



**İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ
DEĞİŞEN ÖRÜNTÜLERE İLİŞKİN GENELLEME STRATEJİLERİ**

DİLEK SUCUOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MART, 2015

TELİF HAKKI ve TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU

Bu tezin tüm hakları saklıdır. Kaynak göstermek koşuluyla tezin teslim tarihinden itibaren 3 (üç) ay sonra tezden fotokopi çekilebilir.

YAZARIN

Adı : DİLEK

Soyadı : SUCUOĞLU

Bölümü : İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

İmza :

Teslim Tarihi :

TEZİN

Türkçe Adı : İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ
DEĞİŞEN ÖRÜNTÜLERE İLİŞKİN GENELLEME STRATEJİLERİ

İngilizce Adı : PRE- SERVICE ELEMENTARY MATHEMATICS TEACHERS'
GENERALIZATION STRATEGIES OF GROWING PATTERNS

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı : Dilek SUCUOĞLU

İmza :

JÜRİ ONAY SAYFASI

Dilek SUCUOĞLU tarafından hazırlanan “İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Değişen Örüntülere İlişkin Genelleme Stratejileri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Gazi Üniversitesi İlköğretim Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Gülay KORU YÜCEKAYA

İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Başkan: Yrd. Doç. Dr. Leyla ERCAN

Rehberlik ve Psikolojik Danışmanlık Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Üye: Yrd. Doç. Dr. Serdar AZTEKİN

İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 09/ 03/ 2015

Bu tezin İlköğretim Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Servet KARABAĞ

**İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ
DEĞİŞEN ÖRÜNTÜLERE İLİŞKİN GENELLEME STRATEJİLERİ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)**

**DİLEK SUCUOĞLU
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MART 2015**

ÖZ

Bu araştırmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının değişen örüntülere ilişkin genelleme stratejilerini belirlemektir. Araştırmada tarama modeli benimsenmiştir. Araştırmanın verileri, araştırmacı tarafından geliştirilen “Örüntü Testi” ve klinik görüşme tekniği ile toplanmıştır. Örüntü Testi, 2011- 2012 eğitim- öğretim yılında Gazi Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği programında öğrenim gören 50 son sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Ayrıca bu öğrencilerden 6 tanesi ile klinik görüşme yapılmıştır. Veriler nitel olarak analiz edilmiştir. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genellerken sayısal ve görsel olmak üzere iki temel yaklaşım benimsedikleri ortaya çıkmıştır. Görsel yaklaşımda öğretmen adayları şekle dayalı genellemeler yapmış ve değişkenler arasındaki ilişkinin incelendiği çok sayıda strateji kullanmışlardır. Sayısal yaklaşımda ise şekiller sayısallaştırılmış ve genellemede çoğunlukla ardışık terimler arasındaki fark kullanılmıştır. Strateji seçiminde şeklin yapısal özelliğinin etkili olduğu görülmüştür. Ayrıca bazı öğretmen adaylarının sabit değişen sayı örüntüsüne uygun bir model oluşturmada ve artarak değişen örüntüleri genellemede zorlandıkları tespit edilmiştir.

Bilim Kodu :

Anahtar Kelimeler : Örüntü, Strateji, Genelleme, Görsel Yaklaşım, Sayısal Yaklaşım

Sayfa Adedi : 213

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Gülay KORU YÜCEKAYA

**PRE- SERVICE ELEMENTARY MATHEMATICS TEACHERS’
GENERALIZATION STRATEGIES OF GROWING PATTERNS
(M. S. THESIS)**

**DİLEK SUCUOĞLU
GAZI UNIVERSITY**

**GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES
MARCH 2015**

ABSTRACT

The aim of this study is to define pre-service elementary mathematics teachers’ generalization strategies of growing patterns. The survey method was used in the study. Data were collected through “Patterns Test” developed by the researcher and clinical interview techniques. The Patterns Test was conducted with 50 senior students who were studying Elementary Mathematics Education at Gazi University in 2011- 2012 academic year. In addition, clinical interviews were carried out with six of these students. The collected data were analyzed qualitatively. The result of the study revealed that pre-service teachers adopted two basic approaches as numerical and figural to generalize the shape patterns. Within the figural approach, pre- service teachers made shape based generalization and used many strategies in which the relationship between the variables were examined. On the other hand, within the numerical approach, shapes were converted into numerical patterns and mostly the difference between the consecutive terms were used for generalization. It was ascertained that the structural features of shape influenced the choice of strategy. It was also determined that some pre- service teachers failed to convert the linear number pattern into a shape pattern and to generalize the quadratic patterns.

Science Code :

Key Words : Pattern, Strategy, Generalization, Figural Approach, Numerical Approach

Page Number : 213

Supervisor : Asst. Prof. Gülay KORU YÜCEKAYA

İÇİNDEKİLER

TELİF HAKKI ve TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU.....	i
ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI.....	ii
JÜRİ ONAY SAYFASI	iii
ÖZ.....	iv
ABSTRACT.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLolar LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ	x
KISALTMALAR LİSTESİ.....	xvi
BÖLÜM 1	1
GİRİŞ	1
1. 1. Problem.....	1
1. 1. 1. Örüntünün Tanımı	3
1. 1. 2. Örüntülerin Matematikteki Yeri ve Önemi	3
1. 1. 2. 1. Örüntüler ve Cebirsel Düşünme.....	5
1. 1. 2. 2. Örüntüler ve Görselleştirme	6
1. 1. 2. 3. Örüntüler ve İlişkiler	7
1. 1. 2. 4. Örüntüler ve Genelleme	9
1. 1. 2. 5. İlköğretim Matematik Programında Örüntüler	10
1. 1. 3. Örüntü Çeşitleri.....	11

1. 1. 3. 1. Tekrarlanan Örüntüler	11
1. 1. 3. 2. Değişen Örüntüler	13
1. 1. 4. Örüntülerde Kullanılan Stratejiler	17
1. 1. 4. 1. Değişen Sayı Örüntülerinde Kullanılan Stratejiler	17
1. 1. 4. 2. Değişen Şekil Örüntülerinde Kullanılan Stratejiler	22
1. 1. 5. Örüntü Kavramına İlişkin Öğrenci Güçlükleri.....	27
1. 2. Araştırmanın Amacı	29
1. 3. Araştırmanın Önemi.....	29
1. 4. Sayıtlar.....	30
1. 5. Sınırlılıklar.....	31
1. 6. Tanımlar	31
BÖLÜM 2	33
İLGİLİ ARAŞTIRMALAR	33
BÖLÜM 3	45
YÖNTEM.....	45
3. 1. Araştırma Modeli.....	45
3. 2. Evren ve Örneklem	45
3. 3. Veri Toplama Araçları	46
3. 3. 1. Test Maddeleri	46
3. 3. 2. Veri Toplama Aracının Geliştirilmesi	48
3. 3. 3. Klinik Görüşme Soruları	49
3. 4. Uygulama	50
3. 5. Verilerin Çözümlemesi ve Yorumlanması.....	50
BÖLÜM 4	53
BULGULAR.....	53

4. 1. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Sabit Değişen Şekil Örüntüsünde Kullandıkları Stratejilere İlişkin Bulgular	53
4. 1. 1. Ardışık Üç Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünün Yakın ve Uzak Adımını Bulmada Kullanılan Stratejilere İlişkin Bulgular	53
4. 1. 2. Ardışık Olmayan İki Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünü Genellemede Kullanılan Stratejilere İlişkin Bulgular.....	74
4. 1. 3. Ardışık Olmayan İki Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünün Yakın ve Uzak Adımını Bulmada Kullanılan Stratejilere İlişkin Bulgular	92
4. 1. 4. Tek Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünü Genellemede Kullanılan Stratejilere İlişkin Bulgular.....	106
4. 2. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Sabit Değişen Sayı Örüntüsünde Kullandıkları Stratejilere İlişkin Bulgular	121
4. 3. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Sabit Değişen Sayı Örüntüsünü Modellemelerine İlişkin Bulgular	127
4. 4. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Artarak Değişen Sayı Örüntüsünde Kullandıkları Stratejilere İlişkin Bulgular	136
4. 5. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Artarak Değişen Şekil Örüntüsünde Kullandıkları Stratejilere İlişkin Bulgular	147
BÖLÜM 5	161
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	161
5. 1. Sonuç	161
5. 2. Öneriler	173
KAYNAKLAR	177
EKLER.....	191

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1. Ardışık Üç Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünün Yakın ve Uzak Adımını Bulmada Kullanılan Stratejiler	54
Tablo 2. Ardışık Olmayan İki Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünü Genellemede Kullanılan Stratejiler	75
Tablo 3. Ardışık Olmayan İki Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünün Yakın ve Uzak Adımını Bulmada Kullanılan Stratejiler	93
Tablo 4. Tek Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünü Genellemede Kullanılan Stratejiler	107
Tablo 5. Sabit Değişen Sayı Örüntüsünü Genellemede Kullanılan Stratejiler	121
Tablo 6. Artarak Değişen Sayı Örüntüsünü Genellemede Kullanılan Stratejiler	136
Tablo 7. Artarak Değişen Şekil Örüntüsünü Genellemede Kullanılan Stratejiler	147

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Döngüsel ve sek sek tekrarlanan örüntü örnekleri (Papic, 2007)	12
Şekil 2. Aritmetik (sabit) değişen sayı örüntüsü örneği.....	13
Şekil 3. Aritmetik (sabit) değişen şekil örüntüsü örneği (Rivera ve Becker, 2008)	14
Şekil 4. Geometrik değişen örüntü örneği	14
Şekil 5. Artarak değişen sayı örüntüsü örneği	15
Şekil 6. Artarak değişen şekil örüntüsü örneği (Tanışlı, 2008)	15
Şekil 7. Ardışık toplama stratejisinin sabit değişen sayı örüntüsünde kullanımı	18
Şekil 8. Ardışık toplama stratejisinin artarak değişen sayı örüntüsünde kullanımı	18
Şekil 9. Terimlerin adım sayısının üç katıyla ilişkilendirilmesi	19
Şekil 10. Terimlerin adım sayısının karesiyle ilişkilendirilmesi	20
Şekil 11. “Bitişik Kareler” olarak adlandırılan lineer şekil örüntüsü örneği	22
Şekil 12. Örüntünün bir kare ve $n - 1$ tane yatay U ile yapılandırılması.....	24
Şekil 13. Örüntünün bir çubuk ve n tane yatay U ile yapılandırılması.....	24
Şekil 14. Örüntünün yatay ve dikey çubuklarla yapılandırılması.....	24
Şekil 15. Örüntünün ayrı ayrı karelerle yapılandırılması.....	25
Şekil 16. Sabit değişen şekil örüntüsü örneği (Chua ve Hoyles, 2012).....	25
Şekil 17. Örüntünün YŞKS ile genellenmesine ilişkin model (Chua ve Hoyles, 2012).....	26
Şekil 18. Örüntünün ŞYYŞ ile genellenmesine ilişkin model (Chua ve Hoyles, 2012).....	26
Şekil 19. ÇPÇYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin model	55
Şekil 20. ÇPÇYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model.....	56

Şekil 21. Ö13'ün birinci soruya ilişkin çözümü	57
Şekil 22. EYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin model	57
Şekil 23. Ö37'nin birinci soruya ilişkin çözümü	58
Şekil 24. EYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model.....	58
Şekil 25. Ö14'ün birinci soruya ilişkin çözümü	59
Şekil 26. EYS kapsamındaki üçüncü stratejiye ilişkin model	59
Şekil 27. Ö36'nın birinci soruya ilişkin çözümü	59
Şekil 28. EYS kapsamındaki dördüncü stratejiye ilişkin model.....	60
Şekil 29. Ö38'in birinci soruya ilişkin çözümü	60
Şekil 30. Ö32'nin birinci soruya ilişkin çözümü	61
Şekil 31. Ö23'ün birinci soruya ilişkin çözümü	61
Şekil 32. Ö1'in birinci soruya ilişkin çözümü	62
Şekil 33. Ö11'in birinci soruya ilişkin çözümü	64
Şekil 34. Ö4'ün birinci soruya ilişkin çözümü	65
Şekil 35. Ö20'nin birinci soruya ilişkin çözümü	66
Şekil 36. Ö17'nin birinci soruya ilişkin çözümü	66
Şekil 37. Ö5'in birinci soruya ilişkin çözümü	69
Şekil 38. Ö46'nın klinik görüşmede geliştirdiği stratejinin modeli.....	72
Şekil 39. Ö49'un klinik görüşmede geliştirdiği stratejinin modeli.....	73
Şekil 40. EYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin modeller	76
Şekil 41. EYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model.....	77
Şekil 42. EYS kapsamındaki üçüncü stratejiye ilişkin model	78
Şekil 43. Ö35'in ikinci soruya ilişkin çözümü.....	78
Şekil 44. Ö6'nın ikinci soruya ilişkin çözümü.....	79
Şekil 45. EYS kapsamındaki dördüncü stratejiye ilişkin model.....	79
Şekil 46. Ö37'nin ikinci soruya ilişkin çözümü.....	80

Şekil 47. Ö38'in ikinci soruya ilişkin çözümü.....	80
Şekil 48. EYS kapsamındaki altıncı stratejiye ilişkin model	81
Şekil 49. ÇPCYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin model	82
Şekil 50. Ö10'un ikinci soruya ilişkin çözümü.....	82
Şekil 51. ÇPCYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model.....	83
Şekil 52. Ö13'ün ikinci soruya ilişkin çözümü.....	83
Şekil 53. YŞKS'ne ilişkin model	83
Şekil 54. Ö34'ün ikinci soruya ilişkin çözümü.....	85
Şekil 55. Ö23'ün ikinci soruya ilişkin çözümü.....	86
Şekil 56. Ö28'in ikinci soruya ilişkin çözümü.....	87
Şekil 57. Ö29'un ikinci soruya ilişkin çözümü.....	88
Şekil 58. Ö30'un ikinci soruya ilişkin çözümü.....	88
Şekil 59. Ö24'ün ikinci soruya ilişkin çözümü.....	88
Şekil 60. EYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin model	94
Şekil 61. Ö9'un üçüncü soruya ilişkin çözümü	95
Şekil 62. EYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model.....	95
Şekil 63. Ö37'nin üçüncü soruya ilişkin çözümü	96
Şekil 64. EYS kapsamındaki üçüncü stratejiye ilişkin model	96
Şekil 65. Ö6'nın üçüncü soruya ilişkin çözümü	97
Şekil 66. EYS kapsamındaki dördüncü stratejiye ilişkin model.....	98
Şekil 67. Ö3'ün üçüncü soruya ilişkin çözümü	98
Şekil 68. YŞKS'ne ilişkin model	99
Şekil 69. ÇPCYS'ne ilişkin model.....	100
Şekil 70. Ö10'un üçüncü soruya ilişkin çözümü	100
Şekil 71. Ö23'ün üçüncü soruya ilişkin çözümü	102
Şekil 72. Ö4'ün üçüncü soruya ilişkin çözümü	103

Şekil 73. Ö27'nin üçüncü soruya ilişkin çözümü	105
Şekil 74. Ö34'ün üçüncü soruya ilişkin çözümü	106
Şekil 75. Ö28'in üçüncü soruya ilişkin çözümü	106
Şekil 76. EYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin modeller	108
Şekil 77. EYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin modeller.....	109
Şekil 78. Ö37'nin dördüncü soruya ilişkin çözümü.....	109
Şekil 79. EYS kapsamındaki üçüncü stratejiye ilişkin model	110
Şekil 80. Ö13'ün dördüncü soruya ilişkin çözümü.....	111
Şekil 81. EYS kapsamındaki dördüncü stratejiye ilişkin model.....	111
Şekil 82. EYS kapsamındaki beşinci stratejiye ilişkin ilk model	112
Şekil 83. EYS kapsamındaki beşinci stratejiye ilişkin ikinci model	112
Şekil 84. ÇPCYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin model	114
Şekil 85. Ö10'un dördüncü soruya ilişkin çözümü.....	114
Şekil 86. ÇPCYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model.....	115
Şekil 87. Ö18'in dördüncü soruya ilişkin çözümü.....	116
Şekil 88. Ö1'in dördüncü soruya ilişkin çözümü.....	116
Şekil 89. Hatalı genelleme yapan bir öğretmen adayının çözüme ilişkin modeli.....	116
Şekil 90. Ö14'ün dördüncü soruya ilişkin çözümü.....	117
Şekil 91. Ö36'nın dördüncü soruya ilişkin çözümü.....	117
Şekil 92. Ö20'nin dördüncü soruya ilişkin çözümü.....	118
Şekil 93. Ö21'in dördüncü soruya ilişkin çözümü.....	119
Şekil 94. Ö31'in dördüncü soruya ilişkin çözümü.....	119
Şekil 95. Ö25'in dördüncü soruya ilişkin çözümü.....	120
Şekil 96. Ö30'un dördüncü soruya ilişkin çözümü.....	120
Şekil 97. Ö5'in beşinci soruya ilişkin çözümü	122
Şekil 98. Ö11'in beşinci soruya ilişkin çözümü	123

Şekil 99. Ö13'ün beşinci soruya ilişkin çözümü	124
Şekil 100. Ö10'un beşinci soruya ilişkin çözümü	125
Şekil 101. Ö32'nin beşinci soruya ilişkin çözümü	125
Şekil 102. Ö6'nın beşinci soruya ilişkin çözümü	126
Şekil 103. Ö39'un beşinci soruya ilişkin çözümü	127
Şekil 104. Ö17'nin beşinci soruya ilişkin çözümü	127
Şekil 105. Ö10'un sayı örüntüsüne ilişkin modeli.....	128
Şekil 106. Ö48'in sayı örüntüsüne ilişkin modeli.....	128
Şekil 107. Ö39'un sayı örüntüsüne ilişkin modeli.....	129
Şekil 108. Ö9'un sayı örüntüsüne ilişkin modeli.....	129
Şekil 109. Ö47'nin sayı örüntüsüne ilişkin modeli.....	130
Şekil 110. Ö45'in klinik görüşmede çizdiği model	130
Şekil 111. Ö46'nın klinik görüşmede çizdiği model	131
Şekil 112. Ö37'nin sayı örüntüsüne ilişkin modeli.....	132
Şekil 113. Ö20'nin sayı örüntüsüne ilişkin modeli.....	133
Şekil 114. Ö31'in sayı örüntüsüne ilişkin modeli.....	133
Şekil 115. Ö3'ün sayı örüntüsüne ilişkin modeli.....	133
Şekil 116. Ö6'nın sayı örüntüsüne ilişkin modeli.....	134
Şekil 117. Ö49'un klinik görüşmedeki model denemeleri	134
Şekil 118. Ö50'nin klinik görüşmedeki model denemeleri	135
Şekil 119. Ö34'ün altıncı soruya ilişkin çözümü.....	137
Şekil 120. Ö2'nin altıncı soruya ilişkin çözümü.....	137
Şekil 121. Ö14'ün altıncı soruya ilişkin çözümü.....	138
Şekil 122. Ö27'nin altıncı soruya ilişkin çözümü.....	138
Şekil 123. Ö6'nın altıncı soruya ilişkin çözümü.....	139
Şekil 124. Ö32'nin altıncı soruya ilişkin çözümü.....	139

Şekil 125. Ö31'in altıncı soruya ilişkin çözümü.....	140
Şekil 126. Ö13'ün altıncı soruya ilişkin çözümü.....	140
Şekil 127. Ö40'ın altıncı soruya ilişkin çözümü.....	141
Şekil 128. EYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin model	148
Şekil 129. EYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model.....	149
Şekil 130. YŞKS'ne ilişkin model	151
Şekil 131. Ö35'in yedinci soruya ilişkin çözümü	151
Şekil 132. ŞYYs kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin model.....	152
Şekil 133. Ö37'nin yedinci soruya ilişkin çözümü	152
Şekil 134. ŞYYs kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model	153
Şekil 135. Ö36'nın yedinci soruya ilişkin çözümü	153
Şekil 136. Karma stratejiye ilişkin model.....	154
Şekil 137. Ö10'un yedinci soruya ilişkin çözümü	154
Şekil 138. Ö28'in yedinci soruya ilişkin çözümü	155
Şekil 139. Ö14'ün yedinci soruya ilişkin çözümü	155
Şekil 140. Ö31'in yedinci soruya ilişkin çözümü	156
Şekil 141. Ö40'ın yedinci soruya ilişkin çözümü	156
Şekil 142. Ö26'nın yedinci soruya ilişkin çözümü	157
Şekil 143. Ö20'nin yedinci soruya ilişkin çözümü	157
Şekil 144. Ö38'in yedinci soruya ilişkin çözümü	158
Şekil 145. Ö30'un yedinci soruya ilişkin çözümü	158
Şekil 146. Ö23'ün yedinci soruya ilişkin çözümü	159

KISALTMALAR LİSTESİ

MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
EYS	Ekleyerek Yapılandırma Stratejisi
ÇPÇYS	Çakışan Parçaları Çıkararak Yapılandırma Stratejisi
YŞKS	Yardımcı Şekil Kullanma Stratejisi
ŞYYS	Şekli Yeniden Yapılandırma Stratejisi
Ö	Öğretmen Adayı
G	Görüşmeci

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1. 1. Problem

Bireylerin, toplumların, bilim ve teknolojinin gelişiminde önemli bir disiplin olan matematik, düşünmeyi geliştirdiği bilinen en önemli araçlardan biridir. Bu nedenle matematik eğitimi temel eğitimin önemli yapı taşlarından birini, belki de en önemlisini oluşturur. Matematik eğitimi kişiye günlük hayatın gerektirdiği matematiksel bilgi ve becerilerin yanı sıra, olaylar arasında bağ kurma, problem çözme, analiz ve sentez yapma, tahminlerde bulunma, akıl yürütme gibi birçok düşünme becerisi kazandırır (Umay, 2003).

Matematik kendi içinde belli bölümlere ayrılmıştır. Bu bölümlerden biri cebirdir. Cebir; genel olarak, sayı ve semboller kullanarak eldeki incelenen ilişki veya ilişkileri genelleştirilmiş denklemlere dönüştüren bir matematik dalıdır (Akkaya, 2006). Taylor Cox (2003) cebirin, problemleri çözmek için bilinmeyen ve değişken barındıran, aritmetiğin genelleştirilmiş hali olduğunu ifade etmiştir. Sutherland ve Rojano (1993)'ya göre ise cebir, matematikteki veya başka disiplinlerdeki fikirleri açıklamak için kullanılan bir matematik dilidir. Benzer şekilde Usiskin (1997) de cebiri matematiğin dili olarak tanımlamıştır. Bu dil; bilinmeyenler, formüller, genelleştirilmiş örüntüler, değişkenlerin yerini alan yer belirleyiciler ve ilişkiler olmak üzere beş ana bileşenden oluşmaktadır.

Cebir hayatın her alanında kendisini hissettirir. Örneğin, dağıtım ve iletişim ağları, fizik kuralları, nüfus modelleri ve istatistiksel sonuçların hepsi cebirin sembolik dili ile sunulabilir (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Davidenko (1997), insanların günlük hayatta bilgileri analiz ederken cebir ve cebirsel düşünmeyi

kullandıklarını ama çoğu zaman bunun farkında olmadıklarını belirtmiştir. Günlük hayatta karşılaşılan problemlerin değişkenleri arasındaki ilişkileri belirlemek ve problemlere farklı çözüm yolları üretmek cebirle mümkündür (Akkaya, 2006). Cebir hem bir problem çözme ve düşünme aracıdır (Dede ve Argün, 2003) hem de öğrencilere soyut düşünmenin ve mantıksal çıkarım yapmanın kapılarını açmaktadır (MacGregor ve Stacey, 1995). Lacampagne (1995) de cebir için; “Cebir matematiğin dilidir. O, tam manasıyla öğrenilmesi durumunda, ileri matematiksel konular için kapılar açar. O, öğrenilememesi durumunda üniversite ve teknolojiye dayalı kariyer kapılarını kapatır...” demiştir (Lacampagne’dan aktaran Dede, 2003). Bu bakımdan bireylerin cebir yeterliklerinin artırılması oldukça önemlidir. Bu da etkili bir cebir öğretimiyle mümkün olabilir.

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM), matematik eğitiminde uluslararası düzeyde kabul gören, çalışmaları pek çok araştırmacı için referans kabul edilen ve birçok matematik dersi öğretim programında çalışmalarına yer verilen bir merkezdir. NCTM tarafından 2000 yılında yayınlanan Okul Matematiğinin İlkeleri ve Standartları (Principles and Standards for School Mathematics - PSSM) isimli belgede okul öncesinden yükseköğretime kadar okul matematiğinin ilkelerinin neler olması gerektiği açıklanarak, tüm öğrenciler için kapsamlı matematik standartları belirlenmiştir. Bu belgede cebir standartlarının; “Örüntüleri, ilişkileri ve fonksiyonları anlama; cebir sembolleri kullanarak matematiksel durumları ve yapıları gösterme ve analiz etme; niceliksel ilişkileri göstermek ve anlamak için matematiksel modeller kullanma; çeşitli bağlamlardaki değişimleri analiz etme” olduğu ifade edilmiştir.

Çağdaş öğretim programları amaç, içerik ve beklentiler yönünden incelendiğinde cebirle ilgili olarak erişilecek hedeflerin sayıca giderek arttığı ve seviyenin yükseldiği, buna bağlı olarak da her ülkede daha çok sayıda kişinin daha derinlemesine cebirsel bilgi ve beceriler edinerek yetkinleşmesi gerektiği görülmektedir (Ersoy ve Erbaş, 2002). Ancak ülkemizde yapılan pek çok araştırmaya göre (Dede, Yalın, ve Argün, 2002; EARGED, 1996; Ersoy ve Erbaş, 1998, 2002) öğrenciler cebiri anlamada güçlük çekmekte ve bu nedenle matematikteki başarıları düşmektedir. Bu güçlüklerle birçok ülkede karşılaşılmakta ve bu durum sadece ilköğretim seviyesinde kalmayıp ortaöğretim, hatta yükseköğretim seviyesinde karşımıza çıkmaktadır. Blair (2001, s. 65), cebir öğretimiyle ilgili olumsuzlukların giderilebilmesi ve cebirsel kavramların daha iyi anlaşılabilmesi için

cebirsel düşünmenin gelişimini sağlayıcı çalışmalara ihtiyaç duyulduğunu, bunlardan birinin örüntü çalışmaları olduğunu ifade etmiştir. Benzer şekilde NCTM (2000), öğrencilerin matematiksel anlamalarını ve cebirsel düşüncelerini geliştirmede örüntülerin önemli bir rol üstlendiğini belirtmiştir. Bu bağlamda uluslararası literatürde farklı sınıf düzeylerindeki öğrencilerin örüntüleri genelleme süreçleri ile bu süreçte kullandıkları stratejileri analiz etmeye, öğrenci güçlüklerini belirlemeye ve örüntü etkinliklerinin matematiksel becerilerin gelişimine olan katkısını incelemeye yönelik pek çok araştırmaya rastlanmaktadır. Matematik eğitimi etkileyen önemli faktörlerden birinin öğretmen yeterlikleri olmasından hareketle öğrenciler kadar, ileride cebir öğretiminden sorumlu olacak öğretmen adaylarının da örüntü konusundaki bilgilerinin araştırılmasının gerekli olduğu düşünülmektedir. Bu bakımdan bu araştırma ile ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının değişen örüntülere ilişkin genelleme stratejileri belirlenmeye çalışılmıştır.

1. 1. 1. Örüntünün Tanımı

Örüntü kavramı değişik şekillerde tanımlanmaya çalışılmıştır. Bazı matematik eğitimcilerinin örüntü tanımları şu şekildedir:

- Örüntü; geometrik şekillerin, seslerin, sembollerin ya da eylemlerin sistematik bir birleşimidir (Souviney, 1994, s. 368).
- Örüntü; düzenli dizilmiş nesne veya şekillerin oluşturduğu manzumedir (Olkun ve Toluk Uçar, 2007, s. 105).
- Örüntü; sayısal ya da uzaysal düzenlilik (Papic ve Mulligan, 2005, s. 609).

1. 1. 2. Örüntülerin Matematikteki Yeri ve Önemi

Birçok filozof, matematikçi ve matematik eğitimcisi örüntülerin matematik öğrenimi ve öğretiminde çok önemli bir kavram olduğuna inanmaktadır (Yaman, 2010). Örüntülere verilen bu önemin matematiğin bazı tanımlarında açıkça vurgulandığı ve matematiğin “örüntüler ve düzen bilimi” olarak tanımlandığı görülmektedir (Goldenberg, Cuoco, ve

Mark, 1998; Lan- Ma, 2007; Van De Walle, 1998; Zazkis ve Liljedahl, 2006). Ayrıca örüntü, düzen ve ilişki aramanın matematiğin bütününde gerçekleştirilen eylemlerden biri olduğu belirtilmektedir. Bu bağlamda Olkun ve Toluk Uçar (2007, s. 35) matematik yapma sürecinin, “bir örüntü ve düzen arayarak problem çözme süreci” olarak açıklanabileceğini ifade etmişlerdir. NCTM (1989), okul matematiğinin program ve değerlendirme standartlarını açıklarken örüntülerin öneminden şu şekilde bahsetmiştir:

Tüm dünya örüntülerle doludur. Bu nedenle matematik programları, öğrencilerin her gün karşılaştıkları örüntülerle ve bu örüntülerin matematiksel modelleri veya tanımlamaları ile ilgilenmelerine yardımcı olmalıdır.

Örüntüler matematiksel kavramların anlaşılmasında önemli bir role sahiptir. Örüntüleri tanıma, devam ettirme ve oluşturma yeteneği; matematiksel ilişkileri görmede, genelleme yapmada, matematiğin düzenini ve mantığını kavramada temeldir (Burns, 2000, s. 112). Ayrıca örüntüler, matematiksel düşüncelerin ve ilişkilerin soyutlanmasında, matematiksel akıl yürütme becerileri ile (Papic ve Mulligan, 2005) cebirsel ve fonksiyonel düşünmeye dayalı kavramların gelişiminde anahtar bir kavramdır (Tanışlı ve Olkun, 2009, s. 7). Çocuklarda sayı duyusu ve matematiksel keşif örüntülerle gelişir. Örüntüler çocukların önce sıralama, hesaplama ve dizme gelişimlerine yardımcı olur, daha sonra temel işlemler için düşünme stratejilerinin gelişimini sağlarlar (Reys, Suydam, Lindquist, ve Smith, 1998, s. 94). Örüntüler, düzenlilik ve ardışıklık düşüncesinin gelişimi yanında çok farklı iki durumun aynı matematiksel özelliklere sahip olması düşüncesinin temellerini hazırlamada da etkilidir (Threlfall, 1999).

Örüntülerin gelişimini sağladığı diğer beceriler ise şunlardır (Cathcart, Pothier, Vance, ve Bezuk’tan aktaran Tanışlı ve Olkun, 2009, s. 7- 8):

- Tanıma (recognize): Çeşitli içeriklerde matematiksel olanakları keşfetmek.
- Gözünde canlandırma (visualize): Veri ve matematiksel olmayan durumlarda örüntüleri görmek.

- Sözlü ifade etme (verbalize): Gözle görülen örüntülerin doğasını sözel olarak ifade etmek.
- Sembolleştirme (symbolize): Örüntüde bulunan ilişkileri matematiksel sembollerle ifade etmek.
- Analiz etme (analyze): Bir örüntüyü bir diğer örüntüyle ilişkilendirmek ve yeni örüntüleri tahmin etmek.

1. 1. 2. 1. Örüntüler ve Cebirsel Düşünme

Cebir ile ilişkili olmasına rağmen cebirsel düşünme, cebir teriminin sahip olduğundan daha geniş ve farklı bir anlama sahiptir. Driscoll (1999) cebirsel düşünmeyi; “nicel durumları göstererek değişkenler arasındaki ilişkiyi açık hale getirebilme kapasitesi” şeklinde tanımlamıştır (Driscoll’dan aktaran Yenilmez ve Teke, 2008).

Cebirsel düşünme; problem çözme, akıl yürütme, gösterimleri kullanma, değişkenleri anlama, sembolik gösterimlerin anlamını açıklama, matematiksel fikirlerin gelişimi için modellerle çalışma, gösterimler arasında dönüşüm yapma becerilerini içerir (Kaf, 2007). NCTM (2000)’ye göre ise cebirsel olarak düşünme; fonksiyonları anlamayı, cebirsel sembolleri kullanarak matematiksel yapı ve durumları farklı şekillerde temsil ve analiz etmeyi, nicel ilişkileri temsil etmek ve anlamak için matematiksel modeller kullanmayı, gerçek yaşamda karşılaşılan farklı durumlardaki değişimi analiz etmeyi gerektirir.

Cebirsel düşünmenin temelinde örüntü arama ve genelleme vardır. Öğrencilerin cebirsel olarak düşünebilmeleri için örüntüleri tanımlayabilmeleri, devam ettirebilmeleri ve genelleme yapabilmeleri gereklidir (Smith’den aktaran Steele, 2005, s. 142). Diğer bir deyişle cebirsel düşünme üç aşamadan oluşmaktadır: Örüntü arama, örüntüyü tanıma ve tanımlama, örüntüyü genelleme. Örüntü arama, bir problem durumundan bilgiyi ortaya çıkarmadır. Örüntüyü tanıma ve tanımlama, bir matematiksel analizdir. Yani, bilgiyi matematiksel olarak kelime, diyagram, tablo, grafik ve denklemlerle temsil etmedir. Örüntüyü genelleme ise bilinmeyen bulma, varsayımları test etme ve fonksiyonel bir ilişki tanımlama gibi matematiksel bulguların yorumlanması ve uygulanmasıdır (Herbert ve

Brown, 1997, s. 123- 124). Bu bakımdan cebirsel düşünmenin gelişimi, bireylerin örüntü etkinlikleri ile edinecekleri deneyimlerle ilintilidir.

1. 1. 2. 2. Örüntüler ve Görselleştirme

Matematiksel görselleştirme; görsel modelin zihinsel bir yapıya dönüşüm sürecidir (Schnotz, Zink, ve Pfeiffer, 1995). Zazkis, Dubinsky, ve Dautermann (1996) görselleştirme sürecinin; “dış dünyada algılanan bir obje ya da olayın zihinde canlandırılması veya zihinde canlandırılan bir yapının kâğıt- kalem, somut materyal ya da bilgisayar kullanılarak fiziksel dünyaya aktarılması” şeklinde gerçekleşebileceğini belirtmişlerdir.

Matematiğin çeşitli alanlarında görselleştirme ile ilgili çok sayıda araştırma yapılmıştır. Araştırmacılardan bazıları görselleştirmenin tek başına yeterli olmadığını ve sadece analitik akıl yürütmenin bir bileşeni olarak kullanılabileceğini ifade etmişlerdir (Goldenberg, 1996). Bazı araştırmacılar ise görsel düşünme yeteneğinin problem çözmede önemli bir rol oynadığını, görsel yaklaşımların matematiksel öğrenmeyi destekleyici bir potansiyele sahip olduğunu ve soyut kavramların doğru yapılandırılmasına katkı sağladığını belirterek, matematikte görselleştirmenin kullanılmasının ve geliştirilmesinin önemine işaret etmişlerdir (Hitt, 1998; Presmeg, 1986; Zimmermann ve Cunningham, 1991).

Gardner (1993) bazı bireylerin düzenliliği uzamsal ya da görsel olarak, bazılarının ise mantıksal ya da analitik olarak tanıdıklarını ifade etmiştir. Matematiksel etkinliklerde de bilgi işleme sürecinin farklı bireylerde farklı yollarla gerçekleştiği; bazı öğrencilerin analitik yöntemlerden yararlandıkları, bazılarının ise görsel olarak akıl yürütme eğilimine sahip oldukları görülmektedir (Barbosa, Vale, ve Palhares, 2008). Bilişsel süreçteki bu farklılık, örüntü etkinliklerinin çeşitli biçimlerde sunulmasını gerektirmektedir. Ayrıca görsel temsillerin sembol sistemini anlamaya yardımcı olması ve soyut kavramların geometrik modeller yardımıyla görselleştirilmesinin bu kavramların öğretimi ve öğrenimine olumlu katkı sağlaması göz önüne alındığında şekil örüntülerinin farklı stratejilerle genellenmesi ve şekillerle sayılar arasındaki ilişki üzerinde durulması önemli

hale gelmektedir. Ancak Presmeg (1986), öğretmenlerin görsel akıl yürütmeyi problem çözmenin sadece ilk basamaklarında olası bir strateji olarak ya da analitik yöntemlerin bir tamamlayıcısı olarak sunma eğiliminde olduklarını ve öğrencilerin görsel fikirler ile analitik fikirler arasında bağlantı kurmadıklarını belirtmiştir. Einsenberg ve Dreyfus (1991) da, sembolizme yapılan vurgunun ve analitik metotları öğrenme ve öğretmenin daha kolay olmasının, öğrencilerin görselleştirmeye karşı isteksiz davranmalarına ve cebirsel ya da algoritmik yöntemleri görsel düşünmeye tercih etmelerine neden olduğunu ifade etmişlerdir (Einsenberg ve Dreyfus'dan aktaran Sağlam ve Bülbül, 2012).

1. 1. 2. 3. Örüntüler ve İlişkiler

Örüntülerde sayı ya da matematiksel şekiller arasındaki ilişkiler genel olarak yinelemeli (recursive) ve belirgin (explicit) olmak üzere iki başlık altında ele alınır. Bir önceki adımdan bir sonraki adımın elde edilmesi yani sonraki adımın bulunabilmesi için, önceki adımın kullanılması yinelemeli ilişki olarak tanımlanır (Hargreaves, Shorrocks, ve Threlfall, 1999; Ley, 2005; Orton ve Orton, 1999; Van De Walle, 2004). Yinelemeli ilişkide iki veri setindeki (adım sayısı ile terim arasındaki) ilişkiden ziyade tek veri setindeki (terimler arasındaki) ilişkiye odaklanılır. Adım sayısı ve o adımda yer alan öğelerin sayısını belirleyen kural ise belirgin ilişkidir (Tanışlı ve Olkun, 2009, s. 17- 18). Bir bağımsız (girdi) ve bir bağımlı (çıktı) değişken arasındaki ilişki olarak düşünüldüğünde belirgin ilişki, fonksiyonel bir ilişkidir. Kazanımına örüntü kavramı ile ilköğretimin ilk basamaklarında başlanılan bu ilişki, öğrencilerde soyut düşünme becerisinin geliştiği ortaöğretime gelindiğinde fonksiyon kavramı ile kimlik bulur (Kabael ve Tanışlı, 2010, s. 216). Belirgin ilişki, genel kuralı oluşturmada ve dolayısıyla örüntünün herhangi bir terimini (n . terim) bulmada yardım edicidir (Ley, 2005).

Matematik öğretiminde cebirsel düşünmenin gelişimi, nicelikler ve nicelikler arası ilişkiler üzerine kurulmuştur. Erken öğrenme basamaklarında kelimeler ile temsil edilerek öğretime başlanılan nicelik ve nicelikler arası ilişki bilgisi, ilerleyen basamaklarda değişken kavramının kazanımıyla cebirsel düşünme sürecinin her basamağında yer alır (Kabael ve Tanışlı, 2010, s. 216). Nicelikler arası ilişki arama, fonksiyonel düşünme olarak isimlendirilir. Fonksiyonel düşünme; ortaöğretimde fonksiyon kavramı ile değil, ilköğretim

hatta okul öncesi öğretimde önce somut materyaller arası ilişki ile başlar, sonrasında sırasıyla sayılar arası ve değişkenler arası ilişki ile devam eder (Kabael ve Tanışlı, 2010, s. 222).

Birçok matematiksel işlemin temelinde fonksiyon kavramı yatar. Ayrıca gerçek dünyadaki nicelikler arasındaki ilişkiler ve değişimlerin bu kavram ile ifade edilmesi fonksiyon kavramını önemli kılar. Fonksiyon kavramının öğrenilmesi, fonksiyonel ilişkinin kazanımı ile mümkün olur (Kabael ve Tanışlı, 2010, s. 217). Örüntülerde nesneler ya da sayılar arasında var olan ilişkinin tanımlanması ve genellenmesi fonksiyon kavramının gelişimini sağlama açısından önemlidir (Tanışlı ve Olkun, 2009, s. 16).

Fonksiyon kavramına ilişkin pek çok öğrenci güçlüğünün altında değişken kavramına ilişkin yanlışlıklar vardır. Değişken kavramı ise sanıldığı gibi aksine sembol temsili yani soyutlama bilgisi ile değil, örüntülerin öğretimi ile başlar (Kabael ve Tanışlı, 2010, s. 217). English ve Warren (1998), değişken kavramının geleneksel olarak denklemler konusu ile tanıtılması yaklaşımını sorgulamışlar ve değişken kavramının erken kazanımı için öğrencilerin şekil ve sayı örüntülerini araştırabilecekleri, formüle edebilecekleri ve genelledebilecekleri somut etkinlikler önermişlerdir. Erken basamaklarda bir örüntüye ilişkin elde edilen farklı formüllerin karşılaştırılması etkinliği, değişken kavramının kazanımından sonra eşitlik bilgisinin de bir öğretim etkinliği konumuna gelir (Kabael ve Tanışlı, 2010, s. 217).

Örüntü etkinlikleri değişken, eşitlik ve fonksiyon kavramlarının yanında dizi kavramının da temelini oluşturur. Diziler, tanım kümesi pozitif tam sayılar ve görüntü kümesi reel sayılar olan fonksiyonlardır. Örüntülerde adım sayısı ile terim arasındaki ilişki bir fonksiyonla ifade edilebildiği için sayı örüntüleri bir dizi belirtir. Dolayısıyla sayı örüntüsüne yönelik genel terimi bulma gibi etkinlikler dizi kavramının gelişimine katkı sağlar.

Örüntülerde nesneler ya da sayılar arasında yinelemeli ve belirgin ilişki arama dışında bazen örüntüdeki sayılar ya da nesnelerin özelliklerine odaklanılması söz konusu olabilir.

Örneğin; 3,8,13,18,23,... şeklinde verilen sayı örüntüsünde terimlerin tek, çift, tek, çift şeklinde devam ettiğinin ifade edilmesi bu ilişkiye ilişkin bir örnektir (Kabael ve Tanışlı, 2010, s. 215).

1. 1. 2. 4. Örüntüler ve Genelleme

Genelleme; ilgilenilen varlıkları ortak özelliklerine göre bir grupta toplama ve bu gruba ad verme işidir (Yağbasan ve Gülçiçek, 2003). Polya (1957, s. 108) genellemeyi, “bir kavrama ilişkin anlayıştan bu kavramı içeren bir kümeye ilişkin anlayışa geçmek veya sınırlı bir kümeye ilişkin kavrayıştan bu sınırlı kümeyi de içeren daha kapsamlı bir kümeye ilişkin kavrayışa geçmek” olarak tanımlamıştır. Kaput (1999) ise genellemeyi şöyle açıklamıştır (Kaput’tan aktaran Yeşildere ve Akkoç, 2011):

Örnek durum veya durumların ötesinde bir akıl yürütme ve iletişim kurma eylemi gerçekleştirerek örnek durumlar arasındaki ortak özelliklerin belirlenmesi veya açığa çıkarılması ya da akıl yürütme ve iletişim kurma eylemini örnek durumların ötesinde bir seviyeye, örnek durumlar arasındaki bir örüntüye, yapıya veya ilişkiye taşımak.

Matematik, ardışık soyutlama ve genellemeler süreci olarak geliştirilen fikirler (yapılar) ve bağıntılardan (ilişkilerden) oluşturulan bir sistemdir (Baykul, 2009, s. 34). Bu nedenle genelleme, matematiksel etkinliklerin merkezi ve matematiksel bilgi gelişiminin temeli olarak görülür (Polya, 1957). Üst düzey bir bilişsel beceri olan genellemenin (Krutetskii, 1976) matematik eğitiminde önemli bir yeri vardır. Genelleme; kavramların geliştirilmesinde kullanılan önemli bir zihinsel süreçtir (Yağbasan ve Gülçiçek, 2003) ve cebirin yapı taşlarından birisidir (Tanışlı ve Yavuzsoy Köse, 2011).

Örüntüyü oluşturan nesne, şekil veya sayılar arasındaki matematiksel fonksiyonu bulma işi bir genellemedir. Bu bakımdan örüntüler, genellemenin biçimlenmesinde temel bir adımdır (Jones’dan aktaran Hargreaves vd., 1999). Örüntüleri genelleme, çocuklarda cebirsel düşünmenin, değişken ve fonksiyon kavramlarının gelişiminde önemli bir ögedir (Lesley ve Freiman’dan aktaran Tanışlı ve Yavuzsoy Köse, 2011). Zaskis ve Liljedahl (2002, s.

379) matematikte, özellikle de cebirde her şeyin örüntülerin bir genellemesi olduğunu, bu nedenle örüntülerin matematiğin kalbi ve özü olduğunu ifade etmişlerdir.

1. 1. 2. 5. İlköğretim Matematik Programında Örüntüler

İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nda örüntü ile ilgili kazanımlar 5. sınıflarda “Sayılar” öğrenme alanı altında “Doğal Sayılar” alt öğrenme alanında; 6, 7 ve 8. sınıflarda ise “Cebir” öğrenme alanı altında “Örüntüler ve İlişkiler” alt öğrenme alanında yer almaktadır. Programda örüntülerin içerdiği ilişkileri keşfetmenin ve bunları genellemenin öğrencilerin çevrelerindeki dünyayı daha iyi algılayabilme becerilerinin gelişmesine yardımcı olacağı, örüntülerin farklı biçimlerde temsil edilmesinin ve özellikle sembolik olarak ifade edilmesinin cebirin temel kavramlarının oluşmasına önemli katkılar sağlayacağı belirtilmektedir (MEB, 2009, s. 98).

İlköğretim 6- 8. sınıflarda öğrencilerin örüntüdeki kuralı genellemesi ve harfle ifade etmesi temel beceri olarak ele alınmaktadır. Bu genellemeler daha sonra bir değişkenin diğer bir değişkene bağlı olarak değiştiği iki bilinmeyenli denklemlerle ilişkilendirilmekte ve kavramların daha anlamlı öğrenilmesine yardımcı olmaktadır. Ayrıca daha ileriki düzeylerde işlenecek olan fonksiyon kavramının alt yapısını hazırlayacak becerilerin gelişmesi sağlanmaktadır (MEB, 2009, s. 98).

İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'na göre 6. sınıfta öğrenciler, sayı örüntülerini modelleyerek bu örüntülerdeki ilişkiyi harflerle ifade eder, doğal sayıların kendisiyle tekrarlı çarpımını üslü nicelik olarak ifade eder ve üslü niceliklerin değerini belirler (MEB, 2009, s. 206- 207). Yedinci sınıfta öğrenciler tam sayıların kendileri ile tekrarlı çarpımını üslü nicelik olarak ifade eder ve sayı örüntülerini modelleyerek bu örüntülerdeki ilişkiyi harflerle ifade eder (MEB, 2009, s. 279- 281). Sekizinci sınıfta ise öğrenciler özel sayı örüntülerinde sayılar arasındaki ilişkileri açıklar (MEB, 2009, s. 345- 347).

Öğrenciler altıncı ve yedinci sınıfta sabit değişen sayı ve şekil örüntüleriyle genelleme yapmaktadırlar. Sekizinci sınıfta ise öğrencilere artarak değişen örüntüler ile ne aritmetik ne de geometrik örüntü sınıfına giren ama terimleri arasında bir ilişki bulunan örüntüler sunulmaktadır. Ayrıca bu sınıf seviyesinde karesel sayılar, üçgensel sayılar, aritmetik ve geometrik diziler, Fibonacci dizisi gibi öğrencilerin düzeyine uygun ve ilgisini çekebilecek özel sayı örüntülerinin incelenmesi gerektiği ifade edilmektedir.

Programın açıklamalar kısmında, örüntünün ilişkisinin değişik biçimlerde bulunabileceğinin ve farklı gösterimlerle ifade edilebileceğinin belirtilmesi gerektiği vurgulanmıştır. Bu bağlamda ders kitaplarında bir sayı örüntüsünü farklı matematik cümleleriyle ifade etmeye ve sayı örüntüsüne uygun bir model oluşturmaya yönelik etkinliklerin olduğu görülmektedir. Bu noktada sayı örüntülerini temsil etmek için çizilen bazı modellerin örüntüyü sadece görselleştirmeye yönelik olması dikkat çekicidir. Ayrıca bazı sayı örüntülerinin kuralı bulmayı kolaylaştıracak şekilde modellendiği ancak genelleme sürecinde bu şekil örüntülerinin analiz edilmediği ve kuralların sayısal yaklaşımla belirlendiği görülmektedir. Şekil örüntülerinde ise öğrencilerden örüntünün sonraki birkaç adımını çizmeleri ve şekillerde kullanılan eleman sayısını belirlemeleri istenmektedir. Burada da şekilsel ipuçlarının değerlendirilmediği ve görsel yaklaşımla genelleme yapmaya yönelik bir etkinliğin olmadığı göze çarpmaktadır.

1. 1. 3. Örüntü Çeşitleri

Örüntüler yapılarına göre tekrarlanan ve değişen olmak üzere iki grupta incelenebilir. Örüntüler ister tekrarlanan, isterse de değişen olsun sayı, şekil, t- tablosu, sözel problem gibi farklı şekillerde temsil edilebilir ve bu temsil biçimleri birbirine dönüştürülebilir (Tanışlı ve Olkun, 2009, s. 9).

1. 1. 3. 1. Tekrarlanan Örüntüler

Terimler arası ilişkinin sabit bir dizilimin ötelenmesi şeklinde oluşturulduğu örüntüler, tekrarlanan örüntülerdir (Olkun ve Yeşildere, 2007, s. 12). Tekrarlanan örüntülerde bir

grup eleman sürekli kendini tekrar eder (Warren ve Cooper, 2006). Bu gruplar örüntünün “tekrar birimi” olarak adlandırılır ve büyüklük, şekil, boyut ve yön gibi özelliklere bağlı olarak değişebilir (Papic, 2007). Tekrarlanan örüntüleri değişik şekillerde temsil etmek mümkündür. Örneğin; ABABAB şeklindeki bir tekrarlanan örüntü hareketlerle (otur, kalk, otur, kalk), seslerle (davul sesi, zil sesi, davul sesi, zil sesi), geometrik şekillerle (Δ O Δ O Δ O) ya da duyularla (pürüzsüz, pürüzlü, pürüzsüz, pürüzlü, pürüzsüz, pürüzlü) temsil edilebilir (Warren ve Cooper, 2006).

Tekrarlanan örüntüler doğal olarak matematiksel yapılar içinde de ortaya çıkabilir. Örneğin; rasyonel sayıların devirli ondalık açılımları ($4/11=0,363636\dots$), herhangi bir aritmetik dizinin birler basamağından oluşan sayı dizisi (3,7,11,15,19,23,27,...) ya da herhangi bir doğal sayının ardışık kuvvetlerinin son basamaklarından oluşan sayı dizisi (3^n ; 3,9,27,81,243,...) tekrarlanan bir örüntüdür (Zazkis ve Liljedahl, 2006).

Papic (2007) tekrarlanan örüntüleri doğrusal, döngüsel ve sek sek olmak üzere üç bölümde ele almıştır. Doğrusal tekrarlanan örüntüler en çok kullanılan formdur. ABABAB gibi basit tekrarlamalar doğrusal tekrarlanan örüntülerin tipik örneklerinden birisidir. Yatay, dikey ya da diyagonal olarak sunulabilen bu örüntüler farklı talimatlara uygun olarak sonsuza kadar uzayabilir. Döngüsel tekrarlanan örüntülerin ise ilk veya son noktası tam olarak belli değildir. Gündüz- gece, mevsimler ya da bir çokgensel bölgenin sınırında oluşturulan örüntüler bu örüntü tipine örnek olarak gösterilebilir. Bu tip örüntü etkinlikleri öğrencilerin sayma stratejileri hakkında bilgi vermesi açısından önemlidir. Sek sek örüntüler ise çocukların yatay ve dikey karelerden oluşmuş bir tekrar birimini döndürme yeteneklerini araştırmak için kullanılır. Bu tür görevlerle, örüntünün yönündeki değişimler ve öğrencilerin dönüşümle ilgili becerileri incelenir. Şekil 1’de sırasıyla döngüsel ve sek sek tekrarlanan örüntü örnekleri verilmiştir.



Şekil 1. Döngüsel ve sek sek tekrarlanan örüntü örnekleri (Papic, 2007)

1. 1. 3. 2. Değişen Örüntüler

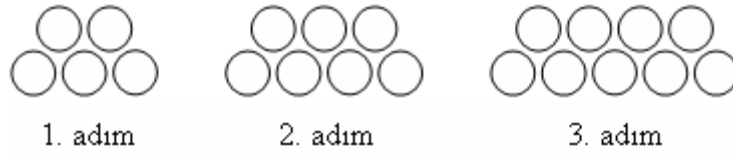
Değişen örüntülerde sayılar, şekiller ya da somut materyaller belirli bir kurala göre sıralanır. Başka bir deyişle örüntüdeki her terim, bir önceki terime bir kural ile bağlıdır. Bu örüntülerde terimler arası ilişki genişleyen ya da daralan bir seyir izler. Değişen örüntülerde örüntüyü devam ettirmenin yanı sıra genelleme ya da cebirsel bir ilişki aranır (Tanışlı ve Olkun, 2009, s. 11). Bu tür örüntüler, fonksiyon kavramı ve matematiksel düşünme için başlangıç noktasıdır (Van De Walle, 2004) ve cebirin bir öncüsü olmada son derece önemlidir. Değişen örüntüler dört farklı biçimde ele alınabilir (Tanışlı ve Olkun, 2009, s. 11):

1. Aritmetik (Sabit) Değişen Örüntüler: Takip eden her bir terimin bir öncekine sabit bir sayı/şekil eklenerek ya da çıkarılarak elde edildiği örüntülerdir. Bu tür örüntüler, kuralı ya da ilişkisi doğrusal bir denklemle açıklanabildiği için “doğrusal (lineer) örüntüler” olarak da adlandırılır. Sabit değişen örüntülerde ulaşılan kuralların genel formu; a ve b birer sabiti, n örüntüdeki terim sırasını ve $f(n)$, n . sıradaki terimi belirtmek üzere $f(n) = an + b$ şeklinde ifade edilir (Orton ve Orton, 1999, s. 108). Bu örüntülerin kuralı, ardışık terimler arasındaki sabit fark esas alınarak da yazılabilir. Bu durumda birinci terim a_1 ve ardışık terimler arası sabit fark d olmak üzere terimleri $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$ şeklinde olan örüntünün n . terimi $a_n = a_1 + (n-1)d$ ’dir.

4 7 10 13 ...

Şekil 2. Aritmetik (sabit) değişen sayı örüntüsü örneği

Şekil 2’de verilen örüntü, aritmetik değişen bir sayı örüntüsüdür. Bu örüntüde terimler, adım sayısının üç katının bir fazlasına eşittir ve genel terim $3n+1$ ’dir. Diğer taraftan ikinci terimi elde etmek için birinci terime 3 eklendiği, üçüncü terimi elde etmek içinse ikinci terime 3 eklendiği söylenebilir. Bu durumda örüntünün terimleri 4, 4+3, 4+3+3, 4+3+3+3 şeklinde yazılabilir ve örüntünün kuralı cebirsel olarak $4+3(n-1)$ biçiminde ifade edilebilir.



Şekil 3. Aritmetik (sabit) değişen şekil örüntüsü örneği (Rivera ve Becker, 2008)

Şekil 3’te verilen örüntü, aritmetik değişen bir şekil örüntüsüdür. Bu örüntünün her adımında, üst satırda adım sayısının bir fazlası ve alt satırda adım sayısının iki fazlası kadar çember vardır. Adım sayısı ile o adımdaki terim sayısı arasındaki bu ilişki cebirsel olarak $(n+1)+(n+2)=2n+3$ şeklinde ifade edilir. Terimler arası artış miktarıyla hareket edildiği zaman örüntünün kuralı; “Beş çemberle başlanır, her adımda bir önceki şeklin alt ve üst satırına birer çember eklenir.” şeklinde açıklanabilir. Bu durumda kural için $5+2(n-1)$ cebirsel ifadesi yazılabilir.

2. Geometrik Değişen Örüntüler: Birbirini takip eden terimlerin bir oran dâhilinde değiştiği örüntülerdir. Bu tür örüntülerde kural ya da ilişki üslü nicelikli denklemlerle açıklanabilir. Örneğin; a_1 örüntünün birinci terimi ve r örüntünün ardışık iki terimi arasındaki oran olmak üzere, terimleri $a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \dots$ olan bir örüntünün n . terimi için $a_n = a_1r^{n-1}$ kuralı kullanılabilir. Şekil 4’te geometrik değişen örüntülere bir örnek verilmiştir.

Adım Sayısı (Girdi)	Terim Sayısı (Çıktı)
1	$3 = 3 \cdot 4^0$
2	$12 = 3 \cdot 4^1$
3	$48 = 3 \cdot 4^2$
4	$192 = 3 \cdot 4^3$
...	...
n	$3 \cdot 4^{n-1}$

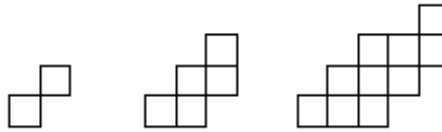
Şekil 4. Geometrik değişen örüntü örneği

3. *Artarak Değişen Örüntüler:* Ardışık terimler arasındaki farkların arttığı ya da azaldığı örüntülerdir. Bu örüntülerde terimler arasında sabit farklar yoktur. Fakat farklar arasındaki farklılıklara bakıldığında 2. ya da 3. adımda sabit farklara ulaşılmaktadır. Bu tür örüntülerin kuralları ikinci ya da üçüncü dereceden denklemlerle açıklanabilir. Örneğin; a , b , c , d birer sabit olup, n örüntüdeki adım sayısını ve $f(n)$ de örüntünün n . terimini göstermek üzere bu örüntülerin kuralları $f(n) = an^2 + bn + c$ ya da $f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$ şeklinde ifade edilebilir. Kuralı ikinci dereceden bir denklemlerle ifade edilebilen örüntüler “karesel (kuadratik) genişleyen örüntüler” olarak da adlandırılır.

5	8	13	20	29	...	Örüntünün terimleri
						Terimler arası farklar
						Farklar arası farklar

Şekil 5. Artarak değişen sayı örüntüsü örneği

Şekil 5’te artarak değişen bir sayı örüntüsü örneği verilmiştir. Bu örüntünün ardışık terimleri arasındaki ilk farklar sabit değildir. Fakat farklar arasındaki farklar sabittir ve kural cebirsel olarak $n^2 + 4$ şeklinde ifade edilebilir. Kuralı $n^2 + 1$ olan bir şekil örüntüsü örneği ise Şekil 6’daki gibidir.



Şekil 6. Artarak değişen şekil örüntüsü örneği (Tanışlı, 2008)

4. *Diğer Örüntüler:* Aritmetik, geometrik veya artarak değişen örüntüler sınıfına girmeyen fakat terimleri bir düzen içinde değişen örüntülerdir. Çok ünlü bir sayı dizisi olan Fibonacci sayıları ve Pascal üçgeni bu örüntü tipine örnektir.

Örüntülerin şekil, sayı dizisi ya da fonksiyon tablosu gibi farklı biçimlerde temsil edilmesi onların farklı roller üstlenmesine olanak sağlamaktadır. Örneğin; değişen şekil örüntüleri ile öğrencilerin daha çok görsel yaklaşımlarla düşünmelerini desteklemek ve görsel bir yaklaşımdan yola çıkarak, sayılar için alternatif bir yol bulabilmelerini sağlamak amaçlanır. Şekil örüntülerinin bir başka amacı da bir problemin çözülebilecek yollarını çeşitlendirmektir. Ayrıca şekil örüntülerinin, öğrencilerin gerekli durumlarda değişiklik yapabilmelerine ve bir adımdan yeni bir adım oluşturabilmelerine yardım edebileceği ifade edilmektedir (Orton, Orton, ve Roper, 1999, s. 122). Bu örüntülerin sembolik olarak verilen örüntülerden daha basit görüldüğü ve öğrenciler için daha eğlenceli olduğu belirtilmektedir. Bu bağlamda Rivera ve Becker (2005) bazı öğrencilerin şekilsel ipuçlarını yakalayıp değişkenler arasındaki fonksiyonel ilişkileri daha rahat belirleyebildiklerini tespit etmişlerdir.

Sayı dizileri atlayarak sayma olarak da bilinmektedir. Genelde matematik ders kitaplarında örüntüler bu sunum biçiminde verilmektedir. Sayı dizilerinde sayılar arasındaki matematiksel ilişki, sayıların ilgili dizisi içine gömülmüştür. Bu tür örüntülerde öğrencilerden, örüntüyü birkaç adım daha devam ettirmeleri ve dizideki herhangi bir terimi bulabilmek için bir kural ortaya çıkarmaları beklenir (Ley, 2005, s. 4). Fonksiyon tablosu biçiminde sunulan sayı örüntülerinde ise öğrencilerden, girdi sütunundaki sayıları çıktı sütunundaki sayılara dönüştürmede kullanılan matematiksel kuralı (fonksiyon) belirlemeleri istenir (Ley, 2005, s. 5). Fonksiyon tabloları, birçok sonucu sistematik olarak kaydetmede ve örüntü aramada önemli bir role sahiptir. Öğrenciler tablodaki verileri kullanarak örüntüleri tanımlarlar ve sonucu genellemler. Veriyi genellemek önemli ölçüde değişken kavramını anlamaya katkıda bulunur, aynı zamanda çocukta fonksiyonel düşünme ve fonksiyon kavramının gelişimini de sağlar (Tanışlı, 2008).

Sayı, şekil, tablo ya da nesneler ile temsil edilmiş örüntüleri genelleme etkinliklerinde öğrencilerden örüntüyü sonlu bir adıma kadar devam ettirmeleri, başka bir deyişle örüntünün yakın/ uzak adımını hesaplamaları ve örüntüdeki terimlerin oluşumunda geçerli olan bir kural bulmaları istenebilir. Bu süreçte çözüme farklı yollarla ulaşmak mümkündür.

1. 1. 4. Örüntülerde Kullanılan Stratejiler

Strateji; “bir amaca ulaşmayı sağlayan eylem şekli ya da sıraya koyulan işlemlerin bir koleksiyonu” şeklinde tanımlanabilir (Tanışlı, 2008). Öğrencilerin matematiksel bir yapı ya da durumla uğraşırken veya bir problem çözerken sonuca ulaşmak için kullandıkları yollar “çözüm stratejileri” olarak adlandırılmaktadır (Yaman, 2010).

Literatürde örüntüyü devam ettirmede, örüntünün kuralını bulmada ve örüntü oluşturmada örüntünün çeşidine, sunum biçimine ve öğrencilerin bakış açılarına göre değişiklik gösteren pek çok stratejinin olduğu görülmektedir (Barbosa vd., 2008; Lannin, Barker, ve Townsend, 2006; Orton ve Orton, 1999; Sasman, Linchevski, ve Olivier, 1999; Stacey, 1989; Rivera ve Becker, 2008; Tanışlı, 2008; Tanışlı ve Yavuzsoy Köse, 2011). Bu stratejilerinden bazıları farklı çalışmalarda farklı isimler altında ele alınmıştır. Bu araştırmada da literatür taraması sonucu elde edilen stratejilerden bazıları araştırmacı tarafından isimlendirildiği şekliyle kullanılmıştır.

Örüntü çeşidine göre stratejiler iki başlık altında ele alınmaktadır: Tekrarlanan örüntülerde kullanılan stratejiler ve değişen örüntülerde kullanılan stratejiler. Tekrarlanan örüntüler bu araştırmaya dâhil edilmediği için sadece değişen örüntülerde kullanılan stratejiler üzerinde durulmuştur.

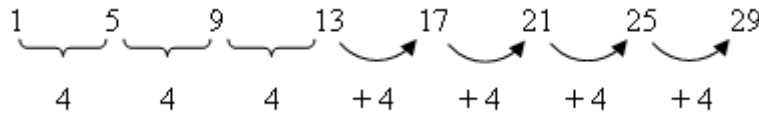
Sabit ya da artarak değişen örüntülerde kullanılan stratejiler; değişen sayı örüntülerinde kullanılan stratejiler ve değişen şekil örüntülerinde kullanılan stratejiler olmak üzere iki başlık altında ele alınmıştır.

1. 1. 4. 1. Değişen Sayı Örüntülerinde Kullanılan Stratejiler

Literatür taramasından elde edilen bilgiler doğrultusunda değişen sayı örüntülerini genellemede kullanılan stratejiler aşağıdaki başlıklar altında incelenmiştir:

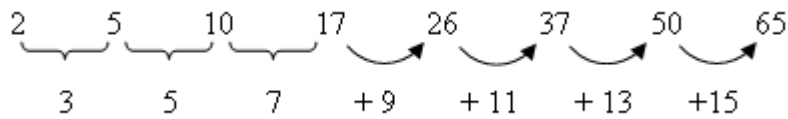
1. *Ardışık Toplama Stratejisi (Counting/ Skip Count/ Recursion)*: Bu strateji, örüntüde bulunması istenen terimin önceki terimden yararlanılarak hesaplanması esasına dayanır. Başka bir deyişle örüntüdeki terimler, ardışık terimler arasındaki farkın bir önceki terime eklenmesiyle elde edilir. Genelleme yaparken yinelemeli ilişkiye odaklanıldığı için bu stratejinin bazı araştırmalarda “yinelemeli strateji” olarak adlandırıldığı görülmektedir.

İlk dört terimi verilen ve sekizinci adımının bulunması istenen 1,5,9,13,... sabit değişen sayı örüntüsünde bu stratejiyi benimseyen bir öğrenci, öncelikle ardışık terimler arasındaki farkı inceler, daha sonra bu farkı her adımda bir önceki terime ekleyerek istenen adıma ulaşır. Bu strateji ile yapılan çözüm Şekil 7’deki gibi temsil edilebilir.



Şekil 7. Ardışık toplama stratejisinin sabit değişen sayı örüntüsünde kullanımı

Ardışık toplama stratejisi, artarak değişen sayı örüntülerinde de kullanılabilir. Şekil 8’de 2,5,10,17,... sayı örüntüsünün sekizinci adımının hesaplanması örnek olarak verilmiştir.



Şekil 8. Ardışık toplama stratejisinin artarak değişen sayı örüntüsünde kullanımı

Araştırmalar hem çocukların hem de yetişkinlerin örüntü problemlerinde yinelemeli bir yaklaşımla genelleme yapmaya eğilimli olduklarını göstermektedir (Orton ve Orton, 1999). Ancak bu stratejiyi kullananlar sadece çıktı sayıları üzerinden işlem yaptıkları için fonksiyonel ilişkileri görmede zorlanmaktadırlar (Warren, 1996, 2000, 2005). Ayrıca bu strateji örüntünün yakın adımlarını hesaplamada etkili olsa da uzak adımlarda zaman kaybettiricidir ve örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade etmede etkili değildir. Bu bağlamda Orton vd. (1999), uzak adımlar için yinelemeli stratejinin uygun olmadığının

farkına varan öğrencilerin yakın adımda benimsedikleri stratejiden vazgeçtiklerini ve değişkenler arası ilişki bulma (explicit) stratejisine yöneldiklerini belirtmişlerdir.

2. Aralık Sayma Stratejisi (Chunking/ Extended Recursion): Aralık sayma stratejisinde; örüntünün bulunması istenen adımı ile örüntüde verilen ilk/ son adım arasındaki aralık sayısı, ardışık terimler arasındaki sabit farkla çarpılır ve bu çarpım örüntüde verilen ilk/ son terime eklenerek istenen terime ulaşılır. Bu strateji, $f(n)$ örüntüde bulunması istenen terim, $f(k)$ örüntüde verilen terim ve d örüntüler arasındaki sabit fark olmak üzere $f(n) = (n - k)d + f(k)$ şeklinde ifade edilmektedir. Örneğin; 3,5,7,9,... sabit değişken sayı örüntüsünün 20. terimi bulunurken, 4. adımdan 20. adıma kadar 16 adım (aralık) olduğu belirlenir. Sabit farkın ardışık olarak 16 kez 4. terime eklenmesiyle 20. terime ulaşılır. Bu örüntüde dördüncü terim $f(4) = 9$ ve ardışık terimler arası sabit fark $d = 2$ 'dir. $f(20) = (20 - 4)2 + f(4)$ eşitliğinden 20. terim 41 olarak bulunur. Bu strateji n . adım için düşünüldüğünde ise $(n - 4)2 + f(4)$ şeklinde modellenir. Buradan örüntünün genel kuralı $(n - 4)2 + 9 = 2n + 1$ olarak elde edilir.

3. Adım Sayısı ile Terim Arasındaki İlişkiyi İnceleme Stratejisi: Bu stratejide örüntünün adım sayısı ile terim sayısı arasında fonksiyonel bir ilişki bulunur. Değişkenler arasındaki bu ilişki, hem yakın ve uzak adımı hem de örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi bulmada kullanılabilir. Bu strateji ile değişkenler arasında bir kat ilişkisi aranabilir. Örneğin; sabit değişken 4,7,10,13,... sayı örüntüsünde terimler, adım sayısının 3 katı ile Şekil 9'daki gibi ilişkilendirilebilir. Fark edilen bu ilişki ile örüntü devam ettirilebilir. Örneğin; 20. terim bulunmak istendiğinde $3 \cdot 20 + 1$ ilişkisi kullanılarak 61 sayısı elde edilir (Hargreaves vd., 1999). Örüntünün kuralını veren cebirsel ifade ise $3n + 1$ olarak yazılır.

$$4 = 3 + 1 = 3 \cdot 1 + 1$$

$$7 = 6 + 1 = 3 \cdot 2 + 1$$

$$10 = 9 + 1 = 3 \cdot 3 + 1$$

$$13 = 12 + 1 = 3 \cdot 4 + 1$$

Şekil 9. Terimlerin adım sayısının üç katıyla ilişkilendirilmesi

Artarak değişen sayı örüntülerinde ise değişkenler arasında bir kuvvet ilişkisi aranabilir. Örneğin; 2,5,10,17,... sayı örüntüsünde terimler, adım sayılarının kareleriyle Şekil 10'daki gibi ilişkilendirilebilir ve belirlenen bu ilişki yardımıyla 20. terim $20^2 + 1$ ve genel terim $n^2 + 1$ olarak bulunabilir.

$$2 = 1 + 1 = 1^2 + 1$$

$$5 = 4 + 1 = 2^2 + 1$$

$$10 = 9 + 1 = 3^2 + 1$$

$$17 = 16 + 1 = 4^2 + 1$$

Şekil 10. Terimlerin adım sayısının karesiyle ilişkilendirilmesi

4. Orantısal Akıl Yürütme Stratejisi (Whole- Object): Orantısal akıl yürütme, orantısal durumlar içindeki çarpımsal ilişkili matematiksel yapıları anlayabilmektir (Akkuş Çıkla ve Duatepe, 2002). Bu stratejide adım sayıları (girdiler) arasında bir oran bulunur ve bu oran terimleri (çıkıtları) bulmak için kullanılır. Bu strateji; $p = kq$ ise $f(p) = kf(q)$ şeklinde modellenebilir.

Orantısal akıl yürütme stratejisi, genel formülü an şeklinde olan örüntülerde (örneğin; 3,6,9,...) işe yaramaktadır. Ancak genel formülü $an \pm b$ olan örüntüler için bu strateji sık sık hatalı kullanılmaktadır (Lannin, 2003; Ley, 2005; Stacey, 1989). Örneğin; 4,7,10,13,... lineer sayı örüntüsünün 15. terimini bulmak için 3. terimin 5 ile çarpılması gerektiği düşünülür. $15 = 5 \cdot 3$ çarpımındaki mantık, istenen terimi bulmak için kullanılarak $f(15) = 5f(3)$ biçiminde hesaplama yapılır. Buradan üçüncü terim olan 10 sayısı, 5 ile çarpılarak 50 sayısına ulaşılır. Oysa genel terimi $3n+1$ olan bu örüntünün 15. terimi 46'dır.

Hatalı genellemelerin önüne geçebilmek için öğrenciler bu stratejiyi örüntüde verilen terimler üzerinde denemeye yönlendirilebilirler. Örneğin 4,7,10,13,... lineer sayı örüntüsünde 2. adımda 7; 4. adımda ise 13 sayısının olduğu, yani adım sayıları arasındaki oranın terimlerde bulunmadığının fark ettirilmesi önemlidir.

5. *Sabit Farkı Kat Olarak Alma Stratejisi (Difference Method)*: Bu stratejide, öncelikle örüntünün ardışık terimleri arasındaki sabit fark (d) belirlenir. Örüntünün genel formülünü belirlemede bu sabit fark kat olarak alınır ve dn şeklinde yazılır. Daha sonra örüntünün ilk terimine bakarak gerekli sayılar eklenir ya da çıkarılır ve genel formül $dn \pm a$ olarak elde edilir. Örneğin; 4,7,10,13,... sayı örüntüsünde sabit fark 3'tür. Genel formülü belirlerken ilk aşamada $3n$ yazılır. Birinci adımda n yerine 1 yazıldığında 4 sayısını elde etmek için $3n$ 'e 1 eklenmesi gerektiği tespit edilir ve genel formülün $3n+1$ olduğu bulunur. Bu strateji sabit değişen örüntülerde kısa sürede genel formüle ulaşmayı sağlamakta ancak artarak değişen örüntülerde işe yaramamaktadır. Bu nedenle öğrenciler değişkenler arasında bir ilişki bulma yönünde teşvik edilmelidir.

6. *Terimleri Birleştirme Stratejisi*: Bu stratejide a , b ve c adım sayısı ve n bulunması istenen adım olmak üzere; $a + b + c = n$ ise $f(n) = f(a) + f(b) + f(c)$ şeklinde hatalı bir genelleme yapılır. Örneğin; 4,7,10,13,... örüntüsünde 7. adımdaki sayıyı bulmak için 3. ve 4. adımdaki sayılar toplanır. $f(7) = f(3) + f(4)$ eşitliğinden yola çıkılarak aslında 21 sayısına eşit olan 7. terim $10 + 13 = 23$ olarak bulunur.

7. *Diğer Stratejiler*: Yukarıda ele alınan stratejiler dışında literatürde “sayıların doğasına bakma” ve “farklılığın doğasına bakma” stratejilerine rastlanmaktadır (Hargreaves vd., 1999). Sayıların doğasına bakma stratejisinde örüntüdeki sayılar için bir özellik aranır. Örneğin; 4,7,10,13,... sayı örüntüsünde terimlerin tek, çift, tek, çift şeklinde devam ettiğini belirtme bu stratejiye örnektir.

Örüntünün ardışık terimleri arasındaki farkın sabit olmadığı durumlarda ise farklılığın doğasına bakma stratejisinin kullanıldığı görülmektedir. Bu stratejide artarak değişen örüntülerin terimleri arasındaki farka yönelik bir özellik aranır. Örneğin; 2,5,10,17,... sayı örüntüsünde farklar 3,5,7,... şeklindedir. Bu farkların tek sayı olduğunun ifade edilmesi bu stratejiye örnektir.

1. 1. 4. 2. Değişen Şekil Örüntülerinde Kullanılan Stratejiler

Problem çözme sürecinde öğrenciler farklı stratejiler kullanabilmektedir. Krutetskii (1976) öğrencilerin bu süreçte sergiledikleri yaklaşımları; analitik (görsel olmayan), geometrik (görsel) ve harmonik (hem analitik hem de geometrik) akıl yürütme olarak tanımlamıştır (Krutetskii'den aktaran Barbosa, Palhares ve Vale, 2007). Rivera ve Becker (2005) da değişen şekil örüntülerini genellerken üç yaklaşım ortaya çıktığını belirtmiş ve bunları sayısal, görsel ve pragmatik (sayısal ve görsel) yaklaşımlar olarak isimlendirmişlerdir. Sayısal yaklaşımda, öncelikle örüntünün verilen adımlarında yer alan şekiller sayısallaştırılır ve şekil örüntüsü bir sayı örüntüsüne dönüştürülür. Daha sonra sayı örüntülerinde kullanılan stratejiler yardımıyla örüntünün yakın/ uzak adımı ya da genel terimi belirlenir.



Şekil 11. “Bitişik Kareler” olarak adlandırılan lineer şekil örüntüsü örneği

Şekil 11’de verilen lineer şekil örüntüsünde genelleme yaparken sayısal yaklaşımı benimseyen bir öğrenci, öncelikle verilen adımlarda kullanılan çubukları sayarak 4,7,10,... sayı örüntüsünü elde eder. Daha sonra bu sayı dizisini kullanarak istenen terimi bulur. Genellemeye ulaşmada şeklin yapısal özelliğinin dikkate alınması ise görsel yaklaşım olarak tanımlanır. Bu yaklaşımda, örüntüde kullanılan elemanların (çubuk, nokta, birim kare vb.) şekilleri oluşturmak için nasıl yapılandırıldığı incelenir. Pragmatik yaklaşım ise sayısal ve görsel yaklaşımın bir bileşimidir.

Hershkowitz, Arcavi ve Bruckheimer (2001) şekil örüntülerini genelleme sürecinde çeşitli görselleştirme mekanizmalarının olduğunu rapor etmişlerdir. Birçok stratejiye temel oluşturan bu analitik bileşenler;

- Bir yapıyı daha küçük birimlere ayırma
- Yardımcı yapılar oluşturma
- Orijinal yapıyı başka yapılara dönüştürme
- Yeniden düzenleme ve sentez

şeklinde açıklanmıştır. Birçok araştırmada öğrencilerin görsel yaklaşım kapsamında bu mekanizmaları kullanarak genelleme yaptıkları ve bazı araştırmacıların (Rivera ve Becker, 2008; Chua ve Hoyles, 2010a, 2010b, 2012) şekillerin nasıl yapılandırıldığını açıklayan stratejiler tanımladıkları görülmektedir.

Rivera (2010) görsel yaklaşım altında kullanılan stratejiler için dört kategori belirlemiştir. Araştırmacı tarafından isimlendirilen bu kategoriler aşağıdaki gibi açıklanabilir:

1. Ekleyerek Yapılandırma Stratejisi (Constructive Generalisation Strategy): Bu stratejide örüntüyü oluşturan yapılar, birbirleriyle çakışmayan daha küçük yapılardan meydana gelmektedir. Başka bir deyişle bazı yapılar, hiçbir diğeriyle üst üste gelmeyecek şekilde birbirlerine eklenerek örüntüde verilen şekli oluşturur. Örüntüye ilişkin genel formül, bu yapılardaki eleman sayısının toplamından yola çıkılarak bulunur. Chua ve Hoyles (2010a) bu stratejiyi “additive constructive generalisation” olarak adlandırmışlardır.

Şekil 11’deki lineer şekil örüntüsünün herhangi bir adımında kullanılan çubuk sayısı, bu strateji kapsamında farklı yöntemlerle bulunabilir. Örneğin; örüntüdeki şekiller, dört çubuktan oluşan bir kare ve her biri üç çubuktan oluşan yatay U biçimindeki parçalarla yapılandırılabilir. Bu durumda birinci adımda bir kare; ikinci adımda bir kare ve bir yatay U; üçüncü adımda ise bir kare ve iki yatay U olduğu fark edilir. Bulunan bu ilişki; “Her adımda bir kare ve adım sayısının bir eksiği kadar yatay U vardır.” şeklinde genellenir. Herhangi bir adımdaki toplam çubuk sayısını veren cebirsel ifade içinse karedeki ve yatay U’lardaki çubuk sayısı toplanarak $4 + 3(n - 1)$ formülüne ulaşılır. Bu strateji, toplam çubuk sayısının $4 + 3 \cdot 2 = 10$ olduğu üçüncü adımda Şekil 12’deki gibi temsil edilebilir.



Şekil 12. Örüntünün bir kare ve $n-1$ tane yatay U ile yapılandırılması

Şekiller, bir çubuğa eklenen yatay U biçimindeki parçalarla da yapılandırılabilir. Bu stratejiyle birinci adımda bir çubuk ve bir yatay U; ikinci adımda bir çubuk ve iki yatay U; üçüncü adımda ise bir çubuk ve üç yatay U olduğu görülür. Böylece her adımın bir çubuk ve adım sayısı kadar yatay U'dan oluştuğu fark edilir. Bu yapılandırma ile $1+3n$ genel formülüne ulaşılır. Toplam çubuk sayısının $1+3.3=10$ olduğu üçüncü adımda bu strateji Şekil 13'teki gibi temsil edilebilir.



Şekil 13. Örüntünün bir çubuk ve n tane yatay U ile yapılandırılması

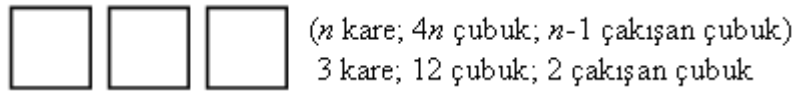
Eğer şekil yapılandırılırken yatay ve dikey çubukların bir araya getirildiği düşünülürse; her adımda toplam $2n$ tane yatay çubuk ve adım sayısının bir fazlası kadar ($n+1$ tane) dikey çubuk olduğu görülür. Yatay ve dikey çubuk sayıları toplanarak $2n+(n+1)$ genel formülüne ulaşılır. Örneğin; örüntünün 3. adımında 6 yatay ve 4 dikey çubuk vardır. Bu strateji, üçüncü adım üzerinde Şekil 14'teki gibi temsil edilebilir.



Şekil 14. Örüntünün yatay ve dikey çubuklarla yapılandırılması

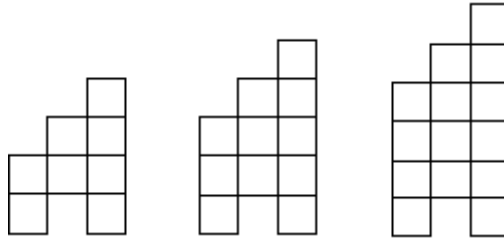
2. *Çakışan Parçaları Çıkararak Yapılandırma Stratejisi (Deconstructive Generalisation Strategy)*: Bu stratejide örüntüde verilen şekiller, bazı parçaları üst üste gelen yapıların bir araya getirilmesiyle oluşturulur. Genellemeye ulaşılırken önce bu yapılarıdaki elemanların hepsi ayrı ayrı sayılır, daha sonra üst üste gelen dolayısıyla iki kere sayılan parçalardan biri

çıkarılır. Örneğin Şekil 11’de verilen örüntü yapılandırılırken ayrı ayrı karelerin birbirine eklendiği düşünülürse, her adımda adım sayısı kadar kare ve adım sayısının 4 katı kadar çubuk olduğu görülür. Bu durumda n . adımda n tane kare ve $4n$ çubuk bulunur. Kareler birbirine eklenirken adım sayısının bir eksiği sayıda dikey çubuk diğerleriyle çakışır. Çakışan çubuklar çıkarılarak $4n - (n - 1)$ genel formülüne ulaşılır. Örüntünün üçüncü adımında bu strateji Şekil 15’teki gibi temsil edilebilir.



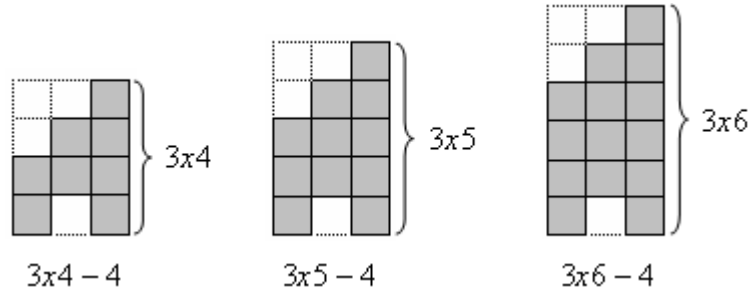
Şekil 15. Örüntünün ayrı ayrı karelerle yapılandırılması

3. Yardımcı Şekil Kullanma Stratejisi (Auxiliary- Driven Constructive or Deconstructive Generalisations): Bu stratejide örüntüyü oluşturan şekiller, başka bir yapının parçası olarak görülür. Daha iyi bilinen ve/ veya daha kolay görülen bu büyük yapıdan bazı parçalar çıkarılarak örüntüye ilişkin genellemeye ulaşılır. Chua ve Hoyles (2010a) bu stratejiyi “non-additive constructive generalisation” olarak adlandırmıştır.



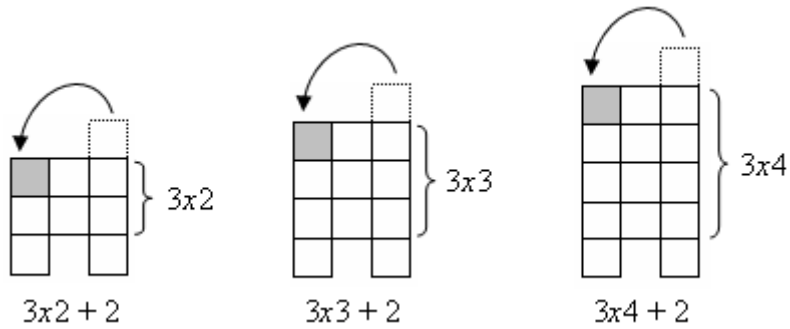
Şekil 16. Sabit değişen şekil örüntüsü örneği (Chua ve Hoyles, 2012)

Şekil 16’da verilen örüntüde şekiller bir dikdörtgenin parçası olarak görülebilir. Bu durumda öncelikle her bir şekli içine alan dikdörtgenin alanı hesaplanır. Bu alandan, şeklin dışında kalan birim karelerin çıkarılmasıyla örüntünün verilen adımında kullanılan toplam birim kare sayısına ulaşılır. Dikdörtgenin kısa kenarı 3 birimdir. Uzun kenarı ise adım sayısından 3 birim fazladır. Her adımda dikdörtgenin içindeki 4 birim kare orijinal şeklin dışında kalır. Bu birim kareler alandan çıkarıldığında $3(n + 3) - 4$ genel formülü elde edilir. Bu strateji Şekil 17’deki gibi modellenebilir.



Şekil 17. Örüntünün YŞKS ile genellenmesine ilişkin model (Chua ve Hoyles, 2012)

4. *Şekli Yeniden Yapılandırma Stratejisi (Reconstructive Generalisation Strategy)*: Bu stratejide örüntüde verilen şekillerdeki bazı parçalar, şekillerin başka yerlerine taşınır ve elde edilen yeni şekiller kullanılarak genellemeye ulaşılr. Örneğin; Şekil 16'daki örüntüyü oluşturan şekillerde sağdaki sütunun en üstünde yer alan bir birim kare, soldaki sütunun en üstüne taşınarak şekiller yeniden düzenlenir. Böylece iki birim kare üzerine yerleştirilmiş dikdörtgenlerden oluşan yeni bir örüntü elde edilir. Dikdörtgenlerin bir kenarı 3 birimdir ve diğer kenarı adım sayısından 1 fazladır. Bu dikdörtgenin alanına en alttaki 2 birim karenin eklenmesiyle genel formül $3(n+1)+2$ olarak elde edilir. Bu strateji Şekil 18'deki gibi modellenebilir.



Şekil 18. Örüntünün ŞYYYS ile genellenmesine ilişkin model (Chua ve Hoyles, 2012)

Değişkenler arasında fonksiyonel bir ilişkinin arandığı bu stratejiler dışında başka stratejilere de rastlanmaktadır. Bunlardan biri, modelleme yapma stratejisidir. Bu stratejide, örüntüde bulunması istenen adımın çizilmesi ve istenilen niteliğin sayılması söz konusudur (Lannin, 2003, 2005).

1. 1. 5. Örüntü Kavramına İlişkin Öğrenci Güçlükleri

Literatürde, cebir öğretiminde anahtar bir rol oynayan örüntü kavramına ilişkin birçok yanlış ve güçlüğün olduğu rapor edilmiştir. Cebir öğretimini daha etkin kılmak adına bu güçlüklerin tespit edilmesi ve bunları gidermeye yönelik çalışmaların yapılması büyük önem taşımaktadır. Örüntü kavramına ilişkin en sık rastlanan güçlüklerden biri ardışık terimler arasındaki ilişkiye odaklanmaktır. Bu güçlük; örüntüye ait bir terimin bir önceki terimden yararlanarak bulunmasına, başka bir deyişle örüntünün genişletilmesine dayanır (Aslan, 2011). Böyle bir güçlük gösteren öğrenci, örüntüye ait kuralı “bir önceki sayıya iki eklemek” şeklinde ifade edebilir. Bu durum örüntüdeki ilişkinin değil, kullanılan yöntemin genelleştirilmesi anlamına gelmektedir (Amit ve Neria, 2008). Ayrıca yinelemeli ilişkileri esas alarak genelleme yapan öğrencilerin bir örüntü sorusunda ilk olarak ardışık terimler arasındaki farkı belirledikleri görülmektedir.

Carraher, Martinez, ve Schilemann (2008), öğrencilerin lineer bir örüntüde adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi araştırmak yerine, ardışık terimler (çıktı değerleri) arasındaki ilişkiyi inceleme (yinelemeli strateji kullanma) eğiliminde olduklarını ifade etmişlerdir. Yinelemeli yaklaşım yakın adımları hesaplamada kullanışlı olsa da örüntünün yapısını anlamaya katkı sağlamamaktadır. Nitekim yakın adımda yinelemeli strateji ile başarılı olan öğrenciler, uzak adımlarda strateji değişikliği yapmakta ve sıklıkla terimler arası farkı kullanmaya dayanan stratejileri uygulamaktadırlar (Orton ve Orton, 1999).

Örüntülere ilişkin diğer bir güçlük, yakın adımı kolaylıkla bulurken uzak adımda zorlanmadır (Stacey, 1989). Bu güçlüğe daha çok yinelemeli stratejileri benimseyen öğrencilerde rastlanmaktadır. Adım sayısı ile terimler arasında fonksiyonel bir ilişki belirleyebilen öğrencilerse yakın ya da uzak adımı hesaplamada zorluk yaşamamaktadır. Ayrıca Hargreaves vd. (1999), öğrencilerin artarak değişen örüntüleri genelleme sürecinde sabit değişen örüntülere oranla daha çok zorlandıklarını saptamışlardır.

Bazı araştırmalarda öğrencilerin orantısal akıl yürütme ve deneme- yanlış stratejisini hatalı olarak kullanılabildiği görülmektedir. Deneme- yanlış stratejisi iyi bir problem

özme aracı olsa da tüm durumlar dikkate alınmadığı zaman yanlış sonuçlara ulaşmaya ve hatalı genelleme yapmaya neden olabilmektedir (Rivera ve Becker, 2005). Ayrıca literatürde bazı öğrencilerin buldukları sonuçların doğruluğunu problem bağlamında kontrol etmeyi göz ardı ettikleri ve bu nedenle hata yaptıklarının farkında olmadıkları yönünde bulgulara rastlanmaktadır (Lannin vd., 2006; Sasman vd., 1999).

Şekil örüntüleri (modeller) örüntünün kuralını bulmaya yardımcı araçlardır. Ancak bazı öğrenciler modeli kuralı bulma yönünde analiz edip incelemektense sayısal ilişkiye dökerek bir kural aramaktadır. Bu bağlamda Stacey (1989), öğrencilerin şekil örüntülerinde modelden çok sayısal ilişkilere odaklandıklarını belirlemiştir. Ayrıca örüntüde verilen şekli analiz ederek genelleme yapan öğrencilerin uzak adımı belirlemede başarılı olduklarını, buna karşın sayısal yaklaşımı benimseyen öğrencilerin uzak adımda zorlandıklarını saptamıştır. Steele ve Johanning (2004) ise öğrencilerin modeli etkili kullanamadıklarını ve örüntüye uygun model seçemediklerini belirtmişlerdir. Benzer bulgulara Tanışlı (2008), Aslan (2011) ve Yeşildere ve Akkoç (2010, 2011)'un araştırmalarında da rastlanmıştır.

Yeşildere ve Akkoç (2010) öğretmen adaylarının örüntünün kuralını bulmaya yönelik güçlüklerinin olduğunu tespit etmişlerdir. Öğretmen adaylarından bazıları örüntünün kuralını bulmak yerine, bir önceki terimden yararlanarak bir sonraki terimi bulmayı seçmiş, bazıları ise sayı örüntülerinin terimlerinin kendilerinden önce gelen terimler yardımıyla bulunabileceğini ifade etmiştir. Bunların yanı sıra öğretmen adaylarının literatürde öğrenci güçlüklerden birisi olarak ele alınan ardışık sayılar arasındaki ilişkiyi incelemeye odaklandıkları ve modelleri sadece görsel bir unsur olarak kullandıkları görülmüştür. Araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının öğrenci güçlükleri hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıklarını, dahası bizzat kendilerinin örüntülerle ilgili öğrenci güçlüklerine sahip olduklarını göstermiştir. Bu durum öğretmen adaylarının örüntü kuralını bulmak için kullandıkları stratejileri olumsuz yönde etkilemiştir. Bu bulgular öğrenci güçlüklerinin öğretmen kaynaklı olabileceğini düşündürmektedir.

Lannin vd. (2006) örüntüleri genelleme sürecinde öğrencilerin strateji seçimlerini etkileyen sosyal faktörlerden birinin öğretmen etkileşimi olduğunu belirtmişlerdir. Bu bağlamda

öğretmen adaylarının örüntüleri genellerken hangi stratejileri kullandıklarının ve literatürde rapor edilen güçlüklerle sahip olup olmadıklarının araştırılması önemli görülmektedir.

1. 2. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı; ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının değişen örüntülere ilişkin genelleme stratejilerini belirlemektir. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

- 1) İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının sabit değişen şekil örüntülerinde kullandıkları stratejiler nelerdir?
- 2) İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının sabit değişen sayı örüntülerinde kullandıkları stratejiler nelerdir?
- 3) İlköğretim matematik öğretmeni adayları sabit değişen sayı örüntülerinin kuralını temsil eden modeller oluşturabiliyorlar mıdır?
- 4) İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının artarak değişen sayı örüntülerinde kullandıkları stratejiler nelerdir?
- 5) İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının artarak değişen şekil örüntülerinde kullandıkları stratejiler nelerdir?

1. 3. Araştırmanın Önemi

Cebir, öğrencilerin öğrenme güçlüğü çektiği alanlardan biridir. Bu güçlükler; cebirin yapısından, öğrencilerin zihinsel gelişimleri ile hazır bulunuşluk düzeylerinden ve cebir öğretimindeki eksikliklerden kaynaklanmaktadır (Dede ve Argün, 2003). Cebirin öğretiminde birçok farklı metot kullanılmasına rağmen hala en yaygın olanı geleneksel metottur. Cebir, yaşamda gerekli olmasına rağmen öğrencilerin çoğu tarafından ezberlenerek öğrenilmeye çalışılmakta ve öğretmenlerin çoğu da kullandıkları öğretim metotlarıyla öğrencileri ezbere öğrenmeye yönlendirmektedirler. Öğretmenlerin, cebiri öğrencilerine anlama ve hatırlama düzeylerini en üst düzeye çıkaracak şekilde

öğretmeleri gerekmektedir (Kitt ve Leitze, 1992). Öğrencilerin cebirde yaşadıkları güçlükleri gidermek ve cebiri daha etkili öğretebilmek için farklı bir eğitimsel yaklaşımın gerekli olduğunun farkına varılmıştır. Bu bağlamda son yıllarda üzerinde durulan yaklaşımlardan biri örüntülerdir. Uluslararası literatürde, öğrencilerin cebirsel düşünme gelişimini sağlamak, daha sonraki matematik yaşantılarında karşılaşılabilecekleri birçok güçlüğü engellemek ve ortaöğretim/ yükseköğretim matematiği için iyi bir temel oluşturmak amacıyla, okul öncesi ve ilköğretim matematik programlarında örüntü etkinliklerine odaklanması gerektiği vurgulanmaktadır (Tanışlı ve Yavuzsoy Köse, 2011).

Örüntü etkinlikleri ile öğrencilerde akıl yürütme, problem çözme, ilişkilendirme ve kanıtlama becerilerinin gelişimini sağlamak için örüntülerin çeşitli stratejiler kullanılarak genellenmesi ve öğrencilerin bu konuda teşvik edilmesi gerekmektedir. Öğretmenlerin öğrencilerine kendi yöntem ya da stratejilerini kullandırma eğiliminde oldukları ve öğrencilerin de genellikle öğretmenlerinin yöntemini benimsedikleri (Chua ve Hoyles, 2010b) göz önüne alındığında, ileride cebir öğretiminden sorumlu olacak aday öğretmenlerin örüntüleri nasıl genellediklerinin ve bu süreçte hangi stratejileri kullandıklarının belirlenmesi önemli görülmektedir.

Uluslararası literatürde özellikle ilköğretim düzeyinde örüntüler ve örüntülerin genellenmesi üzerine pek çok çalışmaya rastlanmaktadır. Ancak örüntü kavramının İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programına ilk kez 2005 yılında eklenmesi nedeniyle Türkiye’de örüntülerle ilgili çalışmalar sınırlı sayıdadır. Ayrıca ilköğretim düzeyinde yapılmış çok sayıda çalışma olmasına rağmen ilköğretim matematik öğretmeni adayları ile gerek yurt içinde gerekse yurt dışında yapılmış az sayıda çalışma vardır. Bu bakımdan bu araştırmanın literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1. 4. Sayıtlar

- 1) Kapsam geçerliği için uzman kanısı yeterlidir.
- 2) Öğretmen adayları örüntü kavramına ilişkin problemleri içtenlikle yanıtlamışlardır.

1. 5. Sınırlılıklar

Bu araştırma;

- 1) 2011- 2012 eğitim- öğretim yılı bahar döneminde Gazi Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği programı son sınıfında öğrenim gören 50 öğrenci ile sınırlıdır.
- 2) Veri toplama aracında kullanılan örüntü soruları ile sınırlıdır.

1. 6. Tanımlar

Örüntü: Sayısal ya da uzaysal düzenlilik (Papic ve Mulligan, 2005, s. 609).

Sabit Değişen Örüntü: Örüntünün elemanları arasındaki artış ya da azalışın lineer bir ilişki ($an + b$ şeklinde) içinde olduğu örüntülerdir (Yaman, 2010).

Artarak Değişen Örüntü: Örüntünün elemanları arasındaki artış ya da azalış ilişkisinin ikinci dereceden denklemlerle ($an^2 + bn + c$ şeklinde) açıklanabildiği örüntülerdir (Yaman, 2010).

Strateji: Bir amaca ulaşmayı sağlayan eylem şekli ya da sıraya konulan işlemlerin bir koleksiyonudur (Tanışlı, 2008).

Görsel Yaklaşım: Genelleme yaparken şeklin yapısal özelliğinin dikkate alınması ve şekilsel ipuçlarının kullanılmasıdır.

Sayısal Yaklaşım: Şekillerin sayısallaştırılması ve genelleme yaparken bu sayı örüntüsünün kullanılmasıdır.

BÖLÜM 2

İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Tanışlı (2008), ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerini belirlemeyi amaçladığı araştırmasında yüksek, orta ve düşük başarı düzeyinde 12 öğrenci ile çalışmıştır. Araştırmada verilerin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir. Veriler; klinik görüşme tekniği, kişisel bilgi formu, öğrenci günlükleri ve araştırmacı günlüğü ile toplanmıştır. Çalışmada sabit değişen şekil ve sayı örüntüleri, artarak değişen şekil ve sayı örüntüleri ile tekrarlanan şekil örüntüleri kullanılmıştır. Araştırma sonucunda tekrarlanan örüntülerde tekrar biriminin belirlenmesinin örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmede, tekrar biriminde yer alan şekiller arası sayısal ilişkiyi bulmada ve tekrarlanan bir örüntü oluşturmada etkili olduğu saptanmıştır. Tekrar birimini belirleyebilen öğrenciler “en büyük alt sınır” ve “en küçük üst sınır” şeklinde tanımlanan stratejilerle sonlu bir adımda yer alan şekli belirlemişlerdir. Ayrıca öğrencilerin çoğunluğu tekrarlanan bir şekil örüntüsü oluşturabilmiştir. Sayı dizisi biçiminde verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerinde, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma aşamasında öğrenciler fonksiyonel bir ilişki bulamamış ve genel olarak yinelemeli ve diğer stratejiler başlıkları altında yer alan stratejileri kullanmışlardır. Bu bağlamda her iki örüntü çeşidinde de yinelemeli stratejiler içinde yer alan “farklılığı arama” ve bu araştırma kapsamında tanımlanan “bağıntı arama” stratejisi ile sadece artarak değişen sayı örüntülerinde kullanılan “farklılık arasında farklılık arama” stratejisi en çok kullanılan strateji olmuştur. Sayı dizisi biçiminde verilen örüntü etkinliklerinde genel olarak terimlerin bir önceki terimle ilişkilendirildiği ya da terimlerin doğasına odaklanıldığı; fonksiyon tablosu biçiminde sunulan örüntülerde bunların yanı sıra terim ve terim sırası arasında ilişki kurulabildiği; şekil örüntülerinde ise hem cebirsel hem de görsel yaklaşımın benimsendiği belirlenmiştir. Kullanılan örüntü çeşitlerinde tüm etkinliklerde en çok “sözlü”, “sembol” ve “matematiksel cümle” ifade biçimlerinin

kullanıldığı görülmüştür. Kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ve örüntü oluşturmadaki strateji seçimlerinde öğrenci başarı düzeylerinin etkili olmadığı, buna karşın örüntülerin sunuluş biçiminin (sayı dizisi, fonksiyon tablosu, şekil) etkili olduğu tespit edilmiştir.

Örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerini belirlemeyi amaçlayan diğer bir çalışma Yaman (2010) tarafından 3, 4, 5, 6. ve 7. sınıfa giden toplam 317 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin matematiksel örüntülerle ilgili performansları ile örüntünün sunum biçimi (tablo, sayı dizisi, şekil ve sözel problem), örüntü tipi (tekrarlayan, doğrusal genişleyen ve karesel genişleyen örüntü) ve soru tipi (sayısal, sözel ve sembolik ifade) arasındaki ilişkiyi belirlemek üzere 12 soruluk bir test uygulanmıştır. Tarama modelinin benimsendiği araştırmanın sonucunda sınıf seviyesi arttıkça öğrencilerin matematiksel örüntü performanslarının da arttığı görülmüştür. Örüntü sunum biçimlerine göre öğrencilerin en çok “tablo” biçimindeki örüntülerde kolaylık yaşadıkları ve sıralamanın “şekil”, “sözel problem” ve “sayı dizisi” şeklinde devam ettiği tespit edilmiştir. Örüntü tiplerine göre ise öğrencilerin “tekrarlayan” örüntülerle ilgili performanslarının çok iyi olduğu, “doğrusal genişleyen” tipteki örüntülerde ise ortalama performans gösterdikleri ortaya çıkmıştır. Bunun yanında öğrencilerin özellikle “karesel genişleyen” tipteki örüntülerle ilgili sorun yaşadıkları bulunmuştur. Soru tiplerine göre matematiksel örüntülerle ilgili performanslarda; öğrencilerin örüntüleri sonlu adıma devam ettirme görevleri olan “sayısal ifade” soru tiplerinde gayet başarılı oldukları, inceledikleri örüntülerin kuralını sözel olarak da ifade edebildikleri, fakat bulunan kuralı sembolik olarak ifade etme görevlerini içeren “sembolik ifade” soru tiplerinde büyük zorluklar yaşadıkları ve çok az öğrencinin bu soruları cevaplayabildikleri görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin örüntülerin sunum biçimi, örüntü tipi ve soru tiplerine göre matematiksel örüntü performansları arasında tek tek anlamlı ilişkiler bulunmuştur. Bu sonuçlar öğrencilerin matematiksel örüntü performanslarının örüntünün sunum biçimi, örüntü tipi ve soru tipi ile ilişkili olduğunu ortaya çıkarmıştır.

Stacey (1989), 9- 13 yaş grubundaki öğrencilerin $f(n) = an \pm b$ ($b \neq 0$) formundaki sabit değişen problemleri genellerken çözüme hangi yolla ulaştıklarını, çözümlerini nasıl açıkladıklarını, seçtikleri yolda ne kadar tutarlı davrandıklarını, cevapların sınıf seviyesine

ve problem çözüme deneyimine göre nasıl değiştiğini incelemiştir. Öğrencilerden genel terimleri $3n+2$ ve $4n-1$ olan şekil örüntülerinin 20. ve 100./ 1000. adımları ile genel terimi $6n-2$ olan sayı örüntüsünün 100. adımını hesaplamaları istenmiştir. Araştırmada öncelikle yaşları 9, 10 ve 11 olan 371 tane ilköğretim birinci kademe öğrencisine genel terimi $3n+2$ olan soru sorulmuş, bu soruya verilen cevaplar kategorize edilerek diğer uygulamanın nitel analizi için temel oluşturulmuştur. Sonra yaşları 12 ve 13 olan 140 tane ilköğretim ikinci kademe öğrencisi ve problem çözme eğitimi almış 26 öğrenciyle 3 soruluk uygulama gerçekleştirilmiştir. Araştırma sonunda sayma, farkın çarpımı, bütüne genişletme ve lineer yöntem olmak üzere dört strateji kullanıldığı saptanmıştır. Tüm yaş gruplarında ve tüm soru türlerinde aynı stratejilerin kullanıldığı, bunların sadece kullanım oranının değiştiği, öğrencilerin genellikle örüntülerdeki sabit farka odaklandıkları ve ikinci kademe öğrencilerinin bunu doğru şekilde kullandıkları belirlenmiştir. Ayrıca bazı öğrencilerin birden fazla strateji tercih ettiği görülmüştür. Sayma yönteminin mantıklı olmayacağı durumlarda öğrenciler lineer yöntemi ya da bütüne genişletme stratejisini kullanmıştır. Öğrencilerin yakın ve uzak adımlar için benimsedikleri stratejilerde tutarsızlıklar olduğu da tespit edilmiştir. Örneğin öğrenciler sorunun kolay kısmında lineer yöntemi doğru kullanırken, zor kısmında kolay bir yöntem olan ama yanlış kullanılan bütüne genişletme yöntemine geçiş yapmışlardır. Öğrencilerden düşünme şekillerini açıklamaları beklenirken yapılan aritmetik işlemlerin anlatıldığı görülmüştür. Ayrıca problem çözme eğitimi alan öğrencilerin ön test ve son test sonuçlarına göre genelleme becerilerinin arttığı saptanmıştır.

Sasman, Linchevski, Olivier, ve Liebenberg (1998) öğrencilerin örüntüleri genelleme ve bu genellemelerin geçerliliğini test etme sürecini incelemişlerdir. Çalışmaya matematikte başarılı 10 tane 7. sınıf öğrencisi katılmıştır. Her öğrenciyle 4 görüşme yapılmıştır. Bu görüşmelerden üçüncüsü iki kişilik öğrenci gruplarıyla gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere sadece sayı (tablo biçiminde), sadece şekil ve hem sayı hem de şekil örüntüsü içeren 8 problem sunulmuştur. Bunlardan 6 tanesi lineer, 2 tanesi ise basit kuadratik örüntüdür. İlk dört terimi verilen örüntülerin 5, 20. ve 100. adımları sorulmuş, öğrencilerden çözüm stratejilerinin ve buldukları sonuçların doğruluğunu ispatlamaları istenmiştir. Bir tanesi hariç öğrencilerin verilen şekil örüntüsünün değerlerini bir tablo halinde düzenledikleri ve çözümlerinde ve açıklamalarında sadece bu değerleri kullandıkları görülmüştür. Basit kuadratik örüntüde öğrencilerin veriler üzerinden kurala ulaştıkları ve sorulan terimleri bu

kuralı kullanarak buldukları belirlenmiştir. Lineer örüntülerin tamamında 5. terimin yinelemeli stratejiyle bulunduğu, 20. ve 100. terimler için ise daha kısa bir yol arandığı görülmüştür. Öğrencilerin en çok bütüne genişletme stratejisini kullandığı ve bu stratejinin öğrencileri yanlış sonuçlara götürdüğü tespit edilmiştir. Çözümlerin doğruluğunu ispatlama sürecinde yapılanlar örüntüden elde edilen verilere dayanmadığı için araştırmacılar görüşmelerde bilişsel çatışma yaratmaya çalışmışlardır. Bunun için üç farklı yol izlenmiştir. Bu yollardan ilki, yinelemeli stratejilerle elde edilmiş verileri yanlış metotla elde edilen veriyle karşılaştırmak; ikincisi, herhangi bir terimi bulmak için çarpımsal metodu farklı referans noktalarına uygulamak; üçüncüsü ise, öğrencinin kullandığı metodu soruda verilen tablo üzerinde uygulamaktır. Bu çatışmalarla kullandıkları stratejilerin yanlış olduğu öğrencilere gösterilmesine rağmen, onların aynı hataları yapmaya devam ettikleri saptanmıştır. Öğrencilerin genelleme ve ispat sürecinde verilerin öneminin bilincinde olmadığı, bu nedenle de birçoğunun genellemelerinin ve ispatlarının geçersiz olduğu belirtilmiştir.

Sasman, Linchevski, ve Olivier (1999) önceki çalışmalarından yola çıkarak örüntülerin farklı temsillerinin öğrencilerin genelleme yaklaşımlarını nasıl etkilediğini incelemişlerdir. Araştırmada, “bir sayının katı olmayan sayılar ve tabloların sunum şekli bütüne genişletme stratejisiyle genelleme yapmanın önüne geçebilir mi?” ve “şekil örüntülerinin sunum biçimi, öğrencileri örüntünün kuralını görsel yaklaşımla bulmaya yönlendirebilir mi?” gibi sorulara cevap aranmıştır. Çalışma ilköğretim 8. sınıfa giden 10 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere genel formülü aynı olan fonksiyon tablosu-şekil örüntüsü çiftlerinden oluşan toplam 8 örüntü problemi sunulmuştur. Bunlardan dördü lineer, dördü kuadratik örüntüdür. Sorular; şekil örüntülerinin kuralı temsil biçimi, tabloların düşey/yatay olarak sunulması, bulunması istenen terimlerin tabloda yer alıp almaması, çekici sayıların (5, 20 ve 100 gibi) ve çekici olmayan sayıların (19, 59 gibi) kullanılması bakımından çeşitlilik göstermektedir. Her öğrenciyle 3 görüşme yapılmıştır. Elde edilen sonuçlarda öğrencilerin ilk altı terimi verilmiş örüntülerin 7. ve 8. adımını bulmakta zorlanmadıkları, yinelemeli stratejiyle ya da fonksiyon kuralını bularak doğru sonuca ulaşabildikleri ancak daha büyük terimleri bulmaya çalışırken doğru- yanlış birçok strateji kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin kuadratik örüntülerin kuralını belirlemede lineer örüntülere oranla daha başarılı oldukları belirlenmiştir. Kuralı aynı olan fonksiyon tablosu-şekil örüntüsü çiftlerinde öğrencilerin cevaplarında belirgin farklılıklar olduğu tespit

edilmiştir. Çekici sayılarda bütüne genişletme, hem çekici hem de çekici olmayan sayılarda ise farkın çarpımı stratejisinin yanlış kullanıldığı görülmüştür. Ayrıca tablonun sunum şeklinin öğrenci hataları üzerinde etkili olmadığı, şekillerin fonksiyonel ilişkiyi bulmada etkili olarak kullanılmadığı, fonksiyon kuralının daha çok sözel olarak ifade edildiği belirlenmiştir. Önceki araştırmadan farklı olarak çok sayıda strateji kullanılmış olması çekici olmayan sayılara ve sınıf seviyesine bağlanmıştır.

Lan- Ma (2007), araştırmasında ilköğretim beşinci ve altıncı sınıf öğrencilerinin artarak değişen örüntülere ilişkin genelleme süreçlerini analiz etmiştir. Araştırmada “Artarak değişen şekil örüntüsü etkinliklerinde öğrenciler nasıl bir süreç izlemektedir? Başarılı bir genelleme yapmanın önündeki engeller nelerdir? Şekil örüntüleri sayı örüntülerine dönüştürülürken hangi yol izlenmektedir? Öğrenciler hangi yaklaşımdan (görsel/ cebirsel) yararlanmaktadır?” sorularına cevap aranmıştır. Çalışmaya yüksek, orta ve düşük başarı düzeyinde 40 öğrenci katılmıştır. Öğrencilere 4 tanesi şekil, 4 tanesi de sayı dizisi biçiminde toplam 8 örüntü sorusu sunulmuştur. Bu örüntü sorularından bir tanesi hem şekil hem de sayı dizisi biçiminde hazırlanmıştır. İlk üç terimi verilen örüntülerin 4, 5, 10. ve 100. adımlarının bulunması istenmiştir. Veriler internet üzerinden ve bazı öğrencilerle yapılan görüşmelerden elde edilmiştir. Araştırma raporunda öğrencilerin sadece hem şekil hem de sayı dizisi biçiminde olan örüntü sorusuna ilişkin sonuçları verilmiştir. Araştırmada bazı öğrencilerin görsel bazılarının ise cebirsel yaklaşımı benimsedikleri belirlenmiştir. Başarılı bir genelleme yapmayı engelleyen nedenlerin; terimler arası farka odaklanma, kısa yol bulmaya çalışma ve bu nedenle hatalı yöntemler seçme, sayısal bir cevap verme eğiliminde olma, aritmetik işlemlerin anlamları üzerinde düşünmeme ve aritmetik yetersizlik olduğu saptanmıştır. Sonuç olarak öğrencilerin örüntüyü genelleyebilmeleri, buna karşın diziyi genelleyememelerinin başarılı bir genelleme yapmada öğrencileri engelleyen temel neden olduğu görülmüştür. Ayrıca görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerin genelleme yapabilme potansiyelinin daha fazla olduğu sonucuna da ulaşılmıştır. Öğrencilerin örüntüleri genelleme sürecinde sonuçtan çok kullanılan yönteme odaklanmaları ve fonksiyonel ilişkilere yönelmeleri gerektiği ifade edilmiştir.

Aslan (2011), cebirsel genelleme süreçlerini örüntü kavramına ilişkin öğrenci güçlükleri bağlamında incelemek ve bu güçlükleri giderebilecek bir ders tasarımı önerisi geliştirebilmek için 13 tane ilköğretim yedinci sınıf öğrencisiyle bir eylem araştırması

gerçekleştirmiştir. Araştırmada kullanılan veri toplama araçlarından ilki, öğrencilerin sayı örüntülerini genellemeye ilişkin ön öğrenmelerini ve güçlüklerini belirlemek için hazırlanan açık uçlu problemler; ikincisi, güçlükleri giderme amacıyla hazırlanan etkinlikler ve üçüncüsü, uygulama sonrasında güçlüklerdeki değişimi saptamayı amaçlayan açık uçlu problemlerdir. Eylem planı öncesinde uygulanan testten elde edilen bulgulara göre öğrencilerin örüntüdeki ilişkiyi belirlerken çoğunlukla ardışık terimler arasındaki ilişkiye odaklandıkları, kural için genellikle sözel ifadeleri kullanıp cebirsel ifade yazmada zorlandıkları, örüntülerin sunum biçimine göre değişik performans gösterdikleri, modelleri etkili kullanamadıkları ve aşırı genelleme yaptıkları görülmüştür. Bunların yanı sıra belirlenen ortak özelliğin yakın/ uzak adımı hesaplamada kullanılan yaklaşımı etkilediği, çoğunlukla olgunlaşmamış tümevarım kullanıldığı ve aritmetik genelleme yapıldığı belirlenmiştir. Eylem planı çerçevesinde gerçekleştirilen 11 etkinlikle öğrenci güçlüklerinin giderilmesi amaçlanmıştır. Eylem planı sonrasında uygulanan testten elde edilen bulgularda öğrencilerin ortak özellik belirlemede daha çok terim sırası ile terim arasındaki ilişkiyi inceledikleri, kurallar için sözel ifade yerine daha çok cebirsel ifade kullandıkları, şekil örüntülerindeki görsel ipuçlarını değerlendirip modeli bir kural bulma yönünde kullandıkları görülmüştür. Öğrencilerin olgunlaşmamış tümevarımdan uzaklaşıp çoğunlukla cebirsel genelleme yaptıkları belirlenmiştir. Buna karşın başarılı olunan soru biçimlerinde bir değişiklik saptanmamıştır. Elde edilen bulgularda eylem planı sayesinde strateji kullanımında, cebirsel genelleme yapabilmeye, notasyon kullanımında ve modelleri kural bulma yönünde etkili kullanabilmeye gelişim sağlandığı belirlenmiştir. Ayrıca öğrenci güçlüklerinin giderilmesinde öğretmen eylemlerinin etkisi olduğuna dair bulgulara ulaşılmıştır.

Zazkis ve Liljedahl (2002), aday öğretmenlerin örüntüleri genelleme süreçlerini inceledikleri araştırmalarında 36 tane sınıf öğretmenliği öğrencisiyle çalışmışlardır. Araştırmada tekrarlayan örüntü özelliği taşıyan bir sayı örüntüsü verilmiş, öğrencilerin iki hafta boyunca her gün en az yarım saat ayırarak bu dizideki örüntüleri keşfetmeleri ve bu çalışmalarını not etmeleri istenmiştir. Bir sonuç bulmaktan öte öğrencilerin düşünme süreçlerinin belirlenmesi amaçlandığı için öğrencilerden akıllarına gelen tüm çözümleri, soruları, varsayımları ve bu varsayımlara dair denemeleri, çözüme ulaştıkları/ ulaşamadıkları zamanki mutlulukları/ hayal kırıklıklarını kaydetmeleri istenmiştir. Öğrencilerden tüm iddialarını açıklamaları ve gerekçelendirmeleri istenmiş, bu süreçte

cebirsel dil kullanma noktasında bir zorunlulukları olmadığı belirtilmiştir. Bu uygulamanın ardından birçok örüntü bulan ama bunlardan bir sonuca ulaşamayan 4 öğrenciyle klinik görüşme yapılmıştır. Görüşmelerde orijinal soru biraz değiştirilerek sorulmuştur. Öğrencilerin problem çözümlerine ilişkin notları ve klinik görüşmeden elde edilen veriler, verilen yapıda hangi örüntülerin bulunduğunu, genel eğilimlerin ve güçlüklerin neler olduğunu, genellemeyi açıklarken hangi araçların kullanıldığını tespit etme doğrultusunda analiz edilmiştir. Elde edilen bulgularda öğrencilerin birçok örüntü keşfettiği görülmüştür. Diğer örüntü sorularından farklı olarak, herhangi bir sayının örüntüde hangi satır ve sütunda yer aldığını belirlemeye çalışırken öğrenciler daha kısa ve kolay bir yol bulma eğiliminde olmuşlardır. Sonuçlar öğrencilerin genellemelerini sözel olarak ifade edebildiklerini ancak bunun cebirsel ifadelerle desteklenmediğini göstermiştir. Ancak cebirsel dil kullanılmadan da cebirsel düşünmenin olabileceği ve cebirsel dilin cebirsel düşünmenin tek göstergesi olmadığı belirtilmiştir.

Rivera ve Becker (2003), örüntüleri genelleme sürecinde sayısal ve şekilsel ipuçlarının etkisini incelemişlerdir. Araştırma 42 tane ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Raporda iki tane lineer şekil örüntüsüne ait bulgulara yer verilmiştir. Her örüntüde ilk üç şekil ve bu şekillerdeki çubuk sayısına karşılık gelen sayılar verilmiş, örüntülerin 4. ve 5. adımları ile genel terimlerinin sırayla bulunması istenmiştir. Araştırmanın verilerinin toplandığı klinik görüşmelerde adaylara sesli düşünceleri ve düşündüklerini yazmaları ifade edilmiştir. Bulgular adayların %64,5'inin cebirsel genelleme yaptığını ve verilen sayısal değerlerin şekillerle olan ilişkisine çok az önem verdiklerini ortaya çıkarmıştır. Bu durum, adayların önceki matematik deneyimlerinde çoğunlukla sayı dizilerinin formüllerini cebirsel olarak elde etmeye çalışmalarına bağlanmıştır. Adayların %42'si bir sonraki adımı bir önceki adımla ilişkilendirerek genel formülü $n+3$ ve $n+5$ olarak belirlemiştir. Doğru kuralı bulan adaylarınsa ortak farka odaklanma, tahmin- kontrol ve deneme- yanılma stratejilerini kullandıkları görülmüştür. Bir adayın ise girdi ve çıktı değerleri arasındaki farkı kullanarak yakın adımları belirleyebildiği ancak genel kurala ulaşamadığı belirtilmiştir. Sayısal stratejileri kullanan adaylar elde ettikleri formüllerin çözdükleri problemdeki şekille olan ilişkisini açıklayamamıştır. Şekilsel genelleme yapan adayların ise şekillerdeki sabit ve değişen parçalara odaklandıkları tespit edilmiştir. Bu adaylar buldukları formüllerin şekillerle olan ilişkisini açıklayabilmişlerdir.

Yeşildere ve Akkoç (2010) araştırmalarında, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının sayı örüntülerinin kuralını bulmayı öğretme sürecinde izledikleri “konuya özel stratejileri” incelenmişlerdir. Durum çalışması yönteminin kullanıldığı araştırmaya, ilköğretim matematik öğretmenliği programı dördüncü sınıfında öğrenim gören 6 öğretmen adayı katılmıştır. Öğretmen adaylarından, ilköğretim 6. sınıf matematik dersi öğretim programında yer alan “sayı örüntülerini modelleyerek bu örüntülerdeki ilişkiyi harflerle ifade eder” kazanımına yönelik bir ders hazırlamaları istenmiştir. Araştırmada mikro-öğretim etkinliklerine ait video kayıtlarından, öğretmen adayları ile mikro- öğretim sürecinde yapılan görüşmelerden ve mikro- öğretim dersleri sırasında yapılan gözlemlerden elde edilen veriler kullanılmıştır. Veriler nitel olarak analiz edilmiştir. Çalışmanın bulguları öğretmen adaylarının derslerinde dört farklı strateji kullandıklarını ortaya çıkarmıştır: Ardışık sayılar arasındaki ilişkiyi inceleme, tablo yapma, modelleme yapma ve deneme-yanılma yöntemini kullanma. Öğretmen adaylarının ders işleyişlerinde sayı örüntülerini zorluk düzeylerine göre sınıflamadıkları, öğretim programında önerilen stratejilerin dışına çıkmadıkları ve öğretim programında yer alan örneklerle paralel modeller oluşturdukları gözlemlenmiştir. Model kullanma sürecinde öğretmen adaylarının modelleri sadece görsel bir unsur olarak kullandıkları belirlenmiştir. Ayrıca bazı öğretmen adaylarının örüntülerin kuralını bulmayla ilgili alanyazındaki araştırmalarda rastlanan güçlüklerle sahip olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının çeşitli değişkenler açısından ortaya konulan eksikliklerinin pedagojik alan bilgilerindeki yetersizliğe işaret ettiği belirtilmiştir.

Yeşildere ve Akkoç (2011) çalışmalarında, 145 ilköğretim matematik öğretmeni adayının lineer olan ve lineer olmayan şekil örüntülerini genelleme süreçlerini ve şekil örüntülerini bu süreçte nasıl kullandıklarını incelemişlerdir. Tarama yönteminin kullanıldığı araştırmada veriler ikisi lineer olan ve ikisi lineer olmayan toplam dört tane açık uçlu problem yoluyla toplanmıştır. Veriler nitel olarak analiz edilmiştir. Bulgular öğretmen adaylarının büyük bir kısmının şekil örüntülerini genelleme sürecinde çeşitli zorluklar yaşadıklarını ortaya koymuştur. Öğretmen adayları özellikle kuralı ikinci dereceden olan örüntülerin kuralını keşfetmeye çalışırken çoğunlukla deneme-yanılma stratejisini kullanmışlardır. Bu yöntemde cebirsel düşünme sürecinden geçilmediği için genelleme değil olgunlaşmamış tümevarım yapmanın söz konusu olduğu ifade edilmiştir. Genelleme yapma sürecinde sorun yaşayan öğretmen adaylarının örüntünün tüm terimlerini bulmayı

sağlayacak şekilde hipotez kuramadıkları görülmüştür. Öğretmen adayları lineer örüntülerde ortak özelliği terim ile terim sayısı arasındaki ilişkiyi araştırarak oluştururken, daha karmaşık örüntülerde deneme-yanılma üzerine yoğunlaşmışlardır. Bu bağlamda lineer olmayan örüntüleri genelleme sürecinde olgunlaşmamış tümevarım veya aritmetik genellenmenin daha çok kullanıldığı belirlenmiştir. Öğretmen adayları modellerden, örüntüyü nümerik olarak yazmada yararlanmışlardır. Bunun yanı sıra örüntünün kuralını bulmaya dair bir hipotez oluşturacak şekilde değil, sadece örüntüyü görselleştirmek için model kullanmışlardır. Elde edilen bulgular doğrultusunda genelleme sürecinin doğru şekilde gerçekleşmesinin örüntüdeki ortak özelliğin doğru şekilde belirlenmesine bağlı olduğu, tespit edilen ortak özellik doğru olmadığı takdirde oluşturulan hipotezin tüm terimlerin bulunabilmesini sağlayacak kapsamda olmadığı ve genel terimin yazılamadığı belirtilmiştir.

Tanışlı ve Yavuzsoy Köse (2011), sınıf öğretmeni adaylarının lineer şekil örüntülerini genelleme stratejilerini araştırmıştır. Uygulamaya sınıf öğretmenliği bölümünden 16 tane üçüncü sınıf öğrencisi katılmıştır. Veriler klinik görüşme tekniği ile toplanmıştır. Elde edilen bulgulara göre şekil örüntüsünü yakın/uzak adıma devam ettirmede ve örüntünün kuralını bulmada öğretmen adaylarından bazılarının sayısal, bazılarının görsel olmak üzere temelde iki yaklaşım benimsedikleri, buna karşın bazı adayların her iki yaklaşımı da kullandığı saptanmıştır. Bu iki yaklaşım altında da toplam 26 strateji kullanılmıştır. Adaylar örüntüleri genellerken sayısal yaklaşım altında sadece terimler arası ilişkinin araştırıldığı yinelemeli, görsel yaklaşım altında ise hem yinelemeli hem de değişkenler arası ilişkinin araştırıldığı fonksiyonel stratejileri tercih etmişlerdir. Yinelemeli stratejilerin kullanımının, adayların geçmiş deneyimlerinde lineer sayı dizilerinin (aritmetik diziler) genel formülünü elde etmede terimler arası sabit farka odaklanarak cebirsel yöntemleri uygulamalarından kaynaklandığı ifade edilmiştir. Fonksiyonel stratejileri kullanan adaylar, şeklin yapısındaki değişen ve değişmeyen özellikler ve ilişkiler yoluyla örüntüyü genelledebilmişler ve genellemelerini savunmuşlardır. Buna karşın sayısal stratejiler ile genelleme yapan adayların bazıları örüntüyü görememişler, bağımlı ve bağımsız değişkenler arasında ilişkilendirme yapamamışlardır. Bazı adaylar ise sayısal stratejilerle genellemeye ulaştıkları için görsel stratejileri kullanmamışlardır. Şekilsel genelleme yapan öğretmen adaylarının, sayısal stratejileri kullananlara göre daha anlamlı bir kavrama gücüne sahip oldukları ve sayısal genelleme yapanların sıklıkla örüntüleri görmede ve

oluşturdukları kuralları savunmada yetersiz oldukları belirtilmiştir. Araştırmada lineer şekil örüntülerini genelleme sürecinde şeklin yapısının önemli bir rolü olduğu da dikkati çekmiştir. Araştırmadaki bazı sonuçların öğretmen adaylarının eşitlik, değişken ve cebirsel ifade kavramlarına ilişkin eksikliklerinin olduğuna işaret ettiği ifade edilmiştir.

Chua ve Hoyles (2010a), öğretmen adaylarının artarak değişen şekil örüntülerini genelleme sürecinde kullandıkları stratejileri araştırmışlardır. Çalışmaya 27 öğretmen adayı katılmıştır. Öğretmen adayları soruyu öncelikle bireysel olarak çözmüştür. Daha sonra iki kişilik gruplar halinde çalışmaya başlayan öğretmen adaylarından örüntüyü farklı yollarla çözmeleri istenmiştir. Uygulama sonunda doğru ve yanlış cevaplar ile grupların kaçar doğru cevap verdiği tespit edilmiştir. Bu bağlamda grupların doğru çözümlerinin sayısının 2 ile 5 arasında değiştiği ve grupların %85'inin üç ve daha fazla sayıda doğru çözüm yaptığı belirlenmiştir. Genelleme sürecinde temelde sayısal, görsel ve pragmatik olmak üzere üç yaklaşım benimsenmiştir. Öğretmen adaylarının toplam 13 farklı stratejiyle genelleme yaptığı, bunlardan dördünün daha fazla kullanıldığı, diğer dokuz stratejiyi kullananların ise bir ya da iki kişi olduğu görülmüştür. Sayısal yaklaşımı benimseyen öğretmen adayları genel terimi ikinci dereceden denklem çözümleri ile elde etmişlerdir. Görsel yaklaşımı benimseyen öğretmen adaylarınınsa ekleyerek yapılandırma, yardımcı şekil kullanma ve şekli yeniden yapılandırma stratejilerini kullandıkları saptanmıştır. Bu yaklaşım kapsamında en çok kullanılan strateji ekleyerek yapılandırma stratejisi olmuştur. Hiçbir öğretmen adayı çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejiyle genelleme yapmamıştır. Bulgularda sayısal yaklaşımın, görsel ve pragmatik yaklaşımdan daha az tercih edildiği görülmüştür. Bu durum, lineer örüntülere nispeten artarak değişen örüntülerde sayısal yaklaşımı kullanmanın daha zor olmasına bağlanmıştır. Öğretmen adaylarının başlangıçta zorlansalar bile artarak değişen örüntüyü farklı yollarla çözebildikleri ve bunu başarıyla gerçekleştirdikleri ifade edilmiştir.

Chua ve Hoyles (2010b), ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinin (ortalama 13 yaş) ve öğretmenlerinin lineer örüntü problemlerinde kullandıkları stratejileri karşılaştırmak için bir araştırma yapmışlardır. Araştırmaya 28 tanesi yüksek başarılı olmak üzere 47 öğrenci ve 16 öğretmen katılmıştır. Öğretmenlerden öncelikle örüntü problemini sınıfta anlatıyormuş gibi çözmeleri istenmiş, daha sonra bir anket uygulanmıştır. Bu ankette problemin dört farklı stratejiyle (sayısal yaklaşım, ekleyerek yapılandırma stratejisi, şekli

yeniden yapılandırma stratejisi ve çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisi) nasıl çözülebileceği gösterilmiş ve öğretmenlerden, genelleme yapmada öğrencilere en fazla yardımcı olacağını düşündükleri stratejiyi belirlemeleri istenmiştir. Anket öğrencilere de uygulanmıştır. Ankette sunulan çözümleri daha iyi anlamaları için öğrencilerin de örüntü problemini çözmeleri sağlanmıştır. Bulgular üç başlık altında incelenmiştir. Bunlardan ilki; öğretmenlerin örüntü problemini derslerinde hangi stratejiyle çözdükleridir. Bu başlık altında öğretmenlerden 10 tanesinin sayısal, 6 tanesinin ise ekleyerek yapılandırma stratejisinin kullanıldığı şekilsel çözümle doğru sonuca ulaştığı saptanmıştır. Sayısal çözümlerde şekil örüntüsünün önce bir sayı örüntüsüne dönüştürüldüğü, sonra ya cebirsel ($pn + q$ eşitliklerinin çözülmesi) ya da tümevarımsal ($5 + (n-1)3$ kuralını elde etme) yaklaşımın benimsendiği görülmüştür. Öğretmenlerin, örüntüleri genellemede hangi stratejinin öğrencilere en fazla yardımcı olacağına dair düşünceleri ikinci başlık altında incelenmiştir. Öğretmenlerin büyük kısmının öğrencilere en fazla yardımcı olacak stratejinin şekilsel çözümler olduğuna inandığı belirlenmiştir. Bunlardan sekizi şekli yeniden yapılandırma stratejisini, dördü ekleyerek yapılandırma stratejisini, biri ise çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisini seçmiştir. Sadece 2 öğretmen, sayısal stratejinin en iyi strateji olduğuna inanmaktadır. Üçüncü başlık altında ise öğrencilerin kuralı belirlemede kendilerine en fazla yardımcı olan strateji seçimleri incelenmiştir. Matematik performansı yüksek öğrencilerin yaklaşık yarısı, normal öğrencilerin ise neredeyse tamamı sayısal yaklaşımın kuralı belirlemede kendilerine en çok yardım eden strateji olduğunu belirtmiştir. Burada dikkat çeken nokta öğretmenlerin başarılı öğrencilerin daha çok sayısal, normal başarılı olan öğrencilerin ise şekilsel çözüme yatkın olduklarını düşünmeleridir. Sonuçta öğretmen ve öğrencilerinin strateji seçimlerinde uyumsuzluk olduğu saptanmıştır. Bu uyumsuzluğun öğrenme ve öğretme sonuçlarını etkileyebileceği ifade edilmiştir. Sınıfta daha kolay uygulanabilmesi ve daha az zaman alıcı olması nedeniyle öğretmenlerin sayısal çözümlere yatkın oldukları ifade edilmiştir. Öğretmenlerle yapılan görüşmeler sonucunda üç öğretmenin başka bir yol bilmedikleri için sayısal stratejiyi seçtikleri ortaya çıkmıştır. Öğretmenlerin, değişken kavramının gelişimine katkısı olmaması nedeniyle denklem çözme yaklaşımının etkili bir yöntem olmadığını anlamaları gerektiği belirtilmiştir.

Samson (2007) tez çalışmasında soru tasarımının, lineer örüntülere ilişkin çözüm stratejileri üzerindeki etkisini araştırmıştır. Durum çalışması desenindeki araştırma,

matematikte başarılı 24 tane dokuzuncu sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Sabit değişen sayı ve şekil örüntülerinden oluşan 22 soruluk test veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Veriler, ortalama 10 günde gerçekleştirilen oturumlarla toplam 3 ayda toplanmıştır. Her oturumda öğrencilere 3 örüntü problemi verilmiştir. Veri çözümleme sürecinde anlaşılmayan cevaplar için öğrencilerle informal görüşmeler yapılmıştır. Veri toplama aracında sayı dizisi ve tablo biçiminde sunulmuş lineer sayı örüntüleri ile ardışık üç terimi verilmiş, ardışık olmayan iki terimi verilmiş ve sadece tek terimi verilmiş lineer şekil örüntüleri kullanılmıştır. Ayrıca testte izomorfik soru olarak adlandırılan soru çiftlerine (kuralları aynı olan sayı ve şekil örüntüleri) yer verilmiştir. Öğrencilerden örüntünün bir sonraki terimi ile 10. ve 50. terimini bulmaları, örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade etmeleri ve kurala nasıl ulaştıklarını ayrıntılı şekilde açıklamaları istenmiştir. Çözümlerde kullanılan stratejiler 7 kategori altında sınıflandırılmıştır. Veriler analiz edildiğinde öğrencilerin büyük kısmının tüm adımları hesaplayabildiği görülmüştür. Örüntünün bir sonraki terimini bulmada en çok kullanılan stratejinin yinelemeli strateji olduğu belirlenmiştir. Bu stratejinin en fazla tercih edildiği soru çeşidinin sayı dizisi biçiminde verilen örüntüler olduğu saptanmıştır. Soru tasarımının bu strateji üzerindeki etkisine bakıldığında ise, ardışık olmayan iki terimi verilen şekil örüntülerinde yinelemeli stratejiyi kullananların sayısının azaldığı tespit edilmiştir. Bu bulgular soru tasarımının öğrencilerin strateji seçimleri üzerinde anahtar bir rol oynadığını göstermiştir. Örüntünün diğer adımlarında ise öğrencilerin büyük kısmının öncelikle örüntünün kuralını belirlediği, daha sonra bu kuralı kullanarak 10. ve 50. adımı hesapladıkları görülmüştür. Özellikle ardışık olmayan iki terimi verilen örüntülerin, öğrencileri değişkenler arasındaki ilişkiyi incelemeye teşvik ettiği belirtilmiştir. Şekil örüntülerinin çok sayıda çözüme olanak sağladığı saptanmıştır. Şekil örüntülerine ait bulgular öğrencilerin birçoğunun buldukları kuralı ispatlamak için şekillerden yararlandığını, bazı öğrencilerin ise şekil örüntülerini sayı örüntüsüne dönüştürerek genelleme yaptığını ortaya koymuştur. Ayrıca şekle dayalı genelleme yapan öğrencilerin, kuralı savunma noktasında sadece sayıları kullanarak genelleme yapanlardan daha başarılı oldukları tespit edilmiştir. Araştırma bulgularında, her soru için elde edilen cebirsel ifadeler sıralanmış, bu sonuçlara kaç öğrencinin ulaştığı belirtilmiş ve şekil örüntülerinde kullanılan farklı stratejiler modellenerek analiz edilmiştir.

BÖLÜM 3

YÖNTEM

3. 1. Araştırma Modeli

Bu araştırma, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının değişen örüntülere ilişkin genelleme stratejilerini betimlemeye çalışan bir tarama araştırmasıdır. Tarama modelleri, geçmişte ya da halen var olan bir durumu var olduğu şekliyle betimlemeyi amaçlayan araştırma yaklaşımlarıdır. Araştırmaya konu olan olay, birey ya da nesne, kendi koşulları içinde ve olduğu gibi tanımlanmaya çalışılır. Onları herhangi bir şekilde değiştirme, etkileme çabası gösterilmez. Bilinmek istenen şey vardır ve oradadır. Önemli olan, onu uygun bir biçimde gözleyip belirleyebilmektir (Karasar, 2010, s. 77).

Araştırmanın verileri, açık uçlu örüntü sorularından oluşan test ve klinik görüşme tekniği ile toplanmıştır. Matematik eğitiminde sıklıkla kullanılan klinik görüşme; öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine incelemek, bilgi yapısının biçimini ve akıl yürütme sürecini araştırmak için öğrenciyle karşılıklı yapılan görüşmeleri içerir (Clement, 2000).

3. 2. Evren ve Örneklem

Araştırmanın evrenini 2011- 2012 eğitim- öğretim yılında, Ankara ilindeki eğitim fakültelerinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği programı son sınıfında öğrenim gören öğrenciler oluşturmaktadır.

Araştırmanın örnekleme, Gazi Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği programında öğrenim gören 50 son sınıf öğrencisidir. Örnekleme yöntemi olarak amaçsal örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Klinik görüşmenin katılımcıları ise, bu öğretmen adaylarından basit seçkisiz örnekleme yöntemiyle seçilen 6 öğretmen adaydır.

3. 3. Veri Toplama Araçları

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının örüntülere ilişkin genelleme stratejilerini belirlemek için araştırmacı tarafından geliştirilen “Örüntü Testi” (EK- 1) veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Örüntü Testi’nde sabit ve artarak değişen olmak üzere iki örüntü çeşidine, şekil ve sayı dizisi olmak üzere iki örüntü sunum biçimine yer verilmiştir. Testte 7 tane örüntü sorusu bulunmaktadır. Bunlardan dört tanesi sabit değişen şekil örüntüsü, bir tanesi artarak değişen şekil örüntüsü, bir tanesi sabit değişen sayı örüntüsü ve bir tanesi artarak değişen sayı örüntüsüdür. Test, bu örüntülerin yakın ve uzak adımını bulmaya, kuralı veren cebirsel ifadeyi yazmaya ve sayı örüntüsünde kuralı temsil eden bir modelleme yapmaya yönelik açık uçlu toplam 16 alt sorudan oluşmaktadır. Araştırmanın bir diğer veri toplama aracı ise yarı yapılandırılmış görüşme sorularıdır.

3. 3. 1. Test Maddeleri

Örüntü Testi’nde beş tane şekil örüntüsü ve iki tane sayı örüntüsü bulunmaktadır. Sayı örüntülerini genellemek için belli başlı stratejiler vardır ve sayılar değişse de kullanılan stratejiler temelde aynıdır. Şekil örüntüleri ise görsel yaklaşımla genellendiği zaman çeşitli stratejilerin kullanılmasına olanak sağlamaktadır. Başka bir deyişle şeklin yapısal özelliğine bağlı olarak her örüntüde farklı stratejiler kullanılabilir. Bu nedenle testte şekil örüntülerine ağırlık verilmiştir.

Örüntü Testi’ndeki birinci soru, ilk üç terimi verilmiş sabit değişen şekil örüntüsünün yakın ve uzak adımını belirlemeye yöneliktir. Soruda kullanılan örüntü Rivera ve Becker (2008)’in çalışmasından alınmıştır.

Literatürdeki araştırmalarda öğrencilerin daha çok yinelemeli stratejileri kullanma eğiliminde oldukları saptanmıştır. Bu durumun örüntünün sunum şekliyle ilgili olduğu (Noss, Healy, ve Hoyles, 1997), örüntüde terimlerin ardışık olarak verilmesinin öğrencileri yinelemeli ilişkilere yönlendirdiği (Frobisher ve Threlfall, 1999) ve şekil örüntülerinde ardışık olmayan terimlerin kullanılmasının fonksiyonel ilişkinin incelenmesine olanak sağladığı (Hershkowitz vd., 2002) ifade edilmiştir. Ancak örüntülerin genellikle ardışık terimlerle sunulduğu ve terimleri ardışık olmayan örüntülerin pek fazla kullanılmadığı görülmüştür. Bu bağlamda testte terimleri ardışık olmayan şekil örüntülerine de yer verilmiştir.

Samson (2007), soru tasarımının öğrencilerin strateji seçimleri üzerindeki etkisini incelediği araştırmasında ardışık olmayan iki terimi verilmiş şekil örüntülerini kullanmıştır. Örüntü Testi'ndeki 2. ve 3. soru bu araştırmadan alınmıştır. İkinci soruda, ardışık olmayan iki terimi verilmiş sabit değişen şekil örüntüsünde tabanı n noktadan oluşan şekildeki toplam nokta sayısının bulunması istenmiştir. Testteki üçüncü soruda ise öğretmen adaylarından ardışık olmayan iki terimi verilmiş örüntünün yakın ve uzak adımını bulmaları istenmiştir. Bu soruda dikdörtgensel bir bölgenin etrafını çevreleyen birim kare sayılarının belirlenmesi söz konusudur. Literatürdeki birçok çalışmada benzer örüntüler kullanılmıştır (Garcia Cruz ve Martinon, 1998; Lannin vd., 2006).

Araştırmalarda sıklıkla kullanılan örüntülerden biri, çubuklarla oluşturulmuş bitişik karelerdir (Noss vd., 1997; Rivera ve Becker, 2008). Örüntü Testi'ndeki 4. soru bitişik kareler ile yatay olarak sıralanmış bu kareleri çevreleyen üçgenleri içeren bir örüntüdür. Samson (2007)'un çalışmasında bu örüntü ardışık olmayan iki terimi verilerek kullanılmıştır. Bu araştırmada ise örüntünün sadece bir terimi verilmiş ve 1000. terimin bulunması istenmiştir.

Beşinci soruyla sabit değişen sayı örüntülerinde kullanılan stratejileri belirlemek amaçlanmıştır. Bu bağlamda ilk dört terimi verilmiş sayı dizisi biçimindeki örüntünün yakın ve uzak adımı ile genel terimini bulmaya yönelik alt sorular hazırlanmıştır. Ayrıca ders kitaplarında, örüntülere ilişkin kazanımlardan biri olan sayı örüntülerini modellemeye

yönelik etkinlikler yer almaktadır. Bu bakımdan soruda öğretmen adaylarından örüntünün kuralını temsil eden bir şekil örüntüsü oluşturmaları da istenmiştir.

İlköğretim 6- 8. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programında (MEB, 2009) sabit değişen örüntülere ağırlık verildiği ve ders kitaplarında az sayıda artarak değişen örüntünün yer aldığı görülmektedir. Bu nedenle Örüntü Testi'nde iki tane artarak değişen örüntü sorusunun kullanılması yeterli bulunmuştur. Altınca soruda öğretmen adaylarından artarak değişen sayı örüntüsünün yakın ve uzak adımı ile genel terimini belirlemeleri istenmiştir. Testteki son soruda ise artarak değişen şekil örüntüsü kullanılmıştır. Chua ve Hoyles (2012)'in çalışmasından alınan bu soruda öğretmen adaylarından ilk üç terimi verilmiş örüntünün yakın ve uzak adımı ile genel terimini bulmaları istenmiştir.

3. 3. 2. Veri Toplama Aracının Geliştirilmesi

Örüntü Testi'nin geliştirilmesinde ilk olarak İlköğretim 6- 8. Sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2009), ulusal ve uluslar arası literatürdeki çalışmalar ve *Basitten Karmaşığa Örüntüler* kitabı (Tanışlı ve Olkun, 2009) incelenerek sabit ya da artarak değişen şekil örüntülerinden oluşan bir soru havuzu oluşturulmuştur. Daha sonra bu havuzdan çok sayıda çözüm yoluna olanak sağlayan 8 örüntü seçilerek bir test taslağı hazırlanmıştır.

Testin geçerliği, kapsam geçerliği araştırılarak belirlenmiştir. Testi oluşturan maddelerin, ölçülmek istenen davranışı (özellği) ölçmede nicelik ve nitelik olarak yeterli olup olmadığının göstergesi, kapsam geçerliğidir. Kapsam geçerliğinde “Test maddeleri ölçülmek istenen davranışı yeterince yansıtıyor mu?” sorusunun cevabı aranır. Kapsam geçerliğini test etmede kullanılan mantıksal yollardan biri uzman görüşüne başvurmadır (Büyüköztürk, 2011). Testin taslak formunda yer alan maddelerin geçerliğini belirlemek için matematik eğitimi alanında uzman iki öğretim üyesinin ve yüksek lisans yapan bir ilköğretim matematik öğretmenin görüşleri alınmıştır.

Testin pilot uygulaması 2011- 2012 eğitim- öğretim yılı bahar döneminde 48 öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Testin güvenilirliğini belirlemek için pilot uygulamadan elde edilen veriler kullanılarak madde- toplam puan korelasyonuna bakılmıştır. Madde- toplam puan korelasyonu, test maddelerinden alınan puanlar ile testin toplam puanı arasındaki ilişkiyi açıklar. Madde- toplam puan korelasyonunun pozitif ve yüksek olması, maddelerin benzer davranışları örneklediğini ve testin iç tutarlılığının yüksek olduğunu gösterir (Büyüköztürk, 2011, s. 171). Güvenirlilik çalışması için öncelikle testte yer alan her alt soru ayrı bir soru olarak ele alınmış ve yeni bir numaralandırma yapılmıştır. Örneğin; birinci örüntü sorusunun a şıkkı 1. soru ve b şıkkı 2. soru olarak numaralandırılmıştır. Böylelikle toplam 21 soru elde edilmiştir. Daha sonra cevap kâğıtları tek tek incelenmiş; her doğru cevap 1, boş bırakılan her soru ve yanlış cevap 0 şeklinde kodlanarak analize hazır hale getirilmiştir. Verilerin analizinde SPSS paket programı kullanılmıştır. Analiz sonucuna göre birkaç sorunun testten çıkarılmasına karar verilmiştir. Bu soruların çıkarılmasıyla elde edilen nihai testte 7 tane örüntü ve bu örüntülere ilişkin 16 alt soru yer almaktadır. Testin nihai halinde alfa güvenilirlik katsayısı $\alpha = .7728$ olarak bulunmuştur.

3. 3. 3. Klinik Görüşme Soruları

Klinik görüşmeler sırasında öğretmen adaylarına Örüntü Testi'nde yer alan sorular yeniden sunulmuştur. Cevaba nasıl ulaştıklarının önemli olduğu belirtilerek öğretmen adaylarından çözümlerini açıklamaları ve sesli düşünceleri istenmiştir. Görüşmede “Nasıl çözdüğünü açıklar mısın?”, “Kuralın ... olduğuna nasıl karar verdin?”, “Emin misin?” “Bulduğun kuralın doğru olup olmadığını test ettin mi?” şeklindeki soru biçimlerine yer verilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının benimsemiş oldukları stratejiler bağlamında başka sorular da sorulmuştur. Örneğin şekil örüntülerinde sayısal yaklaşımla genelleme yapmış olan öğretmen adaylarına “Şekilleri neden sayılara dönüştürdün?”, “Şekiller üzerinden bir kural bulabilir misin?”; soruyu boş bırakmış olan öğretmen adaylarına “Soruyu yeniden çözmeyi dener misin?”, “Adım sayıları ile ilişki kurabilir misin?” ve “Bir model oluşturmayı yeniden dener misin?” gibi sorular sorulmuştur.

3. 4. Uygulama

Örüntü Testi 2011- 2012 eğitim- öğretim yılının bahar döneminde uygulanmıştır. Öğretmen adaylarına süre konusunda esneklik sağlamak için uygulama bir blok derste yapılmıştır. Uygulama öncesinde öğretmen adayları araştırmanın amacı hakkında bilgilendirilmiş ve düşünme şekillerini ortaya koyacak şekilde problem çözümlerini açıklamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının isimlerinin araştırma bulgularında kullanılmayacağı belirtilmiştir.

Elli öğretmen adayıyla gerçekleştirilen ilk aşamadan birkaç gün sonra 6 öğretmen adayıyla klinik görüşme yapılmıştır. Bu görüşmelerde öğretmen adaylarından neler düşündüklerini anlatarak soruları yeniden çözmeleri istenmiştir. Görüşmeler katılımcıların izni alınarak ses kayıt cihazıyla kaydedilmiştir.

3. 5. Verilerin Çözümlemesi ve Yorumlanması

Örüntü Testi'nden elde edilen veriler, içerik analizi yapılarak çözümlenmiştir. İçerik analizi, literatür taraması sonucunda araştırmacı tarafından oluşturulan kategoriler doğrultusunda gerçekleştirilmiştir. Bu bağlamda şekil örüntülerinden elde edilen veriler öncelikle Rivera ve Becker (2005)'in ortaya koyduğu sayısal ve görsel yaklaşım altında sınıflandırılmıştır. Görsel yaklaşım altında ele alınan veriler, Rivera (2010) tarafından belirlenen ve bu araştırma kapsamında bölüm 1.1.4.2'de "ekleyerek yapılandırma stratejisi, çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisi, yardımcı şekil kullanma stratejisi ve şekli yeniden yapılandırma stratejisi" olarak tanımlanan kategorilere göre analiz edilmiştir. Şekil örüntülerinde sayısal yaklaşım altında sınıflandırılan veriler ile sayı örüntülerinden elde edilen veriler ise bölüm 1.1.4.1'de açıklanan stratejiler doğrultusunda incelenmiştir. Ayrıca veriler analiz edilirken, "doğrudan kuralı yazma", "terimler arasındaki farkların toplamını birinci terime ekleme" ve "aritmetik dizi formülünü kullanma" şeklinde isimlendirilen yeni kategoriler oluşturulmuştur. Aritmetik dizi formülünü kullanma stratejisi ile aralık sayma stratejisi aynı temele dayanır. İki stratejide de terimler arası fark ve bu farkların toplamını belli bir terime ekleme esastır. Genelleme yaparken örüntünün bir

aritmetik dizi olduğunu fark eden bazı öğretmen adayları doğrudan aritmetik dizi formülünden yararlanmışlardır. Bu öğretmen adaylarının cevapları aralık sayma stratejisi altında ele alınmamış ve bu yeni kategoride sınıflandırılmıştır.

Örüntü Testi'ne verilen cevaplar soru soru analiz edilmiştir. Bu bağlamda ilk olarak her soru için öğretmen adaylarının çözümleri yazılmış ve oluşturulan kategoriler doğrultusunda çözümün hangi stratejiyle yapıldığı belirlenmiştir. Ayrıca çözümlerin doğru ya da yanlış olduğu belirtilmiştir. Daha sonra o soruda kullanılan stratejiler yazılarak öğretmen adaylarının doğru çözümleri bu stratejiler altında sınıflandırılmıştır. Yanlış cevaplar bu kategorilere dâhil edilmeyerek ayrı bir kategoride incelenmiş ve hangi stratejinin hatalı ya da eksik kullanıldığını belirlemek için analiz edilmiştir. Aritmetik işlemlerdeki hatalar ise dikkate alınmamıştır.

Analizlerin güvenilirliğini sağlamak için bir ay sonra veriler yeniden kategorize edilmiştir. Bu süreç sonunda öncekinden farklı kategorilerde yer alan cevaplar diğer araştırma bulgularına tekrar başvurarak dikkatlice incelenmiş ve en uygun kategoriye yerleştirilmiştir.

Araştırmanın amacı doğrultusunda cevap aranan sorulara paralel olarak bulgular beş ana başlık altında ele alınmıştır. Bulgular sunulurken öncelikle öğretmen adaylarının soruda kullandıkları stratejiler ve bu stratejileri tercih edenlerin sayısı genel olarak açıklanmıştır. Daha sonra her strateji ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu bağlamda bulgular, öğretmen adaylarının cevap kâğıtlarından ve klinik görüşmeye katılan öğretmen adaylarının açıklamalarından doğrudan alıntı yapılarak desteklenmiştir. Ayrıca görsel yaklaşım kapsamındaki stratejiler modellenerek açıklanmıştır. Bulgularda öğretmen adaylarının isimleri kullanılmamış ve Ö1, Ö2, Ö3, ... şeklinde bir kodlama yapılmıştır. Bu bağlamda klinik görüşmeye katılan öğretmen adayları Ö45, Ö46, Ö47, Ö48, Ö49 ve Ö50 şeklinde kodlanmıştır.

BÖLÜM 4

BULGULAR

4. 1. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Sabit Değişen Şekil Örüntüsünde Kullandıkları Stratejilere İlişkin Bulgular

4. 1. 1. Ardışık Üç Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünün Yakın ve Uzak Adımını Bulmada Kullanılan Stratejilere İlişkin Bulgular

Örüntü Testi'ndeki birinci soruda öğretmen adaylarından, ilk üç terimi verilmiş sabit değişen şekil örüntüsünün yakın ve uzak adımını bulmaları istenmiştir. Üç öğretmen adayı soruyu boş bırakmıştır. Cevap verenlerin tamamı doğru sonuçlara ulaşmıştır. Şekil örüntüsünü devam ettirmede öğretmen adaylarından bazılarının sayısal, bazılarının görsel olmak üzere temelde iki yaklaşım benimsedikleri ve bu yaklaşımlar kapsamında değişik stratejiler kullandıkları görülmüştür. Bu bağlamda 34 öğretmen adayının sayısal, 13 öğretmen adayının ise görsel yaklaşımı tercih ettiği belirlenmiştir. Sayısal yaklaşımı benimseyen öğretmen adaylarından bazıları öncelikle örüntünün genel terimini veren cebirsel ifadeyi bulmuş, daha sonra bu cebirsel ifadede istenenleri yerine yazarak yakın ve uzak adımı hesaplamıştır. Bazı öğretmen adayları ise önce yakın adımı, sonra uzak adımı bulmuştur. Bu öğretmen adaylarının bir kısmı hem yakın hem de uzak adımda aynı stratejiyi kullanmış, diğer kısmı ise uzak adıma ulaşmak için yakın adımda kullandıkları stratejiyi değiştirmişlerdir. Öğretmen adaylarının birinci soruda genelleme yaparken kullandıkları stratejiler Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Ardışık Üç Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünün Yakın ve Uzak Adımını Bulmada Kullanılan Stratejiler

Sayısal Yaklaşım	<i>n</i>
<i>Yakın ve Uzak Adımı Örüntünün Kuralıyla Bulma</i>	
✓ Adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi inceleme	7
✓ Aritmetik dizi formülünü kullanma	2
✓ Doğrudan kuralı yazma	5
<i>Önce Yakın, Sonra Uzak Adımı Aynı Stratejiyle Bulma</i>	
✓ Aralık sayma	6
✓ Aritmetik dizi formülünü kullanma	3
<i>Önce Yakın, Sonra Uzak Adımı Farklı Stratejiyle Bulma</i>	11
Toplam	34

Görsel Yaklaşım	<i>n</i>
✓ Ekleyerek Yapılandırma	7
✓ Çakışan Parçaları Çıkararak Yapılandırma	6
Toplam	13

Klinik görüşmenin yapıldığı öğretmen adaylarından beşi sayısal yaklaşımı benimsemiştir. Bunlardan Ö46 ile Ö49 yakın ve uzak adımda aynı stratejiyi kullanmış, Ö45 ile Ö50 ise yakın adımı bulduktan sonra uzak adımda strateji değişikliği yapmıştır. Sayısal yaklaşımla çözüm yapan diğer öğretmen adayı Ö47 ise önce örüntünün kuralını bulmayı tercih etmiştir. Ö48, görsel yaklaşımla genelleme yapmış ve çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisini kullanmıştır.

Görsel Yaklaşım Altında Kullanılan Stratejiler

Tablo 1’de görüldüğü gibi, 13 öğretmen adayı görsel yaklaşımı benimsemiştir. Bu yaklaşım altında temelde iki strateji kullanılmıştır: Ekleyerek yapılandırma stratejisi ve

çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisi. Bu iki strateji kapsamında ise 6 farklı stratejinin kullanıldığı belirlenmiştir. Şeklin yapısal özelliğine dayalı bir genelleme yapan bu öğretmen adayları buldukları ilişkiyi hem yakın hem de uzak adımda kullanmışlardır. Bu nedenle yakın ve uzak adımda kullanılan stratejiler ayrı ayrı değil bir bütün olarak sunulmuştur.

Altı öğretmen adayı çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisi (ÇPÇYS) ile genelleme yapmıştır. Bu strateji kapsamında iki farklı stratejiyle çözüm yapıldığı görülmüştür. Öğretmen adaylarından 5 tanesinin kullandığı ve “kolları gruplama ve 3 ortak noktayı çıkarma” şeklinde özetlenebilecek ilk stratejide; soruda verilen şekiller görsel olarak bir W gibi algılanmakta ve bu W’nun kollarını oluşturan noktalar gruplanmaktadır.



Şekil 19. ÇPÇYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin model

Örüntünün 3. adımı üzerinde Şekil 19’daki gibi temsil edilen bu stratejide her gruptaki nokta sayısı, adım sayısının bir fazlasına ($n+1$) eşittir. Dört grupta toplam $4(n+1)$ nokta vardır. Gruplar üç yerde kesişir. Kesişen yerlerdeki 3 nokta iki kere sayıldığı için çıkarılması gerekir. Böylece örüntünün herhangi bir adımındaki toplam nokta sayısını veren cebirsel ifade $4(n+1) - 3$ olarak elde edilir.

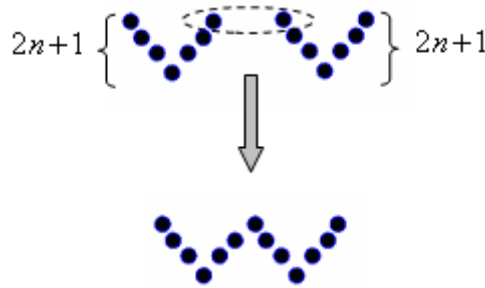
Klinik görüşmelerin gerçekleştirildiği öğretmen adaylarından sadece Ö48 görsel yaklaşımla genelleme yapmıştır. Şekil 19’da modellenen stratejiyi benimseyen bu öğretmen adayının soruyu nasıl çözdüğüne ilişkin açıklaması şu şekildedir:

Görüşmeci (G): Nasıl çözdüğünü açıklar mısın?

Ö48 : Şey olarak düşündüm birinci soruda. Hepsinde W yapıyor, (örüntüde verilen şekilleri göstererek) birinci adım, ikinci adım, üçüncü adım. Şimdi birinci adımda iki tane doğrusal noktalar var (W’nun bir kolundaki nokta

sayısından bahsediyor). İkinci adımda üç tane var, üçüncü adımda dört tane var. Dolayısıyla sekizinci adımda dokuz tane olmalı diye düşündüm. Şeklini çizdiğimiz zaman hani dokuz çarpı dört tane olması gerekiyor. Otuz altı. Ama burada dikkat edersek bir, iki, üç noktaları ortak (kolların kesişim yerlerini işaretliyor). O zaman otuz altı eksi üç yapıp 33 tane olması gerektiğini düşündüm... Ellinci adımda da gene benzer şekilde, aynı şekilde düşünürsek 51 tane doğrusal nokta olacaktır. Dolayısıyla elli bir çarpı dört yapıp, eksi üç tane nokta çıkarmamız gerekiyor.

Çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen ikinci stratejide W, iki tane V harfi ile oluşturulmuştur. Sadece bir öğretmen adayının kullandığı bu strateji, örüntünün 3. adımı üzerinde Şekil 20’deki gibi temsil edilebilir.



Şekil 20. ÇPÇYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model

Şekil 20’deki modelde kesikli çizgiyle gruplandırılmış noktalar üst üste getirildiğinde V harfleri W’yu oluşturur. V harflerindeki nokta sayısı, adım sayısının iki katından bir fazladır. W’daki toplam nokta sayısı hesaplanırken önce V’lerdeki noktalar toplanır. Daha sonra V’lerin birleşim yerlerinde üst üste gelen noktalardan biri çıkarılarak $2(2n+1)-1$ genel formülü elde edilir. Bu stratejiyle genelleme yapan öğretmen adayının çözümü Şekil 21’deki gibidir.



1) Şekilleri analiz ettiğimizde en alttaki 2 nokta ve en üstteki 3 noktanın sabit olduğunu ve ortaya 4'ürlü gruplarda noktaların eklendiğini görürüz.

2. şekilde 4'ürlü 1 grup, 3. şekilde ise 2 grup vardır. Bu durumda 8. şekilde 5 sabit nokta ve 4'ürlü 7 grup olur.

$$\begin{aligned} & 7 \times 4 = 28 \text{ nokta} \\ & 28 + 5 = 33 \text{ nokta olur.} \end{aligned}$$

b) 30. adımda gruplarda $49 \times 4 = 196$ nokta vardır. Sabit noktaların eklendiğimizde 201 nokta olduğunu buluruz.

Şekil 23. Ö37'nin birinci soruya ilişkin çözümü

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen ikinci stratejide, önce sola yatık ilk koldaki noktalar gruplandırılmıştır. Sonra diğer üç kol, adım sayısına eşit sayıda nokta içerek şekilde gruplara ayrılmıştır. Bu gruplama örüntünün 3. adımı üzerinde Şekil 24'teki gibi temsil edilebilir.



Şekil 24. EYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model

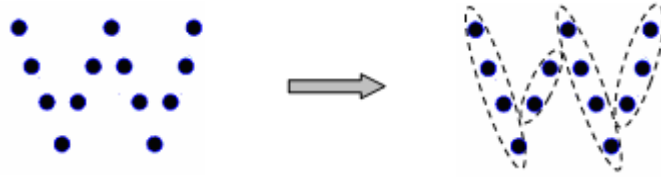
Sola yatık ilk kolda adım sayısının bir fazlası kadar nokta vardır. Diğer kollardaki toplam nokta sayısı ise adım sayısının 3 katıdır. Bu gruplardaki nokta sayılarının toplanmasıyla $(n+1) + 3n$ genel formülüne ulaşılır. Şekil 25'te, bu stratejiyi kullanan tek öğretmen adayı olan Ö14'ün çözümü verilmiştir.

1. a)  3. adım

8. adımda $9 + (3 \times 8) = 9 + 24 = 33$ nokta bulunur
b) 50. adımda $51 + (3 \times 50) = 201$ nokta bulunur

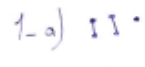
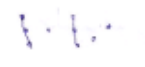
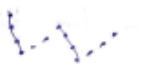
Şekil 25. Ö14'ün birinci soruya ilişkin çözümü

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen üçüncü stratejide ilk olarak sola yatık kolların ikisi de gruplandırılmıştır. Sola yatık kollarda adım sayısının bir fazlası kadar, sağa yatık kollarda ise sırasıyla adım sayısının bir eksiği ve adım sayısı kadar nokta vardır. Örüntünün 3. adımını üzerinde Şekil 26'daki gibi modellenen bu stratejiye ilişkin genel formül $2(n+1) + (n-1) + n$ olarak yazılabilir.



Şekil 26. EYS kapsamındaki üçüncü stratejiye ilişkin model

Bu stratejiyi kullanan sadece bir öğretmen adayı vardır ve çözümü Şekil 27'deki gibidir.

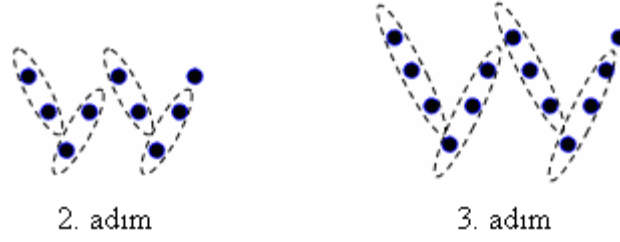
1-a)    

2+2+1 3+3+1+2 4+4+2+3 5+5+3+4

8. adımda $9 + 9 + 7 + 8 = 33$ nokta vardır.
b) 50. adımda $51 + 51 + 49 + 50 = 201$ nokta vardır.

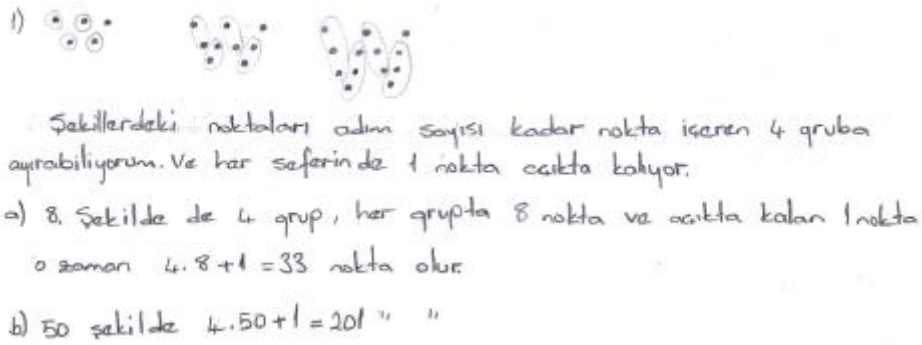
Şekil 27. Ö36'nın birinci soruya ilişkin çözümü

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen son stratejide ise adım sayısı kadar nokta içeren gruplar oluşturulmuştur. Bu strateji örüntünün ikinci ve üçüncü adımını üzerinde Şekil 28'deki gibi temsil edilebilir.



Şekil 28. EYS kapsamındaki dördüncü stratejiye ilişkin model

Yapılan bu grupta ile her şekilde 4 grup olduğu ve hep bir noktanın açıkta kaldığı görülür. Dolayısıyla bu stratejiyle ulaşılan genel formül $4n+1$ 'dir. Bu stratejiyle genelleme yapan tek öğretmen adayının çözümü Şekil 29'daki gibidir.



Şekil 29. Ö38'in birinci soruya ilişkin çözümü

Sayısal Yaklaşım Altında Kullanılan Stratejiler

Tablo 1'de görüldüğü gibi, sayısal yaklaşımı benimseyen 34 öğretmen adayı vardır. Bu yaklaşımda ilk olarak, soruda verilen şekillerde kullanılan toplam nokta sayısı belirlenmiş ve şekil örüntüsü bir sayı örüntüsüne dönüştürülmüştür. Örüntüye ilişkin sorular bu sayı örüntüsü kullanılarak cevaplandırılmıştır. Genelleme yaparken bazı öğretmen adaylarının önce örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi bulduğu, sonrasında bu genel terimde istenen değerleri yerine yazdığı; bazılarının ya aynı stratejiyi kullanarak ya da uzak adımda strateji değişikliği yaparak yakın ve uzak adımı sırayla bulduğu tespit edilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının büyük bir kısmının ilk olarak terimler arası farka odaklandıkları görülmüştür.

Önce örüntünün kuralını bulan 14 öğretmen adayı vardır. Bu öğretmen adayları örüntünün kuralını bulmak için adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi inceleme ve aritmetik dizi formülünü kullanma stratejilerini benimsemişlerdir. Bu bağlamda Tablo 1’de “yakın ve uzak adımı örüntünün kuralıyla bulma” başlığı altında sınıflandırılan stratejiler, öğretmen adaylarının kurala ulaşmak için kullandıkları stratejileri göstermektedir. Bazı öğretmen adayları ise kuralı nasıl bulduklarına dair bir açıklama yapmadıkları için “doğrudan kuralı yazma” kategorisinde sınıflandırılmışlardır.

Yedi öğretmen adayı, örüntünün adım sayısı ile o adımda kullanılan nokta sayısı arasında bir ilişki bulmaya çalışmıştır. Bu bağlamda öğretmen adaylarından altısı terimleri 4’ün katlarıyla, biri ise 5’in katlarıyla ilişkilendirmiştir. Belirlenen bu ilişki yakın ve uzak adımdaki nokta sayısını hesaplamak için kullanılmıştır. Terimleri 4’ün katlarıyla ilişkilendiren öğretmen adaylarından birinin çözümü Şekil 30’da verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 &1) \ 5, 9, 13 \\
 &\text{Sayılar } 4\text{'ün katlarının } 1 \text{ fazlası şeklindedir.} \\
 &5 = 4 \cdot 1 + 1 \\
 &9 = 4 \cdot 2 + 1 \\
 &13 = 4 \cdot 3 + 1 \\
 &a) \ 8. \text{ sayı} = 4 \cdot 8 + 1 = 33 \\
 &b) \ 50. \text{ sayı} = 4 \cdot 50 + 1 = 201
 \end{aligned}$$

Şekil 30. Ö32’nin birinci soruya ilişkin çözümü

Terimleri 5’in katlarıyla ilişkilendiren tek öğretmen adayı olan Ö23’ün çözümü ise Şekil 31’deki gibidir.

$$\begin{aligned}
 &1. a) \ 1. \text{ adım} \rightarrow 5 = 5 \cdot 1 \\
 &2. \text{ adım} \rightarrow 9 = 5 \cdot 2 - 1 \\
 &3. \text{ adım} \rightarrow 13 = 5 \cdot 3 - 2 \\
 &8. \text{ adım} \rightarrow 5 \cdot 8 - 7 = 33 \\
 &b) \ 50. \text{ adım} \rightarrow 5 \cdot 50 - 49 = 201
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 5x - (x-1)$$

Şekil 31. Ö23’ün birinci soruya ilişkin çözümü

Örüntünün kuralını bulma sürecinde bazı öğretmen adaylarının öncelikle terimler arası farka odaklandıkları görülmüştür. Bu öğretmen adayları şekil örüntüsüne karşılık gelen sayı dizisinin ilk üç terimi yardımıyla terimler arası farkı 4 olarak belirlemişlerdir. Ardışık terimler arasındaki farkın sabit olduğunu gören iki öğretmen adayı bu örüntünün, ilk terimi 5 ve sabit farkı 4 olan bir aritmetik dizi olduğunu fark etmiş ve $a_n = a_1 + (n-1)d$ formülünden yararlanarak kuralı $a_n = 5 + (n-1)4$ olarak yazmışlardır. Öğretmen adayları buldukları bu formüllerde n yerine 8 yazarak yakın adımı ve 50 yazarak uzak adımı hesaplamışlardır. Şekil 32’de aritmetik dizi formülünü kullanan öğretmen adaylarından birinin çözümü verilmiştir.

$$\begin{array}{lcl}
 1) a) 5, 9, 13 & & \\
 a_1 = 5 & d = a_2 - a_1 = 4 & a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \\
 a_2 = 9 & & a_n = 5 + (n-1) \cdot 4 \\
 & & a_n = 4n + 1 \\
 & & a_8 = 4 \cdot 8 + 1 = 33 // \\
 b) a_{50} = 4 \cdot 50 + 1 = 201 //
 \end{array}$$

Şekil 32. Ö1’in birinci soruya ilişkin çözümü

Beş öğretmen adayı kurala nasıl ulaştığına dair bir açıklama yapmadan doğrudan kuralı yazmıştır. Terimler arası farkı belirlemiş olmaları, bu öğretmen adaylarının kuralı sabit farkı kat olarak alma stratejisiyle bulmuş olabileceklerini düşündürmektedir. Tablo 1’de “doğrudan kuralı yazma” kategorisinde sınıflandırılan bu öğretmen adaylarından biri olan Ö47’nin görüşmede yaptığı açıklamalar bu düşünciyi destekler niteliktedir.

G : Soruyu nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

Ö47 : Bu noktaları saydım tek tek önce. Bir formül çıkarabilmek için. Baktım burada 5, 9, 13 sırayla. Buradan bir formül $(4k+1)$ çıkardım. $4k+1$ formülünde birinci adımda k ’yı yerine koyduğumda dört kere bir, dört. Bir daha, beş. k yerine ikinci adım yani iki koyduğumda dört kere iki, sekiz. Bir daha, dokuz. Böyle böyle gidiyor. Sağladığı için bu formül olduğunu düşündüm.

G : Bu formülü nasıl buldun? Yani hemen nasıl karar verdin $4k+1$ olduğuna?

Ö47 : Nasıl karar verdim...

G : İşte o aşamaları dinlemek istiyorum senden.

Ö47 : Şimdi burada hep dördün katı artı bir, dördün katı artı bir var... Arada dört fark, dört fark var. Onun için dördün katılı bir şeydir dedim. Sonra dördün katını aldım. Sonra baktım hep dördün katlarının, şey tam sayı katlarının, pozitif katlarının bir fazlası olduğu için bu formüle ulaştım. Sonra bunlarda sekizinci adımı yerine koydum, ellinci adımı yerine koydum.

Ö47'nin benimsediği bu stratejide ilk olarak terimler arasındaki fark, kat olarak alınmakta ve cebirsel ifadenin $4n$ terimini içerdiği belirlenmektedir. Sonrasında örüntüde verilen terimleri elde etmek için bu çarpıma 1 eklenmesi gerektiği bulunarak $4n+1$ genel formülüne ulaşılmaktadır.

Tablo 1'de “önce yakın, sonra uzak adımı aynı stratejiyle bulma” ve “önce yakın, sonra uzak adımı farklı stratejiyle bulma” başlıkları altında sınıflandırılan 20 öğretmen adayı önce yakın adımı bulmuştur. Daha sonra ya bu adımda kullandıkları stratejiyi kullanmaya devam ederek ya da başka bir strateji benimseyerek uzak adımı hesaplamışlardır. Hem yakın hem de uzak adımda aynı stratejiyi kullanan 9 öğretmen adayı vardır. Bu öğretmen adaylarının altısı aralık sayma, üçü ise aritmetik dizi formülünü kullanma stratejisini benimsemiştir. Örüntüde bulunması istenen adım ile başlangıç noktası olarak seçilen adım arasındaki aralık sayısının sabit fark ile çarpılıp, bu çarpımın başlangıçtaki terime eklendiği aralık sayma stratejisiyle çözüm yapan öğretmen adaylarından biri olan Ö49'un klinik görüşmedeki açıklamaları aşağıdaki gibidir:

Ö49 : Aşağıda noktalarla oluşturulmuş bir şekil örüntüsünün ilk üç adımı verilmiştir diyor. İlk adımda beş tane nokta var. İkinci adımda dokuz tane nokta var ve sürekli dört ekleniyor her adımda. Bize sorduğu şey sekizinci adımda kaç nokta olduğu. Şimdi birinci adımdan sonra yedi adım kalıyor. Her adımda dört tane eklendiğine göre yedi çarpı dörtten 28 tane eklenecek

demektir birinci adıma. E birinci adımda da beş tane vardı. Yirmi sekiz ile beşi toplarsak 33. Ellinci adımda kaç tane nokta olduğunu söyleyecek olursak, bu da aynı şekilde. Kırk dokuz adım kalıyor birinci adımdan sonra. Kırk dokuzla dördü çarparız, beş ekleriz. Bu da ellinci adımdaki nokta sayısını bize verir.

Ö49 başlangıç noktası olarak ilk terimi seçmiştir. Ancak aralık sayma stratejisinde ilk terim yerine, örüntüde verilen son terim de kullanılabilir. Tanışlı (2008)’nın “lineer yöntem” olarak adlandırdığı bu durum, bu araştırmada ayrı bir strateji olarak ele alınmamış ve aralık sayma stratejisi altında incelenmiştir. Aralık sayma stratejiyle genelleme yapan beş öğretmen adayı ilk terimi kullanırken, bir öğretmen adayı son terimi kullanmıştır. Örüntüde verilen son adım ile istenen adım arasındaki aralık sayısını sabit farkla çarparak örüntüde verilen son terime ekleyen öğretmen adayının çözümü Şekil 33’teki gibidir.

1) a) 1. adım 2. adım 3. adım 8. adım
 5 nokta 9 nokta 13 nokta 33
 +4 +4 +20

b) 3. adım 50. adım
 50 - 3 = 47 adım
 47 · 4 = 188 bunu 3. adıma eklersek 50. adım 13 + 188 = 201 nokta

Şekil 33. Ö11’in birinci soruya ilişkin çözümü

Hem yakın hem de uzak adımda aritmetik dizi formülünü kullanan üç öğretmen adayından biri olan Ö46’nın çözüme ilişkin açıklamaları şöyledir:

G : Soruyu nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

Ö46 : Şimdi baktığımız zaman birinci adımda beş, ikinci adımda dokuz, üçüncü adımda on üç nokta olduğunu görüyoruz. Ve bunlar arasında dört fark var. Ve bu fark değişmiyor. O zaman bu bir aritmetik dizidir dedim. Bizim aritmetik dizi için bir formülümüz vardı ($a_n = a_1 + (n-1)d$ eşitliğini yazıyor). Sekizinci adımı bulmak için bu formülü esas alarak sekizinci adım için a_8

dersek. a_8 eşittir beş, artı, yedi çarpı dört ($a_8 = 5 + 7.4$). Buradan beş artı yirmi sekiz eşittir 33 olur. Ellinci adım içinse a_{50} diyerek, n yerine elli yazarak ($a_{50} = 5 + 49.4$ işlemiyle) sonucu buluruz. O da 201 eder.

Yakın ve uzak adım için farklı stratejiler kullanan 11 öğretmen adayı vardır. Bunlardan onu, örüntünün yakın adımındaki toplam nokta sayısını hesaplarken ardışık toplama stratejisini kullanmış; biri ise şekil çizerek sonuca ulaşmıştır. Ardışık toplama stratejisinde terimler arasındaki sabit fark her seferinde bir önceki terime eklenerek istenen adıma ulaşılmıştır. Uzak adımı hesaplamak içinse bu stratejiden vazgeçilmiş ve aralık sayma, aritmetik dizi formülünü kullanma ve adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi inceleme stratejileri kullanılmıştır. Bu bağlamda bu öğretmen adaylarının büyük kısmının uzak adımda sabit farkı esas alan stratejilerden yararlandıkları tespit edilmiştir.

Yakın adım için ardışık toplama, uzak adım içinse aralık sayma stratejisini kullanan beş öğretmen adayı vardır. Bunlardan birinin çözümü Şekil 34'te verilmiştir.

Handwritten solution for Şekil 34:

1) a- 1. adım $\Rightarrow 5$ 4'er artıyor
 2. " $\Rightarrow 9$
 3. " $\Rightarrow 13$
 4. " $\Rightarrow 17$
 5. " $\Rightarrow 21$
 6. " $\Rightarrow 25$
 7. " $\Rightarrow 29$
 8. " $\Rightarrow 33$ nokta var

b- 50. adım $\Rightarrow 49.4 + 5 = 201$ nokta var

Şekil 34. Ö4'ün birinci soruya ilişkin çözümü

Yakın adım için ardışık toplama, uzak adım içinse aritmetik dizi formülünü kullanan iki öğretmen adayından birinin çözümü Şekil 35'teki gibidir.

$$1.) a) \begin{array}{ccccccc} 5 & 9 & 13 & 17 & 21 & 25 & 29 & 33 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & \end{array}$$

10. adımda 33 nokta vardır.

b) Bu sayılar; ilk terimi 5 olan, ortak farkı 4 olan bir aritmetik dizi oluşturur.

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = 5 + 4$$

$$a_3 = 5 + 2 \cdot 4$$

$$a_{50} = 5 + (50-1) \cdot 4 = 201 \text{ nokta vardır.}$$

Şekil 35. Ö20'nin birinci soruya ilişkin çözümü

Yakın adıma ardışık toplama stratejisi ile ulaşan, uzak adım içinse değişkenler arasında bir ilişki bulmaya çalışan iki öğretmen adayı vardır. Bunlardan biri uzak adımı, örüntünün terimlerini 5'in katlarıyla ilişkilendirerek bulduğu kuralı kullanarak hesaplamıştır. Şekil 36'da bu öğretmen adayının çözümü gösterilmiştir.

$$1.a) \begin{array}{ccccccc} 5 & 9 & 13 & 17 & 21 & 25 & 29 & 33 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\ & 4 & 4 & 4 & & & & \end{array}$$

Örüntünün 8. adımında 33 nokta vardır. 5 nokta ile başlayıp her adım için 4 tane artmıştır.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ b) & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 2 \cdot 5 - 1 & 3 \cdot 5 - 1 & 4 \cdot 5 - 1 & 5 \cdot 5 - 1 & \end{array}$$

50. adımda 201 nokta vardır. Şöyle ki; sayılar adım sayısının 5 katı çıkartılıp, bu çıkartımdan adım sayısının 1 eksikliği eklenilerek oluşturulur. Bu nedenle örüntüde $(5 \cdot n) - (n - 1)$ kuralı vardır. 50. adım için kuralı uygularsak $5 \cdot 50 - (50 - 1) = 201$ 'e ulaşırız.

Şekil 36. Ö17'nin birinci soruya ilişkin çözümü

Uzak adıma, adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi inceleyerek bulduğu cebirsel ifadeyi kullanarak ulaşan diğer öğretmen adayı ise klinik görüşmelerin yapıldığı Ö50'dir. Bu öğretmen adayının çözüme ilişkin açıklamaları aşağıdaki gibidir:

Ö50 : Önce noktaları saydım. Hatta soldaki noktaları saydım sadece. Bir iki (birinci adımda soldaki noktaları sayıyor), bir iki üç (ikinci adımda soldaki noktaları sayıyor), bir iki üç dört (üçüncü adımda soldaki noktaları sayıyor)

diye gidiyor. Sonra tamamını saydım (her adım için toplam nokta sayılarını belirlemiş). E111... İlerlettim bunu birkaç adım daha. Dördüncü- beşinci adıma kadar (cevap kâğıdında dördüncü adımı çizdiği görülüyor). Sonra birinci adımda beş nokta, ikinci adımda dokuz nokta, üçüncü adımda on üç nokta, dördüncü adımda on yedi nokta. Sonra bunları ilişkilendirmeye çalıştım. İşte birle beş, ikiyle dokuz, üçle on üç, dörtle on yedi. Bunları yan yana yazarak. Burada zaten biraz ilerlettiğim zaman (ardışık toplama strateji ile örüntüyü sekizinci adıma kadar devam ettirmiş) sekizinci adımda 33 nokta olduğunu buldum. Kural olarak da yani deneme- yanılmayla, yani ben n 'yi basamak sayısı olarak alırsam. İ11 işte n 'yi basamak sayısı olarak alırsam nasıl bir denklem kurmalıyım ki birinci basamakta bana beş, beşi versin bu denklem bana dedim. Sonra burada yani şey deneme- yanılmayla $4n+1$ olarak buldum. Sonra diğerlerinde koydum kuralda, her adımda n 'yi değiştirerek yaptım ve 9, 13 ve 17'yi verdi. Onu sağladı. b şikkında ellinci adımı soruyordu. Ellinci adımda da 201 nokta olduğunu buldum (bulduğu kuralda n yerine 50 yazarak sonuca ulaşmış).

Klinik görüşmeye katılan Ö45 de yakın adıma ardışık toplama stratejisiyle ulaşan, uzak adımdaysa stratejisini değiştiren öğretmen adaylarındandır. Ö45, terimler arasındaki sabit farktan yola çıkarak ilk üç adımdaki nokta sayılarını düzenlemiş ve uzak adımı, bulduğu bu ilişki yardımıyla hesaplamıştır.

Ö45 : Birinci adımı saydım, kaç nokta olduğunu. Beş tane nokta çıktı. İkinci adımı saydım, burada dokuz nokta çıktı. Bir sonraki adımda da on üç nokta çıktı. Her birine baktığım zaman dörder tane artmış (her seferinde bir önceki adıma dört ekleyerek sırayla dördüncü, beşinci, altıncı, yedinci ve sekizinci adımı buluyor).

G : Yakın adımı ardışık toplayarak yaptın.

Ö45 : Hı hı. Evet.

G : Bunu daha büyük adımda, ellinci adımda uygulayamadın.

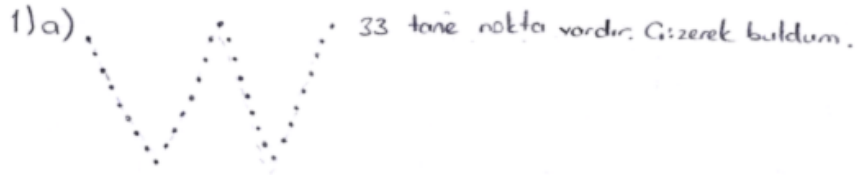
Ö45 : Evet. Ya saymak, sayı büyük olduğu için zor oldu. Burada da formül geliştirdim. Kendimce bir formül. Dedim ki birinci adımda bir artı dört tane olsun. Çünkü her seferinde dört artıyor. Dört ile bir kural bulmam gerekiyor. İkinci adımda da bir artı dört artı dört. Hani sayı dokuz olduğu için. (Üçüncü adıma da $1+4+4+4$ şeklinde yazıyor). Baktığım zaman bir artı, dört çarpı bir ($1+4.1$) olmuş oldu aslında. İkinci adımda bir artı, dört çarpı iki ($1+4.2$) olmuş oldu. Üçüncü adımda da aynı şeyi yaptığım zaman bir artı, dört çarpı üç ($1+4.3$). Yani bir artı, dört çarpı n ($1+4n$) gibi bir kural çıkmış oldu. Ellinci adımda da n yerine 50 yazdım.

Bu kategoride incelenen cevaplarda öğretmen adaylarının yarısının uzak adımda aralık sayma stratejisini tercih etmiş olmasından hareketle Ö45'in de bu stratejiyi kullanabileceği düşünülmüştür. Bu bağlamda aralık sayma yerine neden bu stratejiyi benimsediğini anlayabilmek için kuralı bulurken ilk adım olan beş ile başlayıp sabit farkı ekleyebileceği söylenmiştir.

G : Kuralı yazarken, (öğretmen adayının kuralı bulma aşamasında yaptığı düzenlemeyi göstererek) burada yazdığın gibi, 5 ile başlayıp dört ekleyebilirdin.

Ö45 : Yazabilirdim ama burada dörder tane arttığı için başlangıç noktası bulmam gerekiyordu. Dört ile olması gerekiyordu onun da. O yüzden dördü ayırmam gerekiyordu. Dördü ayırdım. Baktığım zaman geriye bir kaldı. Hani sağlıyor mu sonraki adımlarda? Deneme- yanılma yoluyla yaptım biraz da aslında.

Farklı stratejiler kullanma kategorisinde sınıflandırılan son öğretmen adayı, Şekil 37'de görüldüğü gibi 8. adımdaki şekli çizip noktaları saymıştır. Kullanışlı bir strateji geliştiremeyen bu öğretmen adayı sadece yakın adımı hesaplayabilmiştir.



Şekil 37. Ö5'in birinci soruya ilişkin çözümü

Klinik görüşmelerde öğretmen adaylarından ilk olarak soruyu nasıl çözdüklerini anlatmaları istenmiştir. Bu bağlamda, sayısal yaklaşımı benimsemiş olan öğretmen adaylarının neden örüntüyü sayısallaştırdıkları öğrenilmeye çalışılmıştır. Daha sonra bu öğretmen adaylarından şekilleri esas alan bir genelleme yapmaları istenmiştir.

“Şekilleri neden sayılara dönüştürdün?” sorusuna Ö49; “Şekilleri neden sayılara dönüştürdüm, çünkü bize nokta sayısını soruyor. Bir şekilde benim bunları sayıp aralarında bir bağıntı oluşturmam gerekiyordu. Bu yüzden.” cevabını vermiştir. Ö46 ise aşağıdaki açıklamaları yapmıştır.

Ö46 : Ya böyle sorular görünce ben hemen sayısala dökmeye çalışıyorum, formülize etmeye çalışıyorum. Ne bileyim şimdiye kadar bu tarz şeyler de çok çözdüm. Hep belli bir kural oluşturmaya çalışıyorum. Belki başkaları, başka şekilde de düşünebilir ama bana bu çok mantıklı geliyor.

G : Terimler arasındaki farkı bulmuşsun.

Ö46 : Evet hep terimler arasındaki farkı buldum. O farka dayanarak bir kural oluşturdum.

Bu açıklamalarda geçmiş deneyimlerin strateji seçiminde etkili olduğu görülmüştür. Örüntüyü sayısallaştırmada etkili olan bir diğer nedenin, şekillerin oluşumuna dair kullanışlı bir hipotez geliştirememeye olduğu tespit edilmiştir. Örneğin Ö47'nin şekiller üzerinden bir formül bulması istendiğinde, çözüme zaten şekilleri analiz ederek başladığı ancak bu girişiminde başarısız olduğu belirlenmiştir. Bu bağlamda terimler arasındaki sabit farkın, kuralı veren cebirsel ifadeyi belirlemede önemli bir rol oynadığı da dikkati çekmektedir.

G : Şekilleri esas alan bir çözüm yapabilir misin?

Ö47 : İlk başta aslında ben şey düşünmüştüm. İki iki gidiyor bu (sola yatık iki kolu gösteriyor), sonra üç üç mü gidiyor acaba diye düşündüm.

G : Evet, tamam. Devam edebilirsin buradan.

Ö47 : Dört dört. Ama şey oluyor. Mesela burada iki, iki, bir (birinci şekildeki sola yatık kollar ve bunların dışında kalan bir noktayı gösteriyor). Üç, üç, üç tane üç (ikinci şekildeki sola yatık kollardaki noktalar ve bunların dışında kalan toplam üç noktadan bahsediyor). Dört dört...

G : Yaz istersen.

Ö47 : İki tane iki, artı bir. Üç tane üç. Ama işte burada artı bir olmuyor. Şurada mesela (üçüncü adımdaki şekil üzerinde bir sayım yapıyor) üç tane dört, artı bir oluyor. Ama şurada (ikinci adımda) bozuyor, tam üç tane üç oluyor (Öğretmen adayı ilk üç adımdaki nokta sayısını sırasıyla $2.2+1$, 3.3 ve $3.4+1$ şeklinde yazıyor. Buradan bir kural bulmak istiyor ancak ikinci adımda $+1$ terimi olmadığı için bu yoldan vazgeçiyor).

Benzer şekilde Ö50, sola yatık ilk koldaki noktaları sayarak başladığını, fakat buradan bir kural bulamadığını ifade etmiştir.

G : (Çözümünü anlattıktan sonra) Tamam. Şimdi bunu şekilleri analiz ederek çözebilir misin?

Ö50 : Şekil analiz ederek onu çözemedim. Şekillere bakarak.

G : Şimdi burada bir daha bakalım istersen. Yani çözmen önemli değil. Sadece neler düşündüğünü öğrenmek istiyorum.

Ö50 : Yani dediğim gibi önce oradan yola çıkmaya çalıştım. Bir, iki yani 111. Ve her çizgide buraları (sola yatık ilk kolu) çizersen eğer, her çizgide birer artarak gidiyor.

G : Yazabilirsin onları tek tek.

Ö50 : Eııım ama buradan bir yere varamadım (deneme yapmak istemiyor). Sonra işte sayılarla bağlantı kurduğum zaman buldum. Yani şekillerden bulamadım.

Ö45 ise her adımda bir önceki şekle dört nokta eklendiğini belirlemiştir. Ancak bu noktaları W şekline nasıl yerleştireceği konusunda zorluk çekmiştir. Bu nedenle de saymanın kendisine daha kolay geldiğini belirtmiştir.

G : Şimdi ben şeyi merak ediyorum. Bu şekli gördüğün zaman niye hemen noktaları sayıp sayı örüntüsüne dönüştürmeyi düşündün?

Ö45 : Ya şekilden aslında bir şey çıkaramadım direkt. Bir sonraki adımdan bir şey çıkaramadım... Bir de belki bir kuralı vardır, hani sayılar belli oranda artıyordur gibi düşünerekten. O şekilde denediğim zaman zaten sabit bir şekilde artıyormuş her seferinde. Ona göre baktığım zaman bir kural oluşturabildim. O şekilde çözdüm yani.

Sayısal yaklaşımı benimsemiş olan bu beş öğretmen adayından şekilleri analiz ederek genelleme yapmaları istenmiştir. Ö45 ve Ö50 şekillerden kuralı bulmaya yardımcı olacak bir ilişki bulamadıklarını belirtmiş ve görsel bir strateji geliştirememiştir. Ö46 ve Ö49 ise denemelerinde başarılı olmuştur. Ö46'nın görsel yaklaşımına ilişkin açıklamaları şöyledir:

G : Doğrudan sayılar üzerinden bir çözüm yaptın. Şimdi sayıların değil de şekillerin oluşumunu esas alan bir çözüm yapmayı dener misin?

Ö46 : Şekiller üzerinden bir çözüm. Nasıl olacak? Bir bakalım (düşünüyor)... Acaba şöyle olabilir mi? Şurayı şöyle yapsak ve bunları üçgen kabul etsek (en üst satırda yer alan üç noktayı bir doğruyla birleştiriyor). Hep iki tane üçgen oluyor. Noktalar kaç tane? Üçgenlerdeki noktalara baksak... Yok, buradan olmadı...

Ö46, ilk denemesinde başarısız olmuştur. Daha sonra Şekil 38'deki gibi temsil edilebilecek bir strateji geliştirmiştir.



Şekil 38. Ö46'nın klinik görüşmede geliştirdiği stratejinin modeli

Ö46 : O zaman başka bir şey düşüneyim. Birinci adımda hep ikişer nokta var. Evet... Nasıl olabilir? Şimdi üçüncü adıma baksam üç, üç, şunu saymıyorum (W şeklinin en üst satırındaki üç noktadan ortada yer alanı kastediyor), yine burada da üç, üç (Sola yatık ilk koldaki üç noktayı grupluyor, daha sonra sabit tuttuğu noktaya kadar yine üç nokta olduğunu fark ediyor. Aynı işlemi diğer kollarda da yapıyor). Evet, şimdi ne olmuş oldu dört çarpı üç, artı bir eşittir 13. Zaten bunu ilk başta saymıştım. Yani doğru oldu. Aynı şekilde bunu sekizinci adıma uyguladığımda (çizerek anlatıyor) sekiz, sekiz, bir tane burada var, sekiz ve sekiz. Baktığımızda dört çarpı sekiz, artı bir, 33.

Ö49'un görsel stratejisine ilişkin açıklamaları ise aşağıdaki gibidir:

G : Şekilleri inceleyerek bir kural bulabilir misin?

Ö49 : W'dan yola çıkarsak bir şey bulabilir miyim acaba?... Şu kollara (W'nun kollarının ucuna) her zaman birer tane eklenmiş. Ve ilk adımda ikiye bir, bir eksiği her zaman galiba şu. Ama o da olmuyor... Üç, üç, iki, bir (ikinci adım üzerinde noktaları grupluyor).

G : Üçüncü adımda da uygulayabilirsin bu bulduğunu.

Ö49 : Aynı şekilde şöyle; şuraya üç desek. Dört, dört, üç, burada da iki var (şekil üzerinde Şekil 39'daki gibi bir gruplama yapıyor).



Şekil 39. Ö49'un klinik görüşmede geliştirdiği stratejinin modeli

Ö49'dan bulduğu ilişkiyi sekizinci ve ellinci adımda ifade etmesi istenmiştir. Öğretmen adayı daha önce çizdiği dördüncü adımdan da yararlanarak adımlardaki nokta sayılarını aşağıdaki gibi yazmış ve istenen adımlara ulaşmıştır.

2, 2, 1

3, 3, 2, 1

4, 4, 3, 2

5, 5, 4, 3

Ö49 : Sekizinci adım da o zaman 9, 9, 8, 7 mi olur o zaman? Hımm. O zaman böyle bir ilişki ellinci adımda da 51, 51, 50, 49 mu olur? Daha mı kolay oldu? Hiç düşünememiştim gerçekten.

Genellemeye şeklin sola yatık kollarını gruplayarak başlayan ancak bunların dışında kalan noktaları düzenlemede sıkıntı yaşadığı için sonuca sayısal yaklaşımla ulaşan Ö47'den bu gruplama üzerinde yeniden düşünmesi istenmiştir. Öğretmen adayı şekillerin oluşumunda doğru bir ilişki bulmuş olmasına rağmen bunu cebirsel olarak ifade etmede zorlanmıştır.

G : Şey yap. Hani mesela (sola yatık iki kol için) üç üç dedin. Şu arada kalan noktaları başka türlü ifade etmeyi düşünebilirsin.

Ö47 : (Biraz düşünüyor) aslında şey de var burada. (Birinci adımda) iki, ikinin bir eksiği, iki. (İkinci adımda) üç, bir, üç, üç eksi bir iki. Dört, burada birdi (ikinci adımda) buradaysa (üçüncü adımda) iki oldu onun için, dört, dört eksi bir üç. (Dördüncü adım için) o zaman beş, üç olur, yine beş tane nokta olur, sonra beş eksi birden dört tane nokta olur.

G : Bunu formüle edebilir misin?

Ö47 : Formüle edebiliriz belki... İlişkiyi buldum da kafamda. İki, iki, bir geliyor. Üç, üç, bir, iki gidiyor.

G : Birinci adım, ikinci adım diyerek yaz istersen.

1. adım	2, 2, 1
2. adım	3, 1, 3, 2
3. adım	4, 2, 4, 3

Ö47 : (Bulduklarını yukarıdaki gibi yazıyor ve adımlar arasında bir karşılaştırma yapıyor) hep bir artıyor aslında.

G : O sayıları n ile ilişkilendirerek yazmayı deneyebilirsin.

Ö47 : n artı üç, artı desek (birkaç deneme yapıyor) birinci adım. Yok çok olur ama... Geçelim hocam.

4. 1. 2. Ardışık Olmayan İki Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünü Genellemede Kullanılan Stratejilere İlişkin Bulgular

Örüntü Testi'ndeki ikinci soruda öğretmen adaylarından ardışık olmayan iki terimi verilmiş sabit değişen şekil örüntüsünün genel terimini bulmaları istenmiştir. Üç öğretmen adayı soruyu cevaplamamıştır. Soruda 27 öğretmen adayı görsel ve 20 öğretmen adayı sayısal yaklaşımı benimsemiştir. Sayısal yaklaşım kapsamında incelenen beş cevapta ve görsel yaklaşım kapsamında incelenen bir cevapta hatalı genelleme yapıldığı saptanmıştır. Öğretmen adaylarının genelleme stratejileri Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. Ardışık Olmayan İki Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünü Genellemede Kullanılan Stratejiler

Sayısal Yaklaşım	<i>n</i>
✓ Değişkenler arasındaki ilişkiyi inceleme	8
✓ Aritmetik dizi formülünü kullanma	3
✓ Sabit farkı kat olarak alma	3
✓ Diğer	1
Yanlış Cevaplar	5
Toplam	20

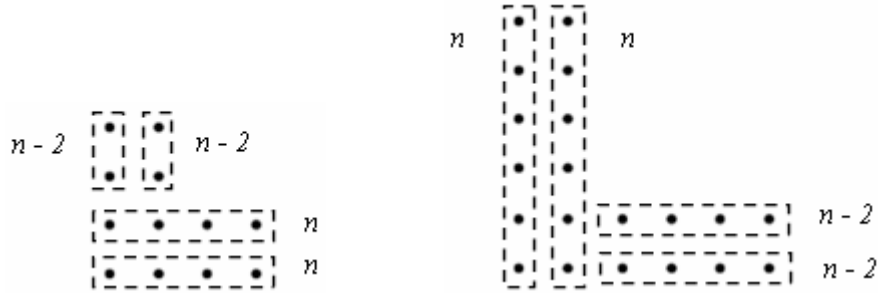
Görsel Yaklaşım	<i>n</i>
✓ Ekleyerek Yapılandırma	15
✓ Çakışan Parçaları Çıkararak Yapılandırma	8
✓ Yardımcı Şekil Kullanma	3
Yanlış Cevaplar	1
Toplam	27

Klinik görüşmeye katılan Ö45 ve Ö50 sayısal, diğer öğretmen adayları ise görsel yaklaşımla genelleme yapmış olan öğretmen adaylarındandır. Bunlardan Ö46, Ö48 ve Ö49 ekleyerek yapılandırma, Ö47 ise yardımcı şekil kullanma stratejisini benimsemiştir.

Görsel Yaklaşım Altında Kullanılan Stratejiler

Tablo 2’de görüldüğü gibi; görsel yaklaşımı benimseyen 27 öğretmen adayından 15 tanesi ekleyerek yapılandırma, 8 tanesi çakışan parçaları çıkararak yapılandırma ve 3 tanesi yardımcı şekil kullanma stratejisini kullanarak genelleme yapmıştır. Bu stratejiler kapsamında ise toplam dokuz strateji benimsenmiştir.

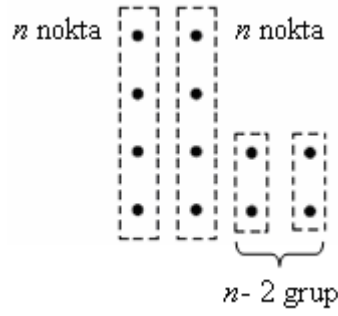
Ekleyerek yapılandırma stratejisi (EYS) altında incelenen çözümlerde 6 farklı strateji ile genelleme yapıldığı görülmüştür. Bu stratejilerden ilkinde tabandaki nokta sayısı esas alınarak yatay/ dikey iki grup oluşturulmuştur. Daha sonra bu gruplar dışında kalan noktalar dikey/ yatay olarak gruplandırılmıştır. Yapılan gruplamalar, tabanı sırasıyla dört ve altı nokta olan şekiller üzerinde Şekil 40'taki gibi temsil edilmiştir.



Şekil 40. EYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin modeller

Şekil 40'taki ilk modelde, n noktadan oluşan iki yatay grup ile $n-2$ noktadan oluşan iki dikey grup; ikinci modelde ise n noktadan oluşan iki dikey grup ile $n-2$ noktadan oluşan iki yatay grup vardır. n tabandaki nokta sayısını göstermek üzere, bu gruplardaki toplam nokta sayısını veren cebirsel ifade $2n+2(n-2)$ 'dir. Üç öğretmen adayı bu stratejiyle genelleme yapmıştır.

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen ikinci stratejide de tabandaki nokta sayısı esas alınarak yatay/ dikey iki grup oluşturulmuştur. Daha sonra bu gruplara dikey/ yatay doğrultuda ikişer nokta eklenmiştir. Bu nokta çiftlerinin sayısı, tabandaki nokta sayısından iki eksiktir. Yatay/ dikey gruplarda toplam $2n$ ve dikey/ yatay doğrultudaki $n-2$ grupta toplam $2(n-2)$ noktanın olduğu bu strateji Şekil 41'deki gibi temsil edilebilir.



Şekil 41. EYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model

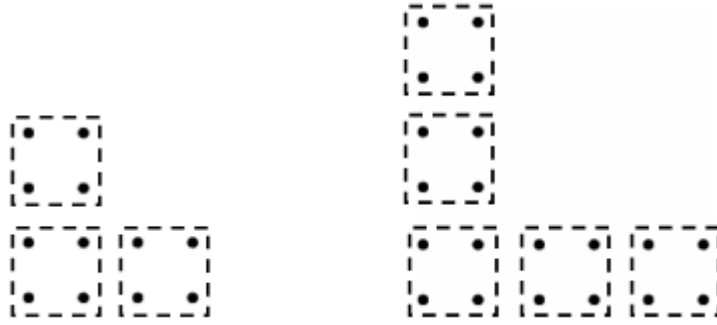
Bu genellemeyi yapan dört öğretmen adayı vardır. Bunlardan ikisi klinik görüşmenin gerçekleştirildiği Ö46 ve Ö48'dir. Ö48'in soruyu nasıl çözdüğüne ilişkin açıklamaları aşağıdaki gibidir:

Ö48 : İkinci soruda n tane nokta yatay ve düşey biçimde... İkişerli bir şekil, yükselmiş ve çoğalmış.

G : Çizerek gösterebilir misin?

Ö48 : Tabi ki. Şöyle bir şey yaparız hocam. Mesela ikişerli ikişerli yapayım ben. Nokta, nokta, nokta, nokta (dikey olarak birkaç nokta çiziyor). Yine benzer şekilde buradan da benzer devam etmiş olacak (çizdiği dikey noktaların yanına tekrar düşey noktalar çiziyor). Yani şurada n tane nokta var. n tane, düşey sütunda doğrusal, iki adet doğrusal nokta var... Burası da n tane, iki adet yatay doğrusal noktadan oluşacaktır. Dolayısıyla ben ilk önce yatayı görmeyeyim. Sadece şurayı gördüğüm zaman; burada n tane nokta varsa, bir tanesinde n tane varsa demek ki iki tanesinde $2n$ tane nokta var. Şimdi toplam nokta sayısını bulup a_n şeklinde bir genel terim elde edeceksek, burada iki tanesini aldığımızdan dolayı (iki nokta düşey sütuna dâhil olduğu için yatayda) $n-2$ tane nokta grubu oluşacak. Bunlarda ikişer tane olduğu için iki çarpı tane olacak (düşeydeki nokta sayısı için $2n$, yataydaki nokta sayısı için $(n-2)2$ yazıyor). Bu da genel terim olarak yazarsak (toplam nokta sayısı için yazdığı $2n+(n-2)2$ cebirsel ifadesini sadeleştiriyor) $4n-4$ olacaktır. Dolayısıyla $a_n = 4n-4$.

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen üçüncü stratejide, şekillerin dörder nokta içeren gruplara ayrılması esasına dayanan bir genelleme yapılmıştır. Bu grupta, tabanı sırasıyla dört ve altı noktadan oluşan şekiller üzerinde Şekil 42'deki gibi temsil edilebilir.



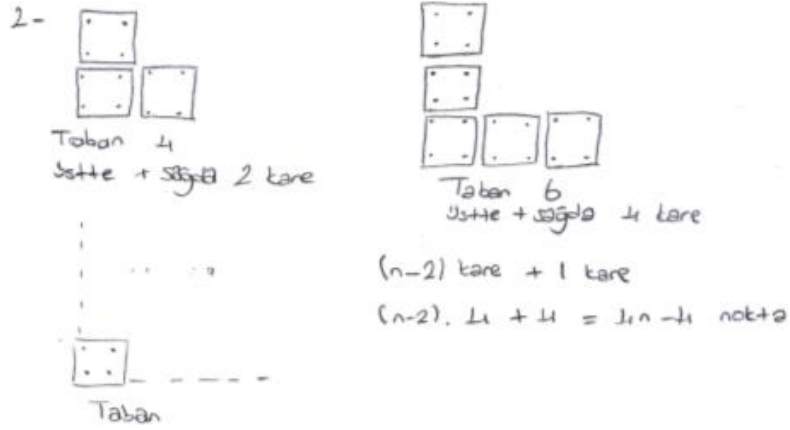
Şekil 42. EYS kapsamındaki üçüncü stratejiye ilişkin model

Şekil 42'deki gruplamayı yapan iki öğretmen adayı vardır. Bu öğretmen adaylarından biri, şekillerde adım sayısının bir eksiği kadar grup olduğunu fark etmiştir. Tabanı n noktadan oluşan şekilde $n-1$ grup ve her grupta 4 nokta olduğu için tabanı n noktadan oluşan şekildeki toplam nokta sayısı $4(n-1)$ 'dir. Bu genellemeyi yapan öğretmen adayının çözümü Şekil 43'teki gibidir.

② Şekillerdeki noktaları 4'erli gruplara ayırırsak tabanı 4 nokta olan 3 grup, tabanı 6 nokta olan 5 grup bulunur. Yani tabandaki nokta sayısının 1 eksiği sayıda grup vardır. Her grupta 4 nokta olduğundan toplam $4 \cdot (n-1)$ nokta vardır.

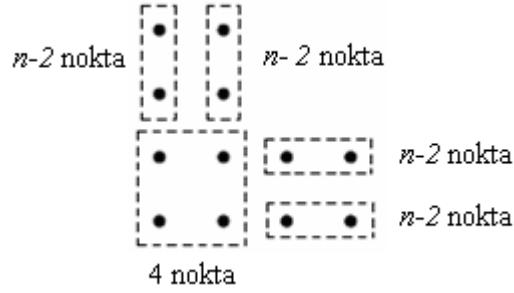
Şekil 43. Ö35'in ikinci soruya ilişkin çözümü

Diğer öğretmen adayı ise, bu grupların konumlarını esas almış ve sabit bir grubun üstünde ve sağında yer alan gruplardan yola çıkarak genel formüle ulaşmıştır. Sabit grupta 4 nokta vardır. Bu grubun üstünde ve sağında yer alan toplam grup sayısı, tabandaki nokta sayısının iki eksiği kadardır. Her grupta 4 nokta olmasından hareketle n . adımdaki toplam nokta sayısını veren cebirsel ifade $(n-2)4+4$ 'tür. Bu genellemeyi yapan öğretmen adayının çözümü Şekil 44'teki gibidir.



Şekil 44. Ö6'nın ikinci soruya ilişkin çözümü

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen dördüncü stratejide Şekil 45'teki gibi modellenebilecek bir gruplama yapılmıştır.



Şekil 45. EYS kapsamındaki dördüncü stratejiye ilişkin model

İki öğretmen adayının kullandığı bu stratejide, şeklin tabanında yer alan soldan ilk iki nokta ile bunların üstünde yer alan iki nokta sabit tutulmuştur. Bu sabit 4 noktanın üzerinde ve sağında, tabandaki nokta sayısının 2 eksiği kadar nokta içeren toplam 4 grup vardır. Buradan örüntünün genel formülü $4 + 4(n-2)$ olarak elde edilmiştir. Şekil 46'da bu genellemeyi yapan öğretmen adaylarından birinin çözümü verilmiştir.



Kayı renkli noktalar seçtiren. Bunların üzerine ve sağına noktalar eklenerek şekiller büyüyor. 1. şekilde 2'şerli 4 grup, 2. şekilde 4'erli 4 grup vardır. Gruplardaki nokta sayısı tabandaki toplam nokta sayısının 2 katıdır. Tabanı n noktadan oluşan şekilde gruplarda $(n-2)$ tane nokta olur. 4 grup olduğundan $4(n-2)$ ve aynı 4 nokta vardır. Toplamda $4n - 8 + 4 = 4n - 4$ nokta olur.

Şekil 46. Ö37'nin ikinci soruya ilişkin çözümü

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen beşinci stratejide tabandaki nokta sayısını esas alan bir gruplama yapılmıştır. Böylece her şekilde, tabandaki nokta sayısı kadar nokta içeren 3 grup ve bu grupların dışında kalan noktalar elde edilmiştir. Grupların dışında kalan nokta sayısı, tabandaki nokta sayısından 4 eksiktir. Buradan $3n + (n-4)$ şeklinde ifade edilebilecek bir genel formüle ulaşılır. Bu stratejiyi kullanan iki öğretmen adayı vardır. Bunlardan Ö38'in tabanı yedi noktadan oluşan şekli de çizerek yaptığı gruplama Şekil 47'de verilmiştir.

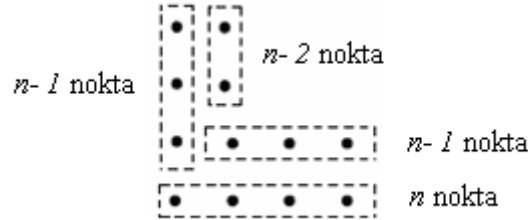


Tabandaki nokta sayısını esas olarak gruplama yaparsam 3 grup oluşturabiliyorum. 1. şekilde aslında nokta kalmıyor. 2. şekilde ise 2 ve 3. şekilde 3 nokta aslında kalıyor

Taban = 4	Taban = 6	Taban = 7	Taban = n
12	20	24	...
3.4+0	3.6+2	3.7+3	3.n+(n-4)

Şekil 47. Ö38'in ikinci soruya ilişkin çözümü

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen altıncı stratejide Şekil 48'deki gibi bir grupta yapılarak örüntü $n + (n-1) + (n-1) + (n-2)$ şeklinde genellenmiştir.



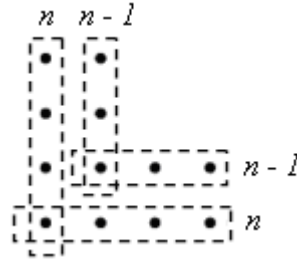
Şekil 48. EYS kapsamındaki altıncı stratejiye ilişkin model

Bu grupta yapılarak genelleme yapan iki öğretmen adayından biri olan Ö49'un çözümüne ilişkin açıklamaları aşağıdaki gibidir:

Ö49 : İkinci soruda, aşağıda noktalarla oluşturulmuş bir şekil örüntüsünün iki adımı verilmiştir diyor. O zaman ben direkt şekil üzerinden gidiyorum... Şimdi tabanına göre dediğimize göre tabanı dört noktaysa dört, üç (şekil dışta ve içte birer L olarak düşünüldüğünde, birinci şekilde dıştaki L'nin sırasıyla yatay ve dikey kolundaki noktaları grupluyor); üç, iki (birinci şekilde içteki L'nin sırasıyla dikey ve yatay kolundaki noktaları grupluyor) oldu. Beş arada yok. Altı, beş, beş, dört oldu (Aynı işlemleri ikinci şekilde de uyguluyor. Daha sonra bu nokta sayılarını $a_4 = 4 + 3 + 3 + 2$ ve $a_6 = 6 + 5 + 5 + 4$ şeklinde yazıyor). Şimdi bize n nokta dediğine göre, bakayım bir. Tabanımız n o zaman... n , $n-1$, $n-1$, $n-2$ olur o zaman da. (Bulduğu bu terimleri toplayarak $a_n = 4n - 4$ genel terimine ulaşıyor).

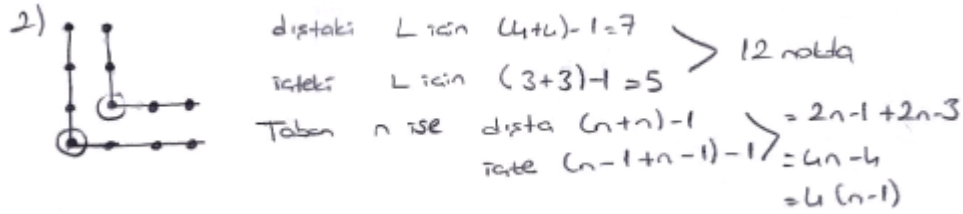
Tablo 2'de görüldüğü gibi, öğretmen adaylarından 8 tanesi çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisini (ÇPÇYS) kullanmıştır. Bu strateji kapsamında iki farklı genellemenin yapıldığı belirlenmiştir. Bunların ilkinde; şekil görsel olarak dışta ve içte birer L harfi biçiminde algılanmış ve buna göre bir grupta yapılmıştır. L harflerinin kollarını oluşturan noktalar dikey ve yatay olarak gruplandığında dıştaki L harfinin her iki kolunda n noktanın, içteki L harfinin her iki kolunda $n-1$ noktanın olduğu görülür. L

harflerindeki toplam nokta sayısı hesaplanırken önce gruptaki noktalar toplanır, sonra kolların kesiştiği yerde, başka bir deyişle L harflerinin köşelerinde yer alan ve iki kere toplanmış olan noktalardan birer tanesi çıkarılır. Böylece $[(n+n)-1]+[(n-1)+(n-1)-1]$ şeklindeki genel formüle ulaşılır.



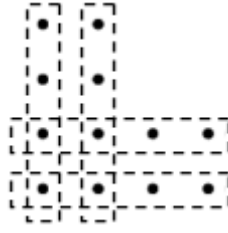
Şekil 49. ÇPÇYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin model

Şekil 49'daki gibi modellenen birinci stratejiyle genelleme yapan beş öğretmen adayı vardır. Bunlardan birinin çözümü Şekil 50'de verilmiştir.



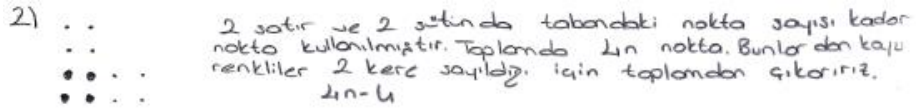
Şekil 50. Ö10'un ikinci soruya ilişkin çözümü

Çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen ikinci stratejide ise satırlarda ve sütunlarda tabandaki nokta sayısını esas alan bir gruplama yapılmıştır. Böylelikle tabandaki nokta sayısı kadar nokta içeren iki yatay ve iki dikey grup elde edilmiştir. Bu dört grupta toplam $4n$ nokta vardır. Ancak grupların kesişim yerlerindeki 4 nokta iki kere sayıldığı için toplamdan çıkarılmalıdır. Gruplardaki toplam nokta sayısından, kesişme yerlerinde iki kere sayılan 4 nokta çıkarılarak $4n-4$ genel formülüne ulaşılır. Bu strateji Şekil 51'deki gibi temsil edilebilir.



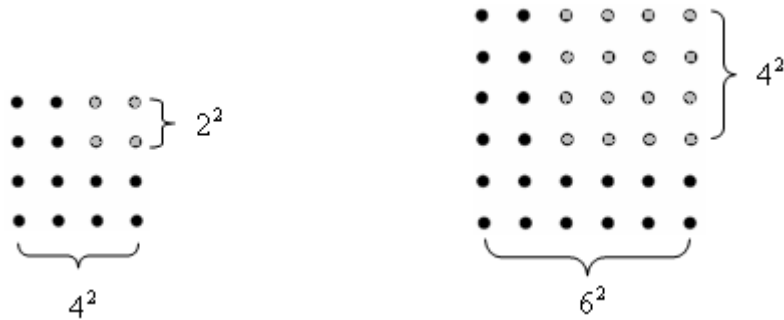
Şekil 51. ÇPCYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model

İkinci stratejiyle genelleme yapan üç öğretmen adayından birinin çözümü Şekil 52’de verilmiştir.



Şekil 52. Ö13’ün ikinci soruya ilişkin çözümü

Tablo 2’de görüldüğü gibi, yardımcı şekil kullanma stratejisi (YŞKS) ile genelleme yapan dört öğretmen adayı vardır. Bu stratejide şekiller, bir kenarı tabandaki nokta sayısına eşit olan karesel bir bölgenin parçası olarak algılanır. Bu karesel bölgede toplam n^2 kadar nokta vardır. Bu noktalardan, bir kenarı tabandaki nokta sayısının 2 eksiğine eşit olan başka bir karesel bölgenin yani toplam $(n-2)^2$ noktanın çıkarılmasıyla örüntüde verilen şekiller elde edilir. Böylece $n^2 - (n-2)^2$ genel formülüne ulaşılır. Bu strateji, tabanı dört ve altı noktadan oluşan şekiller üzerinde Şekil 53’teki gibi modellenebilir.



Şekil 53. YŞKS’ne ilişkin model

Yardımcı şekil kullanma stratejisiyle genelleme yapmış olan öğretmen adaylarından biri Ö47'dir. Ö47, Örüntü Testi'ndeki cevabında tabanı n noktadan şekildeki nokta sayısını $n^2 - n$ olarak bulmuştur. Klinik görüşmede ise yaptığı yanlışın farkına varmıştır.

Ö47 : Burada şey yaptım. Dört çarpı dört (birinci şekilde tabandaki dört nokta ile düşey dört noktayı gösteriyor), altı çarpı altı ya (ikinci şekilde tabandaki altı nokta ile düşey altı noktayı gösteriyor). n yerine bu nokta (tabandaki nokta sayısı), hani kenarda kaç nokta var onu saydım... Burada da n^2 eksi n tane eksik, yani dört tane nokta eksik (bir kenarı dört noktadan oluşan kareyi oluşturmak için birinci şekilde dört noktanın eksik olduğunu belirtiyor ve bu dört nokta tabana eşit olduğu için ilk olarak bunları n ile ifade ediyor). Burada da (ikinci şekilde) bir, iki, üç, dört ııı altı tane eksik. Olmuyor (şekli kareye tamamlamak için gereken nokta sayısının altı olmadığını, başka bir deyişle bu noktaların n ile belirtilmeyeceğini fark ediyor ve ilk adımda bulduğu $n^2 - n$ kuralının hatalı olduğunu anlıyor). Şimdi n^2 , n yerine bu (tabandaki) noktaları yazmıştım. Dördün karesi, sonra burada da (eklediği noktaları gösteriyor) $n - 2$ 'nin karesi kadar olur. Daha önceki yaptığım yanlış.

G : Yani büyük bir kareye tamamladın, sonra?

Ö47 : Oradan küçük bir karenin nokta sayısını çıkardım.

G : Tamam.

Ö47 : Burada (ikinci şekilde) da mesela altının karesi eksi, altıdan iki çıktı dördün karesi 16 tane de burada nokta vardır (eklediği noktaları gösteriyor).

Sayısal Yaklaşım Altında Kullanılan Stratejiler

Tablo 2'de görüldüğü gibi, sayısal yaklaşımı benimseyen 20 öğretmen adayı vardır ve bunların 5 tanesi yanlış genelleme yapmıştır. Doğru sonuca ulaşan öğretmen adaylarından sekiz tanesi değişkenler arasındaki ilişkiyi inceleme, üç tanesi aritmetik dizi formülünü kullanma ve üç tanesi sabit farkı kat olarak alma stratejisiyle genelleme yapmıştır. Bir

öğretmen adayı ise doğru bir cebirsel ifadeye ulaşmasına rağmen ne tür bir akıl yürüttüğü anlaşılamadığı için “diğer” olarak kategorize edilmiştir.

Ardışık terimler arasındaki sabit farkı kullanarak genelleme yapan altı öğretmen adayı vardır. Bunlardan üçü aritmetik dizi formülünü kullanma, üçü ise sabit farkı kat olarak alma stratejisini benimsemiştir. Öğretmen adayları örüntünün terimleri arasındaki farkı belirlemek için değişik yöntemler kullanmışlardır. Bu yöntemlerden biri, örüntünün eksik adımlarını tamamlamadır. Örneğin; üç öğretmen adayı ilk olarak, soruda verilmiş iki şekil arasında yer alan ve tabanı 5 noktadan oluşan şekildeki toplam nokta sayısını bulmuştur. Böylelikle örüntünün ardışık üç terimini elde etmiş ve bu terimler yardımıyla sabit farkı belirlemişlerdir. Sonra aritmetik dizi formülünü kullanma ($n = 3$) ve sabit farkı kat olarak alma ($n = 1$) stratejileriyle genel formüle ulaşmaya çalışmışlardır. Ardışık terimler arasındaki farkı belirledikten sonra, bu farkı aritmetik dizi formülünde kullanarak $12 + 4(n - 4)$ genel formülüne ulaşan üç öğretmen adayından birinin çözümü Şekil 54’te verilmiştir.

②- Tabanı 5 nokta olan şekil;



Ortak fark 4'tür.

$$a_n = 12 + 4 \cdot (n - 4) = 12 + 4n - 16 = 4n - 4$$

Şekil 54. Ö34’ün ikinci soruya ilişkin çözümü

Terimler arasındaki farkı şekil çizmeden belirleyen öğretmen adayları da vardır. Soruda verilen ilk şeklin tabanında dört nokta yer almaktadır. İkinci şekli oluşturabilmek için ilk şeklin tabanına iki nokta eklemek gerekir. Bu iki noktanın eklenmesiyle toplam nokta sayısı 8 artacak dolayısıyla tabana bir nokta eklendiğinde şekle dört nokta eklenmiş olacaktır. Bu bağlamda iki öğretmen adayı soruda verilen iki adım arasındaki artış miktarını ikiye bölerek sabit farkı bulmuş, daha sonra sabit farkı kat olarak alma stratejisini kullanmışlardır.

Tablo 2’de görüldüğü gibi, değişkenler (tabandaki nokta sayısı ile toplam nokta sayısı) arasındaki ilişkiyi inceleyerek genelleme yapan sekiz öğretmen adayı vardır. Bunlardan dördü sadece örüntüde verilen iki adımı kullanarak $4n-4$ genel formülüne ulaşmıştır. Dört öğretmen adayı ise eksik adımları tamamlayarak bir veya birkaç adım daha elde ettikten sonra kuralı bulmaya çalışmıştır. Bunlardan biri, örüntünün önceki adımlarından yararlanarak fonksiyonel bir ilişki bulmuştur. Bu yöntemde ilk olarak tabanı 2, 3 ve 5 noktadan oluşan şekiller çizilerek bu adımlardaki toplam nokta sayısı belirlenmiştir. Daha sonra taban ile toplam nokta sayısı arasındaki ilişki $4(n-1)$ şeklinde formüle edilmiştir.

Bir öğretmen adayı değişkenler arasındaki fonksiyonel ilişkiyi bulmak için sadece tabanı 5 noktadan oluşan şekli çizmiştir. $4(n+1)-8$ şeklinde formüle edilebilecek bir genelleme yapan bu öğretmen adayının çözümü Şekil 55’teki gibidir.

2. Taban	Toplam
4	12 $\rightarrow 4 \cdot 5 - 8$
5	16 $\rightarrow 4 \cdot 6 - 8$
6	20 $\rightarrow 4 \cdot 7 - 8$
$\vdots$	$\vdots$
n	$4 \cdot (n+1) - 8$ $= 4n - 4$

Şekil 55. Ö23’ün ikinci soruya ilişkin çözümü

Değişkenler arasındaki ilişkiyi inceleyen diğer bir öğretmen adayı ise ardışık terimler arasındaki fark yerine, örüntüde verilen iki terim arasındaki farka odaklanmıştır. Bu bağlamda tabanı 4 ve 6 noktadan oluşan şekillerdeki toplam nokta sayıları arasındaki farkı, tabanı 8 olan şekildeki toplam nokta sayısını belirlemek için kullanmıştır. Sonra bu üç terimdeki nokta sayısını tabanlarla ilişkilendirerek genel formüle ulaşmıştır.

Örüntünün eksik adımlarını tamamlayan öğretmen adaylarından biri de klinik görüşmeye katılan Ö50’dir. Bu öğretmen adayının açıklamaları şu şekildedir:

Ö50 : Şekil örüntüsü vermiş. Taban dört tane, tabanı dört noktadan oluşan şekilde 12 nokta var. Tabanı altı noktadan oluşan şekilde 20 nokta var. Yine burada da (birinci sorudaki gibi) aynı şeyi yaptım. Tabanı iki noktadan oluşan şekli çizdim buna benzeterek. Sonra tabanı 3 noktadan ve beş noktadan oluşan şekilleri çizdim. Yine sayılarla bağlantı kurdum. Buradan yola çıkarak gene bir kural buldum. Tabanı iki olduğu zaman dört nokta oluyordu, üç olduğu zaman sekiz nokta, tabanda dört nokta varsa on iki nokta, tabanda beş nokta varsa on altı nokta oluyordu (bunları alt alta yazmış).

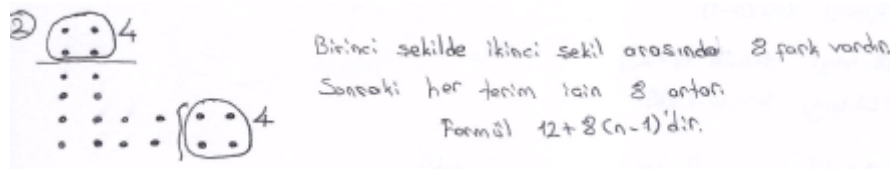
G : Yine deneme- yanılmayla buldun herhalde.

Ö50 : Deneme- yanılmayla buldum.

G : Tamam. Şekilleri analiz etmeyi denedin mi? Mesela sadece bu iki adım üzerinden bir kural bulmayı denedin mi?

Ö50 : Şekillerden yine bulamadım.

Sayısal yaklaşımı benimseyen beş öğretmen adayı hatalı genelleme yapmıştır. Bu öğretmen adaylarından iki tanesi; verilen şekillerin ardışık olmadığını göz ardı ettikleri, dolayısıyla şekilleri örüntünün birinci ve ikinci adımı olarak ele aldıkları için terimler arası farkı 8 olarak hesaplamışlardır. Bunlardan biri (Ö28) aritmetik dizi formülünü kullanarak, diğeri (Ö29) ise farkı kat olarak alarak genel formüle ulaşmıştır. Ancak sabit fark yanlış olduğu için buna bağlı olarak bulunan formüller de yanlıştır. Ö28'in çözümü Şekil 56'daki gibidir.



Şekil 56. Ö28'in ikinci soruya ilişkin çözümü

Ö29'un çözümü ise Şekil 57'de verilmiştir.

27 1. adım 4. noktada 12
2. adım 6 noktada 20
İse 8'li (8'er artışı için
8'ni buldum
Sente 1 adım da 12 nokta
var, Eklenmesi gereken
sayı 4'tür

Şekil 57. Ö29'un ikinci soruya ilişkin çözümü

Terimler arasındaki farkı, tabanı 5 noktadan oluşan şekil yardımıyla hesaplayan bir öğretmen adayı, bu farkı kat olarak almak yerine sabit olarak aldığı için yanlış bir genelleme yapmıştır. Bu öğretmen adayının çözümü Şekil 58'deki gibidir.

2) $n=4$ için 12
 $n=5$ için 16
 $n=6$ için 20
 $16-12=4$
 $20-16=4$
Farklar bizzat 4'er nokta
ekleniyor. Bu duruma bir sayıyı
4 ile çarpmak gerekir. $n=4$ için
 $n=4$ için $x+4=12$ olmasını sağlıyan
 $x=8$, $2n$ 'e denk gelir. Buradan
 $2n+4$ 'tür.

Şekil 58. Ö30'un ikinci soruya ilişkin çözümü

Yanlış genelleme yapan diğer bir öğretmen adayı ise tabana bir ve iki nokta eklendiğinde, şekillerdeki nokta sayısının ne kadar arttığını incelemiştir. Bu yöntemde tabanda yer alan noktalar ile toplam nokta sayısı arasındaki ilişki yerine, tabana eklenen nokta sayısı ile şekillere eklenen toplam nokta sayısı arasındaki ilişki incelendiği için yanlış genelleme yapılmıştır. Bu öğretmen adayının çözümü Şekil 59'da verilmiştir.

2- Tabana 2 nokta ekleyince toplamda 8 nokta ekledim.
Tabana 1 nokta " " 4 nokta "
Tabana n nokta eklersem toplam $2n+1$ nokta eklerim.
O zaman da toplam nokta sayısı $2n+1+12$ olur.

Şekil 59. Ö24'ün ikinci soruya ilişkin çözümü

Artış miktarını iki terim arasındaki farkı ikiye bölerek bulan ve toplam nokta sayısını $4 + 4n$ olarak bulduğu için çözümü yanlış cevaplar kategorisinde incelenen Ö45'in açıklamaları aşağıdaki gibidir:

Ö45 : Burada şöyle yaptım; birinci adımla ikinci adım arasındaki farka baktım (soruda verilen iki şekildeki nokta sayılarını karşılaştırmış). Birinci adımda işte taban dört noktadan oluşuyor. İkincisinde baktığım zaman altı taneden oluşuyor. Fakat şöyle bir şey var; her yeni bir taban eklediğim zaman, bir nokta eklediğim zaman aslında iki nokta artmış oluyor. Ve sadece tabanda değil üstte de aynı şekilde artmış oluyor bu noktalar. Bire bir gidiyor. Baktığım zaman demek ki burada da diyorum ki; her bir nokta eklediğimde ben, her bir adımda aslında dört nokta eklemiş oluyorum toplamda. Bu şekilde direkt bir formül oluşturabildim burada... Soruda şöyle demiş, en az iki nokta demiş (tabandaki nokta sayısının en az iki olabileceği bilgisine atıf yapıyor). O zaman en az iki noktayla bir formül oluşturmam gerekiyordu, başlangıç noktam oydu. En az iki nokta olacaksa, şöyle dedim bir nokta için dört tane nokta gerekiyorsa...

G : Tabanı iki olan için.

Ö45 : Aa aslında şöyle. Tabanı iki olduğu zaman şöyle dört nokta gerekiyor değil mi (tabanı iki noktadan oluşan şekli çiziyor)? Bu standart. Hiç değişmeyecek. Bu yüzden “dört artı” diye başladım formülüme. Sonra dedim ki (tabana eklenen) her nokta için dört tane daha arttığına göre dört çarpı n olacak ($4 + 4n$ formülünü yazıyor). Burada direkt o şekilde buldum zaten.

G : Bu kuralın doğru olduğundan emin misin?

Ö45 : Ya aslında denediğim zaman sağlıyor, baktığım zaman. Çünkü birinci adımda denedim, oluyor. İkinci adımda da denedim (“Birinci ve ikinci adım” derken soruda verilen iki şekli kast ediyor).

Örüntüde verilen şekilleri oluşturmak için tabanı iki noktadan oluşan şeklin tabanına sırasıyla iki ve dört nokta eklemek gerekmektedir. Ö45 formüldeki n yerine, eklenmesi gereken bu noktaları koyduğu için formülü doğru sonuçlar vermiştir. Öğretmen adayı

aslında aralık sayma stratejisiyle genelleme yapmıştır. Bu soruda n adım sayısını değil de tabandaki nokta sayısını gösterdiği için aralık sayısı $n - 2$ terimiyle ifade edilmeliydi. Ancak Ö45 ilk adımdan sonra, tabana eklenmesi gereken noktaları $n - 2$ yerine n ile ifade ettiği için bulduğu kural yanlış sonuçlara ulaşmasına neden olmuştur.

Klinik görüşmeye katılan öğretmen adaylarından Ö48, birinci soruda olduğu gibi bu soruda da görsel yaklaşımla genelleme yapmıştır. Ö50 ve Ö45 ise yine birinci sorudaki gibi sayısal yaklaşımı benimsemiştir. Ö50, şekillerden bir kural bulamadığı için sayıları esas aldığını belirtmiştir. Ö45'in sayısal yaklaşımı benimsemesinde ise terimler arasındaki artış miktarına odaklanmasının etkili olduğu görülmüştür. Bu öğretmen adayı, formülünde hata yaptığını fark ettikten sonra şekiller üzerinde düşünmeye başlamıştır. Ancak bu girişiminde de noktaların kaçır kaçır arttığına odaklandığı, başka bir deyişle tabandaki nokta sayısı ile bir ilişki kurmaya çalışmadığı için zorlanmıştır.

G : Farklı bir şey yapmayı düşünebilir misin şimdi burada?

Ö45 : (Şekilleri inceliyor) Dört. Yani çift sayılar için belki bir şey düşünebilirim ama... Bir, üç, beş (tabanı 2, 4 ve 6 noktadan oluşan şekiller üzerinde dört noktadan oluşan gruplar oluşturuyor).

G : Sayılar üzerinden gidince sıkıntı oldu. Bir de şekilleri analiz ederek bir şey yapabilirsin.

Ö45 : Evet yapabilirim. Çünkü şöyle bir şey var şu anda. Birinci adımda şu şekilde dört nokta var (yeniden çiziyor). Aslında bu tek bir cisim. Yani tek bir şekil gibi düşündüğüm zaman bir sonrakinde her iki tarafına da (şeklin sağına ve üstüne) bu şeklin aynısından yapıyorum. Bir sonraki adımda da aynı şeyi yapmışız. Baktığım zaman altta toplam altı tane olmuş, üst tarafa doğru da baktığım zaman aynı şekilde çıkıyor. Demek ki her seferinde, yani her bir adımda biz şeklin iki ucuna da sekiz tane, dörder tane nokta eklemiş oluyoruz.

G : Ben aslında senden şöyle bir şey istiyorum. Tabandaki nokta sayısı burada dört, burada iki, burada altı. Yani böyle nokta sayılarını esas alarak bir şey bulmanı istemiştin ama...

Ö45 : Yani şöyle bir şey yapabilirim. Birinci adım için bir çarpı dört olmuş. İkinci adıma baktığım zaman, yani ıı şöyle.

G : Bunları dört dört grupluyorsun.

Ö45 : Evet grupluyorum. Burada bir grup var. İkincisinde üç grup var. Bir sonrakinde beş grup var. Demek ki bu şekilde artıyor. Onu nasıl formülize ederiz bilemiyorum ama...

G : Grup sayısı ile tabandaki nokta sayısını ilişkilendirebilirsin. Tabandaki nokta sayısı ikiydi.

Ö45 : Aaa bir eksiği o zaman. Tabandaki nokta sayısı ikiyse, iki eksi bir grup var. Bir sonrakinde dört nokta varsa, dört eksi bir. Yani o zaman üç grup olmuş oldu. Burada altı nokta var, altı eksi bir (çizdiği şekillerin altına sırasıyla 2-1, 4-1 ve 6-1 yazdı). Evet. Gruplarda zaten dörder tane. O yüzden hepsiyle çarpı dört diyebiliriz ($(2-1)4$, $(4-1)4$ ve $(6-1)4$ yazarak çözümü tamamladı).

Birinci soruda sayısal yaklaşımı benimsemiş olan Ö46, Ö47 ve Ö49 bu soruda görsel yaklaşımla sonuca ulaşmıştır. Bu öğretmen adaylarına tabanı beş noktadan oluşan şeklin de yer aldığı yani tabanı 4, 5 ve 6 nokta olan üç adımın yer aldığı örüntü sunulmuş ve “Örüntü böyle verilmiş olsaydı soruyu nasıl çözerdin?” diye sorulmuştur. Ö46, terimler ardışık olduğu zaman sayılar üzerinden çözüm yapmaya alışkın olduğunu ifade etmiştir.

G : Bu soruda görsel yaklaşımı benimsemişsin. Ama aradaki terim, tabanı beş noktadan oluşan şekil verilmiş olsa yine şekiller üzerinden mi genelleme yapardın yoksa ilk soruda olduğu gibi sayılara mı dönüştürürdün?

Ö46 : Sayılara dönüştürdüm. Alışmışım böyle yapmaya. Hep zaten o soruları o şekilde çözüyorum.

Ö47 ve Ö49 ise yine görsel yaklaşımla çözüm yapacaklarını, bunda da şeklin yapısının etkili olduğunu belirtmişlerdir. Ö47’nin yanıtı şöyledir:

G : Şimdi bu soruda şekiller üzerinden gittin. Yani sayılar üzerinden kural bulmaya çalışmadın, şekilleri analiz ettin. Eğer bu örüntü, bu şekilde verilmiş olsaydı yani arada tabanı beş noktalı olan şekil de verilmiş olsaydı bunları yine şekil üzerinden mi analiz ederdin?

Ö47 : Şekil üzerinden giderdim.

G : Yani şekil mi etkili oldu? Mesela bunda (ilk soruda) sayısala dönüştürdün.

Ö47 : Şekil bana daha şey geliyor.

G : Bu soruda görmen daha mı kolay oldu?

Ö47 : Hıı hı. Görsel benim için daha etkili oluyor.

Ö49'un açıklamaları ise aşağıdaki gibidir:

G : Yani arada mesela şu adım verilmiş olsaydı yine ilk soruda olduğu gibi sayılara mı dönüştürürdün yoksa yine böyle bir çözüm mü yapardın?

Ö49 : Bu şekilde yapardım, yok. Çünkü bunu ben en son şeyi çıkardım ama şekilden çıkardım bu sefer. Mesela burada (birinci soruda) direkt sayıları kullanıp bağıntı oluşturdum ama burada (ikinci soruda) şekilden bir bağıntı çıkardım.

G : Yani şeklin veriliş biçimi etkili oldu.

Ö49 : Evet. Önemli, evet...

4. 1. 3. Ardışık Olmayan İki Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünün Yakın ve Uzak Adımını Bulmada Kullanılan Stratejilere İlişkin Bulgular

Örüntü Testi'ndeki üçüncü soruda öğretmen adaylarından ardışık olmayan iki terimi verilmiş sabit değişen şekil örüntüsünün yakın ve uzak adımını bulmaları istenmiştir. Üç öğretmen adayının cevap vermediği bu soruda 29 öğretmen adayı görsel ve 18 öğretmen adayı sayısal yaklaşımı benimsemiştir. Görsel yaklaşımı benimseyen 2, sayısal yaklaşımı

benimseyen 3 öğretmen adayı hatalı genellemeler yapmıştır. Öğretmen adaylarının stratejileri Tablo 3’de verilmiştir.

Tablo 3. Ardışık Olmayan İki Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünün Yakın ve Uzak Adımını Bulmada Kullanılan Stratejiler

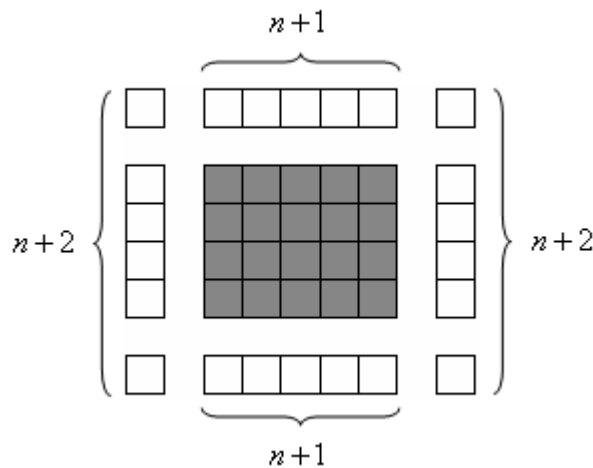
Sayısal Yaklaşım	<i>n</i>
<i>Yakın ve Uzak Adımı Örüntünün Kuralıyla Bulma</i>	
✓ Adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi inceleme	5
✓ Aritmetik dizi formülünü kullanma	1
✓ Aralık sayma	1
<i>Önce Yakın, Sonra Uzak Adımı Aynı Stratejiyle Bulma</i>	
✓ Aritmetik dizi formülünü kullanma	1
✓ Aralık sayma	3
✓ Diğer	2
<i>Önce Yakın, Sonra Uzak Adımı Farklı Stratejiyle Bulma</i>	2
Yanlış Cevaplar	3
Toplam	18
Görsel Yaklaşım	<i>n</i>
✓ Ekleyerek Yapılandırma	11
✓ Yardımcı Şekil Kullanma	10
✓ Çakışan Parçaları Çıkararak Yapılandırma	6
Yanlış Cevaplar	2
Toplam	29

Klinik görüşmeye katılan Ö45 ve Ö49 aralık sayma, Ö46 ekleyerek yapılandırma, Ö48 çakışan parçaları çıkararak yapılandırma, Ö47 ve Ö50 yardımcı şekil kullanma stratejisi ile genelleme yapan öğretmen adaylarındandır.

Görsel Yaklaşım Altında Kullanılan Stratejiler

Tablo 3’de görüldüğü gibi, görsel yaklaşımı benimseyen 29 öğretmen adayı vardır. Şeklin yapısal özelliğinden yola çıkarak genelleme yapan bu öğretmen adayları buldukları ilişkileri yakın ve uzak adımı hesaplamak için kullanmıştır. Yakın ve uzak adımda aynı stratejiler kullanıldığı için bulgular bir bütün olarak sunulmuştur. Bu yaklaşım altında 11 öğretmen adayı ekleyerek yapılandırma, 10 öğretmen adayı yardımcı şekil kullanma ve 6 öğretmen adayı çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisini kullanmıştır. İki öğretmen adayı ise yanlış genelleme yapmıştır.

Ekleyerek yapılandırma stratejisi (EYS) kapsamında 4 farklı stratejinin kullanıldığı görülmüştür. Birinci stratejide; ilk olarak şekillerin sağ ve sol sütunlarını oluşturan beyaz birim kareler, daha sonra bu sütunlar arasında kalan alt ve üst satırlardaki beyaz birim kareler gruplandırılır. Bu grupta ile n . adımda sütunlarda $n+2$ ve satırlarda $n+1$ beyaz birim karenin yer aldığı görülür. Gruplardaki birim kare sayılarının toplanmasıyla $2(n+2)+2(n+1)$ genel formülüne ulaşılan bu strateji Şekil 60’taki gibi modellenebilir.



Şekil 60. EYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin model

Bu stratejiyi kullanan dört öğretmen adayından birinin çözümü Şekil 61’deki gibidir.

3) a) 2. adım 2×3 $\downarrow$ beyaz kare = $(4 \cdot 2) + (3 \cdot 2)$

3. adım 3×4

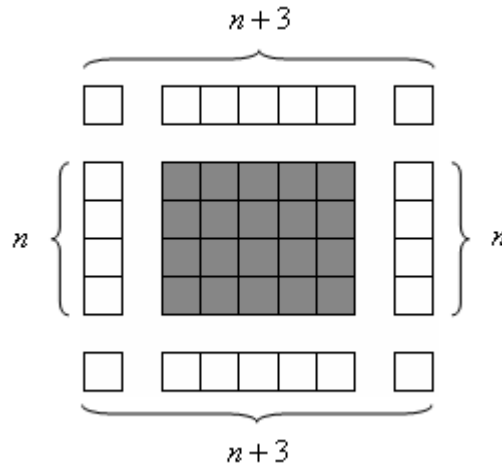
4. adım 4×5

... 10. adım $10 \times 11 =$ siyah kare $\downarrow$ $(12 \cdot 2) + (11 \cdot 2) = 46$ beyaz kare

b) 50. adım 50×51
 $= (52 \cdot 2) + (51 \cdot 2) = 206$

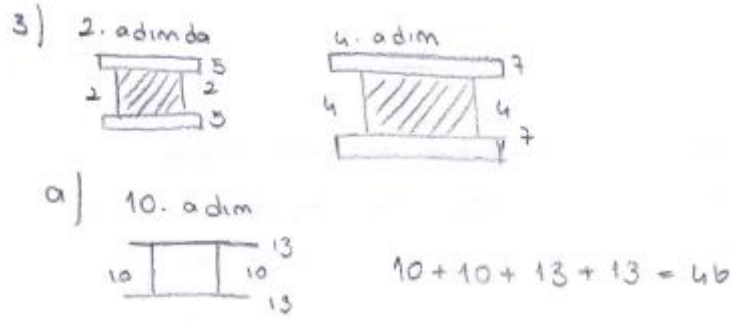
Şekil 61. Ö9'un üçüncü soruya ilişkin çözümü

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen ikinci stratejide; önce alt ve üst satırdaki beyaz birim kareler, daha sonra bunların arasında kalan sağ ve sol sütunlardaki beyaz birim kareler gruplandırılır. Böylelikle n . adımda satırlar $n + 3$ ve sütunlar n beyaz birim kareden oluşur. $2n + 2(n + 3)$ genel formülünün elde edildiği bu strateji Şekil 62'deki gibi temsil edilebilir.



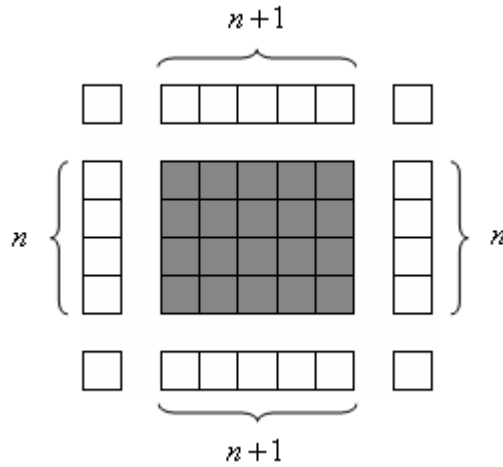
Şekil 62. EYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model

Şekil 63'te, ikinci stratejiyle genelleme yapan üç öğretmen adayından birinin çözümü verilmiştir.



Şekil 63. Ö37'nin üçüncü soruya ilişkin çözümü

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen üçüncü strateji; beyaz birim karelerin, siyah birim karelerden oluşan dikdörtgenin çevresinde sıralanması esasına dayanır. Kısa kenarının uzunluğu n ve uzun kenarının uzunluğu $n+1$ birim kare olan siyah renkli dikdörtgenin çevresine, köşelerdeki birer birim karenin de eklenmesiyle beyaz birim karelerin sayısını veren $2(n+n+1)+4$ genel formülüne ulaşılır.



Şekil 64. EYS kapsamındaki üçüncü stratejiye ilişkin model

Şekil 64'teki gibi modellenen bu stratejiyi benimseyen üç öğretmen adayı vardır. Bunlardan birinin çözümü Şekil 65'te verilmiştir.

3- a) 2. adımda 2×3 dikdörtgen?
 4. adımda 4×5 dikdörtgen?
 10. adımda 10×11 "



$11 + 11 + 10 + 10 + 4 = 46$ beyaz kare var

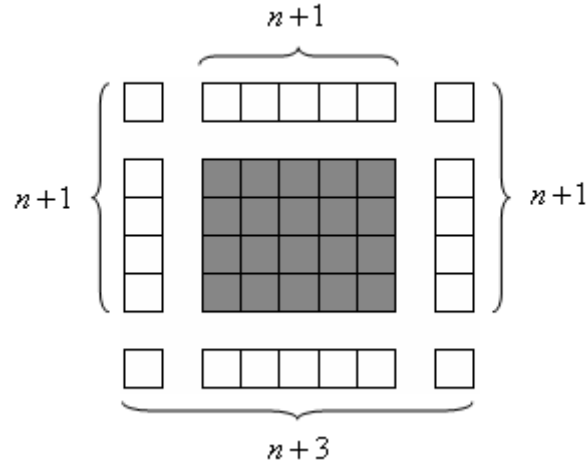
b) 50. adımda 50×51 dikdörtgeninin çevresi $\rightarrow 2 \cdot (50 + 51) = 202$
 4 tane de köşelerde beyaz kare var $202 + 4 = 206$ beyaz kare

Şekil 65. Ö6'nın üçüncü soruya ilişkin çözümü

Klinik görüşmeye katılan Ö46 da üçüncü stratejiyle genelleme yapmıştır. Bu öğretmen adayının açıklaması şu şekildedir:

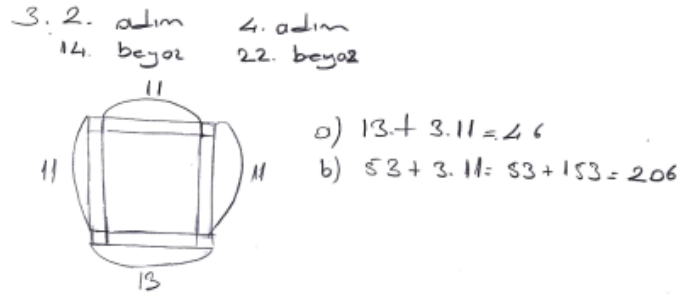
Ö46 : Şimdi şekillere baktığım zaman siyah bir dikdörtgen olduğunu ve bunun bir çerçeve içinde yer aldığını görüyorum. Şöyle de söyleyebiliriz; siyah dikdörtgenlerin çevresine beyaz kareler birer birer sıralanmış. Ve tabî ki şuralarda (köşelerdeki kareleri işaretliyor) da yine birer kare olacak. Çevreden yola çıkmıştım. O zaman birinci şekilde, ki bu ikinci adımdı, düşeyde iki ve yatayda $2 + 1$ siyah kare var. Dördüncü adımda ise $4 + 1$ tane. Düşeydeki de dörde eşit. Şimdi bunlara göre beyaz kareleri hesaplayacak olursam, bunda (ikinci adımda) iki artı iki, üç artı üç; on. Şunları da eklersek 14. İkinciye (dördüncü adıma) geçersen altı artı altı (hesaplıyor), evet 22 olmuş oldu. Bize a şıkında onuncu adımdaki beyaz kareleri soruyor. Bu durumda düşeyde 10, yatayda $10 + 1$ tane olur (bir dikdörtgen çizerek anlatıyor). Bunu hesaplayacak olursam eğer $2 \cdot 11 + 2 \cdot 10 + 4$ şeklinde yazarım. Bu da eşittir, $22 + 20 + 4$ 'ten 46 eder. Aynı şekilde ellinci adım için 50'ye, $50 + 1$ 'lik kenarları olan bir dikdörtgen oluşur. Dolayısıyla $2 \cdot 50 + 2 \cdot 51 + 4$ işlemini yapacağım. Sonuçta bu da 206 eder.

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen son stratejide Şekil 66'daki gibi bir gruplama yapılmıştır.



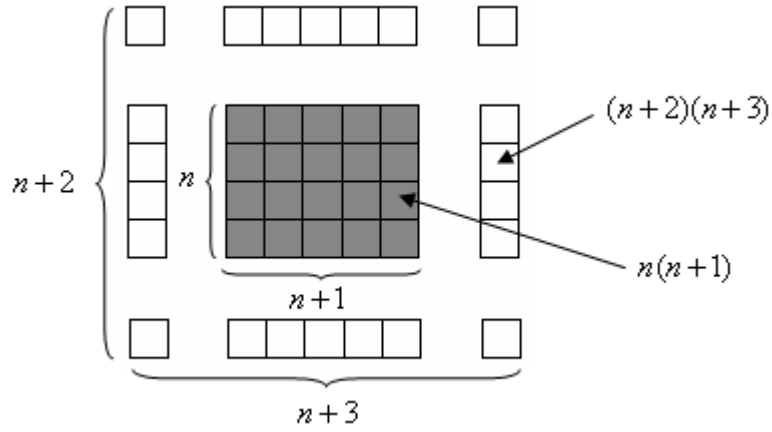
Şekil 66. EYS kapsamındaki dördüncü stratejiye ilişkin model

Bu stratejide ilk olarak alt satırda yer alan beyaz birim kareler, sonra sağ ve sol sütunları oluşturan beyaz birim kareler ve en son bu sütunlar arasında kalan üst satırdaki beyaz birim kareler gruplandırılır. Böylece alt satırda $n+3$, sütunlarda ve üst satırda $n+1$ beyaz birim karenin yer aldığı görülür. $3(n+1)+(n+3)$ şeklinde formüle edilebilecek bu stratejiyi kullanan sadece bir öğretmen adayı vardır. Bu öğretmen adayının genelleme stratejisi Şekil 67'deki gibidir.



Şekil 67. Ö3'ün üçüncü soruya ilişkin çözümü

Tablo 3'te görüldüğü gibi, yardımcı şekil kullanma stratejisi (YŞKS) ile genelleme yapan 10 öğretmen adayı vardır. Bu stratejide beyaz karelerin sayısı; siyah ve beyaz birim karelerden oluşan dikdörtgenden, siyah birim karelerden oluşan dikdörtgenin çıkarılmasıyla bulunur. Şekil 68'deki gibi modellenen bu stratejide beyaz birim karelerin sayısını veren genel formül $(n+2)(n+3) - n(n+1)$ 'dir.

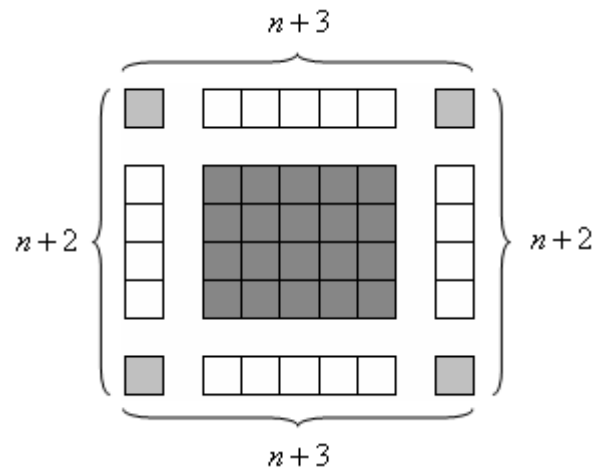


Şekil 68. YŞKS'ne ilişkin model

Klinik görüşmeye katılan Ö47 ve Ö50 de yardımcı şekil kullanma stratejisiyle genelleme yapmışlardır. Bunlardan Ö50'nin çözümü aşağıdaki gibidir:

Ö50 : Üçüncü soruda zaten kareler verilmiş. Karelerde de ııı... Burada üçüncü adımı ekledim. Ya ikinci adım var, dördüncü adım var. Burada üçüncü adımı ekleyerek ııı... Beyaz karelerin toplamını, beyaz karelerin sayısını soruyordu. İkinci adımda içerde üç sütunla iki satır vardı. Diğerinde, üçüncü adımda üç satırla dört sütun vardı, karalı olan. Diğerinde de bu, yani her adımda bu birer tane artmıştı. Beyaz kareleri bulmak için de toplam kare sayısından karalanmış karelerin sayısını çıkardım. Burada da yaptığım işlem mesela dörde beşti bu (büyük) dikdörtgenin çevresi (kenarlardaki beyaz kare sayılarından bahsediyor). Dört ile beşi çarpıp, yine içerideki küçük dikdörtgenin çevresindeki kare sayısı ile çarparak; dört ile beşi çarpıp, iki ile üçü çarparak çıkardım (ikinci adımda $4.5 - 2.3$ işlemini yaptığını anlatıyor). Burada da $5.6 - 3.4$ işlemini yaptığım zaman çıkıyordu. Dördüncü adımda da altı ile yediyi çarpıp dörtle beşin çarpımını ($6.7 - 4.5$) çıkardığım zaman çıkıyordu. Burada da adım sayısı ile bağlantılı bir kural yazmam gerektiği için de ikinci adımda dört, n 'nin... ııı ikinci adımda eğer n 'ye iki dersem; dört, n 'nin iki fazlasıydı. $n+2$ dedim dörde, beşe $n+3$ dedim. İki çarpı üçe de $n(n+1)$ dedim. Diğerlerinde de bu kuralı denedim. Hepsi de sağlıyordu. Sonra kuralı $(n+2)(n+3) - n(n+1)$ olarak buldum. (Daha sonra n yerine 10 ve 50 yazarak sonuca ulaşıyor).

Ekleyerek yapılandırma stratejisinde önce satırlar/ sütunlar, sonra bunlar arasında kalan sütunlar/ satırlar gruplandırıldığı için iki kere sayılan parça yoktur. Çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisinde (ÇPÇYS) ise beyaz birim karelerden oluşan satır ve sütunlar gruplandırılırken, dikdörtgenin köşelerinde yer alan birim karelerin hem satırdaki hem de sütundaki grupta yer aldığı görülür. Bu gruplardaki birim kare sayıları topladıktan sonra köşelerde iki kere sayılan toplam 4 birim kare çıkarılarak $2(n+2)+2(n+3)-4$ genel formülüne ulaşılır.



Şekil 69. ÇPÇYS'ne ilişkin model

Şekil 69'daki gibi modellenen çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisini kullanan altı öğretmen adayı vardır. Bunlardan birinin çözümü Şekil 70'te verilmiştir.

3)

$\Rightarrow 5 \text{ kare}$
 $\Rightarrow 5 \text{ kare}$
 1. kare 2. kare
 2. adımda
 $5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 4 = 14 \text{ beyaz kare}$
 4. adımda
 $7 \cdot 2 + 6 \cdot 2 - 4 = 22 \text{ beyaz kare}$
 a) 10. adımda $13 \cdot 2 + 12 \cdot 2 - 4 = 46 \text{ beyaz kare}$
 b) 50. adımda $53 \cdot 2 + 52 \cdot 2 - 4 = 206 \text{ beyaz kare}$

Şekil 70. Ö10'un üçüncü soruya ilişkin çözümü

Çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisiyle genelleme yapmış olan öğretmen adaylarından biri olan Ö48'in klinik görüşmedeki açıklamaları ise aşağıdaki gibidir:

Ö48 : Boş kare sayısını soruyor. Bunda şöyle düşündüm ben. Şimdi ikinci adımda beş tane var. Dördüncü adımda yedi. Burada beş tane varsa şöyle düşündüm ben boş kare sayısı hani normalde bulmak istersek beşe dört (ikinci adımda sırasıyla yatay ve düşey kare sayısı). Dört, dört, üç, üç olacak. Yani dört, dört, üç, sekiz (topluyor); on dört tane olacak ikinci adımda. Dördüncü adımda o zaman benzer şekilde yedi, altı. Yani ikişer ikişer. Bir de üçüncü adım var tabi arada. Bu, şu demektir; iki boyutlu olacak, her adımda bir kare, iki boyutta bir adım bir adım yükseliyor demektir. Eğer bu ikinci adımda beşe, toplam. Onuncu adımda burası, yatay olarak, onuncu adımda on üç tane olmalıdır. Düşey olarak düşündüğümüzde de iki fazlası olacaktır. O zaman onuncu adımda düşey on iki tane olmalıdır. Şimdi biz bunları eğer toplayacak olursak, onuncu adımdaki değerimiz; düşeylere bakalım $12 + 12$ olacaktır. Şöyle (nereyi kastettiğini şekiller üzerinde gösteriyor) $12 + 12$. Birer tane alacağımız için sağdan ve soldan (yataydaki kareler), $11 + 11$ olacak. Çünkü birer tanesini ortak saydık. Dört tane kareyi ortak saydık. O da ikişer demektir. İkişer tane çıkarmak zorundayız. Yirmi dört, yirmi iki daha; o da 46 tane boş kare olacak... Ellinci adımda da benzer şekilde; eğer ben dördüncü adımda üç fazlası ve iki fazlası olarak alıyorsam, ellinci adımda da benzer şekilde yatay olarak 53, düşey olarak da 52 tane olmak zorunda. Aynı mantıkla hesap edersek nasıl ki onuncu adımda düşeyleri önce ele aldık; $52 + 52$, buradan da $51 + 51$ almak zorundayız. O da 206 tane boş kare oluşmuş olacaktır. Nasıl bulduğumuzu açıklarsak, iki tane $n + 3$ var, artı, iki tane $n + 2$ var, fakat dört tanesini çıkarmak zorundayız. O da ne yapar? $4n + 6$ kare sağlanıyor diyebiliriz.

Görsel yaklaşımı benimseyen 2 öğretmen adayı hatalı genelleme yapmıştır. Bu öğretmen adayları büyük dikdörtgenin alanından, siyah birim karelerden oluşan dikdörtgenin alanını çıkarmadıkları için yanlış sonuçlara ulaşmışlardır.

Sayısal Yaklaşım Altında Kullanılan Stratejiler

Tablo 3'te görüldüğü gibi, sayısal yaklaşımı benimseyen 18 öğretmen adayı vardır ve bunlardan üçü yanlış sonuçlara ulaşmıştır. Çözüm yaparken öğretmen adaylarından bazılarının önce örüntünün genel terimini buldukları, bazılarının ise örüntüye ilişkin soruları sırasıyla ele aldıkları saptanmıştır.

Öğretmen adaylarından yedi tanesi yakın ve uzak adımları hesaplarırken örüntünün genel formülünden yararlanmıştır. Tablo 3'te “yakın ve uzak adımı örüntünün kuralıyla bulma” başlığı altında verilen stratejiler, öğretmen adaylarının genel formülü belirlemek için kullandıkları stratejileri göstermektedir. Bu bağlamda genel terimi bir öğretmen adayı aritmetik dizi formülünü kullanarak, bir öğretmen adayı aralık sayarak elde etmiştir. Beş öğretmen adayı ise adım sayısı ile toplam birim kare sayısı arasındaki ilişkiyi incelemiş ve terimleri 4'ün ya da 5'in katlarıyla ilişkilendirmişlerdir. Bu öğretmen adayları bulunması istenen değerleri genel formüllerde yerine yazarak yakın ve uzak adımı hesaplamışlardır.

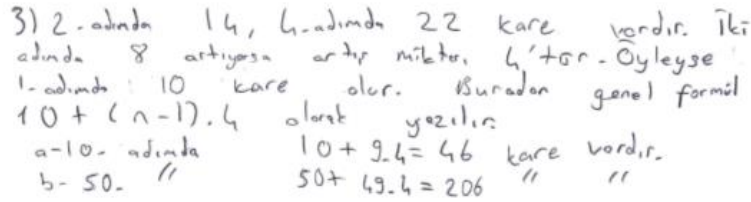
Terimleri 4'ün katlarıyla ilişkilendirerek adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi $4n + 6$ şeklinde genelleyen dört öğretmen adayı vardır. Bunlardan üçü, genel formülü bulmak için sadece soruda verilen iki adımı kullanmıştır. Diğer öğretmen adayı ise örüntünün birinci adımını da çizerek ortak farkı bulmuş ve ilk dört terim yardımıyla genel formüle ulaşmıştır.

Örüntünün genel formülünü bulmak için terimleri 5'in katlarıyla ilişkilendiren bir öğretmen adayı vardır. Yaptığı genelleme ile $5(n+1) - (n-1)$ cebirsel ifadesine ulaşan bu öğretmen adayının çözümü Şekil 71'de verilmiştir.

$$\begin{array}{lcl} 3. \text{ 2. adım} & 14 = 5 \cdot 3 - 1 & \\ 3. \text{ adım} & 18 = 5 \cdot 4 - 2 & \\ 4. \text{ adım} & 22 = 5 \cdot 5 - 3 & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{lcl} 3. \text{ 2. adım} \\ 3. \text{ adım} \\ 4. \text{ adım} \end{array}} \right\} 5(x+1) - (x-1)$$
$$\begin{array}{lcl} a) \text{ 10. adım} & 5 \cdot 11 - 9 = 46 & \\ b) \text{ 50. adım} & 5 \cdot 51 - 49 = 206 & \end{array}$$

Şekil 71. Ö23'ün üçüncü soruya ilişkin çözümü

Bir öğretmen adayı örüntünün genel formülünü belirlemek için aritmetik dizi formülünden yararlanmıştır. Bu öğretmen adayı soruda verilen iki terim arasındaki artış miktarını ikiye bölerek sabit farkı belirlemiştir. Buradan örüntünün birinci adımını bulup aritmetik dizi formülünü uygulamıştır. Bu öğretmen adayının çözümü Şekil 72'deki gibidir.



3) 2. adım 14, 4. adım 22 kare vardır. İki
adım 8 artıyorsa artış miktarı 4'tür. Öyleyse
1. adım 10 kare olur. Buradan genel formül
 $10 + (n-1).4$ olarak yazılır.
a-10. adım $10 + 9.4 = 46$ kare vardır.
b-50. // $50 + 49.4 = 206$ // //

Şekil 72. Ö4'ün üçüncü soruya ilişkin çözümü

Örüntünün kuralını bulurken aralık sayma stratejisini kullanmış olan öğretmen adayı ise, klinik görüşmelere katılan Ö45'tir. Bu öğretmen adayının açıklamaları aşağıdaki gibidir:

Ö45 : Burada şey yapıyorum ikinci adım ve dördüncü adım var. Aradaki üçüncü adımı bulmak için şöyle bir baktım; (ikinci adımda) ortada iki tane siyah kare var, dördüncü adımda dört tane var düşey doğrultuda. Ben buraya, iki adım atladığıma göre iki tane eklemişim. Demek ki her bir adımda bir tane kare eklemem lazım diyorum. Yatayda baktığım zaman ben üçle başlamışım, sonra beşe çıkmış. Yine iki tane eklemişim. Diyorum ki her bir adımda ben dikey ve yatay olacak şekilde birer tane, yani sıra olacak şekilde kare ekliyorum. O şekilde baktığım zaman bu artış miktarını bulmak için de, yine nasıl artıyor? Baktığım zaman yatayda bir kare arttığı için yine bir kare artıyor, yan tarafta yine düşeyde bir kare artıyor. Dört tane kenarı olduğu için toplamda dört kare artar. Zaten köşeler sabit. Baktığım zaman; demek ki her bir adım için diyorum dörder tane kare artması lazım.

G : Evet, sonra? Onuncu adımı bulacaktık.

Ö45 : Daha sonra denedim yine bir formül oluşturmak istedim. Başlangıç noktam baktığım zaman ikinci adımda 14 kare varmış, beyaz kareleri saydım yani. Bir sonrakinde dört tane artacak. Bunu sayarak da sağladım, on dört artı dört oldu. Bir sonrakinde de on dört artı... Ya aslında arada üçüncü adımı da

çizdim zihnimde ona göre yazdım. On dört artı, dört çarpı iki (dördüncü adımda $14 + 4 \cdot 2$ tane beyaz kare olduğunu belirtiyor). Yani kuralımız şöyle çıkıyor; $14 + 4(n - 2)$ şeklinde çıkıyor. Hangi adımdaysam n yerine o adımı yazıyorum.

Örüntüye ilişkin soruları sırasıyla çözen başka bir deyişle önce yakın, sonra uzak adımı hesaplayan 8 öğretmen adayı vardır. Tablo 3'te görüldüğü gibi, bunlardan 6 tanesi hem yakın hem de uzak adımda aynı stratejiden yararlanmış, 2 tanesi ise yakın ve uzak adımda farklı stratejiler kullanmıştır.

Hem yakın hem de uzak adımda aynı stratejiyi kullanan öğretmen adaylarından üçü aralık sayma stratejisiyle genelleme yapmıştır. Bunlardan biri olan Ö49'un klinik görüşmedeki açıklamaları şu şekildedir:

Ö49 : Üçüncü soruda “aşağıdaki birim karelerle oluşturulmuş bir şekil örüntüsünün iki adımı verilmiştir” diyor. İkinci adım ve dördüncü adımı vermiş. Bizden onuncu adımı istiyor. Ben burada her adımda ne kadar artıyor? Dört tane beyaz kare ekleniyor demişim (cevap kâğıdındaki çözümüne bakıyor).

G : Yani önce beyaz kareleri saydın ikinci ve dördüncü adımda?

Ö49 : Evet. Önce saydım (ikinci adımda 14, dördüncü adımda 22 beyaz kare olduğunu şekillerin üzerine yazmış). Aralarındaki farkı buldum. Üçüncü adımda aynen bu şekilde aralarındaki bir değer mi? Bunu da denedim ve kanıtlamış oldum (üçüncü adımda 18 beyaz kare olduğunu belirlemiş).

G : Çizerek mi denedin?

Ö49 : Evet çizerek denedim. Şöyle hani şurayı (soruda verilmiş olan dördüncü adımdaki şeklin en alt satırını ve sağdaki sütununu) karalayınca zaten üçüncü adım olmuş oluyor. Bu şekilde ne dedim? Her adımda ne kadar ekleniyor demiştik? Dört beyaz kare ekleniyor. İkinci adımda 14 tane beyaz kare var. Onuncu adımda dediğine göre kaç adım kalmış oluyor geriye? Sekiz

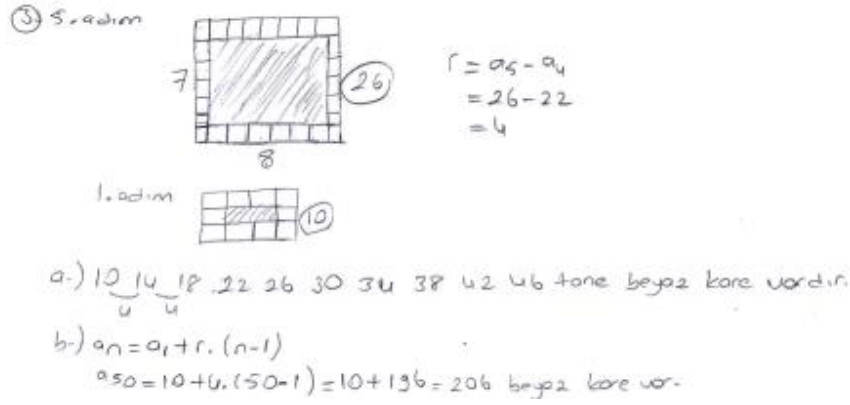
adım kalıyor. Sekiz kere dört, 32. Bir de şu 14'ü ekliyorum, 46 buluyorum.
Ellinci adımda da aynı işlemi uygularsam 206 buluyorum.

Hem yakın hem de uzak adımda aynı stratejiyi kullanan ve cevabı “diğer” olarak kategorize edilen bir öğretmen adayı ise $2(n+2)+2(n+1)$ şeklinde formüle edilebilecek bir genelleme yapmıştır. Çözümü Şekil 73'te verilen bu öğretmen adayı 2. ve 4. adımdaki dikey- yatay beyaz kare sayılarını hesapladıktan sonra iki adımda ikişer kare eklendiğini fark etmiştir. Sonra 6, 8 ve 10. adımdaki dikey- yatay kare sayılarını bir önceki çift numaralı adıma 2 ekleyerek bulmuştur. Dikey- yatay beyaz kare sayısının sırasıyla adım sayısının iki ve bir fazlasına eşit olduğunu gören öğretmen adayı, bu özelliği uzak adımda da kullanmıştır.

3)	2. adım	4. adım	6. adım	8. adım	10. adım
Dikey	25-46	45-68	8	10	12
Yatay	35-38	55-58	7	9	11
8-10. adım	Dikey 12+12	Yatay 11+11	10. 8. adım	Dikey 52+52	Yatay 51+51
				+	206

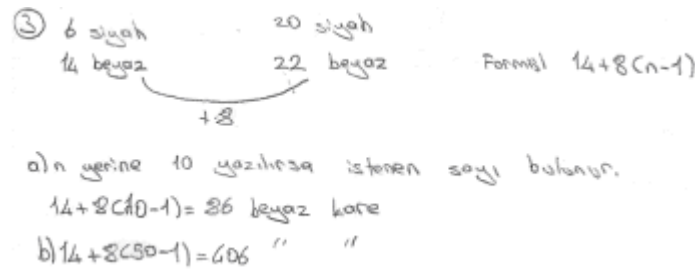
Şekil 73. Ö27'nin üçüncü soruya ilişkin çözümü

Yakın ve uzak adımda farklı stratejiler kullanan öğretmen adayları yakın adımda ardışık toplama stratejisinden, uzak adımdaysa aritmetik dizi formülünden yararlanmışlardır. Bunlardan biri örüntünün 5. adımını çizerek terimler arası sabit farkı ve örüntünün 1. adımını çizerek ilk terimi bulmuştur. Sonra ilk adıma her seferinde 4 ekleyerek yakın adıma ulaşmıştır. Bu öğretmen adayının çözümü Şekil 74'teki gibidir.



Şekil 74. Ö34'ün üçüncü soruya ilişkin çözümü

Tablo 3'te görüldüğü gibi, sayısal yaklaşımı benimseyen 3 öğretmen adayı yanlış sonuçlara ulaşmıştır. Bu öğretmen adaylarından iki tanesi; soruda verilen iki şekli örüntünün birinci ve ikinci adımı olarak ele almış ve terimler arası farkı 8 olarak bulmuşlardır. Daha sonra aritmetik dizi formülünü kullanarak yakın ve uzak adımdaki beyaz kare sayısını hesaplamışlardır. Yanlış sonuca ulaşan diğer öğretmen adayı da aynı yöntemle çözüm yapmış, ancak sabit farkı 6 olarak bulmuştur. Terimler arası farkı 8 bulan öğretmen adaylarından birinin genelleme stratejisi Şekil 75'te verilmiştir.



Şekil 75. Ö28'in üçüncü soruya ilişkin çözümü

4. 1. 4. Tek Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünü Genellemede Kullanılan Stratejilere İlişkin Bulgular

Örüntü Testi'ndeki dördüncü soruda öğretmen adaylarından sadece bir adımı verilmiş sabit değişen şekil örüntüsünü genellemeleri istenmiştir. Dört öğretmen adayı soruyu cevaplamamıştır. Öğretmen adaylarından 29 tanesi görsel ve 17 tanesi sayısal yaklaşımı

benimsemiştir. Bunlardan toplam 12 tanesi yanlış sonuçlara ulaşmıştır. Bu soruda kullanılan stratejiler Tablo 4’te verilmiştir.

Tablo 4. Tek Terimi Verilmiş Sabit Değişen Şekil Örüntüsünü Genellemede Kullanılan Stratejiler

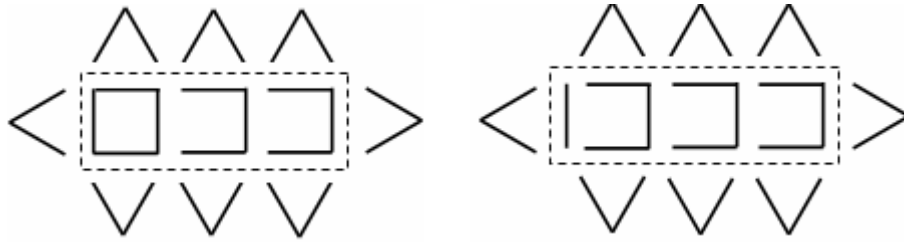
Sayısal Yaklaşım	<i>n</i>
<i>İlk üç adımdan yararlanma</i>	
✓ Adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi inceleme	1
✓ Aralık sayma	2
✓ Aritmetik dizi formülünü kullanma	1
✓ Sabit farkı kat olarak alma	1
<i>1. ve 6. adımdan yararlanma</i>	
✓ Aritmetik dizi formülünü kullanma	2
<i>Kareleri esas alma</i>	
✓ Adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi inceleme	1
✓ Aralık sayma	2
Yanlış Cevaplar	7
Toplam	17
Görsel Yaklaşım	<i>n</i>
✓ Ekleyerek Yapılandırma	17
✓ Çakışan Parçaları Çıkararak Yapılandırma	7
Yanlış Cevaplar	5
Toplam	29

Klinik görüşmenin gerçekleştirildiği öğretmen adaylarının beşi görsel, biri ise sayısal yaklaşımı benimsemiştir. Bu bağlamda Ö45 ve Ö47 ekleyerek yapılandırma; Ö46, Ö48 ve Ö49 çakışan parçaları çıkararak yapılandırma ve Ö50 sabit farkı kat olarak alma stratejisiyle genelleme yapmışlardır.

Görsel Yaklaşım Altında Kullanılan Stratejiler

Tablo 4’te görüldüğü gibi, görsel yaklaşımı benimseyen 29 öğretmen adayı vardır ve bunlardan beşi yanlış sonuçlara ulaşmıştır. Bu yaklaşım kapsamında ekleyerek yapılandırma ve çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejileriyle genelleme yapıldığı tespit edilmiştir.

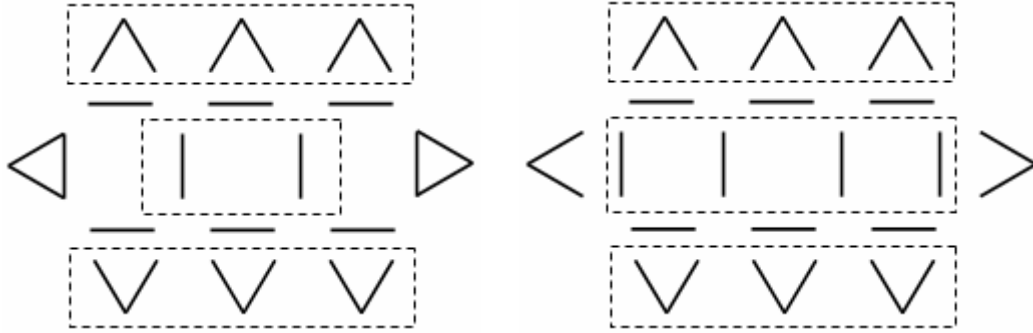
Ekleyerek yapılandırma stratejisi (EYS) ile genelleme yapan 17 öğretmen adayı vardır. Bu strateji kapsamında 5 farklı strateji ile çözüm yapılmıştır. Bunlardan ilkinde; soruda verilen şekil, bitişik kareler ve bitişik karelerin etrafını çevreleyen üçgenler olarak ele alınmıştır. Üçgenleri oluşturmak için V biçimindeki parçalar kullanılmıştır. Bitişik kareler ise iki farklı şekilde yapılandırılmıştır. Bu stratejiler örüntünün üçüncü adımı üzerinde Şekil 76’daki gibi modellenebilir.



Şekil 76. EYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin modeller

Örüntüde verilen bitişik kareler, Şekil 76’daki ilk modelde görüldüğü gibi bir kare ve adım sayısının bir eksiği kadar yatay U ile yapılandırılırsa $4 + (n - 1)3$; ikinci modeldeki gibi bir çubuk ve adım sayısı kadar yatay U ile yapılandırılırsa $1 + 3n$ genel formülüne ulaşılır. Bitişik kareleri çevreleyen üçgen sayısı, kare sayısının iki katından iki fazladır ($2n + 2$). Üçgenlerin bir kenarı kareyle ortaktır. Bu nedenle her üçgeni yapılandırırken 2 çubuk kullanılır. Buradan üçgenler için gerekli çubuk sayısı $2(2n + 2)$ formülüyle bulunur. Genelleme sürecinde bu stratejiyi kullanan dört öğretmen adayı vardır.

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen ikinci stratejide; yatay çubuklar, dikey çubuklar, altta ve üstte yer alan V biçimindeki çubuklar ayrı ayrı gruplandırılmıştır. Bu gruplamalar örüntünün üçüncü adımı üzerinde Şekil 77’deki gibi temsil edilebilir.



Şekil 77. EYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin modeller

Bu stratejiyi kullanan beş öğretmen adayı vardır. Bunlardan biri, Şekil 77’deki ilk modelde olduğu gibi şeklin başındaki ve sonundaki üçgenleri (toplam 6 çubuk); dördü ise Şekil 77’deki ikinci modelde olduğu gibi şeklin başındaki ve sonundaki V biçimindeki çubukları (toplam 4 çubuk) sabit tutmuştur. Her iki durumda da yatay çubuk sayısı $2n$, altta ve üstte yer alan V biçimindeki çubuk sayısı $4n$ ’dir. Dikey çubuk sayısı ise Şekil 77’deki ilk modelde $n-1$, ikinci modelde ise $n+1$ kadardır. Sabit tutulan çubukların da dâhil edilmesiyle sırasıyla $6n+(n-1)+6$ ve $6n+(n+1)+4$ formülleri elde edilir. İlk modelde temsil edilen gruplamayla genelleme yapan öğretmen adayının çözümü Şekil 78’de verilmiştir.

4)

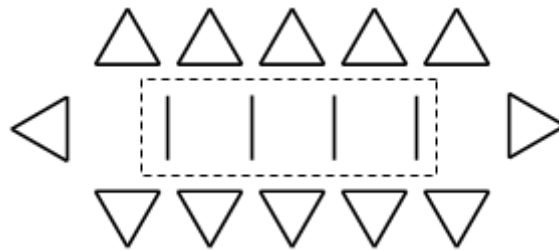
$$\begin{array}{l}
 \rightarrow 2.1000 = 2000 \text{ üçgenlerde} \\
 \rightarrow 1000 \text{ 31. satırda} \\
 \rightarrow 999 \text{ 32. satırda} \\
 \rightarrow 1000 \text{ alt. satırda} \\
 \rightarrow 2.1000 = 2000 \text{ üçgenlerde} \\
 \rightarrow 2 \cdot 3 = 6 \text{ yanlarda} \\
 \hline
 7005 \text{ toplam çubuk sayısı}
 \end{array}$$

Şekil 78. Ö37’nin dördüncü soruya ilişkin çözümü

Şekil 77'deki ikinci modelde temsil edilen gruplamayı yapan dört öğretmen adayından biri olan Ö47'nin açıklamaları ise aşağıdaki gibidir:

Ö47 : Kareleri esas aldım. Önce şunları (dikdörtgenin içindeki düşey çubukları) attım. Beş tane kare var, ikişer tane şu çubukları (dikdörtgenin alt ve üst satırındaki çubukları) aldım. On. İki tane de şu kenarları (dikdörtgenin başındaki ve sonundaki çubukları) ekledim. On iki. O zaman (dikdörtgeni oluşturmak için) $2n+2$ geliyor... Şurayı (düşey çubukları) en son ekledim. Yani şu aralara (kareleri oluşturacak çubukları) en son ekledim. Sonra da üçgenleri ekledim. Üçgen de bir, iki, üç, dört, beş. Beş tane burada (üst satırda). Ama (alt ve üst satırda) ikişer tane üçgen olduğu için $2n$. Artı iki tane bundan (dikdörtgenin iki ucundaki yatay V şeklindeki yapılar). $2n+2$. Bunlarda hep iki çubuk vardı. O zaman üçgenlerdeki çubuk sayısı iki çarpı $2n+2$ olacak. Sonra bir, iki, üç, dört burayı aldım (düşey çubuklar). n neydi? Beşti. $n-1$ oluyor o da.

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen üçüncü stratejide; şekil, üçgenler ve üçgenlerin arasında kalan dikey çubuklar olarak gruplandırılmıştır. Bu stratejide n sayıda kare içeren şekilde üst satırda n , alt satırda n ve uçlarda 2 tane olmak üzere toplam $2n+2$ üçgen vardır. Her üçgende 3 çubuk kullanıldığından üçgenler için toplam $6n+6$ çubuk gereklidir. Üçgenler arasında kalan alanı bölerek kareleri oluşturmak için ise $n-1$ tane dikey çubuk kullanılır. Buradan n tane kare içeren şekildeki toplam çubuk sayısını veren formül $6n+6+(n-1)$ olarak bulunur.



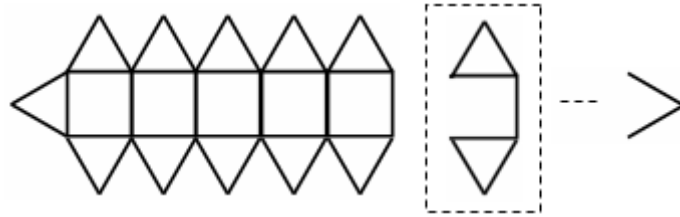
Şekil 79. EYS kapsamındaki üçüncü stratejiye ilişkin model

Örüntünün beşinci adımı üzerinde Şekil 79'daki gibi modellenen üçüncü stratejiyi kullanan üç öğretmen adayı vardır. Bunlardan birinin çözümü Şekil 80'de verilmiştir.

4) Karelerin altında 1000, üstünde 1000 ve kenarlarında 2 tane üçgen olmak üzere toplam 2002 üçgen var. Üçgenler için $2002 \times 3 = 6006$ çubuk kullanılır. $1000 - 1 = 999$ tane çubuk karenin içteki kenarlarını oluşturmak için kullanılır. Toplamda $6006 + 999 = 7005$ çubuk

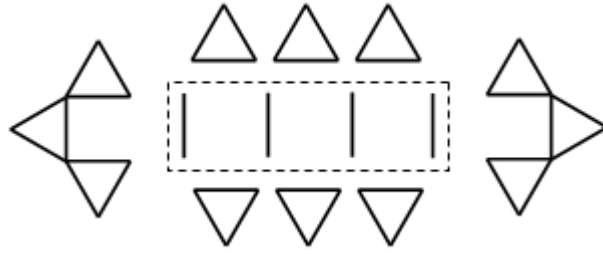
Şekil 80. Ö13'ün dördüncü soruya ilişkin çözümü

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen dördüncü strateji, soruda verilen şekle yeni parçalar ekleme esasına dayanır. Bu stratejide 1000. adıma ulaşmak için şeklin sağ kenarında yer alan yatay V biçimindeki iki çubuk çıkarılıp 7 çubuktan oluşan 995 parça eklenir. İki öğretmen adayının kullandığı bu strateji Şekil 81'deki gibi temsil edilebilir.



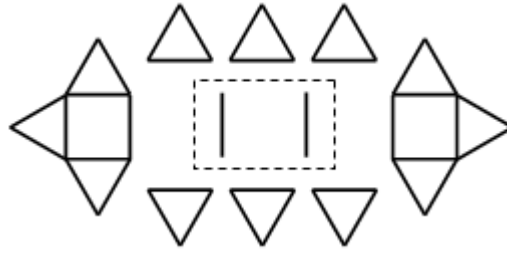
Şekil 81. EYS kapsamındaki dördüncü stratejiye ilişkin model

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen son stratejide; şeklin başında ve sonunda yer alan bazı parçalar sabit tutularak bunlar arasında kalan toplam çubuk sayısı hesaplanmıştır. Bu stratejiyle genelleme yapan üç öğretmen adayından ikisi baştaki ve sondaki üç üçgeni sabit tutup, arada kalan üçgenlerdeki çubuk sayısı ($2n - 4$ üçgen ve $6n - 12$ çubuk) ile dikey çubuk sayısını ($n - 1$ çubuk) hesaplamışlardır. Buldukları sonuca sabit tuttukları üçgenlerdeki toplam 18 çubuğu ekleyerek 1000. adıma ulaşmışlardır. Bu strateji örüntünün beşinci adımı üzerinde Şekil 82'deki gibi temsil edilebilir.



Şekil 82. EYS kapsamındaki beşinci stratejiye ilişkin ilk model

Diğer öğretmen adayı ise baştaki ve sondaki birer kare ve bunları çevreleyen üç üçgeni sabit tutup, arada kalan üçgenlerdeki çubuk sayısı ($2n-4$ üçgen ve $6n-12$ çubuk) ile dikey çubuk sayısını ($n-3$ çubuk) hesaplamıştır. Daha sonra sabit tuttuğu toplam 20 çubuğu ekleyerek sonuca ulaşmıştır. Örüntünün beşinci adımı üzerinde bu strateji Şekil 83'teki gibi modellenenebilir.



Şekil 83. EYS kapsamındaki beşinci stratejiye ilişkin ikinci model

Şekil 82'de modellenen stratejiyle genelleme yapan öğretmen adaylarından biri Ö45'tir. İlk üç soruda sayısal yaklaşımla çözüm yapmış olan Ö45'in, şekillerin oluşumunu esas aldığı bu soruya ilişkin açıklamaları şöyledir:

Ö45 : Önce kenarlara baktım. Kenardaki şekil iki ucta da var. Ama ortada yok. O zaman bunları ayrı düşünmem gerekiyor diye düşündüm. Çünkü ortadaki sabit, düzenli bir sırayla gidiyor. Şu şekilde...

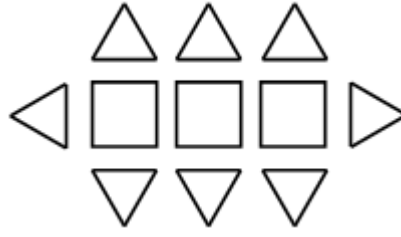
G : Burada şeyi merak ettim. Mesela niye bu üç üçgenden oluşan parça da, sadece bu (şeklin iki ucundaki yatay V biçimindeki yapılar gösteriliyor) değil? Yani ilk baktığımda o mu gözüme çarptı?

Ö45 : Aslında direkt evet o şekilde düşündüm. Bir de şey diye düşündüm. Şu (şeklin iki ucundaki) üçgenleri alsam, ya aslında burada da bir örüntü çıkıyor da bilemiyorum. Direkt demek ki o şekil dikkatimi çekti. O şekilde bir alayım, o kısmı ayırayım diye düşündüm... Bu kenarları çıkardım. Bunlar zaten sabit, kaç adım olursa olsun. O yüzden bunları bir kenara yazdım, buradaki çubuk sayısını hesapladım. Kaç tane geliyor? On sekiz tane çubuk geliyor iki kenar (sabit tuttuğu noktalar) için. Sonra baktığım zaman şu üçgenleri, üst ve alt olmak üzere ikişer tane üçgen var. O zaman diyorum ki bu üçgenler de sabit olacak fakat kaç kutu varsa, mesela burada baktığım zaman iki kutuyu çıkardım. Beş kutu var, o zaman ne olacak beş eksi iki yani üç kutuda toplam üç çarpı, altta- üstte olduğu için iki çarpı, çubuk sayısı (üç kare için altta ve üstte 3.2'den 6 üçgen ve bu üçgenlerde 3.6'dan 18 çubuk bulunduğunu anlatıyor). Baktığım zaman üç çubuk var. O zaman üç, altı. Aslında altı çarpı kutu sayısı demiş oluyorum (üçgenlerdeki çubuk sayısını $6(n-2)$ olarak buluyor).

G : Arada kalan alanı bölmek için de...

Ö45 : Ha evet. Aradaki alanlar için de şöyle; her kare için birer çubuk gerekiyor. En son basamakta böyle aldığım zaman bir tane daha çubuk eklemem gerekiyor, tam kare oluşturabilmek için (sabit tuttuğu parçaların arasına $(n-2)+1$ çubuk eklenmesi gerektiğini ifade ediyor)... Soruda 1000 kare diyordu. E o zaman 18 tane sabit çubuğum var. Arada 998 kare olacak. Bunlar için birer çubuk ve buna ek olarak son kare için bir tane daha lazım. O halde üçgenler için 998.6 çubuk olacak. Yani $18+998.1+1+998.6$ çubuk kullanılır.

Tablo 4'te görüldüğü gibi, çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisi (ÇPÇYS) ile genelleme yapan yedi öğretmen adayı vardır ve iki farklı strateji kullanılmıştır. Öğretmen adaylarından biri, örüntüde verilen şekli yapılandırırken ayrı ayrı üçgenleri ve kareleri birbirine eklemiştir. Birinci strateji olarak adlandırılan bu çözüm, örüntünün üçüncü adımı üzerinde Şekil 84'teki gibi temsil edilebilir.



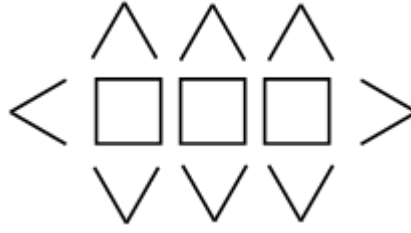
Şekil 84. ÇPÇYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin model

Birinci stratejide kareler ve üçgenlerde kullanılan çubuk sayısı hesaplandıktan sonra üst üste gelen, başka bir deyişle iki kere sayılan çubuk sayısı çıkarılarak sonuca ulaşılır. Bu bağlamda n . adımda n kare oluşur ve bu kareler için $4n$ çubuk gerekir. Kareler birbirine eklenirken $n-1$ çubuk üst üste gelir. İki kere sayılan çubukların çıkarılmasıyla karelerde kullanılan toplam çubuk sayısı $4n-(n-1)$ olarak bulunur. n . adımdaki üçgen sayısı ise $2n+2$ ve bu üçgenlerdeki toplam çubuk sayısı $3(2n+2)$ 'dir. Bu üçgenlerin de bir kenarı karelerin kenarlarıyla üst üste gelir. Karelerin kenarlarıyla çakışan çubuklar çıkarıldığında üçgenlerde kullanılan toplam çubuk sayısı $3(2n+2)-(2n+2)$ olarak bulunur. Bu stratejiyi kullanan öğretmen adayının çözümü Şekil 85'teki gibidir.

4) 1000 kareyi oluşturmak için $1000 \times 4 = 4000$ çubuk gerektirir.
 Bunlardan $n-1$ tanesi ortak çubuktur. Bu çubukları çıkaralım.
 $4000 - 999 = 3001$ üçgenleri oluşturmak için alt ve üst satırda
 toplam 3. $(2n+2) = 6n+6$ çubuk gerektir. $n=1000$ için 6006 çubuk
 Bu çubuklardan $2n+2$ tanesi karelerde ortaktır. Bu nedenle
 2002 ortak çubuğu çıkaralım.
 $6006 - 2002 = 4004$
 $3001 + 4004 = 7005$ toplam çubuk sayısıdır.

Şekil 85. Ö10'un dördüncü soruya ilişkin çözümü

Ö46, Ö48 ve Ö49'un dâhil olduğu altı öğretmen adayı ise şekli yapılandırırken sadece kareleri ayrı ayrı ele almıştır. Bu yöntemde de n tane kare için $4n-(n-1)$ çubuk gerekir. Üçgenleri oluştururken ise iki çubuktan oluşan V biçimindeki yapılardan yararlanılır. Böylece üçgenler için $2(2n+2)$ çubuk kullanılır. İkinci strateji, örüntünün üçüncü adımı üzerinde Şekil 86'daki gibi modellenenir.



Şekil 86. ÇPÇYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model

Ö48'in bu stratejiye ilişkin açıklamaları şöyledir:

Ö48 : İlk önce kareden başladım. Beş tane varsa yani beş taneyi oluşturan on altı tane çubuktan oluşuyor. On altı çubuk bize şunu sağlar; sadece iç olarak düşündüğümüzde, yani kareyi oluşturanları düşündüğümüzde kare sayısına n dersek o zaman her biri için $4n$ tane olacak (kareleri ayrı ayrı ele alıyor). Ama $n-1$ tanesini çıkarmak zorundayım çünkü her birinde birer tane ortak oluyor. Bu da şu demek; $3n+1$ tane çubuk oluşacak demek sadece kareleri oluşturmak için. Şimdi bu üçgenlere bakalım. Üçgenlerde de yukarıdaki üçgenler için her kare adet sayısında $2n$ tane çubuk kullanılıyor. Ve $2n$ tane üstü için, $2n$ tane altı için kullanılacak. Bir de başlarda, isterseniz bir milyon tane kare bile olmuş olsa, dört tane kullanılacak. İki sağdan, ikisi soldan. Yani artı dört diyeceğiz. $4n+4$ de üçgenleri oluşturacak çubuk sayısı olmuş olacak. Dolayısıyla biz genel olarak toplam yaparsak bunları $7n+5$ olmalı çubuk sayısı. Bin tane kare için $7 \cdot 1000 + 5 = 7005$ tane çubuğa ihtiyacımız olduğunu gösterir.

Görsel yaklaşımda hatalı genelleme yapan 5 öğretmen adayı vardır. Şekilleri yapılandırırken ayrı ayrı karelerin birbirine eklenmesini esas alan 3 öğretmen adayı, bu karelerin birleşim yerlerinde iki kere sayılan $n-1$ çubuğu çıkarmadığı için yanlış sonuç bulmuştur. Şekil 87'de, bu öğretmen adaylarından birinin çözümü verilmiştir.

④

$n = 1000$ için $2 \cdot 1000 = 2000$ (kenarın kenarları için)

$2 \cdot (2 \cdot 1000) = 4000$ (kenarın alt ve üstteki üçgenlerin kenarları için)

$2000 + 4000 = 6000$

Şekil 87. Ö18'in dördüncü soruya ilişkin çözümü

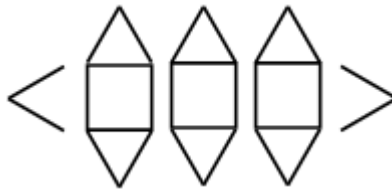
Başka bir öğretmen adayı da, şeklin ayrı ayrı kareler ve üçgenlerden oluştuğunu fark etmiştir. 1000 kare ve 1000 üçgen için gerekli çubuk sayılarını doğru hesaplamıştır. Ancak çakışan parçalarla ilgili hatalı bir genelleme yapmış ve ilginç bir açıklama yazmıştır. Bu öğretmen adayının çözümü Şekil 88'deki gibidir.

4-) 1000 kare için 2002 üçgen gerektirir.
 (kare sayısı - 1) $\cdot$ 4 tane ekliye olmaktadır. (çubuk kullanımı
 saydım; 16 eksildi.)
 $(1000 - 1) \cdot 4$ tane ekilir. 3996 ekilir.
 1000 kareden 6000
 2002 üçgenden 6006

 $10006 - 3996 = 6010_4$

Şekil 88. Ö1'in dördüncü soruya ilişkin çözümü

Hatalı genelleme yapan diğer bir öğretmen adayı ise Şekil 89'daki gibi temsil edilebilecek bir strateji kullanmıştır.



Şekil 89. Hatalı genelleme yapan bir öğretmen adayının çözüme ilişkin modeli

Bu stratejide, bir kare ile bu karenin altındaki ve üstündeki üçgenlerin oluşturduğu parçalar (her biri için 8 çubuk) birleştirilerek örüntünün istenen adımı elde edilmiştir. Sonra şeklin başına ve sonuna yatay V şeklindeki ikişer çubuk eklenmiştir. Ancak bu öğretmen adayı da parçalar birbirine eklenirken üst üste gelen çubukları çıkarmadığı için yanlış bir sonuç bulmuştur. Öğretmen adayının çözümü Şekil 90’da verilmiştir.

$$2 + (8 \times 1000) + 2 = 8004 \text{ çubuk}$$

Şekil 90. Ö14’ün dördüncü soruya ilişkin çözümü

Sayısal Yaklaşım Altında Kullanılan Stratejiler

Sayısal yaklaşımla genelleme yapan 17 öğretmen adayı vardır ve bunlardan 7 tanesi yanlış sonuçlara ulaşmıştır. Cevapları Tablo 4’te “ilk üç adımdan yararlanma” başlığı altında incelenen 5 öğretmen adayı, önce ilk üç adımda kullanılan çubuk sayısını bulmuştur. Sonra bu öğretmen adaylarından biri aritmetik dizi formülünü, ikisi aralık sayma, biri adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi inceleme ve biri ise sabit farkı kat olarak alma stratejisini kullanarak doğru sonuçlara ulaşmışlardır. Örüntünün ilk üç adımı yardımıyla genelleme yapan bu öğretmen adaylarından birinin çözümü Şekil 91’deki gibidir.

1. adım 12 çubuk

2. adım 19 çubuk

3. adım 26 çubuk

12 - 19 - 26 şeklinde bir dizi oluşur. Ortak fark 7'dir. Dizilerin genel formülü $a_n = a_1 + (n-1) d$ 'den

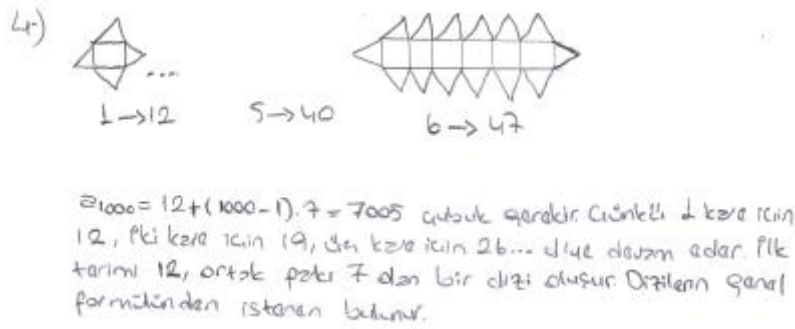
$a_{1000} = 12 + (1000-1) \cdot 7$

$a_{1000} = 7005$

Şekil 91. Ö36’nın dördüncü soruya ilişkin çözümü

“İlk üç adımdan yararlanma” kategorisine dâhil olan öğretmen adaylarından biri, klinik görüşmenin yapıldığı Ö50’dir. Ö50, dördüncü adımı da çizdikten sonra bu dört adım üzerinden bir kural bulmaya çalışmıştır. Bu bağlamda terimler arasındaki sabit farkın yedi olduğunu belirlemiş, bu farkı kat olarak alarak bir kural bulmuş ve 1000. adımı bu kural yardımıyla hesaplamıştır.

Tablo 4’te “1. ve 6. adımdan yararlanma” başlığı altında sınıflandırılan çözümlerde; ilk üç adım yerine, birinci ve altıncı adımdaki şekil çizilerek bu adımlardaki toplam çubuk sayısı hesaplanmıştır. Böylece aritmetik dizi formülünü uygulayabilmek için gerekli olan ortak fark ve ilk terim bulunmuştur. İstenen adım bu formül yardımıyla hesaplanmıştır. Bu stratejiyi kullanan iki öğretmen adayından birinin çözümü Şekil 92’de verilmiştir.



Şekil 92. Ö20’nin dördüncü soruya ilişkin çözümü

Üç öğretmen adayı ise bitişik kareleri esas almış ve bu karelerde kullanılan çubuk sayısını bulmak için sayısal yaklaşımı benimsemiştir. Tablo 4’te “kareleri esas alma” başlığı altında verilen bu çözümlerde öğretmen adaylarından biri aralık sayma, ikisi ise değişkenler arasındaki ilişkiyi inceleme stratejisini kullanarak doğru sonuca ulaşmıştır. Karelerdeki çubuk sayısını aralık sayma stratejisiyle bulan öğretmen adayının çözümü Şekil 93’teki gibidir.

$$\begin{array}{l}
4-) 1 \text{ kare için } 4 \text{ çubuk} \\
2 \text{ kare için } 7 \\
3 \text{ kare için } 10 \\
1000 \text{ kare için } 999 \cdot 3 + 4 = 3001 \text{ çubuk} \dots ① \\
\\
1 \text{ karedeki üçgenler için } 4 \text{ çubuk} \\
1000 \text{ " " " " } 4000 \text{ çubuk} \dots ② \\
\text{Karelerin başında ve sonunda } 4 \text{ çubuk} \dots ③ \\
① + ② + ③ \text{ 'den } 3001 + 4000 + 4 = 7005 \text{ çubuk}
\end{array}$$

Şekil 93. Ö21'in dördüncü soruya ilişkin çözümü

Sayısal yaklaşımda hatalı genelleme yapan 7 öğretmen adayı vardır. Bu öğretmen adaylarından 4 tanesi doğru orantı kullanarak isteneni bulmaya çalışmış ancak yanlış cevaplara ulaşmışlardır. Bunlardan biri, soruda verilen şekildeki toplam çubuk sayısı üzerinden orantı kurarken; üçü, kare ve üçgenlerde kullanılan çubuklar için ayrı ayrı orantı kurmuştur.

Toplam çubuk sayısını esas alarak orantı kuran öğretmen adayının çözümü Şekil 94'teki gibidir.

$$\begin{array}{l}
4-) 5 \text{ kare içeren şekilde } 40 \text{ çubuk varsa } 1000 \text{ kare içeren şe-} \\
\text{kilde } 8 \cdot 1000 = 8000 \text{ çubuk bulunur.}
\end{array}$$

Şekil 94. Ö31'in dördüncü soruya ilişkin çözümü

Kare ve üçgenlerdeki çubuklar için ayrı orantı kuran öğretmen adaylarından birinin çözümü ise Şekil 95'teki gibidir.

4-5 kere oluşturmak için 16 cubuk gerekir.
1000 " " " ?

5 dengan olusturmak için 24 cubuk गरकिन

$$\frac{24.000}{5} = 4800 \text{ subak gratis!}$$

Toplamda 1000 keragi olusturmak için 8000 cubuk gerekir.

Yanlış cevap bulan başka bir öğretmen adayının çözümü dikkat çekicidir. Bu öğretmen adayı, her adımda kullanılan üçgen sayısını esas alarak ardışık iki adım arasında bir fark bulmuştur. Sonra bu farkı kat olarak alıp bir formül elde etmiştir. Ancak öğretmen adayı üçgen sayısına karşılık gelen toplam çubuk sayısı için kareleri hesaba katmamış, dolayısıyla yanlış bir formüle ulaşmıştır. Bu öğretmen adayının çözümü Şekil 96’da verilmiştir.

4) $n = 5$ iain 12 iajar $\rightarrow 40$ cubuk } $C_n + 20$
 $n = 6$ iain 16 iajar $\rightarrow 46$ cubuk }
 $n = 1000$ iain $C_n \cdot 1000 + 20 = 4020$ cubuk kulkas.

Başka bir öğretmen adayı, örüntünün ilk üç adımında kullanılan çubuk sayısını hesapladıktan sonra deneme-yanılma yoluyla $4n+8$ genel formülünü bulmuştur. İlk iki adım için geçerli olan bu formülün diğer adımdaki terim sayısını vermediğini gören öğretmen adayı başka bir formül bulamamıştır.

Bir öğretmen adayı ise, karelerde kullanılan çubuk sayıları için $3+2(n-1)$ formülünü bulmuştur. Bu öğretmen adayı karelerde kullanılan çubuk sayılarını yanlış hesaplaması

sebebiyle yanlış formüle ulaşmıştır. Öğretmen adayının karelerde kullanılan çubuk sayılarını belirlerken yaptığı hatanın nedeni anlaşılamamıştır.

4. 2. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Sabit Değişen Sayı Örüntüsünde Kullandıkları Stratejilere İlişkin Bulgular

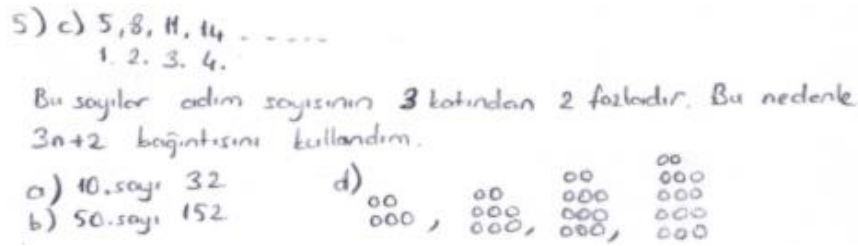
Örüntü Testi’deki beşinci soruda öğretmen adaylarından sabit değişen sayı örüntüsünün yakın ve uzak adımı ile genel terimini bulmaları istenmiştir. Tüm öğretmen adaylarının cevapladığı soruda sadece bir öğretmen adayı yanlış sonuca ulaşmıştır. Öğretmen adaylarından bazılarının önce genel terimi bulduğu, yakın ve uzak adımları bu cebirsel ifadeyi kullanarak hesapladıkları; bazılarının ise alt soruları yakın adımdan başlayarak çözdükleri görülmüştür. Alt soruları çözmeye yakın adımdan başlayan öğretmen adaylarından bazıları hem yakın hem de uzak adımda aynı stratejiyi kullanmış, bazıları ise uzak adımda strateji değişikliği yapmıştır. Öğretmen adaylarının stratejileri Tablo 5’te verilmiştir.

Tablo 5. Sabit Değişen Sayı Örüntüsünü Genellemede Kullanılan Stratejiler

Strateji	<i>n</i>
<i>Yakın ve Uzak Adımı Örüntünün Kuralıyla Bulma</i>	
✓ Adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi inceleme	9
✓ Aritmetik dizi formülünü kullanma	6
✓ Aralık sayma	1
✓ Doğrudan kuralı yazma	9
<i>Aynı Stratejiyle Önce Yakın, Sonra Diğer Adımları Bulma</i>	
✓ Aralık sayma	11
✓ Adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi inceleme	5
✓ Aritmetik dizi formülünü kullanma	4
<i>Önce Yakın, Sonra Uzak Adımı Farklı Stratejiyle Bulma</i>	5
Toplam	50

Tablo 5’te görüldüğü gibi, 25 öğretmen adayı yakın ve uzak adımı örüntünün kuralıyla bulmuştur. Bu öğretmen adayları ilk olarak örüntünün genel terimini belirlemiş, daha sonra buldukları genel formül yardımıyla yakın ve uzak adımdaki terimleri hesaplamışlardır. Öğretmen adayları örüntünün genel terimini bulurken; değişkenler arasındaki ilişkiyi inceleme, aritmetik dizi formülünü kullanma ve aralık sayma stratejilerini benimsemişlerdir. Bazı öğretmen adayları ise hiçbir açıklama yapmadan kuralı yazdıkları için “doğrudan kuralı yazma” kategorisinde sınıflandırılmışlardır.

Örüntünün genel formülünü bulmak için 9 öğretmen adayı adım sayısı ile terimler arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Bu öğretmen adaylarından yedi tanesi, terimlerin adım sayısının 3 katının 2 fazlasına eşit olduğunu belirtmiştir. Şekil 97’de, bu stratejiye bir örnek verilmiştir.



Şekil 97. Ö5’in beşinci soruya ilişkin çözümü

Değişkenler arasında ilişki arayan diğer öğretmen adaylarından biri, terimlerin oluşumunda $3(n+1)-1$ kuralının olduğunu belirtmiştir. Burada öğretmen adayı terimleri 5, 8, 11, 14 şeklinde verilen örüntünün her terimine bir ekleyerek 6, 9, 12, 15 örüntüsünü oluşturmuştur. Sonra yeni örüntünün adım sayısı ile terimleri arasında $3(n+1)$ bağıntısının olduğunu fark etmiş ve eklediği 1’i çıkararak genel formülü belirlemiştir. Aynı stratejiyi kullanan başka bir öğretmen adayı ise, örüntünün adım sayısının 2 ile başladığını düşündüğü için yanlış genelleme yapmış ve k adım sayısı olmak üzere genel terimi $3k-1$ olarak yazmıştır. Bu öğretmen adayının çözümü Şekil 98’deki gibidir.

$$\begin{array}{l}
 5) \quad 5, 8, 11, 14, \dots \\
 \quad \quad +1 +1 +1 +1 \\
 \quad \quad \underbrace{6, 7, 12, 15, \dots}_{3k}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{örüntüğü veren cebirsel ifade } (3k-1) \\
 (k=2'den \text{ başlıyor}) \\
 a) k=10 \text{ için } 3 \cdot 10 - 1 = 29 \\
 b) k=50 \text{ için } 3 \cdot 50 - 1 = 149
 \end{array}$$

Şekil 98. Ö11'in beşinci soruya ilişkin çözümü

Altı öğretmen adayı, aritmetik dizinin genel terimini veren formülde ilk terime beş, sabit farka üç değerini yazarak kurala ulaşmışlardır. Kuralı aralık sayma stratejisiyle bulan öğretmen adayı ise klinik görüşmeye katılan Ö45'tir.

Ö45 : Burada da yine ilk sorudaki gibi aradaki farka baktım. Üçer üçer artmış hepsinde. Demek ki diyorum ki başlangıç noktam beş. Yani beşi temel alarak birinci adımda beş, dedim. İkinci adımda baktığım zaman ne olmuş, beşe üç eklemişim. Bir sonraki adımda baktığım zaman beşe altı eklemişim. Yani (beş artı) üç çarpı iki. O zaman diyorum ki adım sayısından bir çıkarıp bunu üçle çarpmam gerek. Zaten beş başlangıç noktam. O yüzden beş ekledim.

G : Şeyi merak ediyorum ben. Birinci soruda yine böyle bir örüntümüz vardı. Onda yakın adımları bulurken ardışık toplama yaptın. Burada da direkt kuralı buldun. Bunda ne etkili oldu? Yani bu soruda, “benzer bir soru çözmüştüm, oradan aklımda kaldı” falan mı dedin?

Ö45 : Hı hı sanırım. Az önce, yani şu sorudan esinlenerek burada direkt o şekilde yapmış olabilirim çünkü benziyordu. Aynı örüntü var diyerekten direkt o şekilde buldum.

Klinik görüşmeye katılan Ö47 ve Ö50'nin de aralarında bulunduğu dokuz öğretmen adayı kuralı nasıl bulduklarına dair bir açıklama yapmadıkları için “doğrudan kuralı yazma” kategorisinde sınıflandırılmışlardır. Bu öğretmen adaylarının bir kısmının terimler arasındaki farkı belirlemiş olmalarından hareketle sabit farkı kat olarak alma stratejisini kullanmış olabilecekleri düşünülmektedir. Ö47 ve Ö50'nin klinik görüşmedeki açıklamaları bu düşüncüyü destekler niteliktedir. Ö47'nin açıklamaları şu şekildedir:

Ö47 : Baktım hep üç üç artmış. İlk soruda olduğu gibi demek ki dedim üçün katları ile ilgili bir ilişki var dedim. Sonra ne olabilir, üç kere bir, üç. Böyle olsa dedim, $3k + 2$ beş oluyor çünkü (k yerine iki ve üç koyarak kuralın diğer adımları sağlayıp sağlamadığını kontrol ediyor). Onun için kural budur dedim...

Bu stratejide öncelikle ardışık terimler arasındaki farkın 3 olduğu belirlenmiş ve kurala ilişkin cebirsel ifadenin $3n$ terimini içermesi gerektiği fark edilmiştir. Daha sonra örüntünün terimlerini vermesi için $3n$ 'e 2 eklenerek genel terime ulaşılmıştır.

Alt soruları çözmeye yakın adımdan başlayan 25 öğretmen adayı vardır. Tablo 5'te görüldüğü gibi, bu öğretmen adaylarından 20 tanesi hem yakın hem de uzak adımda aynı stratejiyi kullanmıştır; beş öğretmen adayı ise uzak adımı hesaplarken, yakın adımda kullandığı stratejiden vazgeçmiştir.

Yakın ve uzak adımda aynı stratejiyle çözüm yapan öğretmen adaylarından 11 tanesi aralık sayma stratejisini kullanmıştır. Bu stratejide ilk adım (ya da örüntüde verilen son adım) ile istenen adım arasındaki aralık sayısı, terimler arasındaki sabit farkla çarpılır ve ilk terim (ya da örüntüde verilen son terim) bu çarpıma eklenerek istenen terim hesaplanır. Klinik görüşmeye katılan Ö49'un da aralarında bulunduğu 8 öğretmen adayı genelleme yaparken örüntünün ilk adımını kullanmıştır. $5 + 3(n-1)$ genel formülüne ulaşan bu öğretmen adaylarından birinin çözüm stratejisi Şekil 99'daki gibidir.

5) 5, 8, 11, 14 aritmetik miktarı 3'tür
+3 +3 +3

a) 1. sayı 9 defa artınca 10. sayıya ulaşırız.
 $5 + 9 \cdot 3 = 32$

b) 1. sayı 49 defa artınca 50. sayıya ulaşırız.
 $5 + 49 \cdot 3 = 152$

c) 1. sayı $n-1$ defa artınca n . sayıya ulaşırız.
 $5 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 2$

Şekil 99. Ö13'ün beşinci soruya ilişkin çözümü

Aralık sayma stratejisinde örüntüde verilen son adımı kullanan üç öğretmen adayı vardır. Bu yaklaşım ile $14 + 3(n-4)$ genel formülüne ulaşılır. Şekil 100’de, örüntüde verilen son adımı kullanan öğretmen adaylarından birinin çözümü verilmiştir.

5) a) $\frac{1. \text{sayı}}{5}$ $\frac{2. \text{sayı}}{8}$ $\frac{3. \text{sayı}}{11}$ $\frac{4. \text{sayı}}{14}$... $\frac{10. \text{sayı}}{}$

$+3$ $+3$ $+3$ 6 kere artacak

$6 \cdot 3 = 18$ artacak $18 + 14 = 32$ 'dir.

b) $\frac{4. \text{sayı}}{14}$ $\frac{50. \text{sayı}}{}$

46 kere artacak

$46 \cdot 3 = 138$ artacak $138 + 14 = 152$ 'dir.

c) $(n-4) \cdot 3 + 14 = 3n - 12 + 14 = 3n + 2$

Şekil 100. Ö10’un beşinci soruya ilişkin çözümü

Tablo 5’te görüldüğü gibi, sırayla çözüm yapan beş öğretmen adayı adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Bu öğretmen adayları örüntüde verilen terimleri düzenleyerek adım sayısı ile terim arasında fonksiyonel bir ilişki keşfetmiştir. Yakın ve uzak adım hesaplanırken bu ilişki dikkate alınmıştır. Genel terimi belirlemek içinse bulunan bu ilişki cebirsel olarak ifade edilmiştir. Bu stratejiyle genelleme yapan öğretmen adaylarından iki tanesi $3n + 2$ genel formülüne ulaşmıştır. Bunlardan birinin stratejisi Şekil 101’deki gibidir.

5) 5, 8, 11, 14

$5 = 3 + 2 = 3 \cdot 1 + 2$
 $8 = 6 + 2 = 3 \cdot 2 + 2$
 $11 = 9 + 2 = 3 \cdot 3 + 2$
 $14 = 12 + 2 = 3 \cdot 4 + 2$

a) $3 \cdot 10 + 2 = 32$ b) $3 \cdot 50 + 2 = 152$

c) $3 \cdot n + 2$

d) 

Şekil 101. Ö32’nin beşinci soruya ilişkin çözümü

Üç öğretmen adayı ise değişkenler arasında $3(n+1)-1$ şeklinde genellenen bir ilişki olduğunu bulmuştur. Bunlardan birinin çözümü Şekil 102’deki gibidir.

5- 2) 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32

3'er artarak ilerlediği için

b) $5 + 49 \cdot 3 = 152$

c) $5 + (n-1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$

d)

Şekil 103. Ö39'un beşinci soruya ilişkin çözümü

Bir öğretmen adayı yakın adımı ardışık toplama stratejisiyle bulduktan sonra, genel formülü belirlemiştir ve bu genel formülü kullanarak uzak adıma ulaşmıştır. Bu öğretmen adayının kuralı hangi stratejiyle bulduğu tespit edilememiştir. Uzak adım için stratejisini değiştiren diğer bir öğretmen adayı ise değişkenler arasındaki ilişkiyi inceleme stratejisiyle ulaştığı genel formülü kullanarak istenen adımı hesaplamıştır. Bu öğretmen adayının genelleme stratejisi Şekil 104'teki gibidir.

b) 5 8 11 14

↓ ↓ ↓ ↓

$3+2$ $6+2$ $9+2$ $12+2$

$3 \cdot 1 + 2$ $3 \cdot 2 + 2$ $3 \cdot 3 + 2$ $3 \cdot 4 + 2$

50. sayı $3 \cdot 50 + 2 = 152$

Kural: $3n+2$

Şekil 104. Ö17'nin beşinci soruya ilişkin çözümü

4. 3. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Sabit Değişen Sayı Örüntüsünü Modellemelerine İlişkin Bulgular

Örüntü Testi'nin beşinci sorusunda öğretmen adaylarından sabit değişen sayı örüntüsünü genellemeleri ve bu örüntüyü modellemeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarından 24 tanesi hiçbir model oluşturmamıştır. Modelleme yapan 26 öğretmen adayı vardır. Bunlardan 18 tanesinin kuralı bulmaya yardımcı bir şekil örüntüsü oluşturabildiği, sekiz tanesinin modellerinin ise kuralı temsil etmekten uzak olduğu tespit edilmiştir.

Klinik görüşmeye katılan öğretmen adaylarından Ö47 ve Ö48'in doğru bir model oluşturduğu, diğer dört öğretmen adayının ise soruyu boş bıraktığı belirlenmiştir. Görüşme sırasında bu öğretmen adaylarından modelleme üzerinde yeniden düşünmeleri istenmiştir. Bu süreç sonunda Ö45 ve Ö46'nın uygun bir model oluşturabildiği, Ö49 ve Ö50'nin ise denemelerinde başarısız olduğu görülmüştür.

Sayı dizisinin adımları ile terimleri arasında $3n + 2$ şeklinde genellenen bir ilişki bulmuş olan öğretmen adaylarından bazıları, örüntünün kuralını bulmaya yardımcı olan modeller oluşturabilmiştir. Örneğin Ö10; iki nokta arasına, 3 noktadan oluşan sütunlar yerleştirmiştir. Her adımda, adım sayısı kadar sütun vardır. Genel terimdeki $3n$ bu sütunlardaki noktalarla, 2 sabiti ise şekillerin başında ve sonunda yer alan toplam iki noktayla temsil edilmiştir. Bu öğretmen adayının modeli Şekil 105'te verilmiştir.



Şekil 105. Ö10'un sayı örüntüsüne ilişkin modeli

$3n + 2$ genel terimine ulaşan öğretmen adaylarından biri olan Ö48'in modeli ve açıklamaları aşağıdaki gibidir:

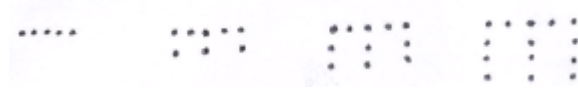


Şekil 106. Ö48'in sayı örüntüsüne ilişkin modeli

Ö48 : Şöyle düşündüm bunda. Bir kere $3n + 2$ olduğu için başta sabit iki tane olmalıdır diye düşündüm (Şekil 106'da daire içinde gösterdiği iki nokta ile başlıyor). Eğer üçlü gideceksek, $3n + 2$ 'yse, üç tane boyuta ihtiyacım var. Bir, iki, üç diyerek düşündüm (başlangıçtaki iki noktanın sağına, altına ve üstüne

birer nokta ekliyor). Birinci adım, ikinci adım, üçüncü adım (her adımda üç nokta ekleyerek ilk üç adımı çiziyor). Her adımda (sağda, altta ve üstte) birer tane artması gerektiğini ve bu şekilde gitmesi gerekir diye düşündüm.

Bazı öğretmen adayları ise değişkenler arasındaki $5+3(n-1)$ ilişkisini modelleyen şekil örüntüleri oluşturmuştur. Örneğin Şekil 107’de verilen modelin ilk adımında 5 nokta yer almaktadır. Bu noktalar genel terimdeki 5 sabitini temsil etmektedir. $3(n-1)$ terimini modellemek içinse ikinci adımda baştaki, ortadaki ve sondaki noktaların altına birer nokta eklenmiştir. Aynı işlem diğer adımlarda da uygulanmıştır. Eklenen noktalar bir grup olarak ele alınırsa her adımda, adım sayısının bir eksiği kadar grup yer alır. Bu gruplar $(n-1)$ terimini ve her gruptaki üç nokta genel terimdeki 3 çarpanını temsil eder.



Şekil 107. Ö39’un sayı örüntüsüne ilişkin modeli

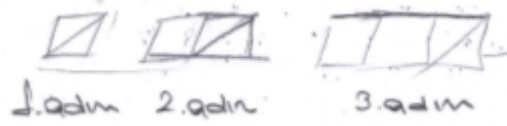
Başka bir öğretmen adayı $5+3(n-1)$ cebirsel ifadesindeki 5 terimini çubuklardan oluşan bir beşgen ile temsil etmiştir. $3(n-1)$ terimini temsil etmek içinse çubuklarla oluşturulmuş üçgenleri kullanmıştır. Bu bağlamda örüntünün birinci adımında bir beşgen vardır. Diğer adımlarda ise bu beşgen ile birlikte adım sayısının bir eksiği kadar üçgen yer alır. Bu öğretmen adayının modeli Şekil 108’deki gibidir.



Şekil 108. Ö9’un sayı örüntüsüne ilişkin modeli

Klinik görüşmenin gerçekleştirildiği öğretmen adaylarından Ö47, genel terimi $3n+2$ olarak bulmuştur. Ancak örüntüyü modellerken önce birinci adımdaki beş sayısını, dört

çubuktan oluşan bir kare ve bu karenin köşegeni olan bir çubukla modellemiş; daha sonra her adımda buna üç çubuk eklemiştir. Ö47'nin modeli ve açıklamaları şöyledir:



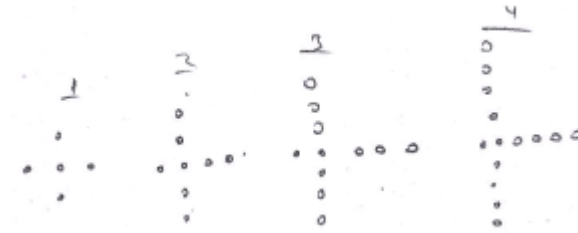
Şekil 109. Ö47'nin sayı örüntüsüne ilişkin modeli

Ö47 : Kuralı temsil ederken de, burada şey oldu. Öyle bir deniyordum, direkt çıktı. Dört kenar, dört tane çubuk, araya bir tane (Şekil 109'daki 1. adım). (İkinci adım için) sekiz tane çubuk, buna iki tane kare. Hep bir kare, iki kare, üç kare gidiyor (şekiller adım sayısı kadar bitişik kareden oluşuyor) ama birer karenin ortasından çizgi (köşegen) geçirdiğimde böyle bir örüntü oluştu.

G : Yani her seferinde şu üç parçayı (üç çubuktan oluşan yatay U şeklini) ekliyorsun.

Ö47 : Hı hı, evet.

Örüntü Testi'nde bu alt soruyu boş bırakan, ancak kinik görüşmede doğru bir model oluşturabilen Ö45'in $5+3(n-1)$ kuralını temsil ettiği modeli ve açıklamaları şu şekildedir:



Şekil 110. Ö45'in klinik görüşmede çizdiği model

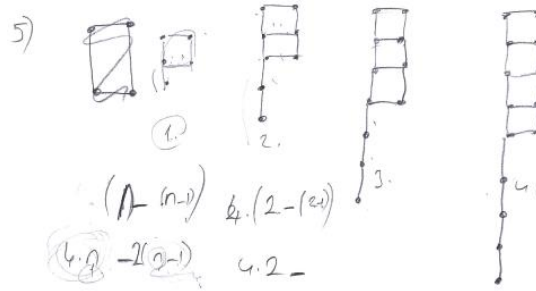
G : Şimdi senden şekil örüntüsü oluşturmanı isteyeceğim.

Ö45 : Burada o zaman da yapamamıştım işte.

G : Sayıları esas alacaksın. Artış miktarını belirledin. Belki bu sana yardımcı olur adım sayılarında.

Ö45 : Her seferinde üç artıyor... (Düşünüyor)... Şöyle bir şey yapabilirim mesela (Şekil 110'daki ilk şekli çiziyor). (İkinci adım için) bir sonraki adımım şu şekilde olsa (ilk şeklin sağına, üstüne ve altına birer nokta ekliyor). (İlk dört adımı çiziyor) yani her üç kenarına birer tane eklemem. Bu şekilde gidebilir sanırım.

$5+3(n-1)$ genel terimine ulaşan ancak Örüntü Testi'nde bu alt soruyu boş bırakan öğretmen adaylarından biri olan Ö46, klinik görüşmede Şekil 111'deki modeli oluşturmuştur.



Şekil 111. Ö46'nın klinik görüşmede çizdiği model

Ö46 : Şimdi şuradaki (ikinci soruda verilen örüntüdeki) gibi noktalar kullansam. (Şekil 111'deki üzeri çizilmiş olan ilk şekli çiziyor. Daha sonra bundan vazgeçerek şeklin kare olmasına karar veriyor) Şu şekilde dört nokta olsa ve bir kare çizsem. Birinci adımda kaç taneydi? Beş. Beşe tamamlayacak şekilde diğer noktayı nereye koyabilirim? Şuraya koysam, şu şekilde (1 numaralı şekli çiziyor). Evet. O zaman diğer adımında iki kare olacak ve iki tane de burada nokta (2 numaralı şekli çiziyor). Diğer adımlarda da bu durumda üç ve dört kare ve yine aynı şekilde üç ve dört nokta olacak (3 ve 4 numaralı şekilleri çiziyor). Sanırım oldu (nokta sayılarını sayarak kontrol ediyor).

G : Bu modelden kuralı nasıl bulacağımızı anlatır mısın?

Ö46 : Kareler üzerinden. Şöyle ki, benim her adımında bir, iki, üç, dört yani adım sayısı kadar karem var. Şimdi ikinci adıma bakacak olursak burada iki karem var. Normalde sekiz nokta olması gerekiyor ama bunları birleştirmişim. Yani şuradaki (karelerin birleşim yerindeki) ikişer nokta üst üste gelmiş, o sebepten altı oluyor. İki kare ve dörder noktadan 4.2, ama bundan burada bir, üçe bakarsam iki. Evet, o zaman ikinin bir eksiği kadar ikişer nokta çıkaracağım. Yani $4.2 - 2(2-1)$ nokta olacak. Bunlar karelerdeki. Şu çubukta ise iki tane var. O zaman bunları n ile ifade edecek olursam bir kere önce $4n$ diyeceğim. Sonra bundan $2(n-1)$ çıkaracağım. Çubuktaki nokta sayısını ise n olarak ekleyeceğim.

Genel terimi bulmak için değişkenler arasındaki ilişkiyi inceleyen bazı öğretmen adaylarının $3(n+1)-1$ formülüne ulaştığı görülmüştür. Bu öğretmen adaylarından Ö37, Şekil 112’de görüldüğü gibi daireler kullanarak dikdörtgensel bölgeler oluşturmuştur. Bunların bir kenarında 3, diğer kenarında ise adım sayısının bir fazlası kadar daire yer almaktadır. Örüntünün kuralı, bu bölgelerin alanından bir tane daireyi çıkararak bulunur. Cebirsel ifadedeki $3(n+1)$ terimi dikdörtgensel bölgenin alanını, siyah daire ise -1 sabitini temsil etmektedir.



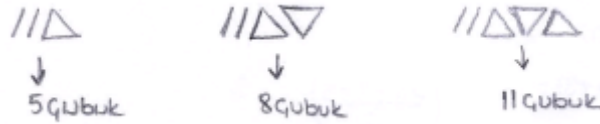
Şekil 112. Ö37’nin sayı örüntüsüne ilişkin modeli

Modelleme yapan öğretmen adaylarından 8 tanesinin örüntüyü sadece görselleştiren, başka bir deyişle kuralı bulmada etkili olmayan modeller çizdiği belirlenmiştir. Bu şekil örüntülerinin adımları, sayı örüntüsünde verilen terim sayısına karşılık gelecek sayıda ve yerleştirilmelerinde herhangi bir düzen olmayan elemanlarla oluşturulmuştur. Bu bağlamda bazı öğretmen adaylarının yan yana ya da alt alta dizilen çubuk/ noktalar kullandığı görülmüştür. Örneğin Ö20, Şekil 113’te görüldüğü gibi, sayı örüntüsünü modellemek için adımlarda sırasıyla 5, 8, 11 ve 14 çizgi kullanmıştır.



Şekil 113. Ö20'nin sayı örüntüsüne ilişkin modeli

Sayı örüntüleri için yapılan modellemeler kuralı bulmayı kolaylaştırmalıdır. Oysa Ö20'ninki gibi şekil örüntülerinde, modellemede kullanılan elemanları saymadan terim sayısını belirlemek mümkün değildir. Çizgilerle oluşturulan ve genel terimi temsil eden bir model ise Şekil 114'te verilmiştir.



Şekil 114. Ö31'in sayı örüntüsüne ilişkin modeli

Modellerde ilk adımın 5 sayısına karşılık gelecek şekilde nokta, birim kare ya da daire gibi değişik elemanlar kullanılarak oluşturulduğu ve terimler arası farkın 3 olmasından hareketle her yeni adımda üç eleman eklendiği görülmüştür. Ancak modellerin amaca uygun kullanılması, bu elemanların belli bir düzene göre yerleştirilmesine bağlıdır. Modeli oluşturmak için kullandığı elemanlar belli bir düzene göre değişmeyen ve örüntüyü sadece görselleştiren öğretmen adaylarından birinin cevabı Şekil 115'teki gibidir.



Şekil 115. Ö3'ün sayı örüntüsüne ilişkin modeli

Ö3'ün modelindeki ilk adımda, şeklin 3 ve 2 nokta içeren sütunlardan oluştuğu görülebilmektedir. Diğer adımlar için eklenen 3 nokta, ilk adımdaki gibi bir sütun halinde yerleştirildiğinde adım sayısı ve terim sayısı arasında fonksiyonel bir ilişki bulmayı kolaylaştıracaktır. Bu bağlamda Şekil 116'da, terimleri belli bir düzene göre yerleştiren bir öğretmen adayının modeli verilmiştir.



Şekil 116. Ö6'nın sayı örüntüsüne ilişkin modeli

Örüntü Testi'nde bu alt soruyu boş bırakan, klinik görüşmede de bir model oluşturamayan iki öğretmen adayından Ö49'un deneme çizimleri ve açıklamaları aşağıdaki gibidir:



Şekil 117. Ö49'un klinik görüşmedeki model denemeleri

Ö49 : Şekil örüntüsü... İlk adımda beş tane, ikinci adımda sekiz tane... Beşgen falan çizemem.

G : Çizebilirsin ama sonra ne yapacağın önemli.

Ö49 : Evet. Sonrası olmuyor... Her adımda üç tane miydi? (Uzun süre düşünüyor) Yok, çıkmıyor. Nasıl yapabilirim? Harf yapsam olur mu ki? (Önce bir Y, sonra A çiziyor ve üzerinde düşünüyor) Olmuyor galiba... Bir, iki, üç, dört, beş çubuk desem... Şöyle yapsam, hatta şunu şuraya alsam (Şekil 117'de görülen kareleri çiziyor). Sonraki adımı nasıl yapacağımı bilemiyorum... Şuradan gidebilir miyim? Şeklin daha büyümesi gerekiyor değil mi? Yok, yapamadım bunu.

Ö50'nin deneme çizimleri ve açıklamaları ise şöyledir:



Şekil 118. Ö50'nin klinik görüşmedeki model denemeleri

G : Bir şekil örüntüsü oluşturabilir misin?

Ö50 :Şekil örüntüsü oluşturamadım. Şekille bağlantı konusunda biraz zayıfım.

G : Mesela şöyle olabilir; beşle başlıyordu, her adımda üç arttığını söyledin. Mesela noktalar, çubuklar kullanarak beşi modelleyip sonra üçü, her adımda üç ekleyeceğiz, bunu nasıl yerleştirebiliriz?

Ö50 : Yani yıldız şekli falan düşündüm aslında, yani yıldız gibi bir şekil (Şekil 118'deki 1 numaralı şekil). Ama sonra bunu üç artıracam, hani aralarına koymayı düşündüm. Ama dört tane olacak. Olmayacaktı (bir sonraki adımda noktaları, şekildeki noktalar arasına yerleştirmeyi düşünüyor ama üç nokta ve dört aralık olduğu için bunu devam ettiremiyor). Ya üste ekleyecektim ama şekil simetrik ilerlemeyecekti (noktaları, şekildeki noktaların ucuna eklerse yine bir tanesinin boşta kalacağını düşündüğü için bundan da vazgeçiyor)... Üçgen olduğu zaman da (Şekil 118'deki 2 numaralı şekil) tepe noktası olmuyordu beş olduğu zaman. Üçgeni de düşündüm, üçgen yapmayı... Yani şöyle bir şey (Şekil 118'deki 3 numaralı şekil) olabilir mi acaba? Böyle bir şey olsa yine üç artırarak ilerletemedim. Noktalarla (bir örüntü) bulamadım yani.

4. 4. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Artarak Değişen Sayı Örüntüsünde Kullandıkları Stratejilere İlişkin Bulgular

Örüntü Testi'ndeki altıncı soruda öğretmen adaylarından artarak değişen sayı örüntüsünün yakın- uzak adımını ve genel terimini bulmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarından 12 tanesi soruyu boş bırakmış, 9 tanesi ise sadece yakın adımı hesaplamıştır. Örüntünün hem yakın ve uzak adımını hem de genel terimini bulmaya çalışan 29 öğretmen adayı vardır. Bunlardan 12 tanesi hatalı genelleme yaptığı için yanlış sonuçlara ulaşmış, 12 tanesi bütün adımlarda aynı stratejiyi kullanmış, 5 tanesi ise uzak adıma ulaşmak için yakın adımda kullandığı stratejiyi değiştirmiştir. Öğretmen adaylarının stratejileri Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6. Artarak Değişen Sayı Örüntüsünü Genellemede Kullanılan Stratejiler

Strateji	<i>n</i>
<i>Sadece Yakın Adımı Bulma</i>	
✓ Terimler arasındaki farkların toplamını hesaplama	4
✓ Ardışık toplama	5
<i>Yakın ve Uzak Adımda Aynı Stratejiyi Kullanma</i>	
✓ Fonksiyonel ilişki bulma	9
✓ Terimler arasındaki farkların toplamını hesaplama	3
<i>Uzak Adımda Strateji Değişikliği Yapma</i>	5
Yanlış Cevaplar	12
Toplam	38

Klinik görüşmeye katılan Ö46, Ö47 ve Ö49 soruyu boş bırakan; Ö45, Ö48 ve Ö50 ise yanlış bir genel terim buldukları için yakın ve uzak adımda yanlış değerlere ulaşan öğretmen adaylarındandır.

Tablo 6'da görüldüğü gibi örüntünün sadece yakın adımını bulan 9 öğretmen adayı vardır. Bu öğretmen adayları ardışık toplama ya da ardışık terimler arasındaki farkların toplamını

birinci terime ekleme stratejisiyle genelleme yapmışlardır. Ardışık toplama stratejisini kullanan, başka bir deyişle terimler arasındaki farkı bir önceki terime ekleyerek yakın adıma ulaşan 5 öğretmen adayı vardır. Uzak adımla ilgili hiçbir işlem yapmayan ve genel terimi verecek bir cebirsel ifade yazamayan bu adaylardan iki tanesi, terimler arası farkın sabit olmamasının örüntünün kuralı olduğunu ifade etmiştir. Şekil 119’da, bu durumu örnekleyen bir çözüme yer verilmiştir.

6-a) $\begin{array}{ccccccc} 1 & 5 & 11 & 19 & 29 & 41 & 55 & 71 \\ & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \end{array}$
 8. sayı 71’dir.
 c-) Örüntünün kuralı; sayılar arasındaki fark 4’ten başlayıp 2’şer artarak devam eder.

Şekil 119. Ö34’ün altıncı soruya ilişkin çözümü

Yakın adımı, terimler arasındaki farkların toplamını birinci terime ekleyerek bulan 4 öğretmen adayı vardır. Bu öğretmen adaylarından sadece bir tanesi uzak adıma kadar olan aralıkların toplamını bulmaya çalışmıştır. Öğretmen adayı bu hesaplamayı toplam sembolüyle yapmak istemiş ancak girişiminde başarılı olamamıştır. Sabit değişen sayı örüntülerinde aralık sayma olarak tanımlanan “farkların toplamını birinci terime ekleme stratejisi” ile genelleme yapan öğretmen adaylarından birinin çözümü Şekil 120’deki gibidir.

6-b) $\begin{array}{ccccccc} 1 & 5 & 11 & 19 & \dots \\ & 4 & 6 & 8 & \dots \end{array}$
 a) $1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7$
 $4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 70$
 8. sayı $70 + 1 = 71$

Şekil 120. Ö2’nin altıncı soruya ilişkin çözümü

Tablo 6’da görüldüğü gibi 12 öğretmen adayı hem yakın hem de uzak adımda aynı stratejiyi kullanmıştır. Bu öğretmen adaylarından 9 tanesi, adım sayısı ile terimler arasında fonksiyonel bir ilişki arayarak genelleme yapmıştır. Bulunan ilişki yakın ve uzak adımı

hesaplamak için devam ettirilmiş, örüntünün kuralı da sayılar yerine n yazılarak ifade edilmiştir. Tüm adımlarda doğru genellemeler yapan bu öğretmen adayları fonksiyonel ilişkiyi bulmak için farklı yollar benimsemişlerdir.

Değişkenler arasındaki ilişkiyi inceleyen öğretmen adaylarından 5 tanesi soruda verilen ilk dört terimin; adım sayısının karesine, adım sayısının bir eksiğinin eklenmesiyle oluştuğunu belirtmiştir. $n^2 + (n-1)$ şeklinde genellenebilecek bu stratejiyi kullanan öğretmen adaylarından birinin çözümü Şekil 121'deki gibidir.

6) 1. sayı 2. sayı 3. sayı 4. sayı a) 8. sayı b) 50. sayı

1	5	11	19	$8^2 + 7$	$50^2 + 49$
$1^2 + 0$	$2^2 + 1$	$3^2 + 2$	$4^2 + 3$	71	2549

c) Her adımdaki sayı, adım sayısının karesine, adım sayısı -1 eklenerek oluşturulmuştur.
Kuralımız $n^2 + (n-1)$ 'dir

Şekil 121. Ö14'ün altıncı soruya ilişkin çözümü

Benzer bir yöntem izleyen bir öğretmen adayı ise; terimleri elde etmek için adım sayısının karesine, adım sayısını ekleyerek işe başlamıştır. Bulduğu sayıların terimlerden hep bir fazla olduğunu fark eden ve örüntüyü $n^2 + n - 1$ şeklinde genelleyen bu öğretmen adayının çözümü Şekil 122'de verilmiştir.

6) 1. Terim 2. Terim 3. Terim 4. Terim

1	5	11	19
$1^2 + 1$	$2^2 + 2$	$3^2 + 3$	$4^2 + 4$
-1	-1	-1	-1

a- $8^2 + 8 - 1 = 71$
b- $50^2 + 50 - 1 = 2500 + 49 = 2549$
c- Kural $\rightarrow a^2 + a - 1$ bu bir aritmetik dizi olmadığı için adım sayılarının karesini alıp yine kendisine ekleyerek sayılara ulaşmaya çalıştım. Her 1 fazla olduğu için -1 ekledim

Şekil 122. Ö27'nin altıncı soruya ilişkin çözümü

Adım sayısı ile terim arasındaki fonksiyonel ilişkiyi bulmaya yönelik farklı yöntemler de vardır. Örneğin bir öğretmen adayı terimleri düzenlerken; adım sayısının bir fazlasının karesinden, adım sayısının 2 fazlasını çıkarmıştır. Cebirsel olarak $(n+1)^2 - (n+2)$ şeklinde ifade edilen bu stratejiyle genelleme yapan bu öğretmen adayının çözümü Şekil 123'teki gibidir.

$$\begin{array}{ll}
 6) 1. \text{ sayı} \rightarrow 1 = 2^2 - 3 & a) 2. \text{ sayı} \rightarrow 4 = 3^2 - 5 \\
 2. \text{ sayı} \rightarrow 5 = 3^2 - 4 & b) 50. \text{ sayı} \rightarrow 51^2 - 52 \\
 3. \text{ sayı} \rightarrow 11 = 4^2 - 5 & c) n. \text{ sayı} \rightarrow (n+1)^2 - (n+2) \\
 4. \text{ sayı} \rightarrow 19 = 5^2 - 6 & = n^2 + 2n + 1 - n - 2 \\
 \vdots & = n^2 + n - 1
 \end{array}$$

Şekil 123. Ö6'nın altıncı soruya ilişkin çözümü

İki öğretmen adayı ise $n(n+1)-1$ şeklinde genellenen bir stratejiyle terimleri düzenlemiştir. Şekil 124'te, bu stratejiyi kullanan öğretmen adaylarından birinin çözümü verilmiştir.

$$\begin{array}{ll}
 6) 1, 5, 11, 19 & a) 8 \cdot 9 - 1 = 71 \\
 1 = 2 - 1 = 1 \cdot 2 - 1 & b) 50 \cdot 51 - 1 = 2549 \\
 5 = 6 - 1 = 2 \cdot 3 - 1 & c) n \cdot (n+1) - 1 \\
 11 = 12 - 1 = 3 \cdot 4 - 1 & \\
 19 = 20 - 1 = 4 \cdot 5 - 1 &
 \end{array}$$

Şekil 124. Ö32'nin altıncı soruya ilişkin çözümü

Tablo 6'da görüldüğü gibi, 3 öğretmen adayı ardışık terimler arasındaki farkların toplamını birinci terime ekleyerek genelleme yapmıştır. Bunlardan ikisi yakın ve uzak adımı hesaplamış ancak bir genel terim yazmamıştır. Diğer öğretmen adayı ise formülü yazmada başarılı olmuştur. Bu öğretmen adayının cevabı Şekil 125'teki gibidir.

- 6) Sayılar arasındaki fark 4'ten başlıyor ve her seferinde 2 artıyor. Sayma ise 1'den başlamıştır.
- a) Birinci sayıya $4+6+8+10+12+14+16=70$ 'i eklersek 8. sayıya ulaşabiliriz. $1+70=71 \Rightarrow 8. \text{ sayı}$
- b) 50. sayıya ulaşmak için $4+6+8+\dots+100$ toplamını eklemeliyiz.
- $$4+6+8+\dots+100 = 49 \left(\frac{100+4}{2} \right) = 49 \cdot 52 = 2548 + 1. \text{ sayı}$$
- $$= 2548 + 1$$
- $$= 2549$$
- c) Genel formül:
- $$1. \text{ sayı} + (4+6+8+\dots+2n) = 1 + (n-1) \cdot \left(\frac{2n+4}{2} \right)$$
- $$= 1 + (n-1) \cdot (n+2)$$
- $$= 1 + n^2 + n - 2$$
- $$= n^2 + n - 1$$

Şekil 125. Ö31'in altıncı soruya ilişkin çözümü

Tablo 6'da görüldüğü gibi, uzak adımda strateji değişikliği yapan, başka bir deyişle yakın ve uzak adım için farklı strateji kullanan 5 öğretmen adayı vardır. Bunların tamamı yakın adımı ardışık toplama stratejisiyle bulmuşlardır. Uzak adımda ise stratejilerini değiştirmiş ve terimler arasındaki farkların toplamını hesaplayarak genelleme yapmaya çalışmışlardır. Bu bağlamda toplam sembolünden yararlanan 3 öğretmen adayı vardır, ancak bunlardan sadece biri doğru sonuçlara ulaşmıştır. Toplam sembolünü doğru kullanan öğretmen adayının çözümü Şekil 126'da verilmiştir.

6) a) $1, 5, 11, 19, 29, 41, 55, 71$

b) $\sum_{k=1}^{49} 2k+2 = 2 \cdot \sum_{k=1}^{49} (k+1) = 2 \cdot \sum_{k=2}^{50} k = 2 \left(\frac{50 \cdot 51}{2} - 1 \right)$

$$= 2550 - 2 = 2548 + 1. \text{ sayı}$$

$$= 2548 + 1 = 2549$$

c) $1. \text{ sayı} + \sum_{k=1}^{n-1} 2k+2 = 1 + 2 \sum_{k=2}^n k$

$$= 1 + 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 \right) = 1 + n^2 + n - 2 = n^2 + n - 1$$

Şekil 126. Ö13'ün altıncı soruya ilişkin çözümü

İki öğretmen adayı, uzak adımdaki terimler arası farkların toplamını hesaplarken “çift sayıların toplamı” formülünden yararlanmıştır. Bu öğretmen adaylarından biri, örüntünün kuralını $a_n = 1 + [4 + 6 + \dots + (2n + 2)]$ şeklinde ifade etmiştir. Diğer öğretmen adayı ise, her adımda birinci terime eklenen farkların oluşumuna dair bir genelleme yapmıştır. Bu genellemede her adım; adım sayısının bir eksiği ile iki fazlasının çarpımının, birinci terime eklenmesiyle elde edilir. n , birinci adımdaki terimi ve x , adım sayısını göstermek üzere; $n + (x-1)(x+2)$ genel terimini elde eden bu öğretmen adayının çözümü Şekil 127’deki gibidir.

6) a) 1, 5, 11, 19, 29, 41, 55, 71
 sayılar 4, 6, 8, ... şeklinde artarak gider.
 b) 1, 5, 11, 19, ... sayılarına $n, n+4, n+10, n+18$ dersek 50. adımda $n+49.52$ olur. $1+2548$ den 2549 olur.
 c) Örüntünün ardışık - yollarına bakarak iki sayı arasındaki farkın 4, 6, 8, 10 olduğunu gördüm. Sayılara $n, n+4, n+10, n+18$ dedim. Sonra bu sayıları şu şekilde düzenledim;

1. n	Buradan x adımda,
2. $n+4 = n+1.4$	$n+(x-1).(x+2)$ olur.
3. $n+10 = n+2.5$	$1+(x^2-x+2)$ den
4. $n+18 = n+3.6$	x^2-x-1 olur.
↓	
x	$(x-1) (x+2)$

Şekil 127. Ö40’ın altıncı soruya ilişkin çözümü

Tablo 6’da görüldüğü gibi yanlış sonuçlara ulaşan 12 öğretmen adayı vardır. Bu öğretmen adaylarının büyük kısmı sadece ilk iki terime odaklandıkları için örüntüyü sabit değişen bir örüntü olarak ele almış ve bu nedenle hatalı genellemeler yapmıştır. Örüntü Testi’nde bu sorudan hemen önce sabit değişen bir örüntü olması bu algıya sebep olmuş olabilir. Burada dikkat çekici olan, örüntünün kuralı olarak bulunan cebirsel ifadelerin tüm terimlerde geçerli olup olmadığının test edilmemesidir. Öğretmen adayları örüntünün ilk iki terimi arasındaki farkı belirledikten sonra farkı kat olarak alma, aralık sayma ve aritmetik dizi formülünü kullanma stratejileri ile çözüm yapmışlardır. Elde edilen genel formül yanlış olduğu için yakın ve uzak adımdaki değerler yanlış hesaplanmıştır. Klinik görüşmeye katılan öğretmen adaylarından Ö50 ve Ö48, $4n-3$ genel formülüne ulaşmışlardır. Genel

terimi, farkı kat olarak alma stratejisiyle bulmuş olan Ö50'nin açıklamaları aşağıdaki gibidir:

G : Soruyu nasıl çözdüğünü anlatır mısın?

Ö50 : Yine aynı mantıkla (beşinci sorudaki gibi) yaptım. Birinci adımda bir, ikinci adımda beş, üçüncü adımda on bir, dördüncü adımda on dokuz. Burada da yine dörder artmış.

G : Emin misin şimdi onu sorayım? Yani hepsini kontrol ettin mi yoksa sadece birinci ve ikinci adıma bakıp dört artıyor, demek ki diğerleri de dört artıyordur diyerek mi devam ettin?

Ö50 : Ya bu dört değerinin üzerinden yaptım sadece.

G : Yani bulduğun kural örüntüde verilen sayıları sağlıyor mu, bunu denedin mi?

Ö50 : Bulduğum kural... Bir verdiğim zaman, ya sağladı. Diğerlerine bakmadım.

G : Diğer terimleri deneyelim.

Ö50 : Bir verdiğim zaman biri verdi. İki verdiğim zaman sekizden üç çıktı, beş. Üç verdiğim zaman on iki. On ikiden üç çıktı. Doğru sağlamıyor. Hepsine bakmamışım. Kontrol etmemişim. Diğerlerinin (daha önceki soruların) hepsi çıktığı için bunu tekrar kontrol etmemişim.

G : Yeniden çözebilir misin?

Ö50 : Yeniden çözebilir miyim... Dört artmış, altı artmış, bu da yedi artacak. Sekiz artmış. Dört, altı ve sekiz artmış. Hımm. Aradaki farkı (diğer adımlar arasındaki farkı) hesaplamamışım burada. (Düşünüyor) hepsinden iki tane artması lazım, ikişer tane. Şimdi yapamayacağım herhalde.

G : Tamam. Diğer soruya geçelim.

İlk iki terim arasındaki farkı bularak aritmetik dizi formülünü kullanmış olan Ö48, hatasını gördükten sonra başka bir yoldan çözüm yapmış ve yeni bir genel terime ulaşmıştır. Ö48'in açıklamaları şu şekildedir:

Ö48 : Sekizinci sayı kaçtır? Keza benzer şekilde bunu da aynı beşinci sorudaki adımlar gibi yapmaya çalıştım. Öncelikle burada yaptığım; tekrar a_1 'in 1 olması, ortak farkı r 'nin de 4 olması. O zaman a_8 demek $1+7r$ demek. Yani $1+7.4$ demek, o da 29 yapacaktır. Ellinci sayı da benzer şekilde $a_{50}=1+49.4$ demek. 197 sayısı yapar o zaman. Örüntünün herhangi bir adımındaki sayıyı bulmak için bir kural yazınız dediğinde genel terimi istiyor demektir. O zaman biz n 'yi yerine koyarsak $1+(n-1)r$ demek zorundayız. O da şu demek $1+(n-1)4$ demek. O zaman $4n-3$ genel terimimizi oluşturacaktır.

G : Şimdi bu bulduğun genel terim doğru mu? Doğruluğunu kontrol ettin mi?

Ö48 : Evet, doğru söylüyorsunuz. (Bulduğu kuralın terimleri verip vermediğini araştırıyor) burada bir sıkıntı var gibime geliyor... Aa evet, hata var. Şimdi ben dört, dört diye gittiğini düşünerek. O zaman tekrar yapalım çünkü hepsi yanlış olur o zaman. Dört, altı, sekiz (dört terim arasındaki farkı buluyor). Dört, altı, sekiz diye gidiyor. O zaman değişti iş. O zaman 4, 6, 8 diye gidiyorsa şöyle diyeceğiz... Genel terimi bulmak istersek... İkinci terime geçerken iki katı, üçüncü terime geçerken üç katı, dördüncü terime geçerken dört katı. O zaman şöyle diyeceğiz $a_n = 1 + 2n$. Ama üç olur. Sonraki terimi ne yapacağız? Üç artı dokuz, olmaz. Hadi bunu yaptık. Üçüncü terime geçelim. İki kere üç, altı (artı bir), yedi. Olmadı, bunu da eklemek zorundayız. Ekleme yapmak zorundayız. O zaman olmaz böyle bir şey... 2, 4, 6. O zaman şöyle bir şey yapacağız; k , 1'den n 'ye kadar, dizinin genel terimi $1 + 2n$. $(\sum_{k=1}^n 1 + 2n = a_n$ işlemini yapıyor ve $n^2 + 2n - 1 = a_n$ sonucuna ulaşıyor. Ancak bunun da doğruluğunu test etmiyor).

Ö45, ilk iki terimle yetinmeyip soruda verilen dört terim arasındaki farkı 4, 6 ve 8 olarak belirlemiştir. İkinci, üçüncü ve dördüncü adımı düzenlerken birinci terime bu farkların toplamı yerine sırasıyla 4, 6 ve 8'i eklediği için yanlış bir genel terim bulmuş olan bu öğretmen adayının çözümü şöyledir:

Ö45 : Altıncı soruda da yine baktım sayılara, aradaki farklara baktım. Burada da 4, 6, 8. Aslında ikinin katları gibi gidiyor. O yüzden diyorum ki birde (birinci adımda) 1 ile başlamışım. İlk sayım 1 olsun. İkinciye baktığım zaman bir artı dört yaptı. Bir sonrakine baktığımda bir artı altı.

G : Şimdi burada (üçüncü terim için $1+6$ yazılmasında) bir sıkıntı var aslında. İlk terime, ilk terim 1 idi, altı ekleyerek üçüncü terimi buldun.

Ö45 : Aa evet (üçüncü terimin aslında 11 olduğunu fark ediyor). Tamam, anladım. Orada bir hata var.

Yaptığı hatayı fark ettikten sonra öğretmen adayından soruyu yeniden çözmesi istenmiştir. Bu süreçte Ö45'in farkların toplamı üzerinden bir genelleme yapmaya odaklandığı ve başlangıçta adım sayısı ile ilişki kurmaya çalışmadığı için zorlandığı görülmüştür.

G : İstersen yeniden yapalım.

Ö45 : Baştan şöyle 1, 5, 11, 19 yazalım. Birinci adımda 1, ikinci adımda $1 + 4$, üçüncü adımda $1 + 4 + 6$, dördüncü adımda $1 + 4 + 6 + 8...$ Evet. Buradan nasıl bir şey bulabiliriz? Kuvvetlerden şöyle bir şey yapabilir miyiz diye düşünüyorum da (birinci adım için 2^0 , ikinci adım için $2^0 + 2^2$ yazıyor)... Aslında şöyle bir kural çıkıyor sanırım (ikinci adım için $1+2.2$, üçüncü adım için $1+2.2+2.3$, dördüncü adım için $1+2.2+2.3+2.4$ yazıyor). Yani adım sayıma göre 1 ile başlıyorum, bir sonrakinde de $1+2.2$ yazıyorum ama şuradaki 1'ler sıkıntı oluyor sanki. Tam bir kural çıkaramıyorum.

G : O zaman başka bir yol deneyelim istersen. Bu sayılarla, adım sayıları arasında direkt bir ilişki bulabilir misin? Mesela şimdi bunda aradaki farklar artarak değişiyor, bunlarda (beşinci soruda) sabit. Bunlarda lineer bir denklem bulduk. O zaman farklı bir şey çıkması gerekiyor demek ki.

Ö45 : Anladım. Yani aslında karelerden mi gitsem? (İkinci adımda) ikinin karesi, dört artı bir olmuş oldu. Üçüncü adımda üçün karesi artı iki. Yani şöyle mi? $n^2 + (n-1)$. Evet sağlıyor (tüm adımlarda kuralı deniyor).

G : Son olarak şunu sorayım; (ilk) bulduğun kuralı sanırım kontrol etmedin?

Ö45 : Yok. Kontrol etmedim iyice.

Soruyu boş bırakmış olan Ö46, Ö47 ve Ö49'dan örüntü üzerinde yeniden düşünmeleri istenmiştir. Bunlardan Ö49 ilk olarak terimlerin, bir önceki terim vasıtasıyla bulunabileceğini belirtmiştir. Daha sonra yakın adımı farkların toplamını birinci terime ekleyerek hesaplayabilmiş, ancak uzak adımı ve genel terimi bulamamıştır. Ö49'un açıklamaları aşağıdaki gibidir:

Ö49 : Burada da mesela ilk terimle ikinci terim arasında dört artmış. İkinci terimle üçüncü terim arasında altı artmış. Sürekli ikinin katları şeklinde bir artış var. Buradan bir genel terim, bir formül çıkarabilir miyim burada? Bu kuralda istediğimiz terim bizim, birinci terime... Şöyle olması lazım galiba. Birinci terim... $a_2 = a_1 + 2.2 \dots$ Mesela ikinci terimimiz kaç bizim, beş. Bir artı dörtten geliyor. (Üçüncü terim) on bir, bir artı. Yok. Bir öncekine ekleniyor değil mi? Tamam, o zaman beş artı, iki çarpı üçten. Yani her terim kendinden öncekine üç katı, yok, kendi terim sırasıyla ikiye çarpıyoruz bir öncekine ekliyoruz.

G : Hep sayıların birbiriyle ilişkisini düşünüyorsun ya mesela adım sayısı ile olan ilişkiyi, yani sayıları analiz ederek bir ilişki bulmaya çalışabilirsin.

Ö49 : Hımm... Çıkartıyoruz. Beşten bir çıkarsak dört, şöyle. Yok olmuyor. On bir, on dokuz... Dört, altı, sekiz, on. Şöyle desek; beş bir daha altı. Altı eklendi on bir. Olmuyor bu seferde... On yedi yapar, on dokuz yapmıyor (ilk üç terimi topluyor). O zaten Fibonacci'ydi. Düşünüyorum. Birincisi bir. İkincisi bir artı dört. Üçüncüsü bir artı dört artı altı (dördüncü ve beşinci adımı da yazıyor). Buradan daha mı kolay oluyor, bilemedim şu anda... O zaman buradan sekizinciye elde edebilir miyim? (sekizinci adımı $1 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16$ şeklinde yazıyor).

G : Şimdi yakın adımı bu yolla buldun. Ama mesela ellinci adıma bu yöntemle ulaşamazsın.

Ö49 : Ulaşamam evet.

G : O yüzden nasıl bir kural geliştirebiliriz?

Ö49 : Nasıl bir kural geliştirebiliriz. İşte şu oluyor; (üçüncü adımda bir artı) iki çarpı iki artı, iki çarpı üç. Evet ellinci adımı buna uygulayınca... Şimdi nasıl geliştirebiliriz? Şunları (terimler arasındaki farkların toplamını) toplam şeklinde formülize etsek aslında olabilir. Hepsi bir önceki adıma dediğine göre ellinciye bulmak için kırk dokuzu da bulmak gerekiyor ve bu bize sıkıntı çıkaracak... Yok, daha kısa yolunu bulamadım.

Ö46 ve Ö47 ise birkaç denemeden sonra adım sayısı ile terim arasında bir ilişki kurmayı başaramıştır. Bunlardan Ö47'nin açıklamaları aşağıdaki gibidir:

Ö47 : Ben yine direkt şu mantıkla gitmeye çalıştım.

G : Aradaki farklardan mı?

Ö47 : Evet. Bir alışkanlık herhalde benimki. Direkt aradaki farktan ya da ikisi arasındaki ilişkiyi bulmaya çalışıyorum direkt. O kolay geliyor ilk onla (terimler arasındaki farkla) başlıyorum. O yoksa ikisi arasında nasıl bir ilişki var onu bulmaya çalışıyorum... Şimdi bir, beş, on bir, on dokuz. Şimdi (üçüncü terim için) beş çarpı iki, artı bir desem. (İkinci terim için) beş çarpı bir. (Bir deneme yapıyor ama birinci terimi bu yolla elde edemediği için vazgeçiyor. Sonra yeni bir deneme yapıyor) Adım sayısına n demek istedim. Burada hep bir şey çıktı. Bu 1 (birinci adım) için uymuyor gibi geldi bana başta ama sonra ikinin karesi, üçün karesi, dördün karesi var içlerinde hep. Buradan yola çıkarak n^2 dedim. Birin karesi bir. Burada sonra daha ne diyeceğimi tam şey yapamamıştım ilk baktığımda. Sonra ikinin karesi olsun dedim. Dört artı bir. Üçün karesi artı iki. Dördün karesi dediğimde artı üç geliyor. O zaman şu yanlara yazdığım adım sayısının bir eksiği olmuş oluyor. Birin karesi bir (artı), bir eksi bir, bir oluyor. İkinin karesi dört, iki eksi birden, beş. On bir, on dokuz diye gidiyor.

4. 5. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Artarak Değişen Şekil Örüntüsünde Kullandıkları Stratejilere İlişkin Bulgular

Örüntü Testi'ndeki yedinci soruda öğretmen adaylarından ilk üç adımı verilmiş artarak değişen şekil örüntüsünü genellemeleri istenmiştir. On üç öğretmen adayı soruyu cevaplamamıştır. Soruyu cevaplayanların 22 tanesi görsel, 15 tanesi sayısal yaklaşımı benimsemiştir. Sayısal yaklaşımı benimseyen öğretmen adaylarından bazıları sadece yakın adımı hesaplamış, bazıları yakın adımın yanı sıra uzak adıma ya da genel terime ulaşmış, bazılarıysa tüm alt soruları cevaplamıştır. Ayrıca sayısal yaklaşımda 3 öğretmen adayı hatalı genelleme yapmıştır. Öğretmen adaylarının stratejileri Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7. Artarak Değişen Şekil Örüntüsünü Genellemede Kullanılan Stratejiler

Sayısal Yaklaşım	<i>n</i>
<i>Sadece yakın adımı hesaplama</i>	
✓ Ardışık toplama	3
✓ Farkların toplamını ekleme	1
<i>Yakın adımı ve uzak adımı/ genel terimi hesaplama</i>	3
<i>Tüm alt soruları cevaplama</i>	
✓ Adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi inceleme	2
✓ Farkların toplamını ekleme	3
Yanlış Cevaplar	3
Toplam	15

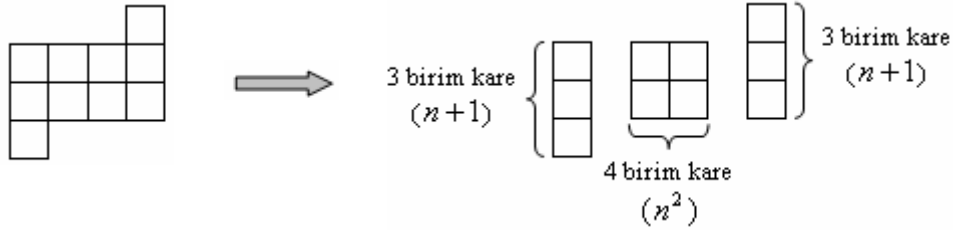
Görsel Yaklaşım	<i>n</i>
✓ Ekleyerek Yapılandırma	16
✓ Yardımcı Şekil Kullanma	2
✓ Şekli Yeniden Yapılandırma	2
✓ Karma Strateji	2
Toplam	22

Klinik görüşmeye katılan Ö45, Ö46, Ö47, Ö48 ve Ö50 ekleyerek yapılandırma stratejisiyle genelleme yapan; Ö49 ise soruyu cevaplamayan öğretmen adaylarındandır.

Görsel Yaklaşım Altında Kullanılan Stratejiler

Görsel yaklaşımı benimseyen 22 öğretmen adayı vardır. Bu yaklaşımda şekillerin nasıl yapılandırıldığı araştırılmış ve yakın- uzak adımın belirlenmesinde bu yapısal özelliklerden yararlanılmıştır. Tablo 7’de görüldüğü gibi görsel yaklaşım kapsamında ekleyerek yapılandırma, yardımcı şekil kullanma ve şekli yeniden yapılandırma stratejileri ile karma bir strateji kullanılmıştır.

Ekleyerek yapılandırma stratejisi (EYS) ile genelleme yapan 16 öğretmen adayı vardır. Bu strateji kapsamında iki farklı strateji kullanılmıştır. İlk stratejide; şekillerin bir kare ve bu karenin iki yanında yer alan dikdörtgenlerden oluştuğu görülmektedir. Örüntünün ikinci adımı bu strateji ile Şekil 128’deki gibi yapılandırılır.

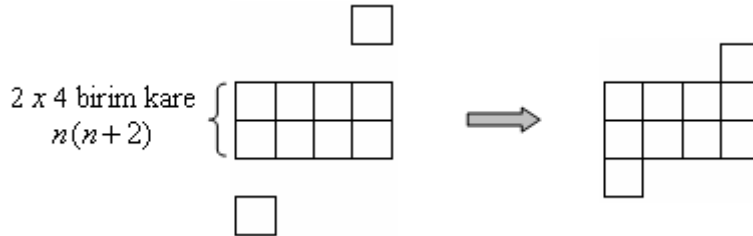


Şekil 128. EYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin model

Şekil 128’deki karenin bir kenarı, adım sayısı kadar birim kareden oluşur. Bu karedeki birim kare sayısı, karenin alanına eşittir. Karenin sağında ve solunda yer alan dikdörtgenlerde ise adım sayısının bir fazlası kadar birim kare vardır. Örüntünün herhangi bir adımındaki toplam birim kare sayısı bu kare ve dikdörtgenlerdeki birim kare sayıları toplanarak hesaplanır. Buradan örüntünün genel formülü için $n^2 + 2(n+1)$ eşitliği yazılabilir. Soruyu bu stratejiyle çözen üç öğretmen adayı vardır. Bu öğretmen adaylarından biri olan Ö47’nin açıklamaları şöyledir:

Ö47 : Burada iki tane 2, arada bir tane var. Önce bir yazayım, ne çıkabilir diye düşündüm ($2 \cdot 2 + 1$ yazıyor). İki tane 3, arada iki tane 2 ($2 \cdot 3 + 2 \cdot 2$ yazıyor). İki tane 4 var, arada üç tane 3 ($2 \cdot 4 + 3 \cdot 3$ yazıyor). Bu şekilde giden bir ilişki var... (Bu sayılara nasıl ulaştığını şekil üzerinde göstererek anlatıyor)... O zaman şurası şey oluyor; 4, 6, 8 diye gittiği için şu kısma (dikdörtgenlerdeki birim karelere) $2n + 2$ dedim. Sonra şu artı kısma da (ortadaki kareye); burası hep birin karesi bir, ikinin karesi, üçün karesi, dördün karesi diye gideceği için n^2 . Adım sayımız zaten n olduğu için n yerine 1 koydum; iki kere iki dört, artı bir, beş. n yerine ikinci adımı koydum; iki kere iki dört, iki daha altı, ikinin karesi dört, on (kuralın doğruluğunu test ediyor). Böyle gidiyor.

Ekleyerek yapılandırma stratejisi kapsamında incelenen ikinci stratejide ise şekillerin, bir dikdörtgen ve bu dikdörtgene eklenen iki birim kareden oluştuğu görülmektedir. Örüntünün ikinci adımı bu strateji ile Şekil 129'daki gibi yapılandırılır.



Şekil 129. EYS kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model

Soldaki sütununun en altında ve sağdaki sütununun en üstünde yer alan birim kareler ayrı parçalar olarak düşünüldüğünde; bu birim karelerin arasında, kısa kenarı adım sayısına ve uzun kenarı adım sayısının 2 fazlasına eşit bir dikdörtgenin olduğu görülür. Bu dikdörtgendeki toplam birim kare sayısı, n adım sayısını göstermek üzere dikdörtgenin alanına yani $n(n+2)$ 'ye eşittir. Alttaki ve üstteki birer birim karenin eklenmesiyle örüntünün genel formülü $n(n+2)+2$ olarak bulunur. Bu stratejiyi Ö45, Ö46, Ö48 ve Ö50'nin de dâhil olduğu 13 öğretmen adayı kullanmıştır. Bunlardan Ö45'in çözümü şu şekildedir:

Ö45 : Burada baktığım zaman bu iki çıkıntı olan kare hepsinde sabit (en alttaki ve en üstteki birer kare). Birinci adımda yatayda üç tane kutu varmış. İkinci adımda dört. Yani bir sonrakinde de beş. Demek ki diyorum ki her adımda bir tane kutu artıyor. Dikey olarak düşündüğüm zaman da burada da ayı şekilde bir kutu artıyor. Ama satır olarak düşünüyorum, bir satır üste eklemiş oldum. Bir sonrakinde de bir satır eklemiş oldum. Yani burada adım sayımla şöyle bir denklem buluyorum; birinci basamak için bir çarpı, kaç kutum var başlangıçta üç, şu iki kutu zaten sabit olduğu için ekliyorum ($1 \cdot 3 + 2$ yazıyor). İkinci basamak için de şöyle diyorum; iki tane satır var, çarpı, ne yapacağım bu sefer kutu sayısı bir artacağı için üçe bir ekliyorum, iki kutum sabit ($2(3+1) + 2$ yazıyor). Yine bu şekilde yaptığım zaman üçüncüde de; üç çarpı, yataydaki kutu sayım üç artı iki, artı iki ($3(3+2) + 2$ yazıyor). Bu şekilde baktığım zaman aslında adım sayısının bir eksiğine üç eklemiş oluyorum. $n(3+n-1)$. Yani burası şöyle oluyor $n(n+2) + 2$.

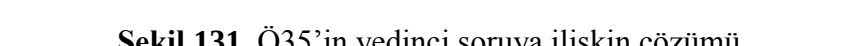
G : Bu soruya baktığında bu ikisi sabit, ortada bir dikdörtgen olarak düşündün.

Ö45 : Evet. Dikdörtgen olarak gördüğüm için zaten. Biraz alandan gittim. Dikdörtgen, baktım hepsinde o şekilde artıyor.

Tek terimi verilmiş örüntü sorusu hariç şekil örüntülerinde sayısal yaklaşımı benimsemiş olan bu öğretmen adayı, bu durumun nedenini şöyle açıklamıştır:

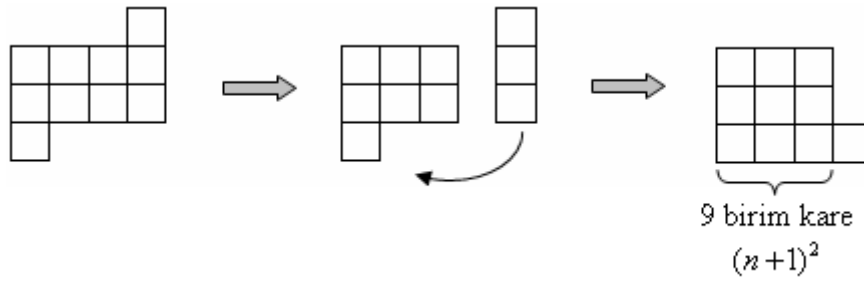
G : Daha önce de şekil örüntülerimiz vardı. Onlarda hep sayılar üzerinden gittin. Burada ise direkt şekiller üzerinden gittin.

Ö45 : Aslında şekille alakalı. Bu şekil daha basit geldi, çok daha net geldi bana. Hani direkt şekil üzerinden görebiliyorum ama mesela ilk şekilde zorlanmıştım bir adım oluşturmakta, şekle bakarak bir kural oluşturamıyordum. O yüzden sayılardan gitmek daha kolay geldi. Bir sonrakinde de şekil oluşturabiliyorum ama çizmesi falan biraz daha zahmetli geldi, sayılarla uğraşmak daha kolay geldiği için o şekilde çözdüm onları.



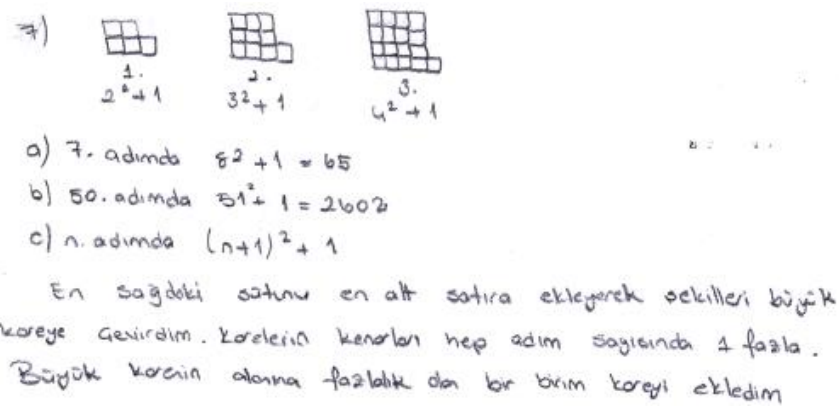
151

Tablo 7’de görüldüğü gibi, şekli yeniden yapılandırma stratejisi (ŞYYS) ile genelleme yapan iki öğretmen adayı vardır. Şekillerdeki bazı birim karelerin yerini değiştirmek suretiyle fonksiyonel ilişkinin bulunmaya çalışıldığı bu stratejinin iki farklı biçimde uygulandığı görülmüştür. Bunlardan ilkinde; sağdaki sütun, soldaki sütunun en altında yer alan birim karenin yanına taşınmaktadır. Böylece şekil, kenar uzunluğu adım sayısının bir fazlasına eşit bir kare ve buna ekli bir birim kare haline gelmektedir. Bu strateji örüntünün ikinci adımı üzerinde Şekil 132’deki gibi temsil edilebilir.



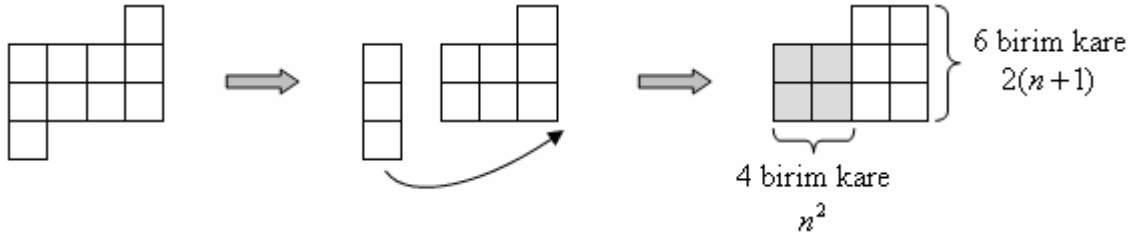
Şekil 132. ŞYYS kapsamındaki birinci stratejiye ilişkin model

Taşıma işlemi sonucunda elde edilen karenin alanı esas alınarak örüntünün kuralı için $(n+1)^2 + 1$ cebirsel ifadesi yazılabilir. Birinci stratejiyle genelleme yapan öğretmen adayının çözümü Şekil 133’deki gibidir.



Şekil 133. Ö37’nin yedinci soruya ilişkin çözümü

Şekli yeniden yapılandırma stratejisi başlığı altında incelenen ikinci strateji, Şekil 134’te modellenmiştir. Bu stratejide soldaki sütun, sağdakinin yanına taşınmaktadır. Böylece şekil, kenar uzunluğu adım sayısına eşit bir kare ile bir kenarı 2 birim ve diğer kenar uzunluğu adım sayısının bir fazlasına eşit bir dikdörtgene dönüşmektedir.

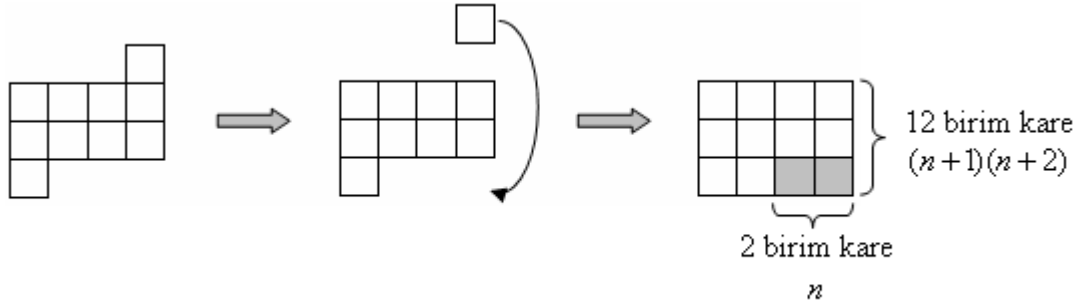


Şekil 134. ŞYYs kapsamındaki ikinci stratejiye ilişkin model

Elde edilen yeni şekildeki karenin alanı ile dikdörtgenin alanı toplanarak örüntünün kuralı bulunur. Buradan $n^2 + 2(n+1)$ formülüne ulaşılır. Bu stratejiyi kullanan öğretmen adayının çözümü Şekil 135’te verilmiştir.

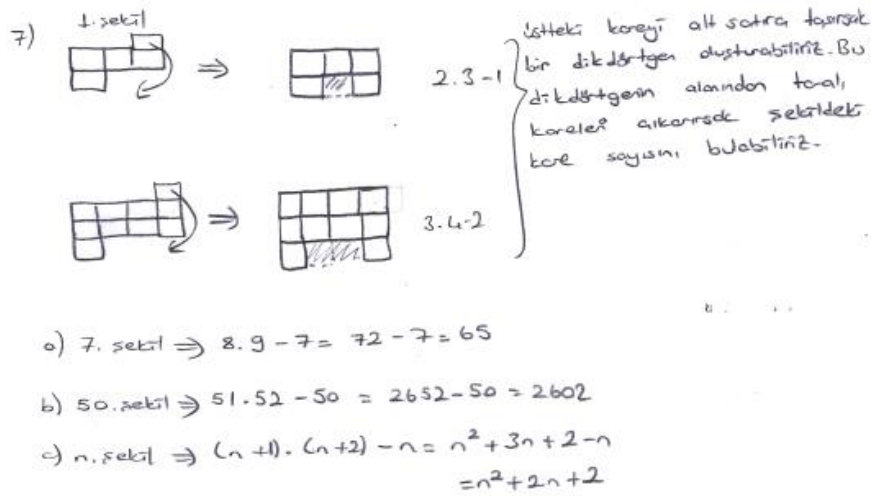
7. Her şekilde alttaki kareyi üstünün yanına taşıyarak yeni şekiller elde ettim.

sayısı kadar birim karenin çıkarılmasıyla örüntünün genel formülü $(n+1)(n+2) - n$ olarak bulunur. Ö32'nin çözümünden yararlanarak bu strateji Şekil 136'daki gibi modellenenabilir.



Şekil 136. Karma stratejiye ilişkin model

Bu stratejiyi kullanan diğer öğretmen adayının çözümü ise Şekil 137'deki gibidir.



Şekil 137. Ö10'un yedinci soruya ilişkin çözümü

Sayısal Yaklaşım Altında Kullanılan Stratejiler

Tablo 7'de görüldüğü gibi, sayısal yaklaşımı benimseyen 15 öğretmen adayı vardır ve bunlardan üçü hatalı genelleme yapmıştır. Doğru sonuçlara ulaşan 12 öğretmen adayından bazıları tüm alt soruları cevaplarken, bazıları ya bir ya da iki alt soruya cevap vermiştir.

Tüm alt soruları cevaplayabilen sadece 5 öğretmen adayı vardır. Bunlardan bir tanesi, adım sayısına karşılık gelen terim sayılarını düzenleyerek genel formüle ulaşmış, sonra bu formülü kullanarak yakın ve uzak adımı hesaplamıştır. Değişkenler arasında kat ilişkisi arayarak $n(n+2)+2$ formülüne ulaşan öğretmen adayının çözümü Şekil 138'deki gibidir.

Handwritten solution for Şekil 138:

7. 1. şekil	2. şekil	3. şekil	
5	10	17	
2+3	2+8	2+15	Formül $2+n \cdot (n+2)$
2+1.3	2+2.4	2+3.5	
a) 7. şekil	2+7.9=65		
b) 50. şekil	2+50.52=2602		

Şekil 138. Ö28'in yedinci soruya ilişkin çözümü

Terimleri düzenleyerek genelleme yapan bir başka öğretmen adayı ise değişkenler arasında kuvvet ilişkisi arayarak $(n+1)^2 + 1$ formülüne ulaşmıştır. Bu öğretmen adayının çözümü Şekil 139'da verilmiştir.

Handwritten solution for Şekil 139:

7. 1. adım	2. adım	3. adım	a) 7. adım	b) 50. adım
5	10	17	8^2+1	51^2+1
4+1	9+1	16+1	65	2602
2^2+1	3^2+1	4^2+1		

c) Her adımdaki sayı, adım sayısının 1 fazlasının karesine 1 eklenerek oluşturulmuştur. n. adımda $(n+1)^2+1 = n^2+2n+2$ birim fazladır.

Şekil 139. Ö14'ün yedinci soruya ilişkin çözümü

İki öğretmen adayı ise terimler arası farkların toplamını birinci terime ekleyerek yakın adıma ulaşmıştır. Uzak adım ve genel terim için de aynı stratejiyi sürdüren öğretmen adayları, terimler arası farkların toplamını “çift sayıların toplamı” formülünü kullanarak hesaplamışlardır. Bunlardan biri son farkın değeri için $n-1$ yerine n yazması nedeniyle genel terimde hata yapmıştır. Şekil 140'ta, bu öğretmen adayının çözümü verilmiştir.

7-) 1. adım 2. adım 3. adım 4. adım
5 5 10 7 17 9 26
5+5 5+5+7 5+5+7+9

örüntüde fark 5'ten başlayıp 2 artırarak ilerliyor, örüntü 5'ten başlıyor.

a) 7. adım için 5'e $5+7+9+11+13+15=60$ toplamını eklemeliyiz.

Toplam $5+60=65$ kare vardır.

b) 50. adım için 5'e $5+7+\dots+(49\cdot 2+3)$ toplamını ekleriz.

$$5+7+\dots+101 = 49 \cdot \left(\frac{101+5}{2} \right) = 49 \cdot 53 + 5$$

$$= 2597 + 5$$

$$= 2602$$

c) n. adım için;

$$5+7+\dots+(2n+3) = (n-1) \cdot \left(\frac{2n+3+5}{2} \right)$$

$$= (n-1) \cdot (n+4) + 1. \text{ sayı}$$

$$= n^2 + 3n - 4 + 5 = n^2 + 3n + 1$$

Şekil 140. Ö31'in yedinci soruya ilişkin çözümü

Tüm alt soruları cevaplayan diğer bir öğretmen adayı ise yakın ve uzak adım için farklı stratejiler kullanmıştır. Bu öğretmen adayı yakın adımı terimler arası farkı bir önceki terime ekleyerek bulurken, uzak adım ve genel formül için stratejisini değiştirmiştir. Öğretmen adayı n birinci terimi ve x adım sayısını göstermek üzere ilk dört terimi, birinci terim ile ardışık terimler arasındaki farkın toplamı şeklinde yazmış ve farklarda bir kat ilişkisi arayarak genel terimi $5+(x-1)(x+3)$ olarak bulmuştur. Bu öğretmen adayının çözümü Şekil 141'deki gibidir.

7-) a) 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65

b) $n, n+5, n+12, n+21$

50. adımda $n+49\cdot 53$ 'den $5+49\cdot 53$ olur.

c) 1. n

2. $n+5 = n+1\cdot 5$

3. $n+12 = n+2\cdot 6$

4. $n+21 = n+3\cdot 7$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

x $x-1$ $x+3$

x . adımda $n+(x-1)\cdot(x+3)$ olur.

$5+(x^2+2x-3)$ den

x^2+2x+2 olur.

Şekil 141. Ö40'in yedinci soruya ilişkin çözümü

Tablo 7'de görüldüğü gibi, yedi öğretmen adayı bir ya da birkaç alt soruyu cevaplamıştır. Bu öğretmen adaylarından 4 tanesi sadece yakın adıma ilişkin alt soruda çözüm yapmıştır.

Bunlardan üçü “terimler arası farkı bir önceki terime ekleme” ve biri “terimler arası farkların toplamını birinci terime ekleme” stratejisini kullanmıştır.

Üç öğretmen adayı ise yakın adımın yanı sıra uzak adım ya da genel terime ilişkin alt sorulara cevap vermiştir. Bu bağlamda 2 öğretmen adayı yakın adımı terimler arası farkı bir önceki terime ekleyerek hesaplamış, sonrasında uzak adım ya da genel terimi bulmaya çalışmış ancak sonuca ulaşamamışlardır. Örneğin Ö26, uzak adımı belirleyememiş ve terimler arasındaki farkların değişimini örüntünün kuralı olarak ifade etmiştir. Bu öğretmen adayının cevabı Şekil 142’deki gibidir.

7. a) 1. şekilde 5)5
 2. " 10)7
 3. " 17)9
 4. " 26)11
 5. " 37)13
 6. " 50)15
 7. " 65)17

c) Sayılar arasındaki farklar 5, 7, 9, ...
 olacak şekilde artıyor.

Şekil 142. Ö26’nın yedinci soruya ilişkin çözümü

Diğer öğretmen adayı ise Şekil 143’te görüldüğü gibi, uzak adımı bulmak için farkların toplamını eklemek gerektiğini yazmakla yetinmiştir.

7. a) 2) 5 10 17 26 37 50 65
 5 7 9 11 13 15
 27=65

b) Önceki terime 5, 7, 9, ... sayıları ekleniyor.
 5 + 7 + 9 + ... +
 49 sonuç

Şekil 143. Ö20’nin yedinci soruya ilişkin çözümü

Yakın adımı terimler arası farkların toplamını birinci terime ekleyerek bulan bir öğretmen adayı ise uzak adımda terimler arası farkların toplamını “toplam formülünü” kullanarak

hesaplamaya çalışmıştır. Ancak ne uzak adımı ne de genel formülü veren cebirsel ifadeyi bulabilmiştir. Bu öğretmen adayının çözümü Şekil 144'te verilmiştir.

$$\begin{array}{ll}
 7) \text{ 1. Şekilde } 5 & \\
 2. \text{ " } 10 = 5+5 & \\
 3. \text{ " } 17 = 5+5+7 & \\
 4. \text{ " } = 5+5+7+9 & \\
 5. \text{ " } = 5+5+7+9+11 & \\
 6. \text{ " } = 5+5+7+9+11+13 & \\
 a) 7. \text{ " } = 5+5+7+9+11+13+15 = 65 & \\
 b) 50. \text{ Şekilde } = 5+5+7+\dots+101 & \\
 & \begin{array}{c} 49 \\ 5 + \sum_{k=2}^{49} 2k+3 \end{array}
 \end{array}$$

Şekil 144. Ö38'in yedinci soruya ilişkin çözümü

Sayısal yaklaşımı benimseyen üç öğretmen adayı yanlış genelleme yapmıştır. Bu öğretmen adaylarından biri, önce ilk iki adımdaki şekillere karşılık gelen birim kare sayısını yazmış ve bunlar arasındaki farkı hesaplamıştır. Sonra bu farkı kat olarak alıp örüntünün genel formülünü $5n$ olarak bulmuştur. Birinci adımda 5, ikinci adımda 10 birim kare olması, elde edilen formülün doğru olduğu algısını oluşturmuş olabilir. Ayrıca öğretmen adayının üçüncü adımı göz ardı edip formülün doğruluğunu test etmemesi dikkat çekicidir. Sonuçta öğretmen adayı Şekil 145'te görüldüğü gibi, bu genel formülü kullanarak yakın ve uzak adım için yanlış değerlere ulaşmıştır.

$$\begin{array}{ll}
 7) \text{ } n=1 \text{ için } 5 & 10-5=5 \left\{ S_n \right. \\
 \text{ } n=2 \text{ için } 10 & \\
 a) 5 \cdot 7 = 35 & \\
 b) 5 \cdot 50 = 250 &
 \end{array}$$

Şekil 145. Ö30'un yedinci soruya ilişkin çözümü

Yanlış sonuç bulan öğretmen adaylarından bir diğeri de ilk iki adımdaki birim kare sayılarını dikkate alarak genelleme yapmıştır. Ancak bu öğretmen adayı ikinci adımdaki birim kare sayısını yanlış saymıştır. İkinci adım için bulduğu bu değeri kullanarak ilk iki adımdaki toplam birim kare sayısını 3'ün katlarıyla ilişkilendirmiş, bu ilişkiyi 3. adımda devam ettirmiş ve en son $3n+2$ formülüne ulaşmıştır. Burada öğretmen adayı, 3. adım için

$3 \times 3 + 2 = 11$ olarak bulduğu sonucun, örüntünün üçüncü adımında verilen şekildeki birim kare sayısına eşit olmadığına dikkat etmemiştir.

Şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne çevirmekle çözüme başlayan bir öğretmen adayı ise terimleri 2'nin kuvvetleriyle ilişkilendirdiği için yanlış genelleme yapmıştır. Burada dikkat çeken bir başka nokta ise adım sayısının tek- çift olmasına göre n . terim için kullanılacak iki genel formülün elde edilmesidir. Öğretmen adayının stratejisi Şekil 146'daki gibidir.

7. 5, 10, 17
 $2^2+1, 2^3+2, 2^4+1$
a) 7. adım $2^7+1 = 2^8+1 = 257$
b) 50. adım $2^{50}+2 = 2^{51}+2$
c) n . adım sayısı ol. $\begin{cases} 2^{(n+1)}+1 ; n \text{ tek ise} \\ 2^{(n+1)}+2 ; n \text{ çift ise} \end{cases}$

Şekil 146. Ö23'ün yedinci soruya ilişkin çözümü

Bu örüntüye ilişkin alt soruları cevaplamayan 13 öğretmen adayı vardır. Bunlardan üç tanesinin örüntüdeki şekillere karşılık gelen birim kare sayısı ile terimler arası farkları yazdıkları, fakat yakın- uzak adım ya da genel terim için bir değer bulmadıkları görülmüştür. Bu öğretmen adaylarından birinin artarak değişen sayı örüntüsünde de terimler arası farkları yazmakla yetindiği, diğerinin ise yanlış bir genelleme yaptığı tespit edilmiştir.

Klinik görüşmeye katılan Ö49 da soruyu boş bırakanlardandır. Şekilleri sayıya dönüştürmek dışında işlem yapmayan bu öğretmen adayı görüşme sırasında bir önceki soruda olduğu gibi terimler arasındaki farkı belirleyip, bu farkların toplamını birinci terime ekleyerek yakın adımı bulabilmiştir. Ancak uzak adımı ve genel terimi bulmada yine zorlanmıştır. Bu bağlamda öğretmen adayından şekilleri esas alması istenmiştir.

Ö49 : Şimdi birinci adımda beş kare varmış, ikinci adımda on kare, on yedi kare varmış.

G : Şurada (altıncı soruda) yaptığın gibi farkları toplayarak yakın adıma ulaştın.

Ö49 : Evet ulaştım.

G : Ama bunun uzak adımda etkili bir yöntem olmadığını gördük.

Ö49 : Gördük, evet.

G : Bir kural da geliştiremedik. Şimdi bir kural geliştirmek için şekilleri analiz etmeni isteyeceğim.

Ö49 : Şekilleri... (Düşünüyor) hımm. Birinci adımda 3, 1, 1 var desek. İkinci adımda 4, 4, 1, 1. Üçüncü adımda 5, 5, 5, 1, 1. Buradan yedinci adımda o zaman 9, 9... Yedi tane 9 var burada mutlaka. Yedi çarpı dokuz, iki tane de 1 var fazladan... Bunu kurallaştıracğız. Adım sayısı kadar burada (şekil üzerinde gösteriyor) yatay sıralar var. Zaten diğer 1'ler de her zaman var, yani fazlalık onlar... Kaçınıcı adımı soruyorsa mesela ellinci adımı soruyorsa; 52'den kaç tane var? Elli tane var. Bir de fazlalık 2 tane var ($52 \cdot 50 + 2$ yazıyor).

G : Bunu şimdi değişken kullanarak yazabilir misin?

Ö49 : Tamam. $a_n = (n + 2)n + 2$.

G : Daha kolay oldu değil mi bu şekilde?

Ö49 : Hiç bunları düşünmemiştim gerçekten. Ben tamamen matematikten gitmeye çalıştım. Sürekli sayılarla uğraştığımız için. Basit bakmaktansa karmaşık bakıyoruz birazcık. Şekille çözmek daha kolaymış.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

5. 1. Sonuç

Sabit değişen şekil örüntülerini genelleme sürecinde öğretmen adayları, ilköğretim öğrencileriyle gerçekleştirilmiş birçok araştırmanın bulgularında görüldüğü gibi görsel ve sayısal olmak üzere temelde iki yaklaşım benimsemişlerdir (Becker ve Rivera, 2006; Lan Ma, 2007; Orton ve Orton, 1999; Sasman vd., 1999; Stacey, 1989; Tanışlı, 2008). Rivera (2010) ile Tanışlı ve Yavuzsoy Köse (2011)'nin araştırmalarında da öğretmen adaylarının bu yaklaşımlarla genelleme yaptıkları görülmüştür. Görsel yaklaşımda şeklin yapısal özelliğine odaklanılmış ve çok sayıda strateji kullanılmıştır. Sayısal yaklaşımda ise şekil örüntüsü, sayı örüntüsüne dönüştürülmüş ve bu örüntü kullanılarak genelleme yapılmıştır.

Ardışık üç terimi verilmiş sabit değişen şekil örüntüsünün yakın ve uzak adımını bulma sürecinde öğretmen adaylarının büyük kısmı sayısal yaklaşımı benimsemiştir. Benzer bulgulara Chua ve Hoyles (2010b)'in öğretmenlerle gerçekleştirdikleri araştırmada da rastlanmıştır. Stacey (1989), model yerine nümerik ilişkilere odaklanmanın bir öğrenci güçlüğü olduğunu belirtmiştir. Bu bulgu, modeli etkili kullanamama şeklinde de yorumlanabilir (Steele ve Johanning, 2004). Rivera ve Becker (2003) lineer şekil örüntülerini genellemede görsel ve sayısal ipuçlarının etkisini incelemişler ve örüntü sorularında hem şekillere hem de bu şekillere karşılık gelen sayılara yer vermişlerdir. Araştırma bulgularında öğretmen adaylarının daha çok sayısal yaklaşımla genelleme yaptıkları ve şekilleri dikkate almadıkları görülmüştür. Bu bağlamda Rivera ve Becker (2003), öğretmen adaylarının önceki matematik deneyimlerinde sayı dizilerinin kuralını elde etmek için “sonlu fark metodu” gibi cebirsel yöntemleri sıklıkla kullandıklarını, bu

deneyimlerin de genelleme sürecinde sayısal yaklaşımların daha fazla tercih edilmesine neden olduğunu belirtmişlerdir. Diğer taraftan klinik görüşmelerde bazı öğretmen adaylarının ilk olarak şekiller üzerinden bir kural bulmaya çalıştıkları, ancak bu süreçte adım sayısı ile şekli oluşturan yapılar arasında fonksiyonel bir ilişki kuramadıkları için sayısal yaklaşıma yöneldikleri ortaya çıkmıştır. Ayrıca öğretmen adayları sayılara dayalı genelleme yapmanın kendilerine daha kolay geldiğini ve bunun bir alışkanlık olduğunu ifade etmişlerdir.

Literatürdeki araştırmalarda, bazı öğrencilerin yakın ve uzak adımı örüntünün kuralı yardımıyla belirledikleri yönünde bulgulara rastlanmıştır (Barbosa vd., 2008; Becker ve Rivera, 2006; Samson, 2007). Bu araştırmada da sayısal yaklaşımı benimseyen öğretmen adaylarından bazıları ilk olarak örüntünün herhangi bir terimini veren cebirsel ifadeyi bulmuş, yakın ve uzak adımı bu genel terim yardımıyla hesaplamışlardır. Öğretmen adayları örüntünün kuralını bulurken adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi inceleme ve aritmetik dizi formülünü kullanma stratejisini kullanmışlardır. Ayrıca bazı öğretmen adayları bir açıklama yapmadan doğrudan kuralı yazmışlardır. Klinik görüşmeden elde edilen bulgular doğrultusunda bu öğretmen adaylarının değişkenler arasındaki ilişkiyi inceleme ya da sabit farkı kat olarak alma stratejisiyle genelleme yapmış olabilecekleri düşünülmektedir.

Bazı öğretmen adayları ise soruda verilen sırayla çözüm yapmış ve önce yakın adımı, sonra uzak adımı hesaplamıştır. Bu öğretmen adaylarından bir kısmı hem yakın hem de uzak adımda aynı stratejiyi kullanırken, diğer kısmı uzak adımda stratejisini değiştirmiştir. Her iki durumda da öğretmen adayları öncelikle ardışık terimler arasındaki farkı bulmaya odaklanmışlardır. Örüntüyü yakın ve uzak adıma devam ettirirken strateji değişikliği yapmaya ve genelleme sürecinde ilk olarak terimler arası farka odaklanmaya yönelik bu bulgular literatürdeki birçok araştırmanın bulgularıyla tutarlıdır (Aslan, 2011; Bishop, 2000; Orton ve Orton, 1999; Sasman vd., 1999; Stacey, 1989; Tanışlı, 2008; Tanışlı ve Yavuzsoy Köse, 2011; Vale ve Cabrita, 2008).

Strateji değiştirmeden çözüm yapan öğretmen adaylarının tamamı hem yakın hem de uzak adımı, birçok araştırmada karşımıza çıkan aralık sayma stratejisiyle bulmuştur (Lannin vd.,

2006; Sasman vd., 1999; Tanışlı, 2008; Tanışlı ve Yavuzsoy Köse, 2011). Diğer taraftan yakın ve uzak adım için farklı stratejiler kullanan öğretmen adaylarının tamamı yakın adıma ardışık toplama stratejisiyle ulaşmıştır. Ardışık toplamanın uzak adımda etkili bir yöntem olmadığının fark edilmesi strateji değişikliği yapılmasına neden olmuştur. Bu bağlamda Orton (1999) da, ardışık toplamanın genel terimi belirlemede öğrencilere yardım etmediğini ifade etmiş ve uzak adımda öğrencilerin stratejilerinin farklılaştığını gözlemlemiştir. Uzak adımda ardışık toplama stratejisinden vazgeçen öğretmen adaylarının neredeyse tamamı aralık sayma ve aritmetik dizi formülünü kullanma stratejilerini tercih etmişlerdir (sadece bir öğretmen adayı değişkenler arasındaki ilişkiyi incelemiştir). Bu bulgular; Lannin vd. (2006)'nin, bireylerin yakın adımda yinelemeli strateji kullanma eğiliminde oldukları yönündeki bulgularını destekler niteliktedir, ancak girdi değeri olarak büyük sayıların seçildiği uzak adımların bireyleri belirgin ilişkileri incelemeye teşvik edebileceğine ilişkin görüşleriyle tutarsızlık göstermektedir.

Aritmetik dizi formülünü kullanma stratejisi ile aralık sayma stratejisi aynı temele dayanır. İki stratejide de terimler arası fark ve bu farkların toplamını belli bir terime ekleme esastır. Genelleme yaparken örüntünün bir aritmetik dizi olduğunu fark eden bazı öğretmen adayları doğrudan aritmetik dizi formülünden yararlanmışlardır. Bu öğretmen adaylarının cevapları aralık sayma stratejisi altında ele alınmamış ve “aritmetik dizi formülünü kullanma” şeklinde isimlendirilen yeni bir kategoride sınıflandırılmıştır. Aynı mantığın hâkim olduğu bu stratejiler Tanışlı ve Yavuzsoy Köse (2011)'nin çalışmasında da en çok tercih edilen strateji olmuştur. Benzer şekilde Sasman vd. (1999)'nin araştırmalarında da ardışık toplama stratejisinin örüntünün kuralını vermediğini gören öğrenciler aralık sayma stratejisine geçiş yapmışlardır. Ancak burada ilginç olan, bu durumun tablo biçiminde sunulmuş sayı örüntülerinde geçerli olması, şekil örüntülerinde ise yakın adımı sayısal yaklaşımla bulan öğrencilerin uzak adımda şekle dayalı genellemeler yapmasıdır. Bu araştırmadaki öğretmen adaylarından hiçbirisi sayısal yaklaşımdan görsel yaklaşıma geçiş yapmamıştır. İki araştırmanın bulgularındaki tutarsızlığın araştırmanın yürütüldüğü örneklemenin sınıf düzeyinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Çünkü ilköğretim öğrencileri için uzak adımı hesaplamak zorlayıcı olabilmekte ve bu noktada şekiller kuralı bulmayı kolaylaştırıcı araçlar olarak öğrencilere yardım edebilmektedir. Öğretmen adayları ise önceki deneyimleri sayesinde sayısal yaklaşımla uzak adıma ulaşabilmekte, başka bir

değişle örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi aralık sayarak ya da aritmetik dizi formülünü kullanarak kolayca bulabilmektedirler.

Carraher vd. (2008), öğrencilerin lineer bir örüntüde adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi araştırmak yerine ardışık terimler arasındaki ilişkiyi inceleme, başka bir deyişle yinelemeli strateji kullanma eğiliminde olduklarını belirtmişlerdir. Orton ve Orton (1994) yinelemeli stratejilerle genelleme yapmanın sadece öğrencilere has olmadığını, bu durumun yetişkinlerde de görülebileceğini ifade etmişlerdir. Bu soruda Orton ve Orton (1994)'u destekleyen bulgulara rastlanmıştır. Bu bağlamda öğretmen adaylarının büyük kısmının terimler arası farka odaklandığı ve yinelemeli ilişkilerin esas olduğu ardışık toplama, aralık sayma, aritmetik dizi formülünü kullanma stratejileriyle genelleme yaptığı; buna karşın az sayıda öğretmen adayının belirgin ilişki bulmaya çalıştığı saptanmıştır. Ancak Noss vd. (1997) yinelemeli ilişkileri esas almanın öğrenci hatası olarak yorumlanmaması gerektiğini ifade etmişlerdir. Lannin (2004) de, sayı örüntülerini genelleme sürecinde birçok araştırmada karşılaşılan terimler arası farka odaklanma ve ardışık toplama stratejisiyle çözüm yapmanın doğal bir eğilim olduğunu belirtmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının geçmiş deneyimlerinde lineer sayı dizilerinin (aritmetik diziler) genel kuralını elde etmede terimler arası sabit farka odaklanarak cebirsel yöntemleri kullanmaları bu durumu açıklayabilir (Rivera ve Becker, 2003). Terimler arası farktan yola çıkarak bir cebirsel ifadeye ulaşmak mümkündür. Ancak bu süreçte tek veri seti (çıktı değerleri) üzerinden bir genelleme yapıldığı düşünüldüğünde örüntünün değişkenleri arasındaki fonksiyonel ilişkinin kavranamadığı söylenebilir. Bu durum, örüntülerden cebirsel gelişime katkı sağlayacak şekilde yararlanmada engel teşkil edebilir. Ayrıca bu stratejileri kullananlar aslında cebirsel düşünme sürecinden geçmemektedir. Dolayısıyla notasyon kullanımı cebirsel düşüncenin oluşumunun başlı başına bir göstergesi değildir (Yeşildere ve Akkoç, 2011).

Ardışık üç terimi verilmiş sabit değişen şekil örüntüsünde görsel yaklaşımı benimseyen az sayıda öğretmen adayı vardır. Klinik görüşmeden elde edilen bulgular doğrultusunda bu durumun nedenlerinden birinin, şeklin nasıl yapılandırıldığına ilişkin kullanışlı bir hipotez geliştirememesi olduğu söylenebilir. Diğer taraftan görsel yaklaşımı benimsemiş olan öğretmen adaylarının şeklin yapısal özelliğini inceleyerek adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi keşfedebildikleri ve bu ilişkiyi yakın ve uzak adımı belirlemek için sürdürdükleri

görülmüştür. Ayrıca ekleyerek yapılandırma ve çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejileri altında incelenen çözümlerde 6 farklı strateji ile genelleme yapıldığı saptanmıştır.

Veri toplama aracında, terimleri ardışık olmayan iki şekil örüntüsü yer almaktadır. Bu örüntülerden birinde genel terimin, diğerinde ise yakın ve uzak adımın bulunması istenmiştir. Ardışık olmayan iki terimi verilen ve sabit değişen bu şekil örüntülerinde öğretmen adayları yine sayısal ve görsel yaklaşımla genelleme yapmışlardır. Ancak ardışık üç terimi verilmiş lineer şekil örüntüsündeki bulgularla karşılaştırıldığında bu örüntülerde sayısal yaklaşımı benimseyenlerin azaldığı görülmüştür. Ayrıca ardışık üç terimi verilmiş örüntüde hatalı genelleme yapan öğretmen adayı yokken, bu sorularda birkaç öğretmen adayının yanlış sonuçlara ulaştığı saptanmıştır.

Ardışık olmayan iki terimi verilmiş lineer şekil örüntüsünün genel terimini bulmaya yönelik soruda görsel ve sayısal yaklaşım kapsamında incelenen cevap sayısı birbirine yakındır. Ancak bu soruda görsel yaklaşımı benimseyen öğretmen adaylarının sayısı, ardışık üç terimi verilmiş lineer şekil örüntüsünde görsel yaklaşımı benimseyenlerin iki katıdır. Klinik görüşmelerden elde edilen bulgular doğrultusunda birinci sorudaki şeklin öğretmen adaylarına karmaşık geldiği ve bu nedenle öğretmen adaylarının sayılara yöneldiği; bu sorudaki şeklin ise daha kolay analiz edildiği ve bu durumun görsel genelleme yapanların artmasında etkili olduğu söylenebilir. Görsel yaklaşımda öğretmen adaylarının ekleyerek yapılandırma, çakışan parçaları çıkararak yapılandırma ve yardımcı şekil kullanma stratejileriyle genelleme yaptıkları belirlenmiştir. Bu stratejiler kapsamında toplam 8 farklı strateji kullanılmıştır. Ekleyerek yapılandırma stratejisi en çok tercih edilen strateji olmuştur.

Ardışık üç terimi verilmiş örüntüyle karşılaştırıldığında sayıları azalmış olmakla birlikte, bu soruda da terimler arasındaki farka dayalı genelleme yapan öğretmen adayları vardır. Bu bağlamda terimler arasındaki farkı belirleyebilmek için “eksik adımları tamamlayarak ardışık terimler elde edilmesi” bu örüntüye ilişkin dikkat çekici bir bulgudur. Ayrıca birkaç öğretmen adayı farkı belirlerken hata yaptığı için yanlış sonuçlara ulaşmıştır.

Ardışık olmayan iki terimi verilmiş sabit değişen şekil örüntüsünün yakın ve uzak adımını belirlemeye yönelik örüntü sorusunda öğretmen adaylarının büyük kısmı görsel yaklaşımı benimsemiştir. Bu bağlamda ardışık üç terimi verilmiş lineer şekil örüntüsünde sayısal yaklaşımı benimseyenlerin yarısının bu örüntüde görsel yaklaşımı tercih ettiği saptanmıştır. Görsel yaklaşım kapsamında ekleyerek yapılandırma, yardımcı şekil kullanma ve çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejileri kullanılmış ve toplam 6 farklı strateji ile genelleme yapılmıştır. Ekleyerek yapılandırma stratejisi ile yardımcı şekil kullanma stratejisi hemen hemen aynı oranda tercih edilmiştir. Şeklin yapısal özelliğinin bütünden çıkarılacak parçaların kolaylıkla görselleştirilmesine olanak sağladığı ve bu durumun yardımcı şekil kullanma stratejisinin fazlaca kullanılmasında etkili olduğu düşünülmektedir.

Bu soruda sayısal yaklaşımı benimseyen öğretmen adaylarından bazıları, örüntünün verilen terimlerinde adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi inceleyerek buldukları kuralla yakın ve uzak adımı hesaplamıştır. Bazı öğretmen adayları ise terimler arası sabit farkın kullanıldığı stratejilerle önce yakın, sonra uzak adıma ulaşmıştır. Bu bağlamda terimler arası farkın eksik adımları tamamlamak suretiyle belirlendiği saptanmıştır. Ayrıca yanlış genellemelerin, sadece farka odaklanmaktan ve farkı belirlemedeki hatalardan kaynaklandığı görülmüştür. Dikkat çekici bulgulardan biri, ardışık toplama stratejisini kullanan sadece birkaç öğretmen adayının olmasıdır. Bu bulgular Hershkowitz vd. (2002)'nin; “Ardışık olmayan terimler üzerinden verilen şekil örüntüleri öğrencileri yinelemeli ilişkilerden uzaklaştırıp, fonksiyonel ilişki bulmaya yönlendirir.” şeklindeki açıklamalarını destekler niteliktedir.

Yalnız bir terimi verilmiş lineer şekil örüntüsünü genellemeye yönelik bulgular ele alındığında öğretmen adaylarının, terimleri ardışık olmayan sorularda olduğu gibi daha çok görsel yaklaşımı benimsedikleri ve doğru sonuçlara ulaşma noktasında görsel yaklaşımı benimseyenlerin daha başarılı oldukları görülmüştür. Görsel yaklaşım kapsamında ekleyerek yapılandırma ve çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejileri ile genelleme yapılmış ve toplam 7 strateji kullanılmıştır. Bu öğretmen adaylarından birkaç tanesi örüntüyü yapılandırırken üst üste gelen parçaları çıkarmadığı için yanlış sonuçlara ulaşmıştır. Bulgularda şekli yeniden yapılandırma ve yardımcı şekil kullanma stratejilerine

rastlanmamıştır. Bu durum, şeklin yapısal özelliğinin örüntünün bu stratejilerle genellenmesine olanak tanımamasından kaynaklanmaktadır.

Yalnız bir terimi verilmiş lineer şekil örüntüsünde sayısal yaklaşımı benimseyen öğretmen adaylarının yarısına yakını hatalı genellemeler yapmıştır. Bu öğretmen adaylarının büyük kısmı orantısal akıl yürütme stratejisini kullandığı için yanlış sonuçlara ulaşmıştır. Birçok araştırmada (Barbosa vd., 2008; Bishop, 2000; Lannin vd., 2006; Sasman vd., 1999; Stacey, 1989) öğrencilerin sıklıkla hatalı kullandığı bir strateji olarak karşımıza çıkan orantısal akıl yürütme stratejisinin, öğretmen adayları tarafından da hatalı olarak kullanılması araştırmanın dikkat çekici bulgularından biridir. Öğretmen adayları ardışık üç terimi ya da ardışık olmayan iki terimi verilmiş örüntülerde adımlar arasındaki değişimi tespit edebilmiş ve terimler arasındaki bu farkı kullanarak istenen değerleri hesaplayabilmişti. Bu örüntüde ise sadece tek terimin verilmesi, dolayısıyla terimler arasındaki değişimin belirlenebileceği başka terimin olmaması bazı öğretmen adaylarını orantısal akıl yürütme stratejisine yönlendirmiş olabilir. Diğer taraftan sayısal yaklaşımla doğru genellemeler yapan öğretmen adaylarının ilk olarak örüntünün eksik adımlarını tamamlayarak terimler arası farkı belirlediği, daha sonra aralık sayma, aritmetik dizi formülünü kullanma ve değişkenler arasındaki ilişkiyi inceleme stratejileri ile genelleme yaptıkları tespit edilmiştir.

Sabit değişen şekil örüntülerini görsel yaklaşımla genellemeye ilişkin bulgular beraber değerlendirildiğinde, genel olarak en fazla tercih edilen stratejinin ekleyerek yapılandırma stratejisi olduğu saptanmıştır. Bu bulgu ilköğretim seviyesindeki öğrencilerle yapılan bazı araştırmaların bulgularıyla tutarlılık göstermektedir (English ve Warren, 1998; Rivera ve Becker, 2008). Ayrıca şeklin yapısal özelliğine bağlı olarak kimi zaman çakışan parçaları çıkararak yapılandırma, kimi zamansa yardımcı şekil kullanma stratejisinin ekleyerek yapılandırma stratejisinden sonra en çok kullanılan strateji olduğu görülmüştür.

Sayı örüntülerinde “adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi inceleme stratejisi” dışında kalan stratejilerde tek veri seti (terimler) esas alınarak genelleme yapılmaktadır. Dolayısıyla yinelemeli ilişkilerin kullanılması söz konusudur. Bu araştırmada öğretmen adaylarının ardışık üç terimi verilmiş lineer şekil örüntüsünde genel olarak yinelemeli

ilişkilere odaklandıkları ve yakın adımda en çok ardışık toplama stratejisinden yararlandıkları ortaya çıkmıştır. Terimlerin ardışık olarak verilmesinin dikkatleri sabit farka çektiği ve bu tür örüntülerde adımlardaki değişimin (sabit fark) daha rahat görüldüğü, bunun da bireyleri yinelemeli stratejileri kullanmaya yönlendirdiği düşünülmektedir. Görsel yaklaşım kapsamına dâhil olan stratejilerde ise şekiller analiz edilerek değişkenler arasında belirgin (fonksiyonel) ilişkiler tanımlanmaktadır. Ardışık üç terimi verilmiş lineer şekil örüntüsüyle karşılaştırıldığında, ardışık olmayan iki terimi verilmiş örüntüler ile sadece bir terimi verilmiş örüntüde sayısal yaklaşımı kullananların azaldığı ve görsel yaklaşımı benimseyenlerin başka bir deyişle fonksiyonel ilişki bulmaya dayalı stratejileri kullananların arttığı görülmüştür. Benzer bulgulara Samson (2007)'un araştırmasında da rastlanmıştır. Bu bağlamda, soru tasarımının strateji seçimini etkilediği ve bireyleri yinelemeli ilişkinin esas olduğu stratejilerden uzaklaştırdığı söylenebilir. Ayrıca Lannin vd. (2006) de bazı örüntü etkinliklerinin öğrencileri yinelemeli stratejilere, bazılarının ise değişkenler arasında fonksiyonel ilişki bulma stratejilerine teşvik ettiğini; örüntülerde ardışık olan ya da olmayan terimler ile çekici sayıların girdi değerleri olarak seçilmesinin strateji tercihinin etkilediğini ifade etmişlerdir. Araştırmada elde edilen bulgular Lannin vd. (2006)'ni destekler niteliktedir.

Sabit değişen sayı örüntüsü sorusunda öğretmen adaylarından örüntüyü hem genellemeleri hem de modellemeleri istenmiştir. Bu örüntüyü genellemeye yönelik bulgular, şekil örüntülerinde sayısal yaklaşım kapsamında elde edilen bulgularla benzerlik göstermektedir. Bu bağlamda sabit değişen sayı örüntüsünü genellerken bazı öğretmen adaylarının önce örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi bulup yakın ve uzak adımı bu kural üzerinden belirlediği, bazı öğretmen adaylarının ise yakın adımdan başlayarak çözüm yaptığı görülmektedir.

Önce kuralı bulan öğretmen adaylarının yarısından fazlası ilk olarak terimler arasındaki farkı belirlemiştir. Bunların bir kısmı genel terimi, aritmetik dizi formülünü kullanarak elde etmiştir. Bir kısmı ise doğrudan kuralı yazmıştır. Klinik görüşmeden elde edilen bulgulardan ve terimler arası farkı belirlemiş olmalarından hareketle bu öğretmen adaylarının sabit farkı kat olarak alma stratejisini kullanmış olabilecekleri düşünülmektedir. Genelleme sürecinde önce kuralı bulan diğer öğretmen adayları ise değişkenler arasındaki ilişkiyi inceleyerek genel terime ulaşmışlardır. Yakın ve uzak

adımlar, bu genel terimlerde istenenlerin yerine yazılmasıyla hesaplanmıştır. Diğer taraftan örüntüye ilişkin alt soruları çözmeye yakın adımdan başlayan öğretmen adaylarının büyük bir kısmı yakın ve uzak adımda aynı stratejiyi kullanarak, diğer kısmı ise farklı stratejilerden yararlanarak sonuca ulaşmıştır. Strateji değiştirmeyen öğretmen adayları yakın ve uzak adımda aralık sayma/ aritmetik dizi formülünü kullanma ve değişkenler arasındaki ilişkiyi inceleme stratejileri ile genelleme yapmışlardır. Strateji değişikliği yapan az sayıda öğretmen adayı vardır. Bu öğretmen adaylarının tamamı yakın adımda ardışık toplama stratejisini kullanmış, uzak adımda ise bir öğretmen adayı hariç aralık sayma stratejisinden yararlanmışlardır. Bu bulgu Tanışlı ve Yavuzsoy Köse (2011)'nin araştırmalarıyla tutarlılık göstermektedir. Sonuç olarak gerek kuralı bulmada, gerekse yakın ve uzak adımı hesaplamada öğretmen adaylarının büyük kısmının öncelikle terimler arası farka odaklandıkları, daha sonra bu farkı kullanmanın esas olduğu stratejileri kullandıkları saptanmıştır. Öğretmen adaylarının yaklaşık üçte biri ise değişkenler arasındaki fonksiyonel ilişkiyi inceleyerek genelleme yapmışlardır.

Literatürde sabit farkı kat olarak alma stratejisinin ilköğretim öğrencileri tarafından sıkça kullanıldığı rapor edilmiştir (Barbosa vd., 2008; Sasman vd., 1999; Stacey, 1989). Benzer şekilde öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilen bazı araştırmalarda da (Rivera ve Becker, 2003; Tanışlı ve Yavuzsoy Köse, 2011) örüntünün kuralını bulmak için bu stratejinin benimsendiği tespit edilmiştir. Bu strateji pratik ve hatasız bir şekilde kuralı bulmayı mümkün kılmakta ancak cebirsel düşünmeye katkı sağlamamaktadır. Bu nedenle öğretmen adaylarının cebirsel düşünmenin gelişimine yardımcı olan yöntemler benimsemeleri ve fonksiyonel ilişkileri keşfetmeye yönlendirilmeleri gerekmektedir.

Sabit değişen sayı örüntüsünü modellemeye yönelik bulgularda öğretmen adaylarının yarısının herhangi bir şekil örüntüsü oluşturmadıkları görülmüştür. Modelleme yapan öğretmen adaylarından bazılarının ise örüntüyü sadece görselleştiren, başka bir deyişle sadece sayıları temsil eden modeller çizdikleri saptanmıştır. Bu modeller kuralı bulmaya yardımcı olmadığı için öğretmen adaylarının Steele ve Johanning (2004) tarafından “örüntüye uygun model seçememe” olarak tanımlanan öğrenci güçlüğüne sahip oldukları söylenebilir. Modellemeye yönelik bu bulgular öğretmen adaylarının alan bilgilerindeki eksiliğe işaret etmektedir. Yeşildere ve Akkoç (2011)'un araştırmalarında benzer bulgulara rastlanmıştır. Söz konusu araştırmada bazı öğretmen adaylarının artarak değişen sayı

örüntüsünü, herhangi bir ölçütü göz önüne almaksızın terimi içerecek sayıda nokta, kare vb. elemanlar kullanarak modelledikleri, bazı öğretmen adaylarının model oluşturdukları ancak bu modelleri genelleme yapma sürecinde temsil biçimi olarak etkin şekilde kullanamadıkları saptanmıştır. Yeşildere ve Akkoç (2010)'un öğretmen adaylarının örüntülere ilişkin pedagojik alan bilgilerini araştırdıkları çalışmalarında da yanlış modelleme yapıldığı ve modellerin kuralı bulma yönünde değil, sadece sayıları temsil etmek için kullanıldığı; ayrıca uygun model oluşturan öğretmen adaylarının bu model yerine sayı örüntüsünü kullanarak genelleme yaptıkları dolayısıyla modelden etkili şekilde yararlanmadıkları ortaya çıkmıştır.

Sabit değişen sayı örüntüsünde tüm öğretmen adayları soruyu cevaplamış ve bunlardan sadece biri yanlış sonuçlara ulaşmıştır. Artarak değişen sayı örüntüsüne ait bulgular ele alındığında ise soruyu cevaplamayan ya da yanlış genelleme yapan öğretmen adaylarının arttığı ve bazı öğretmen adaylarının sadece yakın adımı hesapladığı görülmektedir. Bu durum, Hargreaves vd. (1999)'nin araştırma bulgularıyla tutarlılık göstermektedir. Hargreaves vd. (1999) öğrencilerin artarak değişen sayı örüntülerini devam ettirmede ve genellemede, sabit farkla değişen örüntülere göre daha çok zorlandıklarını tespit etmişlerdir.

Sadece yakın adıma ilişkin alt soruyu cevaplayan öğretmen adayları öncelikle terimler arasındaki farkları incelemiş, daha sonra ardışık toplama ya da terimler arasındaki farkların toplamını birinci terime ekleme stratejileri ile yakın adıma ulaşmışlardır. Sabit değişen örüntülerde ardışık terimler arasındaki farkın değişmemesi, farkların toplamını aralık sayma stratejisiyle kolayca bulmayı ve bu sayede değişkenler arasında fonksiyonel bir ilişki aramaya gerek kalmadan uzak adıma ulaşmayı mümkün kılmaktadır. Artarak değişen sayı örüntülerinde ise terimler arası fark sabit değildir. Bu nedenle terimler arasındaki farkların toplamını bulmak zorlaşmaktadır. Bu zorluk öğretmen adaylarının uzak adımı ve genel terimi belirleme noktasında isteksizlik göstermelerine neden olmuş olabilir. Oysa araştırmanın yapıldığı örneklemin sınıf düzeyi düşünüldüğünde farkların toplamını hesaplamamanın bir sorun teşkil etmemesi beklenir. Ancak bu öğretmen adaylarının ne uzak adıma kadar olan farkların toplamını bulma ne de adım sayısı ile terim arasında bir ilişki arama yönünde herhangi bir girişimde bulunmamaları dikkat çekicidir.

Örüntüye ilişkin tüm alt soruları cevaplayan öğretmen adaylarından bazıları aynı stratejiyle genelleme yapmış, bazıları ise yakın ve uzak adımlar için farklı stratejiler kullanmışlardır. Strateji değiştirmeden genelleme yapan öğretmen adaylarının neredeyse tamamı adım sayısı ile terimler arasındaki ilişkiyi incelemiş ve buldukları ilişkiyi hem yakın hem de uzak adımı belirlemek için devam ettirmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının tamamı doğru sonuçlara ulaşmıştır. Strateji değişikliği yapan öğretmen adayları ise yakın adımı ardışık toplama stratejisiyle hesaplamış ve diğer adımlarda terimler arasındaki farkların toplamını birinci terime ekleme stratejisiyle genelleme yapmaya çalışmışlardır. Terimler arasındaki farkların toplamını hesaplamaya çalışan beş öğretmen adayından sadece ikisi bu girişimlerinde başarılı olmuştur. Bu bulgu bazı öğretmen adaylarının alan bilgilerindeki eksikliğe işaret etmektedir.

Artarak değişen sayı örüntüsüne ilişkin dikkat çekici bulgulardan biri, hatalı genelleme yapan öğretmen adaylarının fazlalığıdır. Bu öğretmen adayları sadece ilk iki terime odaklandıkları için verilen sayı dizisini sabit değişen bir örüntü olarak algılamışlar, dolayısıyla genel terimde ve buna bağlı olarak hesaplanan yakın ve uzak adımda yanlış değerlere ulaşmışlardır. Örüntüye ilişkin bu algının, testin bu sorusuna kadar öğretmen adaylarının lineer örüntülerle uğraşmış olmalarından ve bir önceki soruda sabit değişen sayı örüntüsünün yer almasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu noktada öğretmen adaylarının buldukları kuralın doğruluğunu, örüntüde verilen diğer terimler bağlamında test etmemiş olmaları araştırmanın dikkat çekici diğer bir bulgusudur.

Artarak değişen şekil örüntüsüne yönelik bulgular ele alındığında, öğretmen adaylarından bazılarının artarak değişen sayı örüntüsündekine benzer yaklaşımlar sergiledikleri görülmektedir. Bu bağlamda artarak değişen sayı örüntüsüne cevap vermeyenlerin büyük kısmı bu soruyu da boş bırakmış, sadece yakın adımı bulanların bir kısmı da yine sadece yakın adımı hesaplamıştır.

Öğretmen adayları, lineer şekil örüntülerinde olduğu gibi bu soruda da sayısal ve görsel yaklaşımla genelleme yapmışlardır. Öğretmen adaylarının yarısına yakınının görsel yaklaşımı benimsediği ve bunların doğru sonuçlara ulaşma noktasında sayısal yaklaşımı tercih edenlerden daha başarılı olduğu tespit edilmiştir. Bu bağlamda görsel yaklaşımı

benimseyen öğretmen adaylarının tamamının doğru genellemeler yaptığı, buna karşın sayısal yaklaşımı benimseyenlerin büyük kısmının sadece yakın adımı hesaplayabildiği ve yalnız birkaç tanesinin tüm alt soruları doğru cevaplayabildiği saptanmıştır. Sayısal yaklaşımda karşılaşılan bu durum, artarak değişen örüntülerde adım sayısı ile terim arasındaki ilişkinin kolay görülememesine, dolayısıyla tüm adımlarda geçerli olacak bir kural bulmanın zor olmasına ve genel terimin lineer sayı örüntülerindeki gibi yinelemeli yöntemlerle bulunamamasına bağlanabilir. Ayrıca artarak değişen sayı örüntüsünde sadece yakın adımı hesaplayan öğretmen adaylarının yarısı ile soruyu boş bırakan ya da yanlış genelleme yapan bazı öğretmen adayları, bu örüntüde görsel yaklaşımı benimseyerek, başka bir deyişle şekilsel ipuçlarını kullanarak tüm adımlarda doğru genellemeler yapabilmektedir. Görsel yaklaşım sayesinde tüm alt sorulara doğru cevap verenlerin artmasının araştırmadaki önemli bulgulardan biri olduğu düşünülmektedir. Elde edilen bu bulgular doğrultusunda şekillerin, örüntüdeki ilişkilerin kolayca görülemediği durumlarda etkili bir temsil biçimi ve kuralı bulmaya yardımcı araçlar olarak karşımıza çıktığı söylenebilir. Bu bulgu Lan- Ma (2007)'nin araştırma bulgularıyla tutarlılık göstermektedir. Lan- Ma (2007), şekle dayalı çözümlerde öğrencilerin uzak adıma ulaşılabilindiklerini, sayısal genellemelerde ise uzak adımı belirleyemediklerini saptamıştır. Lannin vd. (2006) de şekil örüntülerinin, öğrencilerin belirgin (fonksiyonel) ilişkiler bulmalarına yardım edeceğini belirtmişlerdir.

Artarak değişen şekil örüntüsünde görsel yaklaşım kapsamında ekleyerek yapılandırma, şekli yeniden yapılandırma ve yardımcı şekil kullanma stratejileri kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının en çok tercih ettiği strateji ekleyerek yapılandırma stratejisi olmuştur. Benzer bulgulara Chua ve Hoyles (2010a) tarafından gerçekleştirilen araştırmada da rastlanmıştır. Chua ve Hoyles (2010a), ağırlıklı olarak ekleyerek yapılandırma stratejisi ile genelleme yapılmasını temel matematik kavramlarından biri olan “parça- bütün” ilişkisine bağlamaktadır. Öğretmen adaylarının geçmiş deneyimlerinden bu kavramı tanıyor olmaları, parça- bütün ilişkisinin esas olduğu ekleyerek yapılandırma stratejisinin daha çok kullanılmasının nedeni olarak görülmektedir. Ayrıca şekli yeniden yapılandırma stratejisinin daha gelişmiş bir görselleştirme yeteneği gerektirmesi ve yardımcı şekil kullanma stratejisinde büyük şekilden çıkarılacak parçaları zihinde canlandırmanın zor olması, bu genelleme yöntemlerinin ekleyerek yapılandırma stratejisinden daha az tercih edilmesine neden olabilmektedir. Çakışan parçaları çıkararak yapılandırma stratejisinin

kullanılmaması ise şeklin yapısal özelliğinin buna müsait olamamasından kaynaklanmaktadır.

Chua ve Hoyles (2010a)'ın araştırmasında, sayısal yaklaşımı benimseyen öğretmen adaylarının ikinci dereceden denklem çözümleriyle örüntünün genel terimine ulaştıklarına dair bulgulara rastlanmıştır. Ardışık terimler arasındaki farkların ikinci aşamada sabit olduğunu belirleyen bu öğretmen adayları kurala ilk olarak $an^2 + bn + c$ değerini vermişler, sonra örüntüden elde edilen sayısal ipuçlarını kullanarak örüntünün kuralını veren cebirsel ifadeyi bulabilmişlerdir. Bu çalışmada ise artarak değişen örüntülerin sadece yakın adımını hesaplayan ya da sadece terimler arasındaki farkı belirleyen ama alt soruları cevaplandırmayan öğretmen adaylarının yalnızca terimler arasındaki ilk farka odaklandıkları ve farklar arasındaki farkları incelemedikleri görülmektedir. Oysa farklar arasındaki farkların sabit olduğunun belirlenmesi örüntünün ikinci dereceden bir kuralı olduğunun anlaşılmasına olanak sağlar. Bu da terimleri bir sayının karesine göre düzenleme ya da her ne kadar cebirsel düşünmeye katkı sağlamasa da genel formülü denklem çözerek bulma yönünde bir motivasyon oluşturabilir. Bu bulgular öğretmen adaylarının artarak değişen örüntülere yönelik deneyimlerinin eksikliğine işaret etmektedir.

Rivera ve Becker (2003) ile Tanışlı ve Yavuzsoy Köse (2011)'nin araştırmalarında öğretmen adaylarından bazıları, lineer örüntülerin kuralının önceki terim ve sabit fark kullanılarak $a_n = a_{n-1} + d$ şeklinde ifade edilebileceğini belirtmişlerdir. Bu çalışmada da artarak değişen örüntülerin sadece yakın adımını hesaplayan ve uzak adım için bir çözüm yapmayan öğretmen adaylarından birkaçı, her adımda terimler arasındaki farkın arttığını ifade etmiş ve kural olarak ardışık terimler arasındaki farkı ortaya koymuşlardır.

5. 2. Öneriler

Örüntü, matematiğin merkezinde yer alan bir kavramdır. Örüntü çalışmaları matematiksel ilişkileri görmede; akıl yürütme ve genelleme yapma becerisi ile cebirsel ve fonksiyonel düşünmenin gelişiminde; değişken, eşitlik, fonksiyon ve dizi kavramlarının temellerinin atılmasında önemli bir rol üstlenmektedir. Geleceğin öğretmenlerinin matematik

öğreniminde örüntülerin yerini ve önemini fark etmeleri ve öğrencilerine yardım edebilmek için öncelikle kendilerinin çeşitli bağlamlardaki örüntü etkinlikleri ile yeterliklerini artırmaya çalışmaları gereklidir.

Şekil örüntülerinde bazı öğretmen adayları sayısal yaklaşımla genelleme yapmıştır. Bu öğretmen adayları şekilleri, değişkenler arasında bir ilişki bulma yönünde incelemek yerine sayı örüntüsüne dönüştürmek için kullanmışlardır. Modellerden örüntüyü nümerik olarak yazmada yararlanma, modelin etkili kullanılmadığını gösterir. Bu durum, örüntülere ilişkin güçlüklerden biridir. Bu güçlüklerin giderilmesi ve önlenmesi için öğretmen adaylarının görsel yaklaşımlardan haberdar edilmeleri sağlanabilir.

Gerek sayısal yaklaşımda gerekse sayı örüntüsüne yönelik bulgularda öğretmen adaylarının ağırlıklı olarak terimler arasındaki yinelemeli ilişkiye odaklandıkları görülmüştür. Yinelemeli ilişkileri inceleyerek genel terime ulaşmak mümkündür. Ancak bu tarz genellemelerde cebirsel düşünme sürecinden geçilmemektedir. Ayrıca öğrencilerin örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade edebilme becerisini geliştirmek kadar formüldeki terimlerin anlamını bilmelerini sağlamak da önemlidir. Bu bakımdan öğretmen adaylarının matematik öğretimi dersleri kapsamında adım sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi incelemeleri, şekil örüntülerinde modeli analiz etmeleri ve öğrencilerde fonksiyonel ilişki becerisinin kazanımına yardımcı olacak şekilde yetkinleşmeleri sağlanmalıdır.

Matematiksel problemler farklı yollarla çözülebilmektedir. Ancak problem çözme sürecinde öğretmenlerin öğrencilerine kendi yöntem ya da stratejilerini kullandırma eğiliminde oldukları ve öğrencilerin de genellikle öğretmenlerinin yöntemini benimsedikleri görülmektedir. Örüntü problemleriyle ilgili literatürde, öğrencilerin şekil örüntülerinde daha çok sayısal yaklaşımla genelleme yaptıkları belirtilmektedir. Chua ve Hoyles (2010b) bu durumun olası nedenlerinden birinin, sayısal yaklaşımın öğretmenler tarafından derslerde yaygın olarak kullanılması olduğunu ortaya koymuşlardır. Chua ve Hoyles (2010b)'in araştırmasında bazı öğretmenler, örüntüleri genellemede bildikleri tek metodun sayısal yaklaşım olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca öğrenciler de daha çok sayısal yaklaşımı benimsemelerinin sebebini açıklarken öğretmenleri tarafından gösterilen tek stratejinin sayısal yaklaşım olduğunu ve bu nedenle sıklıkla bu stratejiyi kullandıklarını

ifade etmişlerdir. Ancak öğrencilerin matematiksel gelişimleri için şekil örüntülerinde görsel yaklaşımların kullanılması daha önemlidir. Bu bağlamda gerek ilköğretim matematik öğretmenlerinin derslerinde kullandıkları stratejileri, gerekse aday öğretmenlerin örüntülerin kuralının nasıl bulunacağına yönelik pedagojik alan bilgilerini belirlemeyi amaçlayan çalışmalar yapılabilir ve elde edilen bulgular ne tür düzenlemeler yapılabileceği hakkında fikir verebilir.

Araştırma bulgularında bazı öğretmen adaylarının sayı örüntüsünün kuralını temsil eden bir şekil örüntüsü oluşturmada güçlük yaşadıkları görülmüştür. “Örüntüler ve İlişkiler” alt öğrenme alanındaki kazanımlardan birinin sayı örüntüsünü modelleme olduğu düşünüldüğünde, öğretmen adaylarının bu güçlüklerini gidermeye yönelik önlemler alınmasının ve modelleme çalışmaları yapılmasının önemli olduğu söylenebilir.

Öğretmen adayları sabit değişen örüntülere oranla artarak değişen örüntülerde daha çok zorlanmışlardır. Bu örüntülere yönelik bulgularda terimler arasındaki ilişkiye odaklanmanın uzak adım ve genel terimi elde etmede etkili olmadığı, buna karşın değişkenler arasındaki ilişkiyi belirleyenlerin başarılı genellemeler yaptıkları saptanmıştır. Bu bağlamda öğretmen adaylarının artarak değişen örüntülere yönelik deneyimlerinin artırılması ve genelleme sürecinde adım sayısı ile terimi ilişkilendirmeleri sağlanmalıdır.

Matematikte görselleştirmenin önemli bir yeri vardır. Görselleştirme; öğrencinin dikkatini çekmede, öğrenciyi güdülemede, öğrenmeyi somutlaştırarak anlamlı kılmada, öğrencinin kendi bilgilerini organize etmesinde ve kavramların somut ve soyut ifadelerinin ilişkilendirilmesinde yararlı bir yaklaşım olarak karşımıza çıkmaktadır (Işık ve Konyalıoğlu, 2005). Ayrıca çocukların matematiksel fikirleri ve kavramları görsel olarak kavramaya yönelik güçlü sezgilere sahip oldukları, bu nedenle de matematik eğitiminde öğrencilerin bu özelliğinden yararlanılması gerektiği ifade edilmektedir (Rivera ve Becker, 2005). Görsel akıl yürütme becerilerinin gelişiminde şekil örüntüleri etkili bir rol üstlenmektedir. Şekil örüntülerinin fonksiyonel bir ilişki bulmada da etkili olduğu göz önüne alındığında, ilköğretimde öğretmenler şekil örüntüleriyle ilgili etkinliklere ağırlık verebilir ve bu etkinlikleri öğrencilerin modeldeki görsel ipuçlarını fark edebilmelerine, şekilden cebirsel yapıyı görebilmelerine ve bu yapıyı genellemelerine olanak sağlayacak

biçimde düzenleyebilirler. Ayrıca cebirsel düşünmenin gelişimine yardımcı olmak için etkinliklerde sayılar ile şekillerin ilişkilendirilmesi ve böylelikle cebirsel ifadedeki terimlerin anlamlandırılması önemlidir.

Öğrencilerde görselleştirme, akıl yürütme, problem çözme, ilişkilendirme ve kanıtlama becerilerinin kullanımı ve gelişiminde öğretmenlerin uygun yol göstericiler ve modeller olmaları, bunun içinse özellikle şekil örüntülerini farklı stratejilerle genelleme açısından çok yönlü hale gelmeleri gereklidir. Bu da lisans eğitimiyle kazanılan deneyimlerle ilintilidir. Bu nedenle matematik öğretimiyle ilgili dersler kapsamında çeşitli örüntü çalışmalarının yapılması sağlanmalı ve genellemede kullanılan stratejilerin avantaj ve dezavantajlarının tartışıldığı ortamlar oluşturulmalıdır. Ayrıca öğretmen adaylarının görsel stratejiler hakkında bilgilendirilmesi ve ders işleyişlerinde pratik bir şekilde sonuca ulaşmaya odaklanmak yerine değişkenler arasındaki ilişkiyi incelemeye yönlendirilmeleri gereklidir.

Bu araştırmada bazı öğretmen adaylarının literatürde “öğrenci güçlükleri” olarak rapor edilen; değişkenler arasındaki ilişki yerine terimler arasındaki ilişkiye odaklanma, şekil örüntülerinde sayısal yaklaşımla genelleme yapma ve modelleri etkili kullanamama, sayı örüntüsüne uygun model oluşturamama, bazı stratejileri hatalı kullanma ve artarak değişen sayı örüntülerini genellemede zorlanma gibi güçlüklerle sahip oldukları belirlenmiştir. Cebir öğretimini daha etkin kılmak adına öğretmen adaylarının bu güçlüklerden haberdar edilmesi ve bunları gidermeye yönelik çalışmaların yapılması oldukça önemlidir.

KAYNAKLAR

Akkaya, R. (2006). *İlköğretim 6. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanında karşılaşılan kavram yanlışlarının giderilmesinde etkinlik temelli yaklaşımın etkililiği*. Yüksek Lisans Tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu.

Akkuş Çıkla, O., & Duatepe A. (2002). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme becerileri üzerine niteliksel bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23, 32- 40.

Amit, M., & Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education*, 40, 111- 129.

Aslan, R. (2011). *Örüntü kavramına ilişkin öğrenci güçlüklerini gidermeye yönelik bir ders tasarımı*. Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Barbosa, A., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Patterns and generalization: the influence of visual strategies. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 844- 851. Larnaca, Cyprus.

Barbosa, A., Vale, I., & Palhares, P. (2008). The influence of visual strategies in generalization: a study with 6th grade students solving a pattern task. *Proceedings of*

the 18th Annual Conference of the European Teacher Education Network, 71- 77.
University of Helsinki, Finland.

Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde Matematik Öğretimi (6- 8. Sınıflar)*. Ankara: Pegem A Yayıncılık.

Becker, J., & Rivera, F. (2006). Establishing and justifying algebraic generalisation at the sixth grade level. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 465- 472. Prague, Czech Republic.

Bishop, J. (2000). Linear geometric number patterns: Middle school students' strategies. *Mathematics Education Research Journal*, 12(2), 107- 126.

Blair, S. L. (2001). The importance of basic facts in mathematics. *Dissertation Abstracts International*, 62 (08), 2705A. (UMI No: 3022967).

Burns, M. (2000). *About teaching mathematics: A- K 8 research*. Sausalito, California: Math Solutions Publication.

Büyüköztürk, Ş. (2011). *Sosyal bilimler için veri analizi el kitabı: İstatistik, araştırma deseni, SPSS uygulamaları ve yorum*. Ankara: Pegem A Yayıncılık.

Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3- 22.

Chua, B. L., & Hoyles, C. (2010a). Generalisation and perceptual agility: How did teachers fare in a quadratic generalising problem? *Research in Mathematics Education*, 12(1), 71- 72.

- Chua, B. L., & Hoyles, C. (2010b). Teacher and student choices of generalising strategies: A tale of two views? *Proceedings of the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education*, 2, 24- 31. Tokyo, Japan: EARCOME.
- Chua, B. L., & Hoyles, C. (2012). Seeing through students' eyes: The best- help strategy for pattern generalisation. *12th International Congress on Mathematical Education (ICME- 12)*. Seoul, Korea.
- Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 547- 589). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Davidenko, S. (1997). Building the concept of function from students' everyday activities. *The Mathematics Teacher*, 90(2), 144- 149.
- Dede, Y. (2003). *ARCS motivasyon modeli ve öge gösterim teorisi'ne (compoment display theory) dayalı yaklaşımın öğrencilerin değişken kavramını öğrenme düzeylerine ve motivasyonlarına etkisi*. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Dede, Y., & Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 180- 185.
- Dede, Y., Yalın, H. İ., & Argün, Z. (2002, Eylül). *İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin değişken kavramının öğrenimindeki hataları ve kavram yanlışları*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulmuş bildiri, ODTÜ, Ankara.
- EARGED. (1996). *İlköğretim (5+3) matematik programı değerlendirme raporu*: Ankara.

English, L., & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher*, 91(2), 166- 170.

Ersoy, Y., & Erbaş, K. (1998, Kasım). *İlköğretim okullarında cebir öğretimi: Öğrenmede güçlükler ve öğrenci başarıları*. Cumhuriyetin 75. Yılında İlköğretim, I. Ulusal Sempozyumu'nda sunulmuş bildiri, Ankara.

Ersoy, Y., & Erbaş, K. (2002, Eylül). *Dokuzuncu sınıf öğrencilerinin eşitliklerin çözümündeki başarıları ve olası kavram yanlışları*. V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulmuş bildiri, ODTÜ, Ankara.

Frobisher, L., & Threlfall, J. (1999). Teaching and assessing patterns in number in the primary years. A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 84- 103). London: Cassel.

García Cruz, J. A., & Martínón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. *Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 329- 336. South Africa: PME.

Gardner, H. (1993). *Multiple Intelligences: The Theory in Practice*. New York: Basic Books.

Goldenberg, E. P. (1996). "Habits of Mind" as an organizer for the curriculum. *Journal of Education*, 178(1), 13- 34.

Goldenberg, E. P., Cuoco, A. A., & Mark, J. (1998). A role for geometry in general education. R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 3- 44). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D., & Threlfall, J. (1999). Children's strategies with number patterns. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67- 83). London and New York: Cassell.
- Herbert, K., & Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 3, 123- 128.
- Hershkowitz, R., Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning- the case of the matches. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(2), 255- 265.
- Hershkowitz, R., Dreyfus, T., Ben-Zvi, D., Friedlander, A., Hadas, N., Resnick, T., et al. (2002). Mathematics curriculum development for computerised environments: a designer researcher- teacher- learner activity. L.D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 657- 694). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hitt, F. (1998). The role of semiotic representations in the learning of mathematics. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(3), 23- 28.
- Işık, A., & Konyalıoğlu, A. C. (2005). Matematik eğitiminde görselleştirme yaklaşımı. *Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi*, 11, 462- 471.
- Kabael, T., & Tanışlı, D. (2010). Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim. *İlköğretim Online*, 9 (1), 213- 228.
- Kaf, Y. (2007). *Matematikte model kullanımının 6. sınıf öğrencilerinin cebir erişilerine etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

- Karasar, N. (2010). *Bilimsel araştırma yöntemi*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Kitt, N., & Leitze, R. (1992). Using Homemade Algebra Tiles to Develop Algebra and Prealgebra Concepts. *Mathematics Teacher*, 93(6), 462- 466, 520.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren* (J. Kilpatrick, & I. Wirszup, Trans.). Chicago: University of Chicago Press.
- Lan- Ma, H. (2007). The potential of patterning activities to generalization. *Proceeding of The 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 225- 232. Seoul: PME.
- Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(7), 342- 348.
- Lannin, J. K. (2004). Developing Mathematical Power by Using Explicit and Recursive Reasoning. *Mathematics Teacher*, 98 (4), 216- 223.
- Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231- 258.
- Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 3- 28.
- Ley, A. F. (2005). *A cross-sectional investigation of elementary school students' ability to work with linear generalizing patterns: The impact of format and age on accuracy and strategy choice*. Master's Thesis, University of Toronto, Canada.

- MacGregor, M., & Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal*, 7(1), 69- 85.
- Milli Eğitim Bakanlığı. (2009). *İlköğretim Matematik Dersi 6- 8. Sınıflar Öğretim Programı ve Kılavuzu*. Ankara: MEB.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 203- 233.
- Olkun, S., & Toluk Uçar, Z. (2007). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi*. Ankara: Maya Akademi.
- Olkun, S., & Yeşildere, S. (2007). *"Sınıf öğretmeni adayları için" temel matematik 1*. Ankara: Maya Akademi.
- Orton, A. (1999). Preface. A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. vii-viii). London: Cassell.
- Orton, A., & Orton, J. (1994). Student's perception and use of pattern and generalization. *Proceedings of The 18th Conference of the Psychology of Mathematics Education*, 3, 407- 414. Lisbon, Portugal.

- Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 104- 120). London: Cassel.
- Orton, J., Orton, A., & Roper, T. (1999). Pictorial and practical context and the presentation of pattern. A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 121- 136). London: Cassel.
- Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 12(3), 8- 13.
- Papic, M., & Mulligan, J. (2005). Preschoolers' mathematical patterning. P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce et al. (Eds.), *Building connections: research, theory and practice- MERGA28 (Mathematics Education Research Group of Australasia Conference Proceedings 28)*.
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297- 311.
- Reys, R. E., Suydam, M. N., Lindquist M. M., & Smith. N. L. (1998). *Helping children learn mathematics*. Boston: Allyn and Bacon.
- Rivera F. D. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics*, 73 (3), 297- 328.
- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2003). The effects of numerical and figural cues on the induction processes of preservice elementary teachers. *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, 4, 63- 70. Honolulu, Hawaii: University of Hawaii.

- Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching in The Middle School*, 11(4), 198- 203.
- Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2008). Middle school childrens' cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education*, 40, 65- 82.
- Sağlam, Y., & Bülbül, A. (2012). Üniversite öğrencilerinin görsel ve analitik stratejileri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 43, 398- 409.
- Samson, D. A. (2007). An analysis of the influence of question design on pupils' approaches to number pattern generalisation tasks. Master Thesis, Rhodes University, South Africa.
- Sasman, M., Linchevski, L., & Olivier, A. (1999). The influence of different representations on children's generalisation thinking processes. *Proceedings of the Seventh Annual Conference of the Southern African Association for research in Mathematics and Science Education*, 406- 415. Harare, Zimbabwe.
- Sasman, M., Linchevski, L., Olivier, A., & Liebenberg, R. (1998). Probing children's thinking in the process of generalisation. *Proceedings of the Fourth Annual Congress of Association for Mathematics Education of South Africa*, 210- 218. Pietersburg: University of the North.
- Schnotz, W., Zink, T., & Pfeiffer, M. (1995). Visualization in learning and instruction: effect of graphic representation formats on the structure and application of knowledge. *Research Report- 5*, Freidrich- Schiller Univesity of Jena.
- Souviney, R. J. (1994). *Learning to teach mathematics*. New York: Merrill.

- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147- 164.
- Steele, D. (2005). Using writing to access students' schemata knowledge for algebraic thinking. *School Science and Mathematics*, 103(3), 142- 154.
- Steele, D., & Johanning, D. (2004). A schematic- theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 57, 65- 90.
- Sutherland, R., & Rojano, T., (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behaviour*, 12, 353- 383.
- Tanışlı, D. (2008). *İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerinin belirlenmesi*. Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Tanışlı, D., & Olkun, S. (2009). *Basitten karmaşığa örüntüler*. Ankara: Maya Akademi.
- Tanışlı, D., & Yavuzsoy Köse, N. (2011). Lineer şekil örüntülerine ilişkin genelleme stratejileri: görsel ve sayısal ipuçlarının etkisi. *Eğitim ve Bilim*, 36 (160), 184- 198.
- Taylor Cox, J. (2003). Algebra in early years? Yes!. *National Association for the Education of Young Children*, 58(1), 14- 21.
- Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 18- 30). London and New York: Cassell.

- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234- 243.
- Usiskin, Z. (1997). Doing algebra in grades K- 4. *Teaching Children Mathematics*, 3, 346- 356.
- Vale, I., & Cabrita, I. (2008). Learning through patterns: a powerful approach to algebraic thinking. *Proceedings of the 18th Annual Conference of the European Teacher Education Network*, 63- 69. University of Helsinki, Finland.
- Van De Walle, J. A. (1998). *Elementary school mathematics: teaching developmentally*. Longman: New York.
- Van De Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics*. Boston: Allyn and Bacon.
- Warren, E. (1996). Interaction between instructional approaches, students' reasoning processes, and their understanding of elementary algebra. PhD Thesis, Queensland University of Technology, Australia.
- Warren, E. (2000). Visualisation and development of early understanding in algebra. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 273- 280. Hiroshima, Japan.
- Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 305- 312. Melbourne: PME.

- Warren, E., & Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(1), 9- 14.
- Yağbasan, R., & Gülçiçek, Ç. (2003). Fen öğretiminde kavram yanlışlarının karakteristiklerinin tanımlanması. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 13(1), 102- 120.
- Yaman, H. (2010). *İlköğretim öğrencilerinin matematiksel örüntülerdeki ilişkileri algılayışları üzerine bir inceleme*. Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.
- Yenilmez, K., & Teke, M. (2008). Yenilenen matematik programının öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerine etkisi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9(15), 229-246.
- Yeşildere, S., & Akkoç, H. (2010). Matematik öğretmen adaylarının sayı örüntülerine ilişkin pedagojik alan bilgilerinin konuya özel stratejiler bağlamında incelenmesi. *OMÜ Eğitim Fakültesi Dergisi*, 29(1), 125- 149.
- Yeşildere, S., & Akkoç, H. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30(2), 141-153.
- Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 435- 457.
- Zaskis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379- 402.

Zaskis, R., & Liljedahl, P. (2006). On the path to number theory: repeating patterns as a gateway. R. Zaskis & S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education* (pp. 99- 114). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). *Visualisation in teaching and learning mathematics*. Washington DC: Mathematical Association of America.

EKLER

EK- 1

ÖRÜNTÜ TESTİ

1. Aşağıda noktalarla oluşturulmuş bir şekil örüntüsünün ilk üç adımı verilmiştir.



a) Örüntünün 8. adımında kaç tane nokta vardır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

b) Örüntünün 50. adımında kaç tane nokta vardır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

2. Aşağıda noktalarla oluşturulmuş bir şekil örüntüsünün iki adımı verilmiştir.



Tabanı 4 noktadan oluşan şekil

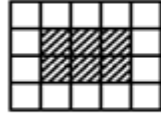


Tabanı 6 noktadan oluşan şekil

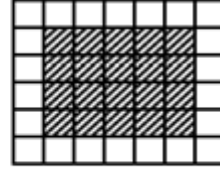
Tabanı n noktadan oluşan şekli oluşturmak için gerekli olan toplam nokta sayısını bulunuz (not: tabanda en az iki nokta olabilir).

EK- 1 (devam)

3. Aşağıda birim karelerle oluşturulmuş bir şekil örüntüsünün iki adımı verilmiştir.



2. adım

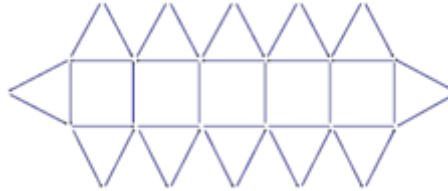


4. adım

a) 10. adımda toplam kaç beyaz kare vardır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

b) 50. adımda toplam kaç beyaz kare vardır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

4. Aşağıdaki gibi beş kare içeren şekli oluşturmak için toplam 40 çubuk kullanılmıştır.



1000 tane kare içeren şekli oluşturmak için toplam kaç çubuk gereklidir? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

5. Aşağıda bir örüntünün ilk dört adımı verilmiştir.

5, 8, 11, 14, ...

a) 10. sayı kaçtır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

b) 50. sayı kaçtır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

c) Örüntünün herhangi bir adımındaki sayıyı veren cebirsel ifadeyi yazınız.

d) Örüntünün kuralını temsil eden bir şekil örüntüsü oluşturunuz.

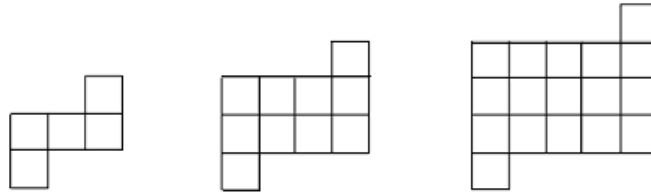
EK- 1 (devam)

6. Aşağıda bir örüntünün ilk dört adımı verilmiştir.

1, 5, 11, 19, ...

- a) 8. sayı kaçtır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.
b) 50. sayı kaçtır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.
c) Örüntünün herhangi bir adımındaki sayıyı bulmak için bir kural yazınız.
Kurala nasıl ulaştığınızı açıklayınız.

7. Aşağıda birim karelerle oluşturulmuş bir şekil örüntüsünün ilk üç adımı verilmiştir.



- a) Örüntünün 7. adımında kaç birim kare vardır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.
b) Örüntünün 50. adımında kaç birim kare vardır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.
c) Örüntünün n. adımında kaç birim kare vardır? Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.



GAZİ GELECEKTİR..