

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SPİN-2 ($I=2$) İÇİN AÇISAL MOMENTUM İŞLEMCİLERİNİN
İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüseyin ÜNSAL

Fizik Anabilim Dalı

**OCAK 2015
SAMSUN**



**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



FİZİK ANABİLİM DALI

**SPİN-2 ($I=2$) İÇİN AÇISAL MOMENTUM İŞLEMCİLERİNİN
İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Hüseyin ÜNSAL
99210119**

Tezin Savuma Tarihi : 14/01/2015

Tez Danışmanı : Doç. Dr. İrfan ŞAKA

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalında

Hüseyin ÜNSAL Tarafından Hazırlanan

**SPİN-2 (I= 2) İÇİN AÇISAL MOMENTUM İŞLEMCİLERİNİN
İNCELENMESİ**

**başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 14/01/2015 tarihinde yapılan sınav ile
YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.**

Başkan : Prof. Dr. Azmi GENÇTEN

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. İrfan ŞAKA

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

..../..../...2015

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Öncelikle bu yüksek lisans tezinin hazırlanmasında her zaman desteğini gördüğüm, karşılaştığım zorluklarda yanımda olan değerli hocam Doç. Dr.İrfan ŞAKA'ya en derin saygılarımla teşekkür ederim.

Bu eğitime beraber başladığım 2011 güz dönemi yüksek lisans öğrenci grubu arkadaşlarıma destek ve yardımlarından dolayı şükranlarımı sunarım.

Yüksek Lisans eğitimim sırasında hep yanımda olan eşim Ümmügülsüm ÜNSAL, çocuklarım Enes ve Esma ile anne ve babama ayrıca teşekkür ederim.

Ocak 2015

Hüseyin ÜNSAL
Fizik Öğretmeni

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
KISALTMALAR.....	xiii
SPİN-2 ($I=2$) İÇİN AÇISAL MOMENTUM İŞLEMCİLERİNİN İNCELENMESİ.....	xv
ÖZET.....	xv
AN INVESTIGATION OF SPIN ANGULAR MOMENTUM OPERATORS FOR SPIN-2 ($I=2$).....	xvii
ABSTRACT.....	xvii
1.GİRİŞ.....	1
1.1 Tezin Amacı.....	2
1.2 Literatür Araştırması.....	3
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	7
2.1 Klasik Mekanikte Açısal Momentum.....	7
2.2 Kuantum Mekaniği ve Önergeleri.....	8
2.3 Kuantum Mekaniğinde Açısal Momentum.....	10
2.3.1 Açısal momentumun özdeğerleri.....	14
2.3.2 Açısal momentum işlemcilerinin matris değerleri.....	15
2.4 Spin Açısal Momentum.....	18
3. AÇISAL MOMENTUM İŞLEMCİLERİNİN ELDE EDİLMESİ.....	21
3.1 Küresel Tensör İşlemciler.....	21
3.1.1 İndirgenmiş matris elemanlarının hesabı.....	23
3.1.2 İki seviyeli sistemlerde ($I=1/2$) küresel tensör işlemcilerin hesaplanması.....	23
3.1.3 Yüksek mertebeden küresel tensör işlemciler.....	26
3.1.4 Üç seviyeli sistemlerde ($I=1$) için küresel tensör işlemciler.....	26
3.1.5 Spin-3/2 için küresel tensör işlemciler.....	30
3.2 Kartezyen Açısal Momentum İşlemciler.....	31
3.2.1 İki seviyeli sistemlerde ($I=1/2$) kartezyen baz işlemcilerinin hesaplanması.....	31
3.2.2 Spin-1($I=1$) için kartezyen işlemciler.....	32
3.2.3 Spin-3/2 ($I=3/2$) için kartezyen işlemciler.....	36
3.3 Spin-2 için Açısal Momentum İşlemcileri I_x, I_y, I_z 'nin Elde Edilmesi.....	41
4. BULGULAR.....	45
4.1 Spin-2 İçin Küresel Tensör İşlemciler.....	45
4.2 Spin-2 İçin Kartezyen İşlemcilerin Elde Edilmesi.....	47
4.3 Spin-2 İçin İndirgenmiş Kartezyen İşlemciler.....	62
4.4 İndirgenmiş İşlemcilerin Parçalanması.....	71
4.5.İndirgenmiş Parçalı İşlemcilerin Komutasyonları.....	77

5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	87
5.1 Spin–2 İçin Küresel Tensör İşlemciler.....	87
5.2 Spin–2 İçin Kartezyen Açısal Momentum İşlemcilerinin Elde Edilmesi....	87
5.3 Spin–2 İçin İndirgenmiş Kartezyen Açısal Momentum İşlemcileri ve Matris Temsilleri.....	88
5.4 İndirgenmiş İşlemcilerin Parçalanması.....	88
5.5 İndirgenmiş Parçalı İşlemcilerin Komutasyon Hesaplamaları.....	89
5.6 Öneriler.....	89
KAYNAKLAR.....	91
ÖZGEÇMİŞ.....	95

ÇİZELGELER LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1. Klasik mekanikteki gözlenebilirliğe karşılık gelen işlemciler.....	12
Çizelge 3.1. $I=3/2$ için küresel tensör işlemciler.....	30
Çizelge 3.2. $I=1$ için Kartezyen açısal momentum işlemcileri.....	35
Çizelge 3.3. $I=3/2$ için Kartezyen açısal momentum işlemcileri.....	40
Çizelge 4.1. $I=2$ için küresel tensör işlemciler.....	46
Çizelge 4.2. $I=2$ için Kartezyen açısal momentum işlemcileri.....	61
Çizelge 4.3. $I=2$ için indirgenmiş Kartezyen açısal momentum işlemcileri.....	64
Çizelge 4.4. $I=2$ için indirgenmiş Kartezyen açısal momentum işlemcileri ve matris temsilleri.....	65
Çizelge 4.5. $I=2$ için indirgenmiş Kartezyen açısal momentum işlemcilerinin parçalanmış matris temsilleri	75
Çizelge 4.6. İndirgenmiş parçalı açısal momentum işlemcilerinin komutasyon tablosu.....	79

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1. Açısal momentumun klasik tanımı.....	8
Şekil 2.2. $I=3/2$ olması halinde çekirdek spininin ve z eksenine üzerindeki izdüşümlerinin olası yönelimleri.....	20

KISALTMALAR

I	: Çekirdek Spin Açısai Momentumu
E	: Enerji
$\mathcal{H}$	: Hamiltonyen
ψ	: Dalga fonksiyonu
I_x, I_y, I_z	: I spinli çekirdeğin açısai momentum bileşenleri
I_+	: Yükseltme İşlemcisi
I_-	: Alçaltma İşlemcisi
h	: Planck Sabiti
m_I	: Manyetik Spin Kuantum Sayısı
P	: Momentum
$T^{(k,q)}$	: Küresel Tensör İşlemci
$C_I^{(k,q)}$	: Kartezyen Açısai Momentum İşlemci
ν	: Frekans
$V(x,y,z)$	: Potansiyel Enerji
E_k	: Kinetik Enerji
$\vec{r}$	: Parçacığın Konumu
ω	: Açısai Frekans
NMR	: Nükleer Manyetik Rezonans
EPR	: Elektron Paramanyetik Rezonans

SPİN-2 (I= 2) İÇİN AÇISAL MOMENTUM İŞLEMCİLERİNİN İNCELENMESİ

ÖZET

Spin açısai momentum Kuantum Mekaniği için çok önemli bir kavramdır. Spini sıfırdan farklı olan parçacıklar açısai momentuma sahiptir. Açısai momentum kullanılarak parçacıkların davranışları hakkında önemli bilgilere sahip olunmaktadır.

Spini-2 olan parçacık ve sistemler $(2I+1)^2=25$ adet kartezyen açısai momentum işlemcisine sahiptir. Spin- $\frac{1}{2}$, 1 ve $\frac{3}{2}$ için kartezyen açısai momentum işlemcileri elde edilmiş ve bu onaltı tane işlemci literatürde bulunmaktadır. Spin-2 için küresel tensör işlemciler kullanılarak yirmibeş adet kartezyen açısai momentum işlemcileri ilk defa bu çalışmada elde edilmiştir. Elde edilen uzun ifadeleri sadeleştirmek için indirgenme yapılmıştır. Spin-2 için açısai momentum işlemcilerinin matris temsilleri $(2I+1)(2I+1)=5 \times 5$ boyutundadır. Bu matrisler parçalama yöntemi ile parçalara ayrılmış tüm işlemcilere ait yeni ve basit bir baz seti oluşturulmuştur. Bulunan parçalı-indirgenmiş açısai momentum baz setinin matris temsilleri kullanılarak komutasyon hesaplamaları tüm işlemciler için ayrı ayrı yapılmış ve çizelge halinde gösterilmiştir.

Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar spin-2'den büyük olan sistem ve parçacıklara ait temel kartezyen açısai momentum işlemci baz setinin bulunmasına yardımcı olacaktır.

Anahtar Kelimeler: Spin-2, İşlemci, Spin Açısai Momentumu, Küresel Tensör İşlemciler, Parçalı Matris

AN INVESTIGATION OF SPIN ANGULAR MOMENTUM OPERATORS FOR SPIN-2 ($I=2$)

ABSTRACT

Spin angular momentum is an important subject for quantum mechanics. The particles and systems having non-zero spin number, have angular momentum. By using angular momentum, important information about the behavior of the particles can be obtained.

The particles and systems with the spin number 2 (Spin-2) have $(2I+1)^2 = 25$ cartesian angular momentum operators. The Cartesian operators for spin $\frac{1}{2}$, 1 and $\frac{3}{2}$ were calculated and those operators can be found in literature. For the Spin-2, 25 cartesian angular momentum operators are calculated first in this study by using the spherical tensor operators. To make those operators more simple, reduction was done. The matrix representation of angular momentum operators for spin-2 has the dimension of $(2I+1)(2I+1)=5 \times 5$. Those matrices are splitted by splitting method and the new and simple base set belonging to the operators are created. By using the representation of those splitted-reduced angular momentum base sets, commutation calculations for all operators are done separately and shown as a table.

The results of this study can be helpful to find out the fundamental cartesian angular momentum base sets belonging to particles and systems which have the spin number greater than 2.

Key Words: Spin-2, Operator, Spin Angular Momentum, Spherical Tensor Operators, Split Matrix

1. GİRİŞ

Her atomaltı parçacık yörünge hareketinden farklı olarak bir iç açısal momentuma sahiptir ve bu özellik spin açısal momentum olarak isimlendirilir. Spin açısal momentum Kuantum Mekaniği için önemli bir kavramdır. Fizikçiler, spin açısal momentumunu ifade ederken, kısa ve kolay söylendiği için “*Spin*” sözcüğünü kullanmaktadır. Spin, kütle ve yük gibi parçacığın çevresinden bağımsız olan özgün bir özelliğidir (Serway ve Beicher, 2000). Bu kavram Kuantum Kuramının sonucudur. Klasik Mekanikteki katı cisimlerin spin açısal momentumu ile Kuantum Mekaniğindeki spin açısal momentum, aynı şeyi ifade etmez. Katı cisimler bir simetri etrafındaki dönüşlerinden dolayı klasik olarak spin ve yörünge hareketlerinden dolayı da yörüngesel momentuma sahiptir. Örneğin dünya kendi etrafında dönmesi ile spin, güneş etrafında dönmesi ile yörüngesel açısal momentuma sahiptir. Kuantum Mekaniğinde böyle bir benzetme yapılamaz. Spin, parçacığın kendi eksenini etrafında dönmesi ile açıklanamamaktadır. Spin açısal momentumun klasik fizikte bir karşılığı yoktur (Dereli ve Verçin, 2000). Parçacığın, diğer parçacıklardan nasıl etkileneceğini büyük ölçüde spini belirler. Spin değerleri parçacıklar için 0, 1, 2, ... gibi tamsayı olabilirken, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, ... gibi kesikli değerlerde olabilir. Tamsayı spin değerlerine sahip parçacıklar bozon olarak adlandırılırken, kesikli değer alan parçacıklar ise fermiyon adını almaktadır. Örneğin spin değeri $\frac{1}{2}$ olan elektron fermiyondur.

Elektromanyetik enerjinin madde ile etkileşmesi sonucu oluşan ışımların davranışları incelenerek moleküllerin, atomların, çekirdeklerin yapısı ve çevresi hakkında bilgi edinilmektedir. Bu etkileşimleri inceleyen kuantum mekaniksel metotlar spektroskopi olarak adlandırılır. Başka bir ifade ile spektroskopi maddeyi oluşturan temel parçacıkların ve maddenin özelliklerinin soğurulan ya da salınan parçacıklar vasıtasıyla incelenmesidir. Madde ve parçacık analizi tayininde birçok spektroskopik yöntem kullanılmaktadır. Nükleer Manyetik Rezonans (NMR) ve Elektron Paramanyetik Rezonans (EPR) yöntemleri iki önemli spektroskopik yöntemdir. Spini sıfırdan farklı olan parçacık ve sistemler bu yöntemlerle incelebilmektedirler. Spektroskopinin ve

özellikle ESR ve NMR'ın temeli açısal momentumdur. Açısal momentum kavramı ile atomların yapısı ve moleküllerin dönme hareketleri gibi birçok özellik açıklanır.

Açısal momentum kavramı işlemciler ile ifade edilebildiğinden işlemciler önem kazanmakta ve sıklıkla kullanılmaktadır. Spini $I=1/2$ olan çekirdekler için temel işlemciler $(2I+1)^2=(2 \times 1/2+1)^2=4$ tane olup bunlar E, I_x, I_y, I_z dir. Spini $I=1$ olan çekirdekler için ise temel işlemciler $(2I+1)^2=(2 \cdot 1+1)^2=9$ tanedir ve bunlar $E, I_x, I_y, I_z, I_z^2, (I_x^2 - I_y^2), [I_x, I_z]_+, [I_y, I_z]_+, [I_x, I_y]_+$ dir. $I=3/2$ için $(2I+1)^2=(2 \times 3/2+1)^2=16$ tanedir. Bu işlemciler literatürde bulunmakta olup bu çalışmada Bölüm 3'de nasıl elde edildiği detaylı olarak anlatılmıştır.

1.1 Tezin Amacı

Kuantum mekaniksel hesaplamalar yapılırken spin açısal momentum kavramı ve bunları temsil eden işlemciler büyük önem taşımaktadır. Spin- $1/2, 1, 3/2$ 'ye ait temel baz işlemci setleri literatürde bilinmektedir. Bu çalışmada spin-2'den büyük durumlara ait baz setlerinin oluşturulmasına basamak teşkil edecek spin-2'ye ait kartezyen açısal momentum işlemci baz setinin bulunması amaçlanmıştır.

Bu tez çalışmasında kartezyen açısal momentum işlemcileri üzerinde durulmuş, yapılan çalışmalar aşağıda sıralanmıştır.

- Spin- $1/2, 1$ ve $3/2$ olan çekirdeklerin kartezyen açısal momentum işlemcileri bilinmekte olup, spin-2 olan sistem ve parçacıklar için bilinmemektedir. Bu çalışmada spin-2 olan sistem ve parçacıklar için bilinmeyen kartezyen açısal momentum işlemcilerinin elde edilmesi amaçlanmıştır.
- Spin-2 için öncelikle küresel tensör işlemciler elde edilerek , literatürde mevcut olan bu küresel tensör işlemcilerin katsayılarının yeniden hesaplanması düşünülmüştür.
- Spin-2 için bulunan küresel tensör işlemciler kullanılarak 25 adet kartezyen açısal momentum işlemcileri elde edilmiştir. Bunlardan 16 tanesinin daha düşük spin sistemleri için bulunan işlemciler olduğu görülmüştür.
- Spin-2 için bulunan kartezyen açısal momentum işlemcilerine bakıldığında aynı açısal momentum işlemcisinin birden fazla ifadede

yer aldığı görülmüş ve bu işlemcilerin sadece bir ifadede gösterilmesi yeterli olacağından işlemcilerimiz indirgenerek indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcileri elde edilmiştir. Maple programı kullanılarak indirgenmiş açısal momentum işlemcilerinin matris temsilleri ayrıca bulunmuş ve çizelge halinde gösterilmiştir.

- İndirgenmiş açısal momentum işlemcilerinin matris temsilleri parçalı olarak ifade edilmiş ve ilk defa C1, C2, C3, ... , C25 şeklide baz seti olarak gösterilerek çizelge haline getirilmiştir.
- İndirgenmiş parçalı açısal momentum işlemcilerinin komutasyon hesaplamaları tüm işlemciler için ayrı ayrı bulunmuş ve sonuçlar çizelge halinde gösterilmiştir.

1.2 Literatür Araştırması

Spin, kısa ve anlaşılması zor bir kavram olmasının yanında Kuantum Mekaniksel durumların tasvirinde kullanılan önemli bir özelliktir. Literatürde spin açısal momentum ve kullanım alanlarına yönelik yazılmış birçok kitap mevcuttur (Ernst, 1987; Chandrakumar, 1996; Levitt, 2000; Devanathan, 2002; Mehring ve Weberruß, 2001). Ayrıca Web of Science’de dar bir arama seçeneği olan “*makale adları*” baz alınarak yapılan anahtar kelime taramasında; “*spin*” 133045 tane makalede, “*spin dynamics*” 6191 makalede, “*angular momentum*” 4777 makalede ve “*spin angular momentum*” 306 makalede geçmektedir.

Spin-1/2 için küresel tensor işlemciler kullanılarak kartezyen açısal momentum işlemcileri elde edilmiştir (Bowden ve Hutchison, 1986). P. Allard ve T. Härd tarafından 2001 yılında, küresel tensör işlemciler kullanılarak kartezyen açısal momentum işlemcilerinin nasıl elde edildiği gösterilmiş ve farklı spin durumları için genel bir ifade elde edilmiştir. Önerilen bu ifade ile tüm spin durumları için kartezyen spin açısal momentum işlemcileri türetilmektedir. Spin-1 için kartezyen açısal momentum işlemcileri elde edilerek NMR deneylerinin teorik olarak açıklanmasında kullanılmıştır (Gençten ve Şaka, 2006; Şaka, 2007). Literatürde spin-3/2’ye ait baz seti ve matris temsilleri A. Gün ve Ark. (2011) tarafından elde edilmiş ve kuantum bilgi teorisinde kullanılmıştır.

Spin-3/2, spin-2, spin-5/2 için tensör operatör gösterimini kullanılarak yoğunluk matrisi hesaplamaları ile çok geçiş içeren Kuantum NMR deneylerine

uygulamasını yapmıştır (Bowden ve Ark. 1986). Bu çalışmada ayrıca tensör işlemciler matris gösterimi spin-3/2, spin-2, spin-5/2 için simetrik ve anti simetrik olarak parçalama yöntemi kullanılmıştır. Böylece tensör operatörlerin NMR pulsuları etkisindeki gelişimleri daha kolay hesaplanmıştır. Chandrakumar (1984) spin-1 içeren sistemlerin çarpım işlemci teorisi ile incelenmesiyle ilgili çalışmalar yapmış ve “spin-1 NMR” (1996) başlığı altında bu çalışmalarını kitaplaştırmıştır. Bu kitabında spin-1 içeren sistemlere ait temel bağıntılar ile katı ve sıvı NMR için uygulamalarından bahsetmiştir. A. J. Vega (1992) çalışmasında spin-3/2 için operatör baz seti oluştururken matrisleri parçalama yöntemini kullanmıştır. Yarım spinli kuadrapol çekirdeklerin MAS NMR deneyi deneysel ve yoğunluk matrisi kuramı ile incelenmiş ve spin-3/2 ‘ye ait matrislerin parçalanması yönteminden yararlanılmıştır (Vega, 1992). Spin-5/2‘den spin-1/2‘ye polarizasyon transferi olan INEPT deneyi deneysel olarak incelenmiştir (Kao and Grey, 1998). Bu çalışmada ayrıca spin-1/2 ve spin-3/2 çifti için yoğunluk matrisi hesaplamaları yapılmış ve spin-3/2‘ye ait matrislerin parçalanması gösterilmiştir. Tensör operatör baz setleri kullanılarak çiftlenime sahip kuadrapol çekirdeklerinin NMR tekniği ile incelenmiştir (Kemp-Harper ve Ark. 2001).

Spin-3/2 içeren çekirdekler için çarpım işlemci teorisi ve 2-boyutlu J çözümlü NMR deneyine uygulamaları yapılmıştır (Gençten ve Ark., 2002). Bunun yanı sıra bu çalışmada spin-3/2‘ye ait matrisler parçalı olarak kullanılmıştır. NMR’da kuadrapol (çoklu) etkileşmeleri spin açısal momentum kavramı kullanılarak incelenmiştir (Bain A. D, 2003). Spin-3/2‘ye ait baz setleri kullanılarak kuadrapol çekirdeklerin NMR deneylerine ait teorik hesaplamaları yapılmıştır (Bain, 2012). IS (I=1/2, S=3/2) spin sistemi için çarpım işlemci teorisi tamamlanmıştır (Daşgın, 2013).

“Ising Model” ferromanyetik maddelerin incelenmesine yönelik matematiksel bir modeldir. Bu modelde komşuları ile etkileşen atom spinlerinin manyetik dipol momentlerinin kullanılması esastır. Spin-1/2, spin-1 ve spin-3/2 içeren sistemlerin Ising modeli ile incelenmesine yönelik literatürde birçok çalışma mevcuttur (Keneyoshi ve Ark., 1992; Keneyoshi ve Ark., 1993; Keneyoshi, 1995; Ekiz, 2005; Albayrak ve Alcı, 2005). Spin-2 ve spin-5/2 karışımı ile oluşan sistemin Ising modeli ile incelenmiştir (Keneyoshi ve Ark., 1998; Nakamura ve Ark., 1999; Nakamura2000; Wei ve Ark., 2009; Mohamad ve Ark., 2009; Keskin ve Ark., 2009;

Wang ve Ark.,2011;Ertaş ve Ark., 2012; Filho ve Ark., 2013; Cruz ve Ark., 2013). Ising modeli kullanılarak çiftlenimli çekirdek zincirlerinde kuantum bilgi teorisi incelenmiştir (Lopez ve Ark., 2008).

Son yılların ilgi duyulan çalışma alanlarından biri de Kuantum Bilgi Teorisidir. Kuantum mekaniksel spin sistemleri (kübit) kullanılarak bilgi saklama ve işleme esasına dayanmaktadır. Bu şartlarda oluşturulacak bir bilgisayarın son derece hızlı işlem yapması nedeniyle günümüz için çok önemli bir cihaz olacaktır. Spin kavramının kuantum bilgisayarlarının alt yapısında kullanımı detaylı olarak incelenmiştir (Mehring, 1999). Bu çalışma, Kuantum bilgisayarlarında spini sıfırdan farklı olan çekirdek ve elektronların kullanılmasına, kuantum mantık kapılarının oluşturulmasına, NMR’da kullanılan pulsların ifade edilmesine yöneliktir. Kuantum mekaniksel spin sistemleri kullanılarak NMR Kuantum bilgisayarının teorik alt yapısı oluşturmaya çalışılmıştır (Jones, 2000). Kuantum bilgi noktalarında spintronics ve kuantum bilgi teorisi için elektron spinlerinin incelenmesi Engel ve Ark. (2001) tarafından yapılmıştır. Kuantum bilgisayarlarında kullanılmak üzere NMR teknikleri ile ilgili kapsamlı bir çalışma yapılmıştır (Vandersypen, 2004). Moleküler spin kümeleri ile oluşan kübitlerin kuantum bilgi teorisinde kullanımı incelenmiştir (Affront ve Ark., 2006). SI ($S=3/2$, $I=1/2$) spin sistemi için Kuantum dolanıklılık durumu incelenmiştir (Gün ve Gençten, 2011). SI ($S=3/2$, $I=3/2$) spin sistemi için 4 kübitlik kuantum dolanıklılığı oluşturulmuştur (Gün ve Çakmak, 2013). NMR spektroskopisi kullanılarak spinleri yarım olan “kübit” olarak isimlendirilen çekirdeklerde bilgi işlenmesi ve mantık kapıları oluşturulmasına yönelik yapılmış birçok teorik ve deneysel çalışma vardır (Mehring, 1999; Jones, 2001; Vandersypen ve Chuang, 2004; Ramanathan ve Ark., 2004; Güleç ve Bahçeli, 2005). Spin-1 olması durumunda çekirdeklerde bilgi saklama işlevi “kütrit” olarak isimlendirilen sistemlere yaptırılmaya çalışılmaktadır (Cerf ve Ark., 2002; Grudka ve Wojcik, 2003; Lawrence, 2004; Zhua ve Ark., 2005; Zhang ve Ark, 2005; Zhang ve Li, 2006a; 2006b).

2. TEMEL KAVRAMLAR

Klasik Mekanik doğada gerçekleşen ve gözle görülen olay ve cisimleri incelemiş ve bunları açıklamaya çalışmıştır. Yer, enerji, momentum ve açısal momentum gibi fiziksel nicelikler Klasik Mekaniğin ilgi alanına girmektedir. Newton tarafından ifade edilen kanunlar ise Klasik Mekaniğin temelini oluşturmuştur.

20. Yüzyıldan itibaren elektron, proton, nötron gibi elementer parçacıkların davranışları açıklanmaya çalışıldığında Klasik Mekanikteki ifadelerin yetersiz kaldığı görülmüştür. De Broglie, Heisenberg, Max Planck ve Schrödinger gibi fizikçilerin çalışmaları sonucunda dalga kuramı ortaya çıkmış ve hareket eden parçacıkların sahip olduğu özelliklerinin yanında kendilerine eşlik eden dalganında bulunduğu ifade edilmiştir. Bu dalganın özelliklerinin bilinmesi proton, elektron gibi elementer parçacıkların durumlarının ifade edilmesini sağlamıştır.

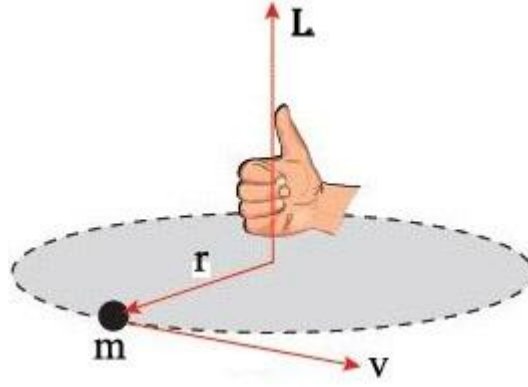
Yörünge hareketi yapan parçacıklar incelendiğinde açısal momentum kavramı ile karşılaşılır. Bu kavram atomların yapısı ve parçacıkların dönme hareketi hakkında bize bilgi vermektedir. Klasik Mekanikte açısal momentum her değeri alabilirken Kuantum Mekaniğinde kesikli değerler almaktadır. Açısal Momentum Nükleer Manyetik Rezonans ve Elektron Spin Rezonans'ında temelini oluşturmaktadır.

2.1 Klasik Mekanikte Açısal Momentum

Doğrusal momentumun belirli bir noktaya göre momenti Klasik Mekanikte açısal momentum olarak ifade edilmekte ve L harfi ile gösterilmektedir. Buna göre;

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.1)$$

biçiminde yazılır. Burada görüldüğü gibi açısal momentum cisimlerin kütlesine ve hızına bağlı büyüklüktür.



Şekil 2.1. Açısal momentumun klasik tanımı.

Şekil 2.1 'de L 'nin klasik mekanikteki tanımı gösterilmiştir. Doğrusal momentum x, y, z bileşenleri cinsinden $\vec{P} = P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + P_z \hat{k}$ biçiminde ve parçacığın konumu $\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$ şeklinde ifade edilirse L 'nin bileşenleri,

$$\begin{aligned} \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \\ &= (y P_z - z P_y) \hat{i} + (z P_x - x P_z) \hat{j} + (x P_y - y P_x) \hat{k} \\ &= \ell_x \hat{i} + \ell_y \hat{j} + \ell_z \hat{k} \end{aligned} \quad (2.2)$$

olur. Buradan hareketle hız ve konum istenilen her değere sahip olabildiğinden Klasik Mekanikte açısal momentum her değeri alabilmektedir.

2.2 Kuantum Mekanikliği ve Önergeleri

Klasik Mekanikte etrafımızda gerçekleşen olaylar incelenmiş ve açıklanmaya çalışılmıştır. Bu çalışmalarda momentum hız ve konum vektörü ile cisimlerin durumları belirlenebilmiştir. Kuantum kuramı Max Planck'ın ifade ettiği "Kuantum Hipotezi" ile başlamaktadır. Max Planck çalışmalarının sonucunda ısıtılan maddelerden yayılan enerjinin sürekli olmadığını, kesikli değerler aldığını gözlemlemiş ve bu enerji değerlerini ifade ederken kendi adı ile adlandırılan planck sabitini kullanmıştır. Buna göre kesikli değerler alan bu kuantum enerjisi $E = h\nu$ değerindedir. Burada h değeri planck sabiti olup $6,62 \cdot 10^{-34}$ js dir. Einstein, Max Planck'ın bu denklemini Fotoelektrik olayında, Niels Bohr kendi adı ile anılan atom modelini açıklamakta ve De Broglie dalga kuramını ifade etmekte kullanmıştır.

Heisenberg 'in belirsizlik ilkesinde de aynı şekilde planck sabiti karşımıza çıkmaktadır. Heisenberg belirsizlik ilkesine göre yer ve momentum aynı anda ölçülemez ve klasik mekanikte olduğu gibi belirlenemez (Köksal ve Köseoğlu, 2010). Tüm bu gelişmelerden sonra Einstein, Schrödinger gibi bilim adamları Kuantum Mekaniği teorisini kurmuşlardır. Kuantum mekaniği teorisi beş önerme ile ifade edilmektedir.

Önerme 1: Hareketli her sistem için; konum, momentum, açısal momentum gibi sistemin değişkenleri ile zamanın fonksiyonu olan ve bu sistemin fiziksel özelliklerinin bütün tahminleri elde edilebilen $\psi(r_1, r_2, r_3, \dots, t)$ dalga fonksiyonu vardır.

Önerme 2: Kuantum Mekaniğinde her dinamik değişken hermityen işlemci ile temsil edilir. Başka bir ifade ile gözlenebilirler işlemcilere karşılık gelmektedir.

İşlemcilere örnekler ilerleyen bölümlerde verilmiştir. İşlemciler genellikle şapka kullanılarak ifade edilmekte olup bu çalışmada şapka kullanımı ile gösterim yapılmamıştır.

Önerme 3: Kuantum Mekaniğinde her fiziksel kavram operatör ile gösterilmekte ve bu operatörler sistemi ifade eden özfonksiyonunlara uygulandığında $A\psi = a\psi$ elde edilmektedir. Burada “a” değeri, A operatörünün özdeğeridir. Örneğin momentumun ölçülmesi göz önüne alınırsa, momentumun x bileşenine karşılık gelen operatör $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ işlemcisidir ve bunun sağladığı özdeğer denklemi,

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi_n = P_x \psi_n \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada “P_x” momentum x bileşeni işlemcisinin özdeğeridir.

Buradan hareketle fiziksel gözlenebilirler yani konum, momentum, enerji gibi ölçülebilen niceliklere işlemcilerin özdeğerleri karşılık gelmekte ve bu değerler reel olmaktadır. Başka bir ifade ile Kuantum Mekaniksel bu işlemcilerimiz özdeğerleri reel olan işlemcilerdir. Bu koşuldan hareketle A işlemcisinin gözlenebilir olması için hermityen olması gerekir. Hermityen olmayan işlemciler gözlenebilir karşılık gelmezler. Hermityen işlemcilerin ise özdeğerleri gerçek iken özfonksiyonları da diktir. Hermityenlik koşulu ise,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^* A \psi_n d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n A^* \psi_m^* d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} (A \psi_m)^* \psi_n d\tau \quad (2.4)$$

olarak genel ifade ile gösterilir. Burada ψ_m ve ψ_n iyi davranışlı fonksiyonlardır.

Önerme 4: Hermityen bir işlemci ile temsil edilen fiziksel dinamikler, ψ dalga fonsiyonu ile temsil edilen bir sistem üzerinde ölçüldüğünde elde edilen ölçüm serisinin ortalaması bu gözlenebilire karşılık gelen işlemcinin beklenen değerine eşittir. Buna göre beklenen değer;

$$\langle A \rangle = \frac{\int \psi^* A \psi d\tau}{\int \psi^* \psi d\tau} \quad (2.5)$$

ifadesine eşittir. Dalga fonksiyonu ψ eğer normalize edilmiş ise paydadaki integral 1'e eşit olur. Bu durumda

$$\langle A \rangle = \int \psi^* A \psi d\tau \quad (2.6)$$

şeklinde yazılır.

Önerme 5: Sitemi belirleyen dalga fonksiyonunun zamanla değişimi zamana bağlı Schrödinger denklemi tarafından kontrol edilir. Başka bir ifade ile durum fonksiyonu zamanla, zamana bağlı Schrödinger denklemi,

$$\mathcal{H} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (2.7)$$

ye göre gelişir. Burada $\mathcal{H}$ sistemin toplam Hamiltonyen işlemcisidir.

2.3 Kuantum Mekaniğinde Açısal Momentum

Klasik Mekanikte açısal momentum ifadesi Bölüm 2.1 'de ifade edildiği gibi;

$$\begin{aligned} \ell_x &= yP_z - zP_y \\ \ell_y &= zP_x - xP_z \\ \ell_z &= xP_y - yP_x \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklindedir.

Kuantum Mekaniğinde açısal momentum bileşenlerinin karşılıklarına bakıldığında;

$$\begin{aligned} \ell_x &= -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \ell_y &= -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \ell_z &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

biçiminde olup, $P_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, $P_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$, $P_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$ şeklinde tanımlıdır.

Gözlenebilirlerin aynı anda ölçülebilmesinde komutatör kavramı ile karşılaşılır. İki gözlenebilirin aynı anda ölçülebilmesi için birbirlerini komite ediyor olmaları gerekmektedir. Bir X işlemcisinin Y işlemcisi ile komutasyon bağıntısı,

$$[X, Y] = XY - YX \quad (2.10)$$

şeklinde verilir. Bu işlemin sonucu sıfır ise X ve Y işlemcisi birbirini komite etmektedir. Diğer bir ifade ile bu iki gözlenebilir aynı anda ölçülebilmektedir. Komutatörlerin bazı özellikleri Denk. 2.11'de verilmiştir.

$$\begin{aligned} [X, Y] &= XY - YX = -(YX - XY) = -[Y, X] \\ [cX, Y] &= cXY - YcX = c(XY - YX) = c[X, Y] \\ [X, YZ] &= [X, Y]Z + Y[X, Z] \\ [X, [Y, Z]] &= X[Y, Z] - [Y, Z]X \end{aligned} \quad (2.11)$$

Çizelge 2.1. Kuantum Mekanikinde bazı gözlenebilirliklere karşılık gelen işlemciler

Adı	Klasik Gösterimi	Kuantum Mekaniksel Gösterimi	İşlemci Karşılığı
Momentum	P_x	$\hat{P}_x$	$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$
	P_y	$\hat{P}_y$	$-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$
	P_z	$\hat{P}_z$	$-i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$
	P	$\hat{P}$	$-i\hbar (i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z})$
Toplam Enerji	E	$\hat{H}$	$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x,y,z)$
Açısal Momentum	$l_x = yP_z - zP_y$	$\hat{L}_x$	$-i\hbar (y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y})$
	$l_y = zP_x - xP_z$	$\hat{L}_y$	$-i\hbar (z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z})$
	$l_z = xP_y - yP_x$	$\hat{L}_z$	$-i\hbar (x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})$

Açısal momentum işlemcilerinin komutasyon bağıntılarından ℓ_x , ℓ_y nin komutatörü bulunursa,

$$\begin{aligned}
 [\ell_x, \ell_y] &= [(yP_z - zP_y), (zP_x - xP_z)] \\
 &= [yP_z, zP_x] - [yP_z, xP_z] - [zP_y, zP_x] + [zP_y, xP_z] \\
 &= y[P_z, z]P_x - 0 - 0 + x[z, P_y]P_z \\
 &= i\hbar(-yP_x + xP_y) = i\hbar \ell_z
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

elde edilir. Bakıldığında ℓ_x, ℓ_y nin komutatörü üçüncü işlemci ℓ_z 'i verdi. Benzer şekilde ℓ_x, ℓ_z nin komutatörü bulunursa,

$$\begin{aligned}
[\ell_x, \ell_z] &= [(yP_z - zP_y), (xP_y - yP_x)] \\
&= [yP_z, xP_y] - [yP_z, yP_x] - [zP_y, xP_y] + [zP_y, yP_x] \\
&= x[y, P_y]P_z - 0 - 0 + z[P_y, y]P_x \\
&= i\hbar(xP_z - zP_x) = -i\hbar \ell_y
\end{aligned} \tag{2.13}$$

olur. Burada Denk. 2.11'den $[\ell_z, \ell_x] = i\hbar \ell_y$ ifadeside yazılabilir.

ℓ_y, ℓ_z in komutatörü hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
[\ell_y, \ell_z] &= [(zP_x - xP_z), (xP_y - yP_x)] \\
&= [zP_x, xP_y] - [zP_x, yP_x] - [xP_z, xP_y] + [xP_z, yP_x] \\
&= z[P_x, x]P_y - 0 - 0 + y[x, P_x]P_z \\
&= i\hbar(-zP_y + yP_z) = -i\hbar \ell_x
\end{aligned} \tag{2.14}$$

elde edilir. Bulunan ifadeler toplu halde yazılırsa;

$$\begin{aligned}
[\ell_x, \ell_y] &= i\hbar \ell_z \\
[\ell_y, \ell_z] &= i\hbar \ell_x \\
[\ell_z, \ell_x] &= i\hbar \ell_y
\end{aligned} \tag{2.15}$$

şeklinde olur. Bu üç bağıntı açısal momentum kuramının temelidir. Komutasyon bağıntıları Denk. 2.15'de verildiği gibi olan üç işlemci açısal momentum özelliklerine sahiptir. Bu üç işlemci birbirini komite etmediğinden aynı anda ölçülemezler. Komite etme durumuna göre ℓ^2 ve ℓ_y 'in aynı anda ölçülebileceğine bakılırsa,

$$\begin{aligned}
[\ell^2, \ell_y] &= [\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2, \ell_y] = [\ell_x^2, \ell_y] + [\ell_y^2, \ell_y] + [\ell_z^2, \ell_y] \\
&= \ell_x [\ell_x, \ell_y] + [\ell_x, \ell_y] \ell_x + 0 + \ell_z [\ell_z, \ell_y] + [\ell_z, \ell_y] \ell_z \\
&= i \hbar \ell_x \ell_z + i \hbar \ell_z \ell_x - i \hbar \ell_z \ell_x - i \hbar \ell_x \ell_z = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

sonucuna varılır. Benzer şekilde $[\ell^2, \ell_x] = [\ell^2, \ell_z] = 0$ olduğundan açısal momentum bileşenleri açısal momentum büyüklüğünün karesi ile aynı anda ölçülebilirler.

Açısal momentum için tanımlanan diğer işlemciler ,

$$\begin{aligned}
\ell_+ &= \ell_x + i\ell_y \\
\ell_- &= \ell_x - i\ell_y
\end{aligned} \tag{2.17}$$

dir. Bu işlemcilere yükseltme ve alçaltma işlemcileri denir. ℓ_x ve ℓ_y işlemcilerini ℓ_+ ve ℓ_- cinsinden yazıldığında $\ell_x = 1/2 (\ell_+ + \ell_-)$ ve $\ell_y = 1/2i (\ell_+ - \ell_-)$ olur. Bu işlemcilerin komutasyon bağıntılarına örnek olarak,

$$\begin{aligned}
[\ell_+, \ell_x] &= [\ell_x + i\ell_y, \ell_x] = [\ell_x, \ell_x] + i[\ell_y, \ell_x] \\
&= 0 + i(-i \hbar \ell_z) = \hbar \ell_z
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
[\ell_-, \ell_z] &= [\ell_x - i\ell_y, \ell_z] = [\ell_x, \ell_z] - i[\ell_y, \ell_z] \\
&= -i \hbar \ell_y - i(i \hbar \ell_x) = \hbar (\ell_x - i\ell_y) = \hbar \ell_-
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
[\ell_+, \ell_-] &= [\ell_x + i\ell_y, \ell_x - i\ell_y] \\
&= [\ell_x, \ell_x] - i[\ell_x, \ell_y] + i[\ell_y, \ell_x] + [\ell_y, \ell_y] \\
&= -i(i \hbar \ell_z) + i(-i \hbar \ell_z) = 2 \hbar \ell_z
\end{aligned} \tag{2.20}$$

verilebilir. Bunun dışında $[\ell^2, \ell_+] = [\ell^2, \ell_-] = 0$ 'dır. ℓ_+ ve ℓ_- işlemcileri açısal momentum işlemlerinde sıklıkla kullanılarak bir durumdan diğer durumu elde etmeyi sağlamaktadır. ℓ_+ ve ℓ_- işlemcileri Hermityen olmayıp, gözlenebilirliğe de karşılık gelmezler.

2.3.1 Açısal Momentumun Özdeğerleri

Özdurumu $|\ell, m\rangle$ olarak aldığımızda ℓ_z için özdeğer denklemi,

$$\ell_z |\ell, m\rangle = m \hbar |\ell, m\rangle \quad (2.21)$$

biçimindedir. Burada $m \hbar$ değeri ℓ_z işlemcisinin özdeğeridir. Manyetik kuantum sayısı olarak adlandırılan m değeri ise $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ şeklinde değişir.

ℓ_+ ve ℓ_- işlemcilerinin etkileri ifade edilmeye çalışılırsa;

$$\begin{aligned} \ell_z \ell_+ |\ell, m\rangle &= \ell_+ \ell_z |\ell, m\rangle + \ell_z \ell_+ |\ell, m\rangle - \ell_+ \ell_z |\ell, m\rangle \\ &= \ell_+ \ell_z |\ell, m\rangle + [\ell_z \ell_+] |\ell, m\rangle \\ &= \ell_+ m \hbar |\ell, m\rangle + \hbar \ell_+ |\ell, m\rangle \\ \ell_z \ell_+ |\ell, m\rangle &= (m+1) \hbar \ell_+ |\ell, m\rangle \end{aligned} \quad (2.22)$$

bulunur. Bu ifade $\ell_+ |\ell, m\rangle$ durumunda ℓ_z işlemcisinin $(m+1) \hbar$ özdeğerine karşılık gelen bir öz durumudur. Buradan ℓ_+ işlemcisinin bir öz duruma uygulanması ℓ_z 'in özdeğerini bir artırmakta olup, özdeğerdeki bu artış nedeniyle yükseltme işlemcisi adını almaktadır. Aynı şekilde alçaltma işlemcisi için,

$$\ell_z \ell_- |\ell, m\rangle = (m-1) \hbar \ell_- |\ell, m\rangle \quad (2.23)$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde öz durumu $|\ell, m\rangle$ olarak aldığımızda, ℓ^2 açısal momentum büyüklüğünün karesinin özdeğer denklemi;

$$\ell^2 |\ell, m\rangle = \ell(\ell+1) \hbar^2 |\ell, m\rangle \quad (2.24)$$

şeklindedir. Tüm bu ifadelerden hareketle m değeri $+\ell, \ell-1, \ell-2, \dots, -\ell$ değerlerini alır ve sayısı $(2\ell+1)$ tanedir.

2.3.2 Açısal Momentum İşlemcilerinin Matris Değerleri

ℓ_z işlemcisinin matris temsilini elde etmek için Denk.2.21 ifadesi kullanılır ve;

$$[\ell_z]_{m,m'} = \langle \ell, m | \ell_z | \ell, m' \rangle = \langle \ell, m | m' \hbar | \ell, m' \rangle = m' \hbar \delta_{m,m'} \quad (2.25)$$

bulunur. ℓ_z işlemcisinin matris temsili $(2\ell + 1)(2\ell + 1)$ boyutlu karesel bir matristir ve köşegen elemanları $m\hbar = \ell\hbar + (\ell - 1)\hbar, \dots, -\ell\hbar$ dır. Örnek olarak yine $\ell = 2$ alırsak matris temsili 5x5 boyutundadır.

$$\ell_z = \begin{bmatrix} 2\hbar & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\hbar & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\hbar \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

olarak bulunur.

ℓ^2 işlemcisinin matris temsilini elde etmek için Denk.(2.24)'de bulunan $\ell^2 |\ell, m\rangle = \ell(\ell + 1)\hbar^2 |\ell, m\rangle$ ifadesinden yararlanılabilir. Buna göre ℓ^2 'nin özdeğerleri m değerinden etkilenmezler. Açısal momentum değeri için m sayısı $(2\ell + 1)$ değerini alır ve $|\ell, m\rangle$ bazında matris temsili $(2\ell + 1)(2\ell + 1)$ boyutlu karesel bir matristir. Matris elemanları;

$$\begin{aligned} [\ell^2]_{m,m'} &= \langle \ell, m | \ell^2 | \ell, m' \rangle = \langle \ell, m | \ell(\ell + 1)\hbar^2 | \ell, m' \rangle \\ &= \ell(\ell + 1)\hbar^2 \delta_{m,m'} \end{aligned} \quad (2.27)$$

dir. Örnek olarak $\ell = 2$ alınırsa ℓ^2 matrisi 5x5 boyutlu bir matristir ve köşegen elemanları $\ell(\ell + 1)\hbar^2 = 2(2+1)\hbar^2 = 6\hbar^2$ 'dir. Matris gösterimi ise;

$$\ell^2 = \begin{bmatrix} 6\hbar^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\hbar^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\hbar^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\hbar^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6\hbar^2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

dir. ℓ_+ işlemcisinin matris temsilini bulmak için $\ell_- \ell_+$ çarpımı bulunursa;

$$\begin{aligned} \ell_- \ell_+ &= (\ell_x - i\ell_y)(\ell_x + i\ell_y) \\ &= \ell_x^2 + i\ell_x\ell_y - i\ell_y\ell_x + \ell_y^2 = \ell_x^2 + \ell_y^2 + i[\ell_x, \ell_y] = \ell_x^2 + \ell_y^2 + i(i\hbar\ell_z) \\ &= \ell_x^2 + \ell_y^2 - \hbar\ell_z = \ell^2 - \ell_z^2 - \hbar\ell_z \end{aligned} \quad (2.29)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle \ell, m | \ell_- \ell_+ | \ell, m \rangle &= \langle \ell, m | \ell^2 - \ell_z^2 - \hbar \ell_z | \ell, m \rangle \\
&= \ell(\ell + 1) \hbar^2 - m^2 \hbar^2 - m \hbar^2 \\
&= \hbar^2 [\ell(\ell + 1) - m(m + 1)]
\end{aligned} \tag{2.30}$$

yazılabilir. $(\ell_-)^* = \ell_+$ olduğundan Denk.(2.30),

$$\langle \ell_+ (\ell, m) | \ell_+ (\ell, m) \rangle = \hbar^2 [\ell(\ell + 1) - m(m + 1)] \tag{2.31}$$

biçimine dönüştürülebilir. Eşitliğin sol tarafı $\ell_+ | \ell, m \rangle$ 'in karesidir. Sonuçta ℓ_+ işlemcisi durumun m sayısını 1 artırır ve,

$$\ell_+ | \ell, m \rangle = \sqrt{\ell(\ell + 1) - m(m + 1)} \hbar | \ell, m + 1 \rangle \tag{2.32}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade genellenirse,

$$\langle \ell, m' | \ell_+ | \ell, m \rangle = \sqrt{\ell(\ell + 1) - m(m + 1)} \hbar \delta_{m', m+1} \tag{2.33}$$

olur. Örnek olarak $\ell = 2$ için ℓ_+ işlemcisinin matris temsili,

$$\ell_+ = \begin{bmatrix} 0 & 2\hbar & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}\hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6}\hbar & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\hbar \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

olarak bulunur. ℓ_- işlemcisinin matris temsilini elde etmek için $\ell_+ \ell_-$ çarpımı bulunursa;

$$\begin{aligned}
\ell_+ \ell_- &= (\ell_x + i\ell_y)(\ell_x - i\ell_y) \\
&= \ell_x^2 - i\ell_x \ell_y + i\ell_y \ell_x + \ell_y^2 = \ell_x^2 + \ell_y^2 - i[\ell_x, \ell_y] = \ell_x^2 + \ell_y^2 - i(i\hbar \ell_z) \\
&= \ell_x^2 + \ell_y^2 + \hbar \ell_z = \ell^2 - \ell_z^2 + \hbar \ell_z
\end{aligned} \tag{2.35}$$

sonucu elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\langle \ell, m | \ell_+ \ell_- | \ell, m \rangle &= \langle \ell, m | \ell^2 - \ell_z^2 + \hbar \ell_z | \ell, m \rangle \\
&= \ell(\ell + 1) \hbar^2 - m^2 \hbar^2 + m \hbar^2 \\
&= \hbar^2 [\ell(\ell + 1) - m(m - 1)]
\end{aligned} \tag{2.36}$$

olur. $(\ell_+)^* = \ell_-$ olduğundan Denk.(2.36) yeniden yazılırsa,

$$\langle \ell_- (\ell, m) | \ell_- (\ell, m) \rangle = \hbar^2 [\ell(\ell + 1) - m(m - 1)] \tag{2.37}$$

olur. Eşitliğin sol tarafı $\ell_- | \ell, m \rangle$ 'in karesidir. Sonuçta ℓ_- işlemcisi durumun m sayısını 1 azaltacağından,

$$\ell_- | \ell, m \rangle = \sqrt{\ell(\ell + 1) - m(m - 1)} \hbar | \ell, m - 1 \rangle \tag{2.38}$$

sonucuna varılır. Daha genel olarak,

$$\langle \ell, m' | \ell_- | \ell, m \rangle = \sqrt{\ell(\ell + 1) - m(m - 1)} \hbar \delta_{m', m-1} \tag{2.39}$$

ifadesi yazılabilir. Örnek olarak $\ell = 2$ için ℓ_- işlemcisinin matris temsili,

$$\ell_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\hbar & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}\hbar & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}\hbar & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\hbar & 0 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

dir.

ℓ_x ve ℓ_y nin matris temsilleri $\ell_x = 1/2(\ell_+ + \ell_-)$ ve $\ell_y = 1/2i(\ell_+ - \ell_-)$ ifadelerinden yararlanarak Denk.(2.32) ve Denk. (2.38) kullanılıp kolayca bulunabilir.

2.4 Spin Açısai Momentum

1922 yılında Stern–Gerlach deneyi sonucunda parçacıkların bir iç yapısı olduğu ortaya çıktı. Daha sonra bu iç yapının bir çeşit açısal momentum olması gerektiği anlaşıldı. Bununla ilgili doğru yorum 1925 yılında Uhlenbeck ve Goudsmit adlı

fizikçiler tarafından ortaya atıldı. Buna göre her elemanter parçacığın yörünge hareketinden bağımsız olarak bir iç açısal momentumu yani spini vardır ve bu değer sabittir (Karaoğlu, 1997). Spin, bir parçacığın kendine özgü en önemli özelliğidir. Bu kavram Kuantum Kuramının bir sonucu olup, büyük ölçüde parçacığın diğer parçacıklardan nasıl etkileneceğini belirler. Spin değerleri parçacıklar için 0,1,2, ... gibi tamsayı olabilirken, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, ... gibi kesikli değerlerde alabilir. Örnek olarak elektron ve proton için spin değeri $\frac{1}{2}$ dir. Spin $\hat{S}$ işlemcisi ile gösterilir. Genellikle çekirdeğin spini ise I ile gösterilir. Kolaylık olması açısından spin açısal momentum kavramı spin olarak ifade edilmektedir. Spin açısal momentum açısal momentum ile benzer kavramlar olduğundan;

$$[I_x, I_y] = i \hbar I_z, [I_y, I_z] = i \hbar I_x, [I_z, I_x] = i \hbar I_y \quad (2.41)$$

yazılabilir. Açısal momentum için elde edilen bağıntılar,

$$I_z |I, m_I\rangle = m_I \hbar |I, m_I\rangle \quad (2.42)$$

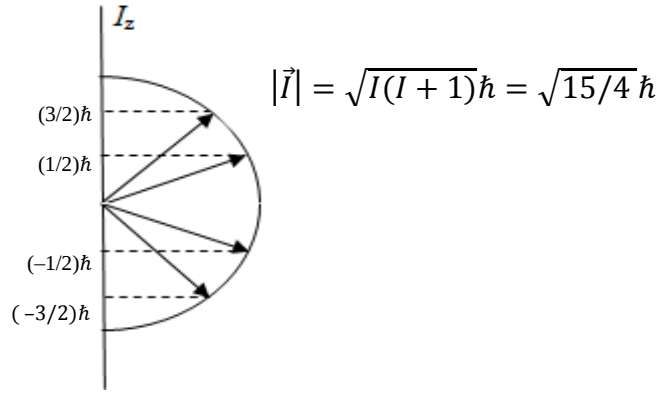
$$I^2 |I, m_I\rangle = I(I+1) \hbar^2 |I, m_I\rangle \quad (2.43)$$

$$I_+ |I, m_I\rangle = \sqrt{I(I+1) - m_I(m_I+1)} \hbar |I, m_I+1\rangle \quad (2.44)$$

$$I_- |I, m_I\rangle = \sqrt{I(I+1) - m_I(m_I-1)} \hbar |I, m_I-1\rangle \quad (2.45)$$

şeklinde yazılabilir.

Çekirdeğin açısal momentumunun büyüklüğü $\sqrt{I(I+1)}\hbar$ dır. Burada I kuantum sayısı olup çekirdek spini olarak adlandırılır. I tamsayı ya da yarım kesirli sayı olabilirken bir eksen üzerindeki bileşeni ise $m_I\hbar$ ile verilir. Kesikli olan m_I 'nın alabileceği değerler $-I$ ile $+I$ arasındaki değerlerdir ve $(2I+1)$ tanedir. Örnek olarak Şekil 2.2 'de $I=3/2$ olması halinde çekirdek spininin olası yönelmeleri ve bunların z eksenini üzerindeki bileşenleri verilmiştir.



Şekil 2.2. $I=3/2$ olması halinde çekirdek spininin ve z eksenini üzerindeki izdüşümlerinin olası yönelimleri

Bir elementin NMR 'da incelenebilmesi için çekirdeğin spin kuantum sayısı (I) sıfırdan farklı olması gerekir. Çekirdeğin spin kuantum sayısı çekirdekte bulunan proton ve nötronların sayısına göre değişmektedir. Atomun izotopları bile farklı spin kuantum sayısına sahiptir. Atom çekirdekleri içerdikleri proton ve nötron sayısına göre 3 grup altında toplanırlar.

1. Grup çekirdekler Çift– Çift çekirdeklerdir. Bunlar kütle ve atom numarası çift sayı olan elementlerdir. Spin kuantum sayıları $I=0$ 'dır ve NMR'da incelenemezler. Örnek olarak $^{12}_6\text{C}$, $^{16}_8\text{O}$ verilebilir.

2. Grup çekirdekler Tek–Tek ve Tek –Çift çekirdeklerdir. Kütle numarası ve atom numarası tek sayı olan çekirdekler ile kütle numarası tek atom numarası çift sayı olan bu gruptaki çekirdeklerin spin kuantum sayıları $I=1/2, 3/2, 5/2, \dots$ gibi kesirli sayılardır. $^{19}_9\text{F}$, $^{11}_5\text{B}$, $^{13}_6\text{C}$, $^{17}_8\text{O}$ elementleri örnektir.

3. Grup çekirdekler Çift– Tek çekirdeklerdir. Kütle numarası çift ,atom numarası tek olan bu çekirdeklerin spin kuantum sayıları $I=1, 2, 3, \dots$ şeklindedir. Bu gruba örnek olarak $^{14}_7\text{N}$, ^2_1H 'yi verebiliriz (Balcı, 2007).

3. AÇISAL MOMENTUM İŞLEMCİLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Spektroskopinin özellikle EPR ve NMR'ın temeli açısal momentumdur. Atomların, moleküllerin yapısı ve dönme hareketi açısal momentum kavramları ile açıklanır. Bu nedenle açısal momentum işlemcileri fazlası ile önem taşımaktadır. Açısal momentum işlemcilerinin bulunmasında küresel tensör işlemcilerinin bilinmesi gerekmektedir.

3.1 Küresel Tensör İşlemciler

Spini I olan bir çekirdeğin baz işlemci sayısı $(2I+1)^2$ ifadesi ile bulunur. Çekirdek spininin değerine göre spin $\frac{1}{2}$ için baz işlemci sayısı $(2I+1)^2=4$, spin 1 için $(2I+1)^2=9$ ve spin $3/2$ için ise $(2I+1)^2=16$ ortogonal baz işlemcisi vardır ve bu şekilde devam etmektedir. Bağımsız işlemciler küresel tensör işlemcilerin lineer bileşiminden elde edilmektedir (Bowden ve Hutchison, 1986; Allard and Hård, 2001; Mehring and Weberruß, 2001).

Küresel tensör işlemciler gösterimi $T^{(k,q)}$ simgesi ile olmaktadır. Burada k tamsayı olup küresel tensör işlemcinin mertebesini belirler. q ise k değerine göre $2k+1$ tane değer alır. Çekirdek spinini I olduğunda k ve q değerleri,

$$k=0, 1, 2, \dots, 2I \quad ; \quad q=-k, -k+1, \dots, k-1, k \quad (3.1)$$

olmaktadır. $(2I+1)$ Spin sistemi n seviyeli ise derecesi $k=2I$ 'ya kadar olan küresel tensörler tarafından temsil edilebilir. Şu halde en yüksek derecesi k olan bir sistem için küresel tensör işlemcilerin genel bir ifadeyle yazılmasına gereksinim duyulmaktadır. I spin değerine sahip bir seviyeli ile I 'nın m_I seviyesine eşit ya da farklı olan bir I' 'nin m_I' seviyesi arasındaki bağlantıyı kuran $|I', m_I'\rangle, \langle I, m_I|$ Hilbert uzayı temel işlemcisi kullanılarak yüksek dereceden küresel tensörleri içeren genel ifade (Mehring ve Weberruß, 2001);

$$\begin{aligned}
T^{(k,q)} &= \sum_{m_I, m_I'} (-1)^{I'-m_I'} \begin{pmatrix} I' & I & k \\ m_I' & -m_I & -q \end{pmatrix} \langle I' \| T^{(k)} \| I \rangle |I', m_I'\rangle \langle I, m_I| \\
&= \sum_{m_I, m_I'} \frac{1}{\sqrt{2I'+1}} \begin{pmatrix} I, m_I, k, q | I', m_I' \end{pmatrix} \langle I' | T^{(k)} | I \rangle |I', m_I'\rangle \langle I, m_I|
\end{aligned} \tag{3.2}$$

şeklinde. İlk eşitlikteki 2×3 'lük matrise *Wigner 3j sembolü matrisi* ve ikinci eşitlikteki karşılığına ise *Clebsh–Gordon katsayıları* denir. Denk. (3.2) genel bir matris ifadesidir. Bu matrisin herbir elemanı hesaplanırken her iki taraf $|I', m_I'\rangle$, $\langle I, m_I|$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned}
\langle I', m_I' | T^{(k,q)} | I, m_I \rangle &= \sum_{m_I, m_I'} (-1)^{I'-m_I'} \begin{pmatrix} I' & I & k \\ m_I' & -m_I & -q \end{pmatrix} \langle I' \| T^{(k)} \| I \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2I'+1}} \begin{pmatrix} I, m_I, k, q | I', m_I' \end{pmatrix} \langle I' | T^{(k)} | I \rangle
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ifadesi elde edilir. Denk(3.3)'de $\langle I' | T^{(k)} | I \rangle$ terimine küresel tensör işlemcilerin indirgenmiş matris temsili, Wigner 3j sembolünden Clebsh–Gordon katsayılarına geçişede Wigner–Eckart teoremi denir. Bu dönüşümlerden faydalanılarak küresel tensör işlemcilerin matris şekilleri ve katsayı karşılıkları hesaplanmaktadır (<http://www-stone.ch.cam.ac.uk/wigner.html>).

Tüm bu ifadelerden küresel tensör işlemcileri I ve I' gibi kuantum sayılarına bağlı bir fonksiyon görünümündedir. Buna göre küresel işlemcilerin matris formunun eşleniği;

$$\begin{aligned}
T^{(k,q)*}(I, I') &= \sum_{m_I, m_I'} (-1)^{I'-I+q} T^{(k,-q)}(I, I') \\
\langle I, m_I | T^{(k,q)*}(I, I') | I', m_I' \rangle &= \langle I', m_I' | T^{(k,q)}(I', I) | I, m_I \rangle^* \\
&= (-1)^{I'-I+q} \langle I, m_I | T^{(k,-q)}(I, I') | I', m_I' \rangle \\
&= (-1)^{I'-m_I'} \begin{pmatrix} I' & I & k \\ m_I & -m_I' & q \end{pmatrix} \langle I' | T^{(k)} | I \rangle
\end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklinde. Denk.(3.4) $m_I - m_I' = q$ olması durumunda elde edilir. Küresel tensör işlemcilerin hepsi hermityen değildir. Herhangi birinin eşleniğiyle diğerinin

çarpımının izi sıfır olduğundan bu işlemciler ortogonaldır. $I \neq I'$ durumunda indirgenmiş matris temsili sıfır olacağından $\langle I | T^{(k)} | I \rangle$ 'lı terimlerin bulunması küresel tensörlerin matris biçimini hesaplamak için yeterli olacaktır.

3.1.1 İndirgenmiş Matris Elemanlarının Hesabı

$\langle I | T^{(k)} | I \rangle$ indirgenmiş matris elemanını m_I 'dan ayrı olarak hesaplamak için

$$\langle I | T^{(k)} | I \rangle = \sqrt{\frac{k!k!(2I+k+1)!}{2^k (2k)! (2I-k)!}} \quad (3.5)$$

ifadesi kullanılır. Örneğin $k=2$ ve $k=3$ için bu değerler yerine yazıldığında,

$$\langle I | T^{(2)} | I \rangle = \sqrt{\frac{1}{24} (2I-1)(2I)(2I+1)(2I+2)(2I+3)} \quad (3.6)$$

$$\langle I | T^{(3)} | I \rangle = \sqrt{\frac{1}{160} (2I-2)(2I-1)(2I)(2I+1)(2I+2)(2I+3)} \quad (3.7)$$

şeklinde I 'ya bağlı olarak bulunur. $k=2$ durumunda I değerlerine göre,

$$\langle 1 | T^{(2)} | 1 \rangle = \sqrt{5} \quad (3.8)$$

$$\left\langle \frac{3}{2} \left| T^{(2)} \right| \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{30} \quad (3.9)$$

indirgenmiş matris temsilleri elde edilir.

3.1.2 İki Seviyeli Sistemlerde ($I=1/2$) Küresel Tensör İşlemcilerin Hesaplanması

İki seviyeli bir sistem ($I=1/2$), $2 \times 2 = 4$ tane bağımsız işlemciyle temsil edilir. Bu sistemlerde k sıfırdan $2I$ 'ya kadar değerler aldığından, 0 ve 1 değerini almaktadır. Bu sistemleri temsil eden tensör işlemcileri k değerinin en yüksek değeri 1 olana kadar q değerlerine göre $T^{(0,0)}$, $T^{(1,0)}$, $T^{(1,\pm 1)}$ işlemcilerdir.

Bu tensörlerden ilk olarak $T^{(0,0)}$ tensör işlemcisinin matris temsili elde edilmeye çalışılırsa;

$$T^{(0,0)} = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right| \left(\begin{array}{cc} T_{11}^{(0,0)} & T_{12}^{(0,0)} \\ T_{21}^{(0,0)} & T_{22}^{(0,0)} \end{array} \right) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right| \left(\begin{array}{cc} T_{11}^{(0,0)} & T_{12}^{(0,0)} \\ T_{21}^{(0,0)} & T_{22}^{(0,0)} \end{array} \right) \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right| \left(\begin{array}{cc} T_{11}^{(0,0)} & T_{12}^{(0,0)} \\ T_{21}^{(0,0)} & T_{22}^{(0,0)} \end{array} \right) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right| \left(\begin{array}{cc} T_{11}^{(0,0)} & T_{12}^{(0,0)} \\ T_{21}^{(0,0)} & T_{22}^{(0,0)} \end{array} \right) \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

matrisi elde edilir. $T_{11}^{(0,0)}$ ifadesine bakıldığında Denk.(3.4)'ten anlaşılaçağı gibi $I=I'$ olması durumunda indirgenmiş matris temsilinden sıfır gelmez ve Denk.(3.5) kullanılıp matris değerin çözüm bulunarak;

$$T_{11}^{(0,0)} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right| T^{(0,0)} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & 0 \\ +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2} \right| T^{(0)} \left| \frac{1}{2} \right\rangle = 1 \quad (3.11)$$

sonucuna ulaşılır. Diğer elemanlar elde edilmeye çalışılırsa,

$$T_{12}^{(0,0)} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right| T^{(0,0)} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2} \right| T^{(0)} \left| \frac{1}{2} \right\rangle = 0 \quad (3.12)$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde,

$$T_{21}^{(0,0)} = 0 \quad (3.13)$$

olur.

$$T_{22}^{(0,0)} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right| T^{(0,0)} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2} \right| T^{(0)} \left| \frac{1}{2} \right\rangle = 1 \quad (3.14)$$

bulunur. Denk.(3.10) 'da yerine yazılırsa,

$$T^{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \quad (3.15)$$

birim matrisi elde edilir. Benzer şekilde,

$$T^{(1,0)} = \begin{pmatrix} T_{11}^{(1,0)} & T_{12}^{(1,0)} \\ T_{21}^{(1,0)} & T_{22}^{(1,0)} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

matrisi bulunmaya çalışılırsa, ilk olarak,

$$T_{11}^{(1,0)} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| T^{(1,0)} \right| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & 1 \\ +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2} \left| T^{(1)} \right| \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \quad (3.17)$$

olur. Diğer elemanlar bulunursa,

$$T_{12}^{(1,0)} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| T^{(1,0)} \right| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2} \left| T^{(1)} \right| \frac{1}{2} \right\rangle = 0 \quad (3.18)$$

sonucuna varılır. Benzer şekilde,

$$T_{21}^{(1,0)} = 0 \quad (3.19)$$

olur.

$$T_{22}^{(1,0)} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| T^{(1,0)} \right| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \left\langle \frac{1}{2} \left| T^{(1)} \right| \frac{1}{2} \right\rangle = -\frac{1}{2} \quad (3.20)$$

sonucu son olarak elde edilir ve bu durumda küresel tensör işlemcimiz,

$$T^{(1,0)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = I_z \quad (3.21)$$

şeklinde bulunur. Diğer küresel tensör işlemciler,

$$T^{(1,1)} = \begin{pmatrix} T_{11}^{(1,1)} & T_{12}^{(1,1)} \\ T_{21}^{(1,1)} & T_{22}^{(1,1)} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} I_+ \quad (3.22)$$

$$T^{(1,-1)} = \begin{pmatrix} T_{11}^{(1,-1)} & T_{12}^{(1,-1)} \\ T_{21}^{(1,-1)} & T_{22}^{(1,-1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_- \quad (3.23)$$

şeklindedir. Burada $T^{(0,0)}, T^{(1,0)}$ 'ın herbiri birer Kartezyen işlemciye karşılık gelmektedir. $T^{(1,1)}$ ve $T^{(1,-1)}$ tensörlerinin lineer bileşiminden de diğer iki kartezyen çarpım işlemci elde edilir.

3.1.3 Yüksek Mertebeden Küresel Tensör İşlemciler

İki seviyeli spin sistemlerinden ($I=1/2$) büyük olan sistemler için yüksek mertebeden küresel tensör işlemcilerin hesaplanmasında tekrarlama bağıntısının kullanılır. Yüksek mertebeli işlemciler hesaplanırken kullanılan tekrarlama bağıntısı daha düşük mertebeli işlemciler ile ifade edilmektedir. Yüksek mertebeden küresel tensör işlemciler,

$$\begin{aligned} T^{(k,q)} &= \sum_{q_1, q_2} (k_1, q_1, k_2, q_2 | k, q) T^{(k_1, q_1)} T^{(k_2, q_2)} \\ &= \sum_{q_1, q_2} (-1)^{-k_1 + k_2 - q} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k \\ q_1 & q_2 & -q \end{pmatrix} T^{(k_1, q_1)} T^{(k_2, q_2)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

şeklinde yazılan genel bir ifade ile hesaplanmaktadır. Burada k ile k_1 ve k_2 arasındaki bağıntı $k = |k_1 - k_2|, |k_1 - k_2| + 1, \dots, k_1 + k_2$ ve q ile q_1 ve q_2 arasındaki bağıntı ise $q_1 + q_2 = q$ 'dur.

3.1.4 Üç Seviyeli Sistemlerde ($I=1$) İçin Küresel Tensör İşlemciler

Üç seviyeli sistemler ($I=1$), $(2I+1)^2=9$ adet ortogonal küresel tensör işlemcilerle temsil edilmektedir. Bu işlemcilerin dört tanesi kuantum sayısının $1/2$ olduğu durum için Bölüm (3.1.2)'de bulunmuştur. Bundan dolayı $k=0, 1$ durumu hesaplandığından burada hesaplamaya gerek yoktur. Burada sadece $k=2$ durumuna karşılık gelen beş tane küresel tensör işlemcinin bulunması yeterli olacaktır. Bu hesaplama Denk.(3.24)'de verilen küresel tensör işlemcilerde tekrarlama bağıntısı kullanarak bulunabilir. Bu küresel tensör işlemciler kullanılarak spin-1 olan bir sistemin kartezyen çarpım işlemcileri elde edilmektedir.

$k=2$ durumunda $q=0, \pm 1, \pm 2$ değerlerini almaktadır. $T^{(2,0)}, T^{(2,1)}, T^{(2,-1)}, T^{(2,2)}$ ve $T^{(2,-2)}$ küresel tensörlerini hesaplamak yeterlidir. $T^{(2,0)}$ için

$$T^{(k,q)} = T^{(2,0)} = \sum_{q_1, q_2} (-1)^{-k_1+k_2-q} \sqrt{5} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 2 \\ q_1 & q_2 & 0 \end{pmatrix} T^{(k_1, q_1)} T^{(k_2, q_2)} \quad (3.25)$$

ifadesi bulunmalıdır. Burada $q=0$ olduğundan $q_1+q_2=q$ değeri için üç durum vardır. Bunlar $(q_1=0, q_2=0), (q_1=+1, q_2=-1), (q_1=-1, q_2=+1)$ 'dir. Ayrıca $k=2$ olup $k_1+k_2=k$ şartı ancak $k_1=k_2=1$ durumunu sağlar. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} T^{(2,0)} &= \sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{(1,0)} T^{(1,0)} + \sqrt{5} \begin{pmatrix} +1 & +1 & 2 \\ +1 & -1 & 0 \end{pmatrix} T^{(1,1)} T^{(1,-1)} \\ &\quad + \sqrt{5} \begin{pmatrix} +1 & +1 & 2 \\ -1 & +1 & 0 \end{pmatrix} T^{(1,-1)} T^{(1,1)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede Wigner 3j matrisleri hesaplanıp tensör işlemciler yerine yazıldığında;

$$T^{(2,0)} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5!}} \left[2I_z I_z + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} I_+ \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} I_- \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} I_- \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} I_+ \right) \right] \quad (3.27)$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5!}} \left[2I_z^2 - \left(\frac{1}{2} I_+ I_- \right) - \left(\frac{1}{2} I_- I_+ \right) \right] \quad (3.28)$$

olur. $I_+ I_-$ ve $I_- I_+$ çarpımını bulunursa;

$$\begin{aligned} I_+ I_- &= (I_x + iI_y)(I_x - iI_y) = I_x^2 - iI_x I_y + iI_y I_x + I_y^2 \\ I_- I_+ &= (I_x - iI_y)(I_x + iI_y) = I_x^2 + iI_x I_y - iI_y I_x + I_y^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

ifadeleri elde edilir. Denk.(3.28)'de yerine yazılırsa;

$$T^{(2,0)} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5!}} \left[2I_z^2 - (I_x^2 + I_y^2) \right] \quad (3.30)$$

bulunur. Parantez içine I_z^2 ilave edip çıkartırsa eşitlik bozulmaz. Bu durumda;

$$T^{(2,0)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[3I_z^2 - (I_x^2 + I_y^2 + I_z^2) \right] \quad (3.31)$$

$I_x^2 + I_y^2 + I_z^2$ ifadesi $I(I+1)$ E olarak alıp Denk.(3.31) yeniden düzenlenirse;

$$T^{(2,0)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left[3I_z^2 - I(I+1)E \right] \quad (3.32)$$

elde edilir.

$T^{(2,1)}$ tensör işlemcisi için,

$$T^{(k,q)} = T^{(2,1)} = \sum_{q_1, q_2} (-1)^{-k_1+k_2-q} \sqrt{5} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 2 \\ q_1 & q_2 & 1 \end{pmatrix} T^{(k_1, q_1)} T^{(k_2, q_2)} \quad (3.33)$$

bağıntısı hesaplanmalıdır. Burada $k_1=k_2=1$ ve $q_1+q_2=q=1$ dir. Burada ($q_1=1, q_2=0$), ($q_1=0, q_2=1$) durumları söz konusudur. Bu durumda,

$$T^{(2,1)} = -\sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} T^{(1,0)} T^{(1,+1)} - \sqrt{5} \begin{pmatrix} +1 & +1 & 2 \\ +1 & 0 & -1 \end{pmatrix} T^{(1,+1)} T^{(1,0)} \quad (3.34)$$

ifadesi elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapıp, küresel tensör işlemciler yerine yazıldığında,

$$T^{(2,1)} = \frac{-\sqrt{5}}{-\sqrt{2}\sqrt{5}} \left[I_z \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} I_+ \right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} I_+ \right) I_z \right], \quad (3.35)$$

$$T^{(2,1)} = -\frac{1}{2} [I_z, I_+]_+ \quad (3.36)$$

bulunur.

$T^{(2,-1)}$ tensör işlemcisi için,

$$T^{(k,q)} = T^{(2,-1)} = \sum_{q_1, q_2} (-1)^{-k_1+k_2-q} \sqrt{5} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 2 \\ q_1 & q_2 & 1 \end{pmatrix} T^{(k_1, q_1)} T^{(k_2, q_2)} \quad (3.37)$$

bağıntısı hesaplanmalıdır. Burada $k_1=k_2=1$ ve $q_1+q_2=q=-1$ dir. Ayrıca ($q_1=-1, q_2=0$), ($q_1=0, q_2=-1$) durumları söz konusudur. Bu durumda,

$$T^{(2,-1)} = -\sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{(1,-1)} T^{(1,0)} - \sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 & +1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} T^{(1,0)} T^{(1,-1)} \quad (3.38)$$

olur. Matris değeri ve tensör işlemciler yerine yazılırsa;

$$T^{(2,-1)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{10}} [I_- I_z + I_z I_-], \quad (3.39)$$

$$T^{(2,-1)} = \frac{1}{2} [I_z, I_-]_+ \quad (3.40)$$

sonucunu verir.

$T^{(2,2)}$ tensör işlemcisi için,

$$T^{(k,q)} = T^{(2,2)} = \sum_{q_1, q_2} (-1)^{-k_1+k_2-q} \sqrt{5} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 2 \\ q_1 & q_2 & 1 \end{pmatrix} T^{(k_1, q_1)} T^{(k_2, q_2)} \quad (3.41)$$

bağıntısı bulunması gerekir. Burada $k_1=k_2=1$ ve $q_1+q_2=q=2$ olduğundan ($q_1=1$ ve $q_2=1$) dir.

$$T^{(2,2)} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} T^{(1,1)} T^{(1,1)} \quad (3.42)$$

olur. Matris değeri ve tensör işlemciler yerine yazılırsa;

$$T^{(2,2)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{5}\sqrt{2}} [(-I_+)(-I_+)], \quad (3.43)$$

$$T^{(2,2)} = \frac{1}{2} (I_+)^2 \quad (3.44)$$

sonucuna varılır. Benzer şekilde son tensör işlemcide aynı yoldan bulunursa;

$$T^{(2,-2)} = \frac{1}{2} (I_-)^2 \quad (3.45)$$

elde edilir.

3.1.5 Spin-3/2 İçin Küresel Tensör İşlemciler

Spini-3/2 olan çekirdekler, $(2I+1)^2=16$ adet ortogonal küresel tensör işlemcilerle temsil edilmektedir. Bu işlemcilerin dokuz tanesi kuantum sayısının $\frac{1}{2}$ ve 1 olduğu durumlar için Bölüm 3.1.2 ve 3.1.4 'te elde edilmiştir. Aynı yöntemle spin-3/2 için küresel tensör işlemciler elde edilmeye çalışılırsa Çizelde (3.1)'deki ifadelere ulaşılır.

Çizelge 3.1. $I=3/2$ için küresel tensör işlemciler.

$$\begin{aligned} T_{3/2}^{(0,0)} &= \frac{1}{2} E \\ T_{3/2}^{(1,0)} &= \frac{1}{\sqrt{5}} I_z \\ T_{3/2}^{(1,\pm 1)} &= \mp \frac{1}{\sqrt{10}} I_{\pm} \\ T_{3/2}^{(2,0)} &= \frac{1}{6} (3I_z^2 - I(I+1)) = \frac{1}{6} (3I_z^2 - I^2) \\ T_{3/2}^{(2,\pm 1)} &= \mp \frac{1}{\sqrt{24}} [I_z, I_{\pm}]_+ \\ T_{3/2}^{(2,\pm 2)} &= \frac{1}{\sqrt{24}} I_{\pm}^2 \\ T_{3/2}^{(3,0)} &= \frac{1}{3\sqrt{5}} (5I_z^3 - (3I^2 - 1)I_z) \\ T_{3/2}^{(3,\pm 1)} &= \mp \frac{1}{2\sqrt{15}} \left[\left(5I_z^2 - I^2 - \frac{1}{2} \right), I_{\pm} \right]_+ \\ T_{3/2}^{(3,\pm 2)} &= \frac{1}{2\sqrt{6}} [I_z, I_{\pm}^2]_+ \\ T_{3/2}^{(3,\pm 3)} &= \mp \frac{1}{6} I_{\pm}^3 \end{aligned}$$

3.2 Kartezyen Açısal Momentum İşlemciler

Kartezyen açısal momentum işlemcilerin kullanım alanları çok fazladır. Bu işlemcileri bulmak için aşağıdaki genelleştirilmiş ifadeler kullanılır(Allard ve Hård, 2001).

$$C_I^{(k,qx)} = \frac{\sqrt{I(I+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_I^{k,-q} + (-1)^q T_I^{k,+q}) \quad q \neq 0 \quad (3.46)$$

$$C_I^{(k,qy)} = \frac{i\sqrt{I(I+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_I^{k,-q} - (-1)^q T_I^{k,+q}) \quad q \neq 0 \quad (3.47)$$

$$C_I^{(k,z)} = \sqrt{I(I+1)/3} T_I^{k,0} \quad q = 0 \quad (3.48)$$

3.2.1 İki Seviyeli Sistemlerde (I=1/2) Kartezyen Baz İşlemcilerinin Hesaplanması

$I=1/2$ için kartezyen açısal momentum işlemcilerinin elde edilmeye çalışıldığında. Denk.(3.1) 'e göre $k=2I$ ve $q=-k, \dots, +k$ 'dır. $I=1/2$ için kartezyen işlemcileri Denk.(3.46–48)'deki ifadeler kullanarak elde edilir. Bölüm 3.1.2'de bulunan tensör işlemcileri bu ifadelerde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} C_{\frac{1}{2}}^{(1,x)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(T_{\frac{1}{2}}^{1,-1} + (-1)^1 T_{\frac{1}{2}}^{1,1} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} I_- - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) I_+ \right) \\ &= \frac{1}{2} (I_- + I_+) = I_x \end{aligned} \quad (3.49)$$

olur ve diğer işlemciler,

$$C_{\frac{1}{2}}^{(1,y)} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(T_{\frac{1}{2}}^{1,-1} - (-1)^1 T_{\frac{1}{2}}^{1,1} \right) = \frac{i}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} I_- + (-\frac{1}{\sqrt{2}}) I_+ \right) \quad (3.50)$$

$$= \frac{i}{2} (I_- - I_+) = I_y$$

ile

$$C_{\frac{1}{2}}^{(1,z)} = 1 \quad T_{\frac{1}{2}}^{1,0} = I_z \quad (3.51)$$

ve

$$C_{\frac{1}{2}}^{(0,0)} = T_{\frac{1}{2}}^{0,0} = E \quad (3.52)$$

şeklinde elde edilerek kartezyen çarpım işlemcileri bulunmuş olur.

3.2.2 Spin-1 (I=1) İçin Kartezyen İşlemciler

Üç seviyeli sistemler ya da spini 1 olan çekirdekler için $(2I+1)^2 = (2 \cdot 1 + 1)^2 = 9$ tane kartezyen işlemci elde edilir. Denk. (3.1) 'e göre k ve q değerlerinden, $k=0,1, \dots, 2I$ olduğundan 0,1,2 değerlerini alır. q değeri ise $-k, \dots, +k$ değerleri arasında olup burada $k=0$ için $q=0$, $k=1$ için $q=0, \pm 1$, $k=2$ için $q=0, \pm 1, \pm 2$ 'dir. Şimdi sıra ile k ve q değerlerini kullanarak Denk. (3.46–48)'deki ifadelerin bulunmasında q değerlerinin sadece + işaretlisini almak yeterli olacaktır. Çünkü her iki durumda da aynı kartezyen işlemcilere ulaşılır.

$k=0, q=0$ için Denk.(3.48)'ü alınırsa,

$$C_1^{(k,z)} = C_1^{(0,z)} = \sqrt{1(1+1)/3} \quad T_1^{0,0} \quad q=0 \quad (3.53)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} T_1^{0,0} = \sqrt{\frac{2}{3}} E$$

elde edilir. $k=1$ ve $q=0$ için,

$$C_1^{(k,z)} = C_1^{(1,z)} = \sqrt{1(1+1)/3} \quad T_1^{1,0} \quad (3.54)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} T_1^{1,0} = \sqrt{\frac{2}{3}} I_z$$

olur.

k=1 ve q=1 için Denk.(3.46-47) ayrı ayrı alınırsa,

$$\begin{aligned} C_1^{(k,qx)} &= C_1^{(1,1x)} = \frac{\sqrt{1(1+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_1^{1,-1} + (-1)^1 T_1^{1,+1}) \quad q \neq 0 \\ &= \sqrt{\frac{2}{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} I_- + \frac{1}{\sqrt{2}} I_+ \right) = \frac{1}{\sqrt{6}} (I_- + I_+) = \frac{1}{\sqrt{6}} 2I_x = \frac{2}{\sqrt{6}} I_x \end{aligned} \quad (3.55)$$

sonucu elde edilir. Diğer ifade ise,

$$\begin{aligned} C_1^{(k,qy)} &= C_1^{(1,1y)} = \frac{i\sqrt{1(1+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_1^{1,-1} - (-1)^1 T_1^{1,+1}) \quad q \neq 0 \\ &= i\sqrt{\frac{2}{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} I_- - \frac{1}{\sqrt{2}} I_+ \right) = \frac{i}{\sqrt{6}} (I_- - I_+) = \frac{i}{\sqrt{6}} (-2iI_y) = \frac{2}{\sqrt{6}} I_y \end{aligned} \quad (3.56)$$

olarak bulunur.

k=2 ve q=0 için,

$$\begin{aligned} C_1^{(2,z)} &= \sqrt{1(1+1)/3} T_1^{2,0} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} T_1^{2,0} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{6}} (3I_z^2 - I(I+1)E) = \frac{1}{3} (3I_z^2 - I(I+1)E) \end{aligned} \quad (3.57)$$

olur. k=2 ve q=1 için ,

$$\begin{aligned} C_1^{(2,1x)} &= \frac{\sqrt{1(1+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_1^{2,-1} + (-1)^1 T_1^{2,+1}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{6}} \left(\frac{1}{2} [I_-, I_z]_+ + \frac{1}{2} [I_+, I_z]_+ \right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left([I_-, I_z] + [I_z, I_-] + [I_+, I_z] + [I_z, I_+] \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left([I_x - iI_y, I_z] + [I_z, (I_x - iI_y)] + [(I_x + iI_y), I_z] + [I_z, (I_x + iI_y)] \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} 2(I_x I_z + I_z I_x) = \frac{1}{\sqrt{3}} [I_x, I_z]_+ \end{aligned} \quad (3.58)$$

sonucuna ulaşılır. Diğer ifade ise,

$$\begin{aligned}
C_1^{(k,qy)} &= C_1^{(2,1y)} = \frac{i\sqrt{1(1+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_1^{2,-1} - (-1)^1 T_1^{2,+1}) \\
&= i\sqrt{\frac{2}{6}} \left(\frac{1}{2} [I_-, I_z]_+ - \frac{1}{2} [I_+, I_z]_+ \right) = \frac{i}{2\sqrt{3}} \left([I_-, I_z]_+ [I_z, I_-] - [I_+, I_z]_+ [I_z, I_+] \right) \\
&= \frac{i}{2\sqrt{3}} \left([I_x - iI_y, I_z]_+ + [I_z, I_x - iI_y] - [I_x + iI_y, I_z]_+ + [I_z, I_x + iI_y] \right) \\
&= \frac{i(-2i)}{2\sqrt{3}} (I_y I_z + I_z I_y) = \frac{1}{\sqrt{3}} [I_y, I_z]_+
\end{aligned} \tag{3.59}$$

şeklinde elde edilir. k=2 ve q=2 için bulunursa,

$$\begin{aligned}
C_1^{(2,2x)} &= \frac{\sqrt{1(1+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_1^{2,-2} + (-1)^2 T_1^{2,+2}) \\
&= \sqrt{\frac{2}{6}} \left(\frac{1}{2} (I_-)^2 + \frac{1}{2} (I_+)^2 \right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((I_x - iI_y)^2 + (I_x + iI_y)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((I_x - iI_y)(I_x - iI_y) + (I_x + iI_y)(I_x + iI_y) \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} (I_x^2 - iI_x I_y - iI_y I_x - I_y^2 + I_x^2 + iI_x I_y + iI_y I_x - I_y^2) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} (2I_x^2 - 2I_y^2) = \frac{1}{\sqrt{3}} (I_x^2 - I_y^2)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

olur. Diğer ifade ise,

$$\begin{aligned}
C_1^{(2,2y)} &= \frac{i\sqrt{1(1+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_1^{2,-2} - (-1)^2 T_1^{2,+2}) \\
&= \sqrt{\frac{2}{6}} i \left(\frac{1}{2} (I^-)^2 - \frac{1}{2} (I^+)^2 \right) = \frac{i}{2\sqrt{3}} \left((I_x - iI_y)^2 - (I_x + iI_y)^2 \right) \\
&= \frac{i}{2\sqrt{3}} \left((I_x - iI_y)(I_x - iI_y) - (I_x + iI_y)(I_x + iI_y) \right) \\
&= \frac{i}{2\sqrt{3}} (I_x^2 - iI_x I_y - iI_y I_x - I_y^2 - I_x^2 - iI_x I_y - iI_y I_x - I_y^2) \\
&= \frac{i}{2\sqrt{3}} (-2iI_x I_y - 2iI_y I_x) = \frac{1}{\sqrt{3}} [I_x, I_y]_+
\end{aligned} \tag{3.61}$$

olarak bulunur. Bu şekilde $I=1$ için tüm kartezyen işlemciler elde edilmiş olur. Bulunan ifadeler Çizelge 3.2’de gösterilmiştir.

Çizelge 3.2. $I=1$ için kartezyen açısal momentum işlemcileri.

$C_1^{(0,z)} = \sqrt{\frac{2}{3}} T_1^{0,0} = \sqrt{\frac{2}{3}} E$
$C_1^{(1,1x)} = \sqrt{\frac{2}{6}} (T_1^{1,-1} - T_1^{1,+1}) = \frac{2}{\sqrt{6}} I_x$
$C_1^{(1,1y)} = i\sqrt{\frac{2}{6}} (T_1^{1,-1} + T_1^{1,+1}) = \frac{2}{\sqrt{6}} I_y$
$C_1^{(1,z)} = \sqrt{\frac{2}{3}} T_1^{1,0} = \sqrt{\frac{2}{3}} I_z$
$C_1^{(2,1x)} = \sqrt{\frac{2}{6}} (T_1^{2,-1} - T_1^{2,+1}) = \frac{1}{\sqrt{3}} [I_x, I_z]_+$
$C_1^{(2,1y)} = i\sqrt{\frac{2}{6}} (T_1^{2,-1} - (-1)^1 T_1^{2,+1}) = \frac{1}{\sqrt{3}} [I_y, I_z]_+$
$C_1^{(2,z)} = \sqrt{\frac{2}{3}} T_1^{2,0} = \frac{1}{3} (3I_z^2 - I(I+1)E)$
$C_1^{(2,2x)} = \sqrt{\frac{2}{6}} (T_1^{2,-2} + T_1^{2,+2}) = \frac{1}{\sqrt{3}} (I_x^2 - I_y^2)$
$C_1^{(2,2y)} = i\sqrt{\frac{2}{6}} (T_1^{2,-2} - T_1^{2,+2}) = \frac{1}{\sqrt{3}} [I_x, I_y]_+$

3.2.3 Spin-3/2 ($I=3/2$) İçin Kartezyen İşlemciler

Spini 3/2 olan çekirdekler için $(2I+1)^2=(2.3/2+1)^2=16$ tane kartezyen işlemci bulunmaktadır. Denk. (3.1) 'e göre k ve q değerleri tekrar ifade edilirse, $k=0,1, \dots, 2I$ olduğundan 0,1,2,3 değerlerini alır. q değeri $-k, \dots, +k$ değerleri arasında olup burada $k=0$ için $q=0$, $k=1$ için $q=0,\pm 1$, $k=2$ için $q=0,\pm 1,\pm 2$ ve $k=3$ için $q=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3$ 'dür. Kartezyen işlemcileri $k=0, 1, 2$ için daha önce Bölüm 3.2.1 ve Bölüm 3.2.2'de elde edildiğinden burada $k=3$ için kartezyen işlemcileri bulmak yeterli olacaktır.

$k=3$ ve $q=0$ için Denk.(3.48)'te Çizelge 3.1.'deki tensör ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} C_1^{(k,z)} &= C_{\frac{3}{2}}^{(3,z)} = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) / 3} T_{\frac{3}{2}}^{3,0} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}} T_{\frac{3}{2}}^{3,0} = \frac{\sqrt{5}}{2} \left[\frac{1}{3\sqrt{5}} (5I_z^3 - (3I^2 - 1)I_z) \right] = \frac{1}{6} (5I_z^3 - (3I^2 - 1)I_z) \end{aligned} \quad (3.62)$$

sonucu elde edilir. Diğer açısal momentum işlemcileri bulmak içinde aynı şekilde Çizelge 3.1.'deki ifadeler alınıp, $k=3$ ve $q=1$ için Denk.(3.46-47) 'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} C_I^{(k,qx)} &= C_{\frac{3}{2}}^{(3,1x)} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) / 3}}{\sqrt{2}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{3,-1} + (-1)^1 T_{\frac{3}{2}}^{3,+1} \right) \\ &= \sqrt{\frac{5}{8}} \left[\frac{1}{2\sqrt{15}} \left[\underbrace{\left(5I_z^2 - I^2 - \frac{1}{2} \right)}_A, I_- \right]_+ - \left(-\frac{1}{2\sqrt{15}} \right) \left[\underbrace{\left(5I_z^2 - I^2 - \frac{1}{2} \right)}_A, I_+ \right]_+ \right] \\ &= \frac{1}{4\sqrt{6}} (AI_x - AiI_y + I_x A - iI_y A + AI_x + AiI_y + I_x A + iI_y A) \\ &= \frac{2}{4\sqrt{6}} (AI_x + I_x A) = \frac{1}{2\sqrt{6}} [A, I_x]_+ = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[\left(5I_z^2 - I^2 - \frac{1}{2} \right), I_x \right]_+ \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left(5[I_z^2, I_x]_+ + \left[-\left(I^2 + \frac{1}{2} \right), I_x \right]_+ \right) = \frac{1}{2\sqrt{6}} (5[I_z^2, I_x]_+ - (2I^2 + 1)I_x) \\ C_{\frac{3}{2}}^{(3,1x)} &= \frac{1}{2\sqrt{6}} (5[I_z^2, I_x]_+ - (2I^2 + 1)I_x) \end{aligned} \quad (3.63)$$

sonucuna ulaşılır. Diğer bileşen elde edilmeye çalışılırsa,

$$\begin{aligned}
C_I^{(k,qy)} &= C_{\frac{3}{2}}^{(3,1y)} = \frac{i\sqrt{1(1+1)/3}}{\sqrt{2}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{3,-1} - (-1)^1 T_{\frac{3}{2}}^{3,+1} \right) \\
&= i\sqrt{\frac{5}{8}} \left[\frac{1}{2\sqrt{15}} \left[\underbrace{\left(5I_z^2 - I^2 - \frac{1}{2} \right)}_A, I_- \right]_+ + \left(-\frac{1}{2\sqrt{15}} \right) \left[\underbrace{\left(5I_z^2 - I^2 - \frac{1}{2} \right)}_A, I_+ \right]_+ \right] \\
&= \frac{i}{4\sqrt{6}} (AI_x - AiI_y + I_x A - iI_y A - AI_x - AiI_y - I_x A - iI_y A) \\
&= \frac{i}{4\sqrt{6}} (-2iAI_y - 2iI_y A) = \frac{1}{2\sqrt{6}} [A, I_y]_+ = \frac{1}{2\sqrt{6}} \left[\left(5I_z^2 - I^2 - \frac{1}{2} \right), I_y \right]_+ \\
&= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left(5[I_z^2, I_y]_+ + \left[-\left(I^2 + \frac{1}{2} \right), I_y \right]_+ \right) = \frac{1}{2\sqrt{6}} (5[I_z^2, I_y]_+ - (2I^2 + 1)I_y) \\
C_{\frac{3}{2}}^{(3,1y)} &= \frac{1}{2\sqrt{6}} (5[I_z^2, I_y]_+ - (2I^2 + 1)I_y)
\end{aligned} \tag{3.64}$$

sonucu bulunur. $k=3$ ve $q=2$ için Denk.(3.46)'dan,

$$\begin{aligned}
C_I^{(k,qx)} &= C_{\frac{3}{2}}^{(3,2x)} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)/3}}{\sqrt{2}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{3,-2} + (-1)^2 T_{\frac{3}{2}}^{3,+2} \right) \\
&= \sqrt{\frac{5}{8}} \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} [I_z, I_-^2]_+ + \frac{1}{2\sqrt{6}} [I_z, I_+^2]_+ \right) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{5}{3}} (I_z I_-^2 + I_-^2 I_z + I_z I_+^2 + I_+^2 I_z) \\
&= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{5}{3}} \left(I_z (I_x - iI_y)(I_x - iI_y) + (I_x - iI_y)(I_x - iI_y) I_z \right. \\
&\quad \left. + I_z (I_x + iI_y)(I_x + iI_y) + (I_x + iI_y)(I_x + iI_y) I_z \right) \\
&= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{5}{3}} (2I_z I_x^2 - 2I_z I_y^2 + 2I_x^2 I_z - 2I_y^2 I_z) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{3}} [I_z (I_x^2 - I_y^2) + (I_x^2 - I_y^2) I_z] \\
C_{\frac{3}{2}}^{(3,2x)} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{3}} [I_z, (I_x^2 - I_y^2)]_+
\end{aligned} \tag{3.65}$$

bulunur. $k=3$ ve $q=2$ için Denk.(3.48)'den,

$$\begin{aligned}
C_I^{(k,qy)} &= C_{\frac{3}{2}}^{(3,2y)} = \frac{i\sqrt{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)/3}}{\sqrt{2}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{3,-2} - (-1)^2 T_{\frac{3}{2}}^{3,+2} \right) \\
&= i\sqrt{\frac{5}{8}} \left(\frac{1}{2\sqrt{6}} [I_z, I_-^2]_+ - \frac{1}{2\sqrt{6}} [I_z, I_+^2]_+ \right) \\
&= \frac{i}{8} \sqrt{\frac{5}{3}} (I_z I_-^2 + I_-^2 I_z - I_z I_+^2 - I_+^2 I_z) \\
&= \frac{i}{8} \sqrt{\frac{5}{3}} \left(I_z (I_x - iI_y)(I_x - iI_y) + (I_x - iI_y)(I_x - iI_y) I_z \right. \\
&\quad \left. - I_z (I_x + iI_y)(I_x + iI_y) - (I_x + iI_y)(I_x + iI_y) I_z \right)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

ifadesine ulaşılır. Sırası dikkat edilerek çarpımlar yapıp sadeleştirilirse,

$$\begin{aligned}
C_{\frac{3}{2}}^{(3,2y)} &= \frac{i}{8} \sqrt{\frac{5}{3}} (-2iI_z I_x I_y - 2iI_z I_y I_x - 2iI_x I_y I_z - 2iI_y I_x I_z) \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{3}} (I_z I_x I_y + I_z I_y I_x + I_x I_y I_z + I_y I_x I_z) \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{3}} (I_z (I_x I_y + I_y I_x) + (I_x I_y + I_y I_x) I_z) \\
C_{\frac{3}{2}}^{(3,2y)} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{3}} [I_z, [I_x, I_y]_+]_+
\end{aligned} \tag{3.67}$$

elde edilir. $k=3$ ve $q=3$ için Denk.(3.46) tekrar yazılırsa,

$$\begin{aligned}
C_I^{(k,qx)} &= C_{\frac{3}{2}}^{(3,3x)} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)/3}}{\sqrt{2}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{3,-3} + (-1)^3 T_{\frac{3}{2}}^{3,+3} \right) \\
&= \sqrt{\frac{5}{8}} \left(\frac{1}{6} I_-^3 + \frac{1}{6} I_+^3 \right) \\
&= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{5}{8}} [(I_x - iI_y)(I_x - iI_y)(I_x - iI_y) + (I_x + iI_y)(I_x + iI_y)(I_x + iI_y)]
\end{aligned} \tag{3.68}$$

olur. Burada yükselten ve azaltan işlemcilerinin üçüncü dereceden çarpımı bulunup sadeleştirilirse,

$$\begin{aligned}
C_{\frac{3}{2}}^{(3,3x)} &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{5}{8}} \left[(I_x - iI_y)(I_x^2 - iI_x I_y - iI_y I_x - I_y^2) + (I_x + iI_y)(I_x^2 + iI_x I_y + iI_y I_x - I_y^2) \right] \\
&= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{5}{8}} (2I_x^3 - 2I_y^2 I_x - 2I_x I_y^2 - 2I_y I_x I_y) \\
&= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{5}{2}} (I_x(I_x^2 - I_y^2) - I_y[I_x, I_y]_+) \\
C_{\frac{3}{2}}^{(3,3x)} &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{5}{2}} (I_x(I_x^2 - I_y^2) - I_y[I_x, I_y]_+)
\end{aligned} \tag{3.69}$$

sonucuna ulaşılır. $k=3$ ve $q=3$ için aynı şekilde Denk.(3.47) tekrar yazılırsa,

$$\begin{aligned}
C_I^{(k,qy)} &= C_{\frac{3}{2}}^{(3,3y)} = \frac{i \sqrt{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_{\frac{3}{2}}^{3,-3} - (-1)^3 T_{\frac{3}{2}}^{3,+3}) \\
&= i \sqrt{\frac{5}{8}} \left(\frac{1}{6} I_-^3 - \frac{1}{6} I_+^3 \right) \\
&= \frac{i}{6} \sqrt{\frac{5}{8}} [(I_x - iI_y)(I_x - iI_y)(I_x - iI_y) - (I_x + iI_y)(I_x + iI_y)(I_x + iI_y)]
\end{aligned} \tag{3.70}$$

bulunur. Burada da tekrar çarpım işlemleri yapılırsa,

$$C_{\frac{3}{2}}^{(3,3y)} = \frac{i}{6} \sqrt{\frac{5}{8}} \left[(I_x - iI_y)(I_x^2 - iI_x I_y - iI_y I_x - I_y^2) - (I_x + iI_y)(I_x^2 + iI_x I_y + iI_y I_x - I_y^2) \right] \tag{3.71}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned}
C_{\frac{3}{2}}^{(3,3y)} &= \frac{i}{6} \sqrt{\frac{5}{8}} (-2iI_x I_y I_x - 2iI_y I_x I_x - 2iI_x^2 I_y + 2iI_y^3) \\
&= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5}{8}} (I_x I_y I_x + I_y I_x I_x + I_x^2 I_y - I_y^3) \\
&= \frac{i}{6} \sqrt{\frac{5}{2}} (I_y(I_x^2 - I_y^2) + I_x[I_x, I_y]_+) \\
&= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{5}{2}} (I_x(I_x^2 - I_y^2) - I_x[I_x, I_y]_+)
\end{aligned} \tag{3.72}$$

olarak bulunur. Bu şekilde onaltı adet kartezyen açısal momentum işlemcisi bulunmuş olur. Bu işlemciler Çizelge 3.3. de gösterilmiştir.

Çizelge 3.3. $I=3/2$ için kartezyen açısal momentum işlemcileri (Gün ve diğ., 2011 ve Daşgın, 2013)

$$\begin{aligned}
 C_{\frac{3}{2}}^{(0,z)} &= \sqrt{\frac{5}{4}} T_{\frac{3}{2}}^{(0,0)} = \frac{\sqrt{5}}{4} E_I \\
 C_{\frac{3}{2}}^{(1,x)} &= \sqrt{\frac{5}{8}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{(1,-1)} - T_{\frac{3}{2}}^{(1,1)} \right) = \frac{1}{2} I_x \\
 C_{\frac{3}{2}}^{(1,y)} &= i \sqrt{\frac{5}{8}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{(1,-1)} + T_{\frac{3}{2}}^{(1,1)} \right) = \frac{1}{2} I_y \\
 C_{\frac{3}{2}}^{(1,z)} &= \sqrt{\frac{5}{4}} T_{\frac{3}{2}}^{(1,0)} = \frac{1}{2} I_z \\
 C_1^{(2,1x)} &= \sqrt{\frac{5}{8}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{2,-1} - T_{\frac{3}{2}}^{2,+1} \right) = \frac{\sqrt{15}}{12} [I_x, I_z]_+ \\
 C_{\frac{3}{2}}^{(2,1y)} &= i \sqrt{\frac{5}{8}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{(2,-1)} + T_{\frac{3}{2}}^{(2,+1)} \right) = \frac{\sqrt{15}}{12} [I_y, I_z]_+ \\
 C_{\frac{3}{2}}^{(2,z)} &= \sqrt{\frac{5}{4}} T_{\frac{3}{2}}^{(2,0)} = \frac{\sqrt{5}}{12} (3I_z^2 - I(I+1)) \\
 C_{\frac{3}{2}}^{(2,2x)} &= \sqrt{\frac{5}{8}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{(2,-2)} + T_{\frac{3}{2}}^{(2,+2)} \right) = \frac{\sqrt{15}}{12} (I_x^2 - I_y^2) \\
 C_{\frac{3}{2}}^{(2,2y)} &= i \sqrt{\frac{5}{8}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{(2,-2)} - T_{\frac{3}{2}}^{(2,+2)} \right) = \frac{\sqrt{15}}{12} [I_x, I_y]_+ \\
 C_{\frac{3}{2}}^{(3,1x)} &= \sqrt{\frac{5}{8}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{3,-1} - T_{\frac{3}{2}}^{3,+1} \right) = \frac{1}{2\sqrt{6}} (5[I_z^2, I_x]_+ - (2I^2 + 1)I_x) \\
 C_{\frac{3}{2}}^{(3,1y)} &= i \sqrt{\frac{5}{8}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{3,-1} + T_{\frac{3}{2}}^{3,+1} \right) = \frac{1}{2\sqrt{6}} (5[I_z^2, I_y]_+ - (2I^2 + 1)I_y) \\
 C_{\frac{3}{2}}^{(3,z)} &= \sqrt{\frac{5}{4}} T_{\frac{3}{2}}^{3,0} = \frac{1}{6} (5I_z^3 - (3I^2 - 1)I_z) \\
 C_{\frac{3}{2}}^{(3,2x)} &= \sqrt{\frac{5}{8}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{3,-2} + T_{\frac{3}{2}}^{3,+2} \right) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{3}} [I_z, (I_x^2 - I_y^2)]_+ \\
 C_{\frac{3}{2}}^{(3,2y)} &= i \sqrt{\frac{5}{8}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{3,-2} - T_{\frac{3}{2}}^{3,+2} \right) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{3}} [I_z, [I_x, I_y]_+]_+ \\
 C_{\frac{3}{2}}^{(3,3x)} &= \sqrt{\frac{5}{8}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{3,-3} - T_{\frac{3}{2}}^{3,+3} \right) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{5}{2}} (I_x(I_x^2 - I_y^2) - I_y[I_x, I_y]_+) \\
 C_{\frac{3}{2}}^{(3,3y)} &= i \sqrt{\frac{5}{8}} \left(T_{\frac{3}{2}}^{3,-3} + T_{\frac{3}{2}}^{3,+3} \right) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{5}{2}} (I_y(I_x^2 - I_y^2) - I_x[I_x, I_y]_+)
 \end{aligned}$$

3.3 Spin-2 İçin Açısal Momentum İşlecileri I_x, I_y, I_z 'nin Elde edilmesi

Spin-2 için kartezyen açısal momentum işlecilerinin matris temsilleri $(2I+1)(2I+1)= 5 \times 5$ boyutundadır. Burada $I=2$ olup $m_I = -2, -1, 0, +1, +2$ değerlerini

alır. Kolaylık olması açısından $\hbar=1$ alınır. $I_x = \frac{I_+ + I_-}{2}$, $I_y = \frac{I_+ - I_-}{2i}$, dir.

Denk.(2.21), Denk.(2.33) ve Denk.(2.39) bağıntıları kullanılarak I_x, I_y, I_z işlecilerinin matris temsilleri elde edilir.

İlk olarak I_x işlemcisinin matris temsili elde edilmeye çalışılırsa, bu matris Denk.(3.73)'de olduğu gibi gösterilebilir.

$$I_x = \begin{matrix} & \begin{matrix} |2,2\rangle & |2,1\rangle & |2,0\rangle & |2,-1\rangle & |2,-2\rangle \end{matrix} \\ \begin{matrix} \langle 2, 2| \\ \langle 2, 1| \\ \langle 2, 0| \\ \langle 2,-1| \\ \langle 2,-2| \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.73)$$

a_{11} elemanı ;

$$a_{11} = \langle 2,2|I_x|2,2\rangle = \left\langle 2,2 \left| \frac{I_+ + I_-}{2} \right| 2,2 \right\rangle = \frac{1}{2} [\langle 2,2|I_+|2,2\rangle + \langle 2,2|I_-|2,2\rangle] \quad (3.74)$$

işleminden elde edilir. Denk.(2.33) ve Denk.(2.39) ifadeleri kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \langle 2,2|I_+|2,2\rangle &= 0 \\ \langle 2,2|I_-|2,2\rangle &= \langle 2,2|\sqrt{2(2+1)-2(2-1)}|2,1\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.75)$$

olur. Burada bra ve ket ifadelerindeki değerler aynı olduğunda ifadelerin sıfırdan farklı olduğuna dikkat edilmelidir. Sonuçta bra ve ketler farklı olduğundan a_{11} değeri sıfır olur.

a_{12} elemanı;

$$a_{12} = \langle 2,2|I_x|2,1\rangle = \left\langle 2,2 \left| \frac{I_+ + I_-}{2} \right| 2,1 \right\rangle = \frac{1}{2} [\langle 2,2|I_+|2,1\rangle + \langle 2,2|I_-|2,1\rangle] \quad (3.76)$$

Denk.(2.33) ve Denk.(2.39) ifadeleri tekrar kullanırsa,

$$\begin{aligned} \langle 2,2|I_+|2,1\rangle &= \langle 2,2|\sqrt{2(2+1)-1(1+1)}|2,2\rangle = 2 \langle 2,2|2,2\rangle = 2 \\ \langle 2,2|I_-|2,1\rangle &= \langle 2,2|\sqrt{2(2+1)-1(1-1)}|2,0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.77)$$

bulunur. Bu ifadeler Denk.(3.76)'da yerine yazıldığında,

$$a_{12} = \langle 2,2|I_x|2,1\rangle = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\langle 2,2|I_+|2,1\rangle}_2 + \underbrace{\langle 2,2|I_-|2,1\rangle}_0 \right] = 1 \quad (3.78)$$

elde edilir.

Bu şekilde işlemlere devam edilirse I_x matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$I_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{6}/2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}/2 & 0 & \sqrt{6}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

I_y işlemcisinin matris temsili Denk.(3.80)'de olduğu gibi gösterilebilir.

$$I_y = \begin{matrix} & \begin{matrix} |2,2\rangle & |2,1\rangle & |2,0\rangle & |2,-1\rangle & |2,-2\rangle \end{matrix} \\ \begin{matrix} \langle 2,2| \\ \langle 2,1| \\ \langle 2,0| \\ \langle 2,-1| \\ \langle 2,-2| \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.80)$$

a_{11} elemanı ;

$$a_{11} = \langle 2,2|I_y|2,2\rangle = \left\langle 2,2\left|\frac{I_+ - I_-}{2i}\right|2,2\right\rangle = \frac{1}{2i} [\langle 2,2|I_+|2,2\rangle + \langle 2,2|I_-|2,2\rangle] \quad (3.81)$$

Denk.(2.33) ve Denk.(2.39) ifadeleri tekrar kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \langle 2,2|I_+|2,2\rangle &= 0 \\ \langle 2,2|I_-|2,2\rangle &= \langle 2,2|\sqrt{2(2+1)-2(2-1)}|2,1\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.82)$$

olur. Sonuçta a_{11} değeri sıfır olur.

a_{12} elemanı ;

$$a_{12} = \langle 2,2|I_y|2,1\rangle = \left\langle 2,2\left|\frac{I_+ - I_-}{2i}\right|2,1\right\rangle = \frac{1}{2i} [\langle 2,2|I_+|2,1\rangle + \langle 2,2|I_-|2,1\rangle] \quad (3.83)$$

Denk.(2.33) ve Denk.(2.39) ifadeleri tekrar kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \langle 2,2|I_+|2,1\rangle &= \langle 2,2|\sqrt{2(2+1)-1(1+1)}|2,2\rangle = 2 \langle 2,2|2,2\rangle = 2 \\ \langle 2,2|I_-|2,1\rangle &= \langle 2,2|\sqrt{2(2+1)-1(1-1)}|2,0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

sonucu elde edilir. Denk.(3.83)'de yerine yazıldığında,

$$a_{12} = \langle 2,2|I_y|2,1\rangle = \frac{1}{2i} \left[\underbrace{\langle 2,2|I_+|2,1\rangle}_2 + \underbrace{\langle 2,2|I_-|2,1\rangle}_0 \right] = \frac{1}{i} = -i \quad (3.85)$$

elde edilir.

Bu şekilde işlemlere devam edildiğinde I_y matrisi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$I_y = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -\sqrt{6}i/2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}i/2 & 0 & -\sqrt{6}i/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}i/2 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

I_z işlemcisinin matris temsili Denk.(3.87)'de olduğu gibi gösterilebilir.

$$I_z = \begin{matrix} & \begin{matrix} |2,2\rangle & |2,1\rangle & |2,0\rangle & |2,-1\rangle & |2,-2\rangle \end{matrix} \\ \begin{matrix} \langle 2, 2| \\ \langle 2, 1| \\ \langle 2, 0| \\ \langle 2, -1| \\ \langle 2, -2| \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.87)$$

I_z matrisimizi elde ederken Denk.(2.21)'de ifade edilen bağıntı kullanılır. Bu bağıntıda matrisimizin sadece köşegenlerinde sıfırdan farklı değerler gelir.

$$\begin{aligned} a_{11} &= \langle 2,2|I_z|2,2\rangle = 2\hbar = 2 \\ a_{22} &= \langle 2,1|I_z|2,1\rangle = \hbar = 1 \\ a_{33} &= \langle 2,0|I_z|2,0\rangle = 0\hbar = 0 \\ a_{44} &= \langle 2,-1|I_z|2,-1\rangle = -1\hbar = -1 \\ a_{55} &= \langle 2,-2|I_z|2,-2\rangle = -2\hbar = -2 \end{aligned} \quad (3.88)$$

sonuçları bulunur. Bulunan değerler yerine yazılırsa,

$$I_z = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

matrisi elde edilir.

4. BULGULAR

Kartezyen açısal momentum işlemcileri ve bunların matris temsilleri başta NMR olmak üzere Kuantum Fiziği açısından önemlidir. Bu bölümde küresel tensör işlemciler kullanılarak spin-2 için kartezyen açısal momentum işlemcileri ilk defa bulunmuştur. Spin-2 için matris temsilleri ayrıca elde edilmiştir. Elde edilen uzun ifadeleri sadeleştirmek için indirgenme yapılmış, devamında indirgenmiş işlemcilerin matris temsilleri elde edilmiştir. İndirgenmiş işlemciler parçalı hale getirilmiş ve yirmibeş adet yeni baz seti oluşturulmuştur. Oluşturulan yeni baz seti ilk defa C1, C2, ... , C25 şeklinde gösterilmiş ve bu baz setinin birbiri ile komitasyonları hesaplanarak çizelge haline getirilmiştir.

4.1 Spin-2 İçin Küresel Tensör İşlemciler

Spini-2 olan sistem ve parçacıklar, $(2I+1)^2=25$ adet ortogonal küresel tensör işlemcilerle temsil edilmektedir. Bu işlemcilerin bulunması Bölüm 3.1’de anlatılmış ve spini $\frac{1}{2}$; 1 ; $\frac{3}{2}$ olan çekirdekler için bulunmuştur. Benzer şekilde $I=2$ için küresel tensör işlemciler literatürde mevcuttur (Mehring and Weberruß, 2001). Ancak katsayıları hesaplanarak yeniden elde edilmelidir. Katsayılar Denk. 4.1’de k değerleri yerine yazılarak elde edilir.

$I=2$ olduğundan $k=2I=2.2=4$ olur ve bu değerler 0, 1, 2, 3, 4 ‘tür. $q=-k, \dots, 0, \dots, +k$ ifadesinden $q=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ değerlerini alır.

$$T_u^{(k,q)} = \frac{1}{k!} \sqrt{2^k (2k+1) \frac{(2I-k)!(2k)!}{(2I+k+1)!}} T^{(k,q)} \quad (4.1)$$

ifadesinde yerine yazılırsa,

$$k=0 \text{ için, } \frac{1}{k!} \sqrt{2^k (2k+1) \frac{(2I-k)!(2k)!}{(2I+k+1)!}} = \frac{1}{0!} \sqrt{2^0 (2.0+1) \frac{(2.2-0)!(2.0)!}{(2.2+0+1)!}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (4.2)$$

bulunur. $k=1$ için aynı ifadedden $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $k=2$ için $\frac{1}{\sqrt{21}}$, $k=3$ için $\frac{1}{6}$, $k=4$ için $\frac{1}{6}$

bulunur. Bu değerler $I=2$ için literatürde bulunan tensör işlemcilerin katsayıları ile çarpılıp düzenlenirse Çizelge 4.1 'deki $I=2$ için Küresel Tensör İşlemciler yeniden elde edilir (Mehring and Weberruß, 2001).

Çizelge 4.1. $I=2$ için küresel tensör işlemciler

$T_2^{(0,0)} = \frac{1}{\sqrt{5}} E$
$T_2^{(1,0)} = \frac{1}{\sqrt{10}} I_z$
$T_2^{(1,\pm 1)} = \mp \frac{1}{2\sqrt{5}} I_{\pm}$
$T_2^{(2,0)} = \frac{1}{3\sqrt{14}} (3I_z^2 - I(I+1)) = \frac{1}{3\sqrt{14}} (3I_z^2 - I^2)$
$T_2^{(2,\pm 1)} = \mp \frac{1}{2\sqrt{21}} [I_z, I_{\pm}]_+$
$T_2^{(2,\pm 2)} = \frac{1}{2\sqrt{21}} I_{\pm}^2$
$T_2^{(3,0)} = \frac{1}{6\sqrt{10}} (5I_z^3 - (3I(I+1)-1)I_z) = \frac{1}{6\sqrt{10}} (5I_z^3 - (3I^2-1)I_z)$
$T_2^{(3,\pm 1)} = \mp \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{10}} \left[\left(5I_z^2 - I(I+1) - \frac{1}{2} \right), I_{\pm} \right]_+ = \mp \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{10}} \left[\left(5I_z^2 - I^2 - \frac{1}{2} \right), I_{\pm} \right]_+$
$T_2^{(3,\pm 2)} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{4}} [I_z, I_{\pm}^2]_+$
$T_2^{(3,\pm 3)} = \mp \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} I_{\pm}^3$
$T_2^{(4,0)} = \frac{1}{12\sqrt{70}} (35I_z^4 - (30I(I+1)-25)I_z^2 + 3I^2(I+1)^2 - 6I(I+1))$
$T_2^{(4,\pm 1)} = \mp \frac{1}{12\sqrt{14}} [7I_z^3 - (3I(I+1)+1)I_z, I_{\pm}]_+$
$T_2^{(4,\pm 2)} = \mp \frac{1}{24\sqrt{7}} [(7I_z^2 - I(I+1)-5), I_{\pm}^2]_+$
$T_2^{(4,\pm 3)} = \mp \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} [I_z, I_{\pm}^3]_+$
$T_2^{(4,\pm 4)} = \frac{1}{24} I_{\pm}^4$

4.2 Spin-2 İçin Kartezyen İşlecilerin Elde Edilmesi

Bölüm 3’de spin-½ olan çekirdekler için dört, spin-1 olan çekirdekler için dokuz ve spin-3/2 olan çekirdekler için on altı kartezyen açısal momentum işlecisinin bulunması gösterilmişti. Spin-2 için ise yirmi beş adet kartezyen açısal momentum işlemcisi mevcut olup, bunlardan on altısı diğer spinler için bulunan işlemcilerdir. Kalan dokuz işlemci bu bölümde ilk defa bulunmuştur.

Spin-2 olan sistem ve parçacıklar için $(2I+1)^2=25$ tane kartezyen işlemci bulunmaktadır. Denk. (3.1) ‘e göre k ve q değerlerine tekrar bakılırsa, $k=0, 1, \dots, 2I$ olduğundan 0, 1, 2, 3, 4 değerlerini alır. q değeri $-k, \dots, +k$ değerleri arasında olup burada $k=0$ için $q=0$, $k=1$ için $q=0, \pm 1$, $k=2$ için $q=0, \pm 1, \pm 2$ ve $k=3$ için $q=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$, $k=4$ için $q=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ ‘dür.

$k=0$ ve $q=0$ için Denk.(3.48)’de Çizelge 4.1.’deki tensörler kullanılır. Bu tensörler tüm kartezyen işlemciler bulunurken kullanılmaktadır. Buradan,

$$C_1^{(k,z)} = C_2^{(0,z)} = \sqrt{2(2+1)/3} T_2^{0,0} = \sqrt{2} T_2^{0,0} = \sqrt{\frac{2}{5}} E \quad (4.3)$$

sonucu elde edilir.

$k=1$ ve $q=\pm 1$ için Denk.(3.46–47) kullanarak yeni işlemciler bulunabilir. Daha önce belirtildiği üzere $+q$ değerinin bulunması yeterli olacaktır. Buna göre Denk.(3.46)’dan,

$$\begin{aligned} C_2^{(1,x)} &= \frac{\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{1,-1} + (-1)^1 T_2^{1,1}) = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} I_- - \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right) I_+ \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} (I_- + I_+) = \frac{1}{\sqrt{5}} I_x \end{aligned} \quad (4.4)$$

elde edilir. Denk.(3.47) kullanılarak,

$$\begin{aligned} C_2^{(1,y)} &= i \frac{\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{1,-1} - (-1)^1 T_2^{1,1}) = i \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} I_- + \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right) I_+ \right) \\ &= \frac{i}{2\sqrt{5}} (-2i I_y) = \frac{1}{\sqrt{5}} I_y \end{aligned} \quad (4.5)$$

bulunur.

k=1, q=0 için bulunursa,

$$C_1^{(k,z)} = C_2^{(1,z)} = \sqrt{2(2+1)/3} T_2^{1,0} = \sqrt{2} T_2^{1,0} = \sqrt{\frac{2}{10}} I_z = \frac{1}{\sqrt{5}} I_z \quad (4.6)$$

elde edilir.

k=2 için q=0, ± 1 , ± 2 değerlerini sıra ile bulunmaya çalışıldığında, ilk olarak k=2 ve q=0 için Denk.(3.48) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} C_2^{(2,z)} &= \sqrt{2(2+1)/3} T_2^{2,0} \\ &= \sqrt{2} T_2^{2,0} = \sqrt{2} \frac{1}{3\sqrt{14}} (3I_z^2 - I(I+1)E) = \frac{1}{3\sqrt{7}} (3I_z^2 - I(I+1)E) \end{aligned} \quad (4.7)$$

olur. k=2 ve q=1 için Denk.(3.46) 'dan,

$$\begin{aligned} C_2^{(2,1x)} &= \frac{\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{2,-1} + (-1)^1 T_2^{2,+1}) \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{21}} [I_z, I_-]_+ - \left(-\frac{1}{2\sqrt{21}} [I_z, I_+]_+ \right) \right) = \frac{1}{2\sqrt{21}} \left([I_z, I_-] + [I_-, I_z] + [I_z, I_+] + [I_+, I_z] \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{21}} \left([I_z, (I_x - iI_y)] + [(I_x - iI_y), I_z] + [I_z, (I_x + iI_y)] + [(I_x + iI_y), I_z] \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{21}} 2(I_x I_z + I_z I_x) = \frac{1}{\sqrt{21}} [I_x, I_z]_+ \end{aligned} \quad (4.8)$$

bulunur. Denk.(3.47) kullanılarak diğer ifademiz,

$$\begin{aligned} C_1^{(k,qy)} &= C_2^{(2,1y)} = \frac{i\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{2,-1} - (-1)^1 T_2^{2,+1}) \\ &= i \left(\left(\frac{1}{2\sqrt{21}} [I_z, I_-]_+ \right) + \left(-\frac{1}{2\sqrt{21}} [I_z, I_+]_+ \right) \right) \\ &= i \frac{1}{2\sqrt{21}} \left([I_z, I_-] + [I_-, I_z] - [I_z, I_+] - [I_+, I_z] \right) \\ &= i \frac{1}{2\sqrt{21}} \left([I_z, (I_x - iI_y)] + [(I_x - iI_y), I_z] - [I_z, (I_x + iI_y)] - [(I_x + iI_y), I_z] \right) \\ &= i \frac{(-2i)}{2\sqrt{21}} (I_y I_z + I_z I_y) = \frac{1}{\sqrt{21}} [I_y, I_z]_+ \end{aligned} \quad (4.9)$$

olarak elde edilir.

k=2 ve q=2 için Denk.(3.46) ‘dan,

$$\begin{aligned}
C_2^{(2,2x)} &= \frac{\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{2,-2} + (-1)^2 T_2^{2,+2}) \\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{21}} (I_-)^2 + \frac{1}{2\sqrt{21}} (I_+)^2 \right) = \frac{1}{2\sqrt{21}} \left((I_x - iI_y)^2 + (I_x + iI_y)^2 \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{21}} \left((I_x - iI_y)(I_x - iI_y) + (I_x + iI_y)(I_x + iI_y) \right) \quad (4.10) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{21}} (I_x^2 - iI_x I_y - iI_y I_x - I_y^2 + I_x^2 + iI_x I_y + iI_y I_x - I_y^2) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{21}} (2I_x^2 - 2I_y^2) = \frac{1}{2\sqrt{21}} (I_x^2 - I_y^2)
\end{aligned}$$

olur. Denk.(3.47) ifadesi aşağıdaki gibi yazılırsa,

$$\begin{aligned}
C_2^{(2,2y)} &= \frac{i\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{2,-2} - (-1)^2 T_2^{2,+2}) \\
&= i \left(\frac{1}{2\sqrt{21}} (I_-)^2 - \frac{1}{2\sqrt{21}} (I_+)^2 \right) = i \frac{1}{2\sqrt{21}} \left((I_x - iI_y)^2 - (I_x + iI_y)^2 \right) \\
&= i \frac{1}{2\sqrt{21}} \left((I_x - iI_y)(I_x - iI_y) - (I_x + iI_y)(I_x + iI_y) \right) \quad (4.11) \\
&= i \frac{1}{2\sqrt{21}} (I_x^2 - iI_x I_y - iI_y I_x - I_y^2 - I_x^2 - iI_x I_y - iI_y I_x + I_y^2) \\
&= i \frac{1}{2\sqrt{21}} (-2iI_x I_y - 2iI_y I_x) = \frac{1}{2\sqrt{21}} [I_x, I_y]_{+}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

k=3 ve q=0 değerleri Denk.(3.48)’de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
C_1^{(k,z)} &= C_2^{(3,z)} = \sqrt{2(2+1)/3} T_2^{3,0} \\
&= \sqrt{2} T_2^{3,0} = \sqrt{2} \left[\frac{1}{6\sqrt{10}} (5I_z^3 - (3I(I+1)-1)I_z) \right] = \frac{1}{6\sqrt{5}} (5I_z^3 - (3I^2 - 1)I_z) \quad (4.12)
\end{aligned}$$

olur. k=3 ve q=1 değerleri Denk.(3.46)’da yazılırsa,

$$\begin{aligned}
C_I^{(k,qx)} &= C_2^{(3,1x)} = \frac{\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{3,-1} + (-1)^1 T_2^{3,+1}) \\
&= \left[\frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{10}} \left[\underbrace{\left(5I_z^2 - I^2 - \frac{1}{2} \right)}_A, I_- \right]_+ - \left(-\frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{10}} \right) \left[\underbrace{\left(5I_z^2 - I^2 - \frac{1}{2} \right)}_A, I_+ \right]_+ \right] \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{10}} (AI_x - AiI_y + I_x A - iI_y A + AI_x + AiI_y + I_x A + iI_y A) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{10}} (2I_x A + 2AI_x) = \frac{2}{12} \sqrt{\frac{3}{10}} [I_x, A]_+ = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{10}} \left[I_x, \left(5I_z^2 - I^2 - \frac{1}{2} \right) \right]_+ \\
&= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{10}} \left(5[I_x, I_z^2]_+ - \left[I_x, \left(I^2 + \frac{1}{2} \right) \right]_+ \right) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{10}} (5[I_x, I_z^2]_+ - (2I^2 + 1)I_x) \\
C_2^{(3,1x)} &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{10}} (5[I_x, I_z^2]_+ - (2I^2 + 1)I_x)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

bulunur. Aynı değerler Denk.(3.47) 'de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
C_I^{(k,qy)} &= C_2^{(3,1y)} = \frac{i\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{3,-1} - (-1)^1 T_2^{3,+1}) \\
&= i \left[\frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{10}} \left[\underbrace{\left(5I_z^2 - I^2 - \frac{1}{2} \right)}_A, I_- \right]_+ + \left(-\frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{10}} \right) \left[\underbrace{\left(5I_z^2 - I^2 - \frac{1}{2} \right)}_A, I_+ \right]_+ \right] \\
&= i \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{10}} (AI_x - AiI_y + I_x A - iI_y A - AI_x - AiI_y - I_x A - iI_y A) \\
&= i \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{10}} (-2iAI_y - 2iI_y A) = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{10}} i(-2i)[I_y, A]_+ \\
&= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{10}} \left[I_y, \left(5I_z^2 - I^2 - \frac{1}{2} \right) \right]_+ \\
&= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{10}} \left(5[I_y, I_z^2]_+ - \left[I_y, \left(I^2 + \frac{1}{2} \right) \right]_+ \right) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{10}} (5[I_y, I_z^2]_+ - (2I^2 + 1)I_y) \\
C_2^{(3,1y)} &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{10}} (5[I_y, I_z^2]_+ - (2I^2 + 1)I_y)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

sonucuna ulaşılır.

k=3 ve q=2 için Denk.(3.46) aynı şekilde kullanılır. Buradan,

$$\begin{aligned}
C_1^{(k,qx)} &= C_2^{(3,2x)} = \frac{\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{3,-2} + (-1)^2 T_2^{3,+2}) \\
&= \left(\frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{4}} [I_z, I_-^2]_+ + \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{4}} [I_z, I_+^2]_+ \right) = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{4}} (I_z I_-^2 + I_-^2 I_z + I_z I_+^2 + I_+^2 I_z) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{4}} \left((I_z (I_x - iI_y)(I_x - iI_y) + (I_x - iI_y)(I_x - iI_y) I_z) \right. \\
&\quad \left. + (I_z (I_x + iI_y)(I_x + iI_y) + (I_x + iI_y)(I_x + iI_y) I_z) \right) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{4}} (2I_z I_x^2 - 2I_z I_y^2 + 2I_x^2 I_z - 2I_y^2 I_z) = \frac{2}{12} \sqrt{\frac{3}{4}} [I_z (I_x^2 - I_y^2) + (I_x^2 - I_y^2) I_z] \\
C_2^{(3,2x)} &= \frac{1}{12} \sqrt{3} [I_z, (I_x^2 - I_y^2)]_+
\end{aligned} \tag{4.15}$$

bulunur. Denk.(3.47) ifadesinde k=3 ve q=2 yazılırsa,

$$\begin{aligned}
C_1^{(k,qy)} &= C_2^{(3,2y)} = \frac{i\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{3,-2} - (-1)^2 T_2^{3,+2}) \\
&= i \left(\frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{4}} [I_z, I_-^2]_+ - \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{4}} [I_z, I_+^2]_+ \right) \\
&= i \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{4}} (I_z I_-^2 + I_-^2 I_z - I_z I_+^2 - I_+^2 I_z) \\
&= i \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{4}} \left((I_z (I_x - iI_y)(I_x - iI_y) + (I_x - iI_y)(I_x - iI_y) I_z) \right. \\
&\quad \left. - (I_z (I_x + iI_y)(I_x + iI_y) + (I_x + iI_y)(I_x + iI_y) I_z) \right) \\
&= i \frac{1}{12} \sqrt{\frac{3}{4}} (-2iI_z I_x I_y - 2iI_z I_y I_x - 2iI_x I_y I_z - 2iI_y I_x I_z) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{3} (I_z I_x I_y + I_z I_y I_x + I_x I_y I_z + I_y I_x I_z) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{3} (I_z (I_x I_y + I_y I_x) + (I_x I_y + I_y I_x) I_z) \\
C_2^{(3,2y)} &= \frac{1}{12} \sqrt{3} [I_z, [I_x, I_y]]_+
\end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir.

k=3 ve q=3 değerleri için aynı şekilde Çizelge 4.1 'deki tensör bağıntılarını kullanarak kartezyen işlemciler bulunabilir. Denk.(3.46) ifadesinde değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
C_I^{(k,qx)} &= C_2^{(3,3x)} = \frac{\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{3,-3} + (-1)^3 T_2^{3,+3}) \\
&= \left(\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} I_-^3 - \left(-\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} I_+^3 \right) \right) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} [(I_x - iI_y)(I_x - iI_y)(I_x - iI_y) + (I_x + iI_y)(I_x + iI_y)(I_x + iI_y)]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

olur. Burada parantez çarpımlarını bulup gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
C_2^{(3,3x)} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} \left[(I_x - iI_y)(I_x^2 - iI_x I_y - iI_y I_x - I_y^2) + (I_x + iI_y)(I_x^2 + iI_x I_y + iI_y I_x - I_y^2) \right] \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} (2I_x^3 - 2I_y^2 I_x - 2I_x I_y^2 - 2I_y I_x I_y) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} ((I_x^2 - I_y^2)I_x - [I_x, I_y]_+ I_y) \\
C_2^{(3,3x)} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} (I_x(I_x^2 - I_y^2) - I_y[I_x, I_y]_+)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

kartezyen işlemcisi elde edilir. Denk.(3.47)'den,

$$\begin{aligned}
C_I^{(k,qy)} &= C_2^{(3,3y)} = \frac{i\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{3,-3} - (-1)^3 T_2^{3,+3}) \\
&= i \left(\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} I_-^3 + \left(-\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} I_+^3 \right) \right) \\
&= \frac{i}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} [(I_x - iI_y)(I_x - iI_y)(I_x - iI_y) - (I_x + iI_y)(I_x + iI_y)(I_x + iI_y)]
\end{aligned} \tag{4.19}$$

bulunur. Aynı şekilde tekrar çarpım işlemleri yapıp sadeleştirilirse,

$$C_2^{(3,3y)} = \frac{i}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} \left[(I_x - iI_y)(I_x^2 - iI_x I_y - iI_y I_x - I_y^2) - (I_x + iI_y)(I_x^2 + iI_x I_y + iI_y I_x - I_y^2) \right] \tag{4.20}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
C_2^{(3,3y)} &= \frac{i}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} \left(-2iI_x I_y I_x - 2iI_y I_x I_x - 2iI_x^2 I_y + 2iI_y^3 \right) \\
&= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} \left(I_x I_y I_x + I_y I_x I_x + I_x^2 I_y - I_y^3 \right) \\
&= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} \left(I_y (I_x^2 - I_y^2) + I_x [I_x, I_y]_+ \right) \\
C_2^{(3,3y)} &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} \left(I_y (I_x^2 - I_y^2) - I_x [I_x, I_y]_+ \right)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

bulunur. $I^2 = I(I+1)$ eşitliği denklemlerimizde bazı durumlarda kullanılmaktadır. Buraya kadar bulduğumuz işlemcilerin spin $\frac{1}{2}$, spin 1 ve spin $\frac{3}{2}$ için daha önce Bölüm 3'te bulunan işlemciler olduğu görülmektedir. Buradan itibaren daha önce ifade edilmeyen spin-2 için, $k=4$ ve $q=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ değerlerini kullanılarak kartezyen açısal momentum işlemcileri elde edilmiştir.

$k=4, q=0$ için Denk.(3.48) bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
C_1^{(k,z)} &= C_2^{(4,z)} = \sqrt{2(2+1)/3} T_2^{1,0} = \sqrt{2} T_2^{4,0} \\
&= \sqrt{2} \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{70}} \left[35I_z^4 - (30I(I+1) - 25)I_z^2 + 3I^2(I+1)^2 - 6I(I+1) \right] \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{35}} \left[35I_z^4 - (30I(I+1) - 25)I_z^2 + 3I^2(I+1)^2 - 6I(I+1) \right]
\end{aligned} \tag{4.22}$$

sonucu elde edilir.

$k=4$ ve $q \neq 0$ için Denk.(3.46-47) kullanarak diğer kartezyen açısal momentum işlemcileri elde edilir. İlk olarak $k=4$ ve $q=1$ için Denk.(3.46) bağıntısından,

$$\begin{aligned}
C_1^{(k,qx)} &= C_2^{(4,1x)} = \frac{\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} \left(T_2^{4,-1} + (-1)^1 T_2^{4,+1} \right) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{14}} \left[\left(\underbrace{7I_z^3 - (3I(I+1) + 1)I_z}_A \right), I_- \right]_+ \\
&\quad - \left(-\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{14}} \left[\left(\underbrace{7I_z^3 - (3I(I+1) + 1)I_z}_A \right), I_+ \right]_+ \right)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

şeklinde kısaltılıp çarpma işlemine geçilirse,

$$\begin{aligned}
C_2^{(4,1x)} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{14}} ([A, I_-]_+ + [A, I_+]_+) = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{14}} (AI_- + I_-A + AI_+ + I_+A) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{14}} (AI_x - AiI_y + I_xA - iI_yA + AI_x + AiI_y + I_xA + iI_yA) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{14}} (2AI_x + 2I_xA) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{14}} [A, I_x]_+ \\
&= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{14}} [7I_z^3 - (3I(I+1)+1)I_z, I_x]_+
\end{aligned} \tag{4.23}$$

bulunur. Denk.(3.47)'de k=4 ve q=1 yazılırsa ,

$$\begin{aligned}
C_1^{(k,qy)} &= C_2^{(4,1y)} = \frac{i\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{4,-1} - (-1)^1 T_2^{4,+1}) \\
&= i \left(\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{14}} \left[\left(\underbrace{7I_z^3 - (3I(I+1)+1)I_z}_A \right), I_- \right]_+ \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{14}} \left[\left(\underbrace{7I_z^3 - (3I(I+1)+1)I_z}_A \right), I_+ \right]_+ \right) \right) \\
&= \frac{i}{12} \sqrt{\frac{1}{14}} ([A, I_-]_+ - [A, I_+]_+) = \frac{i}{12} \sqrt{\frac{1}{14}} (AI_- + I_-A - AI_+ - I_+A) \\
&= \frac{i}{12} \sqrt{\frac{1}{14}} (AI_x - AiI_y + I_xA - iI_yA - AI_x - AiI_y - I_xA - iI_yA) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{14}} (-2iAI_y - 2iI_yA) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{14}} [A, I_y]_+ \\
&= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{14}} [7I_z^3 - (3I(I+1)+1)I_z, I_y]_+
\end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir.

k=4 ve q=2 için, Denk.(3.46) bağıntısından hareketle,

$$\begin{aligned}
C_1^{(k,qx)} &= C_2^{(4,2x)} = \frac{\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} \left(T_2^{4,-2} + (-1)^2 T_2^{4,+2} \right) \\
&= \frac{1}{24} \sqrt{\frac{1}{7}} \left[\underbrace{7I_z^2 - I(I+1) - 5}_{A} I_-^2 \right]_+ + \frac{1}{24} \sqrt{\frac{1}{7}} \left[\underbrace{7I_z^2 - I(I+1) - 5}_{A} I_+^2 \right]_+ \\
&= \frac{1}{24} \sqrt{\frac{1}{7}} \left([A, I_-^2]_+ + [A, I_+^2]_+ \right) = \frac{1}{24} \sqrt{\frac{1}{7}} (AI_-^2 + I_-^2 A + AI_+^2 + I_+^2 A)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

şeklinde yazılır. Burada I_-^2 ve I_+^2 ifadelerinin ayrı ayrı açılımı elde edilirse,

$$\begin{aligned}
I_-^2 &= (I_x - iI_y)(I_x - iI_y) = I_x^2 - iI_x I_y - iI_y I_x - I_y^2 \\
I_+^2 &= (I_x + iI_y)(I_x + iI_y) = I_x^2 + iI_x I_y + iI_y I_x - I_y^2
\end{aligned} \tag{4.26}$$

bulunur. Bu ifadeler Denk.(4.25)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
C_2^{(4,2x)} &= \frac{1}{24} \sqrt{\frac{1}{7}} \left(\begin{aligned} &AI_x^2 - iAI_x I_y - iAI_y I_x - AI_y^2 + I_x^2 A - iI_x I_y A - iI_y I_x A - I_y^2 A \\ &AI_x^2 - iAI_x I_y - iAI_y I_x - AI_y^2 + I_x^2 A + iI_x I_y A + iI_y I_x A - I_y^2 A \end{aligned} \right) \\
&= \frac{1}{24} \sqrt{\frac{1}{7}} (2AI_x^2 - 2AI_y^2 + 2I_x^2 A - 2I_y^2 A) = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{7}} (A(I_x^2 - I_y^2) + (I_x^2 - I_y^2)A) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{7}} [A, (I_x^2 - I_y^2)]_+ = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{7}} [7I_z^2 - I(I+1) - 5, (I_x^2 - I_y^2)]_+ \\
C_2^{(4,2x)} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{7}} [7I_z^2 - I(I+1) - 5, (I_x^2 - I_y^2)]_+
\end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir.

Denk.(3.47) bağıntısında $k=4$ ve $q=2$ ifadeleri kullanılıp yeni kartezyen işlemci bulunur. Buna göre bağıntı,

$$\begin{aligned}
C_1^{(k,qy)} &= C_2^{(4,2y)} = \frac{i\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{4,-2} - (-1)^2 T_2^{4,+2}) \\
&= \left(\begin{array}{c} \frac{i}{24} \sqrt{\frac{1}{7}} \left[\underbrace{7I_z^2 - I(I+1) - 5}_A, I_-^2 \right]_+ \\ -\frac{i}{24} \sqrt{\frac{1}{7}} \left[\underbrace{7I_z^2 - I(I+1) - 5}_A, I_+^2 \right]_+ \end{array} \right) \\
&= \frac{i}{24} \sqrt{\frac{1}{7}} ([A, I_-^2]_+ - [A, I_+^2]_+) = \frac{i}{24} \sqrt{\frac{1}{7}} (AI_-^2 + I_-^2 A - AI_+^2 - I_+^2 A)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

şeklinde olur. Denk.(4.26)'daki açılımlar yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
C_2^{(4,2x)} &= \frac{i}{24} \sqrt{\frac{1}{7}} \left(\begin{array}{c} AI_x^2 - iAI_x I_y - iAI_y I_x - AI_y^2 + I_x^2 A - iI_x I_y A - iI_y I_x A - I_y^2 A \\ - AI_x^2 - iAI_x I_y - iAI_y I_x + AI_y^2 - I_x^2 A - iI_x I_y A - iI_y I_x A + I_y^2 A \end{array} \right) \\
&= \frac{i}{24} \sqrt{\frac{1}{7}} (-2iAI_x I_y - 2iAI_y I_x - 2iI_x I_y A - 2iI_y I_x A) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{7}} (AI_x I_y + I_x I_y A + AI_y I_x + I_y I_x A) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{7}} (A[I_x, I_y]_+ + [I_x, I_y]_+ A) = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{7}} [A, [I_x, I_y]_+]_+ \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{7}} [7I_z^2 - I(I+1) - 5, [I_x, I_y]_+]_+ \\
C_2^{(4,2x)} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{7}} [7I_z^2 - I(I+1) - 5, [I_x, I_y]_+]_+
\end{aligned} \tag{4.29}$$

sonucu elde edilir.

k=4 ve q=3 için Denk(3.46),

$$\begin{aligned}
C_1^{(k,qx)} &= C_2^{(4,3x)} = \frac{\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{4,-2} + (-1)^3 T_2^{4,+2}) \\
&= \left(\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} [I_z, I_-^3]_+ - \left(-\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) [I_z, I_+^3]_+ \right) = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} (I_z I_-^3 + I_-^3 I_z + I_z I_+^3 + I_+^3 I_z) \\
&= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{c} (I_z (I_x - iI_y) (I_x - iI_y) (I_x - iI_y) + (I_x - iI_y) (I_x - iI_y) (I_x - iI_y) I_z) \\ + (I_z (I_x + iI_y) (I_x + iI_y) (I_x + iI_y) + (I_x + iI_y) (I_x + iI_y) (I_x + iI_y) I_z) \end{array} \right)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

şeklinde. Parantez içindeki çarpımlar hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} I_-^3 &= (I_x - iI_y)(I_x - iI_y)(I_x - iI_y) = (I_x - iI_y)(I_x^2 - iI_xI_y - iI_yI_x - I_y^2) \\ &= \left(I_x^3 - I_xI_xI_y - iI_xI_yI_x - I_xI_y^2 - iI_yI_x^2 - I_yI_xI_y - I_yI_yI_x + iI_y^3 \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

ve

$$\begin{aligned} I_+^3 &= (I_x + iI_y)(I_x + iI_y)(I_x + iI_y) = (I_x + iI_y)(I_x^2 + iI_xI_y + iI_yI_x - I_y^2) \\ &= \left(I_x^3 + iI_xI_xI_y + iI_xI_yI_x - I_xI_y^2 + iI_yI_x^2 - I_yI_xI_y - I_yI_yI_x - iI_y^3 \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeler Denk.(4.30)'da yerine yazılıp sadeleştirme yapılırsa,

$C_2^{(4,3x)}$ işlemcisi,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\begin{aligned} &I_z(I_x^3 - iI_xI_xI_y - iI_xI_yI_x - I_xI_y^2 - iI_yI_x^2 - I_yI_xI_y - I_yI_yI_x + iI_y^3) \\ &+ (I_x^3 - iI_xI_xI_y - iI_xI_yI_x - I_xI_y^2 - iI_yI_x^2 - I_yI_xI_y - I_yI_yI_x + iI_y^3)I_z \\ &+ I_z(I_x^3 + iI_xI_xI_y + iI_xI_yI_x - I_xI_y^2 - iI_yI_x^2 - I_yI_xI_y - I_yI_yI_x - iI_y^3) \\ &+ (I_x^3 + iI_xI_xI_y + iI_xI_yI_x - I_xI_y^2 - iI_yI_x^2 - I_yI_xI_y - I_yI_yI_x - iI_y^3)I_z \end{aligned} \right] \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\begin{aligned} &\underbrace{2I_zI_x^3}_A + \underbrace{2I_x^3I_z}_B - \underbrace{2I_zI_xI_y^2}_A - \underbrace{2I_xI_y^2I_z}_C - \underbrace{2I_zI_yI_xI_y}_D - \underbrace{2I_yI_xI_yI_z}_C \\ &- \underbrace{2I_zI_yI_yI_x}_D - \underbrace{2I_y^2I_xI_z}_B \end{aligned} \right] \quad (4.33) \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} \left(2(I_x^2 - I_y^2)I_xI_z - 2I_zI_y[I_x, I_y]_+ + 2I_zI_x(I_x^2 - I_y^2) \right. \\ &\quad \left. - 2[I_x, I_y]_+ I_yI_z \right) \\ C_2^{(4,3x)} &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} \left((I_x^2 - I_y^2)I_xI_z - I_zI_y[I_x, I_y]_+ + I_zI_x(I_x^2 - I_y^2) \right. \\ &\quad \left. - [I_x, I_y]_+ I_yI_z \right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $k=4$ ve $q=3$ için Denk(3.47),

$$\begin{aligned} C_1^{(k,qy)} &= C_2^{(4,3y)} = \frac{i\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{4,-2} - (-1)^3 T_2^{4,+2}) \\ &= i \left(\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} [I_z, I_-^3]_+ + \left(-\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} \right) [I_z, I_+^3]_+ \right) = \frac{i}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} (I_zI_-^3 + I_-^3I_z - I_zI_+^3 - I_+^3I_z) \\ &= \frac{i}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} \left(I_z(I_x - iI_y)(I_x - iI_y)(I_x - iI_y) + (I_x - iI_y)(I_x - iI_y)(I_x - iI_y)I_z \right. \\ &\quad \left. - I_z(I_x + iI_y)(I_x + iI_y)(I_x + iI_y) - (I_x + iI_y)(I_x + iI_y)(I_x + iI_y)I_z \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

olur. Denk.(4.31–32)’de bulduğumuz ifadeleri burada yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa $C_2^{(4,3y)}$ işlemcisi,

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\begin{aligned} &I_z \left(I_x^3 - iI_x I_x I_y - iI_x I_y I_x - I_x I_y^2 - iI_y I_x^2 - I_y I_x I_y - I_y I_y I_x + iI_y^3 \right) \\ &+ \left(I_x^3 - iI_x I_x I_y - iI_x I_y I_x - I_x I_y^2 - iI_y I_x^2 - I_y I_x I_y - I_y I_y I_x + iI_y^3 \right) I_z \\ &- I_z \left(I_x^3 + iI_x I_x I_y + iI_x I_y I_x - I_x I_y^2 - iI_y I_x^2 - I_y I_x I_y - I_y I_y I_x - iI_y^3 \right) \\ &- \left(I_x^3 + iI_x I_x I_y + iI_x I_y I_x - I_x I_y^2 - iI_y I_x^2 - I_y I_x I_y - I_y I_y I_x - iI_y^3 \right) I_z \end{aligned} \right] \\
&= \frac{i}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} \left[\begin{aligned} &\underbrace{-2iI_z I_x^2 I_y}_A - \underbrace{2iI_x^2 I_y I_z}_B - \underbrace{2iI_z I_x I_y I_x}_A - \underbrace{2iI_x I_y I_x I_z}_C - \underbrace{2iI_z I_y I_x^2}_D \\ &\underbrace{-2iI_y I_x^2 I_z}_C + \underbrace{2iI_z I_y^3}_D + \underbrace{2iI_y^3 I_z}_B \end{aligned} \right] \quad (4.35) \\
C_2^{(4,3y)} &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\begin{aligned} &\left(I_x^2 - I_y^2 \right) I_y I_z + I_z I_x [I_x, I_y]_+ + I_z I_y (I_x^2 - I_y^2) \\ &+ [I_x, I_y]_+ I_x I_z \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

olur.

Son olarak $k=4$ ve $q=4$ için kartezyen açısal momentum işlemcileri için Denk(3.46)’dan,

$$\begin{aligned}
C_I^{(k,qx)} &= C_2^{(4,4x)} = \frac{\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} \left(T_2^{4,-4} + (-1)^4 T_2^{4,+4} \right) \\
&= \left(\frac{1}{24} I_-^4 + \frac{1}{24} I_+^4 \right) \quad (4.36)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yükselten ve azaltan işlemcilerinin dördüncü kuvveti bulunursa,

$$\begin{aligned}
I_-^4 &= (I_x - iI_y)(I_x - iI_y)(I_x - iI_y)(I_x - iI_y) \\
&= (I_x - iI_y)(I_x - iI_y) \left(I_x^2 - iI_x I_y - iI_y I_x - I_y^2 \right) \\
&= (I_x - iI_y) \left(I_x^3 - iI_x I_x I_y - iI_x I_y I_x - I_x I_y^2 - iI_y I_x^2 - I_y I_x I_y - I_y I_y I_x + iI_y^3 \right) \\
&= I_x^4 - iI_x^3 I_y - iI_x^2 I_y I_x - I_x^2 I_y^2 - iI_x I_y I_x^2 - I_x I_y I_x I_y - I_x I_y I_y I_x + iI_x I_y^3 \\
&\quad - iI_y I_x^3 - I_y I_x I_x I_y - I_y I_x I_y I_x + iI_y I_x I_y^2 - I_y^2 I_x^2 + iI_y^2 I_x I_y + iI_y^3 I_x + I_y^4 \quad (4.37)
\end{aligned}$$

şeklinde ve diğer ifade,

$$\begin{aligned}
I_+^4 &= (I_x + iI_y)(I_x + iI_y)(I_x + iI_y)(I_x + iI_y) \\
&= (I_x + iI_y)(I_x^3 + iI_x I_x I_y + iI_x I_y I_x - I_x I_y^2 - iI_y I_x^2 - I_y I_x I_y - I_y I_y I_x - iI_y^3) \\
&= I_x^4 + iI_x^3 I_y + iI_x^2 I_y I_x - I_x^2 I_y^2 + iI_x I_y I_x^2 - I_x I_y I_x I_y - I_x I_y I_y I_x - iI_x I_y^3 \\
&\quad + iI_y I_x^3 - I_y I_x I_x I_y - I_y I_x I_y I_x - iI_y I_x I_y^2 - I_y^2 I_x^2 - iI_y^2 I_x I_y - iI_y^3 I_x + I_y^4
\end{aligned} \tag{4.38}$$

olarak elde edilir. Bulunan bu yükselten ve alçaltan işlemciler Denk.(4.36)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
C_2^{(4,4x)} &= \\
&\frac{1}{24} \left(I_x^4 - iI_x^3 I_y - iI_x^2 I_y I_x - I_x^2 I_y^2 - iI_x I_y I_x^2 - I_x I_y I_x I_y - I_x I_y I_y I_x + iI_x I_y^3 \right) \\
&\frac{1}{24} \left(-iI_y I_x^3 - I_y I_x I_x I_y - I_y I_x I_y I_x + iI_y I_x I_y^2 - I_y^2 I_x^2 + iI_y^2 I_x I_y + iI_y^3 I_x + I_y^4 \right) \\
&+ \frac{1}{24} \left(I_x^4 + iI_x^3 I_y + iI_x^2 I_y I_x - I_x^2 I_y^2 + iI_x I_y I_x^2 - I_x I_y I_x I_y - I_x I_y I_y I_x - iI_x I_y^3 \right) \\
&+ \frac{1}{24} \left(+iI_y I_x^3 - I_y I_x I_x I_y - I_y I_x I_y I_x - iI_y I_x I_y^2 - I_y^2 I_x^2 - iI_y^2 I_x I_y - iI_y^3 I_x + I_y^4 \right)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

olur. Buradan sadeleştirme işlemi yapıldığında,

$$C_2^{(4,4x)} = \frac{1}{24} \left(2I_x^4 - 2I_x^2 I_y^2 - I_x I_y I_x^2 - 2I_x I_y I_x I_y - 2I_x I_y I_y I_x \right) \tag{4.40}$$

olur. Ortak paranteze alma işlemi yapıldığında,

$$C_2^{(4,4x)} = \frac{1}{12} \left(I_x^2 (I_x^2 - I_y^2) - I_y^2 (I_x^2 - I_y^2) - (I_x I_y) (I_x I_y + I_y I_x) \right) \tag{4.41}$$

bulunur. Aynı şekilde paranteze alma devam ederse,

$$C_2^{(4,4x)} = \frac{1}{12} \left((I_x^2 - I_y^2) (I_x^2 - I_y^2) - (I_x, I_y) [I_x, I_y]_+ \right) \tag{4.42}$$

$$C_2^{(4,4x)} = \frac{1}{12} \left((I_x^2 - I_y^2)^2 - [I_x, I_y]_+^2 \right) \tag{4.43}$$

sonucuna ulaşılır.

Denk(3.47)'te k=4 ve q=4 değerleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
C_I^{(k,qy)} &= C_2^{(4,4y)} = \frac{i\sqrt{2(2+1)/3}}{\sqrt{2}} (T_2^{4,-4} - (-1)^4 T_2^{4,+4}) \\
&= i \left(\frac{1}{24} I^4 - \frac{1}{24} I_+^4 \right)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

olur. Denk.(4.37–38) burada yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned}
C_2^{(4,4y)} &= \\
&\frac{i}{24} \left(I_x^4 - iI_x^3 I_y - iI_x^2 I_y I_x - I_x^2 I_y^2 - iI_x I_y I_x^2 - I_x I_y I_x I_y - I_x I_y I_y I_x + iI_x I_y^3 \right. \\
&\quad \left. - iI_y I_x^3 - I_y I_x I_x I_y - I_y I_x I_y I_x + iI_y I_x I_y^2 - I_y^2 I_x^2 + iI_y^2 I_x I_y + iI_y^3 I_x + I_y^4 \right) \\
&\quad - \frac{i}{24} \left(I_x^4 + iI_x^3 I_y + iI_x^2 I_y I_x - I_x^2 I_y^2 + iI_x I_y I_x^2 - I_x I_y I_x I_y - I_x I_y I_y I_x - iI_x I_y^3 \right. \\
&\quad \left. + iI_y I_x^3 - I_y I_x I_x I_y - I_y I_x I_y I_x - iI_y I_x I_y^2 - I_y^2 I_x^2 - iI_y^2 I_x I_y - iI_y^3 I_x + I_y^4 \right)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$C_2^{(4,4y)} = \frac{i}{24} \left(-2iI_x^3 I_y - 2iI_x^2 I_y I_x - 2iI_x I_y I_x^2 + 2iI_x I_y^3 \right. \\
\left. - 2iI_y I_x^3 + 2iI_y I_x I_y^2 + 2iI_y^2 I_x I_y + 2iI_y^3 I_x \right) \tag{4.46}$$

elde edilir. Ortak sayısal ifadeler parantez dışına alınırsa,

$$C_2^{(4,4y)} = \frac{1}{12} \left(I_x^3 I_y + I_x^2 I_y I_x + I_x I_y I_x^2 - I_x I_y^3 \right. \\
\left. + I_y I_x^3 - I_y I_x I_y^2 - I_y^2 I_x I_y - I_y^3 I_x \right) \tag{4.47}$$

olur. İfadeler ortak paranteze alındığında,

$$C_2^{(4,4y)} = \frac{1}{12} \left(I_x^2 [I_x, I_y]_+ + [I_x, I_y]_+ I_x^2 - [I_x, I_y]_+ I_y^2 - I_y^2 [I_x, I_y]_+ \right) \tag{4.48}$$

bulunur. Yeniden düzenlenirse,

$$C_2^{(4,4y)} = \frac{1}{12} \left([I_x, I_y]_+ (I_x^2 - I_y^2) + (I_x^2 - I_y^2) [I_x, I_y]_+ \right) \tag{4.49}$$

$$C_2^{(4,4y)} = \frac{1}{12} \left[[I_x, I_y]_+, (I_x^2 - I_y^2) \right] \tag{4.50}$$

sonucu elde edilir.

Sonuç olarak $I=2$ için yirmibeş adet kartezyen açısal momentum işlemcisi bulunmuş olur. Bu işlemciler tensör ifadeleri ile birlikte Çizelge 4.2’de gösterilmiştir.

Çizelge 4.2. $I=2$ için kartezyen açısal momentum işlemcileri

$$C_2^{(0,z)} = \sqrt{2} T_2^{0,0} = \sqrt{\frac{2}{5}} E$$

$$C_2^{(1,x)} = (T_2^{1,-1} - T_2^{1,1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} I_x$$

$$C_2^{(1,y)} = i(T_2^{1,-1} + T_2^{1,1}) = \frac{1}{\sqrt{5}} I_y$$

$$C_2^{(1,z)} = \sqrt{2} T_2^{1,0} = \sqrt{\frac{2}{10}} I_z = \frac{1}{\sqrt{5}} I_z$$

$$C_2^{(2,1x)} = (T_2^{2,-1} - T_2^{2,+1}) = \frac{1}{\sqrt{21}} [I_x, I_z]_+$$

$$C_2^{(2,1y)} = i(T_2^{2,-1} + T_2^{2,+1}) = \frac{1}{\sqrt{21}} [I_y, I_z]_+$$

$$C_2^{(2,z)} = \sqrt{2} T_2^{2,0} = \frac{1}{3\sqrt{7}} (3I_z^2 - I(I+1)E)$$

$$C_2^{(2,2x)} = (T_2^{2,-2} + T_2^{2,+2}) = \frac{1}{2\sqrt{21}} (I_x^2 - I_y^2)$$

$$C_2^{(2,2y)} = i(T_2^{2,-2} - T_2^{2,+2}) = \frac{1}{2\sqrt{21}} [I_x, I_y]_+$$

$$C_2^{(3,1x)} = (T_2^{3,-1} - T_2^{3,+1}) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{10}} (5[I_x, I_z^2]_+ - (2I^2 + 1)I_x)$$

$$C_2^{(3,1y)} = i(T_2^{3,-1} + T_2^{3,+1}) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{10}} (5[I_y, I_z^2]_+ - (2I^2 + 1)I_y)$$

$$C_2^{(3,z)} = \sqrt{2} T_2^{3,0} = \frac{1}{6\sqrt{5}} (5I_z^3 - (3I^2 - 1)I_z)$$

$$C_2^{(3,2x)} = (T_2^{3,-2} + T_2^{3,+2}) = \frac{1}{12} \sqrt{3} [I_z, (I_x^2 - I_y^2)]_+$$

$$C_2^{(3,2y)} = i(T_2^{3,-2} - T_2^{3,+2}) = \frac{1}{12} \sqrt{3} [I_z, [I_x, I_y]_+]_+$$

$$C_2^{(3,3x)} = (T_2^{3,-3} - T_2^{3,+3}) = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{2}} (I_x(I_x^2 - I_y^2) - I_y[I_x, I_y]_+)$$

$$C_2^{(3,3y)} = i(T_2^{3,-3} + T_2^{3,+3}) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} (I_y(I_x^2 - I_y^2) - I_x[I_x, I_y]_+)$$

Çizelge 4.2 Devamı. $I=2$ için kartezyen açısal momentum işlemcileri

$$C_2^{(4,1x)} = (T_2^{4,-1} - T_2^{4,+1}) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{14}} [7I_z^3 - (3I(I+1)+1)I_z, I_x]_+$$

$$C_2^{(4,1y)} = i (T_2^{4,-1} + T_2^{4,+1}) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{14}} [7I_z^3 - (3I(I+1)+1)I_z, I_y]_+$$

$$C_2^{(4,z)} = \sqrt{2} T_2^{4,0} = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{35}} [35I_z^4 - (30I(I+1)-25)I_z^2 + 3I^2(I+1)^2 - 6I(I+1)]$$

$$C_2^{(4,2x)} = (T_2^{4,-2} + T_2^{4,+2}) = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{7}} [7I_z^2 - I(I+1) - 5, (I_x^2 - I_y^2)]_+$$

$$C_2^{(4,2y)} = i(T_2^{4,-2} - T_2^{4,+2}) = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{7}} [7I_z^2 - I(I+1) - 5, [I_x, I_y]_+]_+$$

$$C_2^{(4,3x)} = (T_2^{4,-2} - T_2^{4,+2}) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} \left((I_x^2 - I_y^2) I_x I_z - I_z I_y [I_x, I_y]_+ + I_z I_x (I_x^2 - I_y^2) \right. \\ \left. - [I_x, I_y]_+ I_y I_z \right)$$

$$C_2^{(4,3y)} = i(T_2^{4,-2} + T_2^{4,+2}) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} \left((I_x^2 - I_y^2) I_y I_z + I_z I_x [I_x, I_y]_+ + I_z I_y (I_x^2 - I_y^2) \right. \\ \left. + [I_x, I_y]_+ I_x I_z \right)$$

$$C_2^{(4,4x)} = (T_2^{4,-4} + T_2^{4,+4}) = \frac{1}{12} ((I_x^2 - I_y^2)^2 - [I_x I_y]_+^2)$$

$$C_2^{(4,4y)} = i(T_2^{4,-4} - T_2^{4,+4}) = \frac{1}{12} [[I_x, I_y]_+, (I_x^2 - I_y^2)]_+$$

4.3 Spin-2 İçin İndirgenmiş Kartezyen İşlemciler

Spin-2 için elde edilen kartezyen işlemciler Çizelge 4.2’de gösterilmişti. Bu işlemcilere bakıldığında aynı açısal momentum işlemcisinin birden fazla ifadede yer aldığı görülür. Bu işlemcinin bizim işlemlerimize etkisi sadece bir ifadede gösterildiğinde yeterli olacaktır. Örnek olarak

$$C_2^{(3,1x)} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{10}} (5[I_x, I_z^2]_+ - (2I^2 + 1)I_x)$$

ifadesine baktığımızda sağ taraftaki I_x

işlemcisi $C_2^{(1,x)}$ ifadesinde de yer aldığından burada tekrar yazılmayabilir. Bu nedenle sadece diğer işlemci ile $C_2^{(3,1x)}(i) = \left([I_x, I_z^2]_+ \right)$ ile ifade ederek indirgenmiş oluruz. İşlemcinin önündeki katsayılar işlemlerde kolaylık olması ve fiziksel anlamı olmadığından ihmal edilmiştir. Benzer şekilde yirmibeş kartezyen işlemci Çizelge 4.3'te gösterildiği biçimde indirgenmiş olur. Bu yeni işlemcilerin indirgenmiş olduğunu belirtmek için yazımları (i)–indirgenmiş şeklinde gösterilmiştir.

Çizelge 4.3. $I=2$ için indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcileri

$C_2^{(0,z)}(i) = E$	$C_2^{(3,2y)}(i) = \llbracket I_x, I_y \rrbracket_+, I_z \rrbracket_+$
$C_2^{(1,x)}(i) = I_x$	$C_2^{(3,3x)}(i) = (I_x(I_x^2 - I_y^2) - I_y \llbracket I_x, I_y \rrbracket_+)$
$C_2^{(1,y)}(i) = I_y$	$C_2^{(3,3y)}(i) = (I_y(I_x^2 - I_y^2) - I_x \llbracket I_x, I_y \rrbracket_+)$
$C_2^{(1,z)}(i) = I_z$	$C_2^{(4,1x)}(i) = \llbracket I_x, I_z^3 \rrbracket_+$
$C_2^{(2,1x)}(i) = \llbracket I_x, I_z \rrbracket_+$	$C_2^{(4,1y)}(i) = \llbracket I_y, I_z^3 \rrbracket_+$
$C_2^{(2,1y)}(i) = \llbracket I_y, I_z \rrbracket_+$	$C_2^{(4,z)}(i) = I_z^4$
$C_2^{(2,z)}(i) = I_z^2$	$C_2^{(4,2x)}(i) = \llbracket (I_x^2 - I_y^2), I_z^2 \rrbracket_+$
$C_2^{(2,2x)}(i) = (I_x^2 - I_y^2)$	$C_2^{(4,2y)}(i) = \llbracket \llbracket I_x, I_y \rrbracket_+, I_z^2 \rrbracket_+$
$C_2^{(2,2y)}(i) = \llbracket I_x, I_y \rrbracket_+$	$C_2^{(4,3x)}(i) = \begin{pmatrix} (I_x^2 - I_y^2)I_x I_z - I_z I_y \llbracket I_x, I_y \rrbracket_+ + I_z I_x (I_x^2 - I_y^2) \\ - \llbracket I_x, I_y \rrbracket_+ I_y I_z \end{pmatrix}$
$C_2^{(3,1x)}(i) = \llbracket I_x, I_z^2 \rrbracket_+$	$C_2^{(4,3y)}(i) = \begin{pmatrix} (I_x^2 - I_y^2)I_y I_z + I_z I_x \llbracket I_x, I_y \rrbracket_+ + I_z I_y (I_x^2 - I_y^2) \\ + \llbracket I_x, I_y \rrbracket_+ I_x I_z \end{pmatrix}$
$C_2^{(3,1y)}(i) = \llbracket I_y, I_z^2 \rrbracket_+$	$C_2^{(4,4x)}(i) = ((I_x^2 - I_y^2)^2 - \llbracket I_x, I_y \rrbracket_+^2)$
$C_2^{(3,z)}(i) = I_z^3$	$C_2^{(4,4y)}(i) = \llbracket \llbracket I_x, I_y \rrbracket_+, (I_x^2 - I_y^2) \rrbracket_+$
$C_2^{(3,2x)}(i) = \llbracket (I_x^2 - I_y^2), I_z \rrbracket_+$	

Çizelge 4.3'deki indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcilerinin matris temsilleri maple programı kullanılarak elde edilmiş ve Çizelge (4.4) 'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.4. $I=2$ için indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcileri ve matris temsilleri

$$C_2^{(0,z)}(i) = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(1,x)}(i) = I_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(1,y)}(i) = I_y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} I$$

$$C_2^{(1,z)}(i) = I_z = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Çizelge 4.4.Devamı. $I=2$ için indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcileri ve matris temsilleri

$$C_2^{(2,1x)}(i) = [I_x, I_z]_+ = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(2,1y)}(i) = [I_y, I_z]_+ = \begin{bmatrix} 0 & -3I & 0 & 0 & 0 \\ 3I & 0 & \frac{-1}{2}I\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I\sqrt{6} & 0 & \frac{1}{2}I\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2}I\sqrt{6} & 0 & 3I \\ 0 & 0 & 0 & -3I & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(2,z)}(i) = I_z^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(2,2x)}(i) = (I_x^2 - I_y^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Çizelge 4.4.Devamı. $I=2$ için indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcileri ve matris temsilleri

$$C_2^{(2,2y)}(i) = [I_x, I_y]_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3I & 0 \\ \sqrt{6}I & 0 & 0 & 0 & -I\sqrt{6} \\ 0 & 3I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(3,1x)}(i) = [I_x, I_z^2]_+ = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(3,1y)}(i) = [I_y, I_z^2]_+ = \begin{bmatrix} 0 & -5I & 0 & 0 & 0 \\ 5I & 0 & \frac{-1}{2}I\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I\sqrt{6} & 0 & \frac{-1}{2}I\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}I\sqrt{6} & 0 & -5I \\ 0 & 0 & 0 & 5I & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(3,z)}(i) = I_z^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Çizelge 4.4.Devamı. $I=2$ için indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcileri ve matris temsilleri

$$C_2^{(3,2x)}(i) = \left[(I_x^2 - I_y^2), I_z \right]_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(3,2y)}(i) = \left[[I_x, I_y]_+, I_z \right]_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2I\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2I\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 2I\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2I\sqrt{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(3,3x)}(i) = (I_x(I_x^2 - I_y^2) - I_y[I_x, I_y]_+) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(3,3y)}(i) = (I_y(I_x^2 - I_y^2) - I_x[I_x, I_y]_+) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(4,1x)}(i) = [I_x, I_z^3]_+ = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

Çizelge 4.4.Devamı. $I=2$ için indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcileri ve matris temsilleri

$$C_2^{(4,1y)}(i) = [I_y, I_z^3]_+ = \begin{bmatrix} 0 & -9I & 0 & 0 & 0 \\ 9I & 0 & \frac{-1}{2}I\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I\sqrt{6} & 0 & \frac{1}{2}I\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2}I\sqrt{6} & 0 & 9I \\ 0 & 0 & 0 & -9I & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(4,z)}(i) = I_z^4 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(4,2x)}(i) = [(I_x^2 - I_y^2), I_z^2]_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 4\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 4\sqrt{6} \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\sqrt{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(4,2y)}(i) = [[I_x, I_y]_+, I_z^2]_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4I\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6I & 0 \\ 4I\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & -4I\sqrt{6} \\ 0 & 6I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4I\sqrt{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Çizelge 4.4.Devamı. $I=2$ için indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcileri ve matris temsilleri

$$C_2^{(4,3x)}(i) = \left(\begin{aligned} &(I_x^2 - I_y^2)I_x I_z - I_z I_y [I_x, I_y]_+ \\ &+ I_z I_x (I_x^2 - I_y^2) - [I_x, I_y]_+ I_y I_z \end{aligned} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(4,3y)}(i) = \left(\begin{aligned} &(I_x^2 - I_y^2)I_y I_z + I_z I_x [I_x, I_y]_+ \\ &+ I_z I_y (I_x^2 - I_y^2) + [I_x, I_y]_+ I_x I_z \end{aligned} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(4,4x)}(i) = \left((I_x^2 - I_y^2)^2 - [I_x I_y]_+^2 \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2^{(4,4y)}(i) = \left[[I_x, I_y]_+, (I_x^2 - I_y^2) \right]_+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -12I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.4 İndirgenmiş İşlemcilerin Parçalanması

İndirgenmiş matrislerimiz komitasyon hesaplamaları için daha da basit hale getirilebilir. Bu durumda kartezyen işlemcilerimizin kullanıldığı işlemler kolay hale gelmiş olur. İndirgenmiş matrisleri basit hale getirmek için parçalı olarak yazmak yeterli olacaktır (Vega, 1992; Gençten, 2001). Örneğin;

$$C_2^{(0,z)}(i) = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcisi;

$$C_2^{(0,z)}(i) = E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde parçalı olarak yazılabilir. Benzer şekilde;

$$C_2^{(2,z)}(i) = I_z^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcisi ise;

$$C_2^{(2,z)}(i) = I_z^2 = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak parçalı halde yazılabilir. Bu ifadelerde ortak terimler olduğu görülmektedir. Başka bir örnek verilirse,

$$C_2^{(2,1y)}(i) = [I_y, I_z]_+ = \begin{bmatrix} 0 & -3I & 0 & 0 & 0 \\ 3I & 0 & \frac{-1}{2}I\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I\sqrt{6} & 0 & \frac{1}{2}I\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2}I\sqrt{6} & 0 & 3I \\ 0 & 0 & 0 & -3I & 0 \end{bmatrix}$$

işlemcisi aşağıdaki gibi parçalanabilir.

$$C_2^{(2,1y)}(i) = 3 \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\sqrt{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde,

$$C_2^{(4,1y)}(i) = [I_y, I_z^3]_+ = \begin{bmatrix} 0 & -9I & 0 & 0 & 0 \\ 9I & 0 & \frac{-1}{2}I\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I\sqrt{6} & 0 & \frac{1}{2}I\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2}I\sqrt{6} & 0 & 9I \\ 0 & 0 & 0 & -9I & 0 \end{bmatrix}$$

işlemcisi,

$$C_2^{(2,1y)}(i) = 9 \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\sqrt{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde parçalanabilir. Burada da ifadelerin ortak matris değerlerini içerdiği görülmektedir. İndirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcilerinin matris temsilleri parçalı hale getirilmesi sonucu ortak ifadeler bir defa kullanılarak isimlendirme yapılmıştır. Buna göre bulunan bu indirgenmiş parçalı matris temsilleri;

$$C1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C6 = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$C13 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde isimlendirilip baz setinde gösterilmiştir. Matris katsayıları kolaylık olması ve etkisinden dolayı dikkate alınmamıştır.

Bu şekilde indirgenmiş tüm kartezyen açısal momentum işlemcilerinin matris temsilleri parçalı hale getirildiğinde bulunan parçalı matrislerin ortak olan ifadelerinin bir kez yazılması yeterli olacaktır. Yapılan parçalama işlemleri neticesinde yirmibeş adet indirgenmiş işlemcilerin parçalı matris temsilleri elde edilmiş ve yeni bir baz seti oluşturulmuştur. Bu parçalı indirgenmiş matrisler ilk defa $C_1, C_2, \dots, C_{25}$ şeklinde ifade edilmiş ve Çizelge 4.5’de gösterilmiştir.

Çizelge 4.5. $I=2$ için indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcilerinin parçalanmış matris temsilleri

$$C1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C6 = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$C3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Çizelge 4.5 Devamı. $I=2$ için indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcilerinin parçalanmış matris temsilleri

$$C9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C14 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C10 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C15 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C11 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C16 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C12 = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix}$$

$$C17 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C13 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C18 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Çizelge 4.5 Devamı. $I=2$ için indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcilerinin parçalanmış matris temsilleri

$$C19 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C23 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C20 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C24 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C21 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C25 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C22 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada katsayılar kolaylık açısından dikkate alınmaz ve tüm işlemlerde katsayısız olarak kullanılır.

4.5 İndirgenmiş Parçalı İşlemcilerin Komutasyonları

Oluşturulacak yeni baz seti hermityen olmalı ve birbiri ile komite edildiğinde sonuç aynı set içindeki elemanların lineer bileşimi ile ifade edilebilmelidir. Ayrıca kuantum mekaniksel bir niceliğin gözlenip gözlenemeyeceğini belirlemek için birbirlerini komite edip etmediğine bakılır. İndirgenmiş parçalı açısal momentum işlemcilerinin

komutasyonları maple programı kullanılarak elde edilmiştir. Komutasyon hesaplamaları sonucunda elde edilen matrisler geri kalan baz seti elemanlarının lineer bileşimleridir. Örnek olarak, $[C4, C6]$ komutasyonu maple programı kullanılarak hesaplanırsa,

$$[C4, C6] = (C4C6 - C6C4) = \begin{bmatrix} 2I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2I \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu matris değerine ulaşmak için baz seti elemanlarına bakıldığında $2iC8 - 2iC9$ lineer bileşiminin aynı matris değerini verdiği görülmektedir. Komutasyonların bu şekilde hesaplanması neticesinde elde edilen sonuçların parçalı indirgenmiş baz seti cinsinden ifade edilmesi, bu baz setinin uygunluğunu göstermektedir.

İndirgenmiş-parçalı baz seti için komutasyon sonuçları bulunmuş ve Çizelge 4.6'da gösterilmiştir. Çizelgede sadece köşegen üstü terimler yazılmış olup köşegen altı terimler köşegen üstü terimlerin simetrik ters işaretlisi olacağından tabloda ayrıca gösterilmemiştir.

Çizelge 4.6. İndirgenmiş parçalı açısal momentum işlemcilerinin komutasyon tablosu $[O, O']$

$\begin{array}{c} O' \\ \backslash \\ O \end{array}$	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13
C1	0	0	0	0	$-iC13$	0	$iC11$	0	0	0	$-iC7$	0	$iC5$
C2		0	0	$-iC12$	$iC13$	$iC10$	$-iC11$	0	0	$-iC6$	$iC7$	$iC4$	$-iC5$
C3			0	$iC12$	0	$-iC10$	0	0	0	$iC6$	0	$-iC4$	0
C4				0	$iC19$	$2iC8-2iC9$	$-iC18$	$-iC6$	$iC6$	0	$iC16$	$-2iC2+2iC3$	$-iC14$
C5					0	$iC18$	$2iC9$	0	$-iC7$	$-iC16$	$-2iC17$	$iC14$	$-4iC1+2iC2+2iC15$
C6						0	$-iC19$	$iC4$	$-iC4$	$2iC2-2iC3$	$-iC14$	0	$-iC16$
C7							0	0	$iC5$	$iC14$	$4iC1-2iC2+2iC15$	$iC16$	$2iC17$
C8								0	0	$iC12$	0	$-iC10$	0
C9									0	$-iC12$	$iC13$	$iC10$	$-iC11$
C10										0	$iC19$	$2iC8-2iC9$	$-iC18$
C11											0	$-iC18$	$2iC9$
C12												0	$-iC19$
C13													0

Çizelge 4.6 Devamı. İndirgenmiş parçalı açısal momentum işlemcilerinin komutasyon tablosu $[O, O']$

$\begin{array}{c} O' \\ \diagdown \\ O \end{array}$	C14	C15	C16	C17	C18	C19	C20	C21	C22	C23	C24	C25
C1	-iC19	0	iC18	0	-iC16	iC14	0	0	0	0	0	0
C2		0	0	0	0	0	-iC23	iC22	-iC21	iC20	0	0
C3			-iC18	0	iC16	-iC14	iC23	-iC22	iC21	-iC20	0	0
C4				-iC22	iC7	-iC5	0	0	0	0	-iC23	iC22
C5					-iC6-iC21	iC4+iC20	-iC19	iC18	-iC16	iC14	0	0
C6						iC7	0	0	0	0	-iC22	-iC23
C7							-iC18	-iC19	-iC14	-iC16	0	0
C8								-iC20	iC23	-iC22	2iC25	-2iC24
C9									iC23	-iC22	0	0
C10										0	iC21	-iC20
C11											0	0
C12												iC21
C13												

Çizelge 4.6 Devamı. İndirgenmiş parçalı açısıl momentum işlemcilerinin komutasyon tablosu $[O, O']$

$\begin{array}{c} O' \\ \diagdown \\ O \end{array}$	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12	C13
C14	iC19	0	-iC19	-iC13	iC12+iC23	-iC11	iC10-iC22	-iC16	0	-iC7	iC6-iC21	-iC5	iC4+iC20
C15		0	0	-iC23	iC13	iC22	iC11	0	-2iC17	-iC21	-iC7	iC20	-iC5
C16			iC18	iC11	-iC10-iC20	-iC13	iC12-iC23	iC14	0	iC5	-iC4+iC20	-iC7	iC6+iC21
C17				iC22	-iC11	iC23	iC13	0	2iC15	iC20	iC5	iC21	-iC7
C18					iC12+iC21	-iC5	iC4-iC20	-iC19	0	-iC13	iC12-iC23	-iC11	iC10+iC22
C19						iC7	iC6-iC21	iC18	0	iC11	-iC10+iC22	-iC13	iC12+iC23
C20							iC18	-iC21	-iC21	-2iC17-2iC25	-iC16	-2iC15+2iC24	-iC14
C21								iC20	iC20	2iC15+2iC24	iC14	-2iC17+2iC25	-iC16
C22									-iC23	0	-iC19	0	-iC18
C23										0	iC18	0	-iC19
C24											0	-iC20	0
C25												-iC21	0

Çizelge 4.6 Devamı. İndirgenmiş parçalı açısal momentum işlemcilerinin komutasyon tablosu $[O, O']$

$\begin{array}{c} O' \\ \diagdown \\ O \end{array}$	C14	C15	C16	C17	C18	C19	C20	C21	C22	C23	C24	C25
C14	0	0	2iC8	0	-2iC25	-4iC1+2iC3+2iC24	-iC13	iC11	iC7	-iC5	-iC19	iC18
C15		0	0	2iC9	0	0	-iC12	iC10	-iC6	iC4	0	0
C16			0	0	4iC1-2iC3+2iC4	2iC25	-iC11	-iC13	iC5	iC7	-iC18	-iC19
C17				0	0	0	-iC10	-iC12	-iC4	-iC6	0	0
C18					0	2iC8	iC7	-iC5	-iC13	iC11	iC16	-iC14
C19						0	iC5	iC7	-iC11	-iC13	iC14	iC16
C20							0	2iC8+2iC9	0	-2iC2+2iC3	-iC12	iC10
C21								0	2iC2-2iC3	0	-iC10	-iC12
C22									0	2iC8+2iC9	iC6	-iC4
C23										0	iC4	iC6
C24											0	2iC8
C25												0

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Atomların yapısı ve moleküllerin dönme hareketleri açısal momentum kavramları ile açıklanır. Bu konuda çalışmalar yapılırken spin açısal momentum işlemcileri çok büyük önem taşımaktadır. Bu çalışmada $I=2$ için literatürdeki tensör işlemcilerin katsayıları hesaplanarak ilk defa $I=2$ için kartezyen açısal momentum işlemcileri elde edilmiştir. Daha sonra indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcileri ile bunların matris temsilleride ayrıca elde edilmiştir. Bu indirgenmiş işlemcilerin matris temsilleri parçalı hale getirilmiş ve yirmibeş adet yeni baz seti oluşturulmuştur. Oluşturulan yeni baz seti ilk defa $C_1, C_2, \dots, C_{25}$ şeklinde gösterilmiş ve bu baz setinin birbiri ile komutasyonları hesaplanarak çizelge haline getirilmiştir. Yapılan çalışmalardan elde edilen sonuçlar aşağıdaki bölümlerde özetlenmiştir.

5.1 Spin 2 İçin Küresel Tensör İşlemciler

Spin-2 olan sistem ve parçacıklar $(2I+1)^2=25$ adet ortagonal küresel tensör işlemcilerle temsil edilmektedir. Bu işlemciler literatürde mevcut olup katsayıları yeniden hesaplanarak bulunmuş ve Çizelge 4.1’de gösterilmiştir. Bu küresel tensör işlemciler spin-2 için kartezyen açısal momentum işlemcilerinin bulunmasında kullanılmıştır.

5.2 Spin 2 İçin Kartezyen Açısal Momentum İşlemcilerinin Elde edilmesi

Spin $1/2, 1, 3/2$ olan çekirdeklerin kartezyen açısal momentum işlemcileri bilinmemekte olup spin-2 için bilinmemektedir. Spin 2 olan sistem ve parçacıkların $(2I+1)^2=25$ adet kartezyen açısal momentum işlemcisi vardır. $k=0,1,\dots,2I$ değerlerini alırken q değeri $-k,\dots,0,\dots,+k$ değerlerini almaktadır. Bu değerler Denk.(3.53–54–55)’de yerine yazılmış ve spin 2 olan parçacıklar için 25 adet kartezyen açısal momentum işlemcisi ilk defa elde edilmiş ve Çizelge 4.2’de gösterilmiştir.

5.3 Spin 2 İçin İndirgenmiş Kartezyen Açısal Momentum İşlecileri ve Matris Temsilleri

Spin-2 için bulunan açısal momentum işlecilerine baktığımızda aynı açısal momentum işlemcisinin birden fazla ifadeye yer aldığı görülür. Bu işlemcilerin sadece bir ifadeye gösterilmesi yeterli olacaktır. Örneğin,

$$C_2^{(3,1y)} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{10}} (5[I_y, I_z^2]_+ - (2I^2 + 1)I_y)$$

işlemcisi $C_2^{(1,y)}$ ifadesinde de yer aldığından burada tekrar yazılmayabilir. Bu nedenle sadece diğer işlemci ile $C_2^{(3,1y)}(i) = [I_y, I_z^2]$ ile ifade ederek indirgenmiş oluruz. Burada katsayılar işlemlerde kolaylık olması ve fiziksel anlamı olmadığından ihmal edilmiştir. Buradan hareketle işlemcilerimiz indirgenerek indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcileri elde edilmiş ve Çizelge 4.3'te gösterilmiştir.

Bulunan indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcilerinin matris temsilleri maple programı kullanılarak elde edilmiş ve Çizelge 4.4'te gösterilmiştir.

5.4 İndirgenmiş İşlecilerin Parçalanması

İndirgenmiş açısal momentum işlemcilerinin matris temsilleri komitasyon hesaplamalarında kolaylık olması için parçalı olarak ifade edilmiştir. Örnek olarak,

$$C_2^{(0,z)}(i) = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcisi;

$$C_2^{(0,z)}(i) = E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde parçalı olarak yazılmıştır. Benzer şekilde spin-2 için bulunan yirmibeş adet indirgenmiş kartezyen açısal momentum işlemcileri parçalı hale getirilmiş ve ortak olanlar bir ifadede yazılarak yeni yirmibeş tane baz seti elde edilmiştir. Bu indirgenmiş baz seti ilk defa $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{25}$ şeklinde Çizelge 4.5'te gösterilmiştir. Bulunan parçalanmış matris temsilleri işlemcilerimizi tam olarak ifade etmekte olup komitasyon hesaplamalarında büyük kolaylık sağlamaktadır.

5.5 İndirgenmiş Parçalı İşlemcilerin Komutasyon Hesaplamaları

İndirgenmiş parçalı açısal momentum işlemcilerinin komutasyon hesaplamaları tüm işlemciler için ayrı ayrı yapılmış ve Çizelge 4.6'da gösterilmiştir. Komutasyon hesaplamaları sonucunda elde edilen matrisler geri kalan baz seti elemanlarının lineer bileşimleridir. Örnek olarak $[C_4, C_6]$ komutasyonunun sonucu $2iC_8 - 2iC_9$ şeklinde bulunmuştur. Bu şekilde tüm komutasyonların sonuçlarına bakıldığında iki tane işlemcinin komutasyonunun yine baz seti içinde bir işlemci olduğu görülmüş, buradanda oluşturulan baz setinin işlemcilerimizi tam olarak ifade ettiği tesbiti yapılmıştır.

5.6 Öneriler

Bu çalışmada ilk defa spin-2 olan sistem ve parçacıklar için kartezyen açısal momentum işlemcileri bulunmuştur. Benzer çalışmalar yapılarak spin-2'den yüksek farklı spin sistemleri için kartezyen açısal momentum işlemcileri elde edilebilir.

Kuantum bilgisayarları çok popüler bir araştırma alanı olup, bu alanda spinler kullanılarak bilgi saklama işlemi gerçekleştirilmektedir. Bu tez çalışmasında spin-2 için bulunan sonuçların kuantum bilgisayarları ile ilgili çalışmalarda kullanılabileceği düşünülmektedir.

Spin-2 için elde edilen kartezyen açısal momentum işlemcileri parçalı hale getirilmiş olup daha yüksek spinli sistemler için benzer şekildeki çalışmalarda örnek olarak kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Affronte M., Troiani F., Ghirri A., Carretta S., Santini P., Schuecker R., Timco G., Winpenny R. E. P., 2007. Molecular spin clusters for quantum computation, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 310, e501–e502.
- Albayrak E., Alci A., 2005. Mixed spin-1/2 and spin-3/2 Blume–Capel Ising ferromagnetic system on the Bethe lattice, *Physica A-Statistical Mechanics and Its Applications*, 343, 48–60.
- Allard P., Hard T., 2001. A complete Hermitian operators basis set for any spin quantum number, *Journal of Magnetic Resonance*, 153, 15–21.
- Balcı M., 2007. *Nükleer Manyetik Rezonans Spektroskopisi*, ODTÜ Yayıncılık 1, 1–50.
- Bain D. A., 2003. The NMR of quadrupolar nuclei. Relationship between exact and perturbation solutions for spin 3/2, *Chemical Physics Letters*, 101(21), 267–271.
- Bain D. A., 2003. Exact calculation, using angular momentum of combined Zeeman and quadrupolar interactions in NMR, *Molecular Physics*, 21, 3163–3175.
- Bain D. A., Berno B., 2011. Liouvillians in NMR: The direct method revisited, *Progress in Nuclear Magnetic Resonance Spectroscopy*, 223–244.
- Bowden, G. J., Hutchison, W. D., 1986. Tensor product operator formalism for multiple-quantum NMR. 1. Spin-1 nuclei, *Journal of Magnetic Resonance*, 67, 403–414.
- Bowden G. J., Hutchison, W. D., Khackan J., 1986. Tensor operator formalism for multiple-quantum NMR. 2. Spins 1/2, 2 and 5/2 General I, *Journal of Magnetic Resonance*, 67, 415–437.
- Cerf N. J., Durt T., Gisin N., 2002. Cloning a qutrit, *Journal of Modern Optic*, 49(8), 1355–1373.
- Chandrakumar N., 1984. Polarization transfer between spin-1 and spin-1/2 nuclei, *Journal of Magnetic Resonance*, 60, 28–36.
- Chandrakumar N., 1996. *Spin-1 NMR*, Springer–Verlag Berlin Heidelberg.
- Da Cruz Filho J. S., Godoy M., Arruda A.S., 2013. Phase diagram of the mixed spin-2 and spin-5/2 Ising system with two different single-ion anisotropies, *Physica A*, 392, 6247–6254.
- Daşgın H., 2013. IS ($I=1/2$, $S=3/2$) Spin Sisteminin Çarpım İşlemci Teorisi ile İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 1–2.
- Dereli T., Verçin, A., 2000. *Kuantum Mekaniği*, METU press; 2:16–21.
- Devenathan V., 2002. Angular Momentum Techniques in Quantum Mechanics,

Kluwer Academic Publishers.

- Ekiz C., 2005. Mixed spin-1/2 and spin-3/2 Ising system in a longitudinal magnetic field, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 293, 913–923.
- Engel H. A., Recher P., Loss D., 2001. Elektron spin in quantum dot for spintronics and quantum computation, *Solid State Communications*, 119, 229–236.
- Ernst, R. R., Bodenhausen, G., Wokaun, A., 1987. *Principles of Nuclear Magnetic Resonance in One and Two Dimensions*, Clarendon Press, Oxford.
- Ertas M., Keskin M., Deviren B., 2012. Multicritical Dynamic Phase Diagrams and Dynamic Hysteresis Loops in a mixed spin-2 and Spin-5/2 Ising Ferrimagnetic Ssystem with Repulsive Biquadratic, *Journal of Statistical Physics*, 146, 1244–1262.
- Gençten, A., Tezel Ö., Bahçeli, S., 2002. Product operator theory for spin-3/2 nuclei and application to 2D J-Resolved NMR spectroscopy. *Chem. Phys. Lett.*, 351, 109–114.
- Gençten A., Şaka İ., 2006. A complete product operator theory for IS (I=1/2, S=1) spin system and aplication to DEPT-HMQC NMR experiment, *Molecular Physics*, 18,20, 2983–2989.
- Grudka A., Wójcik A., 2003. How to encode the states of two non-entangled qubits in one qutrit, *Physics Letters A*, 314, 350–353.
- Güleç A., Bahçeli S., 2005. Quantum gates based on polarization transfer NMR spectroscopy, *Acta Physica Polonica A*, 107 (6), 983–989.
- Gün A., Şaka İ., Gençten A., 2011. Constraction and application of four-qubit swap logic gate in NMR quantum computing, *International Journal of Quantum*, 2, 779–790.
- Gün A, Gençten A., 2013. Three-Qubit Quantum Entanglement For SI (S=3/2, I=1/2) Spin System, *International Journal of Quantum Information*, 9, 1635–1642.
- Gün A., Çakmak S., Gençten A., 2011. Construction of four-qubit quantum entanglement for SI (S=3/2, I=3/2) spin system, *Quantum Information Processing*,12, 205–215.
- Jones J. A., 2001. NMR quantum computing, *Prog. NMR Spect.*, 38, 325–360.
- Kao H-M., Grey C.P., 1998. INEPT Experiments involving quadrupolar nuclei in solids, *J. Magn. Resonance*, 133, 313–323.
- Karaoğlu B., 1997. *Kuantum Mekaniğine Giriş*, Bilgi Tek Yayıncılık, 170–175.
- Kemp-Harper R., Philp D. J. and Kuchel P. W., 2001. Nuclear magnetic resonance of J-coupled quadrupolar nuclei: Use of the tensor operator protuct basis, *Journal of Chemical Physics*, 115(7), 2909-2915.
- Keneyoshi T., 1995. Critical Properties of a diluted mixed spin 1/2 and spin 3/2 Ising system in a transverse Field, *Physica A*, 215, 378–386.
- Keneyoshi T., Jascur M., Tomczak P., 1992. The ferrimagnetic mixed spin-1/2 and spin-3/2 Ising System, *Journal of Physics-Condensed Matter*, 4, L653–L658.

- Keneyoshi T., Jascur M., Tomczak P., 1993. The magnetic-properties of a ferromagnetic or ferrimagnetic mixed spin- $\frac{1}{2}$ and spin- $\frac{3}{2}$ Ising system, *Journal of Physics-Condensed Matter*, 5, 5331–5342.
- Keneyoshi T., Nakamura Y. , Shin S., 1998. Adiluted mixed spin spin-2 and spin 5/2 ferrimagnetic Ising system: a study of a molecular- based magney, *Journal of physisics-condensed matter*, 10, 7025–7035.
- Keskin M., Ertas M., 2009. Existence of a dynamic compensation temperature of a mixed spin-2 and spin-5/2 Ising ferromagnetic system in an oscillating field, *Physical Review E*, 80, 1539-3755.
- Köksal F., Köseoğlu R., 2010. *Fenciler İçin Kuantum Mekaniği*, Nobel Yayın Dağıtım, 83–102,187–203.
- Lawrence L., 2004. Mutually unbiased bases and trinary operator sets for N qutrits. *Phys. Rev. A*, 70, 1–10.
- Levitt M.H., 2009. *Spin Dynamics Basics of Nuclear Magnetic Resonance*, Wiley Press Second Edition.
- López G.P., Gorin T., Lara L., 2008.Quantum Computation in a Ising Spin Chain Taking into Account Second Neighbor Couplings, *Int. J. Theor. Phys.*, 47, 1641–1653.
- Mehring M., Weberruß V. A., 2001. *Object-Oriented Magnetic Resonance*, Academic Press, London.
- Mehring M., 1999. Concepts of spin quantum computing. *Appl. Magn. Reson.*, 17,141–172.
- Mohamad H. K., Domahevskaya E. P., Klinskikh A. F., 2009. Spin compensation temperatures in the mean-field approximation of amixed spin-2 and spin-5/2 Ising ferrimagnetic system, *Physica A-Statistical Mechanics and Its Applications*, 388, 4713–4718.
- Nakamura Y., 2000. Monte Carlo study of a mixed spin-2 and spin-5/2 Ising system on a honeycomb lattice, *Journal of Physics-Condensed Matter*, 12, 4067–4074.
- Ramanathan C., Boulant N., Chen Z., Cory D. G. Chuang, I. and Steffen M., 2004. NMR quantum information processing, *Quantum Information Processing*. 3, 15–44.
- Şaka İ., 2007. Çarpım İşlemci Teorisinin Spin-1 İçeren Sistemlere Genelleştirilmesi ve Bazı Çoklu-Kuantum NMR Deneylerine Uygulamaları, Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 29–34
- Serway R., Beicher R., 2000. *Physics For Scientists and Engineers with Modern Physics*, Palme Yayıncılık, 1365–1371.
- Vandersypen L. M. K., Chuang I. L., 2004. NMR techniques for quantum control and computation. *Rew. Modrn. Phys.*, 76, 1037–1069.
- Vega A. J., 1992a. MAS NMR Spin Locking of Half Integer Quadrupolar Nuclei, *Journal of Magentic Resonance*, 96, 50–68.
- Vega A. J., 1992b. CP/MAS of quadrupolar $S=3/2$ nuclei, *Solid State Nuclear Magentic Resonance*, 1, 17–32.

- Wang W., Jiang W., Lv D., 2011. Monte Carlo simulation of layer thickness influence on a mixed spin-2 and spin-5/2 Ising ferrimagnetic system, *IEEE Transactions on Magnetics*, 47, 3943–3946.
- Wei G. Z., Zhang Q., Xin Z. N., Liang Y. Q., 2004. Internal energy and initial susceptibility of mixed spin-2 and spin-5/2 ferrimagnetic Ising system with interlayer coupling, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 277, 1–15.
- Wei G. Z., Zhang Q., Zhao J., Gu Y. W., 2006. Tricritical behavior of mixed spin-2 and spin-5/2 ferrimagnetic Ising system with interlayer coupling, *Physica-B-Condensed Matter*, 381, 6–11.
- Wei G. Z., Miao H. L., 2009. Mean Field Studies of a Mixed Spin-3/2 and a mixed spin 5/2 Ising System with Different Anisotropies, *Communications in Theoretical Physics*, 51, 756–760.
- Zhang G. F., Liang J. Q., Zhang G. E., Yan Q. W., 2005. Thermal entanglement in two qutrits system. *Eur. Phys. J. D*, 32, 409–412.
- Zhang G. F., Li. S. S., 2006a. The effects of nonlinear couplings and external magnetic field on the thermal entanglement in a two-spin-qutrit system. *Optics Commun.*, 260, 347–350.
- Zhang G. F. and Li. S. S., 2006b. Entanglement in a spin-one spin chain, *Solid State Commun.*, 138, 17–21
- Zhu G. O., Zhao X., Li. Y. O., 2005. Entanglement of two-qutrit system, *Eur. Phys. J. B*, 44, 359–364.
- URL – 1: <http://www-stone.ch.cam.ac.uk/wigner.html> (Ziyaret tarihi: 12 Nisan 2014).

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Hüseyin ÜNSAL

Doğum Yeri ve Tarihi: Kastamonu/1978

Adres: Tosya Hasan Rıza Paşa Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi/ Kastamonu

E–Posta: huseynunsal@hotmail.com

Lisans: Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü

Yüksek Lisans (Varsa):

Mesleki Deneyim ve Ödüller: Milli Eğitim Bakanlığı Fizik Öğretmeni