \dot{\nabla}_j \lambda^c &= \dot{\nabla}_k (q_j^l x_l^c + s_j n^c) \\ &= x_l^c \dot{\nabla}_k q_j^l + q_j^l \dot{\nabla}_k x_l^c + n^c \dot{\nabla}_k s_j + s_j \dot{\nabla}_k n^c \\ &= (\dot{\nabla}_k q_j^l - s_j g^{nl} w_{kn}) x_l^c + (q_j^l w_{kl} + \dot{\nabla}_k s_j) n^c\end{aligned}\quad (3.1.4)$$

bulunur. $-\vec{m} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m}$ ifadesinde (3.1.3) ve (3.1.4)'ü yerine yazarsak

$$\begin{aligned}-\vec{m} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m} &= -g_{ab} x_p^b m^p m^k \left[w_{ik} n^a (q_j^l x_l^c + s_j n^c) \right. \\ &\quad \left. + x_i^a g^{ij} (\dot{\nabla}_k q_j^l - s_j g^{nl} w_{kn}) x_l^c \right. \\ &\quad \left. + (q_j^l w_{kl} + \dot{\nabla}_k s_j) n^c \right] g_{cd} x_h^d m^h\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte (2.1.4)₃ ifadesi kullanılırsa

$$-\vec{m} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m} = -g_{hl} m^h m^j m^k (\dot{\nabla}_k q_j^l - s_j g^{nl} w_{kn}) \quad (3.1.5)$$

bulunur. (3.1.5) ifadesi Teorem 1.2.2 yardımıyla

$$-\vec{m} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m} = -m^j m^h m^k (\dot{\nabla}_k q_{hj} - s_j w_{kh}) \quad (3.1.6)$$

şekline dönüşür. (1.2.2)'ye göre (3.1.6) ifadesi için

$$-\vec{m} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m} = -m^j m^h m^k (\nabla_k q_{hj} - 2T_k q_{hj} - s_j w_{kh}) \quad (3.1.6a)$$

bulunur. Buradan da,

$$-m^j m^h m^k (\nabla_k q_{hj} - s_j w_{kh}) = -\vec{m} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m} - 2T_k q_{hj} m^j m^h m^k \quad (3.1.7)$$

elde edilir. (3.1.7) ifadesinin sol tarafındaki ifadeye W_n de normalize edilmiş $\vec{m}$ teğet vektörüne sahip bir C eğrisinin $\vec{m}$ doğrultusundaki genelleştirilmiş Laguerre fonksiyonu diyelim ve $L_{\lambda l}$ ile gösterelim. Eğer $L_{\lambda l} = 0$ olarak

alınırsa, W_n hiperyüzeyine ait $\vec{m}$ doğrultusundaki genelleştirilmiş Laguerre eğrisi elde edilir. Buna göre

$$L_{\lambda l} = -\vec{m} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m} - 2T_k q_{kj} m^h m^j m^k \quad (3.1.7a)$$

dir. (3.1.5) de (3.1.1) ifadesi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -\vec{m} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m} &= -g_{hl} m^h m^j m^k \left[\dot{\nabla}_k \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(w_{jl} t^l + \dot{\nabla}_j r \right) g^{nl} w_{kn} \right] \\ &= -g_{hl} m^h m^j m^k \dot{\nabla}_k \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) \\ &\quad + m^j \left(w_{jl} t^l + \dot{\nabla}_j r \right) w_{hk} m^h m^k \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

bulunur. Teorem 1.2.2 kullanılırsa (3.1.8) için

$$\begin{aligned} -\vec{m} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m} &= -m^j m^h m^k \dot{\nabla}_k \left[g_{hl} \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) \right] \\ &\quad + m^j \left(w_{jl} t^l + \dot{\nabla}_j r \right) w_{hk} m^h m^k \\ &= -m^k \dot{\nabla}_k \left[g_{hl} \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^j m^h \right] \\ &\quad + m^j g_{hl} \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^k \dot{\nabla}_k m^j \\ &\quad + m^h g_{hl} \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^k \dot{\nabla}_k m^j \\ &\quad + m^j \left(w_{jl} t^l + \dot{\nabla}_j r \right) w_{hk} m^h m^k \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

elde edilir.

(3.1.9) ifadesinin sağ tarafını, sırasıyla, I. terim, II. terim, III. terim, ve IV. terim olarak adlandıralım. Bu takdirde,

$$\text{I. terim :} \quad -m^k \dot{\nabla}_k \left(g_{hl} \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^h m^j \right) \quad (3.1.10)$$

olacaktır. (2.3.21a) göre (3.1.10) ifadesi

$$\begin{aligned}
 -m^k \dot{\nabla}_k \left[g_{hl} \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^h m^j \right] &= -m^k \dot{\nabla}_k \left(-K_{\lambda ln} + g_{hl} T_j t^l m^h m^j \right) \\
 &= m^k \dot{\nabla}_k K_{\lambda ln} - m^k \dot{\nabla}_k (g_{hl} T_j t^l m^h m^j) \\
 &= \frac{\delta K_{\lambda ln}}{\delta s} - m^k \dot{\nabla}_k (g_{hl} T_j t^l m^h m^j)
 \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

şekline gelir.

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki ifadenin ikinci kısmı Teorem 1.2.2, (2.3.12) ve (2.3.14) ifadelerine göre

$$\begin{aligned}
 -m^k \dot{\nabla}_k (g_{hl} T_j t^l m^h m^j) &= -g_{hl} T_j t^l \left[m^k \dot{\nabla}_k m^h + m^k \dot{\nabla}_k m^j \right] \\
 &\quad - g_{hl} m^h m^j m^k \dot{\nabla}_k (T_j t^l) \\
 &= -g_{hl} T_j t^l K_g (b^h + b^j) - g_{hl} m^h m^j m^k \dot{\nabla}_k (T_j t^l)
 \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

olarak elde edilir. Buna göre (3.1.12) ifadesi (3.1.10) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 -m^k \dot{\nabla}_k \left[g_{hl} \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^h m^j \right] &= \frac{\delta K_{\lambda ln}}{\delta s} - g_{hl} T_j t^l K_g (b^h + b^j) \\
 &\quad - g_{hl} m^h m^j m^k \dot{\nabla}_k (T_j t^l)
 \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

olacaktır.

II. terim: $m^j g_{hl} \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^k \dot{\nabla}_k m^h$ için (2.3.12) ve (2.3.14) ifadeleri kullanılırsa

$$m^j g_{hl} \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) K_g b^h \tag{3.1.14}$$

bulunur. Bu ifade de (2.3.24) kullanılırsa

$$g_{hl} m^j \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^k - \dot{\nabla}_k m^h = K_{\lambda lg} K_g t g_{hl} b^h z^l$$

bulunur. C' eğrisinin $\overline{K}_g$ geodezik eğrilik vektörü doğrultusundaki b^h ile C eğrisinin λ kongrüansına göre $K_{\lambda l g}$ geodezik eğrilik vektörü boyunca hareket eden z^l normalize edilmiş vektörleri arasındaki açı ϕ olmak üzere, $\cos \phi = g_{hl} b^h z^l$ olarak alındığında II. terim için

$$g_{hl} m^j \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^k \dot{\nabla}_k m^h = K_{\lambda l g} K_g t \cos \phi \quad (3.1.15)$$

bulunur.

III. terim olan $g_{hl} m^h \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^k \dot{\nabla}_k m^j$ ifadesi (2.3.12), (2.3.14) ve (2.3.28) ifadelerine göre

$$\begin{aligned} g_{hl} m^h \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^k \dot{\nabla}_k m^j &= g_{hl} m^h \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) K_g b^j \\ &= \overline{K}_{\lambda l g} K_g t g_{hl} m^h \overline{z}^l \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

C eğrisinin K_g geodezik eğrilik vektörü doğrultusundaki m^h ile C' eğrisinin λ kongrüansına göre $\overline{K}_{\lambda l g}$ geodezik vektörleri arasındaki açıyı θ ile gösterelim. Dolayısıyla $\cos \theta = g_{hl} m^h \overline{z}^l$ olacaktır. Bu takdirde III. terim

$$g_{hl} m^h \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^k \dot{\nabla}_k m^j = \overline{K}_{\lambda l g} K_g t \cos \theta \quad (3.1.16)$$

olacaktır.

IV. terim olan, $m^j \left(w_{jl} t^l + \dot{\nabla}_j r \right) w_{hk} m^h m^k$ ifadesi (2.3.25) e göre

$$m^j \left(w_{jl} t^l + \dot{\nabla}_j r \right) w_{hk} m^h m^k = K_{\lambda l n} K_n t \quad (3.1.17)$$

olarak bulunur. (3.1.9) ifadesinde (3.1.13), (3.1.15), (3.1.16) ve (3.1.17) ifadeleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -\vec{m} \frac{\delta D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m} &= \frac{\delta K_{\lambda l n}}{\delta s} + K_{\lambda l g} K_g t \cos \phi + \overline{K}_{\lambda l g} K_g t \cos \theta \\ &\quad + K_{\lambda l n} K_n t - g_{hl} T_j t^l K_g (b^h + b^j) \\ &\quad - g_{hl} m^h m^j m^k \dot{\nabla}_k (T_j t^l) \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

elde edilir. (3.1.7) ifadesinde (3.1.18)'i yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} L_{\lambda l} = & \frac{\dot{\delta} K_{\lambda l n}}{\delta s} + K_{\lambda l g} K_g t \cos \phi + \overline{K}_{\lambda l g} K_g t \cos \theta \\ & + K_{\lambda l n} K_n t - g_{hl} T_j t^l K_g (b^h + b^j) \\ & - g_{hl} m^h m^j m^k \dot{\nabla}_k (T_j t^l) - 2 T_k q_{hj} m^h m^j m^k \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

bulunur. Buna göre aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

TEOREM 3.1.1 (3.1.19) ifadesi W_n hiperyüzeyine ait bir C eğrisi doğrultusundaki genelleştirilmiş Laguerre fonksiyonudur. (3.1.19) ifadesinin şimdi farklı bir metotla ispatını verelim.

İSPAT: W_{n+1} 'e ait bir λ kongrüansına göre, $\vec{m} D \vec{\lambda} \vec{m}$ ifadesinin genelleştirilmiş kovaryant türevi alındığında

$$\frac{\dot{\delta} (\vec{m} D \vec{\lambda} \vec{m})}{\delta s} = \frac{\dot{\delta} \vec{m}}{\delta s} D \vec{\lambda} \vec{m} + \vec{m} \frac{\dot{\delta} D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m} + \vec{m} D \vec{\lambda} \frac{\dot{\delta} \vec{m}}{\delta s} \quad (3.1.20)$$

bulunur.

(3.1.20) ifadesinin sağ tarafında bulunan ifadenin ikinci terimi, eşitliğin sol tarafına geçirirsek

$$-\vec{m} \frac{\dot{\delta} D \vec{\lambda}}{\delta s} \vec{m} = \frac{\dot{\delta} \vec{m}}{\delta s} D \vec{\lambda} \vec{m} + \vec{m} D \vec{\lambda} \frac{\dot{\delta} \vec{m}}{\delta s} - \frac{\dot{\delta} (\vec{m} D \vec{\lambda} \vec{m})}{\delta s} \quad (3.1.21)$$

$\frac{\dot{\delta} \vec{m}}{\delta s} D \vec{\lambda} \vec{m}$ ifadesinde (2.3.9) ve (2.3.13) ifadeleri kullanılırsa

$$\frac{\dot{\delta} \vec{m}}{\delta s} D \vec{\lambda} \vec{m} = g_{ab} (K_n n^a + K_g b^a) \left(x_i^b g^{ij} \dot{\nabla}_j \lambda^c \right) g_{cd} x_h^d m^h$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte (2.1.1), (2.1.4)₃ ve (3.1.2) ifadeleri kullanılırsa ve $b^a = x_p^a b^p$ olduğu hatırlanırsa

$$\frac{\dot{\delta} \vec{m}}{\delta s} D \vec{\lambda} \vec{m} = g_{ab} x_i^b n^a g^{ij} K_n \dot{\nabla}_j \lambda^c g_{cd} x_h^d m^h + g_{ab} b^a x_i^b g^{ij} K_g \dot{\nabla}_j \lambda^c g_{cd} x_h^d m^h$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\delta} \vec{m}}{\delta s} D \vec{\lambda} \vec{m} &= K_g b^j \dot{\nabla}_j \lambda^c g_{cd} x_h^d m^h \\ &= K_g b^j (q_j^l x_i^l + s_j n^c) g_{cd} x_h^d m^h \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki eşitlikte (2.1.1) ve (2.1.4)₃ ve (3.1.1) ifadeleri kullanılırsa

$$\frac{\delta \vec{m}}{\delta s} D \vec{\lambda} \vec{m} = g_{hl} b^j \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) K_g m^h$$

şeklinde yazılabilir. Bu taktirde, (2.3.28)'e göre

$$\frac{\delta \vec{m}}{\delta s} D \vec{\lambda} \vec{m} = \overline{K}_{\lambda l g} K_g t g_{hl} m^h \vec{z}^l$$

elde edilir. $\vec{m}$ ile $\vec{z}$ vektörleri arasındaki açının θ olduğu hatırlanırsa

$$\frac{\delta \vec{m}}{\delta s} D \vec{\lambda} \vec{m} = \overline{K}_{\lambda l g} K_g t \cos \theta \quad (3.1.22)$$

dir. $\vec{m} D \vec{\lambda} \frac{\delta \vec{m}}{\delta s}$ ifadesi, (2.3.13) ve (2.3.17) ifadeleri kullanıldığında ve $\vec{z}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki açının ϕ olduğu hatırlandığında

$$\begin{aligned} \vec{m} D \vec{\lambda} \frac{\delta \vec{m}}{\delta s} &= (K_{\lambda l n} \vec{n} + K_{\lambda l g} \vec{z}) (K_n \vec{n} + K_g \vec{b}) t \\ &= K_{\lambda l n} K_n \vec{n} \cdot \vec{n} + K_{\lambda l g} K_g t \cos \phi \\ &\quad + K_{\lambda l g} K_n t \vec{z} \cdot \vec{n} + K_{\lambda l n} K_g t \vec{n} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki eşitlik (2.1.4)₁'e göre

$$\vec{m} D \vec{\lambda} \frac{\delta \vec{m}}{\delta s} = K_{\lambda l n} K_n t + K_{\lambda l g} K_g t \cos \phi \quad (3.1.23)$$

şekline gelir. $\vec{m} D \vec{\lambda} \vec{m}$ ifadesi (2.1.1), (2.1.4)₃, (2.3.9), (3.1.1) ve (3.1.2)'ye göre

$$\begin{aligned} \vec{m} D \vec{\lambda} \vec{m} &= g_{ab} m^b \left(x_i^a g^{ij} \dot{\nabla}_j \lambda^c \right) g_{cd} x_h^d m^h ; \quad m^b = x_p^b m^p \\ &= g_{ab} x_i^a x_p^b g^{ij} m^p \dot{\nabla}_j \lambda^c g_{cd} x_h^d m^h \\ &= g_{ip} g^{ij} m^p \dot{\nabla}_j \lambda^c g_{cd} x_h^d m^h \\ &= m^j (q_j^l x_l^c + s_j n^c) g_{cd} x_h^d m^h \\ &= g_{hl} \left(\dot{\nabla}_j t^l - r g^{il} w_{ij} \right) m^h m^j \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

şeklindedir. Yukarıdaki eşitlikte (2.3.21a) ifadesi kullanıldığı takdirde

$$\vec{m} D \vec{\lambda} \vec{m} = -K_{\lambda l n} + g_{hl} T_j t^l m^h m^j$$

bulunur. Buna göre

$$\frac{\dot{\delta}(\vec{m}D\vec{\lambda}\vec{m})}{\delta s} = -\frac{\dot{\delta}K_{\lambda ln}}{\delta s} + \frac{\dot{\delta}(g_{hl}T_j t^l m^h m^j)}{\delta s} \quad (3.1.25)$$

bulunur. $\frac{\dot{\delta}(g_{hl}T_j t^l m^h m^j)}{\delta s} = m^k \dot{\nabla}_k (g_{hl}T_j t^l m^h m^j)$ ifadesi (3.1.12) deki ifade ile aynı olduğundan

$$\frac{\dot{\delta}(g_{hl}T_j t^l m^h m^j)}{\delta s} = g_{hl}T_j t^l K_g (b^h + b^j) + g_{hl}m^h m^j m^k \dot{\nabla}_k (T_j t^l)$$

olacaktır. Buna göre (3.1.25) ifadesi

$$\frac{\dot{\delta}(\vec{m}D\vec{\lambda}\vec{m})}{\delta s} = -\frac{\dot{\delta}K_{\lambda ln}}{\delta s} + g_{hl}T_j t^l K_g (b^h + b^j) + g_{hl}m^h m^j m^k \dot{\nabla}_k (T_j t^l) \quad (3.1.25a)$$

(3.1.21) ifadesinde (3.1.22),(3.1.23) ve (3.1.25a) ifadeleri yerine yazılırsa ve $-\vec{m}\frac{\dot{\delta}D\vec{\lambda}}{\delta s}\vec{m}$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned} -\vec{m}\frac{\dot{\delta}D\vec{\lambda}}{\delta s}\vec{m} &= \frac{\dot{\delta}K_{\lambda ln}}{\delta s} + K_{\lambda lg}K_g t \cos \phi + \overline{K}_{\lambda lg}K_g t \cos \theta + K_{\lambda ln}K_n t \\ &\quad - g_{hl}T_j t^l K_g (b^h + b^j) - g_{hl}m^h m^j m^k \dot{\nabla}_k (T_j t^l) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.26) ifadesi (3.1.7a) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L_{\lambda l} &= \frac{\dot{\delta}K_{\lambda ln}}{\delta s} + K_{\lambda lg}K_g t \cos \phi + \overline{K}_{\lambda lg}K_g t \cos \theta + K_{\lambda ln}K_n t \\ &\quad - g_{hl}T_j t^l K_g (b^h + b^j) - g_{hl}m^h m^j m^k T_j t^l \dot{\nabla}_k (T_j t^l) \\ &\quad - 2T_k q_{hj} m^h m^j m^k \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

bulunur. (3.1.27) ifadesi ile (3.1.19) ifadesi aynı olduğundan Laguerre fonksiyonu farklı bir metotla bulunmuş olur.

TEOREM 3.1.2 Eğer $\vec{\lambda}$ normaller kongüransı ise genelleştirilmiş Laguerre fonksiyonunun ifadesi

$$P_1 = T_k m_1^k \quad (3.1.28)$$

olmak üzere

$$m_1^k m_1^j m_1^h \nabla_k w_{hj} = m_1^k \nabla_k K_n - 2K_1 \tau_g + 2P_1 K_n$$

dir.

İSPAT : W_n 'e ait bir C eğrisinin herhangi bir P noktasındaki normalize edilmiş $\vec{m}_1$ teğet vektörünün W_n ve W_{n+1} 'e göre kontravaryant bileşenleri, sırasıyla, m_1^i ve m_1^a , aynı şekilde $\vec{m}_2$ asal normalinin bileşenleri de m_2^i ve m_2^a olsun. (3.1.20) ifadesinde $\vec{m} = \vec{m}_1$ ve λ kongrüansı yerine normaller kongrüansı alındığında

$$\frac{\delta(\vec{m}_1 D\vec{n}\vec{m}_1)}{\delta s} = \frac{\delta\vec{m}_1}{\delta s} D\vec{n}\vec{m}_1 + \vec{m}_1 \frac{\delta D\vec{n}}{\delta s} \vec{m}_1 + \vec{m}_1 D\vec{n} \frac{\delta\vec{m}_1}{\delta s}$$

bulunur. $-\vec{m}_1 \frac{\delta D\vec{n}}{\delta s} \vec{m}_1$ ifadesi yalnız bırakıldığında

$$-\vec{m}_1 \frac{\delta D\vec{n}}{\delta s} \vec{m}_1 = \frac{\delta\vec{m}_1}{\delta s} D\vec{n}\vec{m}_1 + \vec{m}_1 D\vec{n} \frac{\delta\vec{m}_1}{\delta s} - \frac{\delta(\vec{m}_1 D\vec{n}\vec{m}_1)}{\delta s} \quad (3.1.29)$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki ifadeleri ayrı ayrı inceleyelim. $\frac{\delta\vec{m}_1}{\delta s} D\vec{n}\vec{m}_1$ ifadesinde (2.1.1), (2.1.11), (2.2.2), (2.2.5) ve (2.3.9) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\delta\vec{m}_1}{\delta s} D\vec{n}\vec{m}_1 &= g_{ab} K_1 m_2^a \left(x_i^b g^{ij} \dot{\nabla}_j n^c \right) g_{cd} x_h^d m^h \\ &= g_{ab} K_1 x_p^a m_2^p x_i^b g^{ij} (-w_{kj} g^{kp} x_p^c) g_{cd} x_h^d m^h \\ &= -K_1 w_{hj} m_1^h m_2^j \\ &= -K_1 \tau_g \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

bulunur. $\vec{m}_1 D\vec{n} \frac{\delta\vec{m}_1}{\delta s}$ ifadesi ile $\frac{\delta\vec{m}_1}{\delta s} D\vec{n}\vec{m}_1$ ifadesi aynı olacağından (3.1.30)'a göre

$$\vec{m}_1 D\vec{n} \frac{\delta\vec{m}_1}{\delta s} = -K_1 \tau_g \quad (3.1.31)$$

bulunur.

λ kongrüansı yerine normaller kongrüansı alındığında (2.3.1) ifadesinde teğetsel kısmın katsayısı olan $t = 0$ ve normal kısmın katsayısı $r = 1$ olacağından

$$q_j^l = -g^{il} w_{ij} \quad , \quad s_j = 0 \quad (3.1.32)$$

şekline dönüşür. (3.1.32) ifadesi g_{hl} ile çarpılırsa

$$q_{hj} = -w_{hj} \quad (3.1.33)$$

bulunur. (3.1.33) ifadesi (3.1.6a) ifadesinde yerine yazıldığı takdirde

$$-\vec{m}_1 \frac{\delta D \vec{n}}{\delta s} \vec{m}_1 = m_1^j m_1^h m_1^k (\nabla_k w_{hj} - 2T_k w_{hj}) \quad (3.1.34)$$

olarak bulunur. Son olarak $\frac{\delta(\vec{m}_1 D \vec{n} \vec{m}_1)}{\delta s}$ ifadesini ele alalım.

(3.1.24) ifadesi (3.1.32)'ye göre

$$\vec{m}_1 D \vec{n} \vec{m}_1 = -w_{ij} m_1^i m_1^j \quad (3.1.35)$$

şekline dönüşür. (3.1.29) ifadesinde (3.1.30), (3.1.31), (3.1.34), (3.1.35) ifadeleri yerine yazılırsa

$$m_1^j m_1^h m_1^k \nabla_k w_{hj} - 2T_k m_1^k w_{hj} m_1^h m_1^j = -2K_1 \tau_g + \frac{\delta K_n}{\delta s}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte (3.1.28) ifadesi kullanıldığı takdirde

$$m_1^j m_1^h m_1^k \nabla_k w_{hj} - 2P_1 K_n = -2K_1 \tau_g + \frac{\delta K_n}{\delta s}$$

bulunur. $\dot{\nabla}_k K_n = \nabla_k K_n$ olduğu hatırlanırsa son eşitlik

$$m_1^j m_1^h m_1^k \nabla_k w_{hj} = \frac{\delta K_n}{\delta s} + 2P_1 K_n - 2K_1 \tau_g \quad (3.1.36)$$

olarak elde edilir.

(3.1.36) ifadesinin sol tarafındaki ifadeye [7]'ye göre genelleştirilmiş Laguerre fonksiyonu denir. Eğer Weyl uzayından Riemann uzayına geçilirse $T_k = 0$ ve (3.1.28) ifadesindeki $P_1 = 0$ olacaktır.

Aynı zamanda, Riemann uzayında (2.2.6) ifadesi $-\Gamma_2$ ye Ceyrisinin birinci eğriliğini gösteren K_1 ise K_g 'ye eşit olduğundan (3.1.36) ifadesi

$$\mathcal{L} = \frac{\delta K_n}{\delta s} + 2K_g \Gamma_2 \quad (3.1.37)$$

olur. (3.1.37) ifadesi [8]'e göre Riemannian hiperyüzeylerde Laguerre fonksiyonunu verir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, W_{n+1} weyl uzayına ait (λ) kongrüansına göre W_n hiperyüzeyinin bir C eğrisi doğrultusundaki genelleştirilmiş Laguerre fonksiyonu elde edilmiştir.

Bu sonuçlardan yararlanarak, W_n de genelleştirilmiş Laguerre eğrilerinin birinci ve ikinci cins Chebyshev şebekelerinden ibaret olmaları hali incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] NORDEN, A.: Affinely Connected Spaces. GRFML Moscow, (1976).
- [2] ZLATANOV, G.Z. : Special Networks in the n-Dimensional Space of Weyl. Tensor(N.S), V.48, (1989).
- [3] HLAVATY, V. : Les courbes de la variete W_n . Memor. Sci. Math. Paris, (1934).
- [4] ZLATANOV, G.Z. : Nets in the n-dimensional space of Weyl. C.R. Acad. Bulgare Sci. V.41, No:10, 29-32, (1988) (in Russian).
- [5] UYSAL, S.A. - ÖZDEĞER, A. : On the Chebyshev nets in a hypersurface of a Weyl space. Journal of Geometry, (1993) (baskıda).
- [6] HLAVATY, V. : Theorie d'immersion d'une W_m dans W_n , Ann. Soc. Polon. Math., V.21, 196-206, (1949).
- [7] UYSAL, S.A. : Laguerre's function in a Weyl hypersurface, Journal of Geometry, (1993) (baskıda).
- [8] ÖZDEĞER, A. : A function of direction associated with n congruences of an orthogonal ennuple in a Riemannian hypersurface, Journal of Geometry, Vol.17 , 1-6, (1981).

WEYL HİPERYÜZEYLERİNDE GENELLEŞTİRİLMİŞ LAGUERRE FONKSİYONU

Sezgin ALTAY

Anahtar Kelimeler:Komplemanter vektör, genelleştirilmiş türev, genelleştirilmiş kovaryant türev, tendans, normal eğrilik, geodezik eğrilik, kongrüans, genelleştirilmiş Laguerre fonksiyonu,genelleştirilmiş Laguerre çizgisi.

Özet:Üç bölümden oluşan bu çalışmanın birinci ve ikinci bölümlerinde vektör alanlarının genelleştirilmiş kovaryant türevleri ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise Weyl hiperyüzeylerinde genelleştirilmiş Laguerre fonksiyonunun ifadesi ve ele alınan kongrüansın normal doğrultuda olması durumunda Laguerre fonksiyonunun özel bir formu elde edilmiştir.

GENERALISED LAGUERRE FUNCTION IN A WEYL HYPERSURFACE

Sezgin ALTAY

Keywords:Complementary vector, prolonged derivative, prolonged covariant derivative, tendency, normal curvature, geodesic curvature, congruence, generalised Laguerre function,generalised Laguerre line.

Abstract:In this work, after having given the fundamental definitions related to the prolonged covariant derivatives of the vector fields of a Weyl space , some theorem concerning these concepts are proved.In the third section, we obtained the generalised Laguerre function.

ÖZGEÇMİŞ

Sezgin ALTAY, 29.9.1967 de Kastamonu'da doğdu. Çemberlitaş Kız Lisesi'nden iyi derece ile mezun olarak, 1986 yılında İ.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği bölümü'ne girdi ve 1991 Şubat döneminde mezun oldu. Aynı yıl Matematik Bölümü'nde Yüksek Lisans çalışmalarına başladı.

1991 yılında İ.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi'ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Sezgin ALTAY halen İ.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.