

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZLEMSEL KİNEMATİKTE HOMOTETİK HAREKETLER ALTINDA
KAPALI YÖRÜNGELER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra İNAN

Matematik Anabilim Dalı

**MART 2015
SAMSUN**



**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



MATEMATİK ANABİLİM DALI

**DÜZLEMSEL KİNEMATİKTE HOMOTETİK HAREKETLER ALTINDA
KAPALI YÖRÜNGELER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Esra İNAN
(11210160)**

Tezin Savunma Tarihi: 30 Mart 2015

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ayhan TUTAR

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Esra İNAN Tarafından Hazırlanan

**DÜZLEMSSEL KİNEMATİKTE HOMOTETİK HAREKETLER
ALTINDA KAPALI YÖRÜNGELER**

başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 30/03/2015 tarihinde yapılan sınav ile
YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Hasan GÜMÜŞ
Ondokuz Mayıs Üniversitesi



Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Emin KASAP
Ondokuz Mayıs Üniversitesi



Doç. Dr. Ayhan TUTAR
Ondokuz Mayıs Üniversitesi



/ /2015

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca danışmanlığımı yapan ve bana her türlü yardımda bulunup yol gösteren saygıdeğer hocam **Doç. Dr. Ayhan TUTAR**'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hocamın doktora öğrencisi, benim birlikte çalışmaktan zevk aldığım sevgili arkadaşım Önder ŞENER'e, beni her zaman destekleyen üniversiteden sınıf arkadaşım Araş. Gör. Feray BAYAR'a, sevgili eşim ve aileme de teşekkürü borç bilirim.

Mart 2015

Esra İNAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
KISALTMALAR.....	xi
ÖZET.....	xiii
ABSTRACT	xv
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
3. BULGULAR	9
3.1. Kapalı Düzlemsel Homotetik Direkt Hareket.....	9
3.1.1 Kapalı bir homotetik hareketin yörünge alanı	10
3.1.2 İntegral katsayılarının farklı bir gösterimi	12
3.1.3 Kapalı düzlemsel homotetik harekette Steiner noktası ve Steiner normali	14
3.1.4 Kapalı düzlemsel homotetik hareketler için hareketli pol noktası	15
3.1.5 Kapalı düzlemsel homotetik hareketler için kutupsal atalet momenti.....	16
3.2. Kapalı Düzlemsel Homotetik Ters Hareket.....	16
3.2.1 Kapalı bir ters homotetik hareketin yörünge alanı.....	17
3.2.2 Ters hareket için integral katsayılarının farklı bir gösterimi	19
3.2.3 Kapalı düzlemsel ters homotetik hareketler için Steiner noktası ve Steiner normali	21
3.2.4 Kapalı düzlemsel ters homotetik hareketler için sabit pol noktası	22
3.2.5 Kapalı düzlemsel ters homotetik hareketler için kutupsal atalet momenti.....	22
3.3 Örnek	23
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	31
KAYNAKLAR.....	33
ÖZGEÇMİŞ	35

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 1-Parametrelî düzlemsel hareket	3
Şekil 3.1 Bir çift dayanak noktası olan vincin kolları.....	24
Şekil 3.2 Çakışık vinç kolları.....	24

KISALTMALAR

E	: Hareketli düzlem
E'	: Sabit düzlem
E / E'	: E düzleminin E' düzlemine göre hareketi
E' / E	: E' düzleminin E düzlemine göre hareketi
E^n	: n boyutlu öklid uzay
α	: Dönme açısı
$u ve u'$	: Öteleme vektörleri
ν	: Dönme sayısı
A	: Afin uzay
X	: Hareketli düzlemde bir nokta
X'	: Sabit düzlemde bir nokta
P	: Hareketli pol noktası
P'	: Sabit pol noktası
(P)	: Hareketli pol eğrisi
(P')	: Sabit pol eğrisi
S	: Hareketli düzlemdeki Steiner noktası
S'	: Sabit düzlemdeki Steiner noktası
n	: Hareketli düzlemdeki Steiner normali
n'	: Sabit düzlemdeki Steiner normali
T	: Hareketli düzlemdeki kutupsal atalet momenti
T'	: Sabit düzlemdeki kutupsal atalet momenti
R	: Dönme matrisi
F	: Yörünge alanı

DÜZLEMSEL KİNEMATİKTE HOMOTETİK HAREKETLER ALTINDA KAPALI YÖRÜNGELER

ÖZET

Bu çalışmada bir parametrelili kapalı düzlemsel direkt ve ters homotetik hareketler için dört kinematik kavram elde edildi: Steiner formülü, Steiner noktası veya normali, pol noktası ve kutupsal atalet momenti. Steiner formülü kinematikteki hızlar terkibi kullanılmadan öteleme vektörü cinsinden elde edilerek, pol noktası ve Steiner noktasına göre yazıldı. Dönme sayısı sıfırdan farklı olduğunda Steiner noktası, dönme sayısı sıfır olduğunda ise Steiner normali elde edildi. Ayrıca kutupsal atalet momenti hesaplanarak alan formülü ile arasında ilişki kuruldu. Örnek olarak, vincin kolları bir parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket ile uzayıp kısalabildiğinden dolayı vinç hareketi seçildi. Bu hareket vincin sabit olan kontrol merkezi ve hareketli kolundan oluşan bir çift dayanak noktası ile belirlendi. Bir parametrelili kapalı düzlemsel direkt ve ters homotetik hareketler için elde edilen tüm kinematik kavramlar vinç hareketi üzerinde incelendi ve bu sonuçlar teorik kısımla karşılaştırıldı.

Anahtar kelimeler: Düzlemsel Kinematik, Homotetik Hareket, Steiner Formülü, Kutupsal Atalet Momenti.

THE CLOSED PATHS UNDER HOMOTHETIC MOTION IN PLANAR KINEMATIC

ABSTRACT

In this paper, during one-parameter closed planar direct and inverse homothetic motions four kinematical concepts were obtained: the Steiner formula, the Steiner point or normal, the pole point and the polar moment of inertia. The Steiner formula was found without using velocities composition in kinematics in terms of displacement vector with respect to the pole point and the Steiner point. Both were obtained in the case of the winding number is different than zero the Steiner point and the winding number is zero the Steiner normal. Also, by calculating the polar moment of inertia, the relation between the area formula was established. As an example, since the arms of winch can be extended or shortened with one-parameter closed planar homothetic motions, the winch motion was chosen. This motion was described by a double hinge consisting of the fixed control panel and the moving arm of winch. All the kinematical concepts that were obtained for one-parameter closed planar direct and inverse homothetic motions were investigated on the winch motion and results were compared with theoretical section.

Key words: Planar Kinematics, Homothetic Motion, Steiner Formula, Polar Moment of Inertia.

1. GİRİŞ

Bir çizgi üzerinde yuvarlanan ve tamamlanmış dönüş yapan bir geometrik nesne için bir noktanın yörünge alanının bazı özellikleri Steiner tarafından ifade edilmişti [1]. Müller, kutupsal atalet momenti ile yörünge alanı hesaplaması arasındaki ilişkiyi incelemiş ve yörünge alan formülünü genelleştirmişti [2,3]. Bir parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketler için Steiner alan formülü ve Holditch teoremi Tutar tarafından açıklanmıştı [4]. Döldöl ise bir parametrelili düzlemsel homotetik hareket sırasında kapalı yörünge eğrileri için kutupsal atalet momentini incelemişti [5].

Uygulama alanında Dathe, bir parametrelili kapalı düzlemsel hareketlerin uygulaması olarak ‘insan yürüyüşü esnasında bacak hareketi’ni incelemişti [6]. Thieme, dış hekimliğinde yaygın olarak kullanılan ‘hareketli menteşe (dayanak) eksenli’ kavramını çene hareketi için tanımlamıştı. Ayrıca çiğneme sisteminin şakak bölgesindeki hareketinin fonksiyonel durumlarını değerlendirmek için uygulamalar yapmıştı [7].

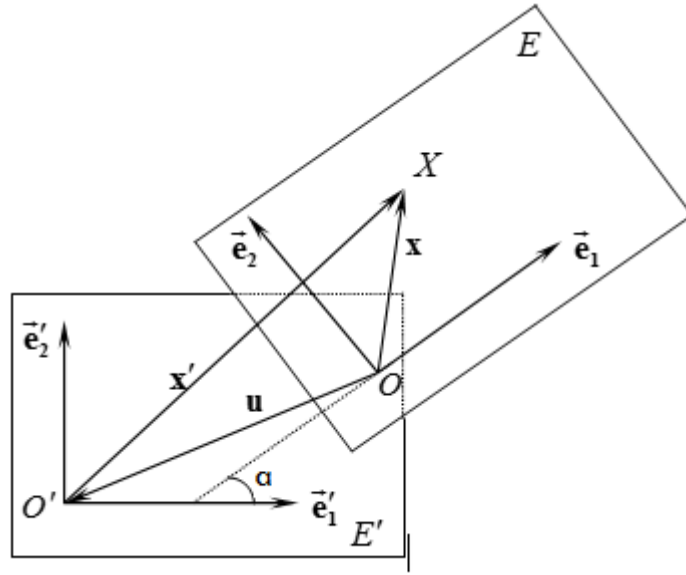
Bu çalışmada hareketli ve sabit olmak üzere iki düzlem arasında bir parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket incelendi (direkt ve ters). Steiner alan denklemi elde edilirken diğerlerinden farklı olarak kinematikteki hızlar terkibi kavramı kullanılmadı. Alan denklemi önce öteleme vektörü cinsinden elde edilip sonra pol noktası ardından da Steiner noktası cinsinden yazıldı. Dönme sayısı sıfırdan farklı olduğunda yani cisim tamamlanmış bir tur attığında alan denklemi bir çember denklemi belirttiğinden Steiner noktası bulundu. Dönme sayısı sıfır olduğunda yani cisim bir tam turu tamamlayamaz ise alan denklemi bir doğru denklemine dönüştüğünden çalışmamızın özgün kısımlarından biri olan Steiner normali elde edildi. Kutupsal atalet momenti hesaplandı ve yörünge alan denklemi ile arasında ilişki kuruldu.

Örnek olarak vinç hareketi ele alındı. Çünkü vincin kolları bir parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket tarafından uzayıp kısalabilir. Bu hareket vincin sabit olan kontrol merkezi ve hareketli kolundan oluşan bir çift dayanak noktası ile belirlendi. Vinç hareketi esnasında kollar tam tur atmadığı için dönme sayısı sıfır

alındı. Bir parametrelı kapalı düzlemsel direkt ve ters homotetik hareketler için elde edilen tüm kinematik kavramlar vinç hareketi üzerine uygulandı.

2. GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1: E hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre hareketi $B = E/E'$ ile gösterilmek üzere B hareketinin α dönme açısı ve u öteleme vektörünün u_1, u_2 bileşenleri $\alpha = \alpha(t)$, $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ şeklinde bir t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilen fonksiyonu iseler B hareketine **bir parametrelili düzlemsel hareket** denir (direkt hareket). E' sabit düzleminin E hareketli düzlemine göre hareketi E'/E ise ters hareket olarak tanımlanır [8].



Şekil 2.1: Bir parametrelili düzlemsel hareket

Tanım 2.2: u_1, u_2 ve α ; bir t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere

$$u_1 = u_1(t), \quad u_2 = u_2(t), \quad \alpha = \alpha(t)$$

fonksiyonları aynı $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer

$$u_j(t+T) = u_j(t), \quad j = 1, 2$$

$$\alpha(t+T) = \alpha(t) + 2\pi\nu$$

bağıntıları sağlanacak şekilde $T > 0$ en küçük sayı ise; E/E' hareketine T periyotlu ve ν dönme sayılı **1-parametrelili kapalı düzlemsel hareket** denir [8].

Tanım 2.3: $A \neq \Phi$ bir cümle ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleşen bir **afin uzay** denir.

$$(A1). \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$(A2). \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır [8].}$$

Tanım 2.4: V , n -boyutlu reel vektör uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay olsun. Eğer V bir iç-çarpım uzayı ise A ya **Öklid uzayı** denir ve genellikle E^n ile gösterilir [8].

Tanım 2.5: n -boyutlu Öklid uzayında bir cismin **homotetik hareketi**

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hA & U \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

dönüşümü ile ifade edilir. Burada h bir reel skaler matristir [9]. X , X' ve U $n \times 1$ tipinde matrislerdir ve h homotetik ölçek, A ve U nun elemanları, t reel parametresinin sürekli ve diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. X ve X' , sırasıyla E hareketli düzlem ve E' sabit düzlemin dik koordinat sistemlerine göre aynı X noktasının konum vektörlerine karşılık gelirler.

Tanım 2.6: u_1, u_2, α ve h , bir t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere

$$u_1 = u_1(t), \quad u_2 = u_2(t), \quad \alpha = \alpha(t), \quad h = h(t)$$

fonksiyonları aynı $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer

$$u_j(t+T) = u_j(t), \quad j = 1, 2$$

$$\alpha(t+T) = \alpha(t) + 2\pi\nu$$

bağıntıları sağlanacak şekilde $T > 0$ en küçük sayı ise,

$$\mathbf{x}' = (hx_1 - u_1)\mathbf{\bar{e}}_1 + (hx_2 - u_2)\mathbf{\bar{e}}_2$$

denklemleri ile tanımlanan harekete T periyotlu ve ν dönme sayılı **1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket** denir [9]. E -düzleminin E' -düzlemine göre kapalı homotetik hareketi E/E' ile gösterilsin (**direkt hareket**). E' -düzleminin E -düzlemine göre kapalı homotetik hareketi ise E'/E ile gösterilsin (**ters hareket**).

Tanım 2.7: K cismi üzerinde iki vektör uzayı V_1 ve V_2 olsun. V_1 ve V_2 ile birleşen afin uzaylar A_1 ve A_2 olmak üzere $f : A_1 \rightarrow A_2$ bir dönüşüm olsun. $P, Q \in A_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi_P : V_1 &\rightarrow V_2 \\ \overrightarrow{PQ} &\rightarrow \psi_P(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Burada ψ_P dönüşümüne f ile birleşen dönüşüm adı verilir. Eğer ψ_P dönüşümü lineer ise f ye bir **afin dönüşüm** denir [8].

Tanım 2.8: E_1^n ve E_2^n , sırasıyla, V_1 ve V_2 n -boyutlu iç çarpım uzayları ile birleşen birer öklid uzayı olsunlar. Bir

$$f : E_1^n \rightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi : V_1 \rightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir **izometri** denir [8].

Tanım 2.9: E^n , n -boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi ve $\forall X \in E^n$ için $f(X) = X + t$ olacak şekilde bir tek $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in E^n$ noktası varsa f ye E^n in t ile belirtilen bir **öteleme**si denir.

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun.

$f : E^n \rightarrow E^n$ izometrisi $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ noktası ile belli olan bir öteleme olsun. f nin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = X + t$$

dir [8].

Tanım 2.10: Dönme açısının $\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}$ türevine E/E' hareketinin **açısal hızı** denir [8].

Tanım 2.11: Açısal hızı sıfır olmayan bir harekette, her t anında, her iki düzlemde de sabit kalan noktaya **pol noktası** denir [1].

Böyle noktalar, t anında, yalnız hareketli E düzleminde değil aynı zamanda sabit E' düzleminde de sabit bulunmak zorundadırlar. O halde sabit düzlemde ki sabit bir X' noktası için $dX'=0$ denkleminin çözümü $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ pol noktasıdır.

Tanım 2.12: Her t anına bir P pol noktası ait olacağından E/E' hareketi esnasında P pol noktası her iki E ve E' -düzlemlerinde muhtelif konumlar alır. P noktasının hareketli E -düzlemindeki yeri genel olarak bir eğridir, bu eğriye E/E' nin **hareketli pol eğrisi** denir ve (P) ile gösterilir. P noktasının E' -düzlemindeki geometrik yerine ise **sabit pol eğrisi** denir ve (P') ile gösterilir [1].

Tanım 2.13: $d\alpha$ kitle elementli kütle örtülmesinde hareketli (P) pol eğrisinin ağırlık merkezine **Steiner noktası** denir ve S ile gösterilir.

$$S = \frac{\oint P d\alpha}{\oint d\alpha}$$

bağıntısı ile hesaplanır [1].

Tanım 2.14: $h^2 d\varphi$ kitle elementli kütle örtülmesinde hareketli (P) pol eğrisinin ağırlık merkezine **Steiner noktası** denir ve S ile gösterilir.

S nin koordinatları s_1 ve s_2 olmak üzere

$$s_j = \frac{\oint p_j h^2 d\varphi}{\oint h^2 d\varphi}, \quad j = 1, 2$$

dir [1].

Tanım 2.15: Merkezi Steiner noktası olan çemberler doğrulara indirgendiğinde yani dönme sayısı $\nu=0$ olduğunda, bu doğruların normal vektörüne **Steiner normal vektörü** denir ve $\vec{n}$ ile gösterilir [6].

Tanım 2.16: Cismin dönme hareketindeki değişikliğe direnç göstermesinin ölçüsüne **kutupsal atalet momenti** denir.

E hareketli, E' sabit olmak üzere iki düzlemin koordinat sistemleri arasında bir t parametrelili kapalı düzlemsel hareketi düşünölsün. X ve X' , sırasıyla, E hareketli düzlem ve E' sabit düzlemin dik koordinat sistemlerine göre aynı X noktasının konum vektörlerine karşılık gelirler. Hareketli sisteme ait sabit bir X noktasının sabit sisteme göre yörüngesi; $R(t)$ dönme matrisi, $OO' = U(t)$ öteleme vektörü ve X' sabit sisteme ait bir nokta olmak üzere, $X'(t) = R(t)X + U(t)$ şeklinde

tanımlansın. $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$ ve X noktası boyunca $\alpha(t)$ parametresi kullanılarak

kutupsal atalet momenti T olmak üzere,

$$T = \oint \left(x_1'^2 + x_2'^2 \right) d\alpha$$

bağıntısı ile hesaplanır **[10]**.

3. BULGULAR

3.1. Kapalı Düzlemsel Homotetik Direkt Hareket

E hareketli, E' sabit olmak üzere iki düzlemin koordinat sistemleri arasında bir t parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketi düşünölsün. E hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre hareketi E/E' direkt hareketi olsun. Sistemlerin orijinleri sırasıyla (O, O') , öteleme vektörleri $OO' = U$ ve $O'O = U'$, dönme açısı $\alpha(t)$ olmak üzere hareketli sisteme ait sabit bir X noktasının sabit sisteme göre yörüngesi,

$$X'(t) = h(t)R(t)X + U'(t) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlansın. Burada h, t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonudur. Hareket, sabit ve hareketli sistem arasında zamana bağılı dönüşüm olarak tanımlanabilir. X vektörü zamandan bağımsız olarak düşünölebilir.

$\alpha(t)$ dönmenin toplam açısı, $R(t)$ 2×2 tipinde dönme matrisi, $U(t)$ ve $U'(t)$ 2×1 tipinde öteleme vektörleri, X' sabit sisteme ait bir nokta ve X hareketli sisteme ait sabit bir nokta olmak üzere koordinatları,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}, U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, U'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ve

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

şeklindedir.

Sırf öteleme ve sırf dönme durumlarından kaçınmak için $\dot{\alpha} \neq 0$, $h = h(t) \neq \text{sabit}$ kabul edilecektir.

Ayrıca öteleme vektörleri arasında $U' = -RU$ bağıntısı vardır. Bu bağıntı (3.1) denkleminde yerine yazılırsa yörünge denklemi,

$$X'(t) = R(t)(h(t)X - U(t)) \quad (3.3)$$

halini alır. (3.2) nolu denklemler burada kullanılırsa; yani vektörlerin koordinatları yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= \cos(\alpha(t))(h(t)x_1 - u_1) - \sin(\alpha(t))(h(t)x_2 - u_2) \\x_2'(t) &= \sin(\alpha(t))(h(t)x_1 - u_1) + \cos(\alpha(t))(h(t)x_2 - u_2)\end{aligned}\quad (3.4)$$

bulunur. Bu ifadelerin t ye göre diferensiyelleri alınır,

$$\begin{aligned}dx_1' &= -\sin\alpha(hx_1 - u_1)d\alpha + \cos\alpha(dhx_1 - du_1) \\&\quad - \cos\alpha(hx_2 - u_2)d\alpha - \sin\alpha(dhx_2 - du_2) \\dx_2' &= \cos\alpha(hx_1 - u_1)d\alpha + \sin\alpha(dhx_1 - du_1) \\&\quad - \sin\alpha(hx_2 - u_2)d\alpha + \cos\alpha(dhx_2 - du_2)\end{aligned}\quad (3.5)$$

elde edilir.

3.1.1 Kapalı bir homotetik hareketin yörünge alanı

E -düzleminin sabit bir X noktasının F yörünge alanını hesaplamak istiyoruz. Bunun için,

$$F = \frac{1}{2} \oint (x_1' dx_2' - x_2' dx_1') \quad (3.6)$$

Gauss alan formülünden faydalanacağız. Burada eğri integrali X noktasının kapalı yörünge eğrisi üzerinde alınmaktadır.

(3.4) ve (3.5) nolu eşitlikler göz önüne alınır,

$$\begin{aligned}x_1' dx_2' &= \{\cos\alpha(hx_1 - u_1) - \sin\alpha(hx_2 - u_2)\} \{\cos\alpha(hx_1 - u_1)d\alpha \\&\quad + \sin\alpha(dhx_1 - du_1) - \sin\alpha(hx_2 - u_2)d\alpha + \cos\alpha(dhx_2 - du_2)\} \\&= \cos^2\alpha(hx_1 - u_1)^2 d\alpha + \cos\alpha \sin\alpha(hx_1 - u_1)(dhx_1 - du_1) \\&\quad - \cos\alpha \sin\alpha(hx_1 - u_1)(hx_2 - u_2)d\alpha + \cos^2\alpha(hx_1 - u_1)(dhx_2 - du_2) \\&\quad - \cos\alpha \sin\alpha(hx_1 - u_1)(hx_2 - u_2)d\alpha - \sin^2\alpha(hx_2 - u_2)(dhx_1 - du_1) \\&\quad + \sin^2\alpha(hx_2 - u_2)^2 d\alpha - \cos\alpha \sin\alpha(hx_2 - u_2)(dhx_2 - du_2) \\x_2' dx_1' &= \{\sin\alpha(hx_1 - u_1) + \cos\alpha(hx_2 - u_2)\} \{-\sin\alpha(hx_1 - u_1)d\alpha \\&\quad + \cos\alpha(dhx_1 - du_1) - \cos\alpha(hx_2 - u_2)d\alpha - \sin\alpha(dhx_2 - du_2)\} \\&= -\sin^2\alpha(hx_1 - u_1)^2 d\alpha + \cos\alpha \sin\alpha(hx_1 - u_1)(dhx_1 - du_1) \\&\quad - \cos\alpha \sin\alpha(hx_1 - u_1)(hx_2 - u_2)d\alpha - \sin^2\alpha(hx_1 - u_1)(dhx_2 - du_2) \\&\quad - \cos\alpha \sin\alpha(hx_1 - u_1)(hx_2 - u_2)d\alpha + \cos^2\alpha(hx_2 - u_2)(dhx_1 - du_1) \\&\quad - \cos^2\alpha(hx_2 - u_2)^2 d\alpha - \cos\alpha \sin\alpha(hx_2 - u_2)(dhx_2 - du_2)\end{aligned}\quad (3.7)$$

ifadeleri elde edilir. Son iki eşitlik taraf tarafa çıkarılıp (3.6) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
2F &= \oint \left(x_1' dx_2' - x_2' dx_1' \right) = (x_1^2 + x_2^2) \oint h^2 d\alpha \\
&+ x_1 \oint (-2hu_1 d\alpha - hdu_2 + dhu_2) + x_2 \oint (-2hu_2 d\alpha + hdu_1 - dhu_1) \\
&+ \oint \left\{ (u_1^2 + u_2^2) d\alpha + u_1 du_2 - u_2 du_1 \right\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

bulunur. Bu son eşitlikte aşağıdaki ifadeler şu şekilde gösterilsin:

$$\begin{aligned}
\oint (-2hu_1 d\alpha - hdu_2 + dhu_2) &= a^* \\
\oint (-2hu_2 d\alpha + hdu_1 - dhu_1) &= b^* \\
\oint \left\{ (u_1^2 + u_2^2) d\alpha + u_1 du_2 - u_2 du_1 \right\} &= c
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Burada c skaler terimi hareketli sistemin başlangıç noktasının yörüngesi ile ilgilidir. Bu noktanın çizdiği yörünge alanını F_o ile gösterip, (3.8) ifadesinde $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ yazılırsa,

$$2F_o = c \tag{3.10}$$

elde edilir.

Şimdi $\oint h^2 d\alpha$ integralini göz önüne alalım. Bunu

$$\oint h^2 d\alpha = \int_0^T h^2(t) \dot{\alpha}(t) dt$$

olarak yazabiliriz. Burada $f(t) = h^2(t)$ ve $g(t) = \dot{\alpha}(t)$ diyelim. $h = h(t)$ t nin sürekli fonksiyonu olduğundan $f(t) = h^2(t)$ de sürekli. $\alpha = \alpha(t)$ t nin sürekli fonksiyonu olduğundan tanım gereği türevi var ve türevi sürekli, yani $g(t) = \dot{\alpha}(t)$ sürekli. Ayrıca hareket esnasında $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ olduğundan ve $\dot{\alpha}(t)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan $\dot{\alpha}(t) < 0$ veya $\dot{\alpha}(t) > 0$ dır, yani $\dot{\alpha}(t)$ fonksiyonu $[0, T]$ aralığında her yerde aynı işaretlidir.

O halde $f(t) = h^2(t)$ ve $g(t) = \dot{\alpha}(t)$ fonksiyonları $[0, T]$ aralığında sürekli ve $g(t)$ bu aralıkta her yerde aynı işaretlidir. Sürekli iki fonksiyonun çarpımı sürekli ve sürekli bir fonksiyon integrallenebilir olduğundan $g(t)$ ile $f(t)g(t)$ fonksiyonları $[0, T]$ aralığında integrallenebilirdir. O halde integral hesabın ortalama değer teoremi gereğince

$$\int_0^T f(t)g(t)dt = f(t_o) \int_0^T g(t)dt$$

olacak şekilde $\exists t_0 \in [0, T]$ vardır. Burada $f(t)$ ve $g(t)$ nin değerlerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \int_0^T h^2(t) \dot{\alpha}(t) dt &= h^2(t_0) \int_0^T \dot{\alpha}(t) dt \\ &= h^2(t_0) \left[\alpha(t) \right]_0^T \\ &= h^2(t_0) [\alpha(T) - \alpha(0)] \end{aligned}$$

bulunur. Homotetik hareket kapalı olduğundan

$$\alpha(t+T) = \alpha(t) + 2\pi\nu$$

dür. $t=0$ için

$$\alpha(T) = \alpha(0) + 2\pi\nu$$

veya

$$\alpha(T) - \alpha(0) = 2\pi\nu$$

olur. O halde

$$\int_0^T h^2(t) \dot{\alpha}(t) dt = h^2(t_0) \cdot 2\pi\nu$$

yani

$$\oint h^2 d\alpha = 2h^2(t_0)\pi\nu \quad (3.11)$$

elde edilir [3].

Ayrıca

$$m = \oint h^2 d\alpha = h^2(t_0) \oint d\alpha = h^2(t_0) 2\pi\nu \quad (3.12)$$

katsayısı, $\nu \in \mathbb{Z}$ dönme sayısı ile çizgilerin $F = sbt$. yörünge alanı için çemberler veya doğrular belirtip belirtmediğini söyler. Eğer $\nu \neq 0$ ise, çemberler bulunur. Eğer tamamlanmamış tur olursa, $\nu = 0$ olur ve çemberler düz çizgilere indirgenir.

O halde (3.9), (3.10), (3.12) ifadeleri (3.8) nolu eşitlikte yerine yazılırsa,

$$2(F - F_0) = (x_1^2 + x_2^2)m + a^* x_1 + b^* x_2 \quad (3.13)$$

elde edilir.

3.1.2 İntegral katsayılarının farklı bir gösterimi

(3.3) nolu eşitliğin t_- ye göre diferensiyeli alınırsa,

$$dX' = dR(hX - U) + R(dhX - dU) \quad (3.14)$$

ve burada $X = P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ (pol noktası) yazılırsa, X' sabit düzlemde olduğundan,

$$0 = dX' = dR(hP - U) + R(dhP - dU) \quad (3.15)$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned} dR(hP - U) &= -R(dhP - dU) \\ hP - U &= -(dR)^{-1} R(dhP - dU) \\ U &= hP + (dR)^{-1} R(dhP - dU) \end{aligned} \quad (3.15a)$$

elde edilir. Şimdi (3.2) eşitliği göz önünde bulundurularak $(dR)^{-1} R$ matrisi hesaplınsın.

$$\begin{aligned} dR &= \begin{pmatrix} -\sin \alpha d\alpha & -\cos \alpha d\alpha \\ \cos \alpha d\alpha & -\sin \alpha d\alpha \end{pmatrix}, \quad \det(dR) = (d\alpha)^2 \\ (dR)^{-1} &= \frac{1}{(d\alpha)^2} d\alpha \begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix} \\ (dR)^{-1} R &= \frac{1}{(d\alpha)^2} d\alpha \begin{pmatrix} -\sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{d\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.15b)$$

Bu ifade ve koordinatlar (3.15a) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hp_1 \\ hp_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{d\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dh p_1 - du_1 \\ dh p_2 - du_2 \end{pmatrix} \quad (3.15c)$$

elde edilir. Buradan $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} u_1 &= hp_1 + p_2 \frac{dh}{d\alpha} - \frac{du_2}{d\alpha} \\ u_2 &= hp_2 - p_1 \frac{dh}{d\alpha} + \frac{du_1}{d\alpha} \end{aligned} \quad (3.16)$$

bulunur. Bu ifadeler (3.9) nolu eşitlikte yerine yazılırsa,

$$a^* = \oint (-2h^2 p_1 d\alpha) + \oint (-2hdhp_2 + hdu_2 + u_2 dh) \quad (3.17)$$

ve

$$b^* = \oint (-2h^2 p_2 d\alpha) + \oint (2hdhp_1 - hdu_1 - u_1 dh)$$

elde edilir. Bu katsayılar aşağıdaki gibi ayrı ayrı gösterilebilir:

$$\begin{aligned}
a &:= \oint (-2h^2 p_1 d\alpha), \quad b := \oint (-2h^2 p_2 d\alpha) \\
\mu_1 &:= \oint (-2hdhp_2 + hdu_2 + u_2 dh) \\
\mu_2 &:= \oint (2hdhp_1 - hdu_1 - u_1 dh), \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

(3.17) ve (3.18) ifadeleri (3.13) nolu yörünge alan formülünde kullanılırsa,

$$2(F - F_O) = (x_1^2 + x_2^2)m + ax_1 + bx_2 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 \tag{3.19}$$

bulunur.

3.1.3 Kapalı düzlemsel homotetik harekette Steiner noktası ve Steiner normali

$m \neq 0$ için kapalı düzlemsel homotetik hareketin $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ Steiner noktasının şu şekilde bulunduğunu biliyoruz:

$$s_j = \frac{\oint h^2 p_j d\alpha}{\oint h^2 d\alpha}, \quad j = 1, 2 \tag{3.20}$$

Bu eşitlik kullanılarak

$$\oint h^2 p_1 d\alpha = s_1 m, \quad \oint h^2 p_2 d\alpha = s_2 m \tag{3.21}$$

ifadeleri yazılabilir.

(3.21), (3.18) ifadesinde yerine yazılıp (3.19) da kullanılırsa,

$$2(F - F_O) = m(x_1^2 + x_2^2 - 2s_1 x_1 - 2s_2 x_2) + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 \tag{3.22}$$

kapalı düzlemsel homotetik hareketler için Steiner alan formülü elde edilir [3].

Bu eşitlik $m \neq 0$ sayısına bölünüp, tam kare ifadeler halinde yazılırsa,

$$\left(x_1 - \left(s_1 - \frac{\mu_1}{2m}\right)\right)^2 + \left(x_2 - \left(s_2 - \frac{\mu_2}{2m}\right)\right)^2 - \left(s_1 - \frac{\mu_1}{2m}\right)^2 - \left(s_2 - \frac{\mu_2}{2m}\right)^2 = \frac{2(F - F_O)}{m} \tag{3.23}$$

şeklinde çember denklemi bulunur.

Eşit yörünge alanına sahip E hareketli düzleminin bütün sabit noktaları E' düzleminde,

$$M = \left(s_1 - \frac{\mu_1}{2m}, s_2 - \frac{\mu_2}{2m}\right) \tag{3.24}$$

merkezli aynı bir çember üzerinde bulunurlar [4].

$h=1$ özel durumunda $\mu_1 = \mu_2 = 0$ olacağından M noktası S Steiner noktası olur.

Şimdi $m=0$ durumu incelenir.

Bu durumda (3.19) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$(a + \mu_1)x_1 + (b + \mu_2)x_2 - 2(F - F_o) = 0 \quad (3.25)$$

şeklinde bir doğru denklemi elde edilir. Yani yukarıda bahsedilen çemberler düz çizgilere indirgenir.

(3.25) denkleminde eşit alanlı çizgilerin normali, Steiner normali:

$$n = \begin{pmatrix} a + \mu_1 \\ b + \mu_2 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

şeklinde bulunur.

3.1.4 Kapalı düzlemsel homotetik hareketler için hareketli pol noktası

(3.16) eşitlikleri p_1 , p_2 ye göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned} dhp_1 - hd\alpha p_2 &= du_1 - u_2 d\alpha \\ hd\alpha p_1 + dhp_2 &= du_2 + u_1 d\alpha \end{aligned}$$

homojen olmayan bir lineer denklem sistemi bulunur. $dh \neq 0$ ve $d\alpha \neq 0$ olduğundan sistemin katsayılar determinantı sıfırdan farklıdır. O halde bu sistem Cramer metodu ile çözümlerse,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\begin{vmatrix} du_1 - u_2 d\alpha & -d\alpha h \\ du_2 + u_1 d\alpha & dh \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dh & -d\alpha h \\ d\alpha h & dh \end{vmatrix}} = \frac{dh(du_1 - u_2 d\alpha) + hd\alpha(du_2 + u_1 d\alpha)}{(dh)^2 + (d\alpha)^2 h^2} \\ p_2 &= \frac{\begin{vmatrix} dh & du_1 - u_2 d\alpha \\ hd\alpha & du_2 + u_1 d\alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} dh & -d\alpha h \\ d\alpha h & dh \end{vmatrix}} = \frac{dh(du_2 + u_1 d\alpha) - hd\alpha(du_1 - u_2 d\alpha)}{(dh)^2 + (d\alpha)^2 h^2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

şeklinde $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ pol noktası elde edilir [3].

$m \neq 0$ için (3.21) nolu eşitlik Steiner noktası ile Pol noktası arasındaki ilişkiyi belirtir.

$m = 0$ için (3.18) ve (3.26) nolu eşitlikler kullanılırsa,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\oint h^2 p_1 d\alpha \\ -2\oint h^2 p_2 d\alpha \end{pmatrix} = n - \mu \quad (3.28)$$

Steiner normali ile Pol noktası arasındaki ilişki elde edilir.

3.1.5 Kapalı düzlemsel homotetik hareketler için kutupsal atalet momenti

T kutupsal atalet momenti ile dönme hareketi esnasında değişikliğe karşı gösterilen direnç hesaplanacaktır. Ayrıca F alanı ile birlikte T, m, n ifadelerini birleştiren bir formül elde edilecektir. Bunun için α parametresi ile X noktası boyunca,

$$T = \oint (x_1'^2 + x_2'^2) d\alpha \quad (3.29)$$

ifadesi hesaplınsın.

(3.4) ifadeleri son eşitlikte yerine yazıldığında, tam kare ifadeler açılıp (3.12) eşitliği kullanılırsa,

$$T = (x_1^2 + x_2^2)m + x_1 \oint (-2hu_1 d\alpha) + x_2 \oint (-2hu_2 d\alpha) + \oint (u_1^2 + u_2^2) d\alpha \quad (3.30)$$

elde edilir. Orjinin kutupsal atalet momentini bulmak için son eşitlikte $x_1 = x_2 = 0$ yazılırsa,

$$T_o = \oint (u_1^2 + u_2^2) d\alpha \quad (3.31)$$

bulunur. Bu ifade (3.30) eşitliğinde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$T - T_o = (x_1^2 + x_2^2)m + x_1 \oint (-2hu_1 d\alpha) + x_2 \oint (-2hu_2 d\alpha) \quad (3.32)$$

elde edilir. (3.16) ifadesi son eşitlikte kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T - T_o = & (x_1^2 + x_2^2)m + x_1 \oint (-2h^2 p_1 d\alpha - 2hdhp_2 + 2hdu_2) \\ & + x_2 \oint (-2h^2 p_2 d\alpha + 2hdhp_1 - 2hdu_1) \end{aligned} \quad (3.33)$$

şeklinde kapalı düzlemsel homotetik hareketler için kutupsal atalet momenti hesaplanır. Bu ifade ile (3.19) eşitliği birlikte düşünülürse,

$$T - T_o = 2(F - F_o) + x_1 \oint (hdu_2 - u_2 dh) + x_2 \oint (-hdu_1 + u_1 dh) \quad (3.34)$$

şeklinde yörünge alanı ile kutupsal atalet momenti ilişkisi elde edilir.

3.2. Kapalı Düzlemsel Homotetik Ters Hareket

E hareketli, E' sabit olmak üzere iki düzlemin koordinat sistemleri arasında (3.1) eşitliğindeki t parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketi düşünölsün. E' sabit düzleminin E hareketli düzlemine göre hareketi E' / E ters hareketi olsun.

Sistemlerin orijinleri sırasıyla (O', O) , öteleme vektörleri $OO' = U$ ve $O'O = U'$, dönme matrisi $R(t)$, dönme açısı $\alpha(t)$ olsun. Elemanları (3.2) ifadesinde verilen R matrisi ortogonal matristir, yani $R^{-1} = R^T$ eşitliği vardır. Bu ifade kullanılarak, sabit sisteme ait bir X' noktasının hareketli sisteme göre yörüngesini bulmak için (3.3) eşitliğinden X çekilirse,

$$X(t) = \frac{1}{h(t)} \left[(R(t))^T X' + U(t) \right] \quad (3.35)$$

yazılır. Burada h, t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonudur. Hareket, sabit ve hareketli sistem arasında zamana bağlı dönüşüm olarak tanımlanabilir. X' vektörü zamandan bağımsız olarak düşünülebilir.

Ayrıca öteleme vektörleri arasında $U = -R^T U'$ bağıntısı vardır. Bu bağıntı (3.35) eşitliğinde yerine yazılırsa ters hareket için yörünge denklemi,

$$X(t) = \frac{1}{h(t)} (R(t))^T (X' - U'(t)) \quad (3.36)$$

bulunur. Bu son ifadede (3.2) eşitliğindeki koordinatlar yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{h(t)} \left[\cos(\alpha(t)) (x'_1 - u'_1(t)) + \sin(\alpha(t)) (x'_2 - u'_2(t)) \right] \\ x_2(t) &= \frac{1}{h(t)} \left[-\sin(\alpha(t)) (x'_1 - u'_1(t)) + \cos(\alpha(t)) (x'_2 - u'_2(t)) \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

elde edilir. Bu ifadelerin t _ ye göre diferensiyelleri alınır,

$$\begin{aligned} dx_1 &= -\frac{dh}{h^2} \left[\cos \alpha (x'_1 - u'_1) + \sin \alpha (x'_2 - u'_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{h} \left[-du'_1 \cdot \cos \alpha - (x'_1 - u'_1) \sin \alpha d\alpha \right. \\ &\quad \left. - du'_2 \cdot \sin \alpha + (x'_2 - u'_2) \cos \alpha d\alpha \right] \\ dx_2 &= -\frac{dh}{h^2} \left[-\sin \alpha (x'_1 - u'_1) + \cos \alpha (x'_2 - u'_2) \right] \\ &\quad + \frac{1}{h} \left[du'_1 \cdot \sin \alpha - (x'_1 - u'_1) \cos \alpha d\alpha - \right. \\ &\quad \left. du'_2 \cdot \cos \alpha - (x'_2 - u'_2) \sin \alpha d\alpha \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

bulunur.

3.2.1 Kapalı bir ters homotetik hareketin yörünge alanı

E' -düzleminin sabit bir X' noktasının F' yörünge alanını hesaplamak istiyoruz. Bunun için

$$F' = \frac{1}{2} \oint (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) \quad (3.39)$$

Gauss alan formülünden faydalanacağız. Burada eğri integrali X' noktasının kapalı yörünge eğrisi üzerinde alınmaktadır.

(3.37) ve (3.38) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki ifade gerekli düzenlemeler sonucu hesaplanırsa,

$$x_1 dx_2 - x_2 dx_1 = \frac{1}{h^2} \left[-\left(x_1'^2 + x_2'^2\right) d\alpha + 2x_1' u_1' d\alpha + 2x_2' u_2' d\alpha - x_1' du_2' + x_2' du_1' - \left(u_1'^2 + u_2'^2\right) d\alpha + u_1' du_2' - u_2' du_1' \right] \quad (3.40)$$

bulunur. Bu ifade (3.39) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} 2F' = & -\left(x_1'^2 + x_2'^2\right) \oint \frac{1}{h^2} d\alpha + x_1' \oint \left(2 \frac{1}{h^2} u_1' d\alpha - \frac{1}{h^2} du_2'\right) \\ & + x_2' \oint \left(2 \frac{1}{h^2} u_2' d\alpha + \frac{1}{h^2} du_1'\right) \\ & - \oint \left\{ \frac{1}{h^2} \left(u_1'^2 + u_2'^2\right) d\alpha - \frac{1}{h^2} \left(u_1' du_2' - u_2' du_1'\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte aşağıdaki ifadeler şu şekilde gösterilsin:

$$\begin{aligned} \oint \left(2 \frac{1}{h^2} u_1' d\alpha - \frac{1}{h^2} du_2'\right) &= a'^* \\ \oint \left(2 \frac{1}{h^2} u_2' d\alpha + \frac{1}{h^2} du_1'\right) &= b'^* \\ -\oint \left\{ \frac{1}{h^2} \left(u_1'^2 + u_2'^2\right) d\alpha - \frac{1}{h^2} \left(u_1' du_2' - u_2' du_1'\right) \right\} &= c' \end{aligned} \quad (3.42)$$

Burada c' skaler terimi sabit sistemin başlangıç noktasının yörüngesi ile ilgilidir. Bu noktanın çizdiği yörünge alanını $F_{O'}'$ ile gösterip, (3.41) ifadesinde

$(x_1' = 0, x_2' = 0)$ yazılırsa,

$$2F_{O'}' = c' \quad (3.43)$$

bulunur.

$\oint \frac{1}{h^2} d\alpha$ integrali (3.11) eşitliğine benzer şekilde şu şekilde elde edilir:

$$\oint \frac{1}{h^2} d\alpha = \frac{1}{h^2(t_0)} \oint d\alpha = \frac{1}{h^2(t_0)} 2\pi\nu = m' \quad (3.44)$$

katsayısı, $\nu \in \mathbb{Z}$ dönme sayısı ile çizgilerin $F' = sbt$. yörünge alanı için çemberler veya doğrular belirtip belirtmediğini söyler. Eğer $\nu \neq 0$ ise, çemberler bulunur. Eğer tamamlanmamış tur olursa, $\nu = 0$ olur ve çemberler düz çizgilere indirgenir.

(3.42), (3.43) ve (3.44) ifadeleri (3.41) nolu yörünge alan formülünde kullanılırsa,

$$2(F' - F_{O'}) = -(x_1'^2 + x_2'^2)m' + a'^* x_1' + b'^* x_2' \quad (3.45)$$

elde edilir.

3.2.2 Ters hareket için integral katsayılarının farklı bir gösterimi

(3.36) nolu eşitliğin t ye göre diferensiyeli alınırsa,

$$dX = \frac{1}{h} d(R^T)(X' - U') - \frac{1}{h} R^T dU' - \frac{dh}{h^2} R^T (X' - U') \quad (3.46)$$

ve burada $X' = P' = \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix}$ (pol noktası) yazılırsa, X sabit olduğundan,

$$0 = dX = \frac{1}{h} d(R^T)(P' - U') - \frac{1}{h} R^T dU' - \frac{dh}{h^2} R^T (P' - U') \quad (3.47)$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse,

$$\underbrace{\left[\frac{1}{h} (dR)^T - \frac{dh}{h^2} R^T \right]}_A (P' - U') = \frac{1}{h} R^T dU'$$

$$(P' - U') = A^{-1} \left(\frac{1}{h} R^T dU' \right) \quad (3.48)$$

$$U' = P' - A^{-1} \left(\frac{1}{h} R^T dU' \right)$$

elde edilir. Şimdi (3.2) eşitliği göz önünde bulundurularak $A = \frac{1}{h} (dR)^T - \frac{dh}{h^2} R^T$ matrisi hesaplınsın.

$$(dR)^T = \begin{pmatrix} -\sin \alpha d\alpha & \cos \alpha d\alpha \\ -\cos \alpha d\alpha & -\sin \alpha d\alpha \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$A = \frac{1}{h}(dR)^T - \frac{dh}{h^2}R^T$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-\sin \alpha d\alpha}{h} - \frac{dh}{h^2} \cos \alpha & \frac{\cos \alpha d\alpha}{h} - \frac{dh}{h^2} \sin \alpha \\ -\frac{\cos \alpha d\alpha}{h} + \frac{dh}{h^2} \sin \alpha & \frac{-\sin \alpha d\alpha}{h} - \frac{dh}{h^2} \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

elde edilir. Ayrıca bu matrisin determinantı hesaplanırsa,

$$\det A = \frac{\sin^2 \alpha (d\alpha)^2}{h^2} + \frac{(dh)^2}{h^4} \cos^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha (d\alpha)^2}{h^2} + \frac{(dh)^2}{h^4} \sin^2 \alpha$$

$$= \frac{(d\alpha)^2}{h^2} + \frac{(dh)^2}{h^4} \quad (3.51)$$

yazılır. O halde A matrisinin tersi hesaplanabilir:

$$A^{-1} = \frac{h^4}{h^2 (d\alpha)^2 + (dh)^2} \begin{pmatrix} \frac{-h \sin \alpha d\alpha - dh \cos \alpha}{h^2} & \frac{-h \cos \alpha d\alpha + dh \sin \alpha}{h^2} \\ \frac{h \cos \alpha d\alpha - dh \sin \alpha}{h^2} & \frac{-h \sin \alpha d\alpha - dh \cos \alpha}{h^2} \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Bu ters matris ve koordinatlar (3.48) ifadesinde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$u_1' = p_1' + \frac{h}{h^2 (d\alpha)^2 + (dh)^2} (dh du_1' + h d\alpha du_2')$$

$$u_2' = p_2' + \frac{h}{h^2 (d\alpha)^2 + (dh)^2} (dh du_2' - h d\alpha du_1') \quad (3.53)$$

bulunur. Bu ifadeler (3.42) eşitliğinde kullanılırsa,

$$a'^* = 2\oint \frac{1}{h^2} p_1' d\alpha + 2\oint \frac{d\alpha}{h^3 (d\alpha)^2 + h (dh)^2} (dh du_1' + h d\alpha du_2')$$

$$b'^* = 2\oint \frac{1}{h^2} p_2' d\alpha + 2\oint \frac{d\alpha}{h^3 (d\alpha)^2 + h (dh)^2} (dh du_2' - h d\alpha du_1') \quad (3.54)$$

elde edilir. Bu katsayılar aşağıdaki gibi ayrı ayrı gösterilebilir:

$$a' := 2\oint \frac{1}{h^2} p_1' d\alpha, \quad b' := 2\oint \frac{1}{h^2} p_2' d\alpha$$

$$\mu_1' := 2\oint \frac{d\alpha}{h^3 (d\alpha)^2 + h (dh)^2} (dh du_1' + h d\alpha du_2'), \quad (3.55)$$

$$\mu_2' := 2\oint \frac{d\alpha}{h^3 (d\alpha)^2 + h (dh)^2} (dh du_2' - h d\alpha du_1'), \quad \mu' = \begin{pmatrix} \mu_1' \\ \mu_2' \end{pmatrix}$$

(3.54) ve (3.55) ifadeleri (3.45) eşitliğinde yerine yazılırsa yöründe alan denklemi,

$$2(F' - F_{O'}) = -(x_1'^2 + x_2'^2) m' + a' x_1' + b' x_2' + \mu_1' x_1' + \mu_2' x_2' \quad (3.56)$$

bulunur.

3.2.3 Kapalı düzlemsel ters homotetik hareketler için Steiner noktası ve Steiner normali

$m' \neq 0$ için kapalı düzlemsel ters homotetik hareketin $S' = \begin{pmatrix} s_1' \\ s_2' \end{pmatrix}$ Steiner noktasının şu şekilde bulunduğunu biliyoruz:

$$s_j' = \frac{\oint \frac{1}{h^2} p_j' d\alpha}{\oint \frac{1}{h^2} d\alpha}, \quad j = 1, 2 \quad (3.57)$$

Bu eşitlik kullanılarak,

$$\oint \frac{1}{h^2} p_1' d\alpha = s_1' m', \quad \oint \frac{1}{h^2} p_2' d\alpha = s_2' m' \quad (3.58)$$

ifadeleri yazılabilir.

(3.58), (3.55) ifadesinde yerine yazılıp (3.56) yeniden düzenlenirse,

$$2(F' - F_{O'}) = -m'(x_1'^2 + x_2'^2 - 2s_1'x_1' - 2s_2'x_2') + \mu_1'x_1' + \mu_2'x_2' \quad (3.59)$$

kapalı düzlemsel ters homotetik hareketler için Steiner alan formülü elde edilir.

Bu eşitlik $m' \neq 0$ sayısına bölünüp, tam kare ifadeler halinde yazılırsa,

$$\left(x_1' - \left(s_1' - \frac{\mu_1'}{2m'}\right)\right)^2 + \left(x_2' - \left(s_2' - \frac{\mu_2'}{2m'}\right)\right)^2 - \left(s_1' - \frac{\mu_1'}{2m'}\right)^2 - \left(s_2' - \frac{\mu_2'}{2m'}\right)^2 = -\frac{2(F' - F_{O'})}{m'} \quad (3.60)$$

şeklinde çember denklemi bulunur.

Eşit yörünge alanına sahip E' sabit düzleminin bütün sabit noktaları E hareketli düzleminde,

$$M' = \left(s_1' - \frac{\mu_1'}{2m'}, s_2' - \frac{\mu_2'}{2m'}\right) \quad (3.61)$$

merkezli aynı bir çember üzerinde bulunurlar.

$h=1$ özel durumunda $\mu_1' = \mu_2' = 0$ olacağından M' noktası S' Steiner noktası olur.

Şimdi $m' = 0$ durumu incelensin.

Bu durumda (3.56) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$(a' + \mu_1')x_1' + (b' + \mu_2')x_2' - 2(F' - F_{O'}) = 0 \quad (3.62)$$

şeklinde doğru denklemi elde edilir. Yani yukarıda bahsedilen çemberler düz çizgilere indirgenir.

(3.62) denkleminde eşit alanlı çizgilerin normali, Steiner normali:

$$n' = \begin{pmatrix} a' + \mu_1' \\ b' + \mu_2' \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

şeklinde bulunur.

3.2.4 Kapalı düzlemsel ters homotetik hareketler için sabit pol noktası

(3.53) eşitliğinden $P' = \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix}$ pol noktası çekilirse,

$$\begin{aligned} p_1' &= \frac{h}{h^2(d\alpha)^2 + (dh)^2} (-dhdu_1' - h d\alpha du_2') + u_1' \\ p_2' &= \frac{h}{h^2(d\alpha)^2 + (dh)^2} (-dhdu_2' + h d\alpha du_1') + u_2' \end{aligned} \quad (3.64)$$

elde edilir.

$m' \neq 0$ için (3.58) nolu eşitlik Steiner noktası ile Pol noktası arasındaki ilişkiyi belirtir.

$m' = 0$ için (3.55) ve (3.63) nolu eşitlikler kullanılırsa,

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\oint \frac{1}{h^2} p_1' d\alpha \\ 2\oint \frac{1}{h^2} p_2' d\alpha \end{pmatrix} = n' - \mu' \quad (3.65)$$

Steiner normali ile Pol noktası arasındaki ilişki elde edilir.

3.2.5 Kapalı düzlemsel ters homotetik hareketler için kutupsal atalet momenti

T' kutupsal atalet momenti ile dönme hareketi esnasında değişikliğe karşı gösterilen direnci hesaplamak istiyoruz. Ayrıca amacımız F' alanı ile birlikte T', m', n' ifadelerini birleştiren bir formül elde etmektir. Bunun için α parametresi ile X' noktası boyunca,

$$T' = \oint (x_1'^2 + x_2'^2) d\alpha \quad (3.66)$$

ifadesi hesaplansın.

(3.37) ifadeleri son eşitlikte yerine yazıldığında, tam kare ifadeler açılıp (3.44) eşitliği kullanılırsa,

$$T' = (x_1'^2 + x_2'^2) m' + x_1' \oint \left(-2 \frac{1}{h^2} u_1' d\alpha \right) + x_2' \oint \left(-2 \frac{1}{h^2} u_2' d\alpha \right) + \oint \frac{1}{h^2} (u_1'^2 + u_2'^2) d\alpha \quad (3.67)$$

elde edilir. Orjinin kutupsal atalet momentini bulmak için son eşitlikte $x_1' = x_2' = 0$ yazılırsa,

$$T_{O'}' = \oint \frac{1}{h^2} (u_1'^2 + u_2'^2) d\alpha \quad (3.68)$$

bulunur. Bu ifade (3.67) eşitliğinde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$T' - T_{O'}' = (x_1'^2 + x_2'^2) m' + x_1' \oint \left(-2 \frac{1}{h^2} u_1' d\alpha \right) + x_2' \oint \left(-2 \frac{1}{h^2} u_2' d\alpha \right) \quad (3.69)$$

elde edilir. (3.53) ifadesi son eşitlikte kullanılırsa,

$$\begin{aligned} T' - T_{O'}' &= (x_1'^2 + x_2'^2) m' \\ &+ x_1' \left(-2 \oint \frac{1}{h^2} p_1' d\alpha - 2 \oint \frac{d\alpha}{h^3 (d\alpha)^2 + h (dh)^2} (dh du_1' + h d\alpha du_2') \right) \\ &+ x_2' \left(-2 \oint \frac{1}{h^2} p_2' d\alpha - 2 \oint \frac{d\alpha}{h^3 (d\alpha)^2 + h (dh)^2} (dh du_2' - h d\alpha du_1') \right) \end{aligned} \quad (3.70)$$

şeklinde kapalı düzlemsel ters homotetik hareketler için kutupsal atalet momenti hesaplanır. Bu ifade ile (3.55) ve (3.56) eşitlikleri birlikte düşünülürse,

$$T' - T_{O'}' = -2 (F' - F_{O'}') \quad (3.71)$$

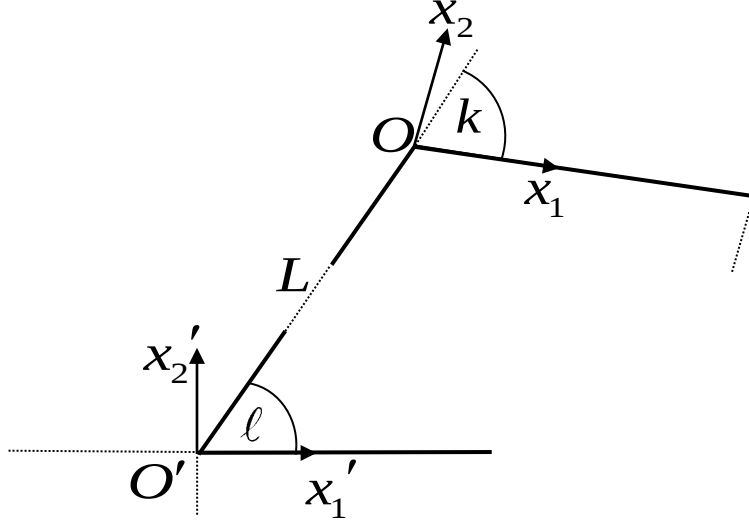
şeklinde yörünge alanı ile kutupsal atalet momenti ilişkisi elde edilir.

3.3 Örnek: Vinç Hareketi

Önceki bölümlerde dört kavram üzerinde duruldu: yörünge alan formülü, Steiner noktası ve Steiner normalı gibi geometrik nesneler, pol noktası ve kutupsal atalet momenti. Bu örnek daha önce elde edilen kinematik kavramların deneysel verilere nasıl uygulanacağı gösterilecektir.

Vincin kolları bir parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket ile uzayıp kısalabildiği için örnek olarak vinç hareketi seçildi. Bu hareket bir çift dayanak noktasına sahiptir. ‘çift dayanak noktası’ kavramı vincin sabit ve hareketli olmak üzere

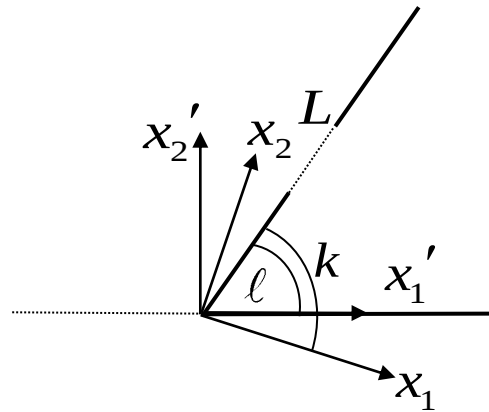
iki koluna ait sistemlerin başlangıç noktalarını ifade eder (şekil 3.1). Sabit sistemin başlangıç noktasında vincin kontrol paneli yer alır. ‘ L ’ kolu ise h parametresi tarafından uzayıp kısalabilir. Ayrıca vinç hareketi esnasında kollar tam tur atmamaktadır. Bu durumda yukarıdaki bölümlerde bahsedilen ν dönme sayısı sıfır olur. Dolayısıyla (3.12) eşitliği gereği örnek boyunca $m=0$ alınmalıdır.



Şekil 3. 1: Bir çift dayanak noktası olan vincin kolları.

Kapalı düzlemsel homotetik harekette vinç hareketini modellemek için kollar, bir çift dayanak noktası ile temsil edilmişti (Şekil 3.1). Öncelikle direkt hareket için kartezyen koordinatlarda bu dayanak noktalarının eşitlikleri yazılsın.

Hareket denklemi (3.1) eşitliği olsun. Hareketli sistemin sabit sistem üzerine hareketi incelendiğinden sistemlerin başlangıç noktaları bir an çakışık düşünölsün.



Şekil 3. 2: Çakışık vinç kolları.

Şimdi dönme matrisi hesaplınsın. Bunun için şekil 3.2 incelenirse vektörler arasındaki açılar aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \angle(x_1', x_1) &= k - \ell \\
 \angle(x_1', x_2) &= 90 + \ell - k \\
 \angle(x_2', x_1) &= 90 + k - \ell \\
 \angle(x_2', x_2) &= \ell - k
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

x_1' ve x_2' bileşenleri, x_1 ve x_2 cinsinden yazılabilir.

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \tag{3.73}$$

Son eşitlik x_1 ile iç çarpılıp, $x_1 \perp x_2$ olduğu ve (3.72) eşitliği hatırlanırsa,

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \langle x_1', x_1 \rangle \\
 &= \cos(k - \ell) \\
 &= \cos(\ell - k)
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

bulunur.

(3.73) eşitliği x_2 ile iç çarpılıp, $x_1 \perp x_2$ olduğu ve (3.72) eşitliği hatırlanırsa,

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= \langle x_1', x_2 \rangle \\
 &= \cos(90 + \ell - k) \\
 &= -\sin(\ell - k)
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \tag{3.76}$$

denklemini için

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= \sin(\ell - k) \\
 a_{22} &= \cos(\ell - k)
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

ifadeleri elde edilir. O halde dönme matrisi,

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(\ell(t) - k(t)) & -\sin(\ell(t) - k(t)) \\ \sin(\ell(t) - k(t)) & \cos(\ell(t) - k(t)) \end{pmatrix} \tag{3.78}$$

yazılır.

Şekil 3.2 de öteleme vektörü $U' = OO'$ ile L uzunluğu arasındaki açı incelendiğinde,

$$U'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \cos(\ell(t)) \\ L \sin(\ell(t)) \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

bulunur. Ayrıca $U' = -RU$ olduğundan,

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L \cos(k(t)) \\ -L \sin(k(t)) \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

elde edilir. (3.78), (3.80) ve koordinatlar (3.3) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \cos(\ell(t) - k(t))(h(t)x_1 + L \cos(k)) - \sin(\ell(t) - k(t))(h(t)x_2 + L \sin(k)) \\ x_2'(t) &= \sin(\ell(t) - k(t))(h(t)x_1 + L \cos(k)) + \cos(\ell(t) - k(t))(h(t)x_2 + L \sin(k)) \end{aligned} \quad (3.81)$$

bulunur.

Buradaki toplam açı $\alpha = \ell - k$ dır.

(3.81) eşitliğinin zamana göre türevi alınıp $\dot{x}_1' \dot{x}_2' - \dot{x}_2' \dot{x}_1'$ ifadesi hesaplanıp, gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1' \dot{x}_2' - \dot{x}_2' \dot{x}_1' &= \left(h^2 (x_1^2 + x_2^2) + L^2 \right) (\dot{\ell}(t) - \dot{k}(t)) \\ &+ x_1 \left(2hL \cos(k(t)) (\dot{\ell}(t) - \dot{k}(t)) + hL \cos(k(t)) \dot{k}(t) - Ldh \sin(k(t)) \right) \\ &+ x_2 \left(2hL \sin(k(t)) (\dot{\ell}(t) - \dot{k}(t)) + hL \sin(k(t)) \dot{k}(t) + Ldh \cos(k(t)) \right) + L^2 \dot{k}(t) \end{aligned} \quad (3.82)$$

elde edilir.

Vincin kolları tam tur atmadığından zaman $[t_1, t_2]$ aralığında değer alır ve yukarıda bahsettiğimiz gibi $m = 0$ dır. Ayrıca periyodik fonksiyonların integrali için f periyodik fonksiyon olmak üzere;

$$\oint df = \int_{t_1}^{t_2} \dot{f} dt = f \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (3.83)$$

yazılabilir. Benzer şekilde yukarıdaki $k(t)$ açısı zamana bağlı periyodik fonksiyon olduğundan,

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{k}(t) dt = 0 \quad (3.84)$$

bulunur.

Yörünge alan denklemini elde etmek için;

$$F = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{x}_1' \dot{x}_2' - \dot{x}_2' \dot{x}_1' \right) dt \quad (3.85)$$

Gauss alan formülü kullanılır.

Ayrıca $\alpha = \ell - k$ eşitliğinden,

$$d\alpha = d\ell - dk \quad (3.86)$$

ifadesi elde edilir.

(3.82) eşitliği (3.85) de yerine yazılıp, (3.84) ve (3.86) göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} 2F = & x_1 \left(\int_{t_1}^{t_2} 2Lh \cos k (\dot{\ell} - \dot{k}) dt + \int_{t_1}^{t_2} L \left(h \cos k \cdot \dot{k} - dh \sin k \right) dt \right) \\ & + x_2 \left(\int_{t_1}^{t_2} 2Lh \sin k (\dot{\ell} - \dot{k}) dt + \int_{t_1}^{t_2} L \left(h \sin k \cdot \dot{k} + dh \cos k \right) dt \right) \end{aligned} \quad (3.87)$$

yazılır. Bu son eşitlikte aşağıdaki ifadeler şu şekilde gösterilsin:

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_1}^{t_2} 2Lh \cos k (\dot{\ell} - \dot{k}) dt + \int_{t_1}^{t_2} L \left(h \cos k \cdot \dot{k} - dh \sin k \right) dt \right) &= a^* \\ \left(\int_{t_1}^{t_2} 2Lh \sin k (\dot{\ell} - \dot{k}) dt + \int_{t_1}^{t_2} L \left(h \sin k \cdot \dot{k} + dh \cos k \right) dt \right) &= b^* \end{aligned} \quad (3.88)$$

(3.80) eşitliğinin zamana göre diferensiyeli alınırsa,

$$\begin{aligned} du_1 &= L(\sin k) \dot{k} dt \\ du_2 &= -L(\cos k) \dot{k} dt \end{aligned} \quad (3.89)$$

elde edilir.

(3.80), (3.89) ifadeleri (3.88) eşitliğinde yerine yazılırsa (3.9) eşitliği bulunur.

Burada (3.16) ifadeleri kullanılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned} a^* &= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} (-2h^2 p_1 d\alpha)}_a + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} (-2hdhp_2 + hdu_2 + u_2 dh)}_{\mu_1} \\ b^* &= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} (-2h^2 p_2 d\alpha)}_b + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} (-2hdhp_1 + hdu_1 + u_1 dh)}_{\mu_2} \end{aligned} \quad (3.90)$$

elde edilir. Bu gösterimler (3.87) de yerine yazıldığında,

$$2F = (a + \mu_1) x_1 + (b + \mu_2) x_2 \quad (3.91)$$

bulunur. Buradaki Steiner normal:

$$n = \begin{pmatrix} a + \mu_1 \\ b + \mu_2 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \left(\int_{t_1}^{t_2} \left\{ 2h \cos k (\dot{\ell} - \dot{k}) + \left(h \cos k \cdot \dot{k} - dh \sin k \right) \right\} dt \right) \\ \left(\int_{t_1}^{t_2} \left\{ 2h \sin k (\dot{\ell} - \dot{k}) + \left(h \sin k \cdot \dot{k} + dh \cos k \right) \right\} dt \right) \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

şeklinde yazılır.

Vincin hareketli kolu için pol noktası hesaplınsın.

(3.80), (3.86) ve (3.89) ifadeleri (3.27) eşitliğinde yerine yazılırsa $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$,

$$p_1 = \frac{dh \left(L \sin k \cdot \dot{\ell} \right) - h (\dot{\ell} - \dot{k}) \left(L \cos k \cdot \dot{\ell} \right)}{(dh)^2 + h^2 (\dot{\ell} - \dot{k})^2}$$

$$p_2 = \frac{dh \left(-L \cos k \cdot \dot{\ell} \right) - h (\dot{\ell} - \dot{k}) \left(L \sin k \cdot \dot{\ell} \right)}{(dh)^2 + h^2 (\dot{\ell} - \dot{k})^2} \quad (3.93)$$

bulunur ve

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{L \dot{\ell}}{(dh)^2 + h^2 (\dot{\ell} - \dot{k})^2} \begin{pmatrix} dh \sin k - h (\dot{\ell} - \dot{k}) \cos k \\ -dh \cos k - h (\dot{\ell} - \dot{k}) \sin k \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.90) ve (3.92) ifadeleri birlikte düşünüldüğünde vinç hareketi için Steiner normali ile hareketli pol noktası arasındaki ilişki bulunur

Vincin hareketli kolu için kutupsal atalet momenti elde edilsin.

(3.29) ve (3.81) eşitlikleri kullanılarak, (3.80) ifadesi (3.30) da yerine yazılırsa,

$$T = x_1 \oint 2hL \cos k (\dot{\ell} - \dot{k}) dt + x_2 \oint 2hL \sin k (\dot{\ell} - \dot{k}) dt \quad (3.95)$$

bulunur. (3.87) eşitliğiyle birlikte düşünüldüğünde yörünge alan formülü ile kutupsal atalet momenti arasındaki ilişki şu şekilde yazılır:

$$T = 2F + x_1 L \oint \left(-h \cos k \cdot \dot{k} + dh \sin k \right) - x_2 L \oint \left(h \sin k \cdot \dot{k} + dh \cos k \right). \quad (3.96)$$

Şimdi de ters hareket için kartezyen koordinatlarda bu dayanak noktalarının eşitlikleri yazılsın. Vinç hareketindeki dönme matrisi ve öteleme vektörleri

koordinatları aynı olmak üzere ters hareket denklemi **(3.36)** olsun. Buradan dayanak noktası,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{h(t)} \left[\cos(\ell(t) - k(t)) (x_1' - L \cos(\ell)) + \sin(\ell(t) - k(t)) (x_2' - L \sin(\ell)) \right] \\ x_2(t) &= \frac{1}{h(t)} \left[-\sin(\ell(t) - k(t)) (x_1' - L \cos(\ell)) + \cos(\ell(t) - k(t)) (x_2' - L \sin(\ell)) \right] \end{aligned} \quad (3.97)$$

şeklinde yazılır. **(3.97)** eşitliğinin zamana göre türevi alınıp $\dot{x}_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1$ ifadesi hesaplanıp, gerekli işlemler yapıldığında,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 &= - \left(x_1'^2 + x_2'^2 \right) \frac{1}{h^2} \left(\dot{\ell} - \dot{k} \right) + x_1' \left(2 \frac{1}{h^2} L \cos \ell \left(\dot{\ell} - \dot{k} \right) - \frac{1}{h^2} L \dot{\ell} \cos \ell \right) \\ &\quad + x_2' \left(2 \frac{1}{h^2} L \sin \ell \left(\dot{\ell} - \dot{k} \right) - \frac{1}{h^2} L \dot{\ell} \sin \ell \right) + \frac{1}{h^2} L^2 \dot{k} \end{aligned} \quad (3.98)$$

elde edilir. **(3.83)** ve **(3.84)** göz önüne alınarak son eşitlik **(3.85)** ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} 2F' &= x_1' \int_{t_1}^{t_2} \left(2 \frac{1}{h^2} L \cos \ell \left(\dot{\ell} - \dot{k} \right) - \frac{1}{h^2} L \dot{\ell} \cos \ell \right) dt \\ &\quad + x_2' \int_{t_1}^{t_2} \left(2 \frac{1}{h^2} L \sin \ell \left(\dot{\ell} - \dot{k} \right) - \frac{1}{h^2} L \dot{\ell} \sin \ell \right) dt \end{aligned} \quad (3.99)$$

şeklinde vinciin sabit kolunun ters hareket için yörünge alan formülü bulunur. Bu son eşitlikte aşağıdaki ifadeler şu şekilde gösterilsin:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left(2 \frac{1}{h^2} L \cos \ell \left(\dot{\ell} - \dot{k} \right) - \frac{1}{h^2} L \dot{\ell} \cos \ell \right) dt &= a'^* \\ \int_{t_1}^{t_2} \left(2 \frac{1}{h^2} L \sin \ell \left(\dot{\ell} - \dot{k} \right) - \frac{1}{h^2} L \dot{\ell} \sin \ell \right) dt &= b'^* \end{aligned} \quad (3.100)$$

(3.79) ifadesinin zamana göre diferensiyeli alınırsa,

$$\begin{aligned} du_1' &= -L \sin \ell \dot{\ell} dt \\ du_2' &= L \cos \ell \dot{\ell} dt \end{aligned} \quad (3.101)$$

yazılır.

(3.79), **(3.101)** ifadeleri **(3.100)** eşitliğinde yerine yazılırsa **(3.42)** eşitliği bulunur. Burada **(3.53)** ifadeleri kullanılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
a'^* &= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \left(2 \frac{1}{h^2} p_1' d\alpha \right)}_{a'} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{2d\alpha}{h^3 (d\alpha)^2 + h(dh)^2} (dh du_1' + h d\alpha du_2') - \frac{1}{h^2} du_2' \right)}_{\mu_1'} \\
b'^* &= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \left(2 \frac{1}{h^2} p_2' d\alpha \right)}_{b'} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{2d\alpha}{h^3 (d\alpha)^2 + h(dh)^2} (dh du_2' - h d\alpha du_1') - \frac{1}{h^2} du_1' \right)}_{\mu_2'}
\end{aligned} \tag{3.102}$$

elde edilir. Bu gösterimler (3.99) de yerine yazıldığında,

$$2F' = (a' + \mu_1') x_1' + (b' + \mu_2') x_2' \tag{3.103}$$

bulunur. Buradaki Steiner normalı:

$$n' = \begin{pmatrix} a' + \mu_1' \\ b' + \mu_2' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \int_{t_1}^{t_2} \left(2 \frac{1}{h^2} \cos \ell \left(\dot{\ell} - \dot{k} \right) - \frac{1}{h^2} \dot{\ell} \cos \ell \right) dt \\ \int_{t_1}^{t_2} \left(2 \frac{1}{h^2} \sin \ell \left(\dot{\ell} - \dot{k} \right) - \frac{1}{h^2} \dot{\ell} \sin \ell \right) dt \end{pmatrix} \tag{3.104}$$

yazılır.

Vincin sabit kolu için pol noktası hesaplınsın.

$$(3.79), (3.86) \text{ ve } (3.101) \text{ ifadeleri } (3.64) \text{ eşitliğinde yerine yazılırsa } P' = \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
p_1' &= \frac{h}{(dh)^2 + h^2 \left(\dot{\ell} - \dot{k} \right)^2} \left(dh L \dot{\ell} \sin \ell - h \left(\dot{\ell} - \dot{k} \right) L \dot{\ell} \cos \ell \right) + L \cos \ell \\
p_2' &= -\frac{h}{(dh)^2 + h^2 \left(\dot{\ell} - \dot{k} \right)^2} \left(dh L \dot{\ell} \cos \ell + h \left(\dot{\ell} - \dot{k} \right) L \dot{\ell} \sin \ell \right) + L \sin \ell
\end{aligned} \tag{3.105}$$

bulunur. (3.102) ve (3.104) ifadeleri birlikte düşünüldüğünde vinç hareketi için Steiner normalı ile hareketli pol noktası arasındaki ilişki bulunur

Vincin sabit kolu için kutupsal atalet momenti elde edilsin.

(3.66) ve (3.97) eşitlikleri kullanılarak, (3.79) ifadesi (3.67) da yerine yazılırsa,

$$T' = x_1' \oint \left(-2 \frac{1}{h^2} L \cos \ell (\dot{\ell} - \dot{k}) \right) dt + x_2' \oint \left(-2 \frac{1}{h^2} L \sin \ell (\dot{\ell} - \dot{k}) \right) dt \tag{3.106}$$

bulunur. (3.99) eşitliğiyle birlikte düşünüldüğünde ters hareket için yörünge alan formülü ile kutupsal atalet momenti arasındaki ilişki şu şekilde yazılır:

$$T' = -2F' - x_1' L \oint \frac{1}{h^2} \dot{\ell} \cos \ell dt - x_2' L \oint \frac{1}{h^2} \dot{\ell} \sin \ell dt. \tag{3.107}$$

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bir parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketler altında Steiner alan formülü, Steiner noktası veya normali, pol noktası ve kutupsal atalet momenti direkt ve ters hareket için incelendi. Elde edilen kinematik kavramlar ‘vinç hareketi’ isimli örnek üzerine uygulandı.

Bu çalışma, üç boyutlu uzaylarda robotik hareketler için uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Steiner J., 1840. Von dem Krümmungs-Schwerpunkte ebener curven, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 21, 33-63.
- [2] Müller H.R., 1978. Verallgemeinerung einer formel von Steiner. *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.*, 29, 107-113.
- [3] Müller H.R., 1978. Über trägheitsmomente bei Steinerscher massenbelegung. *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.*, 29, 115-119.
- [4] Tutar A., Kuruoğlu N., 1996. The Steiner formula and the Holditch theorem for the homothetic motions on the planar kinematics, *Mechanism and Machine Theory*, 34, 1-6.
- [5] Dündül M., Kuruoğlu N., 2008. Computation of polar moments of inertia with Holditch type theorem, *Applied Mathematics E-Notes*, 8, 271-278.
- [6] Dathe H., Gezzi R., 2012. Characteristic directions of closed planar motions, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 92, 2-13.
- [7] Thieme K.M., Kubein-Meesenburg D., Ihlow D., Nagel H., 2006. Is a “movable hinge axis” used by the human stomatognathic system?, *Acta of Bioengineering and Biomechanics*, 8, 13-25.
- [8] Blaschke W., Müller H. R., 1956. *Ebene Kinematik*, R. Oldenbourg, München.
- [9] Hacısalıhoğlu H. H., 1971. On the rolling of one curve or surfaces upon another, *Royal Irish Academy*, 71, 13-17.
- [10] Den Hartog J. P., 1948. Polar moments of inertia, *Mechanics*, 2nd ed., McGraw Hill Book Company, New York, 218-224.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Esra İNAN

Doğum Yeri ve Tarihi: Niksar/TOKAT ve 1985

Adres : Kirazlıkçay Mah. TOKİ 6.Blk. No:23 Çarşamba/SAMSUN

E-Posta : esra.unsal55@gmail.com

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2008.

Tezsiz Yüksek Lisans : OMÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, 2009.

Tezli Yüksek Lisans : OMÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2015.

Mesleki Deneyim : Özel derslane (2006-2009), MEB de Matematik öğretmeni (2010).