

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK

Zeynep Hande TOYGANÖZÜ

**Danışman
Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN**

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2015**

© 2015 [Zeynep Hande TOYGANÖZÜ]

TEZ ONAYI

Zeynep Hande TOYGANÖZÜ tarafından hazırlanan " **Asimetrik Metrik Uzaylarda Kompaktlık** " adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman **Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN**
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi **Prof. Dr. Ali KÖKCE**
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi **Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ**
Hacettepe Üniversitesi



Jüri Üyesi **Prof. Dr. Yusuf CİVAN**
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi **Prof. Dr. Salih AYTAZ**
Süleyman Demirel Üniversitesi



Enstitü Müdürü **Prof.Dr.Ahmet ŞAHİNER**

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Zeynep Hande TOYGANÖZÜ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ.....	2
3. ASİMETRİK METRİK UZAYLAR	4
3.1. Asimetrik Metrik Uzaylarda Yakınsaklık.....	5
3.2. Asimetrik Metrik Uzaylarda Kompaktlık ve Tamlık.....	9
3.3. Asimetrik Metrik Uzaylarda Eşsüreklilik, Kompaktlık ve Arzela Ascoli Teoremi	11
3.4. Asimetrik Metrik Uzaylarda Bazı Yakınsaklık Çeşitleri	16
3.4.1. Asimetrik metrik uzaylarda $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{I}^*$ - yakınsaklık	18
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	22
4.1. Asimetrik Metrik Uzaylarda Exhaustiveness.....	22
4.2. Asimetrik Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş Arzela Ascoli Teoremi	28
4.3. Asimetrik Metrik Uzaylarda İstatistiksel Exhaustiveness	30
4.4. Asimetrik Metrik Uzaylarda $\mathcal{I}$ -Dizisel Kompaktlık	35
5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR.....	40
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ.....	44

ÖZET

Doktora Tezi

ASİMETRİK METRİK UZAYLARDA KOMPAKTLIK

Zeynep Hande TOYGANÖZÜ

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN

Bu tez çalışmasında, asimetric metrik uzaylarda eşsüreklilik kavramından daha zayıf olan exhaustiveness kavramı tanımlanarak, özellikleri incelenmiş ve asimetric metrik uzaylarda bu kavram kullanılarak bir fonksiyon ailesinin kompaktlığını karakterize etmek için bir Ascoli tipi teorem elde edilmiştir.

Ayrıca, asimetric yakınsaklık koşulu ortadan kaldırıldığında bir ileri exhaustive fonksiyon dizisinin ileri noktasal limitinin sürekli olmayacağı gibi, tek de olmayabileceğine örnek verilmiştir. Kompakt bir küme üzerinde fonksiyon dizisinin düzgün yakınsaklığını veren önemli bir sonuç da verilmiştir. Asimetric metrik uzaylarda exhaustiveness kavramının istatistiksel versiyonunun bazı özellikleri incelenmiştir.

Son olarak, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin altkümelerinin ideali kavramı kullanılarak tanımlanan ideal dizisel kompaktlık kavramının temel özellikleri incelenmiş ve bu uzaylarda da metrik uzaylarda olduğu gibi dizisel kompaktlık ile ideal dizisel kompaktlık kavramlarının denk olduğu gösterilmiştir. Bundan yararlanılarak, metrik uzaylardaki sonuçtan farklı olarak, asimetric metrik uzaylarda ideal dizisel kompaktlık ve kompaktlık kavramlarının birbirlerinden farklı kavramlar olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Asimetric metrik, quasi-metrik, ileri (geri) exhaustive, Arzela Ascoli teoremi, ileri (geri) *st*-exhaustive, ileri $\mathcal{T}$ –Dizisel Kompaktlık

2015, 45 sayfa

ABSTRACT

Ph.D.Thesis

COMPACTNESS IN ASYMMETRIC METRIC SPACES

Zeynep Hande TOYGANÖZÜ

**Suleyman Demirel University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN

In this thesis, the notion of exhaustiveness which is weaker than the notion of equicontinuity is defined and its properties are investigated in asymmetric metric spaces, and by using this notion, an Ascoli type theorem is obtained to characterize the compactness of a family of functions in these spaces.

Furthermore, an example of a forward exhaustive function sequence of which forward pointwise limit can be neither continuous nor unique is provided. Also, an important result which gives uniform convergence of a function sequence on a compact set is given. Some properties of statistical version of the notion of exhaustiveness are investigated in asymmetric metric spaces.

Finally, fundamental properties of the ideal sequential compactness which is defined by using the ideal of subsets of $\mathbb{N}$ are investigated and equivalence of the notion of sequential compactness and the ideal sequential compactness is given in asymmetric metric spaces that is also valid in any arbitrary metric spaces. By using this idea, which is different from the result given in metric spaces, it is shown that the notion of ideal sequential compactness differs from compactness in asymmetric metric spaces.

Keywords: asymmetric metric, quasi-metric, forward (backward) exhaustive, Arzela Ascoli theorem, forward (backward) *st*-exhaustive, forward $\mathcal{I}$ -Sequential compactness.

2015, 45 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin her aşamasında yanımda olarak beni destekleyen sevgili eşime ve değerli aileme sonsuz sevgi ve teşekkürlerimi sunarım.

Zeynep Hande TOYGANÖZÜ
ISPARTA, 2015

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_0^+$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
P	Asal sayılar kümesi
$\mathcal{I}$	İdeal
$\mathcal{F}$	Filtre
Y^X	X uzayından Y uzayına
$\bar{\rho}$	Düzgün metrik
$a \vee b$	a ile b nin supremumu
$d(x, y)$	Asimetrik metrik
d_Y	Y uzayı üzerindeki asimetrik metrik
$d^S(x, y)$	Simetrik metrik
(X, d_X)	Asimetrik metrik uzay
$\partial(A)$	A kümesinin doğal yoğunluğu
$\bar{S}$	S kümesinin ileri kapanışı
$\overline{K}^{F-\mathcal{I}}$	K kümesinin ileri $\mathcal{I}$ -kapanışı
$C(X, Y)$	X uzayından Y uzayına ff – sürekli fonksiyonlar uzayı
$B^+(x, \delta)$	x – merkezli δ – yarıçaplı ileri yuvar
$x_n \rightarrow x$	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x elemanına yakınsak
$\overset{f}{x_n} \rightarrow x$	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x elemanına ileri yakınsak
$\overset{b}{x_n} \rightarrow x$	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x elemanına geri yakınsak
$\overset{F-\mathcal{I}}{x_n} \rightarrow x$	$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x elemanına ileri $\mathcal{I}$ -yakınsak
$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{f-st} f$	$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna ileri istatistiksel noktasal yakınsak
$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{f-st} f$	$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna ileri düzgün istatistiksel yakınsak

1. GİRİŞ

Matematiğin bir dalı olan Analiz’de önemli bir yer tutan fonksiyon dizilerinin yakınsaklığı kavramı, 19. Yüzyılın başlarından beri incelenmektedir. Limit fonksiyonunun sürekliliği koruması için sürekli fonksiyonların bir dizisinin noktasal yakınsaklığına hangi koşulun ilave edilmesi gerektiği analizin temel sorularından biri olmuştur. Bir diğer önemli soru ise, bir metrik uzayda sürekli fonksiyon dizileri için kompaktlığın karakterize edilmesidir. Bu ikinci soruya cevap oluşturan ve fonksiyonel analizin önemli teoremlerinden biri olan Arzela-Ascoli teoremi için ana koşul, fonksiyonlar ailesinin eşsürekliliği kavramıdır. Gregoriades ve Papanastassiou (2008) metrik uzaylarda, fonksiyon dizileri için ifade edilen ve eşsüreklilik kavramından daha genel bir kavram olan exhaustiveness kavramını kullanarak, genelleştirilmiş bir Ascoli-tipi teoremi elde etmişlerdir.

Asimetrik metrik uzaylarda, metrik uzaylardan farklı olarak, simetri özelliği olmadığından, yakınsaklık, kompaktlık ve tamlık gibi kavramların klasik olanından farklı tanımlanması ve ilgili bazı teoremlerin klasik olanından farklı ifade edilmesi fonksiyonel analizin bu önemli teoreminin bu uzaylarda nasıl çalışacağı konusunu ortaya çıkardı. Collins ve Zimmer (2007), asimetrik metrik uzaylarda ileri sürekli fonksiyonlar ailesinin bir altkümesinin ileri göreceli kompaktlığını yine bu uzaylarda ileri eşsüreklilik ve ileri noktasal sınırlılık koşulu getirerek ifade etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında, asimetrik metrik uzaylarda exhaustiveness kavramı tanımlanarak, özellikleri incelenmiş ve asimetrik metrik uzaylarda bu kavram kullanılarak bir Ascoli tipi teorem elde edilmeye çalışılmıştır. Daha sonra istatistiksel exhaustiveness kavramı ve bazı özellikleri incelenmiştir. Bu uzaylarda da metrik uzaylarda olduğu gibi dizisel kompaktlık ve ideal dizisel kompaktlık kavramlarının denk olduğu gösterilmiştir. Böylece metrik uzaylardan farklı olarak, asimetrik metrik uzaylarda ideal dizisel kompaktlık ve kompaktlık kavramlarının birbirlerinden farklı kavramlar olduğu verilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Asimetrik metrik uzaylar, ilk olarak quasi-metrik uzaylar adı altında 1931 yılında Wilson tarafından verilmiştir ve Niemytzki (1931) tarafından da bir metrik uzay ve metriklenebilme tanımlayan aksiyomlarla bağlantılı olarak çalışılmıştır. Daha sonra, Albert (1941) ve Stoltenberg (1969) de quasi-metrik uzaylar adı altında bu uzaylar üzerine çalışırken, Ribeiro(1943) bu uzayları zayıf metrikli uzaylar olarak adlandırmıştır. Kelly (1963) ve Patty (1967) ise bu uzayları, bitopolojik uzaylar konulu çalışmalarında incelemişlerdir. Yönlendirilmiş (oriented) metrik uzaylar olarak, Bodjanova (1981) ile Reilly ve Vamanamurthy (1984) tarafından da bu uzaylarda tamlık ve kompaktlık ile ilgili ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Reilly vd. (1982) ile Künzi (1983) quasi- pseudo metrik uzaylarda çalışmışlardır ve Mennucci (2004) asimetrik uzaklıklar isimli çalışmasında asimetrik metrik uzaylardan bahsetmiştir.

Bu uzayların, matematik ve uygulamalı matematiğin yanı sıra malzeme bilimi, biyoloji gibi birçok alanda da uygulamaları vardır. Waterman, Smith ve Beyer (1976) biyolojik kökenlerin bazı quasi-metriklerini çalışmışlardır. Domiaty (1979), uzay ile zamanı "uzay-zaman sürekliliği" adı verilen yapıda birleştiren matematik modeli ile ilgili çalışmıştır. Malzeme biliminde ise, eski haline dönebilen alaşımlar (Mielke ve Roubicek, 2003), plastikler için modelleme (Mainik ve Mielke, 2005), malzeme hataları için modellemeler (Rieger ve Zimmer, 2005) ve gradient akış modelleri (Chenchiah vd., 2009) gibi uygulamaları vardır. Collins ve Zimmer (2007) yakınsaklık, tamlık ve kompaktlık kavramlarını asimetrik metrik uzaylarda çalışmışlardır. Cobzaş (2013) ise, asimetrik normlu uzaylarda fonksiyonel analiz başlıklı kitabında, asimetrik metrik uzaylar ve asimetrik normlu uzaylarda elde edilen sonuçları derlemiştir.

İdeal yakınsaklık kavramı $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin altkümelerinin ideali kavramı kullanılarak, reel sayı dizileri için metrik uzaylarda Kostyko vd.(2000) tarafından tanımlanmıştır. Kısaca, $\mathcal{I}$ -yakınsaklık olarak adlandırılan bu kavram klasik yakınsaklık, pozitif tamsayı kümelerinin doğal yoğunluğu

kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık ve daha birçok yakınsaklık çeşidini genelleyen bir yakınsaklık çeşididir. Günümüze kadar birçok matematikçi tarafından çalışılmış ve halen çalışılmaya devam edilmektedir. Asimetrik metrik uzaylarda ise reel sayı dizilerinin ideal yakınsaklığı kavramı Das vd. (2013) tarafından incelenmiştir.

Bolzano-Weierstrass teoremi $\mathbb{R}$ deki yakınsaklık için temel bir sonuçtur. Bu teoreme göre, $\mathbb{R}$ deki her bir sınırlı dizi yakınsak bir alt diziye sahiptir. $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi için buna denk bir ifade ise dizisel kompaktlık tanımıdır. Fridy (1993), istatistiksel yığılma noktaları kavramını kullanarak, Bolzano-Weierstrass teoreminin bir benzerini vermiştir. Klasik metrik uzaylarda verilen dizisel kompaktlık kavramının bir genellemesi olan istatistiksel kompaktlık kavramı, Çakallı tarafından 2008 yılında topolojik Hausdorff gruplarında bir dizisel metod G için G -dizisel kompaktlık olarak ve 2009 yılında ise topolojik Hausdorff gruplarında istatistiksel dizisel kompaktlık olarak verilmiştir. Boccuto vd. (2011), ideal dizisel kompaktlık kavramını tanımlayarak, metrik uzaylarda dizisel kompaktlık ve ideal dizisel kompaktlık kavramlarının denk olduğunu göstermişlerdir.

Fonksiyonel analizin önemli teoremlerinden biri olan Arzela-Ascoli teoremi (Arzela, 1895; Arzela, 1882-1883; Ascoli, 1883-1884, Engelking, 1977; Kelley, 1955; Munkres, 1975) bazı koşullar altında sürekli bir fonksiyon uzayında kompaktlığı karakterize eder. Bu koşullar içinde ana koşul, fonksiyonlar ailesinin eşsürekliliği koşuludur. Asimetrik metrik uzaylarda, bu teorem Collins ve Zimmer (2007) tarafından verilmiştir. Gregoriades ve Papanastassiou (2008) metrik uzaylarda, fonksiyon dizileri için ifade edilen ve eşsüreklilik kavramından daha genel bir kavram olan exhaustiveness kavramını kullanarak, Genelleştirilmiş Arzela Ascoli teoremini ifade ve ispat etmişlerdir. Ayrıca, exhaustiveness kavramı metrik uzaylarda Caserta ve Koçınac (2012) tarafından fonksiyon dizileri için istatistiksel exhaustiveness kavramına genellenmiştir.

3. ASİMETRİK METRİK UZAYLAR

Metrik uzayların bir genellemesi olan asimetrik metrik uzaylar, metrik uzaylardaki simetri aksiyomundan yoksun olan metrik uzaylar olarak tanımlanırlar.

Tanım 3.1. X bir küme olsun. Bir $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu;

(1) $d(x, y) \geq 0$ ve her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(2) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

ifadelerini sağlıyorsa, d fonksiyonu X üzerinde bir *asimetrik metrik* ve (X, d) ikilisi ise *asimetrik metrik uzay* olarak tanımlanır.

Eğer d , X üzerinde bir asimetrik metrik ise, X üzerinde bir d' metriği

$$d'(x, y) = 1/2 (d(x, y) + d(y, x))$$

şeklinde ifade edilir. Böylece, her metrik uzay bir asimetrik metrik uzaydır ve simetri özelliğini sağlayan her asimetrik metrik ise bir metriktir. Örneğin, her zaman saat yönünde alınan bir basit kapalı eğrinin yay uzunluğu bir asimetrik metrik olmasına rağmen bir metrik değildir (Reilly vd., 1982).

Asimetrik metrik uzaylarda simetri özelliğinin yokluğu klasik analizde bildiğimiz yakınsaklık, tamlık ve kompaktlık gibi kavramlar için sorun oluşturabildiğinden, bu kavramlar bu uzaylarda yeniden tanımlanmışlardır. Buna bağlı olarak, ileri ve geri olmak üzere bu kavramlar için birden fazla tanım ortaya çıkmıştır. Çünkü, bu uzayların üzerlerinde ileri topoloji ve geri topoloji olmak üzere iki topoloji vardır, bu nedenle Kelly (1963) bu uzayları bitopolojik uzaylar olarak adlandırmıştır.

Tanım 3.2. d den elde edilen τ_+ *ileri topoloji*, $x \in X, \varepsilon > 0$ için

$$B^+(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

ileri açık yuvarları ile üretilen bir topolojidir.

Benzer şekilde, d den elde edilen τ_- geri topoloji, $x \in X, \varepsilon > 0$ için

$$B^-(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$

geri açık yuvarları ile üretilen bir topolojidir (Colins ve Zimmer 2007; Mennucci 2004).

Böylece,

$$d^s(x, y) = d(x, y) \vee d(y, x) \quad (1.1)$$

simetrik metriğinden elde edilen τ topolojisi ise,

$$B(x, \varepsilon) := \{y : d(x, y) < \varepsilon\} = B^+(x, \varepsilon) \cap B^-(x, \varepsilon)$$

açık yuvarları ile üretilen bir topolojidir (Mennucci 2004).

Tek yönlü sokakları içeren taxicab geometri topolojisi asimetrik metrikler için gerçek hayattan bir örnektir. Çünkü tek yönlü sokaklar için bir A noktasından bir B noktasına bir yolla ulaşılyorken, B noktasından A noktasına ise farklı bir yol ya da yollarla ulaşılabilir. Yine Bodjanova (1981), dağlık bir ülkede ulaşım ile ilgili bir örnek vermiştir. Bu örnekte, X semtinden Y semtine bir otomobilin en kısa zamanda aldığı mesafe (veya minimum enerji harcadığı mesafe) ile Y semtinden X semtine en kısa zamanda aldığı mesafenin (veya minimum enerji harcadığı mesafenin) farklı olacağı belirtilmiştir.

3.1. Asimetrik Metrik Uzaylarda Yakınsaklık

Bu bölümde, asimetrik metrik uzaylarda yakınsaklık tanımı verilecek ve özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1.1. Bir (X, d) asimetrik metrik uzayında bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $x \in X$ e ileri yakınsak (geri yakınsak) olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0 \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0)$$

olmasıdır. $x_n \xrightarrow{f} x$ ($x_n \xrightarrow{b} x$) şeklinde gösterilir (Colins ve Zimmer, 2007).

Tanım 3.2 deki (1.1) ifadesinden, yakınsaklık ve ileri ile geri yakınsaklık arasındaki ilişki aşağıdaki önerme ile verilebilir:

Önerme 3.1.2. Bir (X, d) asimetrik metrik uzayında,

$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow d^s(x_n, x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ hem $x_n \xrightarrow{f} x$ hem de $x_n \xrightarrow{b} x$ (hem $d(x_n, x) \rightarrow 0$ ve hem de $d(x, x_n) \rightarrow 0$) dır (Mennucci, 2004).

Yani bir dizinin yakınsak olabilmesi için gerek ve yeter koşul o dizinin hem ileri yakınsak hem de geri yakınsak olmasıdır.

Yardımcı Teorem 3.1.3. Bir (X, d) asimetrik metrik uzayında bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, $x_0 \in X$ e ileri yakınsak ve $y_0 \in X$ e geri yakınsak ise, bu durumda $x_0 = y_0$ dır (Colins ve Zimmer, 2007).

Sonuç 3.1.4. Eğer bir dizinin ileri yakınsaklığı geri yakınsaklığını gerektiriyorsa ileri limit tektir (Colins ve Zimmer, 2007).

Aşağıdaki önerme ile Collins ve Zimmer (2007) ileri limitler ve geri limitler arasındaki ilişkiyi vermiştir.

Önerme 3.1.5. Kabul edelim ki, $c: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, her $x, y \in X$ için

$$d(y, x) \leq c(x, y)d(x, y) \tag{1.1.1}$$

aşağıdaki kısıtı sağlasın:

$$\forall x \in X \quad \exists \varepsilon > 0 \ni y \in B^+(x, \varepsilon) \Rightarrow c(x, y) \leq C(x)$$

(burada C yalnızca x e bağlı herhangi bir fonksiyon).

Bu durumda, ileri limitlerin varlığı geri limitlerin varlığını gerektirir ve böylece limitler tektir.

Aşağıdaki örnek , Önerme 3.1.5 deki (1.1.1) kısıtını sağlayan bir asimetrik metrik örneğidir.

Örnek 3.1.6. $\alpha > 0$ olsun.

$$d(x, y) := \begin{cases} y - x, & y \geq x \text{ ise,} \\ \alpha(x - y), & y < x \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ asimetrik metriği $C := \max\{\alpha, \frac{1}{\alpha}\}$ olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(y, x) \leq Cd(x, y)$ ifadesini sağlar (Colins ve Zimmer, 2007).

Aşağıdaki örnek, (1.1.1) kısıtını sağlamayan iyi bilinen bir asimetrik metrik uzay örneğidir.

Örnek 3.1.7. (*Sorgenfrey asimetrik metriği*)

$$d(x, y) := \begin{cases} y - x, & y \geq x \text{ ise,} \\ 1, & y < x \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ asimetrik metriği *Sorgenfrey asimetrik metriği* olarak bilinir. Burada, τ_+ , $\mathbb{R}$ üzerindeki alt limit topolojisi ve τ_- , $\mathbb{R}$ üzerindeki üst limit topolojisidir, yani; $\varepsilon \leq 1$ için $B^+(x, \varepsilon) = [x, x + \varepsilon)$ ve $B^-(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x]$ sağlanır.

Bu metrikte, örneğin sabit $x \in \mathbb{R}$ için $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = x + \frac{1}{n}$ şeklinde tanımlanan bir dizi ileri yakınsak, ancak, geri yakınsak olmayan bir dizidir. Gerçekten,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x + \frac{1}{n} - x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

olduğundan, dizi $x \in X$ e ileri yakınsaktır. Ancak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

olduğundan, dizi $x \in X$ e geri yakınsak değildir. Böylece, bu metrikte ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirmez (Colins ve Zimmer, 2007).

Tanım 3.1.8. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, bir (X, d) asimetrik metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $k \geq n \geq N$ için $d(x_n, x_k) < \varepsilon$ ($d(x_k, x_n) < \varepsilon$) olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ mevcutsa, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine *ileri Cauchy* (*geri Cauchy*) *dizisi* denir (Colins ve Zimmer, 2007).

İleri(geri) Cauchy dizileri, sol(sağ) K -Cauchy dizileri olarak da adlandırılır (Reilly vd., 1982; Kelly, 1963).

İleri yakınsaklık, ileri Cauchy olmayı gerektirmez (Kelly 1963).

Örnek 3.1.9. Yukarıda, Örnek 3.1.7 de verilen dizi ileri yakınsak olmasına rağmen, bir ileri Cauchy dizisi değildir (Colins ve Zimmer, 2007).

Şimdi de asimetrik metrik uzaylarda süreklilik tanımı hatırlatılacaktır. Başta da belirtildiği üzere, süreklilik kavramı için de birden fazla tanım vardır.

Tanım 3.1.10. (X, d_x) ve (Y, d_y) asimetrik metrik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için $y \in B^+(x, \delta) \Rightarrow f(y) \in B^+(f(x), \varepsilon)$ ($f(y) \in B^-(f(x), \varepsilon)$) olacak şekilde bir $\delta > 0$ mevcutsa f fonksiyonu $x \in X$ de $ff - \text{süreklidir}$ ($fb - \text{süreklidir}$) denir (Colins ve Zimmer, 2007).

Tanım 3.1.11. (*Sürekliliğin dizisel tanımı*). Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun $x \in X$ de $ff - \text{süreklili}$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul (X, d_x) de $x_n \xrightarrow{f} x$ iken (Y, d_y) de $f(x_n) \xrightarrow{f} f(x)$ olmasıdır. Bu ifadenin benzeri, diğer üç tip süreklilik

(fb –süreklilik, bf –süreklilik ve bb –süreklilik) için de sağlanır (Colins ve Zimmer, 2007).

3.2. Asimetrik Metrik Uzaylarda Kompaktlık ve Tamlık

Bu bölümde asimetrik metrik uzaylarda tamlık ve kompaktlık kavramları hatırlatılacak ve bu kavramlarla ilgili bazı teoremler verilecektir.

Tanım 3.2.1. Bir $S \subset X$ kümesi,

- (1) Eğer S nin ileri topolojideki her açık örtüsü sonlu bir altörtüye sahipse *ileri kompakt*,
- (2) $\bar{S}$, S nin ileri topolojideki kapanışı olmak üzere, eğer $\bar{S}$ ileri kompakt ise *ileri göreceli kompakt*,
- (3) Eğer X deki her dizi ileri yakınsak bir altdiziye sahipse, *ileri dizisel kompakt*,
- (4) Her ileri Cauchy dizisi ileri yakınsak ise *ileri tam* olarak adlandırılır.

Yukarıdaki tanımların geri olanları, her bir tanımda ‘ileri’ ifadesi ile ‘geri’ ifadesi yer değiştirilerek verilebilir (Colins ve Zimmer, 2007).

Sonuç 3.2.2. Eğer uzay hem ileri hem de geri kompakt ise ileri ve geri topolojiler denktir (Mennucci, 2004).

Eğer kompaktlık mevcutsa, limitler tektir ve geri limitlerin varlığı, ileri limitlerin varlığını gerektirir. Aşağıdaki Yardımcı Teorem bunu ifade etmektedir.

Yardımcı Teorem 3.2.3. $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ bir asimetrik metrik olsun. Eğer (X, d) ileri dizisel kompakt ve $x_n \xrightarrow{b} x$ ise, bu durumda $x_n \xrightarrow{f} x$ dir (Colins ve Zimmer, 2007).

Yardımcı Teorem 3.2.4. (X, d) bir asimetric metrik uzay olsun. Eğer her ileri Cauchy dizisi ileri yakınsak bir altdiziye sahipse (X, d) asimetric metrik uzayı ileri tamdır (Colins ve Zimmer, 2007).

Şimdi de ileri kompaktlık ve ileri dizisel kompaktlık arasındaki ilişki verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.2.5. X ileri kompakt kümesi ileri dizisel kompakttır (Colins ve Zimmer, 2007).

Yukarıdaki ifadenin ters yönü için total sınırlılık tanımına ihtiyaç vardır.

Tanım 3.2.6. Bir $S \subset X$ kümesi, eğer her bir $\varepsilon > 0$ için sonlu çoklukta ε yarıçaplı ileri yuvarla örtülebiliyorsa *ileri total sınırlıdır* denir.

Yardımcı Teorem 3.2.7. Eğer (X, d) ileri dizisel kompakt ve ileri total sınırlı ise, bu durumda X ileri kompakttır (Colins ve Zimmer, 2007).

Yardımcı Teorem 3.2.8. Eğer (X, d) ileri dizisel kompakt ve ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektiriyorsa, bu durumda X ileri total sınırlıdır (Colins ve Zimmer, 2007).

Yukarıda verilen Yardımcı Teorem 3.2.7 ve Yardımcı Teorem 3.2.8, simetrik hali Munkres (1975) tarafından verilen önermelerin asimetric benzerleridir.

Önerme 3.2.9. Bir (X, d) asimetric metrik uzayının ileri kompakt olması için gerek ve yeter koşul onun ileri tam ve ileri total sınırlı olmasıdır (Reilly vd., 1982; Colins ve Zimmer, 2007).

3.3. Asimetrik Metrik Uzaylarda Eşsüreklilik, Kompaktlık ve Arzela Ascoli Teoremi

Bu bölümde, asimetrik metrik uzaylarda eşsüreklilik kavramı hatırlatılacak ve asimetrik metrik uzaylarda Colins ve Zimmer (2007) tarafından verilen Arzela-Ascoli teoremi ifade edilecektir.

Tanım 3.3.1. (X, d_x) ve (Y, d_y) asimetrik metrik uzaylar ve $\mathcal{F}$, X den Y ye fonksiyonların bir kümesi olsun. Eğer her $y \in Y$ ve her $f \in \mathcal{F}$ için $d_x(x, y) < \delta$ iken $d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ($d_y(f(y), f(x)) < \varepsilon$) olacak şekilde her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ mevcut oluyorsa, $\mathcal{F}$ ileri eşsürekli (geri eşsürekli) olarak adlandırılır (Colins ve Zimmer, 2007).

Y^X ; X den Y ye fonksiyonların uzayını, $C(X, Y)$ ise X den Y ye tüm $\mathcal{F}$ – sürekli fonksiyonların kümesini belirtsin. $\bar{d}(x, y) := \min\{d(x, y), 1\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, d , Y üzerindeki asimetrik metrik olmak üzere, Y^X üzerindeki düzgün metrik,

$$\bar{\rho}(f, g) := \sup\{\bar{d}(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

şeklindedir. Bu metrik, Y^X üzerindeki düzgün topolojiyi üretir (Colins ve Zimmer, 2007).

Tanım 3.3.2. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reel değerli bir fonksiyon dizisi ve f , X den Y ye bir fonksiyon olsun.

(1) Her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ mevcut öyle ki $\forall n \geq N$ için $d_y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ ($d_y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$) oluyorsa, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi f e ileri noktasal yakınsaktır (geri noktasal yakınsaktır) denir.

(2) Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ mevcut öyle ki her $x \in X$ ve her $n \geq N$ için $d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ ($d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$) oluyorsa, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi f e ileri düzgün yakınsaktır (geri düzgün yakınsaktır) denir.

Yardımcı Teorem 3.3.3. Kabul edelim ki (Y, d) ileri kompakt ve bu metrikte ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Bu durumda,

(1) Eğer bir $\mathcal{F} \in C(X, Y)$ kümesi ileri eşsüreklili ise, aynı zamanda geri eşsüreklidir.

(2) Eğer bir $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$ dizisi düzgün geri yakınsak ise düzgün ileri yakınsaktır (ve tersi de doğrudur) (Colins ve Zimmer, 2007).

Aşağıdaki örnek, Yardımcı Teorem 3.3.3 de (1) ifadesinin Y üzerinde kompaktlık kabülü olmaksızın yanlış olduğunu gösterir.

Örnek 3.3.4. $X = [0, 1]$ ve $Y = [1, \infty)$ aşağıdaki metrikler ile verilsin:

$$d_X(x, y) := \begin{cases} y - x, & y \geq x \text{ ise,} \\ 1, & y < x \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_Y(x, y) := \begin{cases} y - x, & y \geq x \text{ ise,} \\ e^x - e^y, & y < x \text{ ise} \end{cases}$$

Burada Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirir, ancak uzay ileri ya da geri kompakt değildir. $(Y, d_Y), \mathbb{R}$ üzerinde klasik topolojiye sahiptir.

$$f_n : X \rightarrow Y, x \rightarrow x + n$$

ile tanımlansın. $x \in X, n \in \mathbb{N}$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer $d_X(x, y) < \delta \leq 1$ ise $x \leq y$ ve $d_X(x, y) = y - x$ dir. Bu durumda, $d_Y(f_n(x), f_n(y)) = y + n - (x + n) = y - x < \delta$ olup, $\delta := \min\{\varepsilon, 1\}$ seçilirse, $\mathcal{F} := \{f_n\}$ ileri eşsüreklili olur. Diğer taraftan, $d_Y(f_n(y), f_n(x)) = e^{y+n} - e^{x+n} = e^n(e^y - e^x)$ ve böylece geri eşsüreklilik için $\delta \leq \log\left(\frac{\varepsilon}{e^n} + e^x\right) - x$ seçilmelidir. $n \rightarrow \infty$ iken $\delta \rightarrow 0$ olup, δ sayısı n den

bağımsız seçilemez. Bu nedenle, $\mathcal{F}$ geri eşsürekli değildir (Colins ve Zimmer, 2007).

Yardımcı Teorem 3.3.5. (X, d_X) ve (Y, d_Y) ileri topolojileri ile birlikte ikisi de kompakt olan asimetric metrik uzaylar olsun. Kabul edelim ki, ayrıca (Y, d_Y) de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Eğer $C(X, Y)$ nin bir altkütmesi $\mathcal{F}$ ileri eşsürekli ise $\mathcal{F}, d_Y$ ye karşılık gelen düzgün metrik $\bar{\rho}$ altında total ileri sınırlıdır (Colins ve Zimmer, 2007).

Arzela-Ascoli teoremi Y ileri tam olduğunda, $C(X, Y)$ ileri eşsürekli fonksiyonlar uzayının ileri tam olması gerçeğine dayanır. Bu durum simetric halde doğrudur, ancak eğer Y ileri kompakt olmazsa asimetric halde yanlıştır.

Yardımcı Teorem 3.3.6. Eğer (Y, d) asimetric metrik uzayı ileri kompakt ve ileri yakınsaklığın geri yakınsaklığı gerektirmesi özelliğine sahipse, Y^X uzayı, d ye bağlı $\bar{\rho}$ düzgün metriğinde tamdır (Colins ve Zimmer, 2007).

Yardımcı Teorem 3.3.7. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar olsun ve Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığa denk olsun. Eğer bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X, Y)$ dizisi f ye düzgün ileri yakınsak ise $f \in C(X, Y)$ dir (Colins ve Zimmer, 2007).

Bu ifade, eğer ileri ve geri yakınsaklık hipotezi kaldırılırsa, asimetric durumda yanlıştır. Örnek 3.3.8 buna bir ters örnektir, ki bu ileri yakınsaklığın geri yakınsaklığı gerektirmediği metrikler için ileri limitlerin tek olmamasına dayanır. Örnek 3.3.9 da ise bu asimetric varsayım düşünülmezse sürekli fonksiyonlar dizisinin düzgün limitinin, limit tek olsa bile süreksiz olabileceğini gösterir.

Örnek 3.3.8. $X = [0, 1]$ Öklid metriği ile donatılmış ve $Y \subset \mathbb{R}^2$ kümesi

$$Y := \{(y_1, y_2) : y_1 = 0 \text{ ve } y_2 \in (0, 1]\} \cup \{(-1, 0)\} \cup \{(1, 0)\}$$

olsun. Y üzerindeki metrik Sorgenfrey metriği olarak seçilsin ve şöyle genişletilsin, $y_2 > 0$ olmak üzere (y_1, y_2) için

$$d((y_1, y_2), (\pm 1, 0)) = d((\pm 1, 0), (\mp 1, 0)) = 1, \quad d((\pm 1, 0), (y_1, y_2)) = y_2.$$

Y bir asimetrik metrik uzay olup aynı zamanda Hausdorftur.

$$f : X \rightarrow Y, x \rightarrow \begin{cases} (-1, 0), x = 0 \text{ ise} \\ (1, 0), x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun.

$f_n : X \rightarrow Y, x \rightarrow (0, \frac{1}{n})$ fonksiyon dizisi f süreksiz limitine düzgün ileri yakınsaktır.

Asimetrik metrik uzaylarda, limitlerin tek olmasının gerekmediğinin bir sonucu olarak, bu örnek için sonsuz çoklukta düzgün limit vardır. Örneğin, $\tilde{f} : X \rightarrow Y, x \rightarrow (1, 0)$ sürekli olmak üzere $f_n, \tilde{f}$ ya düzgün ileri yakınsar (Colins ve Zimmer, 2007).

Örnek 3.3.9. $X = [0, 1]$, Öklid metriği ile donatılmış ve

$$Y := \{(y_1, y_2) : 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1\}$$

olsun. $\|\cdot\|$ metriği $\mathbb{R}^2$ deki Öklid metriği olmak üzere, Y aşağıdaki metrikle donatılmış olsun.

$$d(y, y') = \begin{cases} 0, y = y' \text{ ise} \\ \|y - y'\|, y_1 \leq y'_1 \text{ ve } y'_1 \neq 0 \text{ ise} \\ 1, \text{diğer} \end{cases}$$

bir asimetrik metriktir. Bu durumda,

$$f_n : X \rightarrow Y, x \rightarrow \left(\frac{1}{n}, x\right)$$

fonksiyon dizisi

$$f : X \rightarrow Y, x \rightarrow (0, x)$$

olmak üzere bir tek limite ileri düzgün yakınsar. Dahası, f süreksiz iken, $f_n, \forall n \in \mathbb{N}$ için süreklidir (Colins ve Zimmer, 2007).

Önerme 3.3.11. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar olsun ve Y ileri kompakt ve ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Bu durumda, $C(X, Y)$ kümesi d_Y deki düzgün $\bar{\rho}$ metriğinde tamdır (Colins ve Zimmer, 2007).

Tanım 3.3.12. (Y, d_Y) asimetrik metrik uzay $\mathcal{F}$, $C(X, Y)$ nin altkümesi olsun. Eğer her bir $a \in X$ ve $y \in Y$ için $\{d_Y(y, f(a)) : f \in \mathcal{F}\}$ kümesi sınırlı, yani, her $f \in \mathcal{F}$ için $d_Y(y, f(a)) \leq M$ oluyorsa, $\mathcal{F}$, d_Y altında ileri noktasal sınırlıdır denir (Colins ve Zimmer, 2007).

Teorem 3.3.13. (Arzela-Ascoli) (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar olsun. Kabul edelim ki, X ileri kompakt, kapalı sınırlı kümeler Y de ileri kompakt ve Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. $C(X, Y)$, d_Y deki asimetrik metrik ile ilişkili $\bar{\rho}$ düzgün metiriği ile donatılsın. Bu durumda, $C(X, Y)$ nin bir $\mathcal{F}$ altkümesi, eğer ileri eşsüreklili ve d_Y altında ileri noktasal sınırlı ise ileri göreceli kompakttır (Colins ve Zimmer, 2007).

Eğer yukarıdaki teoremden, Y asimetrik metriğinde ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirmezse Arzela-Ascoli teoremi sağlanmaz.

Örnek 3.3.14. Örnek 3.3.10 daki durumda, $\mathcal{F} := \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ileri göreceli kompakt değildir. Çünkü, Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirmediğinden bu Arzela-Ascoli teoreminin kabulü ile çelişir.

3.4. Asimetrik Metrik Uzaylarda Bazı Yakınsaklık Çeşitleri

Bu bölümde, ilk önce metrik uzaylarda $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin altkümelerinin ideali kavramı hatırlatılacak ve daha sonra bu kavram kullanılarak, Das vd. (2013) tarafından asimetrik metrik uzaylarda tanımlanan ideal yakınsaklık, ideal Cauchy dizileri ve $\mathcal{I}^*$ -yakınsaklık kavramları hatırlatılacaktır.

Temeli pozitif tamsayılar kümesinde Buck (1953) tarafından tanımlanan asimptotik (doğal) yoğunluk kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık düşüncesi ilk olarak 1935 yılında Varşova'da Zygmund 'un monografisinin ilk baskısında hemen hemen yakınsaklık adı altında verilmiştir ve 1951 yılında da Fast ve Steinhaus tarafından birbirlerinden bağımsız olarak tanımlanmış ve özellikleri Fridy (1985, 1993) ve Šalát (1980) tarafından verilmiştir. Bu kavramın çeşitli uygulamaları, trigonometrik serilerde Zygmund (1979), toplanabilme teorisinde Freedman ve Sember (1981), sayılar teorisinde Erdős ve Tenenbaum (1989), kuvvetli integral toplanabilmede Connor ve Swardson (1993), ölçüm teorisinde Miller (1995), Turnpike teoride Pehlivan ve Mamedov (2000) ve topolojik uzaylarda ise Di Maio ve Kočinac (2008) tarafından verilmiştir.

Tanım 3.4.1 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir (X, d) asimetrik metrik uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\partial(\{n : d(x, x_n) \geq \varepsilon\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{n : d(x, x_n) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $x \in X$ e *ileri istatistiksel yakınsaktır* denir ve $f-st-\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ile gösterilir.

Benzer şekilde, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir (X, d) asimetrik metrik uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{n : d(x_n, x) \geq \varepsilon\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{n : d(x_n, x) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $x \in X$ e *geri istatistiksel yakınsaktır* denir ve $b-st-\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ile gösterilir.

Tanım 3.4.2. (İdeal). Y boş olmayan bir küme olsun. Eğer Y nin altkümelerinin $\mathcal{I} \subset 2^Y$ ailesi

- i) $\emptyset \in \mathcal{I}$,
- ii) $A, B \in \mathcal{I}$ olduğunda $A \cup B \in \mathcal{I}$,
- iii) $A \in \mathcal{I}$ için $B \subseteq A$ olduğunda $B \in \mathcal{I}$

koşullarını sağlıyorsa $\mathcal{I}$ ya Y de bir *ideal* denir (Kuratowski, 1966).

Tanım 3.4.3. $\mathcal{I} \subset 2^Y$ bir öz ideal olsun. Eğer her $x \in Y$ için $\{x\} \in \mathcal{I}$ ise $\mathcal{I}$ idealine *uygun ideal* denir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 3.4.4. Eğer $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ ($i \neq j, i, j = 1, 2, \dots$) ve $A_i \in \mathcal{I}$ ise her $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \Delta B_i$ sonlu küme ve $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{I}$ olacak şekilde B_i kümeleri mevcut ise $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ideali *(AP) özelliğine* sahiptir denir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 3.4.5. (Filtre). Y boş olmayan bir küme olsun. Eğer $\mathcal{F} \subset 2^Y$ kümeler ailesi için

- i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- ii) Her $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$,
- iii) Her $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subset B \subset Y$ için $B \in \mathcal{F}$

koşulları gerçekleşiyorsa $\mathcal{F}$ kümeler ailesine Y kümesinde bir *filtre* denir (Nagata, 1974).

$\mathcal{I} \subset 2^Y$ idealinin bir öz ideal olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathcal{F} \setminus \mathcal{I} := \{M \subset Y : \exists A \in \mathcal{I} : M = Y \setminus A\}$$

kümeler ailesinin Y kümesinde bir filtre olmasıdır (Kostyrko vd., 2000).

3.4.1. Asimetrik Metrik Uzaylarda $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{I}^*$ -Yakınsaklık

Asimetrik metrik uzaylarda reel sayı dizilerinin ideal yakınsaklığı kavramı Das vd. (2013) tarafından incelenmiştir.

Tanım 3.4.1.1. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir (X, d) asimetrik metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer, her bir $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : d(x, x_n) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ oluyorsa, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $x \in X$ elemanına $\mathcal{I}$ idealine bağlı olarak ileri yakınsaktır (veya kısaca ileri $\mathcal{I}$ -yakınsaktır) denir. $F\mathcal{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{F\mathcal{I}} x$ ile gösterilir.

Benzer şekilde, her bir $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ oluyorsa, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $x \in X$ elemanına $\mathcal{I}$ idealine bağlı olarak geri yakınsaktır (veya kısaca geri $\mathcal{I}$ -yakınsaktır) denir. $B\mathcal{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{B\mathcal{I}} x$ ile gösterilir.

Eğer, $\mathcal{I}$ uygun bir ideal ise, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin ileri (geri) yakınsaklığı onun ileri (geri) $\mathcal{I}$ -yakınsaklığını gerektirir.

Teorem 3.4.1.2. Eğer bir (X, d) asimetrik metrik uzayında bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, $x_0 \in X$ a ileri $\mathcal{I}$ -yakınsak ve $y_0 \in X$ e geri $\mathcal{I}$ -yakınsak ise, bu durumda $x_0 = y_0$ dir.

Genelde ileri $\mathcal{I}$ -yakınsaklık geri $\mathcal{I}$ -yakınsaklığı gerektirmez.

Teorem 3.4.1.3. (X, d) asimetric metrik uzayında (1.1.1) özelliği sağlansın. Bu durumda, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin ileri $\mathcal{I}$ -yakınsaklığı geri $\mathcal{I}$ -yakınsaklığını gerektirir.

Tanım 3.4.1.4. $X = (X, d)$ asimetric metrik uzay $S \subseteq X$ olsun. Eğer S deki her $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, $\{n_k\} \notin \mathcal{I}$ olacak şekilde limiti S de olan ileri yakınsak bir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ alt dizisine sahipse, S kümesi *ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt* denir.

Teorem 3.4.1.5. (X, d) asimetric metrik uzayı ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt olsun. Bu durumda, $B \mathcal{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow F \mathcal{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ olur.

Tanım 3.4.1.6. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir (X, d) asimetric metrik uzayında bir dizi olsun. Bu dizinin x e *ileri $\mathcal{I}^*$ -yakınsak* olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\lim_{\substack{k \in M \\ k \rightarrow \infty}} d(x, x_{m_k}) = 0$ olacak şekilde en az bir $M \in \mathcal{F} \mathcal{I}$ kümesinin mevcut olmasıdır. $F \mathcal{I}^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ile gösterilir.

Geri $\mathcal{I}^$ -yakınsaklık* benzer şekilde tanımlanır.

Eğer bir (X, d) asimetric metrik uzayında bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, $x_0 \in X$ e ileri $\mathcal{I}^*$ -yakınsak ve $y_0 \in X$ e geri $\mathcal{I}^*$ -yakınsak ise, bu durumda $x_0 = y_0$ dır.

Ayrıca, genelde ileri $\mathcal{I}^*$ -yakınsaklık geri $\mathcal{I}^*$ -yakınsaklığı gerektirmez.

Teorem 3.4.1.7. (X, d) asimetric metrik uzayında (1.1.1) özelliği sağlansın. Bu durumda, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin ileri $\mathcal{I}^*$ -yakınsaklığı geri $\mathcal{I}^*$ -yakınsaklığını gerektirir.

Teorem 3.4.1.8. $\mathcal{I}$ uygun bir ideal olsun. Eğer $F \mathcal{I}^* - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ise, bu durumda $F \mathcal{I} - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ dir. Bu, geri hali için de doğrudur.

$F \mathcal{I} (B \mathcal{I})$ -yakınsaklık ile $F \mathcal{I}^* (B \mathcal{I}^*)$ -yakınsaklık arasındaki denklik (AP) özelliği ile verilmektedir.

Teorem 3.4.1.9. $\mathcal{I}$ uygun ideal olsun.

(1) Eğer $\mathcal{I}$ ideali (AP) özelliğine sahip ve (X, d) bir asimetric metrik uzay ise, bu durumda X deki elemanların keyfi bir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi için,

$F \mathcal{I} (B \mathcal{I})\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \zeta$ ifadesi $F \mathcal{I}^*(B \mathcal{I}^*)\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \zeta$ ifadesini gerektirir.

(2) Eğer (X, d) en az bir ileri (geri) yığılma noktasına sahip ve ζ, X in bir ileri (geri) yığılma noktası ve X deki elemanların keyfi bir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ve her bir $\zeta \in X$ için $F \mathcal{I} (B \mathcal{I})\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \zeta$ ifadesi $F \mathcal{I}^*(B \mathcal{I}^*)\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \zeta$ ifadesini gerektiriyorsa, bu durumda, $\mathcal{I}$ ideali (AP) özelliğine sahiptir.

Tanım 3.4.1.10. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bir (X, d) asimetric metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve herhangi $k \in M$ için $\{n \in \mathbb{N} : d(x_k, x_n) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $M = M(\varepsilon) \in \mathcal{F} \mathcal{I}$ kümesi mevcutsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi bir ileri $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisidir denir ve $F \mathcal{I}$ -Cauchy ile belirtilir.

Benzer şekilde, her $\varepsilon > 0$ ve herhangi $k \in M$ için $\{n \in \mathbb{N} : d(x_n, x_k) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $M = M(\varepsilon) \in \mathcal{F} \mathcal{I}$ kümesi mevcutsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi bir geri $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisidir denir ve $B \mathcal{I}$ -Cauchy ile belirtilir.

$\mathcal{I}$ -yakınsaklıkta olduğu gibi, genel olarak, ileri $\mathcal{I}$ -Cauchy şartı geri $\mathcal{I}$ -Cauchy şartını gerektirmez, onlar ancak, (X, d) asimetric metrik uzayı (1.1.1) özelliğini sağlaması halinde denk olurlar.

İleri yakınsaklık ileri Cauchy şartını gerektirmediği gibi, aynı zamanda, genel olarak, ileri $\mathcal{I}$ -yakınsaklık da ileri $\mathcal{I}$ -Cauchy şartını gerektirmez.

Teorem 3.4.1.11. (X, d) , (1.1.1) özelliğini sağlayan bir asimetric metrik uzay olsun. Bu durumda, eğer bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $F \mathcal{I} (B \mathcal{I})$ -yakınsak ise $F \mathcal{I} (B \mathcal{I})$ -Cauchydir.

Yukarıdaki koşul yeterli, ancak gerekli bir koşul değildir.

Teorem 3.4.1.12. (X, d) asimetric metrik uzayının ileri(geri) tam olabilmesi için gerek ve yeter koşul X deki her $F \mathcal{I} (B \mathcal{I})$ -Cauchy dizisinin X de $F \mathcal{I} (B \mathcal{I})$ -yakınsak olmasıdır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Asimetrik Metrik Uzaylarda Exhaustiveness

Bu bölümde, ilk olarak, metrik uzaylarda Gregoriades ve Papanastassiou (2008) tarafından fonksiyon dizileri için ifade edilen ve eşsüreklilik kavramından daha genel bir kavram olan exhaustiveness kavramı asimetrik metrik uzaylarda incelenecek ve bu kavrama ilişkin bazı sonuçlar elde edilecektir.

Tanım 4. 1. 1. (X, d_x) ve (Y, d_y) asimetrik metrik uzaylar, $x \in X$, $\mathcal{F}$; X den Y ye fonksiyonların bir ailesi ve $f_n : X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$ olsun.

(1) $\mathcal{F}$ sonsuz bir küme olmak üzere, her $\varepsilon > 0$, her $y \in B^+(x, \delta)$ ve her $f \in \mathcal{F} \setminus K$ için $d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ($d_y(f(y), f(x)) < \varepsilon$) olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ ve $\mathcal{F}$ in sonlu bir K altkümesi mevcut ise $\mathcal{F}$ ailesi x de *ileri exhaustive* (*geri exhaustive*) denir.

(2) $\mathcal{F}$ sonlu olsun. Eğer $\mathcal{F}$ in her bir elemanı x de ff – sürekli (fb – sürekli) bir fonksiyon ise $\mathcal{F}$, x de *ileri exhaustive* (*geri exhaustive*) denir.

(3) Bir (f_n) fonksiyon dizisinin x de *ileri exhaustive* (*geri exhaustive*) olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$, her $y \in B^+(x, \delta)$ ve her $n \geq n_0$ için $d_y(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ ($d_y(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon$) olacak şekilde en az bir $\delta > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcut olmasıdır. Bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin X de *ileri exhaustive* (*geri exhaustive*) olması için gerek ve yeter koşul $\forall x \in X$ de *ileri exhaustive* (*geri exhaustive*) olmasıdır.

UYARI. İleri eşsürekliliğin, ileri exhaustive olmayı gerektirdiği açıktır. Gerçekten, Tanım 4.1.1 (1) deki sonlu K kümesi her $\varepsilon > 0$ için boş küme olarak alınırsa bir ileri eşsüreklili aile ileri exhaustivedir.

UYARI. Yukarıdaki uyarının tersi doğru değildir. Yani, $\mathcal{F}$ in ileri exhaustive olması $\mathcal{F} \setminus K$ ileri eşsüreklilik olacak şekilde $\mathcal{F}$ in sonlu bir K altkümesi olmasını gerektirmez, çünkü tanımda K kümesi ε a bağlıdır.

Benzer uyarılar geri exhaustive ve geri eşsüreklilik için de söylenebilir.

Önerme 4.1.2. (X, d_x) ve (Y, d_y) asimetric metrik uzaylar, $x \in X$, $\mathcal{F}$; X den Y ye fonksiyonların bir sonsuz ailesi olsun. Bu durumda,

(i) $\mathcal{F}$ in x de ileri eşsüreklilik olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{F}$ in x de ileri exhaustive ve herbir $f \in \mathcal{F}$ için f lerin x de ff – süreklilik olmasıdır.

(ii) $\mathcal{F}$ in x de geri eşsüreklilik olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{F}$ in x de geri exhaustive ve herbir $f \in \mathcal{F}$ için f lerin x de fb – süreklilik olmasıdır.

İspat. (i) i ispatlamak yeterlidir, (ii) nin ispatı benzer şekilde verilebilir.

Gereklik kısmı, tanımlardan açıktır.

Ters yönü için, $\varepsilon > 0$ olsun. $\mathcal{F}$, x de ileri exhaustive olduğundan, her $y \in B^+(x, \delta')$ ve her $f \in \mathcal{F} \setminus K$ için $d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta' > 0$ ve $\mathcal{F}$ in K sonlu altkümesi mevcuttur. f, x de ff – süreklilik olduğundan, bir $\delta(f) > 0$ vardır öyle ki her $y \in B^+(x, \delta(f))$ için $d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ elde edilir. $\delta := \min\{\delta', \delta(f) : f \in K\} > 0$ olarak seçilsin. Bu durumda, her $y \in B^+(x, \delta)$ ve her $f \in \mathcal{F}$ için $d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ olur. Böylece, $\mathcal{F}$, x de ileri eşsüreklidir ■.

Aşağıdaki örnek, bir ileri exhaustive fonksiyonlar ailesi $\mathcal{F}$ nin her bir elemanın sürekli olmak zorunda olmadığını gösterir.

Örnek 4.1.3. $X = \mathbb{R}$ ve $Y = [0, \frac{1}{2}]$ aşağıdaki metriklerle birlikte verilsin;

$$d_x(x, y) = d_y(x, y) := \begin{cases} y - x, & y \geq x \text{ ise,} \\ 1, & y < x \text{ ise} \end{cases} .$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \rightarrow Y$,

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{3n}, & x \leq 0 \text{ ise,} \\ \frac{1}{2n}, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlansın.

Hiçbir f_n , $x=0$ noktasında sürekli değildir. Buna rağmen, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $x=0$ da ileri exhaustivedir. Gerçekten, $\varepsilon > 0$ olsun. $\delta > 0$ olmak üzere, her $y \in B^+(0, \delta) = [0, \delta)$ için $n_0 > \frac{1}{6\varepsilon}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için $d_Y(f_n(0), f_n(y)) = f_n(y) - f_n(0) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n} = \frac{1}{6n} < \varepsilon$ elde edilir.

O halde, sonuç olarak, bir ileri exhaustive fonksiyonlar ailesi $\mathcal{F}$ nin her bir elemanı sürekli olmak zorunda değildir.

Aşağıdaki Yardımcı Teorem ileri exhaustive olma ve geri exhaustive olma arasındaki ilişkiyi vermektedir. Bu önerme, Colins ve Zimmer (2007) tarafından eşsüreklilik için verilen ifadenin exhaustiveness kavramına genellenmiş hali olduğundan, ispat benzer yolla verilecektir.

Yardımcı Teorem 4.1.4. (Y, d_Y) ileri kompakt asimetric metrik uzay olsun ve Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. Bu durumda, $\mathcal{F} \in Y^X$ ileri exhaustive ise aynı zamanda geri exhaustivedir.

İspat. Yardımcı Teorem 3.2.5. den ileri kompaktlık ileri dizisel kompaktlığı gerektirir. İleri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirdiğinden, uzay geri dizisel kompakttır. Yardımcı Teorem 3.2.3. den geri yakınsaklık ileri yakınsaklığı gerektirir ve böylece Yardımcı Teorem 3.2.7 ve Yardımcı Teorem 3.2.8 in geri versiyonları yardımıyla uzayın geri kompakt olduğu sonucuna varılır. Sonuç 3.2.2 den, eğer uzay hem ileri kompakt hem de geri kompakt ise bu durumda

ileri ve geri topolojiler denktir. Bu durumda, asimetric metrik uzaylarda bir topoloji de exhaustive olma diğ er topolojide de exhaustive olmayı gerektirir ■.

Yardımcı Teorem 4.1.4 de ileri yakınsaklığ ın geri yakınsaklığ ı gerektirmesi koşulu ortadan kaldırılırsa, ileri exhaustive olmanın geri exhaustive olmayı gerektirmeyeceğ i yukarıda verilen Örnek 4.1.3 ile görüleb ilir.

Gerçekten, Y üzerindeki asimetric metrikte ileri yakınsaklığ ın geri yakınsaklığ ı gerektirmeyeceğ i açıktır ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $x=0$ da geri exhaustive değ ildir. Çünkü, $\delta > 0$ olmak üzere, her $y \in B^+(0, \delta) = [0, \delta)$ için $d_Y(f_n(y), f_n(0)) = 1$ dir.

Eğ er, Y üzerindeki metrikte, ileri yakınsaklığ ın geri yakınsaklığ ı gerektirmesi koşulu sağ lanırsa, ileri exhaustive olmanın geri exhaustive olmayı gerektireceğ ini aşığ ıdaki örnek yardımıyla göreb iliriz.

Örnek 4.1.5. Örnek 4.1.3 de Y üzerindeki metrik aşığ ıdaki gibi verilsin:

$$d_Y(x, y) := \begin{cases} y - x, & y \geq x \text{ ise,} \\ \frac{1}{2}(x - y), & y < x \text{ ise} \end{cases}.$$

Bu asimetric metrikte ileri yakınsaklık geri yakınsaklığ ı gerektirir.

$\varepsilon > 0$ olsun. $\delta > 0$ olmak üzere, her $y \in B^+(0, \delta) = [0, \delta)$ için $n_0 > \frac{1}{6\varepsilon}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için

$$d_Y(f_n(0), f_n(y)) = f_n(y) - f_n(0) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n} = \frac{1}{6n} < \varepsilon \text{ elde edilir. Böylece, } (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

fonksiyon dizisi $x=0$ da ileri exhaustivedir.

Şimdi de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin $x=0$ da geri exhaustive olduğ unu gösterelim.

$\varepsilon > 0$ olsun. $\delta > 0$ olmak üzere, her $y \in B^+(0, \delta) = [0, \delta)$ için $n_0 > \frac{1}{12\varepsilon}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için $d_Y(f_n(y), f_n(0)) = \frac{1}{2}(f_n(y) - f_n(0)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{6n} < \varepsilon$ elde edilir. Böylece, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $x = 0$ da geri exhaustivedir.

Bir sonraki teorem ile bir ileri exhaustive fonksiyon dizisinin ileri noktasal limitinin, ancak Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirdiğinde sürekli olduğu söylenebilir.

Teorem 4.1.6. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar olmak üzere Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. f ve $n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonları X üzerinde tanımlı Y değerli fonksiyonlar olsun. Eğer, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi, f e ileri noktasal yakınsak ve (f_n) fonksiyon dizisi, $x \in X$ de ileri exhaustive ise f, x de ff – sürekli.

İspat. $\varepsilon > 0$ olsun. $x \in X$ de (f_n) fonksiyon dizisi ileri exhaustive olduğundan her $y \in B^+(x, \delta)$ ve her $n \geq n_0$ için $d_Y(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon/3$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi, f e ileri noktasal yakınsak olduğundan her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_1 \in \mathbb{N}$ olmalı ki her $n \geq n_1$ için $d_Y(f(y), f_n(y)) < \varepsilon/3$ ve $d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3$ olur. Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirdiğinden $d_Y(f_n(y), f(y)) < \varepsilon/3$ sağlanır. Şimdi, $N := \max\{n_0, n_1\}$ olsun. Böylece, $y \in B^+(x, \delta)$ iken,

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f_N(y)) + d_Y(f_N(y), f(y)) < \varepsilon$$

bulunur. Böylece, f, x de ff – sürekli ■.

Aşağıdaki örnekle görülebileceği üzere, yukarıdaki teoremde Y de ileri yakınsaklığın geri yakınsaklığı gerektirmesi koşulunu ortadan kaldırdığımızda,

bir ileri exhaustive fonksiyon dizisinin ileri noktasal limiti sürekli olmayacağı gibi, tek de değildir.

Örnek 4.1.7. Örnek 3.3.8 deki $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ileri exhaustive dizisi (ileri eşsüreklili olduğundan ileri exhaustivedir) f süreksiz limitine ileri noktasal yakınsaktır. Ancak, aynı zamanda ileri noktasal yakınsaklık geri noktasal yakınsaklığı gerektirmediğinden limit tek değildir. Örneğin; $\tilde{f} : X \rightarrow Y, x \rightarrow (1, 0)$ sürekli olmak üzere $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ileri exhaustive dizisi f limitine ileri noktasal yakınsaktır.

Teorem 4.1.6 ya benzer bir ifade aşağıdaki gibi verilebilir.

Sonuç 4.1.8. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar olmak üzere Y de geri yakınsaklık ileri yakınsaklığı gerektirsin. f ve $n \in \mathbb{N}$ için f_n, X üzerinde tanımlı Y değerli fonksiyonlar olsun. Eğer, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi, f e geri noktasal yakınsak ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, x \in X$ de geri exhaustive ise f, x de fb – sürekli.

Teorem 4.1.9. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar olmak üzere Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. f ve $n \in \mathbb{N}$ için f_n, X üzerinde tanımlı Y değerli fonksiyonlar olsun. Eğer, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi, f e ileri noktasal yakınsak ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, X$ üzerinde ileri exhaustive ise X in her ileri kompakt altkütmesi üzerinde $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f$ e ileri düzgün yakınsaktır.

İspat. $K \subset X$ herhangi ileri kompakt küme ve keyfi $\varepsilon > 0$ ile $x \in K$ seçilsin. (f_n) fonksiyon dizisi, x de ileri exhaustive olduğundan, her $y \in B^+(x, \delta_x)$ ve her $n \geq n_0$ için $d_Y(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon/3$ olacak şekilde bir $\delta_x > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Teorem 4.1.6 dan biliyoruz ki, f, x de ff – sürekli, böylece $\delta_x < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ mevcuttur öyleki her $y \in B^+(x, \delta_x)$ için $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon/3$ sağlanır. Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirdiğinden $d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon/3$ yazılabilir.

$X \subseteq \bigcup_{x \in X} B^+(x, \delta_x)$ ve X ileri kompakt olduğundan, bazı $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ mevcuttur öyle ki $X = \bigcup_{i=1}^k B^+(x_i, \delta_{x_i})$ dir. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi, f e ileri noktasal yakınsak olduğundan, her bir i için bazı $m_i \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $n \geq m_i$ için $d_Y(f(x_i), f_n(x_i)) < \varepsilon/3$ olur. Şimdi, $n_0 = \max\{n_{x_1}, n_{x_2}, \dots, n_{x_k}, m_1, \dots, m_k\}$ alalım. $y \in X$ keyfi olsun. Böylece, bazı i ler için $y \in B^+(x_i, \delta_{x_i})$ dir. Bu durumda, $d_X(x_i, y) < \delta_{x_i} < \delta$ dir. Buradan, $d_Y(f(y), f(x_i)) < \varepsilon/3$ ve $d_Y(f_n(x_i), f_n(y)) < \varepsilon/3$ yazılabilir. Bundan dolayı, her $n \geq n_0$ için

$$d_Y(f(y), f_n(y)) \leq d_Y(f(y), f(x_i)) + d_Y(f(x_i), f_n(x_i)) + d_Y(f_n(x_i), f_n(y)) < \varepsilon$$

elde edilir. O halde, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f e ileri düzgün yakınsaktır ■.

4.2. Asimetrik Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş Arzela-Ascoli Teoremi

Fonksiyonel analizin önemli teoremlerinden biri olan Arzela-Ascoli teoremi (Arzela, 1895; Arzela, 1882-1883; Ascoli, 1883-1884, Engelking, 1977; Kelley, 1955; Munkres, 1975) bazı koşullar altında bir X metrik uzayından $\mathbb{R}$ ye tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayında kompaktlığı karakterize eder. Bu koşullar içinde ana koşul fonksiyonlar ailesinin eşsürekliliği koşuludur.

Bu bölümde, Arzela-Ascoli teoreminde eşsüreklilik yerine daha genel bir kavram olan exhaustiveness kavramı kullanılarak, asimetrik metrik uzaylarda bu teoremin bir genellemesi elde edilmeye çalışılacaktır.

Collins ve Zimmer(2007), bazı koşullar altında, asimetrik metrik uzaylarda, $C(X, Y); X$ den Y ye tüm ff – sürekli fonksiyonların kümesinin bir $\mathcal{F}$ altkümesinin ileri göreceli kompaktlığını verdiler. Bu teoremde, Önerme 4.1.2 den dolayı eşsüreklilik yerine exhaustiveness kavramını kullanabileceğimiz açıktır. Aşağıdaki ilk teoremde bu ifade edilmektedir.

Bir sonraki teoremden ise $C(X, Y)$ nin bir $\mathcal{F}$ altkümesinin ileri kompaktlığı karakterize edilecektir.

Teorem 4.2.1. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar olsun. Kabul edelim ki, X ileri kompakt, kapalı sınırlı kümeler Y de ileri kompakt ve Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirsin. $C(X, Y)$, d_Y deki asimetric metrik ile ilişkili $\bar{\rho}$ düzgün metriği ile donatılsın. Bu durumda, $C(X, Y)$ nin bir $\mathcal{F}$ altkümesi, eğer ileri exhaustive ve d_Y altında ileri noktasal sınırlı ise ileri göreceli kompaktır.

Bir sonraki teoremin ispatı için aşağıdaki yardımcı teoreme ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yardımcı teorem, asimetric metrik uzaylarda metrik uzaylardaki gibi verilebilir.

Yardımcı Teorem 4.2.2. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar olmak üzere Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığa denk olsun.. Eğer Y ileri tam ise, bu durumda $C(X, Y)$ kümesi d_Y ye bağlı düzgün $\bar{\rho}$ metriğinde ileri tamdır.

Teorem 4.2.3. X ileri kompakt, Y ileri tam asimetric metrik uzaylar ve $\mathcal{F}$, $C(X, Y)$ uzayının bir altkümesi olsun. Kabul edelim ki, Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığa denk olsun ve $\mathcal{F}$ deki her fonksiyon dizisi Y de ileri yakınsak bir altdiziye sahip olsun. Bu durumda, $\mathcal{F}$ ileri kapalı, ileri total sınırlı ve ileri exhaustive ise ileri kompaktır.

İspat. Öncelikle, $\mathcal{F}$ ın ileri dizisel kompakt olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\mathcal{F}$ in ileri yakınsak bir altdiziye sahip bir fonksiyon dizisini içerdiğini göstermemiz gereklidir.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{F}$ de keyfi bir fonksiyon dizisi ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X in ileri yoğun bir altkümesi olsun. Kabulden, $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ Y de ileri yakınsak bir $(f_{k_n^1}(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ altdizisine sahiptir. Benzer şekilde, $(f_{k_n^1}(x_2))_{n \in \mathbb{N}}$ nın Y de ileri yakınsak bir $(f_{k_n^2}(x_2))_{n \in \mathbb{N}}$ altdizisi mevcuttur. Böyle devam ederek, tümevarımla, her bir $j \in \mathbb{N}$ için $(f_{k_n^j}(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi Y de ileri yakınsak olacak şekilde $\dots \subseteq (k_n^{j+1}) \subseteq (k_n^j) \subseteq \dots \subseteq (k_n^1)$

doğal sayıların bir dizisi elde edilir. Bu durumda, her bir $j \in \mathbb{N}$ için $(f_{k_n^n}(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$ diagonal dizisi de Y de ileri yakınsaktır. Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirdiğinden, bu diagonal dizi bir ileri Cauchy dizisidir.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, X$ in ileri yoğun bir altkümesi olduğundan her $x \in X$ için $x_j \in B^+(x, \delta)$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ olacak şekilde en az bir $x_j \in X$ vardır. $\mathcal{F}$ ileri exhaustive olduğundan, her $\varepsilon > 0$, her bir $x \in X$, $x_j \in B^+(x, \delta)$ ve her $k_n^n > n_0$ için, $d_Y(f_{k_n^n}(x), f_{k_n^n}(x_j)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $\mathcal{F} \subseteq C(X, Y)$ olduğundan ve Y de ileri yakınsaklık geri yakınsaklığı gerektirdiğinden, $d_Y(f_{k_n^n}(x_j), f_{k_n^n}(x)) < \varepsilon$ elde edilir. Böylece, $\mathcal{F}$ aynı zamanda geri exhaustivedir. Dolayısıyla, $k_n^n, k_n^m > n_0$ iken,

$$\begin{aligned} d_Y(f_{k_n^n}(x), f_{k_n^m}(x)) &\leq d_Y(f_{k_n^n}(x), f_{k_n^n}(x_j)) + d_Y(f_{k_n^n}(x_j), f_{k_n^m}(x_j)) + d_Y(f_{k_n^m}(x_j), f_{k_n^m}(x)) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $(f_{k_n^n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi her $x \in X$ için bir ileri Cauchy dizisidir. Bu durumda, Yardımcı Teorem 4.2.2 den $C(X, Y)$ uzayı d_Y ye bağlı düzgün $\bar{\rho}$ metriğinde ileri tamdır ve bu nedenle, $(f_{k_n^n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ileri yakınsaktır.

$f_{k_n^n}(x) \xrightarrow{f} f(x)$ diyelim. Bu durumda, Teorem 4.1.9 dan dolayı $(f_{k_n^n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, f e ileri düzgün yakınsaktır. $\mathcal{F}$, ileri kapalı bir küme olduğundan, $f \in \mathcal{F}$ elde edilir ve bundan dolayı, $\mathcal{F}$ ileri dizisel kompakttır. Kabulden, $\mathcal{F}$ ileri total sınırlı olduğundan ve Yardımcı Teorem 3.2.7 den $\mathcal{F}$ ileri kompakttır ■.

4.3. Asimetrik Metrik Uzaylarda İstatistiksel Exhaustiveness

Caserta ve Koçinac (2012), metrik uzaylarda istatistiksel exhaustiveness kavramını vermişlerdir. Bu bölümde, asimetrik metrik uzaylarda bu kavramın bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.3.1. (*İleri ve geri istatistiksel exhaustiveness*) (X, d_x) ve (Y, d_y) asimetrik metrik uzaylar olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ ve bir istatistiksel yoğun küme $M \subset \mathbb{N}$ (yani, $\partial(M) = 1$) var olacak şekilde her bir $y \in B^+(x, \delta)$ ve her bir $n \in M$ için $d_y(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ ($d_y(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon$) oluyorsa, bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$ fonksiyon dizisi $x \in X$ noktasında *ileri (geri) istatistiksel exhaustivedir* denir. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$ fonksiyon dizisi her $x \in X$ de *ileri (geri) istatistiksel exhaustive ise ileri (geri) istatistiksel exhaustivedir* denir.

YORUM. (1) Her ileri (geri) eşsüreklı fonksiyon dizisi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ileri (geri) *st - exhaustivedir*. Ancak tersi doğru değildir.

(2) Her ileri (geri) *exhaustive* fonsiyon dizisi ileri (geri) *st - exhaustivedir*. Ancak tersi doğru değildir.

Aşağıda ileri *st -exhaustive* olan, ancak, ileri *exhaustive* ve aynı zamanda ileri eşsüreklı olmayan bir fonksiyon dizisi örneği verilecektir.

Örnek 4.3.2. $X = \mathbb{R}$ ve $Y = [-1, 1]$ aşağıdaki metriklerle verilsin.

$$d_x(x, y) := \begin{cases} y - x, & y \geq x \text{ ise,} \\ 1, & y < x \text{ ise} \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_y(x, y) := \begin{cases} y - x, & y \geq x \text{ ise,} \\ 2(x - y), & y < x \text{ ise} \end{cases}.$$

Şimdi Caserta ve Kočinac (2012) tarafından verilen fonksiyon dizisi örneğini düşünelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : X \rightarrow Y$,

$$f_n(x) := \begin{cases} -1, & x \leq 0 \text{ ve } n \text{ asal ise} \\ \frac{1}{n}, & x \leq 0 \text{ ve } n \text{ asal değil ise,} \\ 1, & x > 0 \text{ ve } n \text{ asal ise,} \\ \frac{1}{2n}, & x > 0 \text{ ve } n \text{ asal değil ise.} \end{cases}$$

ile tanımlansın.

Bu dizi $x=0$ noktasında ileri st -exhaustivedir. Gerçekten, asal sayıların kümesi P nin doğal yoğunluğu $\partial(P)=0$ dır. $\varepsilon>0$ için $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$ olacak şekilde

$n_0 \in \mathbb{N} \setminus P$ alalım. Bu durumda, her $n \in (\mathbb{N} \setminus P) \cap \{n \in \mathbb{N} : n > n_0\}$ ve $y \in B^+(0, \delta)$

için $d_Y(f_n(0), f_n(y)) = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ elde edilir.

Ancak, bu dizi $x=0$ noktasında ileri exhaustive değildir. Çünkü, her $\delta>0$ ve her $y \in B^+(0, \delta)$ için $d_Y(f_n(0), f_n(y)) = f_n(y) - f_n(0) = 1 - (-1) = 2$ olacak şekilde sonsuz sayıda n vardır. Ayrıca, ileri eşsüreklilik ile ileri exhaustiveness tanımlarından dolayı bu dizi ileri eşsüreklili de değildir ■.

Aşağıdaki örnekle, Y asimetric metrik uzayında ileri st -yakınsaklığın geri st -yakınsaklığı gerektirmesi halinde, ileri st -exhaustive olmanın geri st -exhaustive olmaya denk olacağı görülebilir.

Örnek 4.3.3. Bir önceki örnekte verilen dizi aynı zamanda $x=0$ noktasında geri st -exhaustivedir. Çünkü, Y üzerindeki asimetric metrikte ileri st -yakınsaklık geri st -yakınsaklığı gerektirir ve $\partial(P)=0$ olduğundan $\varepsilon>0$ için

$\frac{1}{n_0}<\varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N} \setminus P$ alırsak, her $n \in (\mathbb{N} \setminus P) \cap \{n \in \mathbb{N} : n > n_0\}$ ve

$y \in B^+(0, \delta)$ için $d_Y(f_n(y), f_n(0)) = f_n(0) - f_n(y) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ elde

edilir.

Eğer Y üzerindeki asimetric metrik,

$$d_Y(x, y) := \begin{cases} y - x, & y \geq x \text{ ise,} \\ 1, & y < x \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde seçilirse, bu asimetric metrik uzayda $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $x=0$ noktasında ileri st -exhaustive değildir, ancak, $x=0$ noktasında geri st -

exhaustivedir. Gerçekten, bu asimetric metrikte, ileri st -yakınsaklık geri st -yakınsaklığa denk değildir ve her $\delta > 0$ ve her $y \in B^+(0, \delta)$ için

$$d_Y(f_n(y), f_n(0)) = f_n(0) - f_n(y) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon \text{ bulunur, yani } (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

fonksiyon dizisi $x=0$ noktasında geri st -exhaustivedir, ancak, her $\delta > 0$ ve her $y \in B^+(0, \delta)$ için $d_Y(f_n(0), f_n(y))=1$ olduğundan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $x=0$ noktasında ileri st -exhaustive değildir ■.

Caserta ve Koçinac (2012) tarafından simetrik durumda verilen yardımcı teorem benzer şekilde, asimetric durumda aşağıdaki gibi verilebilir.

Yardımcı Teorem 4.3.4. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar olsun. Bir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y^X$ fonksiyon dizisinin ileri (geri) st -exhaustive olması için gerek ve yeter koşul onun st -yoğun altdizisinin ileri (geri) st -exhaustive olmasıdır.

Tanım 4.3.5. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar olsun. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : X \rightarrow Y$ ve $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonları verilsin.

(1) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ileri (geri) istatistiksel noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için en az bir st -yoğun M kümesi var olmak üzere, her $n \in M$ için $d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ $(d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$ olmasıdır. Bu yakınsama kısaca, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{f-st} f$ $((f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{b-st} f)$ ile gösterilir.

(2) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna ileri (geri) düzgün istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için en az bir st -yoğun M kümesi var olmak üzere, her $n \in M$ ve her $x \in X$ için $d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ $(d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$ olmasıdır. Bu kısaca, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{f-st} f$ $((f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{b-st} f)$ ile gösterilir.

Asimetric metrik uzaylarda, bir fonksiyon dizisinin istatistiksel noktasal yakınsaklığı ve istatistiksel exhaustiveness olması tanımlarının önemli bir sonucu olarak, aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.3.6. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar ve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ile f fonksiyonları X den Y ye tanımlı olsun. Eğer, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna ileri (geri) noktasal yakınsak ve ileri (geri) exhaustive ise, bu durumda $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna ileri (geri) istatistiksel noktasal yakınsak ve ileri (geri) st -exhaustivedir.

Aşağıdaki teorem, bir ileri st -exhaustive fonksiyon dizisinin ileri st -noktasal limitinin, Y asimetrik metrik uzayında ileri st -yakınsaklığın geri st -yakınsaklığı gerektirmesi halinde sürekli olacağını vermektedir.

Teorem 4.3.7. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetrik metrik uzaylar olsun. (Y, d_Y) asimetrik metrik uzayında ileri st -yakınsaklık geri st -yakınsaklığı gerektirsin. Eğer, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna ileri st -noktasal yakınsak ve ileri st -exhaustive ise f fonksiyonu ff -süreklidir.

İspat. $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna ileri istatistiksel noktasal yakınsak olduğundan st -yoğun bir $K \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcuttur öyle ki her $n \in K$ için $d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon/3$ bulunur. $y \in B^+(x, \delta)$ alalım. Bu durumda, Y asimetrik metrik uzayındaki gerektirmeden dolayı st -yoğun bir $L \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcuttur öyle ki her $n \in L$ için $d_Y(f_n(y), f(y)) < \varepsilon/3$ bulunur. Diğer taraftan, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi $x \in X$ de st -exhaustive olduğundan, st -yoğun bir $M \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcuttur öyle ki her $y \in B^+(x, \delta)$ ve her $n \in M$ için $d_Y(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon/3$ bulunur. Keyfi $j \in K \cap L \cap M$ alalım. Bu durumda, $j \in K \cap L \cap M$ ve $y \in B^+(x, \delta)$ için

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f_j(x)) + d_Y(f_j(x), f_j(y)) + d_Y(f_j(y), f(y)) < \varepsilon$$

elde edilir ve böylece f, ff -süreklidir ■.

4.4. Asimetrik Metrik Uzaylarda $\mathcal{I}$ – Dizisel Kompaktlık

Bu bölümde, dizisel kompaktlık kavramı $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesinin altkümelerinin ideali kavramı kullanılarak, asimetrik metrik uzaylarda genellenecek ve bazı özellikleri incelenecektir.

Das vd. (2013) asimetrik metrik uzaylarda $\mathcal{I}$ – dizisel kompaktlık tanımını verdiler (bkz. Tanım 3.4.1.4). Aşağıda bu tanıma denk olan bir tanım verilecektir.

Tanım 4.4.1. (X, d_X) asimetrik metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer, A kümesindeki her $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ileri $\mathcal{I}$ – limiti A da olan, ileri $\mathcal{I}$ – yakınsak bir altdiziye sahipse A kümesi ileri $\mathcal{I}$ – dizisel kompakttır denir.

Tanım 4.4.2. (X, d_X) asimetrik metrik uzay, $K \subset X$ ve $a \in X$ olsun. a nın K kümesinin ileri $\mathcal{I}$ – kapanışı olarak adlandırılması için gerek ve yeter koşul $F \mathcal{I} - \lim_n x_n = a$ olacak şekilde K nın noktalarının bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin mevcut olmasıdır. K nın $\mathcal{I}$ – kapanışı $\overline{K}^{F-\mathcal{I}}$ ile belirtilecektir.

Aşağıdaki önerme, Boccuto vd. nin vermiş olduğu önermenin (Boccuto vd., 2011, syf 392, Önerme 2.5 b) nin ileri topolojiye uygulanmış özel halidir.

Önerme 4.4.3. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (X, d_X) asimetrik metrik uzayında bir dizi ve $F \mathcal{I} - \lim_n x_n = x$ olsun. Bu durumda, $\lim_k x_{n_k} \xrightarrow{f} x$ olacak şekilde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ altdizisi mevcuttur.

Bu önermenin bir sonucu olarak aşağıdaki ifade verilebilir.

Sonuç 4.4.4. X , bir asimetrik metrik uzay olsun. X de bir kümenin ileri $\mathcal{I}$ – kapanışı ile ileri kapanışı çakışır.

Teorem 4.4.5. (X, d_X) asimetric metrik uzay olsun. X de bir ileri $\mathcal{I}$ – dizisel kompakt altkumesinin herhangi ileri $\mathcal{I}$ – kapalı altkumesi ileri $\mathcal{I}$ – dizisel kompakttır.

İspat. K bir ileri $\mathcal{I}$ – dizisel kompakt küme ve $A \subset K$, ileri $\mathcal{I}$ – kapalı olsun. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, A da herhangi bir dizi olsun. Bu durumda, bu dizi aynı zamanda K dadır ve ileri $\mathcal{I}$ – yakınsak bir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ altdizisi içerir. $F \mathcal{I} - \lim_n x_{n_k} = a$ diyelim. A , ileri $\mathcal{I}$ – kapalı olduğundan, $F \mathcal{I} - \lim_n x_{n_k} = a$ limiti, $\overline{A}^{F-\mathcal{I}} = A$ da olmalıdır. Bu gösterir ki A , ileri $\mathcal{I}$ – dizisel dizisel kompakttır ■.

Tanım 4.4.6. (X, d_X) asimetric metrik uzayındaki bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin *ileri*

$\mathcal{I}$ -sınırlı olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $a \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n \in \mathbb{N} : d(a, x_n) > M\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $M \in \mathbb{R}$ sayısının mevcut olmasıdır.

Yardımcı Teorem 4.4.7. (X, d_X) asimetric metrik uzayında, ileri $\mathcal{I}$ -yakınsak bir dizi ileri $\mathcal{I}$ -sınırlıdır.

Teorem 4.4.8. (X, d_X) asimetric metrik uzay olsun. (AP) koşulunu sağlayan bir $\mathcal{I}$ uygun ideali için, herhangi ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt altküme $K \subset X$, ileri $\mathcal{I}$ -kapalı ve ileri $\mathcal{I}$ -sınırlıdır.

İspat. K , ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt olsun. K nın $\mathcal{I}$ -kapalı olduğunu göstermek istiyoruz. (Bunun için $u \in \overline{K}^{F-\mathcal{I}} = K$ olduğunu ispatlamalıyız.) $u \in \overline{K}^{F-\mathcal{I}}$ olsun. Bu durumda, K da u ya ileri $\mathcal{I}$ -yakınsak bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır. $\mathcal{I}$, (AP) koşulunu sağlayan bir ideal olduğundan, bu dizi aynı zamanda u ya ileri $\mathcal{I}^*$ -yakınsaktır ve bundan dolayı açıkça $\lim_k y_k \xrightarrow{f} u$ olacak şekilde bir $(y_k) := (x_{n_k})_k$ altdizisi mevcuttur. Buradan, $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan, $F \mathcal{I} - \lim_k y_k = u$ dur. K nın ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt olmasından dolayı, $(y_k)_k$ dizisinin $u_1 \in K$ ya ileri $\mathcal{I}$ -yakınsak olan bir $(z_j)_j := (y_{k_j})_j$ altdizisi mevcuttur. Ancak, $(z_j)_j$, $(y_k)_k$ nın bir altdizisi olduğundan, $\lim_k z_j \xrightarrow{f} u$ ve $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan,

$F \mathcal{I} - \lim_j z_j = u$ dur. Bu nedenle $u = u_1$ ve dolayısıyla $u \in K$ bulunur. Buradan $\overline{K}^{F-\mathcal{I}} = K$ olup, K kümesi, ileri $\mathcal{I}$ -kapalıdır.

Şimdi K kümesinin ileri $\mathcal{I}$ -sınırlı olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki K ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt kümesi ileri $\mathcal{I}$ -sınırsız olsun. Bu durumda K , herhangi bir k sabit elemanı için $\{n \in \mathbb{N} : d(k, y_n) > n\} \notin \mathcal{I}$ olacak şekilde ileri $\mathcal{I}$ -sınırsız bir $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi içerir. Bu ise Yardımcı Teorem 4.4.7 ile çelişir ■.

Sonuç 4.4.9. (X, d_X) asimetric metrik uzay olsun. Eğer $\mathcal{I}$, (AP) koşulunu sağlayan bir uygun ideal ise, bu durumda X in herhangi $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt altkümesi X de kapalıdır.

Teorem 4.4.10. (X, d_X) asimetric metrik uzay olsun. X , ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt ise X deki her ileri $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi ileri $\mathcal{I}$ -yakınsaktır.

İspat. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt uzay X in elemanlarının bir ileri $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi olsun. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin ileri $\mathcal{I}$ -yakınsak olduğunu göstereceğiz. İleri $\mathcal{I}$ -dizisel kompaktlık tanımından, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin X de ileri $\mathcal{I}$ -yakınsak bir $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ altdizisi vardır. $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{F\mathcal{I}} x_0$ diyelim. Yani, $\forall \varepsilon > 0$ için $\{n \in \mathbb{N} : d(x_0, x_{k_n}) \geq \varepsilon / 2\} \in \mathcal{I}$ dır. Ayrıca, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ileri $\mathcal{I}$ -Cauchy dizisi olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ ve bir $m \in \mathbb{N}$ için $\{n \in \mathbb{N} : d(x_m, x_n) \geq \varepsilon / 2\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $M = M(\varepsilon) \in \mathcal{F} \mathcal{I}$ kümesi mevcuttur. Özel olarak, $m = k_n$ seçelim. Bu durumda, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : d(x_0, x_n) \geq \varepsilon\} \subset \{n \in \mathbb{N} : d(x_0, x_{k_n}) \geq \varepsilon / 2\} \cup \{n \in \mathbb{N} : d(x_{k_n}, x_n) \geq \varepsilon / 2\}$$

ve sağ taraftaki ifade $\mathcal{I}$ idealine ait olduğundan,

$$\{n \in \mathbb{N} : d(x_0, x_n) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

elde edilir. Böylece, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{F\mathcal{I}} x_0$ bulunur ■.

Sonuç 4.4.11. (X, d_X) asimetric metrik uzay olsun. X , ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt ise ileri tamdır.

Teorem 4.4.12. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar olsun. $f : X \rightarrow Y$, ff – sürekli bir fonksiyon ve X , ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt ise $f(X)$ de ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompaktır.

İspat. $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq f(X)$ dizisini düşünelim. $f(X)$ in tanımından bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $f(x_n) = y_n$ dir. X , ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt olduğundan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $(n_k) \notin \mathcal{I}$ olacak şekilde ileri yakınsak bir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ altdizisi içerir. $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow{f} x \in X$ diyelim. f, ff – sürekli olduğundan, $f(x_{n_k}) \xrightarrow{f} f(x) \in f(X)$ dir. Ancak, $f(x_{n_k})$ dizisi, $f(x_n)$ dizisinin altdizisi ve dolayısıyla $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nin bir altdizisidir. Böylece, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}, f(X)$ de $(n_k) \notin \mathcal{I}$ olacak şekilde ileri yakınsak bir $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ altdizisine sahiptir. Bundan dolayı, $f(X)$ ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompaktır.

Teorem 4.4.13. (X, d_X) ve (Y, d_Y) asimetric metrik uzaylar olsun. $f : X \rightarrow Y$, fb – sürekli bir fonksiyon ve X , ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt ise $f(X)$ de geri $\mathcal{I}$ -dizisel kompaktır.

İspat. Teorem 4.4.12 nin ispatına benzerdir.

Aşağıdaki teoremde, asimetric metrik uzaylarda dizisel kompaktlık ve $\mathcal{I}$ -dizisel kompaktlık kavramlarının denk olduğu verilecektir.

Teorem 4.4.14. (X, d_X) asimetric metrik uzay olsun. $\mathcal{I}, \mathbb{N}$ nin bir uygun ideali olsun ve X in bir K altkümesi verilsin. K nın ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt olabilmesi için gerek ve yeter koşul onun ileri dizisel kompakt olmasıdır.

İspat. Eğer K , ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt ise bu durumda K daki her $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ileri $\mathcal{I}$ -yakınsak bir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ altdizisi içerir. Bu dizinin ileri $\mathcal{I}$ -limitine x

diyelim. Önerme 4.4.3 den dolayı, bu dizinin $\lim_k x_{n_{kq}} \xrightarrow{f} x$ olacak şekilde ileri yakınsak bir $(x_{n_{kq}})_{q \in \mathbb{N}}$ alt-alt dizisi mevcuttur. Böylece, K ileri dizisel kompaktır.

Şimdi, kabul edelim ki K ileri dizisel kompakt olsun. Bu durumda, K daki her $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ileri yakınsak bir alt diziye sahiptir. Bu diziye $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ diyelim ve ileri limiti x olsun. $\mathcal{I}$ uygun bir ideal olduğundan, ileri yakınsaklık, ileri $\mathcal{I}$ -yakınsaklığı gerektirir ve böylece bu dizi aynı zamanda ileri $\mathcal{I}$ -yakınsaktır, yani $F \mathcal{I} - \lim_k x_{n_k} = x$ olur. Böylece, K , $\mathcal{I}$ -dizisel kompaktır ■.

Metrik uzaylarda kompaktlık ve $\mathcal{I}$ -dizisel kompaktlık kavramları denktir (Boccuto vd., 2011). Asimetrik metrik uzaylarda, kompaktlık ve $\mathcal{I}$ -dizisel kompaktlık kavramları ise farklı kavramlar olup, ancak, aşağıdaki teoremdaki durumda denk olmaktadır.

Teorem 4.4.15. Bir (X, d_x) asimetrik metrik uzayının ileri kompakt olması için gerek ve yeter koşul onun $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt ve ileri total sınırlı olmasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$): Y. Teorem 3.2.7 ve Teorem 4.4.14 den açıktır.

($\Leftarrow$): Sonuç 4.4.11 ve Önerme 3.2.9 dan açıktır.

Tanım 4.4.15. (X, d_x) asimetrik metrik uzay ve $K \subset X$ olmak üzere, eğer $\overline{K}^{F-\mathcal{I}}$ (K nın ileri $\mathcal{I}$ -kapanışı), ileri $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt ise K ileri göreceli $\mathcal{I}$ -dizisel kompaktır denir.

Sonuç 4.4.4 ve Teorem 4.4.14 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.16. (X, d_x) asimetrik metrik uzay olsun. X in bir K alt kümesinin ileri göreceli $\mathcal{I}$ -dizisel kompakt olması için gerek ve yeter koşul onun ileri göreceli dizisel kompakt olmasıdır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, ilk olarak, asimetric metrik uzaylarda exhaustiveness kavramı tanımlanarak, özellikleri incelenmiştir. İleri ve geri exhaustive kavramlarının birbirleriyle ve eşsüreklilik kavramı ile ilişkisi örneklerle açıklanmaya çalışılmıştır. Asimetric yakınsaklık koşulu ortadan kaldırıldığında bir ileri exhaustive fonksiyon dizisinin ileri noktasal limitinin sürekli olmayacağı gibi, tek de olmayabileceğine örnek verilmiştir. Ayrıca, kompakt bir küme üzerinde fonksiyon dizisinin düzgün yakınsaklığını veren önemli bir sonuç elde edilmiştir. Daha sonra, asimetric metrik uzaylarda exhaustiveness kavramı kullanılarak, bir Ascoli tipi teorem elde edilmeye çalışılmıştır.

Asimetric metrik uzaylarda exhaustiveness kavramının istatistiksel versiyonu düşünülerek, bazı özellikleri incelenmiştir.

Son olarak, bu uzaylarda da metrik uzaylarda olduğu gibi dizisel kompaktlık ve ideal dizisel kompaktlık kavramlarının denk olduğu gösterilmiştir. Bundan yararlanılarak, metrik uzaylardan farklı olarak, asimetric metrik uzaylarda ideal dizisel kompaktlık ve kompaktlık kavramlarının birbirlerinden farklı kavramlar olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- Albert, G.E., 1941. A note on quasi metric spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 479-482.
- Arzelà, C, 1882–1883. Un'osservazione intorno alle serie di funzioni, Rend. Dell' Accad. R. Delle Sci. Dell'Istituto di Bologna, 142–159.
- Arzelà, C, 1895. Sulle funzioni di linee. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Mat. 5(5), 55-74.
- Ascoli, G., 1883-1884. Le curve limiti di una varietà data di curve. Atti della R.Accad. Dei Lincei Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 18(3), 521-586.
- Bodjanova, S., 1981. Some basic notions of mathematical analysis in oriented metric spaces. Math. Slovaca 31(3), 277-289.
- Boccuto, A., Das, P., Dimitriou, X. , Papanastassiou, N., 2011. Ideal exhaustiveness, weak convergence and weak compactness in Banach spaces. Real Anal. Exchange 37(2), 389-410.
- Buck, R.C., 1953. Generalized asymptotic density. Amer. J. Math. 75, 335-346.
- Caserta, A., Kočinac, Lj. D.R., 2012. On statistical exhaustiveness, Applied Mathematics Letters, 25(10), 1447-1451.
- Chenchiah, I., Rieger, M.O., Zimmer, J., 2009. Gradient flows in asymmetric metric spaces. Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications 71 (11), 5820-5834.
- Cobzaş, S., 2013, Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces, Frontiers in Mathematics, Springer (Basel).
- Collins, J., Zimmer, J., 2007. An asymmetric Arzelà-Ascoli theorem. Topology and its Applications 154, 2312-2322.
- Connor, J., Swardson, M.A., 1993. Strong integral summability and the Stone-Cech compactification of the half-line. Pacific Journal of Mathematics 157(2), 201-224.
- Çakallı, H., 2008. Sequential Definitions of Compactness. Applied Mathematics Letters, 21, 594-598.
- Çakallı, H., 2009. A Study On Statistical Convergence. Functional Analysis, Approximation and Computation, 1(2), 19-24.
- Das, P. Ghosal, S., Pal, S.K., 2013. Extending asymmetric convergence and Cauchy condition using ideals. Mathematica Slovaca 63(3), 545-562.

- Di Maio, G., Kočinac, Lj.D.R., 2008. Statistical convergence in topology. *Topology and its Applications* 156(1), 28-45.
- Domiaty, R.Z., 1979. The Hausdorff separation property for space-times. *Elefteria (Athens)* 2, 358-371.
- Engelking, R., 1977. *General Topology*. Polish Scientific Publishers, 626 p. Warsaw.
- Erdős, P., Tenenbaum, G., 1989. Sur les densités de certaines suites d'entiers. *Proceedings of the London Mathematical Society* 59(3), 417-438.
- Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.* 2, 241-244.
- Freedman, A.R., Sember, I.J., 1981. Densities and summability. *Pacific J. Math.* 95, 293-305.
- Fridy, J.A., 1985, On statistical convergence, *Analysis* 5, 301-313.
- Fridy, J.A., 1993, On statistical limit point, *Proc. Amer. Math. Soc.* 4, 1187-1192.
- Gregoriades, V., N. Papanastassiou, N., 2008, The notion of exhaustiveness and Ascoli-type theorems. *Topology and its Applications* 155, 1111-1128.
- Kelley, J.L., 1955. *General Topology*. D. Van Nostrand Company, New York.
- Kelly, J.C., 1963. Bitopological spaces. *Proc. London Math. Soc.* 3 (13), 71-89.
- Kostyrko, P., Salat, T., Wilczyński, W., 2000. $\mathcal{I}$ -convergence. *Real Anal. Exchange* 26, 669-685.
- Kuratowski, C., 1966. *Topology*. Volume 1, PWN Warszawa.
- Künzi, H.P.A., 1983. A note on sequentially compact quasi-pseudometric spaces. *Monatsh. Math.* 95(3), 219-220.
- Mainik, A., Mielke, A., 2005. Existence results for energetic models for rate-independent systems. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 22(1), 73-99.
- Mennucci, A., 2004. On asymmetric distances, Technical report, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2004.
- Mielke, A., Roubíček, T., 2003. A rate-independent model for inelastic behavior of shape-memory alloys. *Multiscale Model. Simul.* 1(4), 571-597.
- Miller, H. I., 1995. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Transactions of the American Mathematical Society* 347(5), 1811-1819.

- Munkres, J.R., 1975. *Topology: A First Course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ.
- Nagata, J., 1974. *Modern General Topology*. North- Holland Publ. Comp., Amsterdam London, 353 p.
- Niemtytzki, V., 1931. Über die Axiome des metrischen Raumes (German). *Math. Ann.* 104(1), 666-671.
- Patty, C.W., 1967. Bitopological spaces. *Duke Math. J.* 34 , 387-391.
- Pehlivan, S., Mamedov, M.A., 2000. Statistical cluster points and Turnpike. *Optimization*, 48(1), 93-106.
- Reilly, I.L., Subrahmanyam, P.V., Vamanamurthy, M.K., 1982. Cauchy sequences in quasipseudometric spaces. *Monatsh. Math.* 93(2), 127-140.
- Reilly, I.L., Vamanamurthy, M.K., 1984. On oriented metric spaces. *Math. Slovaca* 34(3), 299-305.
- Ribeiro, H., 1943. Sur les espaces a metrique faible (French). *Portug. Math.* 4, 21-40, [correction, the same issue, pp. 65-68].
- Rieger, M.O., Zimmer, J., 2005. Young measure flow as a model for damage, Preprint 11/05, Bath Institute for Complex Systems, Bath, UK.
- Šalát, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers, *Math. Slov.* , 30, 139-150.
- Steinhaus, H., 1951. Sur La Convergence Ordinaire et la Convergence Asymptotique, *Colloq. Math.*, 2, 73-74.
- Stoltenberg, R.A., 1969. On quasi metric spaces. *Duke Math. J.* 36, 65-71.
- Waterman, M.S., Smith, T.F., Beyer, W.A., 1976. Some biological sequence metrics. *Advance Math.* 20, 367-387.
- Wilson, W.A., 1931. On quasi-metric spaces. *Amer. J. Math.* 53(3), 675-684.
- Zygmund, A., 1979. *Trigonometric series*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 364 p.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zeynep Hande TOYGANÖZÜ
Doğum Yeri ve Yılı : Üsküdar, İSTANBUL ve 1982
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : handetoyganozu@sdu.edu.tr



Eğitim Durumu

Lise : Aldemir Atilla Konuk Süper Lisesi, 2000.
Lisans : Akdeniz Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,
Matematik Bölümü, 2005.
Yüksek Lisans : SDÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 2008.

Mesleki Deneyim

SDÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi	2006-2010
SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi	2010-... (halen)

Yayınları

Pehlivan, S., Şençimen, C., Yaman, Z. H., 2010. On Weak Ideal Convergence in Normed Spaces. Journal of Interdisciplinary Mathematics, 13(2), 153-162.

Pehlivan, S., Albayrak, H., Toyganözü, Z. H., 2011. The Theory of Convergence and the Set of Statistical Cluster Points. Advances in Dynamical Systems and Applications, 6(1), 111-119.

Yaman, Z. H., 2009. $\mathcal{I}$ -Üst Limit, $\mathcal{I}$ -Alt Limit ve $\mathcal{I}$ -Süreklilik Üzerine. XX. Ulusal Matematik Sempozyumu Bildiriler Kitabı, 307-316.

- Pehlivan, S., Şençimen, C., Yaman, Z. H., 2008. On Weak Ideal Convergence in Normed Spaces. Pre-ICM International Congress, Department of Mathematics, University of Delhi, 18-20 December 2008, India.
- Yaman, Z. H., 2009. Weak A-Statistically Pre-Cauchy Sequences, MASSEE International Congress on Mathematics, MICOM 2009, 16-20 September 2009, Ohrid, Republic of Macedonia.
- Pehlivan, S., Albayrak, H., Toyganözü, Z. H., 2010. The Theory of Convergence and the Set of Statistical Cluster Points. Analysis, Topology and Applications (ATA2010), 20-25 June 2010, Vrnjacka Banja, Serbia.
- Toyganözü(Yaman), Z. H., 2011. Some Results on Ideal Convergence of Nets, Conference on Summability and Applications, İstanbul Commerce University, 12-13 May 2011, İstanbul.
- Toyganözü(Yaman), Z. H., Pehlivan, S., Weak Ideal Convergence and Some of Its Applications, Third International Conference on Topology and Its Applications (ICTA 2012), 2-7 September 2012, Skopje, Republic of Macedonia.
- Pehlivan, S., Toyganözü, Z. H., Albayrak, H., 2012. Gamma Ideal Convergence to the Compact Set. GFTA 2012, 27-31 August 2012, Ohrid, Republic of Macedonia.
- Toyganözü, Z. H., Pehlivan, S., 2013. The Notion of Exhaustiveness in Asymmetric Metric Spaces, IECMSA 2013, 26-29 August 2013, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.
- Toyganözü, Z. H., Pehlivan, S., 2014. Ideal convergence for Sequences of Functions and Ideal Exhaustiveness in Asymmetric Context. Analysis, Topology and Applications (ATA 2014), 25-29 May 2014, Vrnjacka Banja, Serbia.
- Toyganözü, Z. H., Pehlivan, S., 2014. Results on Ideal Convergence and Left K-Cauchy Sequences in Asymmetrically Normed Lattices, IECMSA 2014, 25-28 August 2014, Vienna, Austria.
- Yaman, Z. H., 2007. $\mathcal{I}$ -Üst Limit, $\mathcal{I}$ -Alt Limit ve $\mathcal{I}$ -Süreklilik Üzerine. XX. Ulusal Matematik Sempozyumu, Erzurum.
- Şençimen, C., Yaman, Z. H., 2008. Riesz Uzaylarında Sıralamaya Göre İdeal Yakınsaklık, XXI. Ulusal Matematik Sempozyumu, İstanbul.