

**T. C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN  
ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI**

**Osman KARAKURT**

**DOKTORA TEZİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**MALATYA  
2015**

Tezin Başlığı : Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemlerinin  
Çözümünün Varlığı

Tezi Hazırlayan : OSMAN KARAKURT

Sınav Tarihi :29.01.2015

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değeriendirilerek Matematik Anabilim  
Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri

Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER (İnönü Üniv.)

Prof. Dr. Etibar PENAHLI (Fırat Üniv.)

Prof. Dr. Ali ÖZDEŞ (İnönü Üniv.)

Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ (İnönü Üniv.)

Prof. Dr. İsmet ÖZDEMİR (İnönü Üniv.)

Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER  
Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Alaattin ESEN  
Enstitü Müdürü

## ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemlerinin Çözümlerinin Varlığı" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Osman KARAKURT

# ÖZET

Doktora Tezi

## LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Osman KARAKURT

İnönü Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

vi+51 sayfa

2015

Danışman: Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde, integral denklemler ve daha önceden bilinmekte olan, lineer olmayan Volterra integral denklem tipleriyle ilgili bilgi verildi.

İkinci bölümde, diğer bölümlerin daha kolay anlaşılmasını sağlayacak temel tanımlar ve teoremler verildi. Lineer uzay, normlu uzay, topolojik uzay, sürekli operatör ve kompaktlık gibi kavramlardan bahsedildi. Ayrıca kompaktsızlık ölçüsü ile ilgili bilgi verildi.

Üçüncü ve Dördüncü bölümde, farklı tipten olan lineer olmayan Volterra integral denklemlerinin, sabit nokta teoremi kullanılarak,  $[0, T]$  aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların kümesi olan  $C[0, T]$  Banach uzayında çözümünün varlığı incelendi. Bunu yaparken, lineer olmayan Volterra integral denkleminin bilinen fonksiyonlarından olan; kaynak terim, integral çarpanı ve çekirdek terimine ilişkin hipotezler oluşturulmuş ve çözümün varlığı ispatlanmıştır. Ayrıca, bu bölümde, sonuçların daha iyi anlaşılmasını sağlayacak bazı uygulamalara yer verilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELE:** Lineer olmayan Volterra integral denklemleri, Kompaktsızlık ölçüsü, Sabit nokta teoremi.

## ABSTRACT

PhD Thesis

### THE EXISTENCE OF THE SOLUTIONS OF THE NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS

Osman KARAKURT

İnönü University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

vi+51 pages

2015

Supervisor: Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER

The present thesis consists of four chapter. In the first chapter of this thesis, the information was given about the integral equations and discussed types of nonlinear Volterra integral equations previously.

In the second chapter, some basic definitions and theorems were given to understand other chapters easily. Basic concepts such as linear space, normed space, topological space, continuous operator and compact set were given. It was also given information about measure of noncompactness.

In the third and fourth chapter, the existence of the solution of the nonlinear Volterra integral equations which are different type in the classical Banach space  $C[0, T]$  that is consist of all real functions defined and continuous on the interval  $[0, T]$  were investigated by using the fixed point theorem. In doing so, the hypotheses about the source term, integral multiplier and kernel term which are defined as known functions of nonlinear Volterra integral equation has been created and the existence of the solution has been proof. Moreover, in this chapter, some applications were given to understand the results more clearly.

**KEYWORDS:** Nonlinear Volterra integral equations, Measure of noncompactness, Fixed point theorem.

## TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamda danışmanlığımı yürüten, bu tezin hazırlanmasında desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam, sayın Prof. Dr. Ö. Faruk TEMİZER'e minnet ve şükranlarımı sunarım. Akademik çalışmalarının ve bölümdeki görevlerinin yanısıra, bu tezin hazırlanmasında bana büyük yardımı olan Prof. Dr. İsmet ÖZDEMİR'e, bu çalışmada katkılarını hiçbir zaman esirgemeyen Ümit ÇAKAN ve Bekir İLHAN'a, devamlı destek ve teşvikte bulunan aileme ve diğer arkadaşlarıma da çok teşekkür ederim. Ayrıca, bu tezde katkıları bulunan değerli jüri üyelerine de çok teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖZET . . . . .                                                                                 | i   |
| ABSTRACT . . . . .                                                                             | ii  |
| TEŞEKKÜR . . . . .                                                                             | iii |
| İÇİNDEKİLER . . . . .                                                                          | iv  |
| SİMGELER VE KISALTMALAR . . . . .                                                              | vi  |
| 1 GİRİŞ . . . . .                                                                              | 1   |
| 1.1 İntegral Denklemler . . . . .                                                              | 1   |
| 2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER . . . . .                                                           | 4   |
| 2.1 Temel Kavramlar . . . . .                                                                  | 4   |
| 2.2 Kompaktsızlık Ölçüleri . . . . .                                                           | 9   |
| 3 KUADRATİK VOTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN BİR<br>SINIFININ MONOTON ÇÖZÜMLERİ . . . . .       | 16  |
| 3.1 Gösterimler, Tanımlar ve Yardımcı Sonuçlar . . . . .                                       | 16  |
| 3.2 Temel Sonuç . . . . .                                                                      | 18  |
| 4 LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN BİR<br>SINIFININ MONOTON ÇÖZÜMLERİ . . . . . | 33  |
| 4.1 Temel Hipotezler . . . . .                                                                 | 33  |
| 4.2 Temel Sonuç . . . . .                                                                      | 34  |
| KAYNAKLAR . . . . .                                                                            | 48  |

ÖZGEÇMİŞ . . . . . 51



## SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$  : Reel sayılar cümlesi,

$\mathbb{R}_+$  :  $[0, \infty)$  aralığı,

$\mathbb{N}$  : Doğal sayılar cümlesi,

$\mathbb{C}$  : Kompleks sayılar cümlesi,

$C(I)$  :  $I$  aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı,

$BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  :  $\mathbb{R}_+$  da tanımlı, reel değerli, sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı,

$\sup$  : Supremum,

$\inf$  : İnfimum,

$\text{maks}$  : Maksimum,

$E$  : Banach Uzayı,

$D(T)$  :  $T$  dönüşümünün tanım cümlesi,

$R(T)$  :  $T$  dönüşümünün görüntü cümlesi,

$\mathfrak{M}_E$  :  $E$  Banach uzayının boştan farklı ve sınırlı alt cümlelerinin ailesi,

$\mathfrak{N}_E$  :  $E$ 'nin boştan farklı ve ön-kompakt alt cümlelerinin ailesi,

$\overline{A}$  :  $A$  cümlesinin kapanışı,

$B(x, r)$  :  $x$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı açık yuvar,

$B[x, r]$  :  $x$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı kapalı yuvar,

$S(x, r)$  :  $x$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı yuvar yüzeyi,

$\text{conv } X$  :  $X$ 'i ihtiva eden konveks ve kapalı cümlelerin en küçüğü,

$w(x, \varepsilon)$  :  $x$ 'in,  $\varepsilon > 0$  sayısına karşılık gelen süreklilik modülü.

# 1. GİRİŞ

## 1.1. İntegral Denklemler

İntegral işareti altında bilinmeyen bir fonksiyonu ihtiva eden denklemler olarak tanımlanan integral denklemler, uygulamalı matematik ve matematiksel fizikteki bir çok problemin dönüştüğü en önemli denklem tiplerindendir. Bu denklemler, matematiksel analizin günümüz problemleri üzerine uygulanmasında da önemli bir yere sahiptir. Mesela, trafik araç teorisi ve biyoloji bilimindeki bazı problemlerin çözümü,

$$x(t) = f(t, x(t)) \int_0^1 u(t, s, x(s)) ds, \quad t \in [0, 1]$$

formundaki lineer olmayan fonksiyonel integral denkleme dayanır, [1], [2].

İntegral denklemler, genelde integral sınırlarına göre Fredholm ve Volterra olmak üzere iki tipten oluşmaktadır. Fredholm integral denkleminde integralin sınırları sabittir. Volterra tipi integral denklemlerde ise integral sınırlarından biri değişkendir, [2].

İntegral denklem tabiri, ilk olarak 1888 yılında Bois Reymand tarafından kullanılmış olmakla beraber, bu denklemlere ilk olarak 1782 yılında Laplace'ın lineer fark denklemleri ve integral deklemlerin çözümünde kullandığı,

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xy} \phi(y) dy$$

integral dönüşümünde rastlanmaktadır, [3].

Volterra tipi integral denklemlere ait çalışmalar ilk olarak, 1860-1940 yılları arasında yaşamış olan İtalyan matematikçilerinden Vito Volterra tarafından yapılmıştır, [2].

$$x(t) = (Tx)(t) \int_0^t u(t, s, x(s)) ds$$

ve

$$x(t) = f(t, x(t)) \int_0^t u(t, s, x(s)) ds$$

formundaki lineer olmayan kuadratik Volterra tipi denklemlerin çözülebilirliğine dair incelemeler daha önce yapılmıştır, [4], [5], [1].

Jozef Banas

$$x(t) = f(t) + \int_0^1 u(t, s, x(s)) ds, \quad [6],$$

J. Banas ve M. Paslawska-Poludniak

$$x(t) = f(t) + \int_0^\infty u(t, s, x(s)) ds, \quad [7],$$

J. Banas, J. Rocha, K. B. Sadarangani

$$x(t) = (Tx)(t) \int_0^t u(t, s, x(s)) ds, \quad [5], \quad (1.1.1)$$

J. Banas ve B. Rzepka

$$x(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t u(t, s, x(s)) ds, \quad [8],$$

J. Banas ve A. Martinon

$$x(t) = a(t) + x(t) \int_0^t u(t, s, x(s)) ds, \quad [9], \quad (1.1.2)$$

J. Banas ve K. Sadarangani

$$x(t) = a(t) + f(t, x(t)) \int_0^t u(t, s, x(s)) ds, \quad [10], \quad (1.1.3)$$

J. Banas, J. Caballero, J. Rocha ve K. Sadarangani

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t) \int_0^t u(t, s, x(s)) ds, \quad [11], \quad (1.1.4)$$

J. Banas, B. C. Dhage

$$x(t) = f(t, x(\alpha(t))) + \int_0^{\beta(t)} u(t, s, x(\gamma(s))) ds, \quad [12],$$

J. Banas ve L. Olszowy

$$x(t) = a(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty u(t, s, x(s)) ds, \quad [13],$$

J. Banas ve B. Rzepka

$$x(t) = p(t) + f(t, x(t)) \int_0^t u(t, s, x(s)) ds, \quad [14],$$

K. Maleknejad, K. Nouri, R. Mollapourasl

$$x(t) = f(t, x(\alpha(t))) \int_0^t u(t, s, x(s)) ds, \quad [15],$$

J. Caballero, D. O'Regan ve K. Sadarangani

$$x(t) = p(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty u(t, s, x(s)) ds, \quad [16],$$

J. Caballero, J. Rocha ve K. Sadarangani

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t) \int_0^t f(\phi(t, s)) \phi(x(s)) ds, \quad [17], \quad (1.1.5)$$

J. Caballero, B. Lopez ve K. Sadarangani

$$x(t) = a(t) + (Tx(t)) \int_0^{\beta(t)} u(t, s, x(s), x(\lambda s)) ds, \quad [18]$$

denklemlerini incelemiştir.

Bu tezde ise; 3. bölümde

$$x(t) = a(\alpha(t)) + (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau, \quad t \in I = [0, M]$$

ve 4. bölümde de

$$x(t) = a(\alpha(t)) + (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} f(\phi(t, s)) \phi(x(g(s))) ds, \quad t \in I = [0, 1]$$

eşitlikleriyle verilen lineer olmayan (nonhomojen kuadratik) Volterra tipi integral denklemlerinin çözülebilirliği incelendi. Dikkat edilirse; tezin 3. bölümünde ele alacağımız denklemde özel olarak:  $\alpha : I \rightarrow I$  fonksiyonu keyfi,  $a(t) = 0$ ,  $\beta(t) = t = \gamma(t)$  ve  $\eta(\tau) = \tau$  alındığında (1.1.1) denklemi,  $\alpha(t) = t = \beta(t) = \gamma(t)$ ,  $\eta(\tau) = \tau$  ve  $(Tx)(t) = x(t)$  alındığında (1.1.2) denklemi,  $\alpha(t) = t$ ,  $\beta(t) = t$ ,  $\gamma(t) = t$ ,  $\eta(\tau) = \tau$ ,  $(Tx)(t) = f(t, x(t))$  alındığında (1.1.3) denklemi,  $\alpha(t) = t$ ,  $\beta(t) = t$ ,  $\gamma(t) = t$  ve  $\eta(s) = s$  alındığında (1.1.4) denklemi elde edilir. Tezin 4. bölümünde ele alacağımız denklemde de özel olarak  $\alpha(t) = t$ ,  $\beta(t) = t$ ,  $\gamma(t) = t$  ve  $g(s) = s$  alındığında (1.1.5) denklemi elde edilir. **Böylece tezin 3. ve 4. bölümlerinde incelenmek üzere ele alınan denklemler, önceden incelenen bazı denklemlerden daha genel denklemlerdir.**

## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, bundan sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanımlar ile teoremler verildi.

### 2.1. Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1. (Lineer Uzay)** [19, syf. 69] Boş olmayan bir  $L$  cümlesi ve bir  $\mathbb{F}$  cismi verilmiş olsun. Eğer  $x, y \in L$ ,  $\lambda \in \mathbb{F}$  için  $+(x, y) = x + y$  ve  $\cdot(\lambda, x) = \lambda x$  ile tanımlanan  $+: L \times L \rightarrow L$  ve  $\cdot: \mathbb{F} \times L \rightarrow L$  fonksiyonları, her  $x, y, z \in L$  ve  $\lambda, \beta \in \mathbb{F}$  için aşağıdaki eşitlikleri sağlıyorsa,  $L$  cümlesine,  $\mathbb{F}$  cismi üzerinde bir **lineer uzay** (vektör uzayı) denir.

- (a)  $x + y = y + x$ ,
- (b)  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ,
- (c)  $\forall x \in L$  için  $x + \theta = \theta + x = x$  olacak şekilde bir  $\theta \in L$  vardır,
- (d)  $\forall x \in L$  için  $x + (-x) = (-x) + x = \theta$  olacak şekilde bir  $(-x) \in L$  vardır,
- (e)  $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$ ,
- (f)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ,
- (g)  $(\lambda\beta)x = \lambda(\beta x)$ ,
- (h)  $1x = x$ .

$F = \mathbb{R}$  olması halinde  $L$ 'ye reel,  $F = \mathbb{C}$  olması halinde ise  $L$ 'ye kompleks lineer uzay denir.

**Tanım 2.1.2. (Topolojik Yapı)** [20, syf. 23]  $X$ , boştan farklı bir küme ve  $\tau$  da  $P(X)$  in bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa,  $\tau$  ya  $X$  üzerinde bir **topoloji** (topolojik yapı) denir.

- (t<sub>1</sub>)  $X, \emptyset \in \tau$
- (t<sub>2</sub>)  $\tau$  dan alınan herhangi sayıda elemanın birleşimi  $\tau$  ya aittir. Yani,  $\forall (A_i)_{i \in I} \subset \tau$  (I, herhangi bir indis cümlesi) için  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$  dır.
- (t<sub>3</sub>)  $\tau$  dan alınan sonlu sayıda elemanın kesişimi  $\tau$  ya aittir. Yani,  $\forall (A_i)_{i \in J} \subset \tau$  (J, sonlu indis kümesi) için  $\bigcap_{i \in J} A_i \in \tau$  dır.

**Tanım 2.1.3. (Topolojik Uzay)** [20, syf. 24]  $\tau$  topolojisi ile donatılmış  $X$  kümesine veya  $(X, \tau)$  ikilisine **topolojik uzay** denir.

**Tanım 2.1.4. (Açık Küme)** [20, syf. 24]  $\tau$  nun her elemanına,  $X$  üzerinde  $\tau$  tarafından tanımlanan topolojiye göre bir **açık küme** denir.

**Tanım 2.1.5. (Kapalı Küme)** [20, syf. 24]  $X$  uzayına göre tümleyeni açık olan kümeye  $\tau$  tarafından tanımlanan topolojiye göre **kapalı küme** denir. Yani;  $F \subset X$  kapalı  $\Leftrightarrow F^c \in \tau$  dur.

**Tanım 2.1.6. (Kapanış)** [20, syf. 66]  $X$  topolojik uzay ve  $A \subset X$  olsun.  $A$  nın tüm kapalı üst kümelerinin arakesitine  $A$  nın **kapanışı** denir ve  $\bar{A}$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.7. (Komşuluk)** [21, syf. 45]  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subset X$  olsun.  $A$  kümesini kapsayan bir  $U$  açık kümesinin her  $N$  üst kümesine,  $A$  kümesinin komşuluğu denir. Eğer  $A = \{x\}$  ise, bu durumda  $x$  noktasını içeren  $U$  açık kümesine de  $x$  in açık komşuluğu denir.

**Tanım 2.1.8. (Süreklilik)** [20, syf. 81]  $(X, \tau)$  ve  $(X', \tau')$  iki topolojik uzay,  $f : X \rightarrow X'$  bir fonksiyon ve  $x_0 \in X$  olsun.  $X'$  uzayında  $f(x_0)$  ın her  $N'$  komşuluğu için  $f(N) \subset N'$  olacak şekilde,  $X$  uzayında  $x_0$  ın bir  $N$  komşuluğu varsa,  $f$  fonksiyonuna  $x_0$  noktasında  $\tau$  ve  $\tau'$  ye göre **süreklidir** denir.

**Tanım 2.1.9. (Normlu Uzay)** [19, syf. 103]  $X$ , bir lineer uzay olsun.

$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu,  $\forall x, y \in X$  ve  $\forall a \in \mathbb{R}$  için aşağıdaki şartları sağlıyorsa,  $\|\cdot\|$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde bir **norm** ve  $(X, \|\cdot\|)$  ikilisine de **normlu uzay** denir.

- (i)  $\|x\| \geq 0$ ,
- (ii)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ ,
- (iii)  $\|ax\| = |a|\|x\|$ ,
- (iv)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Tanım 2.1.10. (Yakınsak Dizi)** [22, syf. 75]  $(x_n)$ ,  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayında bir dizi ve  $x_0 \in X$  olsun.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$  ise  $(x_n)$  dizisi  $x_0$  noktasına **yakınsıyor** denir ve  $x_n \rightarrow x_0$  veya  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.1.11.** [22, syf. 75] Bir  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayı,  $x_0 \in X$  noktası ve pozitif  $r$  sayısı verilsin. O zaman

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

kümesine  $x_0$  merkezli  $r$  yarıçaplı **açık yuvar**,

$$B[x_0, r] = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

kümesine  $x_0$  merkezli  $r$  yarıçaplı **kapalı yuvar** ve

$$S(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$$

kümesine ise  $x_0$  merkezli  $r$  yarıçaplı **yuvar yüzeyi** denir.

**Tanım 2.1.12. (Cauchy Dizisi)** [22, syf. 77]  $(x_n)$ ,  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayında bir dizi olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için  $m, n > n_\varepsilon$  olduğunda,  $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$  olacak şekilde  $\varepsilon$ 'a bağlı bir  $n_\varepsilon$  doğal sayısı bulunabiliyorsa  $(x_n)$  dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.

**Tanım 2.1.13. (Banach Uzayı)** [22, syf. 82]  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayındaki her Cauchy dizisi  $X$  içindeki bir noktaya yakınsıyorsa, bu  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayına tam normlu uzay veya **Banach Uzayı** denir.

$[a, b]$  aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların  $C[a, b]$  lineer uzayı,  $\|x\| = \max \{|x(t)| : t \in [a, b]\}$  normuna göre bir Banach uzayıdır.

$(x_n) \subset C[a, b]$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  olması halinde, her  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $m > N$  olduğunda,

$$\max_{t \in [a, b]} |x_m(t) - x(t)| < \varepsilon$$

olacak şekilde  $\varepsilon$ 'a bağlı bir  $N$  doğal sayısı bulunacağından, her  $t \in [a, b]$  için

$$|x_m(t) - x(t)| < \varepsilon$$

olur. Bu ise,  $C[a, b]$  uzayındaki yakınsak bir dizinin aynı zamanda düzgün yakınsak olduğunu gösterir, [23, syf. 36-37].

**Tanım 2.1.14. ( Operatör )** [23, syf. 82] Vektör uzayları arasındaki dönüşümlere, özellikle normlu uzaylar arasındaki dönüşümlere operatör denir.

**Tanım 2.1.15. (Lineer Operatör)** [23, syf. 82] Aşağıdaki şartları sağlayan  $T$  dönüşümüne bir lineer operatör denir.

(i)  $T$  nin tanım bölgesi  $\mathfrak{D}(T)$  ve görüntü bölgesi  $\mathfrak{R}(T)$  bir vektör uzayıdır.

(ii) Her  $x, y \in \mathfrak{D}(T)$  ve  $\alpha$  skaları için,

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

dir.

**Tanım 2.1.16. (Bir Operatörün Normu)** [23, syf. 92]

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathfrak{D}(T), x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

eşitliği ile tanımlanan  $\|T\|$  ye  $T$  operatörünün normu denir.

**Tanım 2.1.17. (Bir operatörün Bir Noktadaki Sürekliliği)** [22, syf. 125]  $X$  ve  $Y$  normlu uzayları ve  $T : X \rightarrow Y$  operatörü verilsin. Aşağıdakilerden biri sağlandığında,  $T$  operatörü (dönüşümü)  $x_0 \in \mathfrak{D}(T)$  noktasında süreklidir denir.

(a)  $\forall \epsilon > 0$  için  $\exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0 \ni x \in \mathfrak{D}(T)$  ve  $\|x - x_0\| < \delta$  iken;

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon,$$

(b)  $x_0$  noktasına yakınsayan her  $(x_n) \subset \mathfrak{D}(T)$  dizisi için  $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(x_0)$ 'dir.

**Tanım 2.1.18. (Süreklili Operatör)** [22, syf. 126]  $X$  ve  $Y$  normlu uzaylar olmak üzere  $T : X \rightarrow Y$  operatörü  $\mathfrak{D}(T)$ 'nin her noktasında sürekli ise  $T$  operatörü  $\mathfrak{D}(T)$  üzerinde süreklidir denir.

**Tanım 2.1.19. (Düzgün Sürekli Operatör)** [24, syf. 336]  $X$  ve  $Y$  normlu uzayları ve  $T : X \rightarrow Y$  operatörü verilsin.  $\forall \epsilon > 0$  için  $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \ni \|x - y\| < \delta$  olacak şekilde her  $x, y \in \mathfrak{D}(T)$  için  $\|T(x) - T(y)\| < \epsilon$  oluyorsa  $T$ 'ye  $\mathfrak{D}(T)$  üzerinde düzgün süreklidir denir.



**Tanım 2.1.20. (Eşsüreklilik)** [25, syf. 276]  $X \subset C[a, b]$  olsun. Bu durumda,  $\forall \varepsilon > 0$  sayısına karşılık  $|t_1 - t_2| < \delta$  eşitsizliğini sağlayan her  $t_1, t_2 \in [a, b]$  ve her  $x \in X$  için  $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı varsa  $X$  kümesine eşsüreklidir denir.

**Tanım 2.1.21. (Konveks Küme)** [22, syf. 68] Bir  $X$  vektör uzayının bir  $Y$  alt kümesi verilsin. Eğer  $y_1, y_2 \in Y$  olduğunda

$$M = \{y \in X : y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa,  $Y$  alt kümesi dışbükeydir (konvektir) denir.

**Tanım 2.1.22. (Sınırlı Operatör)** [22, syf. 127]  $X$  ve  $Y$  iki normlu uzay ve  $T : X \rightarrow Y$  operatörü verilsin.  $\forall x \in D(T)$  için  $\|Tx\| \leq c\|x\|$  olacak şekilde sabit bir  $c > 0$  sayısı varsa  $T$  operatörü  $D(T)$  üzerinde sınırlıdır denir.

**Teorem 2.1.1.** [22, Teorem 3.2.3]  $X$  ve  $Y$  iki normlu uzay olsun.  $T : X \rightarrow Y$  lineer operatörünün  $D(T)$  üzerinde sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul  $T$  operatörünün  $D(T)$  üzerinde sürekli olmasıdır.

**Tanım 2.1.23.** [22, syf. 223]  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayında açık kümelerin bir ailesi  $\mathbb{D} = (D_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  olsun. Eğer bir  $E \subset X$  kümesi için  $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$  oluyorsa  $\mathbb{D}$  ailesine  $E$  kümesinin bir **açık örtüsü** denir. Eğer  $\Lambda_0 \subset \Lambda$  sonlu ve  $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} D_\lambda$  ise  $\mathbb{D}_0 = (D_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_0}$  ailesine  $E$  kümesinin **sonlu alt örtüsü** adı verilir.  $E$  kümesini örten  $\mathbb{D}$  ailesinin her kümesinin çapı  $\varepsilon > 0$ 'dan büyük değilse  $\mathbb{D}$  örtüsüne  $E$  kümesinin  **$\varepsilon$ -örtüsü** denir.

**Teorem 2.1.2.** [22, syf. 89]  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzay ve  $A \subset X$  olsun.  $x \in \bar{A}$  olması için gerek ve yeter şart  $A$  içinde  $x$ 'e yakınsayan bir  $(x_n)$  dizisinin olmasıdır.

**Teorem 2.1.3. (Weierstrass Yaklaşım Teoremi)** [23, syf. 280]  $W$ , reel katsayılı bütün polinomların cümlesi olsun. Bu durumda,  $\bar{X} = C[a, b]$  olacak şekilde sayılabilir bir  $X \subset W$  cümlesi vardır.

Buna göre  $x \in C[a, b]$  iken, Teorem 2.1.2'den,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  yakınsaması düzgün olacak şekilde polinomların bir  $(x_n)$  dizisi vardır.

**Tanım 2.1.24. (Kompakt Küme)** [22, syf. 224]  $(X, \|\cdot\|)$  uzayının bir altkümesi  $E$  olsun. Eğer  $E$  kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa  $E$  kümesine  $X'$  te **kompakt küme** denir. Eğer  $E$  kümesinin  $\bar{E}$  kapanışı  $X'$ te kompakt bir küme ise  $E'$ ye  $X'$ te bir **ön kompakt küme** veya **relatif kompakt küme** denir.  $X$  kompakt (ön kompakt) bir küme ise  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayına **kompakt** (ön kompakt) **normlu uzayı** adı verilir.

**Tanım 2.1.25. (Dizisel Kompakt Küme)** [22, syf. 224]  $(X, \|\cdot\|)$  uzayının bir alt kümesi  $E$  olsun.  $E$  içindeki her dizinin, limiti  $E'$ de olan yakınsak bir alt dizisi varsa  $E$  kümesine,  $X'$ te **dizisel kompakt küme** denir. Eğer  $E'$ nin  $\bar{E}$  kapanışı  $X'$ te dizisel kompakt küme ise  $E'$ ye,  $X'$ te **dizisel ön-kompakt** küme adı verilir.

**Lemma 2.1.1.** [22, syf. 225]  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayı ve  $E \subset X$  verilsin.  $E$  kümesi  $X'$ te kompakt ise, bu küme  $X'$ te dizisel kompakt bir kümedir.

## 2.2. Kompaktsızlık Ölçüleri

$(E, \|\cdot\|)$ , bir reel Banach uzayı olsun.  $X$  kümesi  $E$  kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun.  $\bar{X}$  ile  $X$  kümesinin kapanışı,  $\text{Conv}X$  ile,  $X$  kümesinin konveks kapanışı gösterilir.  $X, Y$  kümeleri  $E$  kümesinin alt kümeleri ise  $X$  ve  $Y$  üzerindeki cebirsel işlemler  $X + Y$  ve  $\lambda X (\lambda \in \mathbb{R})$  ile gösterilir.

$E$  kümesinin boş olmayan ve sınırlı bütün alt kümelerinin ailesi  $\mathfrak{M}_E$  ile ve  $\mathfrak{M}_E$ 'nin relatif kompakt alt kümelerinden oluşan aile de  $\mathfrak{N}_E$  ile gösterilir, [26].

**Tanım 2.2.1. (Daralma Dönüşümü(Operatörü))** [5]  $E$  Banach uzayının, boş kümeden farklı bir alt kümesi  $M$  olsun. Ayrıca  $T : M \rightarrow E$  operatörü de sınırlı kümeleri sınırlı kümelere dönüştüren sürekli bir operatör olsun. Eğer  $T$  operatörü herhangi bir  $k \geq 0$  sabiti,  $E$  de bir  $\mu$  kompaktsızlık ölçüsü ve  $M$  nin herhangi bir sınırlı  $X$  alt kümesi için  $\mu(TX) \leq k\mu(X)$  eşitsizliğini sağlarsa  $T$  operatörü Darbo şartını sağlar denir. Eğer  $T$  operatörü, Darbo şartını  $k < 1$  için sağlarsa  $T$  operatörüne,  $\mu$  ye göre bir daralma operatörü denir.

Eğer  $\mu, \mathfrak{M}_E$  üzerinde reel değerli bir dönüşüm ise  $\ker\mu$  ile  $\mathfrak{M}_E$  nin

$$\ker\mu = \{X \in \mathfrak{M}_E : \mu(X) = 0\}$$

şeklinde tanımlanan alt kümelerinin ailesi gösterilir. Bu küme;  $\mu$  dönüşümünün çekirdeği olarak adlandırılır.

**Tanım 2.2.2.** [23, syf. 412]  $B$  kümesi bir  $X$  metrik uzayının alt kümesi olsun ve  $\varepsilon > 0$  verilsin. Her  $z \in B$  için  $z$  noktasına uzaklığı  $\varepsilon$  dan küçük olan  $M_\varepsilon$  kümesine ait olan bir nokta varsa  $M_\varepsilon \subset X$  kümesine,  $B$  kümesi için bir  $\varepsilon$ -ağ denir.

Aşağıda kompaktsızlık ölçüsü ile ilgili tanımlar verilecektir, [26].

**Tanım 2.2.3.** [26]. Bir  $\mu : \mathfrak{M}_E \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  fonksiyonu, aşağıdaki şartları sağlarsa, bu fonksiyona  $E$ 'de bir **kompaktsızlık ölçüsü** denir.

- (1)  $\ker\mu = \{X \in \mathfrak{M}_E : \mu(X) = 0\} \neq \emptyset$  ve  $\ker\mu \subset \mathfrak{N}_E$ 'dir,
- (2)  $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$ ,
- (3)  $\mu(\bar{X}) = \mu(\text{Conv } X) = \mu(X)$ ,
- (4)  $\mu(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1 - \lambda)\mu(Y)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ ,
- (5) Eğer  $(X_n), (n = 1, 2, \dots), \mathfrak{M}_E$  deki kapalı kümelerin,  $X_{n+1} \subset X_n$  ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(X_n) = 0$  şartlarını sağlayan bir dizisi ise o zaman  $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$  kümesi boş değildir.

$\mu$  ölçüsü aşağıdaki şartları da sağladığında  $\mu$  **regüler bir kompaktsızlık ölçüsü** olarak adlandırılır.

- (6)  $\mu(X \cup Y) = \max \{\mu(X), \mu(Y)\}$ ,
- (7)  $\mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$ ,
- (8)  $\lambda \in \mathbb{R}$  için  $\mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X)$ ,
- (9)  $\ker\mu = \mathfrak{N}_E$ .

Kuratowski tarafından tanımlanan

$$\alpha(X) = \inf\{\varepsilon > 0 : X, \text{ çapı } \varepsilon \text{ dan küçük olan sonlu sayıda küme ile örtülebilir.}\}$$

kompaktsızlık ölçüsüne **Kuratowski kompaktsızlık ölçüsü** denir. Bu ölçünün regüler kompaktsızlık ölçüsü olduğu gösterilebilir, [27]. Bir diğer önemli ölçü olan **Hausdorff (veya yuvar) kompaktsızlık ölçüsü**,

$$\chi(X) = \inf\{\varepsilon > 0 : X, E \text{ de sonlu } \varepsilon\text{-ağa sahiptir}\}$$

ile tanımlanır.  $\chi$  ölçüsü birçok kullanışlı özeliğe sahiptir. Ayrıca  $\alpha$  ve  $\chi$  ölçüleri  $\forall X \in \mathfrak{M}_E$  için

$$\chi(X) \leq \alpha(X) \leq 2\chi(X)$$

eşitsizliğini sağlar. Standart maksimum normu ile donatılmış olan  $C = C[a, b]$  ile;  $[a, b]$  aralığındaki reel değerli bütün sürekli fonksiyonların uzayı belirtilir. Verilen bir  $x \in C[a, b]$  ve  $\varepsilon \geq 0$  için  $w(x, \varepsilon)$  ile gösterilen  $x$  **in süreklilik modülü**,

$$w(x, \varepsilon) = \sup\{|x(s) - x(t)| : s, t \in [a, b], |s - t| \leq \varepsilon\}$$

ile ifade edilir. Ayrıca  $X \in \mathfrak{M}_{C[a, b]}$  için,

$$w(X, \varepsilon) = \sup\{w(x, \varepsilon) : x \in X\}$$

ve

$$w_0(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w(X, \varepsilon)$$

olmak üzere

$$\chi(X) = \frac{1}{2}w_0(X)$$

eşitliğini sağlar.

Bu kısımda  $I = [a, b]$  sınırlı aralığı üzerinde tanımlanan ve supremum normu ile donatılmış olan bütün reel değerli ve sınırlı fonksiyonların  $B(I)$  uzayındaki bazı kümeleri inceleyeceğiz. Ayrıca  $C(I) = C[a, b]$  fonksiyon uzayı üzerinde çalışacağız.  $x \in B(I)$  fonksiyonu verilsin.  $\varepsilon > 0$  için  $d(x, \varepsilon)$  ve  $i(x, \varepsilon)$ ,

$$d(x, \varepsilon) = \sup\{|x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] : s, t \in I, t \leq s, s - t \leq \varepsilon\}$$

ve

$$i(x, \varepsilon) = \sup\{|x(s) - x(t)| - [x(t) - x(s)] : t, s \in I, t \leq s, s - t \leq \varepsilon\}$$

olarak tanımlanır.  $\varepsilon = b - a$  ise  $d(x) = d(x, b - a)$  ve

$i(x) = i(x, b - a)$  şeklinde yazılır.  $x$  fonksiyonu  $I$  aralığında azalmayan ise  $\forall \varepsilon > 0$  için  $d(x, \varepsilon) = 0$  dır. Benzer şekilde  $x$  fonksiyonu  $I$  aralığında artmayan ise  $\forall \varepsilon > 0$  için  $i(x, \varepsilon) = 0$  dır, [26].

**Teorem 2.2.1.**  $x \in B(I)$  ve  $\varepsilon > 0$  keyfi bir sabit olsun.  $d(x, \varepsilon) = 0$  ise  $x$ ,  $I$  üzerinde azalmayandır. Benzer şekilde  $i(x, \varepsilon) = 0$  ise  $x$ ,  $I$  üzerinde artmayandır, [26].

**İspat.** Kabul edelim ki  $\varepsilon > 0$  için  $d(x, \varepsilon) = 0$  olsun.  $x$  in  $I$  üzerinde azalmayan olduğunu göstereceğiz. Bunun aksini kabul edelim. Yani  $x$ ,  $I$  üzerinde azalan olsun. Bu durumda öyle  $t, s \in I$  vardır öyle ki  $t < s$  ve  $x(t) > x(s)$  olur.  $s - t \leq \varepsilon$  ise

$$|x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] = x(t) - x(s) + x(t) - x(s) = 2(x(t) - x(s)) > 0$$

olur. Böylece  $d(x, \varepsilon) > 0$  olur.

$s - t > \varepsilon$  olsun.  $[t, s]$  aralığını,

$$t = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = s$$

noktaları yardımıyla  $n$  eşit alt aralığa bölelim. Burada  $n, \frac{(s-t)}{n} \leq \varepsilon$  olacak şekilde seçilmiştir.

$$\{x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n)\}$$

dizisini gözönüne alalım.

$$x(t) = x(t_0) > x(t_n) = x(s)$$

olduğu açıktır.  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  olacak şekilde mevcut olan bir  $i$  indisi için  $x(t_i) > x(t_{i+1})$  olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten bu öne sürdüğümüz eşitsizlik doğru olmasaydı o zaman  $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  için  $x(t_i) \leq x(t_{i+1})$  eşitsizliği geçerli olurdu. Bu durumda  $x(t_0) \leq x(t_n)$  olurdu. Bu ise kabülümüzle çelişir. Bu nedenle  $i, \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  kümesinden alınan bir indis olmak üzere,  $x(t_i) > x(t_{i+1})$  olur.  $t_{i+1} - t_i \leq \varepsilon$  olduğundan,

$$d(x, \varepsilon) \geq |x(t_{i+1}) - x(t_i)| - [x(t_{i+1}) - x(t_i)] = 2(x(t_i) - x(t_{i+1})) > 0$$

olur. Bu ise ilk kabulümüzle çelişir. Teoremin ikinci kısmı da aynı yolla ispatlanabilir.  $\square$

**Teorem 2.2.2.**  $x \in B(I)$  ve  $\varepsilon > 0$  keyfi bir sabit olsun. O zaman  $x$ ,  $I$  aralığında azalmayandır ancak ve ancak  $d(x, \varepsilon) = 0$  dır, [26].

**Teorem 2.2.3.**  $x \in B(I)$  ve  $\varepsilon > 0$  keyfi bir sabit olsun. O zaman  $x$ ,  $I$  aralığında artmayandır ancak ve ancak  $i(x, \varepsilon) = 0$  dır, [26].

Burada,  $d(x, \varepsilon)$ ;  $x$ 'in azalma modülü ve  $i(x, \varepsilon)$   $x$ 'in artma modülü olarak adlandırılır.

$X \in \mathfrak{M}_{B(I)}$  ve  $\varepsilon > 0$  için  $d(X, \varepsilon)$  ve  $d_0(X)$ ,

$$d(X, \varepsilon) = \sup\{d(x, \varepsilon) : x \in X\}$$

ve

$$d_0(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(X, \varepsilon)$$

eşitlikleriyle tanımlanır. Benzer şekilde  $i(X, \varepsilon)$  ve  $i_0(X)$ ,

$$i(X, \varepsilon) = \sup\{i(x, \varepsilon) : x \in X\}$$

ve

$$i_0(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i(X, \varepsilon)$$

olarak tanımlanır.  $\varepsilon \rightarrow d(X, \varepsilon)$  ve  $\varepsilon \rightarrow i(X, \varepsilon)$  fonksiyonları azalmayandır. Bu nedenle  $d_0(X)$ ,  $i_0(X)$  iyi tanımlıdır, [26].

**Teorem 2.2.4.**  $\varepsilon > 0$  keyfi bir sabit olsun. O zaman  $d(X, \varepsilon) = 0$  ( $i(X, \varepsilon) = 0$ ) ancak ve ancak  $X$  teki bütün fonksiyonlar  $I$  aralığında azalmayandır (artmayandır), [26].

Şimdi  $B(I)$  uzayının kapalı bir alt uzayı olan  $C = C(I)$  sürekli fonksiyonlar uzayını ele alalım.  $X \in \mathfrak{M}_C$  ve  $\varepsilon > 0$  bir sabit olsun. Öyle  $t, s \in I$ ,  $t < s$  keyfi sabitleri vardır ki  $s - t \leq \varepsilon$  için,

$$|x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] \leq 2|x(s) - x(t)| \leq 2w(x, \varepsilon)$$

olur. Bu eşitsizlik,

$$d(x, \epsilon) \leq 2w(x, \epsilon)$$

olduğunu gösterir. Benzer şekilde,

$$i(x, \epsilon) \leq 2w(x, \epsilon)$$

olur. Burada  $w(x, \epsilon)$  süreklilik modülüdür. Yukarıdaki eşitsizlikler yardımıyla

$$d_0(X) \leq 2w_0(X)$$

ve

$$i_0(X) \leq 2w_0(X)$$

eşitsizliklerini elde ederiz, [26].

**Teorem 2.2.5.**  $C(I)$  uzayının,  $I$  aralığı üzerinde tanımlı bütün eşsüreklilik fonksiyonlarından meydana gelen sınırlı bir alt kümesi  $X$  ise o zaman  $d_0(X) = i_0(X) = 0$  dır, [26].

**Örnek 2.2.1.**  $X \subset C[0, 1]$  kümesi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$X = \{x_n : x_n(t) = t^n, n = 1, 2, \dots\}.$$

$\forall \epsilon > 0$  ve  $n = 1, 2, \dots$  için  $d(x_n, \epsilon) = 0$  dır. Dolayısıyla  $d(X, \epsilon) = 0$  dır. Sonuç olarak  $d_0(X) = 0$  dır. Diğer taraftan  $w_0(X) = 1$  olduğu kolaylıkla görülebilir. Yukarıdaki örnekte  $d_0(X)$  ve  $i_0(X)$  fonksiyonlarının  $C(I)$  uzayında bir kompaktsızlık ölçüsü olmadıkları görülür. Çünkü Tanım 2.2.3 in 1. aksiyomunu sağlamazlar, [26].

**Örnek 2.2.2.**  $Y \subset C[-1, 1]$  olmak üzere,

$$Y = \{y_n : y_n(t) = t^{2n}, n = 1, 2, \dots\}$$

kümesini gözönüne alalım.  $w_0(Y) = 1$ ,  $d_0(Y) = 2$  ve  $i_0(Y) = 2$  olduğu görülebilir.

$d_0(X)$  ve  $i_0(X)$  yardımıyla  $C(I)$  uzayında bir kompaktsızlık ölçüsü tanımlanabilir. Şimdi aşağıdaki teoremi ispatsız olarak verelim.

**Teorem 2.2.6.**  $X \in \mathfrak{M}_{C(I)}$  keyfi bir küme olmak üzere

$$\frac{1}{4}(d_0(X) + i_0(X)) \leq w_0(X) \leq \frac{1}{2}(d_0(X) + i_0(X))$$

eşitsizliği geçerlidir, [26].

**Teorem 2.2.7.**  $\mu : \mathfrak{M}_{C(I)} \rightarrow \mathbb{R}_+$  olmak üzere

$$\mu(X) = d_0(X) + i_0(X)$$

şeklinde tanımlanan  $\mu$  fonksiyonu  $C(I)$  uzayında bir regüler kompaktsızlık ölçüsüdür.

Bu ölçü  $\chi$  Hausdorff ölçüsüne denktir. Yani keyfi bir  $X \in \mathfrak{M}_{C(I)}$  kümesi için

$$2w_0(X) \leq \mu(X) \leq 4w_0(X)$$

ya da buna denk olarak

$$4\chi(X) \leq \mu(X) \leq 8\chi(X)$$

tir. Ayrıca

$$\mu_d(X) = w_0(X) + d_0(X)$$

ve

$$\mu_i(X) = w_0(X) + i_0(X)$$

eşitlikleriyle tanımlanan  $\mu_d$  ve  $\mu_i$  fonksiyonları  $C(I)$  uzayında birer kompaktsızlık ölçüsüdürler. Diğer taraftan; her  $X \in \mathfrak{M}_{C(I)}$  için

$$w_0(X) \leq \mu_d(X) \leq 3w_0(X)$$

ve

$$w_0(X) \leq \mu_i(X) \leq 3w_0(X)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada  $\mu_d$  ve  $\mu_i$  fonksiyonları hemen hemen regüler kompaktsızlık ölçüleridir ve  $\chi$  Hausdorff ölçüsüne denktirler. Gerçekten de yukarıda verilen fonksiyonlar regüler kompaktsızlık ölçüsünün sekizinci şartı dışındaki diğer şartları sağlarlar, [26].



### 3. KUADRATİK VOTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ MONOTON ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde,

$$x(t) = a(\alpha(t)) + (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau, \quad t \in I = [0, M]$$

lineer olmayan kuadratik Volterra integral denklemlerinin çözümlerinin varlığına dair temel kavram ve teoremler verilerek, bazı uygulamalara değinilecektir.

#### 3.1. Gösterimler, Tanımlar ve Yardımcı Sonuçlar

Bu bölümde, daha sonra kullanacağımız bazı sonuçları vereceğiz. Kabul edelim ki  $(E, \|\cdot\|)$ , sonsuz boyutlu bir Banach uzayı ve bu uzayın sıfır elemanı  $\theta$  olsun.  $x$  merkezli  $r$  yarıçaplı kapalı yuvar  $B[x, r]$  ile ve  $B[\theta, r]$  yuvarı da kısaca  $B_r$  sembolü ile gösterilir. Eğer  $X$  kümesi  $E$ 'nin bir alt kümesi ise o zaman  $\overline{X}$  ve  $\text{Conv}X$  sembolleriyle, sırasıyla,  $X$ 'in kapanışı ve konveks kapanışı gösterilir. Kümeler üzerindeki cebirsel işlemler  $\lambda X$  ve  $X + Y$  ile,  $E$  kümesinin boş olmayan ve sınırlı bütün alt kümelerinin ailesi  $\mathfrak{M}_E$  ile ve ön kompakt alt kümelerinden oluşan aile de  $\mathfrak{N}_E$  ile gösterilir, [9].

$\mu$ , Tanım 2.2.3 deki gibi tanımlanan,  $E$  de bir kompaksızlık ölçüsü ve  $\ker\mu$  ailesi de, " $\mu$  kompaksızlık ölçüsünün çekirdeği" olsun. Şimdi, aşağıdaki sabit nokta teoremini verelim:

**Teorem 3.1.1.**  *$Q, E$  Banach uzayının boş olmayan, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi,  $F : Q \rightarrow Q$  sürekli bir dönüşüm ve  $\mu$  de  $E$  de bir kompaksızlık ölçüsü olsun.  $X, Q$ 'nun boş olmayan herhangi bir alt kümesi, ve  $k \in [0, 1)$  bir sabit olmak üzere,  $\mu(FX) \leq k\mu(X)$  olsun. O zaman  $F$ 'nin  $Q$  kümesinde sabit bıraktığı en az bir nokta vardır, [9].*

**Uyarı 3.1.1.** *Yukarıdaki hipotezler altında,  $F$  fonksiyonunun  $Q$  kümesinde sabit bıraktığı noktaların kümesi,  $\ker\mu$  ailesinin bir elemanıdır, [9].*

Çalışmalarımızı,  $[0, T]$  üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların  $C[0, T]$  Banach uzayında yapacağız. Kolaylık olması açısından  $I = [0, T]$  ve

$C(I) = C[0, T]$  yazacağız.  $C(I)$  uzayı üzerindeki norm,  $\|x\| = \max \{|x(t)| : t \in I\}$  normudur, [9].

$X, C(I)$  nın boş olmayan, sabit ve sınırlı bir alt kümesi olsun.  $x \in X$  ve  $\epsilon \geq 0$  için  $w(x, \epsilon)$  ile,  $x$ 'in

$$w(x, \epsilon) = \sup\{|x(t) - x(s)| : t, s \in I, |t - s| \leq \epsilon\}$$

eşitliğiyle tanımlı **süreklilik modülünü** göstereceğiz. Bunlara ilaveten;

$$w(X, \epsilon) = \sup\{w(x, \epsilon) : x \in X\}$$

ve

$$w_0(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} w(X, \epsilon)$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca,

$$i(x) = \sup\{|x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] : t, s \in I, t \leq s\}$$

$$i(X) = \sup\{i(x) : x \in X\}$$

olarak tanımlanır, [11]. Buna göre, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 3.1.2.**

$$i(X) = 0 \Leftrightarrow X \text{ teki fonksiyonlar } I \text{ üzerinde azalmayandır, [11].}$$

**İspat.**  $\Rightarrow$  :  $i(X) = 0$  olsun. Buna göre  $\forall x \in X$  için  $i(x) = 0$  dır.

$$i(x) = 0 \Leftrightarrow t, s \in I \text{ ve } t \leq s \text{ olan bütün } t \text{ ve } s \text{ ler için}$$

$$|x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] = 0 \Leftrightarrow t \leq s \text{ olan her } t \text{ ve } s \text{ için } x(s) \geq x(t)$$

olduğundan  $x, I$  üzerinde azalmayandır.

$\Leftarrow$  :  $x, I$  üzerinde azalmayan olsun. Yani  $t \leq s$  olan her  $t, s \in I$  için  $x(t) \leq x(s)$  olsun. O zaman  $\forall t, s \in I$  ve  $t \leq s$  için

$$[x(s) - x(t)] \geq 0 \Leftrightarrow |x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] = 0$$

olup buradan,

$$i(x) = \sup\{|x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] : t, s \in I \text{ ve } t \leq s\} = 0$$

olacağından,

$$i(X) = \sup\{i(x) : x \in X\} = 0$$

eşitliğine ulaşırız. □

$\mathfrak{M}_{C(I)}$  ailesi üzerinde,  $\mu(X) = w_0(X) + i(X)$  olarak tanımlanan  $\mu$  fonksiyonu bir kompaktsızlık ölçüsüdür. Bu ölçünün çekirdeği  $\ker \mu \neq \emptyset$  olup, elemanları sınırlı  $X$  kümeleridir.  $X$ 'teki fonksiyonlar  $I$  aralığında eşsüreklidir ve azalmayandır, [11].

### 3.2. Temel Sonuç

Bu kısımda,

$$x(t) = a(\alpha(t)) + (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau, \quad t \in I = [0, M] \quad (3.2.1)$$

olarak verilen denklem üzerinde çalışacağız.

(i)  $\alpha, \beta, \gamma, \eta: I \rightarrow I$  sürekli ve  $\alpha, \beta, \gamma$  azalmayan fonksiyonlar olsun.

(ii)  $a \in C(I)$  ve  $a, I$  aralığında azalmayan ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

(iii)  $v: I \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon ve  $v: I \times I \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  dır. Keyfi bir  $\tau \in I$  sabiti ve  $x \in \mathbb{R}_+$  için  $t \rightarrow v(t, \tau, x)$  fonksiyonu  $I$  aralığında azalmayandır.

(iv) Bütün  $t, \tau \in I$  ve  $x \in \mathbb{R}$  için  $|v(t, \tau, x)| \leq f(|x|)$  eşitsizliğini sağlayan  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  olacak şekilde azalmayan bir  $f$  fonksiyonu vardır.

(v)  $T: C(I) \rightarrow C(I)$  operatörü süreklidir. Ayrıca  $T$  operatörü pozitif bir operatördür. Yani  $x \geq 0$  ise  $Tx \geq 0$  dır.

(vi) Her  $x \in C(I)$  ve her  $t \in I$  için  $|(Tx)(t)| \leq c + d\|x\|^p$  eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan  $c, d$  ve  $p > 0$  sabitleri vardır.

(vii)  $a(\|\alpha\|) + (c + dr^p)Mf(r) \leq r$  eşitsizliğini sağlayan bir  $r_0$  pozitif çözümü vardır.

(viii)  $T$  operatörü  $B_{r_0}^+$  da  $\mu$  kompaktsızlık ölçüsü ve  $\theta$  sabitiyle birlikte  $\mu(TX) \leq \theta\mu(X)$  şartını sağlar, öyle ki  $Mf(r_0)\theta < 1$  dir.

**Teorem 3.2.1.** *Yukarıdaki (i)-(viii) hipotezleri altında (3.2.1) denkleminin  $C(I)$  da en az bir azalmayan  $x = x(t)$  çözümü vardır.*

**İspat.**  $C(I)$  üzerinde  $V$  operatörünü,

$$(Vx)(t) = a(\alpha(t)) + (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau$$

olarak tanımlayalım. (i), (ii), (iii) ve (v) hipotezlerinden dolayı,  $x \in C(I)$  için  $Vx$  de  $I$  aralığı üzerinde süreklidir. Yani  $V$  dönüşümü  $C(I)$  dan  $C(I)$  ya tanımlı bir dönüşümdür. Ayrıca; (iv) ve (vi) hipotezlerini de aklımızda tutarak,

$$\begin{aligned} |(Vx)(t)| &\leq |a(\alpha(t))| + |(Tx)(\beta(t))| \left| \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right| \\ &\leq a(\|\alpha\|) + (c + d\|x\|^p) \int_0^{\gamma(t)} f(|x(\eta(\tau))|) d\tau \\ &\leq a(\|\alpha\|) + (c + d\|x\|^p) \int_0^{\gamma(t)} f(\|x\|) d\tau \\ &\leq a(\|\alpha\|) + (c + d\|x\|^p) Mf(\|x\|) \end{aligned}$$

olur. Şu halde,

$$\|Vx\| \leq a(\|\alpha\|) + (c + d\|x\|^p) Mf(\|x\|)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (vii) şartını sağlayan bir  $r_0 \geq \|x\|$  için,  $\|Vx\| \leq r_0$  dir. Bu da  $V$  dönüşümünün  $B_{r_0}$  dan  $B_{r_0}$  'a giden  $V : B_{r_0} \rightarrow B_{r_0}$  şeklindeki bir dönüşüm olduğunu gösterir.  $B_{r_0}$  yuvarının  $B_{r_0}^+$  alt kümesini gözönüne alalım.

$$B_{r_0}^+ = \{x \in B_{r_0} : x(t) \geq 0, t \in I\}.$$

Bu küme boş küme değildir. Zira  $\forall t \in I$  için  $x(t) = r_0$  olarak tanımlanan  $x$  fonksiyonu  $B_{r_0}^+$  kümesinin elemanıdır.  $B_{r_0}$  sınırlı olduğundan  $B_{r_0}^+$  da sınırlıdır.  $B_{r_0}^+$  kapalı yuvarı konvektir. Çünkü  $x, y \in B_{r_0}^+$  olan her  $x, y$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$  olan her  $\lambda$  ve  $t \in I$  olacak şekilde her  $t$  için

$$\lambda x(t) + (1 - \lambda)y(t) \geq 0$$

olup,

$$\|x\lambda + y(1-\lambda)\| \leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| \leq \lambda r_0 + (1-\lambda)r_0 = r_0$$

olur. Ayrıca  $B_{r_0}^+$  yuvarı kapalıdır. Çünkü,  $x \in \overline{B_{r_0}^+}$  ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

olacak şekilde bir  $(x_n) \subset B_{r_0}^+ \subset B_{r_0}$  dizisi vardır. Her  $n \in \mathbb{N}$  ve her  $t \in I$  için  $x_n(t) \geq 0$  ve

$$\|x_n - x\| = \max_{t \in I} |x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$$

olur. Şu halde; her  $t \in I$  için  $x(t) \geq 0$  olur. Böylece  $x \in B_{r_0}^+$  dır. Diğer taraftan (i), (ii), (iii) ve (v) kabullerinden dolayı  $V$  dönüşümü  $B_{r_0}^+$  dan  $B_{r_0}^+$  ya bir dönüşümdür.  $\varepsilon > 0$  bir sabit,  $x, y \in B_{r_0}^+$  keyfi elemanlar ve  $\|x - y\| \leq \varepsilon$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} & |(Vx)(t) - (Vy)(t)| \\ &= \left| (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau - (Ty)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, y(\eta(\tau))) d\tau \right| \\ &\leq \left| (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau - (Ty)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right| \\ &+ \left| (Ty)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau - (Ty)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, y(\eta(\tau))) d\tau \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |(Tx)(\beta(t)) - (Ty)(\beta(t))| \int_0^{\gamma(t)} |v(t, \tau, x(\eta(\tau)))| d\tau \\
&+ |(Ty)(\beta(t))| \int_0^{\gamma(t)} |v(t, \tau, x(\eta(\tau))) - v(t, \tau, y(\eta(\tau)))| d\tau \\
&\leq |(Tx)(\beta(t)) - (Ty)(\beta(t))| \int_0^{\gamma(t)} f(|x(\eta(\tau))|) d\tau \\
&+ |(Ty)(\beta(t))| \int_0^{\gamma(t)} |v(t, \tau, x(\eta(\tau))) - v(t, \tau, y(\eta(\tau)))| d\tau \\
&\leq |(Tx)(\beta(t)) - (Ty)(\beta(t))| \int_0^{\gamma(t)} f(\|x\|) d\tau \\
&+ |(Ty)(\beta(t))| \int_0^{\gamma(t)} |v(t, \tau, x(\eta(\tau))) - v(t, \tau, y(\eta(\tau)))| d\tau \\
&\leq |(Tx)(\beta(t)) - (Ty)(\beta(t))| \int_0^{\gamma(t)} f(r_0) d\tau \\
&+ |(Ty)(\beta(t))| \int_0^{\gamma(t)} |v(t, \tau, x(\eta(\tau))) - v(t, \tau, y(\eta(\tau)))| d\tau \\
&\leq |(Tx - Ty)(\beta(t))| \int_0^{\gamma(t)} f(r_0) d\tau \\
&+ (c + d\|y\|^p) \int_0^{\gamma(t)} |v(t, \tau, x(\eta(\tau))) - v(t, \tau, y(\eta(\tau)))| d\tau \\
&\leq \|Tx - Ty\| \int_0^{\gamma(t)} f(r_0) d\tau + (c + dr_0^p) \int_0^{\gamma(t)} \beta_{r_0}(\varepsilon) d\tau \\
&\leq \|Tx - Ty\| Mf(r_0) + (c + dr_0^p) \beta_{r_0}(\varepsilon) M
\end{aligned}$$

olup burada,

$$\beta_{r_0}(\varepsilon) = \sup\{|v(t, \tau, x) - v(t, \tau, y)| : t, \tau \in I, x, y \in [0, r_0], |x - y| \leq \varepsilon\}$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\|Vx - Vy\| \leq \|Tx - Ty\| Mf(r_0) + (c + dr_0^p) M \beta_{r_0}(\varepsilon)$$

eşitsizliğini elde ederiz.  $v$  fonksiyonunun  $I \times I \times [0, r_0]$  kümesi üzerinde düzgün sürekliliğinden;  $\varepsilon \rightarrow 0$  iken  $\beta_{r_0}(\varepsilon) \rightarrow 0$  olacağından ve  $T$  operatörünün sürekliliğinden dolayı  $\varepsilon \rightarrow 0$  iken,  $\|Tx - Ty\| \rightarrow 0$  olacağından  $V$  dönüşümü,  $B_{r_0}^+$  kümesi üzerinde süreklidir.

Boş olmayan  $X \subset Br_0^+$  kümesini alalım.  $\varepsilon > 0$  keyfi bir sabit,  $x \in X$  ve  $t, s \in$

$[0, M]$  öyle ki  $|t - s| \leq \varepsilon$  olsun. Genelliği bozmaksızın  $t \leq s$  alalım. O zaman

$$\begin{aligned}
& |(Vx)(s) - (Vx)(t)| \\
& \leq |a(\alpha(s)) - a(\alpha(t))| \\
& + \left| (Tx)(\beta(s)) \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau - (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right| \\
& \leq w(a, w(\alpha, \varepsilon)) + \left| [(Tx)(\beta(s)) - (Tx)(\beta(t))] \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right| \\
& + \left| (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau - (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(s)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right| \\
& + \left| (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(s)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau - (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right| \\
& \leq w(a, w(\alpha, \varepsilon)) + |(Tx)(\beta(s)) - (Tx)(\beta(t))| \int_0^{\gamma(s)} |v(s, \tau, x(\eta(\tau)))| d\tau \\
& + |(Tx)(\beta(t))| \int_0^{\gamma(s)} |v(s, \tau, x(\eta(\tau))) - v(t, \tau, x(\eta(\tau)))| d\tau \\
& + |(Tx)(\beta(t))| \left| \int_{\gamma(t)}^{\gamma(s)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right| \\
& \leq w(a, w(\alpha, \varepsilon)) + w(Tx, w(\beta, \varepsilon)) \int_0^{\gamma(s)} f(r_0) d\tau + (c + dr_0^p) \int_0^{\gamma(s)} \xi_{r_0}(\varepsilon) d\tau \\
& + (c + dr_0^p) f(r_0) |\gamma(s) - \gamma(t)| \\
& \leq w(a, w(\alpha, \varepsilon)) + w(Tx, w(\beta, \varepsilon)) M f(r_0) + (c + dr_0^p) M \xi_{r_0}(\varepsilon) \\
& + (c + dr_0^p) f(r_0) |\gamma(s) - \gamma(t)|
\end{aligned}$$

olur. Burada  $\xi_{r_0}(\varepsilon)$ ,  $\xi_{r_0}(\varepsilon) = \sup\{|v(s, \tau, x) - v(t, \tau, x)| : t, s, \tau \in I, |s - t| \leq \varepsilon, x \in [0, r_0]\}$

şeklinde tanımlanır.  $v$  fonksiyonu  $I \times I \times [0, r_0]$  üzerinde ve  $\gamma$  fonksiyonu da  $I$  üzerinde düzgün sürekli olup,  $\varepsilon \rightarrow 0$  için  $\xi_{r_0}(\varepsilon) \rightarrow 0$  ve  $(\gamma(s) - \gamma(t)) \rightarrow 0$  olur.

Böylece,

$$\begin{aligned}
& |(Vx)(s) - (Vx)(t)| \\
& \leq w(a, w(\alpha, \varepsilon)) + w(Tx, w(\beta, \varepsilon)) M f(r_0) + (c + dr_0^p) M \xi_{r_0}(\varepsilon) \\
& + (c + dr_0^p) f(r_0) |\gamma(s) - \gamma(t)|
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada  $t$  ve  $s$  ler üzerinden supremum alındığında,

$$\begin{aligned} w(Vx, \varepsilon) &\leq w(a, w(\alpha, \varepsilon)) + w(Tx, w(\beta, \varepsilon))Mf(r_0) + (c + dr_0^p)M\xi_{r_0}(\varepsilon) \\ &+ (c + dr_0^p)f(r_0)w(\gamma, \varepsilon) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.  $x$  ler üzerinden supremum alınarak da

$$\begin{aligned} w(VX, \varepsilon) &\leq w(a, w(\alpha, \varepsilon)) + w(TX, w(\beta, \varepsilon))Mf(r_0) + (c + dr_0^p)M\xi_{r_0}(\varepsilon) \\ &+ (c + dr_0^p)f(r_0)w(\gamma, \varepsilon) \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır.  $\varepsilon \rightarrow 0$  için

$$w_0(VX) \leq Mf(r_0)w_0(TX) \quad (3.2.2)$$

eşitsizliğine ulaşırız. Diğer taraftan  $x \in X$  keyfi bir sabit,  $t, s \in I$  ve  $t \leq s$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} & |(Vx)(s) - (Vx)(t)| - [(Vx)(s) - (Vx)(t)] \\ = & \left| a(\alpha(s)) + (Tx)(\beta(s)) \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right. \\ & - \left. a(\alpha(t)) - (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right| \\ & - \left[ a(\alpha(s)) + (Tx)(\beta(s)) \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right. \\ & - \left. a(\alpha(t)) - (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right] \\ \leq & [|a(\alpha(s)) - a(\alpha(t))| - (a(\alpha(s)) - a(\alpha(t)))] \\ & + \left| (Tx)(\beta(s)) \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau - (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right| \\ & - \left[ (Tx)(\beta(s)) \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau - (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right] \\ \leq & \left| (Tx)(\beta(s)) \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau - (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right| \\ & + \left| (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau - (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right| \\ & - \left[ (Tx)(\beta(s)) \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau - (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right] \\ & - \left[ (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau - (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq [| (Tx)(\beta(s)) - (Tx)(\beta(t)) | - [(Tx)(\beta(s)) - (Tx)(\beta(t))]] \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \\
&+ (Tx)(\beta(t)) \left[ \int_0^{\gamma(t)} (v(s, \tau, x(\eta(\tau))) - v(t, \tau, x(\eta(\tau)))) d\tau \right. \\
&+ \left. \int_{\gamma(t)}^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right] \\
&- (Tx)(\beta(t)) \left[ \int_0^{\gamma(s)} v(s, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau - \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau \right] \\
&\leq [| (Tx)(\beta(s)) - (Tx)(\beta(t)) | - [(Tx)(\beta(s)) - (Tx)(\beta(t))]] Mf(r_0)
\end{aligned}$$

( $\beta$  nın azalmayanlığını da kullanarak) eşitsizliğini elde ederiz. Burada eşitsizliğin her iki tarafında  $t \in I = [0, M]$  ler üzerinden supremum alarak,

$$\begin{aligned}
i(Vx) &\leq Mf(r_0) \sup[|(Tx)(\beta(s)) - (Tx)(\beta(t))| - [(Tx)(\beta(s)) - (Tx)(\beta(t))]] \\
&\leq Mf(r_0) i(Tx)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini ve son eşitsizlikte  $x$  ler üzerinden supremum alarak da,

$$i(VX) \leq Mf(r_0) i(TX) \quad (3.2.3)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.2.2) ve (3.2.3) eşitsizliklerinden,

$$\mu(VX) \leq Mf(r_0) \mu(TX) \leq Mf(r_0) \theta \mu(X)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (viii) hipotezinden

$$Mf(r_0) \theta < 1$$

olduğundan Teorem 3.1.1 den dolayı ispat tamamlanmıştır.  $\square$

**Sonuç 3.2.1.** *a pozitif ve f sürekli olmak üzere Teorem 3.2.1' in (vii) şartı haricindeki bütün şartları sağlansın. Ayrıca*

$$a(\|\alpha\|) + (c + d)Mf(1) < 1$$

*olsun. Bu durumda teoremin hükmü yine geçerli olur. Bunu görelim:*

$$h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, h(r) = a(\|\alpha\|) + (c + dr^p)Mf(r) - r$$

olarak tanımlanan  $h$  fonksiyonu sürekli olup,

$$h(0) = a(\|\alpha\|) + cMf(0) > 0$$

ve

$$h(1) = a(\|\alpha\|) + (c + d)Mf(1) - 1 < 0$$

olur. Böylece  $h(r_0) = 0$  olacak şekilde en az bir  $r_0 \in (0, 1)$  sayısı vardır. Sonuç olarak Teorem 3.2.1' in bütün şartları sağlandığından (3.2.1) denkleminin en az bir  $x = x(t) \in B_{r_0}^+$  çözümü vardır.

### Örnek 3.2.1.

$$x(t) = \frac{t^2}{5} + \frac{1+x^2(t)}{2} \int_0^{t^2} \frac{\sin t + e^{x(\tau^2)}}{8+\tau} d\tau, \quad t \in I = [0, 1]$$

denklemini gözönüne alalım. Burada  $\alpha(t) = t^2$ ,  $\beta(t) = t$ ,  $\gamma(t) = t^2$ ,  $\eta(\tau) = \tau^2$ ,  $a(s) = \frac{s}{5}$ ,  $a(\alpha(t)) = \frac{t^2}{5}$  olup,  $a$  fonksiyonu pozitif azalmayan bir fonksiyon ve  $\|\alpha\| = 1$ ,  $a(\|\alpha\|) = \frac{1}{5}$  tir.

$$v(t, \tau, x) = \frac{\sin t + e^x}{8 + \tau}$$

ve

$$(Tx)(t) = \frac{1+x^2(t)}{2}$$

dir.  $\forall t, \tau \in I$  ve  $\forall x \in \mathbb{R}$  için

$$|v(t, \tau, x)| = \left| \frac{\sin t + e^x}{8 + \tau} \right| \leq \frac{1 + e^x}{8} \leq \frac{1 + e^{|x|}}{8} = f(|x|)$$

olduğundan  $f(x) = \frac{1+e^x}{8}$  olur. Şimdi  $T$  operatörünün sürekli olduğunu görelim.

$x_0 \in C(I)$  keyfi bir eleman olmak üzere,  $\|x - x_0\| < \delta$  iken;

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx_0\| &= \max_{t \in I} \left| \frac{1+x^2(t)}{2} - \frac{1+x_0^2(t)}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \max_{t \in I} |x^2(t) - x_0^2(t)| \\ &= \frac{1}{2} \max_{t \in I} [|x(t) - x_0(t)| |x(t) + x_0(t)|] \end{aligned}$$

ve

$$|x(t)| = |x(t) - x_0(t) + x_0(t)| \leq |x(t) - x_0(t)| + |x_0(t)| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\|$$

olduğundan,

$$|x(t)| \leq \delta + \|x_0\| \quad (3.2.4)$$

olur. (3.2.4) eşitsizliğinden,

$$|x(t) + x_0(t)| \leq |x(t)| + \|x_0\| \leq \delta + 2\|x_0\|$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx_0\| &= \frac{1}{2} \max_{t \in I} [|x(t) - x_0(t)| |x(t) + x_0(t)|] \\ &\leq \frac{1}{2} (\delta + 2\|x_0\|) \max_{t \in I} |x(t) - x_0(t)| \\ &= \frac{1}{2} (\delta + 2\|x_0\|) \|x - x_0\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{2} (\delta + 2\|x_0\|) \delta = \varepsilon$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} \delta^2 + 2\|x_0\|\delta - 2\varepsilon &= 0 \Rightarrow (\delta + \|x_0\|)^2 - \|x_0\|^2 - 2\varepsilon = 0 \\ &\Rightarrow (\delta + \|x_0\|)^2 = \|x_0\|^2 + 2\varepsilon \\ &\Rightarrow \delta + \|x_0\| = \sqrt{\|x_0\|^2 + 2\varepsilon} \end{aligned}$$

olacağından,

$$\delta = \sqrt{\|x_0\|^2 + 2\varepsilon} - \|x_0\| > 0$$

seçilirse,  $T$  nin  $x_0$  noktasında sürekliliği görülür.  $x_0, C(I)$  dan seçilen keyfi bir eleman olduğundan  $T, C(I)$  da süreklidir. Diğer taraftan her  $x \in C(I)$  ve her  $t \in I$  için

$$|(Tx)(t)| \leq c + d\|x\|^p, \quad (p > 0)$$

eşitsizliği sağlanır. Çünkü,

$$\left| \frac{1+x^2(t)}{2} \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|x^2(t)| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|x(t)|^2 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\|x\|^2, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = \frac{1}{2}, \quad p = 2$$

dir.

$$a(\|\alpha\|) + (c + dr^p)Mf(r) \leq r$$

eşitsizliğini sağlayan bir  $r_0$  pozitif çözümü vardır.  $\|\alpha\| = 1$ ,  $a(\|\alpha\|) = \frac{1}{5}$ ,  $M=1$  dir.

$$0,375018 \leq r_0 \leq 1,65394$$

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir  $r_0$  sayısı,

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{8}(1 + e^r) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}r^2 \right) \leq r$$

eşitsizliğinin bir çözümüdür. Örneğin  $r_0 = 1$  bu eşitsizliğin bir çözümüdür.

$X \neq \emptyset$ ,  $X \subset B_{r_0}^+$ ,  $x \in B_{r_0}^+$ ,  $t_1 \leq t_2$  ve  $t_1, t_2 \in I$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} |(Tx(t_2)) - (Tx(t_1))| &= \left| \frac{1+x^2(t_2)}{2} - \frac{1+x^2(t_1)}{2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2}|x(t_2) + x(t_1)||x(t_2) - x(t_1)| \\ &\leq \frac{1}{2}(|x(t_2)| + |x(t_1)|)|x(t_2) - x(t_1)| \\ &\leq \frac{1}{2}(\|x\| + \|x\|)|x(t_2) - x(t_1)| \\ &\leq \frac{1}{2}(2r_0)|x(t_2) - x(t_1)| \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\sup_{t_1, t_2 \in I} |(Tx(t_2)) - (Tx(t_1))| \leq \sup_{t_1, t_2 \in I} |x(t_2) - x(t_1)|$$

yani

$$w(Tx, \epsilon) \leq w(x, \epsilon)$$

olur. Böylece

$$\sup_{x \in X} w(Tx, \epsilon) \leq \sup_{x \in X} w(x, \epsilon)$$

olacağından,

$$w(TX, \epsilon) \leq w(X, \epsilon)$$

ve şu halde,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} w(TX, \epsilon) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} w(X, \epsilon)$$

yani

$$w_0(TX) \leq w_0(X) \quad (3.2.5)$$

olur.  $X \neq \emptyset$ ,  $X \subset B_{r_0}^+$ ,  $x \in B_{r_0}^+$ ,  $t_1 \leq t_2$  ve  $t_1, t_2 \in I$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} & |(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| - [(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)] \\ = & \left| \frac{1+x^2(t_2) - 1 - x^2(t_1)}{2} \right| - \left[ \frac{1+x^2(t_2) - 1 - x^2(t_1)}{2} \right] \\ \leq & \frac{1}{2} |x(t_2) - x(t_1)| |x(t_2) + x(t_1)| - \frac{1}{2} [(x(t_2) - x(t_1))(x(t_2) + x(t_1))] \\ = & \frac{1}{2} (|x(t_2)| + |x(t_1)|) [|x(t_2) - x(t_1)| - (x(t_2) - x(t_1))] \\ \leq & \frac{1}{2} (\|x\| + \|x\|) [|x(t_2) - x(t_1)| - (x(t_2) - x(t_1))] \\ \leq & \frac{1}{2} 2r_0 [|x(t_2) - x(t_1)| - (x(t_2) - x(t_1))] \\ = & |x(t_2) - x(t_1)| - [x(t_2) - x(t_1)] \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} & \sup_{t_1, t_2 \in I} [| (Tx)(t_2) - (Tx)(t_1) | - [(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)]] \\ \leq & \sup_{t_1, t_2 \in I} [|x(t_2) - x(t_1)| - [x(t_2) - x(t_1)]] \end{aligned}$$

olup,

$$i(Tx) \leq i(x)$$

olacağından,

$$\sup_{x \in X} i(Tx) \leq \sup_{x \in X} i(x)$$

ve böylece,

$$i(TX) \leq i(X) \quad (3.2.6)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.2.5) ve (3.2.6) eşitsizliklerinden,

$$\mu(TX) \leq \mu(X)$$

eşitsizliğine ulaşırız. Burada  $\theta = 1$  alınabilir.

$$Mf(r_0)\theta < 1$$

dir. Zira  $\theta = 1$ ,  $r_0 = 1$ ,  $M = 1$  ve  $f(1) = \frac{1+e}{8}$  için

$$Mf(1)\theta = \frac{1+e}{8} < 1$$

dir. Böylece ele aldığımız denklem bütün hipotezlerimizi sağladığından bu denklemin  $B_{r_0}^+$  da azalmayan bir çözümü vardır.

### Örnek 3.2.2.

$$x(t) = \frac{\sin(t-1+\frac{\pi}{2})}{5} + \frac{1+x^3(t)}{7} \int_0^{t^3} \frac{\tan t + e^{x(\tau^2)}}{2+\tau} d\tau$$

denklemini gözönüne alalım. Burada  $\alpha(t) = t$ ,  $\beta(t) = t$ ,  $\gamma(t) = t^3$ ,  $\eta(\tau) = \tau^2$  olup,  $a(t) = \frac{\sin(t-1+\frac{\pi}{2})}{5}$  fonksiyonu pozitif ve azalmayan bir fonksiyondur.  $a(\|\alpha\|) = \frac{1}{5}$ ,  $\forall t, \tau \in I$  ve  $\forall x \in \mathbb{R}$  için,

$$|v(t, \tau, x)| = \left| \frac{\tan t + e^x}{2+\tau} \right| \leq \frac{\sqrt{3} + e^x}{2} \leq \frac{\sqrt{3} + e^{|x|}}{2} = f(|x|)$$

olup,  $f(x) = \frac{\sqrt{3}+e^x}{2}$  ve  $(Tx)(t) = \frac{1+x^3(t)}{7}$  dir.  $T : C(I) \rightarrow C(I)$  olduğu aşıkardır. Şimdi,  $T$  operatörünün sürekli olduğunu görelim.  $x_0 \in C(I)$  keyfi bir eleman olmak üzere,  $\|x - x_0\| < \delta$  iken,

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx_0\| &= \max_{t \in I} \left| \frac{1+x^3(t)}{7} - \frac{1+x_0^3(t)}{7} \right| \\ &= \frac{1}{7} \max_{t \in I} |x^3(t) - x_0^3(t)| \\ &= \frac{1}{7} \max_{t \in I} [|x(t) - x_0(t)| |x^2(t) + x(t)x_0(t) + x_0^2(t)|] \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
|x^2(t) + x(t)x_0(t) + x_0^2(t)| &= |(x(t) - x_0(t))^2 + 3x(t)x_0(t)| \\
&\leq |(x(t) - x_0(t))|^2 + 3|x(t)x_0(t)| \\
&< \delta^2 + 3|x(t) - x_0(t) + x_0(t)||x_0(t)| \\
&\leq \delta^2 + 3\delta\|x_0\| + 3\|x_0\|^2
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{7} \max_{t \in I} [|x(t) - x_0(t)| |x^2(t) + x(t)x_0(t) + x_0^2(t)|] \\
&< \frac{1}{7} (\delta^3 + 3\delta^2\|x_0\| + 3\delta\|x_0\|^2) \\
&= \frac{1}{7} ((\delta + \|x_0\|)^3 - \|x_0\|^3) \\
&= \frac{1}{7} (\delta + \|x_0\|)^3 - \frac{1}{7} \|x_0\|^3 = \epsilon \\
&\Rightarrow \frac{1}{7} (\delta + \|x_0\|)^3 = \epsilon + \frac{1}{7} \|x_0\|^3 \\
&\Rightarrow \delta + \|x_0\| = (7\epsilon + \|x_0\|^3)^{\frac{1}{3}} \\
&\Rightarrow \delta = (7\epsilon + \|x_0\|^3)^{\frac{1}{3}} - \|x_0\| > 0
\end{aligned}$$

seçilirse,  $T$  nin  $x_0$  noktasında sürekliliği görülür.  $x_0$ ,  $C(I)$  dan seçilen keyfi bir eleman olduğundan  $T$ ,  $C(I)$  da süreklidir.

$$|(Tx)(t)| \leq c + d\|x\|^p, \quad (p > 0)$$

eşitsizliği sağlanır. Çünkü,

$$\left| \frac{1+x^3(t)}{7} \right| \leq \frac{1}{7} + \frac{1}{7} |x^3(t)| = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} |x(t)|^3 \leq \frac{1}{7} + \frac{1}{7} \|x\|^3, \quad c = \frac{1}{7}, \quad d = \frac{1}{7}, \quad p = 3$$

dir.

$$a(\|\alpha\|) + (c + dr^p)Mf(r) \leq r$$

eşitsizliğini sağlayan bir  $r_0$  pozitif çözümü vardır.  $\|\alpha\| = 1$ ,  $a(\|\alpha\|) = \frac{1}{5}$ ,  $M=1$  dir.

$$0,386812 \leq r_0 \leq 1,32116$$

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir  $r_0$  sayısı,

$$\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3} + e^r)\right) \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}r^3\right) + \frac{1}{5} \leq r$$

eşitsizliğinin bir çözümüdür. Örneğin  $r_0 = 1$  bu eşitsizliğin bir çözümüdür.

$t_1, t_2 \in [0, 1], |t_2 - t_1| \leq \varepsilon, \emptyset \neq X \subset B_{r_0}^+ = B_1^+$  olmak üzere

$$\begin{aligned} |(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| &= \left| \frac{1+x^3(t_2)}{7} - \frac{1+x^3(t_1)}{7} \right| \\ &= \frac{1}{7} |x^3(t_2) - x^3(t_1)| \\ &\leq \frac{1}{7} |x(t_2) - x(t_1)| |x^2(t_2) + x(t_2)x(t_1) + x^2(t_1)| \\ &\leq \frac{1}{7} |x(t_2) - x(t_1)| (|x^2(t_2)| + |x(t_2)x(t_1)| + |x^2(t_1)|) \\ &\leq \frac{1}{7} |x(t_2) - x(t_1)| 3\|x\|^2 \\ &\leq \frac{3}{7} |x(t_2) - x(t_1)| \end{aligned}$$

olur.  $t_1, t_2 \in I$  olmak üzere eşitsizliğin her iki tarafında supremum alınır,

$$w(Tx, \varepsilon) \leq \frac{3}{7} w(x, \varepsilon)$$

olur. Bu eşitsizlikte  $x \in X$  ler üzerinden supremum alınır,

$$w(TX, \varepsilon) \leq \frac{3}{7} w(X, \varepsilon)$$

olur. Burada da  $\varepsilon \rightarrow 0$  için limit alınır,

$$w_0(TX) \leq \frac{3}{7} w_0(X) \quad (3.2.7)$$

eşitsizliği elde edilir.  $t_1, t_2 \in [0, 1], t_1 \leq t_2, \emptyset \neq X \subset B_{r_0}^+ = B_1^+$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} & |(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| - [(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)] \\ &= \left| \frac{1+x^3(t_2)}{7} - \frac{1+x^3(t_1)}{7} \right| - \left[ \frac{1+x^3(t_2)}{7} - \frac{1+x^3(t_1)}{7} \right] \\ &= \frac{1}{7} |x^3(t_2) - x^3(t_1)| - \frac{1}{7} [x^3(t_2) - x^3(t_1)] \\ &= \frac{1}{7} |(x(t_2) - x(t_1))(x^2(t_2) + x(t_2)x(t_1) + x^2(t_1))| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{7}(x(t_2) - x(t_1))(x^2(t_2) + x(t_2)x(t_1) + x^2(t_1)) \\
& = \frac{1}{7}(x^2(t_2) + x(t_2)x(t_1) + x^2(t_1))[|x(t_2) - x(t_1)| - (x(t_2) - x(t_1))] \\
& \leq \frac{3}{7}\|x\|^2[|x(t_2) - x(t_1)| - (x(t_2) - x(t_1))] \\
& \leq \frac{3}{7}[|x(t_2) - x(t_1)| - (x(t_2) - x(t_1))]
\end{aligned}$$

*olur. Bu eşitsizlikte  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  ler üzerinden supremum alınır,*

$$i(Tx) \leq \frac{3}{7}i(x)$$

*olur. Bu eşitsizlikte  $x \in X$  üzerinden supremum alınır,*

$$i(TX) \leq \frac{3}{7}i(X) \tag{3.2.8}$$

*olur. (3.2.7) ve (3.2.8) eşitsizliklerinden,*

$$\mu(TX) \leq \frac{3}{7}\mu(X)$$

*olur. O halde  $\theta = \frac{3}{7}$  alınabilir.  $r = 1$ ,  $\theta = \frac{3}{7}$  ve  $M = 1$  için de*

$$Mf(1)\frac{3}{7} < 1$$

*elde edilir. Böylece ele aldığımız denklem bütün hipotezlerimizi sağladığından bu denklemin  $B_{r_0}^+$  da azalmayan bir çözümü vardır.*

#### 4. LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN BİR SINIFININ MONOTON ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, bir önceki bölümdeki denklemden farklı tipten olan bir lineer olmayan Volterra integral denkleminin hangi şartlarda monoton çözümünün mevcut olacağı incelenecektir.

##### 4.1. Temel Hipotezler

$$x(t) = a(\alpha(t)) + (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} f(\phi(t,s))\phi(x(g(s)))ds, \quad t \in I = [0, 1] \quad (4.1.1)$$

lineer olmayan Volterra integral denklemini ele alalım. Burada,

- (i)  $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow I$  sürekli ve azalmayan fonksiyonlar ve  $g : I \rightarrow I$  sürekli bir fonksiyondur.
- (ii)  $a \in C(I)$  ve  $a, I$  aralığında azalmayan ve negatif olmayan bir fonksiyondur.
- (iii)  $\phi : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I \times I$  da süreklidir ve  $t \rightarrow \phi(t, s)$ ,  $\forall s \in I$  ( $t$  sabit  $s$  ler değişken) için azalmayan bir fonksiyondur.
- (iv)  $f : \text{Im}\phi \rightarrow \mathbb{R}_+$  sürekli fonksiyonu, kompakt olan  $\text{Im}\phi$  ( $\phi$  nin görüntü kümesi) üzerinde azalmayan bir fonksiyondur.
- (v)  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyonu,  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  dur.
- (vi)  $T : C(I) \rightarrow C(I)$  operatörü sürekli ve pozitif (yani  $x \geq 0$  ise  $Tx \geq 0$ ) bir operatördür. Ayrıca  $\forall x \in C(I)$  ve  $t \in I$  için

$$|(Tx)(t)| \leq c + d\|x\|^p$$

eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan  $c, d$  ve  $p > 0$  sabitleri vardır.

- (vii)  $a(\|\alpha\|) + (c + dr_0^p)\|f\|M_{\phi, r_0} \leq r_0$  eşitsizliğini sağlayan bir  $r_0$  pozitif çözümü vardır (Burada  $M_{\phi, r_0} = \max\{|\phi(u)| : u \in [-r_0, r_0]\}$  dir).

- (viii)  $T$  operatörü  $B_{r_0}^+$  da sabit  $\theta$  ile birlikte  $\mu$  kompaksızlık ölçüsü için

$$\mu(TX) \leq \theta\mu(X)$$

eşitsizliğini sağlar (Burada  $\theta\|f\|M_{\phi, r_0} < 1$  dir).

## 4.2. Temel Sonuç

Bu kısımda dördüncü bölüm girişinde verilen hipotezler altında aşağıdaki teoremi vereceğiz.

**Teorem 4.2.1.** *Yukarıdaki (i)-(viii) şartları altında (4.1.1) denkleminin  $C(I)$  da en az bir azalmayan bir  $x = x(t)$  çözümü vardır.*

**İspat.**  $C(I)$  uzayında A ve B operatörlerini,

$$(Ax)(t) = a(\alpha(t)) + (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} f(\phi(t,s))\varphi(x(g(s)))ds$$

ve

$$(Bx)(t) = \int_0^{\gamma(t)} f(\phi(t,s))\varphi(x(g(s)))ds$$

olarak tanımlayalım.  $x \in C(I)$  ise  $Ax \in C(I)$  olduğunu görelim.  $Ax \in C(I)$  olduğunu göstermek için,  $Bx \in C(I)$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $\varepsilon > 0$  bir sabit,

$$x \in C(I), \quad t_1, t_2 \in I, \quad t_1 \leq t_2, \quad t_2 - t_1 \leq \varepsilon$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} & |(Bx)(t_2) - (Bx)(t_1)| \\ &= \left| \int_0^{\gamma(t_2)} f(\phi(t_2,s))\varphi(x(g(s)))ds - \int_0^{\gamma(t_1)} f(\phi(t_1,s))\varphi(x(g(s)))ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\gamma(t_2)} f(\phi(t_2,s))\varphi(x(g(s)))ds - \int_0^{\gamma(t_2)} f(\phi(t_1,s))\varphi(x(g(s)))ds \right| \\ &+ \left| \int_0^{\gamma(t_2)} f(\phi(t_1,s))\varphi(x(g(s)))ds - \int_0^{\gamma(t_1)} f(\phi(t_1,s))\varphi(x(g(s)))ds \right| \\ &\leq \int_0^{\gamma(t_2)} |f(\phi(t_2,s)) - f(\phi(t_1,s))| |\varphi(x(g(s)))| ds \\ &+ \int_{\gamma(t_1)}^{\gamma(t_2)} |f(\phi(t_1,s))| |\varphi(x(g(s)))| ds \end{aligned}$$

olur.  $f$  kompakt bölgede sürekli olduğundan  $\|f\|$  vardır.

$$w_{f \circ \phi(\varepsilon, \cdot)} = \sup \{ |f(\phi(t_2,s)) - f(\phi(t_1,s))| : t_2, t_1, s \in I, |t_2 - t_1| \leq \varepsilon \}$$

ve

$$M_{\varphi, \|x\|} = \max\{|\varphi(u)| : u \in [-\|x\|, \|x\|]\}$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} |(Bx)(t_2) - (Bx)(t_1)| &\leq w_{f \circ \phi(\varepsilon, \cdot)} M_{\varphi, \|x\|} \gamma(t_2) + \|f\| M_{\varphi, \|x\|} |\gamma(t_2) - \gamma(t_1)| \\ &\leq w_{f \circ \phi(\varepsilon, \cdot)} M_{\varphi, \|x\|} \gamma(t_2) + \|f\| M_{\varphi, \|x\|} w(\gamma, \varepsilon) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada,

$$w(\gamma, \varepsilon) = \sup\{|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)| : t_1, t_2 \in I, |t_2 - t_1| \leq \varepsilon\}$$

dır.

$f \circ \phi$  fonksiyonunun  $I \times I$  üzerinde sürekli olmasından ve  $\gamma$  nın  $I$  da düzgün sürekliliğinden  $\varepsilon \rightarrow 0$  için  $w_{f \circ \phi(\varepsilon, \cdot)} \rightarrow 0$  ve  $w(\gamma, \varepsilon) \rightarrow 0$  olduğundan  $Bx \in C(I)$  ve  $a(\alpha(t)) + (Tx)(\beta(t)) \in C(I)$  olduğundan  $Ax \in C(I)$  olur. Üstelik,  $\forall t \in I$  için

$$\begin{aligned} |(Ax)(t)| &= \left| a(\alpha(t)) + (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} f(\phi(t, s)) \varphi(x(g(s))) ds \right| \\ &\leq a(\|\alpha\|) + (c + d\|x\|^p) \int_0^{\gamma(t)} |f(\phi(t, s))| |\varphi(x(g(s)))| ds \\ &\leq a(\|\alpha\|) + (c + d\|x\|^p) \|f\| M_{\varphi, \|x\|} \end{aligned}$$

dir. Buna göre,

$$\|Ax\| \leq a(\|\alpha\|) + (c + d\|x\|^p) \|f\| M_{\varphi, \|x\|}$$

olur. Böylece  $\|x\| \leq r_0$  ise (vii) hipotezinden dolayı,

$$\|Ax\| \leq a(\|\alpha\|) + (c + dr_0^p) \|f\| M_{\varphi, r_0} \leq r_0$$

eşitsizliğine ulaşırız. Sonuç olarak  $A$  operatörü,  $B_{r_0} = B[0, r_0]$  yuvarındaki elemanları yine  $B_{r_0}$  yuvarına taşır. Şimdi de  $A$  operatörünün  $B_{r_0}$  üzerinde sürekli olduğunu görelim. Bunun için  $(x_n)$ ,  $B[0, r_0]$  da bir dizi olmak üzere,  $(x_n) \rightarrow x$  iken  $(Ax_n) \rightarrow Ax$

olduğunu gösterelim.  $\forall t \in I$  için

$$\begin{aligned}
& |(Ax_n)(t) - (Ax)(t)| \\
&= \left| (Tx_n)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} f(\phi(t,s))\varphi(x_n(g(s)))ds \right. \\
&\quad \left. - (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} f(\phi(t,s))\varphi(x(g(s)))ds \right| \\
&\leq \left| (Tx_n)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} f(\phi(t,s))\varphi(x_n(g(s)))ds \right. \\
&\quad \left. - (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} f(\phi(t,s))\varphi(x_n(g(s)))ds \right| \\
&\quad + \left| (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} f(\phi(t,s))\varphi(x_n(g(s)))ds \right. \\
&\quad \left. - (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} f(\phi(t,s))\varphi(x(g(s)))ds \right| \\
&\leq |(Tx_n)(\beta(t)) - (Tx)(\beta(t))| \int_0^{\gamma(t)} |f(\phi(t,s))| |\varphi(x_n(g(s)))| ds \\
&\quad + |(Tx)(\beta(t))| \int_0^{\gamma(t)} |f(\phi(t,s))| |\varphi(x_n(g(s))) - \varphi(x(g(s)))| ds
\end{aligned}$$

olur.  $\beta$  nın azalmayanlığını da dikkate alarak,

$$\begin{aligned}
& \|(Ax_n)(t) - (Ax)(t)\| \\
&\leq \|Tx_n - Tx\| \|f\| M_{\varphi, r_0} \\
&\quad + (c + dr_0^p) \|f\| \int_0^{\gamma(t)} |\varphi(x_n(g(s))) - \varphi(x(g(s)))| ds \quad (4.2.1)
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.  $\varphi$  fonksiyonu,  $[-r_0, r_0]$  üzerinde düzgün sürekli olduğundan  $\varepsilon > 0$  için,  $|u_1 - u_2| \leq \delta$  ve  $u_1, u_2 \in [-r_0, r_0]$  iken,

$$|\varphi(u_1) - \varphi(u_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2(c + dr_0^p) \|f\|}$$

olacak şekilde en az bir  $\delta > 0$  vardır. Ayrıca,  $\delta > 0$  için  $n \geq n_0$  eşitsizliğini sağlayan bütün  $n$  ler için  $\|x_n - x\| \leq \delta$  olacak şekilde bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  vardır yani  $\forall t \in I$  için  $|x_n(t) - x(t)| \leq \delta$  dır.

Sonuç olarak  $\forall s \in I$  için

$$|\varphi(x_n(g(s))) - \varphi(x(g(s)))| \leq \frac{\varepsilon}{2(c + dr_0^p) \|f\|}$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned}\|Ax_n - Ax\| &\leq \|Tx_n - Tx\| \|f\| M_{\Phi, r_0} + (c + dr_0^p) \|f\| \frac{\varepsilon}{2(c + dr_0^p) \|f\|} \\ &\leq \|Tx_n - Tx\| \|f\| M_{\Phi, r_0} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\quad (4.2.2)$$

eşitsizliğini elde ederiz.  $T$  sürekli olduğundan  $\forall n \geq n_1$  için

$$\|Tx_n - Tx\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\| M_{\Phi, r_0}}$$

eşitsizliğini sağlayan en az bir  $n_1 \in N$  vardır.

Sonuç olarak  $n \geq \max\{n_0, n_1\}$  olan her  $n$  için (4.2.2) eşitsizliğinden,

$$\|Ax_n - Ax\| \leq \frac{\varepsilon}{2\|f\| M_{\Phi, r_0}} \|f\| M_{\Phi, r_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece  $A$  operatörü  $B_{r_0}$  da süreklidir.

$A$  operatörünü  $B_{r_0}$  'ın bir alt kümesi olan

$$B_{r_0}^+ = \{x \in B_{r_0} : x(t) \geq 0, \quad t \in I\}$$

olarak tanımlanan  $B_{r_0}^+$  üzerinde tanımlayalım.  $B_{r_0}^+$  kümesinin boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir küme olduğu açıktır.  $x \in B_{r_0}^+$  olsun.  $(x_n) \subset B_{r_0}$  ve  $x \in \overline{B_{r_0}}$  olsun.

$$(x_n) \rightarrow x \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x\| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq r_0 \Rightarrow \|x\| \leq r_0 \Rightarrow x \in B_{r_0}$$

(i), (ii), (iv), (v), (vi) hipotezlerinden  $t \in I$  için  $x(t) \geq 0$  ise  $(Ax)(t) \geq 0$  dır. Böylece  $A$  operatörü  $B_{r_0}^+$  daki elemanları yine  $B_{r_0}^+$  a taşır. Üstelik  $A$  operatörü  $B_{r_0}^+$  üzerinde süreklidir.

$\emptyset \neq X \subset B_{r_0}^+$ ,  $\varepsilon > 0$  keyfi fakat sabit bir sayı  $t_1, t_2 \in I$  öyle ki  $|t_2 - t_1| \leq \varepsilon$  olsun.

Genelliği bozmayacağından  $B$  operatörünün tanımından,

$$(Bx)(t_2) = \int_0^{\gamma(t_2)} f(\phi(t_2, s)) \phi(x(g(s))) ds$$

ve

$$(Bx)(t_1) = \int_0^{\gamma(t_1)} f(\phi(t_1, s)) \phi(x(g(s))) ds$$

olup,

$$\begin{aligned}
& |(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)| \\
&= |a(\alpha(t_2)) + (Tx)(\beta(t_2))(Bx)(t_2) - a(\alpha(t_1)) - (Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_1)| \\
&\leq |a(\alpha(t_2)) - a(\alpha(t_1))| + |(Tx)(\beta(t_2))(Bx)(t_2) - (Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_2)| \\
&+ |(Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_2) - (Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_1)| \\
&\leq |a(\alpha(t_2)) - a(\alpha(t_1))| + |(Tx)(\beta(t_2))(Bx)(t_2) - (Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_2)| \\
&+ |(Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_2) - (Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_1)| \\
&\leq w(a, w(\alpha, \varepsilon)) + w(Tx, w(\beta, \varepsilon)) \|f\| M_{\Phi, r_0}(\gamma(t_2)) \\
&+ (c + dr_0^p) \|f\| M_{\Phi, r_0} |\gamma(t_2) - \gamma(t_1)| \\
&\leq w(a, w(\alpha, \varepsilon)) + w(Tx, w(\beta, \varepsilon)) \|f\| M_{\Phi, r_0} \\
&+ (c + dr_0^p) \|f\| M_{\Phi, r_0} w(\gamma, \varepsilon)
\end{aligned}$$

olur. Burada,

$$w(\alpha, \varepsilon) = \sup\{|\alpha(t) - \alpha(s)| : t, s \in I \text{ } |t - s| \leq \varepsilon\},$$

$$w(\beta, \varepsilon) = \sup\{|\beta(t) - \beta(s)| : t, s \in I \text{ } |t - s| \leq \varepsilon\}$$

ve

$$w(\gamma, \varepsilon) = \sup\{|\gamma(t) - \gamma(s)| : t, s \in I \text{ } |t - s| \leq \varepsilon\}$$

dur. Böylece,

$$w(Ax, \varepsilon) \leq w(a, w(\alpha, \varepsilon)) + w(Tx, w(\beta, \varepsilon)) \|f\| M_{\Phi, r_0} + (c + dr_0^p) \|f\| M_{\Phi, r_0} w(\gamma, \varepsilon)$$

olur.  $x \in X$  ler ler üzerinden supremum alalım. Buna göre,

$$\begin{aligned}
w(AX, \varepsilon) &\leq w(a, w(\alpha, \varepsilon)) + w(TX, w(\beta, \varepsilon)) \|f\| M_{\Phi, r_0} \\
&+ (c + dr_0^p) \|f\| M_{\Phi, r_0} w(\gamma, \varepsilon)
\end{aligned}$$

dir.  $\gamma$  fonksiyonu  $I$  kümesi üzerinde düzgün sürekli ve  $a$  fonksiyonu da  $I$  üzerinde sürekli olduğundan  $\varepsilon \rightarrow 0$  için  $w(\gamma, \varepsilon) \rightarrow 0$  ve  $w(a, w(\alpha, \varepsilon)) \rightarrow 0$  elde edilir. Sonuç

olarak

$$w_0(AX) \leq \|f\| M_{\Phi, r_0} w_0(TX) \quad (4.2.3)$$

eşitsizliğini elde ederiz.  $\emptyset \neq X \subset B_{r_0}^+$ ,  $x \in X$ ,  $t_1, t_2 \in I$  ve  $t_1 \leq t_2$  olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} & |(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)| - [(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)] \\ = & |a(\alpha(t_2)) + (Tx)(\beta(t_2))(Bx)(t_2) - a(\alpha(t_1)) - (Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_1)| \\ & - (a(\alpha(t_2)) + (Tx)(\beta(t_2))((Bx)(t_2) - a(\alpha(t_1)) - (Tx)(\beta(t_1)))(Bx)(t_1)) \\ \leq & [|a(\alpha(t_2)) - a(\alpha(t_1))| - (a(\alpha(t_2)) - a(\alpha(t_1)))] \\ & + |(Tx)(\beta(t_2))(Bx)(t_2) - (Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_1)| \\ & - ((Tx)(\beta(t_2))(Bx)(t_2) - (Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_1)) \\ \leq & |(Tx)(\beta(t_2))(Bx)(t_2) - (Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_2)| \\ & + |(Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_2) - (Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_1)| \\ & - ((Tx)(\beta(t_2))(Bx)(t_2) - (Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_2)) \\ & - (Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_2) - (Tx)(\beta(t_1))(Bx)(t_1)) \\ \leq & [| (Tx)(\beta(t_2)) - (Tx)(\beta(t_1)) | - ((Tx)(\beta(t_2)) - (Tx)(\beta(t_1)))] (Bx)(t_2) \\ & + (Tx)(\beta(t_1)) [| (Bx)(t_2) - (Bx)(t_1) | - ((Bx)(t_2) - (Bx)(t_1))] \end{aligned}$$

olur. Şimdi,  $((Bx)(t_2) - (Bx)(t_1)) \geq 0$  olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} & ((Bx)(t_2) - (Bx)(t_1)) \\ = & \int_0^{\gamma(t_2)} f(\phi(t_2, s)) \Phi(x(g(s))) ds - \int_0^{\gamma(t_1)} f(\phi(t_1, s)) \Phi(x(g(s))) ds \\ = & \int_0^{\gamma(t_2)} f(\phi(t_2, s)) \Phi(x(g(s))) ds - \int_0^{\gamma(t_2)} f(\phi(t_1, s)) \Phi(x(g(s))) ds \\ & + \int_0^{\gamma(t_2)} f(\phi(t_1, s)) \Phi(x(g(s))) ds - \int_0^{\gamma(t_1)} f(\phi(t_1, s)) \Phi(x(g(s))) ds \\ = & \int_0^{\gamma(t_2)} (f(\phi(t_2, s)) - f(\phi(t_1, s))) \Phi(x(g(s))) ds \\ & + \int_{\gamma(t_1)}^{\gamma(t_2)} f(\phi(t_1, s)) \Phi(x(g(s))) ds \end{aligned}$$

yazılabilir.  $t \rightarrow \phi(t, s)$  fonksiyonu azalmayan olduğundan  $\phi(t_2, s) \geq \phi(t_1, s)$  dir.

Diğer taraftan (iv) hipotezinden  $f(\phi(t_2, s)) - f(\phi(t_1, s)) \geq 0$  dir. Ayrıca,  $x(g(s)) \geq 0$



olduğundan  $\varphi(x(g(s))) \geq 0$  dır. O zaman

$$\int_0^{\gamma(t_2)} (f(\phi(t_2, s)) - f(\phi(t_1, s)))\varphi(x(g(s))) \geq 0 \quad (4.2.4)$$

eşitsizliği geçerlidir. Diğer yandan  $f \geq 0$  ve  $\varphi(x(g(s))) \geq 0$  ve  $\gamma$  azalmayan olduğundan,

$$\int_{\gamma(t_1)}^{\gamma(t_2)} f(\phi(t_1, s))\varphi(x(g(s)))ds \geq 0 \quad (4.2.5)$$

olur. (4.2.4) ve (4.2.5) eşitsizliklerinden

$$\int_0^{\gamma(t_2)} f(\phi(t_2, s))\varphi(x(g(s)))ds - \int_0^{\gamma(t_1)} f(\phi(t_1, s))\varphi(x(g(s)))ds \geq 0 \quad (4.2.6)$$

eşitsizliğine,  $\beta$  nın azalmayanlığı ve (4.2.6) eşitsizliği de kullanılarak

$$\begin{aligned} & |(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)| - ((Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)) \\ & \leq |[(Tx)(\beta(t_2)) - (Tx)(\beta(t_1))]| \\ & - ((Tx)(\beta(t_2)) - (Tx)(\beta(t_1))) \int_0^{\gamma(t_2)} (f(\phi(t_2, s))\varphi(x(g(s))))ds \\ & \leq \|f\|M_{\varphi, r_0}i(Tx) \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece  $t_1 \leq t_2$  olan  $t_2, t_1 \in I$  lar üzerinden supremum alınırsa

$$i(Ax) \leq \|f\|M_{\varphi, r_0}i(Tx)$$

olur. Sonuç olarak  $x \in B_{r_0}^+$  üzerinden supremum alınırsa,

$$i(AX) \leq \|f\|M_{\varphi, r_0}i(TX) \quad (4.2.7)$$

olur. (4.2.3) ve (4.2.7) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned} \mu(AX) &= w_0(AX) + i(AX) \\ &\leq \|f\|M_{\varphi, r_0}w_0(TX) + \|f\|M_{\varphi, r_0}i(TX) \\ &= \|f\|M_{\varphi, r_0}\mu(TX) \\ &\leq \|f\|M_{\varphi, r_0}\theta\mu(X) \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.  $\|f\|M_{\varphi, r_0}\theta < 1$  olması nedeniyle Teorem 3.1.1, (4.1.1) denkleminin bir  $x \in B_{r_0}^+$  çözümünün varlığını garanti eder. Ayrıca bu çözüm, teoremden verilen  $\mu$  kompaktsızlık ölçüsünün tanımına göre azalmayandır.  $\square$

**Örnek 4.2.1.**

$$x(t) = t^2 + \frac{x^2(t)}{5} \int_0^t \ln(1 + \sqrt{t+s}) \frac{1}{x^2(s) + 1} ds \quad (4.2.8)$$

denklemini gözönüne alalım.  $\alpha(t) = t^2$ ,  $\beta(t) = t$ ,  $\gamma(t) = t$ ,  $g(s) = s$  olup,

(i) hipotezini sağlarlar.  $\phi(t, s)$ , (iii) hipotezini sağlar,  $f : [0, \sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}_+$  olup,

$f(u) = \ln(1 + u)$ , (iv) hipotezini sağlar.  $\varphi(x) = \frac{1}{x^2+1}$ , (v) hipotezini sağlar ve  $\varphi(x)$

maksimum değerini  $x = 0$  iken alır. Burada  $g(s) = s$  dir.  $M_{\varphi, r} = \varphi(0) = 1$ ,  $(Tx)(t) = \frac{x^2(t)}{5}$  olup,  $c = 0$ ,  $d = \frac{1}{5}$ ,  $p = 2$  dir.  $\alpha(t) = t^2$ ,  $a(t) = t$ ,  $a(\|\alpha\|) = 1$ ,  $\|f\| = \ln(1 + \sqrt{2})$ .

Şimdi,  $T$  operatörünün sürekli olduğunu görelim.  $x_0 \in C(I)$  keyfi bir eleman olmak üzere,  $\|x - x_0\| < \delta$  iken,

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx_0\| &= \max_{t \in I} \left| \frac{x^2(t)}{5} - \frac{x_0^2(t)}{5} \right| \\ &= \frac{1}{5} \max_{t \in I} |x^2(t) - x_0^2(t)| \\ &= \frac{1}{5} \max_{t \in I} [|x(t) - x_0(t)| |x(t) + x_0(t)|] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |x(t) - x_0(t) + x_0(t)| \leq |x(t) - x_0(t)| + |x_0(t)| \\ &\leq \|x - x_0\| + \|x_0\| < \delta + \|x_0\| \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

olur. (4.2.9) eşitsizliğinden,

$$|x(t) + x_0(t)| \leq |x(t)| + \|x_0\| \leq \delta + 2\|x_0\| \quad (4.2.10)$$

olur. (4.2.10) eşitsizliğini dikkate alarak,

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx_0\| &= \frac{1}{5} \max_{t \in I} [|x(t) - x_0(t)| |x(t) + x_0(t)|] \\ &\leq \frac{1}{5} (\delta + 2\|x_0\|) \max_{t \in I} |x(t) - x_0(t)| \\ &= \frac{1}{5} (\delta + 2\|x_0\|) \|x - x_0\| \\ &\leq \frac{1}{5} (\delta + 2\|x_0\|) \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

denilirse,

$$\begin{aligned}\delta^2 + 2\|x_0\|\delta - 5\epsilon &= 0 \Rightarrow (\delta + \|x_0\|)^2 - \|x_0\|^2 - 5\epsilon = 0 \\ &\Rightarrow (\delta + \|x_0\|)^2 = \|x_0\|^2 + 5\epsilon \\ &\Rightarrow \delta + \|x_0\| = \sqrt{\|x_0\|^2 + 5\epsilon}\end{aligned}$$

olur.  $\delta > 0$  sayısı,

$$\delta = \sqrt{\|x_0\|^2 + 5\epsilon} - \|x_0\| > 0$$

şeklinde seçilirse,  $T$  nin  $x_0$  noktasında sürekliliği görülür.  $x_0, C(I)$  dan seçilen keyfi bir eleman olduğundan  $T, C(I)$  da süreklidir.

$$|(Tx)(t)| \leq c + d\|x\|^p, \quad (p > 0)$$

eşitsizliği sağlanır. Çünkü,

$$\left| \frac{x^2(t)}{5} \right| \leq \frac{1}{5}|x^2(t)| = \frac{1}{5}|x(t)|^2 \leq \frac{1}{5}\|x\|^2, \quad c = 0, \quad d = \frac{1}{5}, \quad p = 2$$

dir.

$$a(\|\alpha\|) + (c + dr^p)\|f\|_{M_{\varphi,r}} \leq r$$

eşitsizliğini sağlayan bir  $r_0$  pozitif çözümü vardır.  $\|\alpha\| = 1, a(\|\alpha\|) = 1, M=1$  dir.

$$1.29614 \leq r \leq 4.37683$$

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir  $r_0$  sayısı,

$$1 + \frac{1}{5}r^2 \ln(1 + \sqrt{2}) \leq r$$

eşitsizliğinin bir çözümüdür. Örneğin  $r_0 = 2$  bu eşitsizliğin bir çözümüdür.

$X \neq \emptyset, X \subset Br_0^+, x \in Br_0^+, t_1 \leq t_2$  ve  $t_1, t_2 \in I$  olmak üzere;

$$\begin{aligned}& |(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| \\ &= \left| \frac{x^2(t_2)}{5} - \frac{x^2(t_1)}{5} \right| \\ &\leq \frac{1}{5}|x(t_2) + x(t_1)||x(t_2) - x(t_1)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{5}(|x(t_2)| + |x(t_1)|)|x(t_2) - x(t_1)| \\
&\leq \frac{1}{5}(\|x\| + \|x\|)|x(t_2) - x(t_1)| \\
&\leq \frac{4}{5}|x(t_2) - x(t_1)|
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\sup_{t_1, t_2 \in I} |(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| \leq \frac{4}{5} \sup_{t_1, t_2 \in I} |x(t_2) - x(t_1)|$$

böylece,

$$w(Tx, \varepsilon) \leq \frac{4}{5}w(x, \varepsilon)$$

olacağından,

$$\sup_{x \in X} w(Tx, \varepsilon) \leq \frac{4}{5} \sup_{x \in X} w(x, \varepsilon)$$

ve şu halde,

$$w(TX, \varepsilon) \leq \frac{4}{5}w(X, \varepsilon)$$

olup,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w(TX, \varepsilon) \leq \frac{4}{5} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w(X, \varepsilon)$$

yani,

$$w_0(TX) \leq \frac{4}{5}w_0(X) \quad (4.2.11)$$

olur.  $X \neq \emptyset$ ,  $X \subset B_{r_0}^+$ ,  $x \in B_{r_0}^+$ ,  $t_1 \leq t_2$  ve  $t_1, t_2 \in I$  olmak üzere;

$$\begin{aligned}
&|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| - [(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)] \\
&= \left| \frac{x^2(t_2) - x^2(t_1)}{5} \right| - \left[ \frac{x^2(t_2) - x^2(t_1)}{5} \right] \\
&\leq \frac{1}{5}|x(t_2) - x(t_1)||x(t_2) + x(t_1)| - \frac{1}{5}[(x(t_2) - x(t_1))(x(t_2) + x(t_1))] \\
&= \frac{1}{5}(|x(t_2)| + |x(t_1)|)[|x(t_2) - x(t_1)| - (x(t_2) - x(t_1))] \\
&\leq \frac{1}{5}(\|x\| + \|x\|)[|x(t_2) - x(t_1)| - (x(t_2) - x(t_1))] \\
&\leq \frac{4}{5}[|x(t_2) - x(t_1)| - (x(t_2) - x(t_1))]
\end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} & |(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| - [(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)] \\ & \leq \frac{4}{5} [|x(t_2) - x(t_1)| - [x(t_2) - x(t_1)]] \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikte  $t_1, t_2 \in I$  lar üzerinden supremum alınır,

$$\begin{aligned} & \sup_{t_1, t_2 \in I} \{ |(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| - [(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)] \} \\ & \leq \frac{4}{5} \sup_{t_1, t_2 \in I} \{ |x(t_2) - x(t_1)| - [x(t_2) - x(t_1)] \} \end{aligned}$$

olur.  $i$  nin tanımından son eşitsizlik

$$i(Tx) \leq \frac{4}{5} i(x)$$

olur. Yine burada  $x \in X$  ler üzerinden supremum alınır,

$$\sup_{x \in X} i(Tx) \leq \frac{4}{5} \sup_{x \in X} i(x)$$

ve

$$i(TX) \leq \frac{4}{5} i(X) \quad (4.2.12)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (4.2.11) ve (4.2.12) eşitsizliklerinden,

$$\mu(TX) \leq \frac{4}{5} \mu(X)$$

eşitsizliğine ulaşırız. Buradan,  $\theta = \frac{4}{5}$  alınabileceği görülmektedir. Ayrıca  $M_{\phi, r} = 1$  ve  $\|f\| = \ln(1 + \sqrt{2})$  için  $\theta \|f\| M_{\phi, r} < 1$  dir. O halde Teorem 3.2.1 e göre (4.2.8) denkleminin çözümü vardır.

## TARTIŞMA VE SONUÇ

1. Daha önceleri,

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t) \int_0^t v(t, \tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in I = [0, M]$$

denkleminin çözümünün varlığı, aşağıda belirtilen hipotezler altında incelenmiştir, [11]. Bu hipotezler:

(i)  $a \in C(I)$  ve  $a$ ,  $I$  aralığında azalmayan ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

(ii)  $v : I \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon ve

$v : I \times I \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  dır. Keyfi bir  $\tau \in I$  sabiti ve  $x \in \mathbb{R}_+$  için  $t \rightarrow v(t, \tau, x)$  fonksiyonu  $I$  aralığında azalmayandır.

(iii) Her  $t, \tau \in I$  ve  $x \in \mathbb{R}$  için  $|v(t, \tau, x)| \leq f(|x|)$  eşitsizliğini sağlayan  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  olacak şekilde azalmayan bir  $f$  fonksiyonu vardır.

(iv)  $T : C(I) \rightarrow C(I)$  operatörü sürekli dir.  $\mu$  kompaktsızlık ölçüsü,  $\theta$  sabitiyle birlikte  $\mu(TX) \leq \theta\mu(X)$  şartını sağlar. Ayrıca  $T$  operatörü pozitif bir operatördür. Yani  $x \geq 0$  ise  $Tx \geq 0$  dır.

(v) Her  $x \in C(I)$  ve her  $t \in I$  için  $|(Tx)(t)| \leq c + d\|x\|$  eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan  $c$  ve  $d$  sabitleri vardır.

(vi)  $a(\|\alpha\|) + (c + dr)Mf(r) \leq r$  eşitsizliğini sağlayan bir  $r_0$  pozitif çözümü vardır. Ayrıca  $Mf(r_0)\theta < 1$  dir.

**Bu çalışmanın 3. bölümünde ise:**

$$x(t) = a(\alpha(t)) + (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} v(t, \tau, x(\eta(\tau))) d\tau, \quad t \in I = [0, M] \quad (4.2.13)$$

denkleminin çözümünün varlığı; aşağıdaki hipotezler altında, (teoremler) ifade ve ispat edilmiştir. Bu hipotezler:

(i)  $\alpha, \beta, \gamma, \eta : I \rightarrow I$  sürekli ve  $\alpha, \beta, \gamma$  azalmayan fonksiyonlar olsun.

- (ii)  $a \in C(I)$  ve  $I$  aralığında azalmayan ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun.
  - (iii)  $v : I \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon ve  $v : I \times I \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  dır. Keyfi bir  $\tau \in I$  sabiti ve  $x \in \mathbb{R}_+$  için  $t \rightarrow v(t, \tau, x)$  fonksiyonu  $I$  aralığında azalmayandır.
  - (iv) Her  $t, \tau \in I$  ve  $x \in \mathbb{R}$  için  $|v(t, \tau, x)| \leq f(|x|)$  eşitsizliğini sağlayan ve azalmayan  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  fonksiyonu vardır.
  - (v)  $T : C(I) \rightarrow C(I)$  operatörü süreklidir.
- Ayrıca  $T$  operatörü pozitif bir operatördür. Yani  $x \geq 0$  ise  $Tx \geq 0$  dır.
- (vi) Her  $x \in C(I)$  ve her  $t \in I$  için  $|(Tx)(t)| \leq c + d\|x\|^p$  eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan  $c, d$  ve  $p > 0$  sabitleri vardır.
  - (vii)  $a(\|\alpha\|) + (c + dr^p)Mf(r) \leq r$  eşitsizliğini sağlayan bir  $r_0$  pozitif çözümü vardır.
  - (viii)  $T$  operatörü  $B_{r_0}^+$  da  $\mu$  kompaktsızlık ölçüsü ve  $\theta$  sabitiyle birlikte  $\mu(TX) \leq \theta\mu(X)$  şartını sağlar, öyle ki  $Mf(r_0)\theta < 1$  dir.

## 2. Yine daha önceleri

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t) \int_0^t f(\phi(t, s))\phi(x(s))ds, \quad t \in I$$

denkleminin çözümünün varlığı aşağıda belirtilen hipotezler altında incelenmiştir, [17]. Bu hipotezler:

- (i)  $a \in C(I)$  ve  $I$  aralığında azalmayan ve negatif olmayan bir fonksiyondur.
- (ii)  $\phi : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I \times I$  da süreklidir ve  $t \rightarrow \phi(t, s), \quad \forall s \in I$  ( $t$  sabit,  $s$  ler değişken) için azalmayan bir fonksiyondur.
- (iii)  $f : Im\phi \rightarrow \mathbb{R}_+$  sürekli fonksiyonu, kompakt olan  $Im\phi$  ( $\phi$  nin görüntü kümesi) üzerinde azalmayan bir fonksiyondur.
- (iv)  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyonu,  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  dur.
- (v)  $T : C(I) \rightarrow C(I)$  operatörü süreklidir.  $T$  operatörü sabit  $\theta$  ile birlikte  $\mu$  kompaktsızlık ölçüsü için  $\mu(TX) \leq \theta\mu(X)$  eşitsizliğini sağlar. Ayrıca  $T$  operatörü pozitif bir operatördür. Yani  $x \geq 0$  ise  $Tx \geq 0$  dir.
- (vi)  $\forall x \in C(I)$  ve  $t \in I$  için  $|(Tx)(t)| \leq c + d\|x\|$  eşitsizliğini sağlayan ve negatif

olmayan  $c$  ve  $d$  sabitleri vardır.

(vii)  $a(\|\alpha\|) + (c + dr_0)\|f\|M_{\varphi,r_0} \leq r_0$  eşitsizliğini sağlayan bir  $r_0$  pozitif çözümü vardır.

Burada  $\theta\|f\|M_{\varphi,r_0} < 1$  ve  $M_{\varphi,r_0} = \max\{|\varphi(u)| : u \in [-r_0, r_0]\}$  dır.

**Bu tezin 4. bölümünde ise:**

$$x(t) = a(\alpha(t)) + (Tx)(\beta(t)) \int_0^{\gamma(t)} f(\phi(t,s))\varphi(x(g(s)))ds, \quad t \in I = [0, 1]$$

denkleminin, aşağıda verilen hipotezler altında çözümünün mevcut olduğu, (teoremler) ifade ve ispat edilmiştir. Bu hipotezler:

(i)  $\alpha, \beta, \gamma : I \rightarrow I$  sürekli ve azalmayan fonksiyonlar ve  $g : I \rightarrow I$  sürekli bir fonksiyondur.

(ii)  $a \in C(I)$  ve  $a, I$  aralığında azalmayan ve negatif olmayan bir fonksiyondur.

(iii)  $\phi : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $I \times I$  da sürekli ve  $t \rightarrow \phi(t, s), \forall s \in I$  ( $t$  sabit,  $s$  ler değişken) için azalmayan bir fonksiyondur.

(iv)  $f : Im\phi \rightarrow \mathbb{R}_+$  sürekli fonksiyonu, kompakt olan  $Im\phi$  ( $\phi$  nin görüntü kümesi) üzerinde azalmayan bir fonksiyondur.

(v)  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyonu,  $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  dur.

(vi)  $T : C(I) \rightarrow C(I)$  operatörü sürekli ve pozitif bir operatördür. Yani  $x \geq 0$  ise  $Tx \geq 0$  dır.  $\forall x \in C(I)$  ve  $t \in I$  için

$$|(Tx)(t)| \leq c + d\|x\|^p$$

eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan  $c, d$  ve  $p > 0$  sabitleri vardır.

(vii)  $a(\|\alpha\|) + (c + dr^p)\|f\|M_{\varphi,r} \leq r$  eşitsizliğini sağlayan bir  $r_0$  pozitif çözümü vardır.

(viii)  $T$  operatörü  $B_{r_0}^+$  da sabit  $\theta$  ile birlikte  $\mu$  kompaktlık ölçüsü için

$$\mu(TX) \leq \theta\mu(X)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada  $\theta\|f\|M_{\varphi,r_0} < 1$  ve  $M_{\varphi,r_0} = \max\{|\varphi(u)| : u \in [-r_0, r_0]\}$  dır. Sonuç olarak tezin 3. ve 4. bölümlerinde incelenmek üzere ele alınan denklemler, önceden incelenen bazı denklemlerden daha genel denklemlerdir.



## KAYNAKLAR

- [1] K. Taşkiran, *Lineer Olmayan Kuadratik Volterra İntegral Denklemleri*, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Malatya, 2008.
- [2] Ö. F. Temizer, *Volterra İntegral Denklemleri*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 1987.
- [3] B. L. Moiseiwitsch, *Integral Equations*, Longman Group Limited New York, 1977.
- [4] J. Banas, B. Rzepka, *On Existence and Asymptotic Stability of Solutions of Non-linear Integral Equation*, **J. Math. Anal. Appl.** 284 (2003), 165-173.
- [5] J. Banas, J. Rocha, K. B. Sadarangani, *Solvability of a Nonlinear Integral Equation of Volterra Type*, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 157 (2003), 31-48.
- [6] J. Banas, *Applications of Measures of weak noncompactness and some classes of operators in the theory of functional equations in the Lebesgue space*, **Non-linear Analysis, Theory, Methods Applications**, 200 (1997), 3283-3293.
- [7] J. Banas, M. Paslawska-Poludniak, *Monotonic Solutions of Urysohn Integral Equation on Unbounded Interval*, **Computers and Mathematics with Applications**, 47 (2004), 1947-1954.
- [8] J. Banas, B. Rzepka, *An Application of a Measure of Noncompactness in the Study of Asymptotic Stability*, **Applied Mathematics Letters**, 16 (2003), 1-6.
- [9] J. Banas, A. Martinon, *Monotonic Solutions of a Quadratic Integral Equation of Volterra Type*, **Computers and Mathematics with Applications**, 47 (2004), 271-279.
- [10] J. Banas, Kishin Sadarangani, *Monotonicity properties of superposition operator and their applications*, **J. Math. Anal. Appl.** 340 (2008), 1385-1394.

- [11] J. Banas, J. Caballero, J. Rocha , K. Sadarangani, *Monotonic Solutions of a Class of Quadratic Integral Equations of Volterra Type*, **Computers and Mathematics with Applications**, 49 (2005), 943-952.
- [12] J. Banas, Bapurao C. Dhage, *Global asymptotic stability of solutions of a functional integral equation*, **Nonlinear Analysis** 69 (2008), 1945-1952.
- [13] J. Banas, Leszek Olszowy, *On Solutions of a Quadratic Urysohn Integral Equation on an Unbounded Interval*, **Dynamic Systems and Applications**, 17 (2008), 255-270.
- [14] J. Banas, Beata Rzepka, *On local attractivity and asymptotic stability of solutions of a quadratic Volterra integral equation* **Applied Mathematics and Computation**, 213 (2009), 102-111.
- [15] K. Maleknejad, K. Nouri, R. Mollapourasl, *Investigation on the existence of solutions for some nonlinear functional-integral equations*, **Nonlinear Analysis**, 71 (2009), 1575-1578.
- [16] J. Caballero, D. O'Regan, K. Sadarangani, *On solutions of an integral equation related to traffic flow on bounded domains*, **Arch. Math.** 82 (2004), 551-563.
- [17] J. Caballero, J. Rocha, K. Sadarangani, *On Monotonic Solutions of an Integral Equation of Volterra Type*, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 174 (2005), 119-133.
- [18] J. Caballero, B. Lopez , K. Sadarangani, *Existence of Nondecreasing and Continuous Solutions of an Integral Equation with Linear Modification of the Argument*, **Acta Mathematica Sinica, English Series**, 9 (2007), 1719-1728.
- [19] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press. Cambridge, 1970.
- [20] G. Aslım, *Genel Topoloji*, Ege Üniversitesi Basımevi, İzmir, 1988.

- [21] C. Yıldız, *Genel Topoloji*, Gazi Kitapevi, Ankara, 2005.
- [22] B. Musayev, M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Kütahya, 2000.
- [23] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons. Inc., New York, 1978.
- [24] R. Johnsonbaugh, W. E. Pfaffenberger, *Foundations of Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.
- [25] A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley & Sons. Inc., New York, 1967.
- [26] J. Banas, K. Sadarangani, *On some measures of noncompactness in the space of continuous functions*, **Nonlinear Analysis**, 68 (2008), 377-383.
- [27] J. Banas, K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, **Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics**, Marcel Dekker, New York, Vol. 60, 1980.

## ÖZGEÇMİŞ

**Ad Soyad:** Osman KARAKURT

**Doğum Yeri ve Tarihi:** Malatya / 30.06.1977

**Adres:** Yeşilyurt Gevher Nesibe Mesleki ve Teknik  
Anadolu Lisesi MALATYA

**E-Posta:** osman-44@yandex.com

**Lisans:** İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi  
Matematik Öğretmenliği Bölümü (1994-1998)

**Yüksek Lisans:** İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik A.B.D. (2006-2009)

**Mesleki Deneyim:** Pütürge Yıbo (1998-2002), Yeşilyurt Gazi İ.O. (2002-2006),  
Yeşilyurt Nesibe Gevher Mesleki ve Teknik  
Anadolu Lisesi Matematik Öğretmeni (2006-)

**Yayın Listesi:**