

T.C
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

**KÜBİK SİMORFİK UZAY GRUPLARININ PERMÜTASYON GRUPLARI
YARDIMIYLA ELDE EDİLİŞİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: DENİZ TÜRKKAN
DANIŞMAN: Doç. Dr. HARUN AKKUŞ

VAN – 2014

T.C
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

**KÜBİK SİMORFİK UZAY GRUPLARININ PERMÜTASYON GRUPLARI
YARDIMIYLA ELDE EDİLİŞİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DENİZ TÜRKKAN

VAN – 2014

KABUL VE ONAY SAYFASI

Fizik Anabilim Dalı'nda Doç. Dr. Harun AKKUŞ danışmanlığında, Deniz TÜRKKAN tarafından sunulan “ Kübik Simorfik Uzay Gruplarının Permütasyon Grupları Yardımıyla Elde Edilişi” isimli bu  alışma Lisansüstü Eğitim ve  đretim Yönetmeliđi'nin ilgili hükümleri gereğince /..... /..... tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Bařkan:

 mza:

.....

 ye:

 mza:

.....

 ye:

 mza:

.....

 ye:

 mza:

.....

 ye:

 mza:

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun /.... /..... tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

 mza

.....

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Deniz TÜRKKAN

ÖZET

KÜBİK SİMORFİK UZAY GRUPLARININ PERMÜTASYON GRUPLARI YARDIMIYLA ELDE EDİLİŞİ

TÜRKKAN, Deniz
Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Harun AKKUŞ
Haziran 2014, 167 sayfa

Bu çalışmada, kristal sistemlere simetri ve simetri işlemleri uygulanmasının sonucu Grup Teorisi kullanılarak matematiksel ifadelerle açıklanmıştır.

Bu çalışma salt teorik bir çalışmadır. Genel olarak grup teorisi ve onun alt dalları temel araç ve yöntemlerdir. Bu nedenle teorik yöntemler kullanılarak T , T_h nokta gruplarının simetri elemanları, mertebesi, sınıfları, elemanların matris temsilleri, kosetleri, Abelian alt grupları bulunmuştur.

Bu çalışmada, kübik simorfik uzay grupları, grup teorisi kullanılarak açık elde edilmiştir. Kübik simorfik uzay gruplarını açık elde edilişi, bu soyut matematiksel yapıların daha iyi anlaşılmasına ve bu yapıların kristal fiziğine uygulanmasına kolaylık ve yarar sağlayacaktır.

Anahtar kelimeler: Grup Teorisi, Nokta Grupları, T_h nokta grubu, T nokta grubu, Uzay Grupları, Kübik Simorfik Uzay Grupları.

ABSTRACT

OBTAINING CUBIC SYMMORPHIC SPACE GROUPS VIA PERMUTATION GROUPS

TURKKAN, Deniz
Msc Thesis, Physics
Supervisor: Ass. Prof. Dr. Harun AKKUS
June 2014, 167 pages

In this study, results of applying symmetry and symmetry operations to crystalline systems were explained by mathematical expressions using group theory.

This work is a pure theoretical study. Group theory and its sub-branches are main tools and methods in general. Thus symmetry elements, orders, classes, matrix representations of elements, cosets, abelian sub-groups of T , T_h point groups were found using theoretical methods.

Cubic symmorphic space groups were found using group theory in this study. Obtaining cubic symmorphic space groups will be useful for a better understanding these abstract mathematical structures and will provide ease and convenience in applying these structures to crystal physics.

Key words: Group theory, point groups, T_h point group, T point group, space groups, cubic symmorphic space groups.

ÖN SÖZ

Bu çalışmada, Grup Teorisi kullanılarak T , T_h nokta grupları üzerine teorik çalışmalar yapılmıştır. Kübik nokta grupları ve onların matrisleri kullanılarak kübik simorfik uzay gruplarının elemanları elde edilmiştir. Çalışma 167 sayfa olup 8 bölümden oluşmaktadır. İlk 5 bölümde çalışmanın temelini oluşturan temel bilgiler, tanımlar, yöntemler verilmiştir. 6. bölümde nokta grupları tanıtılmış ve T , T_h nokta gruplarının simetri elemanları, kosetleri, sınıfları, Abelian alt grupları, çarpım tabloları bulunmuştur. 7. bölümde uzay grupları tanıtılmış, kübik nokta grupları ve onların elemanlarının matris temsilleri kullanılarak 15 tane kübik simorfik uzay grubunun elemanları elde edilmiştir. Kübik simorfik uzay gruplarını açık elde edilişi, bu soyut matematiksel yapıların daha iyi anlaşılmasına ve bu yapıların kristal fizikine uygulanmasına kolaylık ve yarar sağlayacaktır.

Bu çalışmanın yapılmasında, bilgisini ve desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen, değerli danışman hocam Sn. Doç. Dr. Harun AKKUŞ' a teşekkür ederim.

Tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli Annem ve Babama ve canım kardeşim Emrah'a teşekkür ederim.

Deniz TÜRKKAN

VAN/ 2014

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xv
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ	3
3. KRİSTAL YAPILAR.....	6
3.1.Kübik Kristal Sistemi.....	8
3.1.1. Basit kübik yapı (P).....	8
3.1.2. Hacim merkezli kübik yapı (I).....	8
3.1.3. Yüzey merkezli kübik yapı (F).....	9
4. GRUP TEORİSİ	11
4.1. Permütasyon Grubu.....	12
4.2. Basit Bir Grup Örneği.....	13
4.3. Temel Tanımlar.....	16
4.4. Kosetler.....	17
4.5. Eşlenik ve Sınıf.....	18
4.6. Faktör Grupları.....	20
4.7.Temsil Teorisi.....	21
5. SİMETRİ VE SİMETRİ ELEMANLARI.....	25
5.1. Birim Eleman ve Özdeşlik İşlemi.....	26
5.2. Dönme Simetri Eksenini ve Döndürme İşlemi.....	27
5.3. Simetri Merkezi ve İnversiyon İşlemi.....	27
5.4. Simetri Düzlemi ve Yansıma İşlemi.....	28
5.5. Dönme – Yansıma Simetri Eksenini ve Dönme – Yansıma Simetri İşlemi.....	28

6. NOKTA GRUPLARI.....	30
6.1. Nokta Grupların Sınıflandırılması.....	30
6.1.1. Döngüsel gruplar.....	31
6.1.2. Dihedral gruplar.....	31
6.1.3. Tetrahedral gruplar.....	31
6.1.4. Oktahedral gruplar.....	31
6.1.5. İkosahedral gruplar.....	31
6.2. Nokta Grupların Adlandırılması	32
6.3. T_h Nokta Grubunun $P(8)$ Permütasyon Grubu ile İncelenmesi.....	34
6.3.1. Özdeşlik simetri elemanı (E).....	35
6.3.2. İki katlı dönme eksenini(C_2).....	36
6.3.3. Üç katlı dönme eksenini (C_3) simetri işlemleri.....	38
6.3.4. Üç katlı dönme eksenini (C'_3) simetri işlemleri.....	41
6.3.5. İnversiyon simetri işlemleri.....	44
6.3.6. İnversiyon – C_3 eksenlerinde dönme simetri işlemleri (S_6).....	45
6.3.7. İnversiyon – C'_3 eksenlerinde dönme simetri işlemleri (S'_6)	48
6.3.8. Küp için dikey simetri düzleminden yansıma simetri işlemleri.....	50
6.3.9. T_h nokta grubunun çarpım tablosu.....	53
6.3.10. T_h nokta grubu için grup aksiyomları.....	59
6.3.11. T_h nokta grubunun ve elemanlarının dereceleri.....	60
6.3.12. T_h nokta grubunun Abelian alt grupları.....	61
6.3.13. T_h nokta grubunun elemanlarının matris temsilleri.....	64
6.3.14. T_h nokta grubunun sınıfları.....	69
6.3.15. T_h nokta grubunun kosetleri.....	72
6.4. T Nokta Grubunun $P(4)$ Permütasyon Grubu ile İncelenmesi.....	76
6.4.1. Birim eleman.....	77
6.4.2. Düzgün dörtyüzlünün iki katlı dönme eksenini(C_2).....	78
6.4.3. Düzgün dörtyüzlü için üç katlı dönme eksenini (C_3) simetri işlemleri.....	80
6.4.4. Düzgün dörtyüzlünün üç katlı dönme eksenini (C'_3) simetri işlemleri.....	83
6.4.5. T nokta grubunun çarpım tablosu.....	86
6.4.6. T nokta grubu için grup aksiyomları.....	88
6.4.7. T nokta grubunun ve elemanlarının dereceleri.....	89

6.4.8. T nokta grubunun Abelian alt grupları.....	90
6.4.9. T nokta grubunun elemanlarını matris temsilleri.....	92
6.4.10. T nokta grubunun sınıfları	97
7. UZAY GRUPLARI.....	99
7.1. Uzak Grupları için Matematiksel İfadeler.....	101
7.2. Bileşik Uzak Grup Operasyonları.....	102
7.3. Simorfik ve Simorfik Olmayan Uzak Grupları.....	105
7.4. Uzak Gruplarının İsimlendirilmesi.....	107
7.5. Kübik Simorfik Uzak Grupları	108
7.5.1. P23 (195) uzak grubu.....	110
7.5.2. F23(196) uzak grubu.....	113
7.5.3. I23 (197) uzak grubu.....	117
7.5.4. Pm3 (200) uzak grubu.....	121
7.5.5. Fm3 (202) uzak grubu.....	126
7.5.6. Im3 (204) uzak grubu.....	131
7.5.7. Pm3m (221) uzak grubu.....	136
7.5.8. Fm3m (225) uzak grubu.....	145
7.5.9. Im3m (229) uzak grubu.....	146
7.5.10. P432 (207) uzak grubu.....	147
7.5.11. F432 (209) uzak grubu.....	152
7.5.12. I432 (211) uzak grubu.....	153
7.5.13. P�43m (215) uzak grubu.....	154
7.5.14. F�43m (216) uzak grubu	159
7.5.15. I�43m (217) uzak grubu.....	160
8. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	162
KAYNAKLAR.....	165
�ZGE�M��.....	167

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1. Örgü parametreleri (Tilley, 2006).....	6
Şekil 3.2. Basit küp (Tilley, 2006).....	8
Şekil 3.3. Hacim merkezli küp (Tilley, 2006).....	9
Şekil 3.4. Yüzey merkezli küp(Tilley, 2006).....	9
Şekil 4.1. Eşkenar üçgenin simetri operasyonları.....	14
Şekil 4.2. Üçgenin köşe koordinatları.....	22
Şekil 5.1. İnversiyon işlemi.....	27
Şekil 6.1. Kübik yapı.....	34
Şekil 6.2. Küpe özdeşlik elemanının etkisi.....	35
Şekil 6.3. j simetri elemanı.....	36
Şekil 6.4. k simetri elemanı.....	37
Şekil 6.5. l simetri elemanı.....	38
Şekil 6.6. a simetri elemanı.....	39
Şekil 6.7. b simetri elemanı.....	39
Şekil 6.8. c simetri elemanı.....	40
Şekil 6.9. d simetri elemanı.....	41
Şekil 6.10. g simetri elemanı.....	42
Şekil 6.11. f simetri elemanı.....	42
Şekil 6.12. i simetri elemanı.....	43
Şekil 6.13. h simetri elemanı.....	44
Şekil 6.14. I simetri operasyonu.....	45
Şekil 6.15. a^* simetri elemanı.....	46
Şekil 6.16. b^* simetri elemanı.....	46
Şekil 6.17. c^* simetri elemanı.....	47
Şekil 6.18. d^* simetri elemanı.....	47
Şekil 6.19. g^* simetri elemanı.....	48
Şekil 6.20. f^* simetri elemanı.....	49
Şekil 6.21. i^* simetri elemanı.....	49
Şekil 6.22. h^* simetri elemanı.....	50

Şekil 6.23. j^* simetri elemanı.....	51
Şekil 6.24. k^* simetri elemanı.....	52
Şekil 6.25. l^* simetri elemanı.....	52
Şekil 6.26. Birim küpün köşe kordinatları.....	64
Şekil 6.27. Düzgün dörtyüzlü.....	76
Şekil 6.28. Küp içinde düzgün dörtyüzlü.....	77
Şekil 6.29. Birim eleman.....	78
Şekil 6.30. j elemanı.....	79
Şekil 6.31. k elemanı.....	79
Şekil 6.32. l elemanı.....	80
Şekil 6.33. a elemanı.....	81
Şekil 6.34. b elemanı.....	82
Şekil 6.35. c elemanı.....	82
Şekil 6.36. d elemanı.....	83
Şekil 6.37. g elemanı.....	84
Şekil 6.38. f elemanı.....	85
Şekil 6.39. i elemanı.....	85
Şekil 6.40. h elemanı.....	86
Şekil 6.41. Birim düzgün dörtyüzlünün köşe kordinatları.....	92
Şekil 7.1. (a) Kayma düzlemi, (b) vida ekseni (Dresselhaus ve ark., 2008).....	103
Şekil 7.2. 4_1 vida ekseni.....	103
Şekil 7.3. Olası vida eksenleri (Dresselhaus ve ark., 2008).....	104

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 3.1. Kristal sistemleri (Tilley, 2006).....	7
Çizelge 3.2. Kristal sistemleri ve Bravais kafesleri (Tilley, 2006).....	10
Çizelge 4.1. $P(3)$ permütasyon grubunun çarpım tablosu (Cayley Tablosu).....	15
Çizelge 4.2. Faktör grubun çarpım tablosu.....	21
Çizelge 4.3. $P(3)$ permütasyon grubunun elemanlarının matris temsilleri.....	24
Çizelge 5.1. Simetri elemanları ve Schöenflies sembolleri.....	26
Çizelge 6.1. Kristal sistemleri ve nokta grupları ve simetri elemanları (Bradley ve Cracknell, 1972; Dresselhaus,2002).....	33
Çizelge 6.2. T_h Nokta grubunun çarpım tablosu (Cayley tablosu).....	57
Çizelge 6.3. T_h Nokta grubunun Abelian alt grupları.....	63
Çizelge 6.4. T_h Nokta grubunun 24 elemanının matris temsilleri.....	69
Çizelge 6.5. T_h Nokta grubunun sınıfları	72
Çizelge 6.6. T_h nokta grubunun Abelian alt gruplarının sağ ve sol kosetleri.....	74
Çizelge 6.7. T nokta grubunun çarpım tablosu (Cayley tablosu).....	88
Çizelge 6.8. T nokta grubunun Abelian alt grupları.....	91
Çizelge 6.9. T nokta grubunun 12 elemanının matris temsilleri.....	96
Çizelge 6.10. T nokta grubunun sınıfları.....	98
Çizelge 7.1. Bravais örgünün hacmi ve temel öteleme vektörleri (Bradley ve Cracknell, 1972).....	100
Çizelge 7.2. 73 Simorfik uzay grubu (Dresselhaus ve ark., 2008).....	106
Çizelge 7.3. $P23$ uzay grubu elemanları.....	113
Çizelge 7.4. $F23$ uzay grubu elemanları.....	117
Çizelge 7.5. $I23$ uzay grubu elemanları.....	120
Çizelge 7.6. $Pm3$ uzay grubu elemanları.....	126
Çizelge 7.7. $Fm3$ uzay grubu elemanları.....	131
Çizelge 7.8. $Im3$ uzay grubu elemanları.....	136
Çizelge 7.9. $Pm3m$ uzay grubu elemanları.....	145
Çizelge 7.10. $Fm3m$ uzay grubu elemanları.....	146
Çizelge 7.11. $Im3m$ uzay grubu elemanları.....	147

Çizelge 7.12. P_{432} uzay grubunun elemanlar.....	152
Çizelge 7.13. F_{432} uzay grubunun elemanları.....	153
Çizelge 7.14. I_{432} uzay grubunun elemanları.....	154
Çizelge 7.15. $P_{\bar{4}3m}$ uzay grubunun elemanları.....	159
Çizelge 7.16. $F_{\bar{4}3m}$ uzay grubunun elemanları.....	160
Çizelge 7.17. $I_{\bar{4}3m}$ uzay grubunun elemanları.....	161

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
(E)	Özdeşlik elemanı
(I)	Simetri merkezi (İnversiyon)
(C_n)	Dönme simetri eksen
(σ)	Simetri düzlemi
(S_n)	Dönme – Yansıma simetri eksen
(σ_h)	Yatay simetri düzlemi
(σ_v)	Düşey simetri düzlemi
(σ_d)	Dihedral simetri düzlemi
($\bullet$)	İkili işlem
($*$)	İkili işlem
$\in$	Elemanıdır
$=$	Eşittir
$\neq$	Eşit değildir
τ	Öteleme vektörü
X^{-1}	Tanımlanan işleme göre X elemanın tersi

Kısaltmalar	Açıklama
Bkz.	Bakınız
Ark.	Arkadaşları

1. GİRİŞ

Grup teorisi, matematikte ve özellikle soyut cebirde grup olarak adlandırılan soyut yapıları inceler.

Günümüzde kullanıldığı biçimiyle grup kavramı matematiğin değişik alanlarında zaman içinde ortaya çıkan ve üzerinde çalışılan fikirlerin soyutlanmasıyla geliştirilmiştir. Cayley, her grubun bir permütasyon grubuna izomorf olduğunu kanıtlanmıştır.

Günümüzde grup teorisi ve simetrinin önemi küçümsenemez bir gerçektir. Grup teorisinin temel uğraş konusu simetridir. Simetri neredeyse bütün fizik konularına uygulanabilir bir çalışma alanıdır.

Simetri grupları modern fiziğin vazgeçilmez araçlarından biri haline gelmiştir. Bir cismin veya bir sistemin simetri grubu, o cisim veya sistemi değişmez bırakan ve grup aksiyomlarını sağlayan simetri operasyonlarının kümesidir. Simetri grupları iki ana dala ayrılır: kesikli simetri grupları ve sürekli simetri grupları. Sürekli simetri grupları zaten Lie gruplarıdır. Kesikli simetri grupları ise üç tiptir. (1) sonlu nokta grupları. Bu gruplar sadece dönme, yansıma, inversiyon ve rotoinversiyon simetri operasyonlarını içerir. (2) Sonsuz örgü grupları. Bu gruplar sadece öteleme operasyonlarını içerir. (3) Sonsuz uzay grupları. Bu gruplar ilk iki grubu birleştiren ve ayrıca bir vida eksenini ve kayma-yansıma içeren gruplardır.

Vida eksenini, bir eksen etrafında dönme ve o eksene paralel ötelemedir. Kayma düzlemi ise bir düzlemden yansıma ve düzleme paralel ötelemedir.

Teorik yöntemler kullanılarak T , T_h nokta gruplarının simetri elemanları, mertebesi, sınıfları, elemanların matris temsilleri, kosetleri, Abelian alt grupları bulunmuştur. T nokta grubu kristal sistemi düzgün dörtyüzlü olan 12 elemanlı nokta grubudur. T_h nokta grubu kristal sistemi basit küp olan 24 elemanlı nokta grubudur.

Doğada 14 tane Kristal Örgü vardır. Bu 14 tane kristal örgüye nokta simetri operasyonlarını uygulayarak 32 tane uzay grubunu elde ederiz. 14 tane kristal örgüye nokta simetri operasyonlarını ve öteleme operasyonlarını uygulayarak 230 tane uzay grubu elde ederiz.

Uzay grupları simorfik ve simorfik olmayan uzay grupları diye ikiye ayrılır. Kristal örgülere nokta simetri operasyonu ve kristal kafesin genel öteleme vektörünü uygularsak simorfik uzay grubunu elde ederiz. 73 tane simorfik ve 157 tane simorfik olmayan uzay grubu vardır. Uzay grupları içerisinde 36 tane kübik uzay grubu vardır. Bunlardan 15 tanesi kübik simorfik ve 21 tanesi de kübik simorfik olmayan uzay gruplarıdır.

Bu çalışmada, kübik simorfik uzay grupları, grup teorisi kullanılarak permütasyon grupları yardımıyla elde edilmiştir. Kübik simorfik uzay gruplarının açık elde edilişi, bu soyut matematiksel yapıların daha iyi anlaşılmasına ve bu yapıların kristal fiziğine uygulanmasına kolaylık ve yarar sağlayacaktır. 15 tane kübik simorfik uzay grupları, T , T_h , T_d , O , O_h kübik nokta gruplarının elemanlarının matris temsilleri kullanılarak ve kübik simorfik uzay gruplarının ötelemesi sıfır alınarak elde edilir.

Bu çalışma salt teorik bir çalışmadır. Genel olarak grup teorisi ve onun alt dalları, temel araç ve yöntemlerdir.

2. KAYNAK BİLDİRİŞLERİ

İnsanların simetriye ilgisinin başlangıcı yüzyıllar öncesine gider, fakat simetri üzerinde modern bilimsel çalışmaların temeli Abbe Haüy tarafından başlatılmış olduğu düşünülmektedir (Bradley ve Cracknell, 1972). Bradley ve Cracknell (1972) tarafından bildirildiğine göre Haüy, bir kalsit numunesini parçalandığında onun davranışlarını incelemiştir. Kırılan küçük parçalar ve parçaların yüzeyleri arasındaki açığı inceleyerek kristalin çok sayıda özdeş hücrenin tekrarı ile oluştuğuna inanmıştır. Haüy, diğer birçok kristali araştırmıştır. Birim Hücre, kristal örgüyü tanımlayan en küçük parçadır. Birim hücrenin üç boyutta tekrarlanması kristali oluşturur ve kristalin tüm simetri elemanlarını içerir (Tilley, 2006; Kittel, 1986). Simetri çalışmaları; 19. yüzyılda nokta grupları, Bravais kafesleri ve uzay grupları hakkında düşüncelerin formülleştirilmesi ile gelişmiştir.

Bir nokta grubu, bir dizi simetri operasyonunun bir noktada davranışdır (Fjellvag, 1994) ve matematiksel anlamda bir grup oluşturması gerektiğine itaat edilir. Kristalin en az bir noktasını değişmez bırakan simetri operasyonlarından veya elemanlarından oluşan simetri gruplarına *nokta grubu* denir. Bradley ve Cracknell (1972) tarafından bildirildiğine göre Hessel, 32 nokta grubunu türetmiş ve yayınlamıştır fakat Gadolin, nokta gruplarını tekrar türetene kadar Hessel' in çalışmaları 30 yılın üzerindedir ihmal edilmiştir. O zamandan beri nokta grupları, hem kristalografik bağlamda hem de molekül ve katıların teorik çalışmaları kapsamında yoğun bir şekilde araştırılmıştır. Bradley ve Cracknell (1972) tarafından bildirildiğine göre Bhagavantam and Vankataryudu, Cracknell, Hamermesh, Heine, Tinkham gibi yazarlar nokta gruplarının grup- teorik çalışmalarının uygulamalarını teoremin genel tartışması ile ilişkili olduğunu belirtmiştir.

Öteleme simetri operasyonu dikkate alınarak grupların başka koleksiyonu da düşünülebilir. Kristalin iç yapısına bakıldığında düzenli çok sayıda atom ve molekülün düzenlenmesinden oluştuğu bulunur, o kristal içerisindeki benzer noktalar kümesini bulmak mümkündür. Bu yüzden kristal, bu noktaların herhangi birinden veya bunlardan başka diğer noktalardan bakıldığında aynı görünür. Bir kristal kararlı bir ortamda büyümeye başladığında meydana gelen yapı, birbirine özdeş yapıtaşlarının art arda

eklenmesi ile oluşur. Bu yapıtaşları tek atomlar veya atom grupları olabilir. O halde kristal, periyodik olarak dizilmiş atom gruplarından oluşan üç boyutlu bir örgüdür. Her bir kristal sınıfında atomların farklı düzenlenmesi ile 14 farklı kristal örgü oluşur (Kittel, 1986). Bravais (1850), üç boyutlu uzayda yalnızca 14 tane farklı kristal örgü olduğunu bulmuştur. Bu yapılara, ilk tarif eden Fransız fizikçi Bravais' in anısına *Bravais Örgüleri* denir.

Doğada 14 tane Bravais örgü vardır. Bu 14 tane Bravais örgüye nokta simetri operasyonları uygularsak 32 tane nokta grubunu elde ederiz. 14 tane Bravais örgüye nokta simetri operasyonları ve öteleme operasyonu uygularsak 230 tane uzay grubu elde ederiz. Yani Bravais örgüye öteleme ve nokta simetri operasyonları beraber uygulandığında uzay grupları elde edilir. Nokta grupları için tanımlanan simetri operasyonlarına ek olarak öteleme ile simetri operasyonlarını birleştirdiğimizde kayma düzlemi ve vida eksenini meydana çıkar. Bu bilgiler kullanılarak toplamda 230 tane uzay grubu bulunmuştur. Literatürde uzay gruplarıyla ilgili birçok eser bulunmaktadır (Koster, 1957; Bruns ve Glazer, 1990; Bruns and Glaser 1978; Fjellvag, 1994; Mirman 1999). Bradley ve Cracknell (1972) tarafından bildirildiğine göre Schönflies, uzay gruplarını ve nokta gruplarını ayrıntılı şekilde incelemiş, nokta grupları ve uzay gruplarının her birini isimlendirmiştir. Modern gösterimde uzay grupları için uygun ve ayrıntılı liste X ışını kristalografisi için uluslararası tablonun 1. Cildinde bulunabilir (Henry ve Lonsdale, 1965). Şu anda 9000 bileşiğin hangi uzay grubuna ait olduğu tespit edilmiştir. Uzay gruplarını, simorfik uzay grupları ve simorfik olamayan uzay grupları olarak ikiye ayrılmıştır (Dresselhaus ve Ark., 2008; Bradley ve Cracknell, 1972)

Grup, matematikte soyut cebirsel yapılardır. Bu yapılarla uğraşan teoriye de grup teorisi denir. Bu nedenle Bilgiç Grup kuramını Soyut cebir ders notları çalışmasında başarıyla işlemiştir (Bilgiç, 2012). Literatürde grup teorisi ve grup kavramı üzerine yazılmış birçok değerli eser bulunmaktadır (Bradley ve Cracknell, 1972; Cornwell, 1997; Dresselhaus ve Ark., 2008; Dresselhaus, 2002; Lederman, 1973; Souvignier, 2008). Bir geometriye indirgenen katılar, simetri işlemleri aracılığıyla matematiksel teorilere dökülür (Bradley ve Cracknell, 1972). Permütasyon ve matris işlemleri, simetri elemanları üzerinde işlem yapmak adına çok önemlidir (Riley ve Ark., 2006).

Bradley ve Cracknell (1972), grup teorisini kullanarak nokta grupları ve uzay grupları üzerine ayrıntılı araştırmalar yapmıştır. Uzay gruplarının hepsi için üreteçler kullanarak uzay gruplarının diğer elemanlarını üreteçler yardımı ile bulmuştur.

O_h Nokta grubu, $P(8)$ permütasyon grubunun bir alt grubu kullanılarak incelenmiş ve O_h nokta grubunun simetri elemanlarının permütasyon karşılıklarını yazmıştır. O_h Nokta grubunun simetri elemanlarının permütasyon karşılıkları kullanılarak çarpım tablosunu, elemanların matris temsilleri, alt gruplarını, kosetlerini, sınıflarını bulmuştur (Delibas ve ark., 2013).

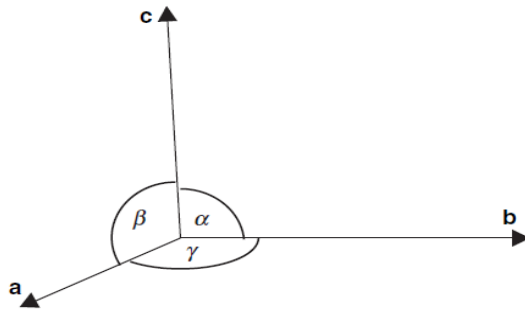
Leslie (2013), simetri ve simetri elemanlarını tanıtmış ve iki boyutlu uzay gruplarını şekillerle göstererek ayrıntılı şekilde incelemiştir. Uzay grupları için vida eksenini ve kayma düzlemini ayrıntılı şekilde açıklamıştır (Leslie 2013; Dresselhaus ve Ark., 2008).

Delibaş (2014), nokta gruplarından 48 elemanlı O_h nokta grubunu ayrıntılı şekilde incelemiştir.

3. KRİSTAL YAPILAR

Madde genelde katı, sıvı ve gaz olmak üzere üç duruma ayrılarak sınıflandırılır. Çoğu zaman bu sınıflandırmada, plazma adı verilen dördüncü bir durum vardır. Katılar dış kuvvetlerle etkilendiklerinde hacim ve biçimlerini büyük oranda korurlarken sıvılar yalnız hacimlerini, gazlar ise ne hacimlerini ne de şekillerini korurlar. Katılar belli hacim ve biçime sahiptir. Katılar, kristal katılar ve amorf katılar olmak üzere ikiye ayrılır (Kittel, 1986). *Kristal katılar*; atom, molekül veya iyonlar düzenli bir sırada (*örgü*) dizilmişlerdir. Belirli bir geometrik şekilleri ve erime noktaları vardır. Anizotropi özelliği gösterirler. *Amorf katılar*; atom, iyon veya moleküller rastgele düzenlenmişlerdir. Belirli bir geometrik şekilleri ve erime noktaları bulunmaz. Bir kristal kararlı bir ortamda büyümeye başladığında meydana gelen yapı, birbirine özdeş yapıtaşlarının art arda eklenmesi ile oluşur. Bu yapıtaşları tek atomlar veya atom grupları olabilir. O halde kristal, periyodik olarak dizilmiş atom gruplarından oluşan üç boyutlu bir örgüdür.

Birim Hücre, kristal örgüyü tanımlayan en küçük parçadır (Kittel, 1986; Tilley, 2006). Üç boyutta tekrarlanması kristali oluşturur. Kristalin tüm simetri elemanlarını içerir. Üç öteleme (a , b , c) vektörü ve üç açı (α , β , γ) ile tanımlanır (Şekil 3.1). Bu üç açı ve üç ötelemeye örgü parametreleri denir (Tilley, 2006). Yani eksenler ve eksenler arasındaki açılara *örgü parametreleri* denir. Birim hücrenin üç boyutlu düzenlenmesi ile kristal sistemi oluşur (Tilley, 2006).



Şekil 3.1. Örgü parametreleri (Tilley, 2006).

Örgü parametrelerinin farklı kombinasyonu ile yedi tane kristal sistemi (kristal sınıfı) meydana gelir (Tilley, 2006). Yedi kristal sistemi, eksenler ve eksenler arasındaki açılara göre isimlendirilmiştir. Kristal sistemleri ve örgü parametreleri arasındaki ilişki Çizelge 3.1’ de verilmiştir.

Her bir kristal sınıfında atomların farklı düzenlenmesi ile 14 farklı kristal örgüsü oluşur. 14 farklı kristal örgüsüne *Bravais Örgüleri* adı verilir (Bravais, 1850). Doğadaki bütün kristal malzemeler 7 kristal sistem ve 14 kristal kafesinden birine uyarlar. Basit Bravais örgüsü yalnızca bir örgü noktası içerir. Basit Bravais örgü P ile gösterilir. Basit olmayan Bravais örgüde birim hücre birden çok örgü noktası içerir. Birim hücrede birden fazla örgü noktası içeren Bravais örgüleri atomların yerleşme konumlarına göre isimlendirilir. Atomlar birim hücrenin yüzeyinde ve köşelerinde yer alıyorsa yüzey merkezlidir (Kittel, 1986). Yüzey merkezli Bravais örgü F ile gösterilir. Atomlar birim hücrenin hacim merkezinde ve köşelerinde yer alıyorsa hacim merkezli örgüdür. Hacim merkezli örgü I ile gösterilir (Kittel, 1986). Atomlar köşelerde ve birim hücrenin alt ve üst tabanlarında yer alıyorsa taban merkezli örgüdür. Taban merkezli örgü A, B, C ile gösterilir. Örneğin C taban merkezli, atomlar z eksenin geçtiği tabanların ortasında ve köşelerde yer alır.

Çizelge 3.1. Kristal sistemleri (Tilley, 2006)

Kristal Sistemleri	Eksenler ve Açılar arasındaki İlişki
Triklirik	$a \neq b \neq c; \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$
Monoklinik	$a \neq b \neq c; \alpha = \gamma = 90^\circ, \beta \neq 90^\circ$
Ortorombik	$a \neq b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Tetragonal	$a = b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Rombohedral	$a = b = c; \alpha = \beta = \gamma$
Hekzagonal	$a = b \neq c; \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$
Kübik	$a = b = c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$

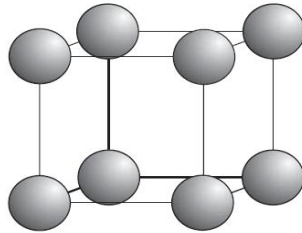
Auguste Bravais, doğadaki 7 kristal sistemine ait toplam 14 farklı tipte kristal kafesi (Bravais kafesi) bulunduğunu ortaya koymuştur. Bu yapılara, ilk tarif eden Fransız fizikçi Auguste Bravais' in anısına *Bravais Kafesi* yapısı denir (Bravais, 1850). Kristal sistemleri ve Bravais kafesleri aşağıdaki Çizelge 3.2' de verilmiştir. Kübik kristal sistemi için üç farklı Bravais Kafesi vardır. Çalışmamızın temelini kübik yapı oluşturduğu için kübik kristal sistemi ve üç farklı Bravais kafesi ayrıntılı olarak açıklanmıştır (Tilley, 2006; Leslie, 2013).

3.1.Kübik Kristal Sistemi

Kübik kristal sistemi, birim hücresi bir küp biçiminde olan kristal sistemidir. Bu yapı, kristallerin ve minerallerin sahip olduğu en yaygın ve basit şekillerden biridir. Bu kübik kristal sisteminin üç ana çeşidi vardır:

3.1.1. Basit kübik yapı(P)

Küpün her köşesinde birer atom bulunur. Gerçekte her köşedeki atom 8 komşu birim hücre arasında paylaşılmaktadır. Bu durumda köşe atomlarının toplamı $8 \times 1/8 = 1$ olur (8 köşede 1/8 er atom) .Yani birim hücredeki atom sayısı 1' dir (Şekil 3.2).

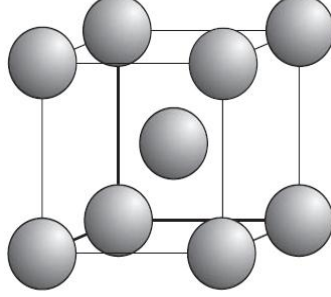


Şekil 3.2. Basit küp (Tilley, 2006).

3.1.2. Hacim merkezli kübik yapı (I)

Küpün her köşesinde birer atom ve merkezinde bir atom bulunur. Gerçekte her köşedeki atom 8 komşu birim hücre arasında paylaşılmaktadır. Bu durumda köşe atomlarının toplamı $8 \times 1/8 = 1$ 'dir (8 köşede 1/8 er atom). Küpün merkezinde bulunan

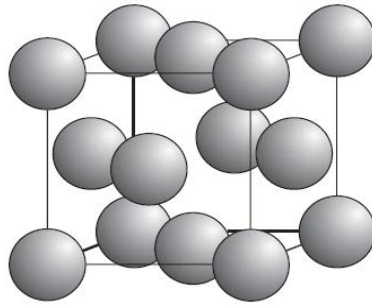
bir atomla birlikte birim hücredeki toplam atom sayısı 2 olur (Şekil 3.3). Bir atoma temas eden komşu atom sayısına *Koordinasyon Sayısı* denir. Hacim merkezli küpte merkezdeki atomun koordinasyon sayısı 8'dir.



Şekil 3.3. Hacim merkezli küp (Tilley, 2006).

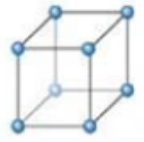
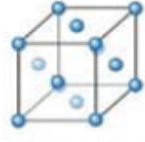
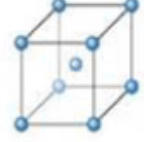
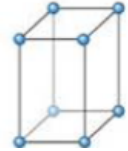
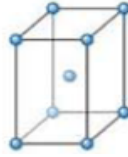
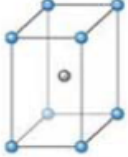
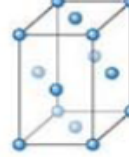
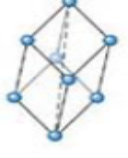
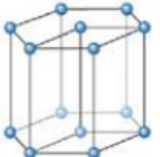
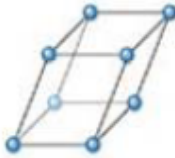
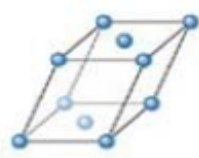
3.1.3. Yüzey merkezli kübik yapı (F)

Yüzey merkezli kübik kafeste birim hücrenin köşelerinde birer ve yüzeylerin merkezinde de birer atom vardır. Yüzey merkezlerindeki atomların yarısı göz önüne alınan birim hücreye, diğer yarısı da komşu birim hücreye aittir. Kafesteki atom sayısı yüzeylerde $6 \times \frac{1}{2} = 3$ (6 yüzey $\frac{1}{2}$ şer atom) ve köşelerde $8 \times \frac{1}{8} = 1$ (8 köşede $\frac{1}{8}$ atom). Böylece yüzey merkezli küpün birim hücredeki toplam atom sayısı 4 olur (Şekil 3.4). Yüzey merkezli küpte herhangi bir yüzeydeki atomun koordinasyon sayısı 12'dir.



Şekil 3.4. Yüzey merkezli küp (Tilley, 2006).

Çizelge 3.2. Kristal sistemleri ve Bravais kafesleri (Kittel, 1986; Leslie, 2013)

Kristal Sistemleri	Bravais Kafesler		
1) Kübik	 Basit kübik	 Yüzey merkezli kübik	 Hacim merkezli kübik
2) Tetragonal	 Basit tetragonal	 Hacim merkezli tetragonal	
3) Ortorombik	 Basit ortorombik	 Hacim merkezli	 Taban merkezli
	 Yüzeymerkezli		
4) Rombohedral	 Rombohedral		
5) Hegzagonal	 Hegzagonal		
6) Monoklinik	 Basit monoklinik	 Taban merkezli monoklinik	
7) Triklinik	 Triklinik		

4. GRUP TEORİSİ

Gruplar, matematikte soyut cebirsel yapılardır. Bu yapılarla uğraşan teoriye de grup teorisi denir (Bilgiç, 2012).

$G = \{ a, b, c, d \dots \}$ elemanlarından oluşmuş bir set olsun. G setinin elemanları sonlu da olabilir, sonsuz da olabilir. G setinin elemanları sonlu bir “ n ” değerine eşitse, G setine n mertebeden *sonlu grup* denir (Dresselhaus ve ark., 2008). Yani sonlu grubun eleman sayısına *grubun mertebesi* denir (Dresselhaus ve ark., 2008). G setinin elemanları sürekli değişkenler ya da kesikli değişkenler olabilir.

Bir setin (küme) herhangi iki elemanı, bu setin elemanı olan ya da olmayan bir elemana götüren kurala *ikili işlem* veya kısaca *işlem* denir. İşlemler; $\bullet$, $\blacksquare$, $+$, $*$, $-$, $:$, x , $q \dots$, vb. simgelerle gösterilir.

$$\bullet: G \bullet G \rightarrow G$$

G setinin grup olması için grup aksiyomlarını sağlaması gerekir (Dresselhaus ve ark., 2008; Bradley, 1972; Lederman, 1973):

1) KAPALILIK AKSİYOMU

$a, b \in G$ ise $a \bullet b = c$ ve $c \in G$ olmalıdır. Set içinde iki elemanın çarpımı yine set içine düşmelidir.

2) BİRİM ELEMAN AKSİYOMU

$a \in G$ için;

$a \bullet e = e \bullet a = a$ olacak şekilde bir birim eleman “ e ” olmalı ve set içine düşmelidir.

3) TERS ELEMAN AKSİYOMU

$a \in G$ için;

$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in G$ vardır. Her bir elemanın tersi olmalı ve bu elemanda set içine düşmelidir.

4) BİRLEŞME AKSİYOMU

$a, b, c \in G$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ olmalıdır.

G seti yukarıdaki dört aksiyomu sağlarsa G seti bir gruptur. G grubu değişme özelliği gösterirse bu gruba *Abelian grup* denir (Bradley ve Cracknell, 1972; Dresselhaus ve ark., 2008).

$a, b \in G$ ise $a \cdot b = b \cdot a$ oluyorsa G grubu Abelian gruptur.

4.1. Permütasyon Grubu

G kümesi boş olmayan bir küme olmak üzere G den G üzerine bire-bir fonksiyona *permütasyon* denir (Bilgiç, 2012; Rilley ve ark., 2006).

G boş olmayan bir küme olsun. S_G ile G den G üzerine bire-bir ve örten fonksiyonlar kümesini gösterelim. Yani

$$f \in S_G \leftrightarrow f: G \rightarrow G, f \text{ bire-bir ve örtendir.}$$

S_G kümesi bileşke işlemi altında bir gruptur. Gerçekten; G üzerinde i_G birim fonksiyonu G den G üzerine birebir ve örten fonksiyon olduğundan $i_G \in S_G$ ve $S_G \neq \emptyset$ dur. $f, g \in S_G$ için $f \circ g \in S_G$ dir. Ayrıca, o işlemin birleşme özelliğine sahip olduğu açıktır. Her $f \in S_G$ için $f^{-1} \in S_G$ ve $f \circ f^{-1} = i_G = f^{-1} \circ f$ dir. Böylece $(S_G, \circ)$ bir gruptur. $(S_G, \circ)$ grubuna *permütasyon grubu* denir (Bilgiç, 2012; Rilley ve ark., 2006).

$n \geq 1$ olmak üzere $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olsun. f 'nin X_n üzerinde bir permütasyon grubu olduğunu kabul edelim. Şu halde $f = \{(1, f(1)), (2, f(2)), \dots, (n, f(n))\}$ olur. Bu fonksiyon $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$ şeklinde de gösterebiliriz. Yani üst sıraya X_n 'nin elemanları ve alt sıraya ise her bir $i \in X_n$ için $f(i)$ elemanı yazılır.

4.2. Basit Bir Grup Örneği

P (3) permütasyon grubu basit bir grup örneğidir. Bu grup $3! = 6$ elemanlı bir gruptur. Elemanlarını yazarsak:

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & C &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & F &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad 1.1$$

Yukarıdaki her bir permütasyon P(3) grubunun elemanıdır. Bu elemanları bir eşkenar üçgeni değişmez bırakan simetri operasyonlarının oluşturduğu bir simetri grubunun elemanları olarak da düşünebiliriz. Eğer iki grubun elemanları arasında birebir karşılık gelen bir uyum varsa bu iki gruba *izomorfik* denir (Dresselhaus ve ark., 2008; Cornwell, 1997). Ancak iki grup elemanları arasında birebir karşılık gelmeyen bir uyum varsa bu iki gruba *homomorfik* denir (Dresselhaus ve ark., 2008). P(3) permütasyon grubu ile eşkenar üçgenin simetri grubu izomorfiktir.

Üçgenin köşelerini 1, 2, 3 olarak işaretleyelim. Kenarortaylara çakışık düzlemler a, b, c olsun. Bu düzlemlerin kesiştiği noktadan geçen ve üçgen düzlemine dik olan eksen de L eksenini olsun (Şekil 4.1). Şimdi bu üçgeni değişmez bırakan simetri operasyonlarını belirleyelim.

$E \rightarrow$ L eksenini etrafında 0° ya da 2π kadar proper dönme (birim eleman)

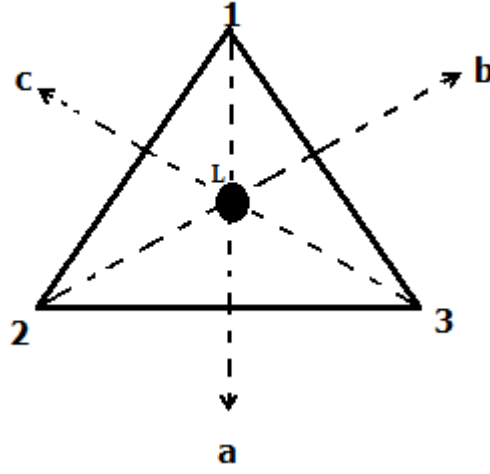
$A \rightarrow$ a düzleminden yansıma

$B \rightarrow$ c düzleminden yansıma

$C \rightarrow$ L eksenini etrafında $2\pi/3$ kadar saatin tersi yönde (improper) dönme

$D \rightarrow$ L eksenini etrafında $4\pi/3$ kadar saatin tersi yönde (improper) dönme

$F \rightarrow$ b düzleminden yansıma



Şekil 4.1. Eşkenar üçgenin simetri operasyonları.

Şimdi $P(3)$ ün ve eşdeğeri olan eşkenar üçgenin simetri elemanlarının gerçekten bir grup olduğunu ispat edelim. Bunu yapmak için bu elemanlar için Cayley tablosu olarak adlandırılan çarpım tablosunu oluşturalım.

Sonlu bir küme üzerindeki elemanların ikili işlemlerinin sonucu bir tablo ile gösterilebilir ve bu tabloya da *Cayley tablosu* denir (Dresselhaus ve ark., 2008). $P(3)$ grubunun elemanları için Cayley tablosunu oluşturalım.

Permütasyon grubunun iki elemanının çarpımı şu şekildedir:

$$B * A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = F$$

Bu işlem basamağı şu şekilde yorumlanır. Yukarıda yazılan $B * A$ permütasyon grubunun elemanlarının çarpım ifadesinde sağdaki elemandan başlanır ve soldaki elemana doğru işlem yapılır. A elemanının birinci satırından herhangi bir sayı alınır ve bu sayıya A elemanının ikinci satırında hangi sayının karşılık geldiği bulunduktan sonra bu sayının aynısı B elemanının ilk satırında bulunur ve bu sayıya B elemanının ikinci satırında karşılık gelen sayı bulunur. Sonuç elemanda A'nın ilk satırından alınan sayıya karşılık B elemanının ikinci satırında bulduğumuz sayı karşılık gelir. Bu işlem A'nın ilk satırındaki tüm sayılardan başlayarak hepsi için yapılır. Örneğin $B * A$ çarpımını yapalım. A'nın ilk satırından 3 sayısını alalım. 3 sayısına A'nın ikinci

satırında 2 sayısı karşılık gelir. B' nin ilk satırında 2 sayısı bulunur ve B' nin ikinci satırında 1'e karşılık geldiği görülür. A'nın ilk satırındaki tüm sayılar için bu işlem yapılır ve sonunda yeni bir permütasyon grubu elemanı bulunur.

Bu bilgiler ışığında tüm P(3) permütasyon grubunun elemanları için çarpım yapılırsa P(3) permütasyon grubunun Çarpım tablosu elde edilir (Çizelge 4.1). Bunun için 36 tane çarpım yapılır. Örnek olması için "A" simetri elemanın diğer tüm elemanlarla çarpımı aşağıda verilmiştir.

$$A * E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$A * A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = E$$

$$A * B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = D$$

$$A * C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = F$$

$$A * D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = B$$

$$A * F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = C$$

Çizelge 4.1. P(3) Permütasyon grubunun çarpım tablosu (Cayley Tablosu)

*	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	C	E	A	F	D
C	C	B	F	D	E	A
D	D	F	A	E	C	B
F	F	D	C	B	A	E

Çizelge 4.1'deki çarpım tablosuna bakarak P(3)'ün bir grup oluşturup oluşturmadığına bakalım. P(3) permütasyon grubu grup aksiyomlarını sağlıyorsa bir gruptur.

- 1) Tablodan görüldüğü gibi her iki elemanın çarpımı yine grup içinden bir elemandır.
- 2) Birleşme özelliği vardır. Örneğin, $(A*B)*C=A*(B*C)$
- 3) Herbir elemanın tersi vardır ve set içine düşer. $A*A=E$, $B*B=E$, $C*D=E$ den görüldüğü gibi A'nın tersi A, B'nin tersi B, C'nin tersi D, D'nin tersi C, F'nin tersi F dir.
- 4) Grup içinde çarpıma göre tanımlı bir birim elemanda vardır. E birim elemandır.

Yukarıdaki grup aksiyomlarını sağladığı için $P(3)$ permütasyon seti bir gruptur. Görüldüğü gibi $P(3)$ permütasyon grubunun elemanları ile eşkenar üçgenin simetri elemanları arasında birebir uyum vardır. İki grubun elemanları ve eleman sayıları aynı ise bu gruplara *izomorf gruplar* denir (Bradley ve Cracknell, 1972). İki grubun derecesi birbirine eşittir. (Bir grubun derecesinin tanımı aşağıda verilecektir.)

4.3. Temel Tanımlar

Tanım 1: Bir grubun mertebesi veya derecesi gruptaki eleman sayısına eşittir (Dresselhaus ve ark., 2008). Örneğin; $P(3)$ permütasyon grubunun derecesi 6 dır.

Tanım 2: Bir grup içerisinde kendi aralarında bir grup oluşturan elemanlar topluluğuna *alt grup* denir (Dresselhaus ve ark., 2008; Bradley ve Cracknell, 1972). Örneğin $P(3)$ grubunun alt grupları şunlardır: E; (E, A); (E, B); (E, F); (E, C, D) ve (E, A, B, C, D, F)

Teorem 1: Eğer sonlu bir grupta herhangi bir X elemanı yeterince kere kendisiyle çarpılırsa sonunda birim elemana ulaşılır.

$$X, X^n = E$$

Bu işlemi $P(3)$ grubu için yaparsak;

$$A^2 = E; B^2 = E; F^2 = E; C^3 = E; D^3 = E \text{ elde ederiz.}$$

Tanım 3: Bir gruptaki herhangi bir X elemanın mertebesi $X^n = E$ eşitliğindeki en küçük “n” değerine eşittir (Dresselhaus ve ark., 2008; Bradley ve Cracknell, 1972). $P(3)$ grubunun elemanlarının dereceleri şöyledir:

$$A \rightarrow 2, B \rightarrow 2, F \rightarrow 2, C \rightarrow 3, D \rightarrow 3 \text{ tür.}$$

Tanım 4: Bir grup içinde herhangi bir X elemanın periyodu $\{ E, X, X^2, X^3, \dots, X^{n-1} \}$ elemanlar seti ya da topluluğudur (Dresselhaus ve ark., 2008). Burada “n” X elemanın derecesidir. $P(3)$ permütasyon grubunun elemanlarının periyotlarını bulalım.

$$A \rightarrow \{ E, A \}$$

$$C \rightarrow \{ E, C, C^2 \} = \{ E, C, D \}$$

$$B \rightarrow \{ E, B \}$$

$$D \rightarrow \{ E, D, D^2 \} = \{ E, D, C \}$$

$$F \rightarrow \{ E, F \}$$

Görüldüğü gibi periyot bir Abelian alt grup oluşturur.

Teorem 2: Eğer; $\{E, A_1, A_2, \dots, A_h\}$ bir grubun elemanları ise, A_k bu grubun herhangi bir elemanı olmak üzere; $\{A_k E, A_k A_1, A_k A_2, \dots, A_k A_h\}$ elemanlar topluluğu, bu grubun elemanlarının her birini ancak ve ancak bir kere içerir. Bu teoreme *Yeniden Dizilim Teoremi* denir (Dresselhaus, 2002; Bradley ve Cracknell, 1972).

4.4. Kosetler

Tanım 5: Eğer B bir G grubunun alt grubu ise $X \in G$ için; $\{EX, B_1X, B_2X, \dots, B_gX\}$ elemanlar topluluğuna B alt grubunu grubunun sağ-koseti denir (Dresselhaus ve ark., 2008).

Burada, $B = \{E, B_1, B_2, \dots, B_g\}$ B'nin elemanlarıdır. Bir kosetin bir alt grup olması zorunlu değildir. Ancak X, B alt grubunun bir elemanı ise o zaman koset B alt grubunun bir alt grubu olacaktır. Sol-kosetler ise X elemanın alt grup ile soldan çarpımıdır.

Örnek:

$P(3)$ grubunun elemanlarını alalım.

$G = \{E, A, B, C, D, F\}$ dur. Bu grubun alt gruplarında birini alalım.

$$B = \{E, C, D\}$$

Şimdi G'nün tüm elemanları için B alt grubunun kosetlerini bulalım.

$X = A$ için;

$$\{E, C, D\} * A = \{E * A, C * A, D * A\} = \{A, B, F\}$$

$X = B$ için;

$$\{E, C, D\} * B = \{E * B, C * B, D * B\} = \{B, F, A\}$$

$X = C$ için;

$$\{E, C, D\} * C = \{E * C, C * C, D * C\} = \{C, D, E\}$$

$X = D$ için;

$$\{E, C, D\} * D = \{E * D, C * D, D * D\} = \{D, E, C\}$$

$X=F$ için;

$$\{E, C, D\} * F = \{E * F, C * F, D * F\} = \{F, A, B\}$$

$X=E$ için;

$$\{E, C, D\} * E = \{E, C, D\}$$

Yukarıdan görüldüğü gibi B alt grubunun sağ-kosetleri $\{A, B, F\}$, $\{E, C, D\}$ olur.

Teorem 3: Verilen bir alt grubun iki sağ koseti ya tamamen aynı elemanı içerirler ya da hiçbir ortak hiçbir elemanları olmaz (Dresselhaus ve ark., 2008).

Teorem 4: Bir alt grubun mertebesi grubun mertebesinin bir bölenidir (Dresselhaus ve ark., 2008).

Örnek:

Bir alt grubun tüm farklı kosetlerinin sayısının, bir kosetteki elemanların sayısı ile çarpımı, grubun eleman sayısına eşittir. $P(3) = \{E, A, B, C, D, F\}$ grubunun mertebesi 6, $\{E, C, D\}$ alt grubunun mertebesi 3, $\{E, A\}$ alt grubunun mertebesi 2'dir. Hem 2 hem de 3 grubun mertebesi 6'nın bölenidir.

4.5. Eşleniklik ve Sınıf

Tanım 6: $X \in G$ olmak üzere (X grubun herhangi bir elemanı);

$$B = XAX^{-1} \quad A, B \in G \text{ ise}$$

B , A 'nın eşleniğidir denir (Dresselhaus ve ark., 2008). Eğer B , A 'nın eşleniği ise A 'da B 'nin eşleniğidir. ($A = X^{-1}BX$)

Teorem 5: Eğer $A, B, C \in G$ ise B , A 'nın eşleniği ve C 'de B 'nin eşleniği ise C , A 'nın eşleniğidir (Dresselhaus ve ark., 2008).

$$B = XAX^{-1} \quad ; \quad C = YBY^{-1} \text{ ise } B \text{ ifadesinin değerini yerine yazarsak};$$

$$C = YXB X^{-1} Y^{-1} = (YX)A(XY)^{-1} \text{ ise } Z = XY$$

$$C = ZAZ^{-1} \text{ olur.}$$

Tanım 7: Verilmiş bir grup elemanın eşleniği ile elde edilen elemanlar setine bu grubun bir *sınıfı* denir (Dresselhaus ve ark., 2008).

Örneğin; $P(3)$ grubunun sınıflarını bulalım:

Birim eleman daima tek başına bir sınıf oluşturur ve bir grup oluşturabilen tek sınıftır. Çünkü diğer sınıfların hiçbirisi birim eleman içermez.

$$E * A * E^{-1} = A$$

$$A * A * A^{-1} = A * A * A = A$$

$$B * A * B^{-1} = B * A * B = F$$

$$C * A * C^{-1} = C * A * D = F$$

$$D * A * D^{-1} = D * A * C = B$$

$$F * A * F^{-1} = F * A * F = B$$

Yukarı da ki işlemlerden görüldüğü gibi $\{A, B, F\}$ bir sınıftır.

$$E * C * E^{-1} = C$$

$$A * C * A^{-1} = A * C * A = D$$

$$B * C * B^{-1} = B * C * B = D$$

$$C * C * C^{-1} = C * C * D = C$$

$$D * C * D^{-1} = D * C * C = C$$

$$F * C * F^{-1} = F * C * F = D$$

Yukarda ki işlemlerden görüldüğü gibi $\{C, D\}$ bir sınıf oluşturur. $P(3)$ grubunda üç tane sınıf vardır. Bunlar; $\{E\}$, $\{A, B, F\}$, $\{C, D\}$ 'dir. Dikkat edilirse $P(3)$ grubunun her bir sınıfı fiziksel olarak farklı simetri operasyonlarına karşılık gelir.

Teorem 6: Bir sınıfın tüm elemanları aynı mertebeye sahiptir (Dresselhaus ve ark., 2008).

Bir X elemanın mertebesi " n ", $X^n = E$ ile tanımlanır. B, A 'nın eşleniği ise;

$B = XAX^{-1}$ olacaktır.

$$B^n = (XAX^{-1})(XAX^{-1})\dots = (XA^nX^{-1}) = E$$

Tanım 8: Eğer B bir alt grup ise ve gruptaki tüm X elemanları için;

$(XBX^{-1}) = B$ ise, B alt grubuna kendine eşlenik veya invaryant alt grup denir (Dresselhaus ve ark., 2008).

Örneğin; $P(3)$ grubunun alt grubu (E, C, D) 'nin kendine eşlenik bir alt grup olduğunu ispatlayalım.

$B = (E, C, D)$ için $(XBX^{-1}) = B$ şartı $P(3)$ grubunun tüm elemanları için sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned}
E*(E, C, D) * E^{-1} &= E*(E, C, D)*E=(E*E*E, E*C*E, E*D*E)=(E, C, D)=B \\
A*(E, C, D) * A^{-1} &= A*(E, C, D)*A=(A*E*A, A*C*A, A*D*A)=(E, C, D)=B \\
B*(E, C, D) * B^{-1} &= B*(E, C, D)*B=(B*E*B, B*C*B, B*D*B)=(E, C, D)=B \\
C*(E, C, D) * C^{-1} &= C*(E, C, D)*D=(C*E*D, C*C*D, C*D*D)=(E, C, D)=B \\
D*(E, C, D) * D^{-1} &= D*(E, C, D)*C=(D*E*C, D*C*C, D*D*C)=(E, C, D)=B \\
F*(E, C, D) * F^{-1} &= F*(E, C, D)*F=(F*E*F, F*C*F, F*D*F)=(E, C, D)=B \\
(XBX^{-1}) &= B \text{ şartını sağladığı için } B=(E, C, D) \text{ alt grubu kendine eşlenik alt gruptur.}
\end{aligned}$$

Tanım 9: Kendine eşlenik alt grubu olmayan gruba basit grup denir (Dresselhaus ve ark., 2008).

Teorem 7: Kendine eşlenik alt grubun sağ ve sol kosetleri aynıdır (Dresselhaus ve ark., 2008).

4.6. Faktör Grupları

Tanım 10: Bir faktör grup kendine eşlenik alt grubun kosetleri bir araya getirilerek kendine eşlenik alt gruba göre oluşturulur (Dresselhaus ve ark., 2008; Dresselhaus, 2002). Her bir koset, faktör grubun bir elemanı olarak düşünülür. Faktör grup, grup olma şartlarını sağlar.

Tanım 11: Bir alt grubun kosetlerinin sayısına ya da “grubun mertebesi /alt grubun mertebesi” ne, bu alt grubun indisi denir (Dresselhaus ve ark., 2008).

Kendine eşlenik alt grubun indisi faktör grubunun mertebesidir.

Örnek: Üçgen $P(3)$ grubu için faktör grubu bulalım.

Biliyoruz ki; $P(3)$ grubu için (E, C, D) kendine eşlenik alt gruptur. Bu grubun kosetleri; (E, C, D) ve (A, B, F) ’dir. O zaman grubun mertebesi 6, alt grubun mertebesi 3 ise; faktör grubun mertebesi 2’dir.

$$(E, C, D) \rightarrow \alpha$$

$$(A, B, F) \rightarrow \beta \text{ olsun.}$$

Bu kosetlerden oluşan faktör grubun elemanları (α, β) olacaktır. Bu iki eleman için Cayley tablosu Çizelge 4.2’deki gibi olur (Çizelge 4.2).

Çizelge 4.2. Faktör grubun çarpım tablosu

*	α	β
α	α	β
β	β	α

$$\alpha * \alpha = (E, C, D) * (E, C, D) = (E * E, E * C, E * D, C * E, C * C, C * D, D * E, D * C, D * D) = (E, C, D, C, D, E, D, E, C) = (E, C, D) = \alpha$$

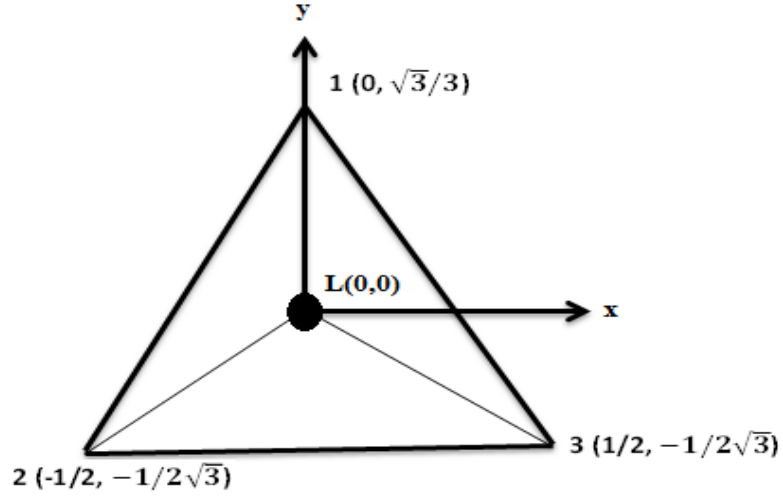
$$\alpha * \beta = (E, C, D) * (A, B, F) = (E * A, E * B, E * F, C * A, C * B, C * F, D * A, D * B, D * F) = (A, B, F, B, F, A, F, A, B) = (A, B, F) = \beta$$

$$\beta * \beta = (A, B, F) * (A, B, F) = (A * A, A * B, A * F, B * A, B * B, B * F, F * A, F * B, F * F) = (E, D, C, C, E, D, D, C, E) = (E, C, D) = \alpha$$

Görüldüğü gibi α , bu faktör grubun birim elemanıdır. α ve β 'nin tersleri kendilerine eşittir. Bu faktör grubun Cayley tablosu anı zamanda P(2) permütasyon grubunun da Cayley tablosudur.

4.7. Temsil Teorisi

Genellikle bir kristaldeki simetri operasyonları ile uğraşırken arka arkaya tekrarlanan operasyonları gözle canlandırmak oldukça zordur. Grup Teorisi bu probleme yardımcı olma amacıyla tasarlanmış bir teoridir. Genelde uygulamada simetri operasyonları bir grubun elemanlarıdır. Bu durumda eğer her bir eleman bir matrisle temsil edilirse bu matrislerle daha kolay çalışılabilir. Dolayısıyla tüm geometrik operasyonları analitik olarak matris aritmetiği ile gerçekleştirebiliriz. Bir simetri operasyonunun bir matrisle ifade edilmesine *temsil* ya da *tasvir* denir (Dresselhaus ve ark., 2008; Bradley ve Cracknell, 1972; Bruns ve Glaser, 1978). P(3) grubunun elemanlarına karşılık gelen matrisleri bulalım.



Şekil 4.2. Üçgenin köşe koordinatları.

Üçgenin bir kenar uzunluğunu 1 birim alalım. Üçgenin merkezi $L(0, 0)$ noktası olsun. Üçgenin köşe noktalarını (x, y) koordinatları cinsinden L noktasına göre tanımlayalım. 1 köşesine ulaşmak için $L(0, 0)$ noktasından x eksenine yönünde 0, y eksenine yönünde $\sqrt{3}/3$ birim yerdeğiştirmeliyiz. Böylece 1 köşesinin kordinatlarını $(0, \sqrt{3}/3)$ olarak elde ederiz. Üçgenin üç köşesinin kordinatları bu şekilde bulunabilir (Şekil 4.2). Üçgenin köşe noktalarındaki sayılar için elde ettiğimiz (x, y) kordinatları bir sütun matris oluşturur. Her bir köşe için sütun matrisleri aşağıda verilmiştir.

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \quad \hat{2} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \hat{3} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Sütun matrislerini bildiğimize göre $P(3)$ permütasyon grubunun elemanlarının matris temsillerini bulmaya çalışalım. “E” elemanının matris temsilini bulmayla başlayalım. Varsayalım ki “E” elemanının matrisi 2×2 (geometriye uygun olarak) aşağıdaki gibi bir matris olsun.

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}$$

“E” elemanının permütasyon karşılığı yazalım.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Yukarıda yazılmış “E” elemanın permütasyon karşılığına bakarak ilk iki köşeyi nereye götürdüğüne bakalım. “E” elemanın permütasyon karşılığına baktığımızda üçgenin 1 köşesini yine 1 köşesine götürmüştür. Diğer bir ifadeyle “E” elemanın matris temsili ile üçgenin 1 köşesinin sütun matrisi ile çarpımı tekrar 1 köşesinin sütun matrisini vermelidir. Yukarıdaki bilgileri kullanarak denklemleri yazalım.

$$\hat{E}(1) = 1$$

$$\hat{E}(1) = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki denklemi çözersek; $E_{11} = 0$, $E_{22} = 1$ olarak buluruz.

“E” elemanın permütasyon karşılığına baktığımızda üçgenin 2 köşesini yine 2 köşesine götürmüştür. Diğer bir ifadeyle “E” elemanın matris temsili ile üçgenin 2 köşesinin sütun matrisi ile çarpımı tekrar 2 köşesinin sütun matrisini vermelidir. Yukarıdaki bilgileri kullanarak denklemleri yazalım.

$$\hat{E}(2) = 2$$

$$\hat{E}(2) = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$-1/2E_{11} - 1/2\sqrt{3}E_{12} = -1/2$$

$$-1/2E_{21} - 1/2\sqrt{3}E_{22} = -1/2\sqrt{3}$$

Daha önce bulduğumuz $E_{11} = 0$, $E_{22} =$ değerlerini yukarıdaki denklemlerde yerine koyarsak, $E_{12} = 1$, $E_{21} = 0$ olarak elde ederiz. Bu bulunan değerler kullanılarak “E” elemanın matris temsili aşağıdaki gibi yazılır.

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P(3) permütasyon grubunun diğer elemanlarının matris temsilleri, yukarıdaki işlemleri tüm P(3) permütasyon grubunun elemanlarına uygulayarak her bir elemanın matris temsili bulunabilir. P(3) permütasyon grubunun 6 elemanının matris temsilleri Çizelge 4.3 'de verilmiştir.

Çizelge 4.3. P(3) permütasyon grubunun elemanlarının matris temsilleri

Elemanların matris temsilleri	Elemanların matris temsilleri
$\hat{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\hat{C} = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$
$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\hat{D} = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$
$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$	$\hat{F} = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

5. SİMETRİ VE SİMETRİ OPERASYONLARI

Simetri, değişime karşı gösterilen dirençtir. Simetri, bir denge ve orantı kavramıdır. İki şeyin birbirine benzemesi ve uyumu olarak bilinir (Delibaş, 2014). Simetri grupları modern fiziğin vazgeçilmez araçlarından bir haline gelmiştir. Bir cismin veya bir sistemin simetri grubu, o cisim veya sistemi değişmez bırakan ve grup aksiyomlarını sağlayan simetri operasyonlarının kümesidir. Simetri grupları iki ana dala ayrılır: Kesikli simetri grupları ve sürekli simetri gruplarıdır. Sürekli simetri grupları zaten Lie gruplarıdır. Kesikli simetri grupları ise üç tiptir. (1) sonlu nokta grupları. Bu gruplar sadece dönme, yansıma, inversiyon ve rotoinversiyon simetri operasyonlarını içerir. (2) Sonsuz örgü grupları. Bu gruplar sadece öteleme operasyonlarını içerir. (3) Sonsuz uzay grupları. Bu gruplar ilk iki grubu birleştiren ve ayrıca bir vida ekseni ve kayma-yansıma içeren gruplardır.

Bir cisme veya bir moleküle verilen hareketten sonra eşdeğer veya özdeş konum elde ediliyorsa bu harekete *simetri işlemi* denir (Fjellvag, 1994). Simetri işlemi, bir nokta, bir doğru ya da bir düzleme göre yapılmaktadır. Simetri işlemi bir noktaya göre yapılıyorsa; simetri noktası, simetri işlemi bir doğruya göre yapılıyorsa; simetri ekseni, simetri işlemi bir düzleme göre yapılıyorsa; simetri düzlemi denir. Bu geometrik niceliklere de *Simetri Elemanları* denir. Simetri elemanları bir eksen, düzlem, nokta gibi geometrik niceliktir. Simetri işlemleri bu simetri elemanları temel alınarak uygulanır. Diğer bir ifadeyle simetri elemanları, molekülleri veya kristalleri simetrilerine göre sınıflandırmamıza yardımcı olur. Simetri elemanlarının farklı sembollerle gösterimleri vardır (Tilley, 2006). Bunlardan biri Schöenflies sembolleri, diğeri Hermann-Mauguin sembolleridir (Çizelge 5.1). Schöenflies sembolleri spektroskopi de sık kullanılır. Hermann-Mauguin sembolleri ise kristalografide kullanılır. Her biri farklı bir simgeyle temsil edilen simetri elemanlarını şu şekilde sıralayabiliriz:

- Birim Eleman (e)
- İversiyon (I)
- Ana simetri ekseni (C_n)
- Simetri düzlemi (σ)
- Dönme – Yansıma simetri ekseni (S_n)

Çizelge 5.1. Simetri elemanları ve Schönflies, Hermann-Mauguin sembolleri

Simetri Elemanları	Schönflies sembolleri	Hermann-Mauguin sembolleri	Simetri İşlemleri
Birim Eleman	E	I	0° ve 360° dönme
İnversiyon	I yada i	$\bar{1}$	I : (x, y, z) → (-x, -y, -z)
Simetri Düzlemi	Σ	m	Düzlemden yansıma
Dönme eksen	C_n	n	Eksen etrafında 360°/n dönme
Dönme – Yansıma	S_n	$\bar{n}$	Dönme eksenine dik düzlemden yansıma + dönme

Birim elemanından başka simetri elemanı bulunmayan, cisim molekül ya da kristallere *antisimetrik* denir (Fjellvag, 1994; Leslie, 2013). Birim elemanının yanında en az bir diğer simetri elemanı da olanlara ise *simetrik* denir (Fjellvag, 1994; Leslie, 2013).

5.1. Birim Eleman ve Özdeşlik İşlemi

Hiçbir işlemi olmayan simetri elemanına birim elemanı denir. Cismin ya da molekülün konumunda herhangi bir değişiklik yaratmaz. Başka bir deyişle 360° dönme hareketine karşılık gelir. Simgesi (e)' dir. Bir matematiksel operatör niteliğinde olan “e” uygulandığında molekülün geometrik duruşunda değişiklik meydana gelmediği için simetri elemanlarının oluşturduğu grubun birim elemanıdır. Döndürme işleminde dikkat edilmesi gereken nokta dönme yönünün saatin dönme yönüne zıt (proper) olmasıdır.

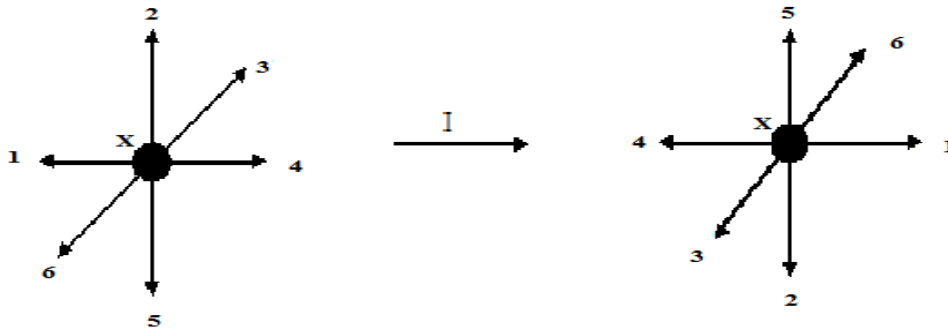
5.2. Dönme Simetri Eksenini ve Döndürme İşlemi

Molekül içinden geçen bir eksen etrafında, molekülün $(360/n)^\circ$ lik açı ile döndürülmesi işlemidir. İşlemin uygulandığı eksen simetri eksenidir ve C_n ile gösterilir (Leslie, 2013). $n = 360/\theta$ dır ve n eksenin derecesidir. θ döndürülme açısıdır. Örneğin, bir molekül, bir eksen etrafında 120° döndürülerek bir eşdeğer yönelme elde edilmiş ise, molekül C_3 simetri eksenine sahiptir ve simetri işlemi bir C_3 işlemidir.

5.3. Simetri Merkezi ve İnversiyon İşlemi

İnversiyon işlemi; moleküldeki her atomun, atom ve molekül merkezinden geçen doğru boyunca merkezin diğer tarafına ilk konumuna eşit uzaklıkta taşınması işlemidir (Fjellvag, 1994). Bu işlem ile benzer atomlar birbirini yerine geçmektedir (Şekil 5.1). İnversiyon “I” ile temsil edilir. İnversiyon işlemi sonucunda (x, y, z) noktası $(-x, -y, -z)$ konumuna gider.

$$I : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$$



Şekil 5.1. İnversiyon işlemi.

5.4. Simetri Düzlemi ve Yansıma İşlemi

Moleküldeki tüm atomların, molekül içinden geçen bir düzlem aynadan yansıtılması işlemidir. Bu işlemle, düzlemin solunda yer alan atomlar sağa, sağında yer alanlar ise sola taşınır ve benzer atomlar birbirini yerine geçer. Bir simetri elemanı olan simetri düzlemine göre yapılan işleme yansıma işlemi denir. Yansıma düzlemlerine simetri düzlemi veya ayna düzlemi denir ve “ σ ” ile gösterilir (Leslie, 2013). Simetri düzlemi, molekülü birbirinin ayna görüntüsü olan iki parçaya ayırır. Moleküllerde üç çeşit simetri düzlemi tanımlanır;

* (σ_h): Molekülün C_n ana dönme eksenine dik olan simetri düzlemine yatay (horizontal) simetri düzlemi denir. Başka bir ifadeyle önce 180° lik dönmeden sonra inversiyondur.

$$\sigma_h = C_2 * I$$

* (σ_v) : Molekülün C_n ana dönme eksenini içine alan ve bu eksen üzerinde kesişen simetri düzlemlerine düşey (vertical) simetri düzlemi denir (Dresselhaus ve ark., 2008).

* (σ_d): Molekülün C_n ana dönme eksenini içeren ve açıortaylardan geçen simetri düzlemi, çapraz (diagonal) düzlem veya dihedral düzlem denir (Dresselhaus ve ark., 2008). Başka bir ifadeyle C'_2 ekseninden 180° lik dönme ve sonra inversiyondur.

$$\sigma_d = C'_2 * I$$

5.5. Dönme – Yansıma Simetri Eksenini ve Dönme – Yansıma Simetri İşlemi

Molekül bir eksen etrafında $(360/n)^\circ$ lık açı ile döndürülür ve daha sonra alınan eksene dik düzlemden yansıtılır. Etrafında döndürüldükten sonra kendisine dik düzlem üzerinden yansıtıldığında cismin veya molekülün ilk konumuna eşdeğer bir konumun bulunmasına yol açan eksenlere Dönme – Yansıma simetri eksenini denir (Cornwell, 1997, Dresselhaus ve ark., 2008). S_n ile gösterilir. Kısacası dönme– yansıma simetri

işlemi, peş peşe uygulanan iki simetri işleminden oluşmuştur. Önce dönme ve bu dönme eksenine dik düzlemden yansıma veya önce yansıma sonra dönme işlemi art arda uygulanır. Bu sözel ifademizi kısaca aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$S_n = C_n \cdot \sigma = \sigma \cdot C_n$$

6. NOKTA GRUPLARI

Kristalin en az bir noktasını değişmez bırakan simetri operasyonlarından veya elemanlarından oluşan simetri gruplarına *nokta (point) grubu* denir . Bir grubun nokta grubu verilirse o molekülün geometrisi belirlenebilir. Yani molekül geometrileri nokta gruplarına bakılarak yorumlanabilir. Aynı simetri elemanlarına sahip olan moleküller veya kristal sistemleri bir grup altında toplanabilir. Bir molekülün nokta grubu bilinirse o molekülde yapılabilecek simetri işlemleri de bulunabilir. Yedi adet singoni (kristal sistemi) den 14 tane Bravais kafesi oluştuğunu biliyoruz. Bravais kafeslerine öteleme hariç diğer simetri işlemleri (yansıma, döndürme, inversiyon...) uygulanırsa 32 tane simetri sınıfı veya nokta grup oluşturulur. Ortaya çıkan 32 nokta grubun çeşitli gösterimleri vardır.

Kristalde $\mathbf{r}$ vektörü durumundaki P noktasına R dönme operasyonunu uygularsak; bu R dönme operasyonu $\mathbf{r}$ vektörü durumundaki P noktasını $\hat{\mathbf{r}}$ durumundaki $\hat{P}$ noktasına götürür (Bradley ve Cracknell, 1972). Bu ifadeyi denklem olarak yazarsak:

$$\mathbf{r} = R\hat{\mathbf{r}}$$

burada R 3x3 dönme matrisidir.

6.1. Nokta Grupların Sınıflandırılması

Bir molekülün veya kristalin nokta grubunun bilinmesi o molekülde hangi simetri işlemlerinin yapılabileceğinin bilgisini bize sunar. Nokta grupları döngüsel (C), dihedral (D), tetrahedral (T), oktahedral (O), ikozahedral (Y) olmak üzere beş gruba ayrılır (Bradley ve Cracknell, 1972).

6.1.1. Döngüsel gruplar

Döngüsel gruplar sadece bir dönme eksenini olduğunda meydana gelir. Böyle gruplar uluslararası sembol n ile gösterilir ve Schönflies sembolü C_n 'dir. Schönflies sembolünde z dönme eksenini boyunca saatin tersi yönde $2\pi/n$ kadarlık dönme C_{nz}^+ ile z eksenini boyunca saatin dönme yönünde $2\pi/n$ kadarlık dönme C_{nz}^- ile gösterilir (Bradley ve Cracknell, 1972).

6.1.2. Dihedral gruplar

Dihedral gruplar, düzgün n kenarlı prizmayı tekrar kendine dönüştüren bütün açılardan oluşmaktadır. Uluslararası sembolü $n22_n$ ve Schönflies sembolü D_n ile gösterilir (Bradley ve Cracknell, 1972).

6.1.3. Tetrahedral gruplar

Tetrahedral gruplar, düzgün bir tetrahedronu tekrar kendini ilk şekline dönüştüren bütün açılardan oluşmaktadır. Uluslararası sembolü 23 ve Schönflies sembolü T ile gösterilir (Bradley ve Cracknell, 1972).

6.1.4. Oktahedral gruplar

Oktahedral ya da kübik gruplar, bir küpü değişmez bırakan bütün saf dönmelerden oluşur. Uluslararası sembolü 432 ve Schönflies sembolü O ile gösterilir (Bradley ve Cracknell, 1972).

6.1.5. İkosahedral gruplar

İkosahedral gruplar, pentagonal dodekahedron ya da düzgün bir ikosaedronu kendi içinde değişmez bırakan tüm açılardan oluşur (Bradley ve Cracknell, 1972). Beş

katlı altı eksen, üç katlı on eksen, iki katlı on beş eksenidir. Bu grup uluslararası sembolü 532 ve Schönflies sembolü Y ile gösterilir.

6.2. Nokta Grupların Adlandırılması

Nokta gruplarını göstermenin literatürde farklı yöntemleri vardır. Nokta grupları, moleküller için Schönflies simgeleri ile kristaller için ise bunlara karşılık gelen Hermann – Mauguin simgeleri ile gösterilir (Bradley ve Cracknell, 1972; Fjellvag, 1994; Tilley, 2006). Schönflies adlandırılmasında nokta gruplar C_{nv} , C_{nh} , T_d gibi adlandırılır. Burada n, dönme eksenlerinin en yüksek sayısını, v dik ayna ekseni, h yatay ayna eksenini gösterir. Hermann – Mauguin simgeleri de Schönflies adlandırılmasında olduğu gibi benzer bilgi verir. İlk sayı en yüksek dönme eksenidir. 2/m de iki katlı dönme ve iki katlı dönme eksenine dik ayna düzlemini gösterir (Çizelge 6.1). Her nokta grubunu değişmez bırakan simetri operasyonları vardır. Bu operasyonlar nokta grubunun kristal sistemine göre farklılık gösterir. Her nokta grubu için verilen simetri operasyonlarını kullanarak nokta gruplarını elde edebiliriz. Nokta gruplarının adlandırılması ve simetri elemanları aşağıda verilmiştir (Çizelge 6.1).

Çizelge 6.1. Kristal sistemleri ve nokta grupları ve simetri elemanları (Bradley ve Cracknell, 1972; Dresselhaus, 2002)

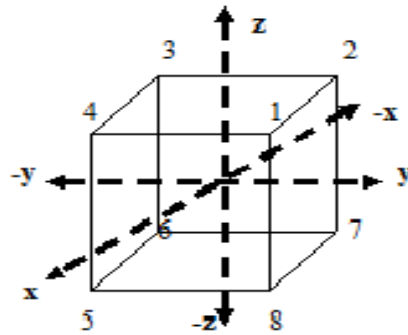
NO Kristal Sistemleri	Schönflies Sembolleri	Herman - Mauguin Sembolleri	ELEMANLARI
Triklinik			
1	C_1	1	E
2	C_i	$\bar{1}$	E, I
Monoklinik			
3	C_2	2	E, C_2
4	C_s	M	E, σ
5	C_{2h}	2/m	E, C_2 , I, σ_h
Ortorombik			
6	D_2	222	E, C_2 , C_2' , C_2''
7	C_{2v}	mm2	E, C_2 , σ_v , σ_v'
8	D_{2h}	Mmm	E, C_2 , C_2' , C_2'' , I, σ_v , σ_v' , σ_v''
Tetragonal			
9	C_4	4	E, C_4 , C_4^2 , C_4^3
10	S_4	$\bar{4}$	E, S_4 , S_4^3 , C_2
11	C_{4h}	4/m	E, C_4 , C_4^2 , C_4^3 , I, S_4^3 , σ_h , S_4
12	D_4	422	E, $2C_4$, C_2 , $2C_2'$, $2C_2''$
13	C_{4v}	4mm	E, $2C_4$, C_2 , $2\sigma_v$, $2\sigma_d$
14	D_{2d}	$\bar{4}2m$	E, C_2 , $2S_4$, $2C_2'$, $2\sigma_d$
15	D_{4h}	4/mmm	E, $2C_4$, C_2 , $2C_2'$, $2C_2''$, I, $2S_4$, σ_h , $2\sigma_v$, $2\sigma_d$
Trigonal			
16	C_3	3	E, C_3 , C_3^2
17	C_{3i}	$\bar{3}$	E, C_3 , C_3^2 , I, S_6 , S_6^5
18	D_3	32	E, $2C_3$, $3C_2'$
19	C_{3v}	3m	E, C_3 , $3\sigma_v$
20	D_{3d}	$\bar{3}m$	E, $2C_3$, $3\sigma_v$, I, $2S_6$, $3C_2'$
Hegzagonal			
21	C_6	6	E, C_6 , $C_6^2 = C_3$, $C_6^3 = C_2$, $C_6^4 = C_3^2$, C_6^5
22	C_{3h}	$\bar{6}$	E, C_3 , C_3^2 , σ_h , S_6 , S_6^{-1}
23	C_{6h}	6/m	E, C_6 , C_3 , C_2 , C_3^2 , C_6^5 , σ_h , S_6 , S_3 , I, S_3^{-1} , S_6^5
24	D_6	622	E, C_2 , $2C_3$, $2C_6$, $3C_2'$, $3C_2''$
25	C_{6v}	6mm	E, C_2 , $2C_3$, $2C_6$, $3\sigma_v$, $3\sigma_d$
26	D_{3h}	$\bar{6}2m$	E, $2C_3$, $3C_2'$, σ_h , $2S_3$, $3\sigma_v$
27	D_{6h}	6/mmm	E, C_2 , $2C_3$, $2C_6$, $3C_2'$, $3C_2''$, I, σ_h , $2S_6$, $2S_3$, $3\sigma_v$, $3\sigma_d$

Çizelge 6.1. Kristal sistemleri ve nokta grupları ve simetri elemanları (Bradley ve Cracknell, 1972; Dresselhaus, 2002) (devam)

NO Kristal Sistemleri	Schönflies Sembolleri	Herman – Mauguin Sembolleri	ELEMANLARI
Kübik			
28	T	23	$E, 3C_2, 4C_3, 4C'_3$
29	T_h	m3	$E, 3C_2, 4C_3, 4C'_3, 3\sigma_h, I, 4S_6, 4S'_6$
30	O	432	$E, 8C_3, 3C_2, 6C'_2, 6C_4$
31	T_d	$\bar{4}3m$	$E, 8C_3, 3C_2, 6\sigma_d, 6S_4$
32	O_h	m3m	$E, 8C_3, 3C_2, 6C_4, 6C'_2, I, 8S_6, 3\sigma_h, 6\sigma_d, 6S_4$

6.3. T_h Nokta Grubunun P(8) Permütasyon Grubu ile İncelenmesi

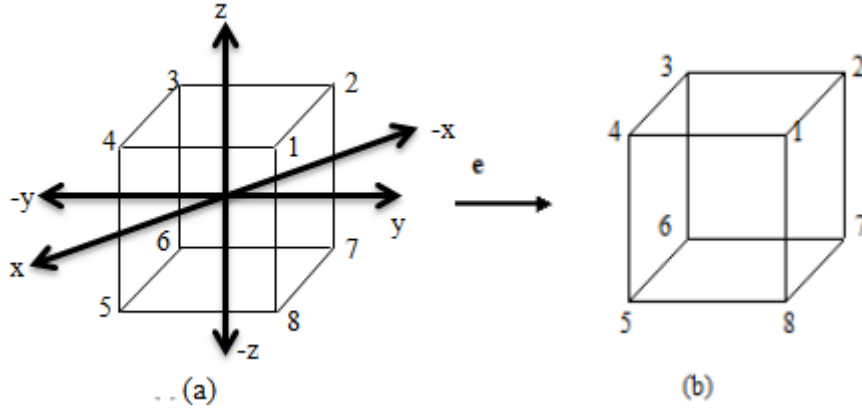
24 elemanlı T_h nokta grubu da P(8) permütasyon grubunun bir alt grubu ile izomorfiktir. P(8) permütasyon grubunun 40320 elemanı bulunmaktadır. Bu bilgi yardımıyla T_h nokta grubunun simetri elemanlarını aşağıda açık bir şekilde anlatılan simetri işlemleri ile bulabiliriz. Çizelge 6.1 'e baktığımızda T_h nokta grubunun simetri elemanları; $E, 3C_2, 4C_3, 4C'_3, 3\sigma_h, I, 4S_6, 4S'_6$ simetri elemanlarından oluşan 24 elemanlı bir nokta grubudur. T_h kristal sistemine baktığımızda kübik kristal sistemidir (Bradley ve Cracknell, 1972; Koster, 1957). Kübik kristal sistemini değişmez bırakan yukarıda yazılan simetri operasyonlarını uygulayalım ve 24 elemanın permütasyon karşılığını bulalım.



Şekil 6.1. Kübik yapı.

Küpün her köşesi numaralandırılarak koordinat eksenlerini belirlenir (Şekil 6.1). Küpün köşelerine numaralar verildikten ve koordinat eksenleri belirlendikten sonra bu şekle T_h nokta grubunun simetri elemanları uygulanır ve yeni oluşan şekle bakılarak simetri elemanlarını permütasyon karşılığı yazılır.

6.3.1. Özdeşlik simetri elemanı (E)



Şekil 6.2. Küpe özdeşlik elemanının etkisi.

Küpün ana dönme eksenlerinin koordinat eksenlerine (x, y, z) denk gelmektedir. Bu simetri operatörü, küpün ana dönme eksenlerinden tutularak saatin dönme yönünün tersi yönde (proper dönme) 360 derece ya da sıfır derecelik dönme yapması anlamına gelir. Bu operatör “ e ” ile temsil edilmiştir. Bu işlem sonucunda küpün ilk durumunu koruması beklenir (Şekil 6.2). Bu simetri operatörünü aşağıdaki gibi bir permütasyon gösteriminde yazabiliriz. Permütasyonun ilk satırı küpün ilk durumuna karşılık gelirken, ikinci satır küpün simetri işleminden sonraki durumunu temsil eder.

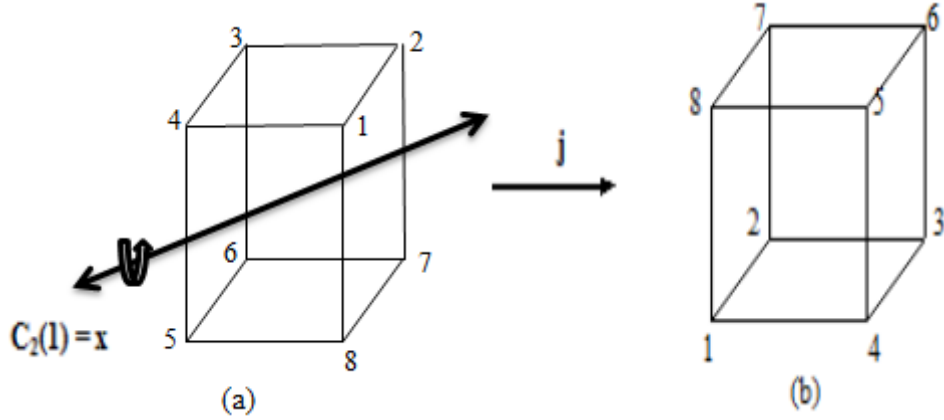
$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki permütasyon şu şekilde yorumlana bilir. Permütasyonun ilk satırı küpün ilk durumunu temsil etmektedir. İlk satırda bulunan rakamlar küpün her bir köşesine temsili olarak bırakılmış rakamlardır. Bu rakamlar yerine istenirse farklı karakterlerde kullanılabilir. İkinci satırdaki rakamlar ise küpe simetri işlemi uyguladıktan sonra

köşelerin nereye gittiğini gösteren rakamlardır. “e” simetri işlemi sonunda 1 köşesinin yerine yine 1 köşesi gelmiştir. Aynı şekilde 2 köşesinin yerini 2 köşesi, 3 köşesinin yerini 3 köşesi, 4 köşesinin yerini 4 köşesi, beş köşesinin yerini beş köşesi, 6 köşesinin yerini 6 köşesi, 7 köşesinin yerini 7 köşesi ve 8 köşesinin de yerini 8 köşesi almıştır. Yani küpün hiç bir köşesi uzaydaki konumunu değiştirmemiştir. Sonuçta küp konumunu korumuştur.

6.3.2. İki katlı dönme eksenini(C_2)

T_h nokta grubunun elemanlarına baktığımızda $3C_2$ elemanı vardır. C_2 eksenleri küpte (x, y, z) koordinat eksenlerine denk gelmektedir. Bu eksenleri birbirinden farklılaştırmak için x eksenine denk gelen eksene C_2 (1), y eksenine denk gelen eksene C_2 (2), z eksenine denk gelen eksene C_2 (3) diyelim. Küpün 1, 4, 5 ve 8 köşelerinin oluşturduğu yüzeyi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda, seçilen C_2 (1) eksen etrafında küpün saat yönünün tersi yönde (proper) 180 derecelik dönme yapması işlemidir. Bu simetri işlemi “j” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 6.3 (a)’daki ilk durumu, “j” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.3 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.3)



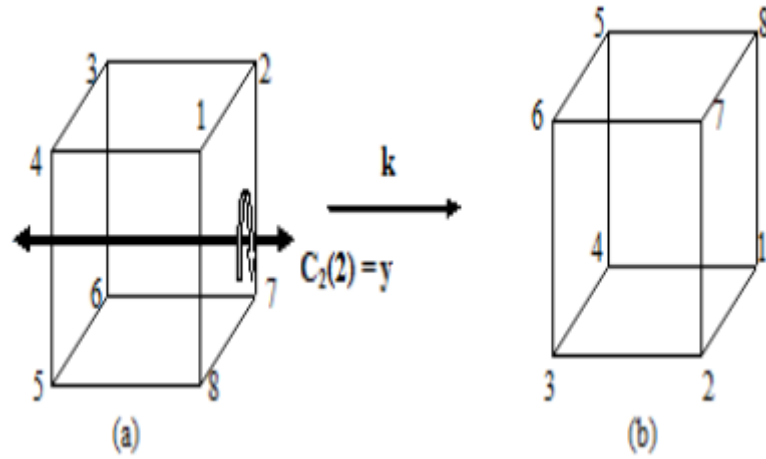
Şekil 6.3. j simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “j” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

“j” permütasyonu şu şekilde yorumlanabilir. “j” simetri işlemi sonunda 1 köşesi yine 5 köşesine gitmiştir. Aynı şekilde 2 köşesinin yerini 6 köşesine, 3 köşesinin yerini 7 köşesine, 4 köşesi 8 köşesine, 5 köşesi 1 köşesine, 6 köşesi yine 2 köşesine, 7 köşesi 3 köşesine ve 8 köşesi de 4 köşesine gitmiştir.

İkinci eksen küpte y eksenine denk gelen $C_2(2)$ eksenidir. Küpün ilk durumu Şekil 6.4 (a) deki gibidir. Küpte Şekil 6.4 (a) de gösterilen küpün 1, 2, 7, 8 köşelerinin yüzeyi bize bakacak şekilde $C_2(2)$ ekseninden tutup saatin dönme yönünün tersi yönde döndürülmesidir. Bu simetri işlemi “k” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 6.4 (a)’daki ilk durumu, “k” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.4 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.4).



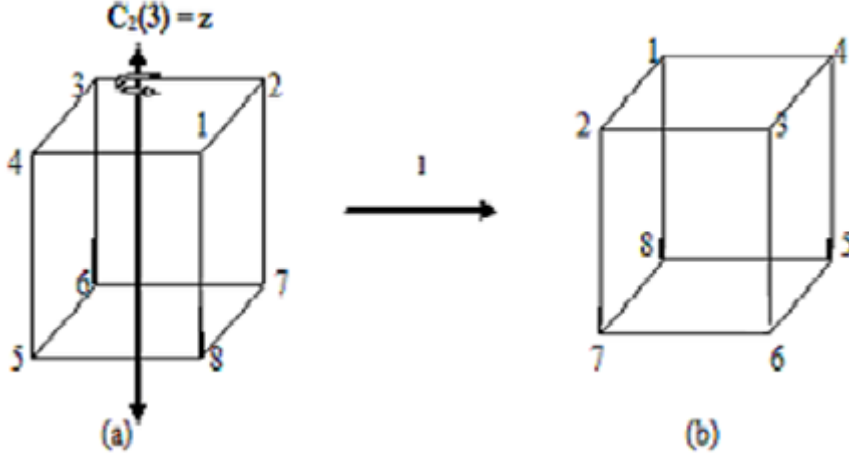
Şekil 6.4. k simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “k” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Üçüncü eksen küpte z eksenine denk gelen $C_2(3)$ eksenidir. Küpün ilk durumu Şekil 6.5 (a) deki gibidir. Şekil 6.5 (a) de gösterilen küpün 1, 2, 3,4 köşelerinin oluşturduğu yüzey bize bakacak şekilde $C_2(3)$ ekseninden tutulup saatin dönme yönünün tersi yönde

döndürülmesidir. Bu simetri işlemi “ I ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 6.5 (a)’daki ilk durumu, “ I ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.5 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.5).



Şekil 6.5. I simetri elemanı.

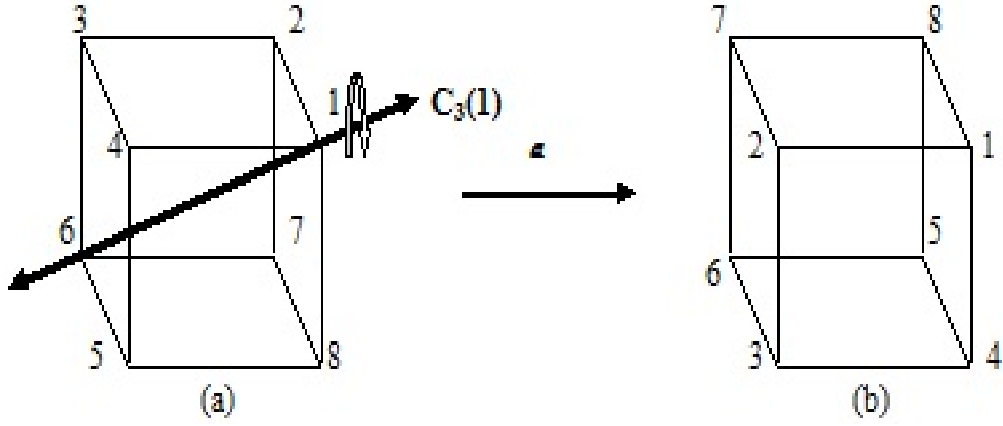
Bu simetri işlemi sonucunda “ I ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz;

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

6.3.3. Üç katlı dönme eksenleri (C_3) simetri işlemleri

T_h nokta grubunun elemanlarına baktığımızda $4C_3$ elemanı vardır. Küpte dört tane C_3 eksenleri vardır ve bu eksenler küpün köşegenlerine karşılık gelir. Eksenleri farklılaştırmak için 1 köşesinden geçen eksen $C_3(1)$, 2 köşesinden geçen eksen $C_3(2)$, 3 köşesinden geçen eksen $C_3(3)$, 4 köşesinden geçen eksen $C_3(4)$ ile gösterilir.

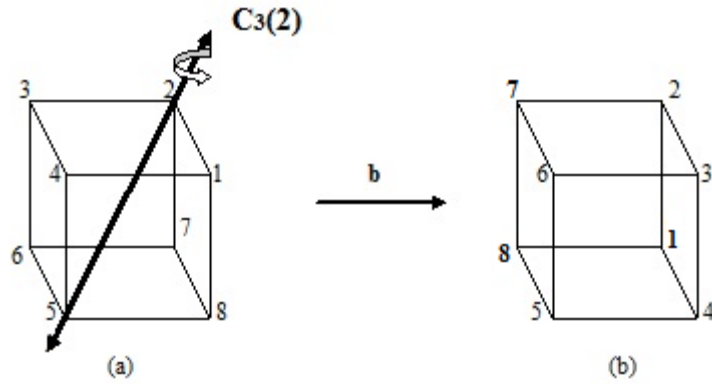
İlk işlem $C_3(1)$ simetri eksenini kullanarak yapılan simetri işlemidir: Küpün 1 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda, küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıdır. Bu simetri operasyonu “ a ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 6.6 (a)’daki ilk durumu, “ a ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.6 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.6).

Şekil 6.6. *a* simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “*a*” operasyonunun permütasyon karşılığı aşağıdaki gibidir:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

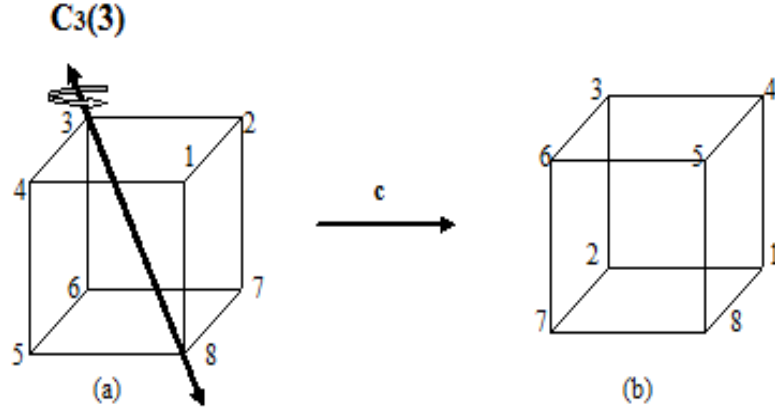
$C_3(2)$ simetri eksenini kullanılarak küpün 2 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “*b*” ile temsil edilmiştir Küpün Şekil 6.7 (a)’daki ilk durumu “*b*” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.7 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.7).

Şekil 6.7. *b* simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ b ” operasyonunun permütasyon karşılığı aşağıdaki gibidir:

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 8 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$C_3(3)$ simetri eksenini kullanarak küpün 3 köşesi arka tarafa bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ c ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 6.8 (a)’daki ilk durumu “ c ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.8 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.8).

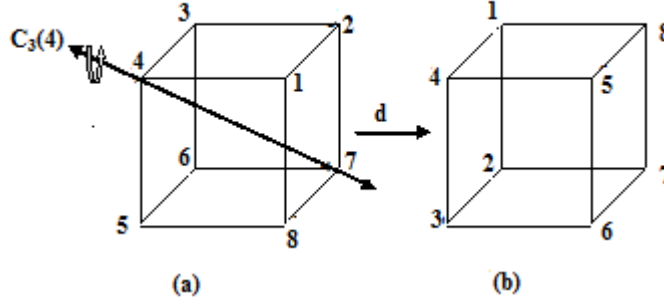


Şekil 6.8. c simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ c ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$C_3(4)$ simetri eksenini kullanarak küpün 4 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ d ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 6.9 (a)’daki ilk durumu “ d ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.9 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.9).

Şekil 6.9. d simetri elemanı.

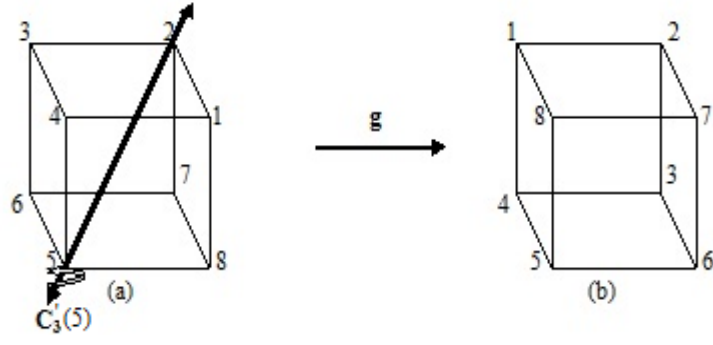
Bu simetri işlemi sonucunda “ d ” operasyonunun permütasyon karşılığı aşağıdaki gibidir:

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

6.3.4. Üç katlı dönme eksenleri (C'_3) simetri işlemleri

T_h nokta grubunun elemanlarına baktığımızda $4C'_3$ elemanı vardır. Küpte dört tane C'_3 eksenleri vardır ve bu eksenler küpün köşegenlerine karşılık gelir. Eksenleri farklılaştırmak için 5 köşesinden geçen eksen $C'_3(5)$, 6 köşesinden geçen eksen $C'_3(6)$, 7 köşesinden geçen eksen $C'_3(7)$, 8 köşesinden geçen eksen $C'_3(8)$ ile gösterilir.

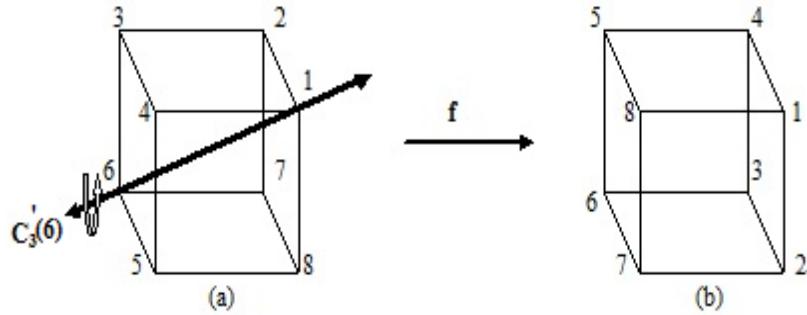
$C'_3(5)$ simetri eksenleri kullanılarak küpün 5 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ g ” ile temsil edilmiştir Küpün Şekil 6.10 (a)’deki ilk durumu “ g ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.10 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.10).

Şekil 6.10. g simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ g ” operasyonunun permütasyon karşılığını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

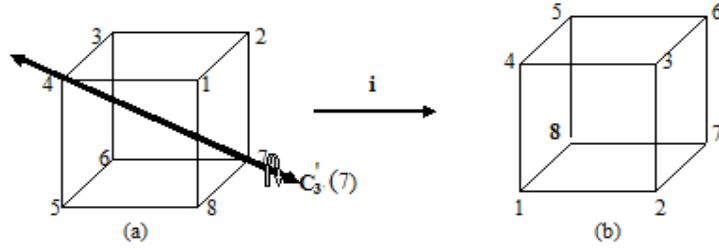
$C_3(6)$ simetri eksenini kullanılarak küpün 6 köşesi arkaya bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ f ” ile temsil edilmiştir Küpün Şekil 6.11 (a)’daki ilk durumu “ f ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.11 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.11).

Şekil 6.11. f simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ f ” operasyonunun aşağıdaki gibi, permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$C_3'(7)$ simetri eksenini kullanılarak küpün 7 köşesi arkaya bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ i ” ile temsil edilmiştir Küpün Şekil 6.12 (a)’daki ilk durumu “ i ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.12 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.12).

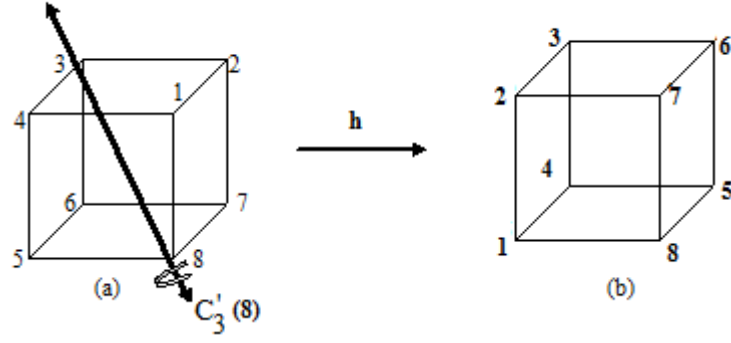


Şekil 6.12. i simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ i ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$C_3'(8)$ simetri eksenini kullanılarak küpün 8 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ h ” ile temsile dilmiştir Küpün Şekil 6.13 (a)’daki ilk durumu “ h ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.13 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.13).



Şekil 6.13. h simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ h ” operasyonunun permütasyon karşılığını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

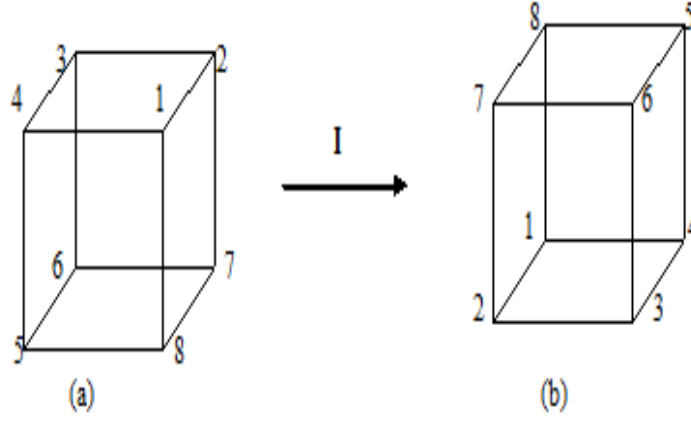
$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

6.3.5. İnversiyon simetri işlemleri

Simetri elemanlarını anlatırken inversiyondan bahsetmiştik. İnversiyon işlemi; moleküldeki her atomun, atom ve molekül merkezinden geçen doğru boyunca merkezin diğer tarafına ilk konumuna eşit uzaklıkta taşınması işlemidir. Bu işlem ile benzer atomlar birbiri yerine geçmektedir. İnversiyon “ I ” ile temsil edilir. İnversiyon işlemi sonucunda (x, y, z) noktası $(-x, -y, -z)$ konumuna gider.

$$I : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$$

Yukarıdaki bilgiler ışığında kenarları numaralandırılmış aşağıdaki şekilde Şekil 6.14 (a) küpün ilk şekline inversiyon işlemini uygularsak Şekil 6.14 (b) elde edilir (Şekil 6.14).



Şekil 6.14. I simetri operasyonu.

Bu simetri işlemi sonucunda “I” operasyonunun permütasyon karşılığını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

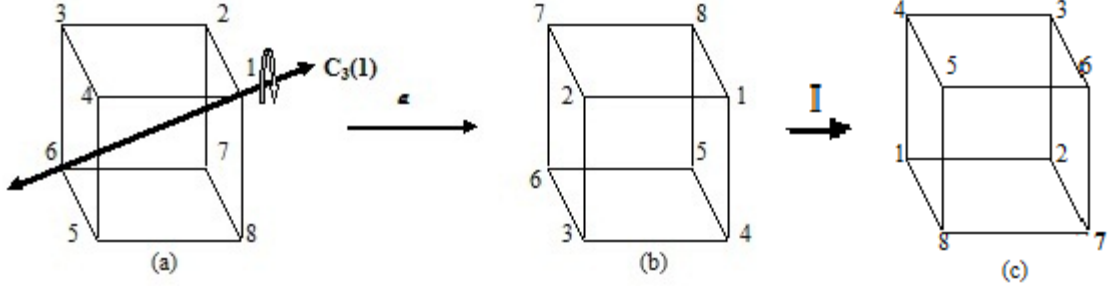
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

6.3.6. İnversiyon – C_3 eksenlerinde dönme simetri işlemleri (S_6)

“İnversiyon – Dönme “ simetri elemanı da S_n ile temsil edilir. Bu simetri işlemin gereği; önce küpe inversiyon işlemi uygulanır. Bir sonraki adımda ise inversiyon işlemi uygulanan küp, seçilen dönme simetri ekseni etrafında proper (saat yönünün tersi yönde) döndürülür. Ya da tam tersi olarak küpe seçilen eksen etrafında proper dönme uygulanır. Daha sonra elde edilen küpe inversiyon uygulanır.

T_h nokta grubunun elemanlarına baktığımızda 4 S_6 elemanı vardır. S_6 ’nın anlamı; önce küpe inversiyon elemanı uyguluyoruz. Daha sonra ele ettiğimiz şekle seçilen C_3 ekseni etrafında 120° proper dönme uygula demektir. Ya da küpe ilk başta seçilen C_3 ekseni etrafında 120° lik dönme uygulayıp ardından inversiyon uygulanır. Yukarıda seçilen C_3 ekseni etrafında dönmeleri bulmuştuk. Bu elemanlar a, b, c, d simetri elemanlarına karşılık gelir. a, b, c, d elemanlarından sonra inversiyon uygularsak S_6 elemanlarını elde ederiz.

$C_3(1)$ simetri eksenini kullanarak 1 köşesi arkaya bakacak şekilde 120° lik dönme işlemi yaptığımızda “ a ” elemanını elde ederiz. Elde ettiğimiz “ a ” elemanına inversiyon uygularsak “ a^* ” elemanını elde ederiz (Şekil 6.15).

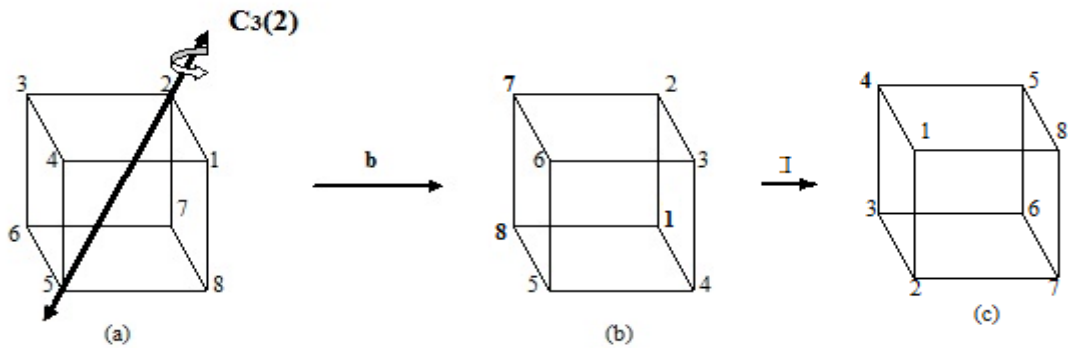


Şekil 6.15. a^* simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ a^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$a^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 4 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$C_3(2)$ simetri eksenini kullanarak 2 köşesi arkaya bakacak şekilde 120° lik dönme işlemi yaptığımızda “ b ” elemanını elde ederiz. Elde ettiğimiz “ b ” elemanına inversiyon uygularsak “ b^* ” elemanını elde ederiz (Şekil 6.16).

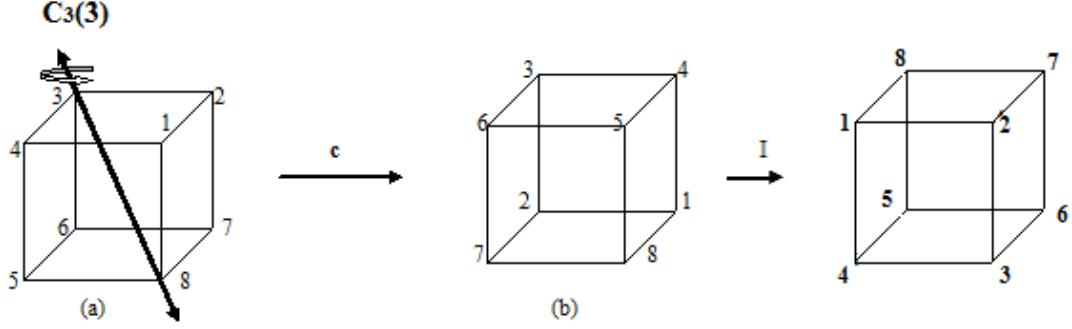


Şekil 6.16. b^* simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ b^* ” operasyonunun permütasyon aşağıdaki gibi karşılığını yazabiliriz:

$$b^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_3(3)$ simetri eksenini kullanılarak 3 köşesi bize bakacak şekilde 120° lik dönme işlemi yaptığımızda “c” elemanını elde ederiz. Elde ettiğimiz “c” elemanına inversiyon uygularsak “ c^* ” elemanını elde ederiz (Şekil 6.17).

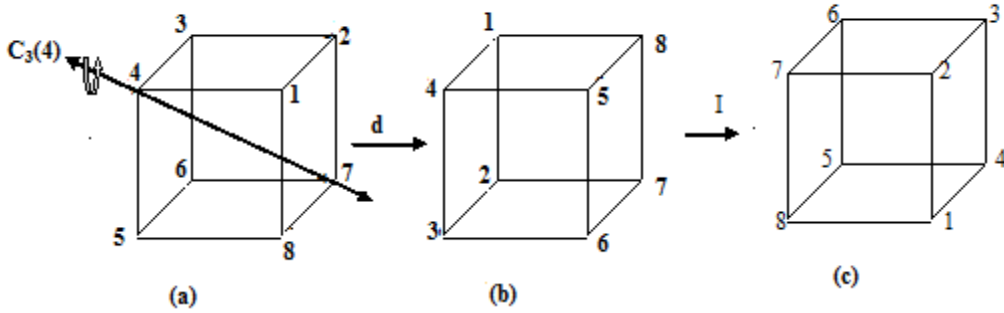


Şekil 6.17. c^* simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ c^* ” operasyonunun permütasyon aşağıdaki gibi karşılığını yazabiliriz:

$$c^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 8 & 5 & 6 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$C_3(4)$ simetri eksenini kullanılarak 4 köşesi bize bakacak şekilde 120° lik dönme işlemi yaptığımızda “d” elemanını elde ederiz. Elde ettiğimiz “d” elemanına inversiyon uygularsak “ d^* ” elemanını elde ederiz (Şekil 6.18).



Şekil 6.18 d^* simetri elemanı.

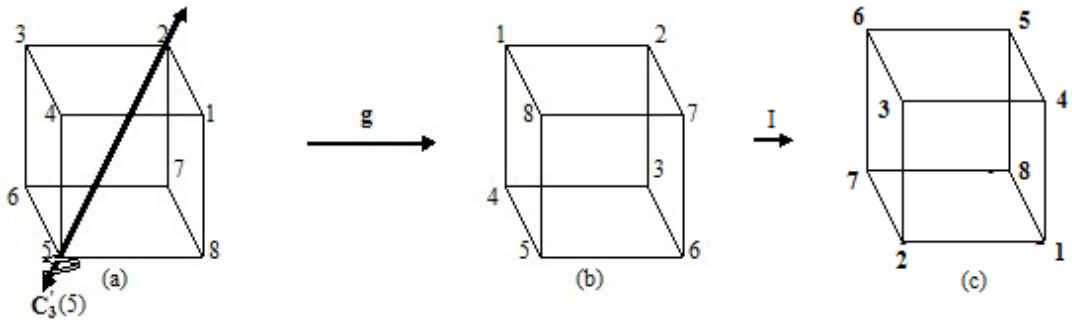
Bu simetri işlemi sonucunda “ d^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$d^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 7 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

6.3.7. İncersiyon – C'_3 eksenlerinde dönme simetri işlemleri (S'_6)

T_h nokta grubunun elemanlarına baktığımızda $4S'_6$ elemanı vardır. S'_6 nün anlamı; önce küpe incersiyon elemanı uyguluyoruz. Daha sonra ele ettiğimiz şekle seçilen C'_3 eksenini etrafında 120° proper dönme uygula demektir. Ya da küpe ilk başta seçilen C'_3 eksenini etrafında 120° lik dönme uygulayıp ardından incersiyon uygulanır. Yukarıda seçilen C'_3 eksenini etrafında dönmeleri bulmuştuk. Bu elemanlar f, g, h, i simetri elemanlarına karşılık gelir. f, g, h, i elemanlarından sonra incersiyon uygularsak S'_6 elemanlarını elde ederiz.

C'_3 (5) simetri eksenini kullanarak 5 köşesi bize bakacak şekilde 120° lik dönme işlemi yaptığımızda “ g ” elemanını elde ederiz. Elde ettiğimiz “ g ” elemanına incersiyon uygularsak “ g^* ” elemanını elde ederiz (Şekil 6.19).

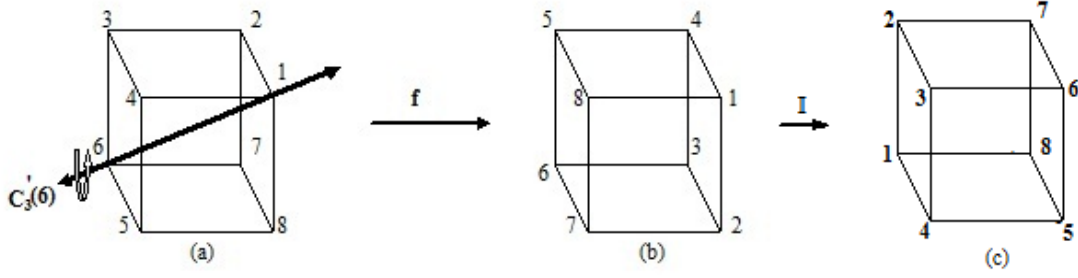


Şekil 6.19. g^* simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ g^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$g^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$C_3'(6)$ simetri eksenini kullanılarak 6 köşesi bize bakacak şekilde 120° lik dönme işlemi yaptığımızda “ f ” elemanını elde ederiz. Elde ettiğimiz “ f ” elemanına inversiyon uygularsak “ f^* ” elemanını elde ederiz (Şekil 6.20).

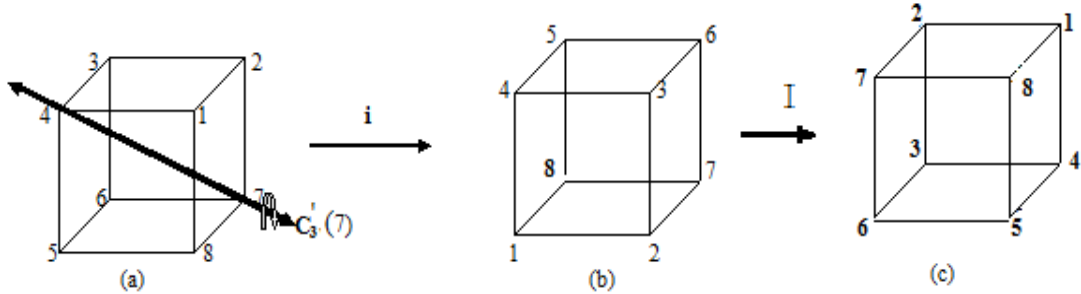


Şekil 6.20. f^* simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ f^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$f^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 8 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$C_3'(7)$ simetri eksenini kullanılarak 7 köşesi arkaya bakacak şekilde 120° lik dönme işlemi yaptığımızda “ i ” elemanını elde ederiz. Elde ettiğimiz “ i ” elemanına inversiyon uygularsak “ i^* ” elemanını elde ederiz (Şekil 6.21).

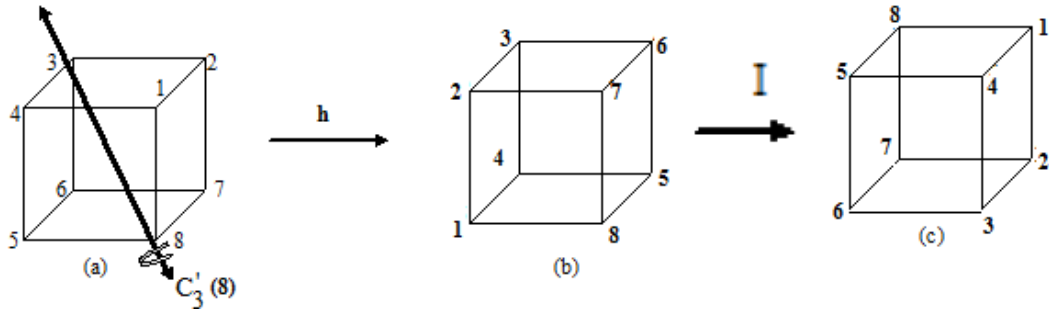


Şekil 6.21. i^* simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ i^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$i^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 7 & 8 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_3' (8)$ simetri eksenini kullanılarak 8 köşesi bize bakacak şekilde 120° lik dönme işlemi yaptığımızda “ h ” elemanını elde ederiz. Elde ettiğimiz “ h ” elemanına inversiyon uygularsak “ h^* ” elemanını elde ederiz (Şekil 6.22).



Şekil 6.22. h^* simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ h^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$h^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 8 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

6.3.8. Küp için dikey simetri düzleminde yansıma simetri işlemleri

Kristal tüm atomların, kristalin içinden geçen bir düzlem aynadan yansıtılması işlemidir. Bu işlemle, düzlemin solunda yer alan atomlar sağa, sağında yer alanlar ise sola taşınır ve benzer atomlar birbiri yerine geçer. Bir simetri elemanı olan simetri

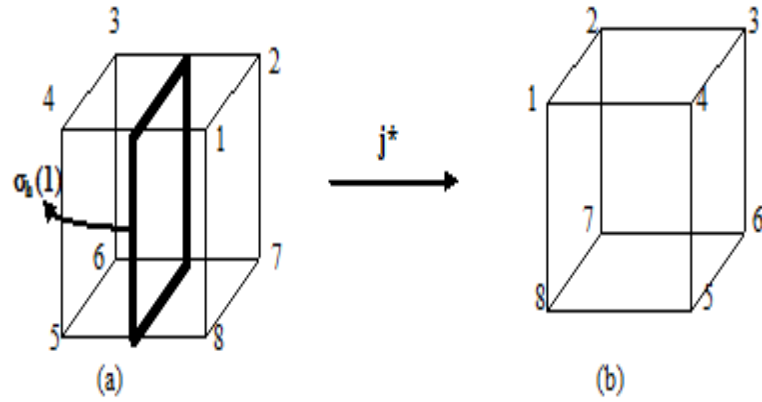
düzlemine göre yapılan işleme yansıma işlemi denir. Yansıma düzlemlerine simetri düzlemi veya ayna düzlemi denir ve σ ile gösterilir.

(σ_h): Kristalin C_n ana dönme eksenine dik olan simetri düzlemine yatay (horizontal) simetri düzlemi denir. Başka bir ifadeyle önce 180° lik dönmeden sonra inversiyondur.

$$\sigma_h = C_2 * I$$

σ_h eksenlerini birbirinden farklılaştırmak için x, z eksenlerinden geçen düzleme $\sigma_h(1)$; x, y eksenlerinin oluşturduğu düzleme $\sigma_h(2)$; y, z düzlemlerinin oluşturduğu eksene $\sigma_h(3)$ eksen olarak adlandırıldı.

Küpün x-z eksenlerinin oluşturduğu düzlemlerle çakışık olan ayna yansıma simetri düzlemi $\sigma_h(1)$ ile temsil edilmiştir (Şekil 32). $\sigma_h(1)$ simetri düzleminde gerçekleşen yansıma simetri operasyonu ise “ j^* ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 6.23(a)’daki ilk durumu, “ j^* ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.23 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.23).

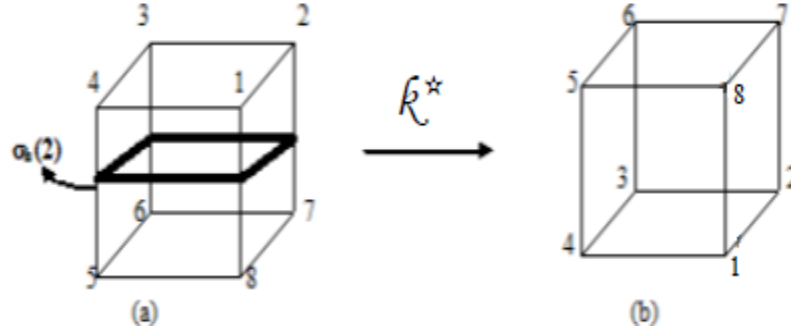


Şekil 6.23. j^* simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ j^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$j^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Küpün x-y eksenlerinin oluşturduğu düzlemle çakışık olan ayna yansıma simetri düzlemi $\sigma_h(2)$ ile temsil edilmiştir (Şekil 6.24). $\sigma_h(2)$ simetri düzleminde gerçekleşen yansıma simetri operasyonu ise “ k^* ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 6.24 (a)’daki ilk durumu, “ k^* ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.24 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.24).

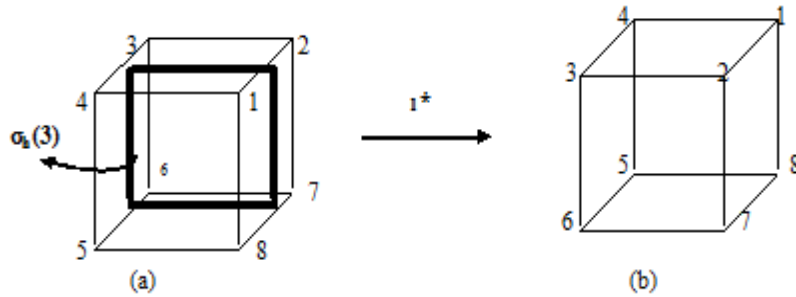


Şekil 6.24. k^* simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ k^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$k^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Küpün y-z eksenlerinin oluşturduğu düzlemle çakışık olan ayna yansıma simetri düzlemi $\sigma_h(3)$ ile temsil edilmiştir (Şekil 6.25). $\sigma_h(3)$ simetri düzleminde gerçekleşen yansıma simetri operasyonu ise “ l^* ” ile temsil edilmiştir. Küpün Şekil 6.25(a)’daki ilk durumu, “ l^* ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.25 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.25).



Şekil 6.25. l^* simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ l^* ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$l^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

6.3.9. T_h Nokta grubunun çarpım tablosu

T_h Nokta grubunun 24 elemanı vardır ve $P(8)$ permütasyon grubunun bir alt grubu ile izomorfiktir. T_h Nokta grubunun çarpım tablosunu oluşturmak için $24 \times 24 = 576$ adet permütasyon çarpımı yapmamız gerekir.

Sonlu bir küme üzerindeki elemanların ikili işlemlerinin sonucu bir tablo ile gösterilebilir ve bu tabloya da *Cayley tablosu* denir (Bradley ve Cracknell, 1972; Dresselhaus ve ark., 2008). T_h Nokta grubunun elemanları için Cayley tablosunu oluşturalım.

Permütasyon grubunun iki elemanın çarpımı şu şekildedir:

$$a \cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Bu işlem basamağı şu şekilde yorumlanır. Yukarıda yazılan $a \cdot f$ permütasyon grubunun elemanlarının çarpım ifadesinde sağdaki elemandan başlanır ve soldaki elemana doğru işlem yapılır. “ f ” elemanın birinci satırından herhangi bir sayı alınır ve bu sayıya “ f ” elemanının ikinci satırında hangi sayı karşılık geldiği bulunduktan sonra bu sayının aynısı “ a ” elemanının ilk satırında bulunur ve bu sayıya “ a ” elemanının ikinci satırında karşılık gelen sayı bulunur. Sonuç elemanda “ f ” nın ilk satırından alınan sayıya karşılık “ a ” elemanın ikinci satırında bulduğumuz sayı karşılık gelir. Bu işlem “ f ” nın ilk satırındaki tüm sayılarda başlayarak hepsi için yapılır.

“ f ” nin birinci satır, sekizinci sütundaki 8 rakamı ikinci satırda 4 rakamına karşılık gelmiştir. “ a ” elemanın ilk satırında bulduğumuzda “ a ” nin birinci satırdaki, 4 rakamı ikinci satırda 8 rakamına karşılık gelmiştir. Bu işlemleri toparlarsak “ f ” nin birinci satır sekizinci sütundaki 8 rakamı, “ a ” nin ikinci satır dördüncü sütunundaki 8 rakamına karşılık geldiğini kolayca görürüz. “ f ” nin birinci satır, yedinci sütundaki 7 rakamı ikinci satırda 1 rakamına karşılık gelmiştir. Aynı şekil de “ a ” nin birinci satır, birinci sütundaki 1 rakamı da yine ikinci satırda 1 rakamına karşılık gelmiştir. Bu işlemleri toparlarsak “ f ” nin birinci satır yedinci sütundaki 7 rakamının, “ a ” nin ikinci satır birinci sütunundaki 1 rakamına karşılık geldiğini kolayca görürüz.

Yukarıdaki bilgiler yardımıyla T_h Nokta grubunun çarpım tablosunu oluşturabiliriz. Bu işlemi yapmak için her bir simetri elemanı diğer simetri elemanlarıyla çarpmamız gerekir. Bunun için 526 tane permütasyon çarpımı yapmalıyız. Örnek olsun diye “ a ” permütasyon elemanının diğer elemanlarla çarpımı aşağıdaki gibidir.

$$a \cdot e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = a$$

$$a \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = f$$

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 8 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = l$$

$$a \cdot c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} = d$$

$$a \cdot d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix} = j$$

$$a \cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = e$$

$$a \bullet h^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 8 & 1 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = j^*$$

$$a \bullet i^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 7 & 8 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = b^*$$

$$a \bullet j^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = g^*$$

$$a \bullet k^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = i^*$$

$$a \bullet l^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix} = c^*$$

T_h Nokta grubunun tüm elemanları içim yukarıdaki çarpımları yaparsak çarpım tablosunu aşağıdaki gibi elde edebiliriz (Çizelge 6.2).

Çizelge 6.2. T_h Nokta grubunun çarpım tablosu (Cayley tablosu)

•	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>
<i>e</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>l</i>	<i>d</i>	<i>j</i>	<i>e</i>	<i>h</i>	<i>k</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>g</i>	<i>i</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>k</i>	<i>g</i>	<i>l</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>h</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>j</i>	<i>h</i>	<i>l</i>	<i>k</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>i</i>	<i>g</i>
<i>d</i>	<i>d</i>	<i>l</i>	<i>c</i>	<i>k</i>	<i>i</i>	<i>g</i>	<i>j</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>b</i>	<i>h</i>
<i>f</i>	<i>f</i>	<i>e</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>k</i>	<i>g</i>	<i>l</i>	<i>d</i>	<i>h</i>	<i>b</i>
<i>g</i>	<i>g</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>b</i>	<i>j</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>c</i>
<i>h</i>	<i>h</i>	<i>j</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>g</i>	<i>i</i>	<i>l</i>	<i>c</i>	<i>k</i>	<i>b</i>	<i>f</i>	<i>d</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>h</i>	<i>k</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>j</i>	<i>f</i>	<i>l</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
<i>j</i>	<i>j</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>b</i>	<i>h</i>	<i>c</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>l</i>	<i>k</i>
<i>k</i>	<i>k</i>	<i>c</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>i</i>	<i>d</i>	<i>g</i>	<i>l</i>	<i>e</i>	<i>j</i>
<i>l</i>	<i>l</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>f</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>k</i>	<i>j</i>	<i>e</i>
<i>I</i>	<i>I</i>	<i>a*</i>	<i>b*</i>	<i>c*</i>	<i>d*</i>	<i>f*</i>	<i>g*</i>	<i>h*</i>	<i>i*</i>	<i>l*</i>	<i>j*</i>	<i>k*</i>
<i>a*</i>	<i>a*</i>	<i>f*</i>	<i>k*</i>	<i>d*</i>	<i>l*</i>	<i>I</i>	<i>h*</i>	<i>j*</i>	<i>b*</i>	<i>c*</i>	<i>g*</i>	<i>i*</i>
<i>b*</i>	<i>b*</i>	<i>j*</i>	<i>g*</i>	<i>k*</i>	<i>a*</i>	<i>c*</i>	<i>I</i>	<i>i*</i>	<i>l*</i>	<i>h*</i>	<i>d*</i>	<i>f*</i>
<i>c*</i>	<i>c*</i>	<i>b*</i>	<i>l*</i>	<i>h*</i>	<i>k*</i>	<i>j*</i>	<i>d*</i>	<i>I</i>	<i>f*</i>	<i>a*</i>	<i>i*</i>	<i>g*</i>
<i>d*</i>	<i>d*</i>	<i>k*</i>	<i>c*</i>	<i>j*</i>	<i>i*</i>	<i>g*</i>	<i>l*</i>	<i>a*</i>	<i>I</i>	<i>f*</i>	<i>b*</i>	<i>h*</i>
<i>f*</i>	<i>f*</i>	<i>I</i>	<i>i*</i>	<i>l*</i>	<i>c*</i>	<i>a*</i>	<i>j*</i>	<i>g*</i>	<i>k*</i>	<i>d*</i>	<i>h*</i>	<i>b*</i>
<i>g*</i>	<i>g*</i>	<i>d*</i>	<i>I</i>	<i>f*</i>	<i>j*</i>	<i>k*</i>	<i>b*</i>	<i>l*</i>	<i>h*</i>	<i>i*</i>	<i>a*</i>	<i>c*</i>
<i>h*</i>	<i>h*</i>	<i>l*</i>	<i>a*</i>	<i>I</i>	<i>g*</i>	<i>i*</i>	<i>k*</i>	<i>c*</i>	<i>j*</i>	<i>b*</i>	<i>f*</i>	<i>d*</i>
<i>i*</i>	<i>i*</i>	<i>h*</i>	<i>j*</i>	<i>b*</i>	<i>I</i>	<i>l*</i>	<i>f*</i>	<i>k*</i>	<i>d*</i>	<i>g*</i>	<i>c*</i>	<i>a*</i>
<i>j*</i>	<i>j*</i>	<i>c*</i>	<i>f*</i>	<i>a*</i>	<i>h*</i>	<i>b*</i>	<i>i*</i>	<i>d*</i>	<i>g*</i>	<i>k*</i>	<i>I</i>	<i>l*</i>
<i>k*</i>	<i>k*</i>	<i>g*</i>	<i>h*</i>	<i>i*</i>	<i>f*</i>	<i>d*</i>	<i>a*</i>	<i>b*</i>	<i>c*</i>	<i>j*</i>	<i>l*</i>	<i>I</i>
<i>l*</i>	<i>l*</i>	<i>i*</i>	<i>d*</i>	<i>g*</i>	<i>b*</i>	<i>h*</i>	<i>c*</i>	<i>f*</i>	<i>a*</i>	<i>I</i>	<i>k*</i>	<i>j*</i>

Çizelge 6.2. T_h Nokta grubunun çarpım tablosu (devam)

•	I	a^*	b^*	c^*	d^*	f^*	g^*	h^*	i^*	j^*	k^*	l^*
e	I	a^*	b^*	c^*	d^*	f^*	g^*	h^*	i^*	j^*	k^*	l^*
a	a^*	f^*	k^*	d^*	l^*	I	h^*	j^*	b^*	g^*	i^*	c^*
b	b^*	j^*	g^*	k^*	a^*	c^*	I	i^*	l^*	d^*	f^*	h^*
c	c^*	b^*	l^*	h^*	k^*	j^*	d^*	I	f^*	i^*	g^*	a^*
d	d^*	k^*	c^*	j^*	i^*	g^*	l^*	a^*	I	b^*	h^*	f^*
f	f^*	I	i^*	l^*	c^*	a^*	j^*	g^*	k^*	h^*	b^*	d^*
g	g^*	d^*	I	f^*	j^*	k^*	b^*	l^*	h^*	a^*	c^*	i^*
h	h^*	l^*	a^*	I	g^*	i^*	k^*	c^*	j^*	f^*	d^*	b^*
i	i^*	h^*	j^*	b^*	I	l^*	f^*	k^*	d^*	c^*	a^*	g^*
j	l^*	i^*	d^*	g^*	b^*	h^*	c^*	f^*	a^*	k^*	j^*	I
k	j^*	c^*	f^*	a^*	h^*	b^*	i^*	d^*	g^*	I	l^*	k^*
l	k^*	g^*	h^*	i^*	f^*	d^*	a^*	b^*	c^*	l^*	I	j^*
I	e	a	b	c	d	f	g	h	i	k	l	j
a^*	a	f	l	d	j	e	h	k	b	g	i	c
b^*	b	k	g	l	a	c	e	i	j	d	f	h
c^*	c	b	j	h	l	k	d	e	f	i	g	a
d^*	d	l	c	k	i	g	j	a	e	b	h	f
f^*	f	e	i	j	c	a	k	g	l	h	b	d
g^*	g	d	e	f	k	l	b	j	h	a	c	i
h^*	h	j	a	e	g	i	l	c	k	f	d	b
i^*	i	h	k	b	e	j	f	l	d	c	a	g
j^*	k	c	f	a	h	b	i	d	g	e	j	l
k^*	l	g	h	i	f	d	a	b	c	j	e	k
l^*	j	i	d	g	b	h	c	f	a	l	k	e

6.3.10. T_h Nokta grubu için grup aksiyomları

Çizelge 6.2 'yi kullanarak T_h Nokta grubunun grup aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

1) Kapalılık Aksiyomu

$$a \bullet l^* = c^* \text{ ve } c^* \in T_h$$

$$l^* \bullet c = g^* \text{ ve } g^* \in T_h$$

$$d \bullet l = h \text{ ve } h \in T_h$$

$$l^* \bullet j^* = l \text{ ve } l \in T_h$$

T_h Nokta grubu kapalılık aksiyomunu sağlar.

2) Birleşme Aksiyomu

$$(a \bullet k) \bullet c = a \bullet (k \bullet c)$$

$$g \bullet c = a \bullet a$$

$$f = f$$

$$(l^* \bullet j^*) \bullet d^* = l^* \bullet (j^* \bullet d^*)$$

$$l \bullet d^* = l^* \bullet h$$

$$f^* = f^*$$

T_h Nokta grubu birleşme aksiyomunu sağlar.

3) Ters Eleman Aksiyomu

Grup içinde her bir elemanın tersi olmalı ve grup içine düşmelidir.

$$e^{-1} = e, a^{-1} = f, b^{-1} = g, c^{-1} = h, d^{-1} = i, f^{-1} = a, g^{-1} = b, h^{-1} = c, i^{-1} = d, j^{-1} = j, k^{-1} = k, l^{-1} = l, I^{-1} = I, a^{*-1} = f^*, b^{*-1} = g^*, c^{*-1} = h^*, d^{*-1} = i^*, f^{*-1} = a^*, g^{*-1} = b^*, h^{*-1} = c^*, i^{*-1} = d^*, j^{*-1} = j^*, k^{*-1} = k^*, l^{*-1} = l^*$$

Yukarıdan görüldüğü gibi her bir elemanı tersi var ve grubun içine düşüyor.

4) Birim Eleman Aksiyomu

“e” T_h Nokta grubunun birim eleman özelliğini sağlar.

T_h Nokta grubu grup aksiyomlarını sağladığı için bir gruptur.

5) Değişme Özelliği

$$a \cdot k = k \cdot a$$

$$l^* \cdot h^* = h^* \cdot l^*$$

$$g \neq c$$

$$f \neq b$$

Değişme özelliğini sağlamadığı için T_h Nokta grubunu Abelian Grup değildir.

6.3.11. T_h Nokta grubunun ve elemanlarının dereceleri

Tanım 1, Tanım 3 ve Teorem 1 kullanılarak (Bkz. Bölüm. 4.3) T_h Nokta grubunun ve her bir elemanın derecesini bulabiliriz.

$T_h = \{e, a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l, I, a^*, b^*, c^*, d^*, f^*, g^*, h^*, i^*, j^*, k^*, l^*\}$ seti T_h Nokta grubunun elemanlarını göstermektedir. T_h Nokta grubunun derecesi Tanım 1'e göre 24 tür. Tanım 3 ve Teorem1 kullanılarak her bir elemanın derecesini bulalım.

- 1) $e^1 = e$ olduğundan e 'nin mertebesi 1 dir.
- 2) $a^3 = a \cdot a \cdot a = a \cdot f = e$ olduğundan a 'nın mertebesi 3 tür.
- 3) $b^3 = b \cdot b \cdot b = b \cdot g = e$ olduğundan b 'nin mertebesi 3 tür.
- 4) $c^3 = c \cdot c \cdot c = c \cdot h = e$ olduğundan c 'nin mertebesi 3 tür.
- 5) $d^3 = d \cdot d \cdot d = d \cdot i = e$ olduğundan d 'nin mertebesi 3 tür.
- 6) $f^3 = f \cdot f \cdot f = f \cdot a = e$ olduğundan f 'nin mertebesi 3 tür.
- 7) $g^3 = g \cdot g \cdot g = g \cdot b = e$ olduğundan g 'nin mertebesi 3 tür.
- 8) $h^3 = h \cdot h \cdot h = h \cdot c = e$ olduğundan h 'nin mertebesi 3 tür.
- 9) $i^3 = i \cdot i \cdot i = i \cdot d = e$ olduğundan i 'nin mertebesi 3 tür.
- 10) $j^2 = j \cdot j = e$ olduğundan j 'nin mertebesi 2'dir.
- 11) $k^2 = k \cdot k = e$ olduğundan k 'nin mertebesi 2'dir.
- 12) $l^2 = l \cdot l = e$ olduğundan l 'nin mertebesi 2'dir.
- 13) $I^2 = I \cdot I = e$ olduğundan I 'nin mertebesi 2'dir.
- 14) $a^{*6} = a^* \cdot a^* \cdot a^* \cdot a^* \cdot a^* \cdot a^* = a^* \cdot a^* \cdot a^* \cdot a^* \cdot f = a^* \cdot a^* \cdot a^* \cdot I = a^* \cdot a^* \cdot a = a^* \cdot e = a^*$ olduğundan a^* 'nin mertebesi 6'dır.
- 15) $b^{*6} = b^* \cdot b^* \cdot b^* \cdot b^* \cdot b^* \cdot b^* = b^* \cdot b^* \cdot b^* \cdot b^* \cdot g = b^* \cdot b^* \cdot b^* \cdot I = b^* \cdot b^* \cdot b = b^* \cdot e = b^*$ olduğundan b^* 'nin mertebesi 6'dır.
- 16) $c^{*6} = c^* \cdot c^* \cdot c^* \cdot c^* \cdot c^* \cdot c^* = c^* \cdot c^* \cdot c^* \cdot c^* \cdot h = c^* \cdot c^* \cdot c^* \cdot I = c^* \cdot c^* \cdot c = c^* \cdot e = c^*$ olduğundan c^* 'nin mertebesi 6'dır.

$$17) d^{*6} = d^* \cdot d^* \cdot d^* \cdot d^* \cdot d^* \cdot d^* = d^* \cdot d^* \cdot d^* \cdot d^* \cdot i = d^* \cdot d^* \cdot d^* \cdot I = d^* \cdot d^* \cdot d^* \cdot e = d^* \cdot d^* \text{ olduğundan } d^* \text{'nin mertebesi } 6 \text{ 'dır.}$$

$$18) f^{*6} = f^* \cdot f^* \cdot f^* \cdot f^* \cdot f^* \cdot f^* = f^* \cdot f^* \cdot f^* \cdot f^* \cdot a = f^* \cdot f^* \cdot f^* \cdot I = f^* \cdot f^* \cdot f^* \cdot e = f^* \text{ olduğundan } f^* \text{'nin mertebesi } 6 \text{ 'dır.}$$

$$19) g^{*6} = g^* \cdot g^* \cdot g^* \cdot g^* \cdot g^* \cdot g^* = g^* \cdot g^* \cdot g^* \cdot g^* \cdot b = g^* \cdot g^* \cdot g^* \cdot I = g^* \cdot g^* \cdot g^* \cdot e = g^* \text{ olduğundan } g^* \text{'nin mertebesi } 6 \text{ 'dır.}$$

$$20) h^{*6} = h^* \cdot h^* \cdot h^* \cdot h^* \cdot h^* \cdot h^* = h^* \cdot h^* \cdot h^* \cdot h^* \cdot c = h^* \cdot h^* \cdot h^* \cdot I = h^* \cdot h^* \cdot h^* \cdot e = h^* \text{ olduğundan } h^* \text{'nin mertebesi } 6 \text{ 'dır.}$$

$$21) i^{*6} = i^* \cdot i^* \cdot i^* \cdot i^* \cdot i^* \cdot i^* = i^* \cdot i^* \cdot i^* \cdot i^* \cdot d = i^* \cdot i^* \cdot i^* \cdot I = i^* \cdot i^* \cdot i^* \cdot e = i^* \text{ olduğundan } i^* \text{'nin mertebesi } 6 \text{ 'dır.}$$

$$22) j^{*2} = j^* \cdot j^* = e \text{ olduğundan } j^* \text{'nin mertebesi } 2 \text{ 'dır.}$$

$$23) k^{*2} = k^* \cdot k^* = e \text{ olduğundan } k^* \text{'nin mertebesi } 2 \text{ 'dır.}$$

$$24) l^{*2} = l^* \cdot l^* = e \text{ olduğundan } l^* \text{'nin mertebesi } 2 \text{ 'dır.}$$

Yukarıda T_h Nokta grubunun tüm elemanlarının dereceleri bulunmuştur. T_h Nokta grubunun mertebesi 24'tür. Elemanların mertebelerine baktığımızda T_h Nokta grubunun mertebesinin bir bölenidir. Elemanların mertebeleri şöyledir; 1, 2, 3, 6. Görüldüğü gibi hepsi 24'ün bir bölenidir.

6.3.12. T_h Nokta grubunun Abelian alt grupları

Tanım 4 (Bkz. Bölüm. 4.3) ve daha önce bulduğumuz elemanların derecelerini kullanarak T_h Nokta grubunun Abelian alt gruplarını bulabiliriz. Her bir elemanın derecesini kullanarak elemanlara Tanım 4'ü uygulayalım.

1) a elemanın mertebesi 3'tür.

$$a \rightarrow (e, a, a^2) \rightarrow (e, a, f)$$

2) b elemanın mertebesi 3'tür.

$$b \rightarrow (e, b, b^2) \rightarrow (e, b, g)$$

3) c elemanın mertebesi 3'tür.

$$c \rightarrow (e, c, c^2) \rightarrow (e, c, h)$$

4) d elemanın mertebesi 3'tür.

$$d \rightarrow (e, d, d^2) \rightarrow (e, d, i)$$

5) f elemanın mertebesi 3'tür.

$$f \rightarrow (e, f, f^2) \rightarrow (e, f, a)$$

6) g elemanın mertebesi 3'tür.

$$g \rightarrow (e, g, g^2) \rightarrow (e, g, b)$$

7) h elemanın mertebesi 3'tür.

$$h \rightarrow (e, h, h^2) \rightarrow (e, h, c)$$

8) i elemanın mertebesi 3'tür.

$$i \rightarrow (e, i, i^2) \rightarrow (e, i, d)$$

9) j elemanın mertebesi 2'dir.

$$j \rightarrow (e, j)$$

10) k elemanın mertebesi 2'dir.

$$k \rightarrow (e, k)$$

11) l elemanın mertebesi 2'dir.

$$l \rightarrow (e, l)$$

12) I elemanın mertebesi 2'dir.

$$I \rightarrow (e, I)$$

13) a^* elemanın mertebesi 6'dır.

$$a^* \rightarrow (e, a^*, a^{*2}, a^{*3}, a^{*4}, a^{*5}) \rightarrow (e, a^*, f, I, a, f^*)$$

14) b^* elemanın mertebesi 6'dır.

$$b^* \rightarrow (e, b^*, b^{*2}, b^{*3}, b^{*4}, b^{*5}) \rightarrow (e, b^*, g, I, b, g^*)$$

15) c^* elemanın mertebesi 6'dır.

$$c^* \rightarrow (e, c^*, c^{*2}, c^{*3}, c^{*4}, c^{*5}) \rightarrow (e, c^*, h, I, c, h^*)$$

16) d^* elemanın mertebesi 6'dır.

$$d^* \rightarrow (e, d^*, d^{*2}, d^{*3}, d^{*4}, d^{*5}) \rightarrow (e, d^*, i, I, d, i^*)$$

17) f^* elemanın mertebesi 6'dır.

$$f^* \rightarrow (e, f^*, f^{*2}, f^{*3}, f^{*4}, f^{*5}) \rightarrow (e, f^*, a, I, f, a^*)$$

18) g^* elemanın mertebesi 6'dır.

$$g^* \rightarrow (e, g^*, g^{*2}, g^{*3}, g^{*4}, g^{*5}) \rightarrow (e, g^*, b, I, g, b^*)$$

19) h^* elemanın mertebesi 6'dır.

$$h^* \rightarrow (e, h^*, h^{*2}, h^{*3}, h^{*4}, h^{*5}) \rightarrow (e, h^*, c, I, h, c^*)$$

20) i^* elemanın mertebesi 6'dır.

$$i^* \rightarrow (e, i^*, i^{*2}, i^{*3}, i^{*4}, i^{*5}) \rightarrow (e, i^*, d, I, i, d^*)$$

21) j^* elemanın mertebesi 2'dir.

$$j^* \rightarrow (e, j^*)$$

22) k^* elemanın mertebesi 2'dir.

$$k^* \rightarrow (e, k^*)$$

23) l^* elemanın mertebesi 2'dir.

$$l^* \rightarrow (e, l^*)$$

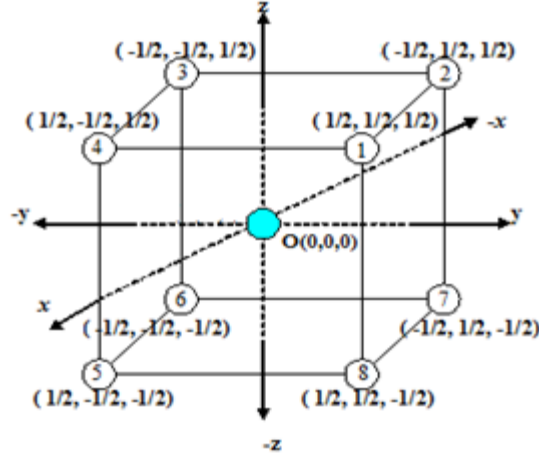
24) e birim elemanın derecesi 1'dir. $e \rightarrow (e)$

Bu işlemler sonucunda T_h Nokta grubunun 16 tane Abelian alt grubu olduğunu görebiliriz. T_h Nokta grubunun Abelian alt gruplarını aşağıdaki çizelgede görebilirsiniz (Çizelge 6.3).

Çizelge 6.3. T_h Nokta grubunun Abelian alt grupları

Abelian alt gruplar	Abelian alt gruplar	Abelian alt gruplar
(e)	(e, j)	(e, b^*, g, I, b, g^*)
(e, a, f)	(e, k)	(e, c^*, h, I, c, h^*)
(e, b, g)	(e, l)	(e, d^*, i, I, d, i^*)
(e, c, h)	(e, I)	(e, j^*)
(e, d, i)	(e, a^*, f, I, a, f^*)	$(e, k^*), (e, l^*)$

6.3.13. T_h Nokta grubunun elemanlarının matris temsilleri



Şekil 6.26. Birim küpün köşe koordinatları.

Küpün bir kenar uzunluğunu 1 birim alalım. Küpün hacim merkezi $O(0, 0, 0)$ noktası olsun. Küpün köşe noktalarını (x, y, z) koordinatları cinsinden O noktasına göre tanımlayalım. 1 köşesine ulaşmak için $O(0, 0, 0)$ noktasından x ekseninde $\frac{1}{2}$, y ekseninde $\frac{1}{2}$, z ekseninde $\frac{1}{2}$ birim yerdeğiştirmeliyiz. Böylece 1 köşesinin koordinatlarını $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ olarak elde ederiz. Küpün sekiz köşesinin koordinatları bu şekilde bulunabilir (Şekil 6.26). Küpün köşe noktalarındaki sayılar için elde ettiğimiz (x, y, z) koordinatları bir sütun matris oluşturur. Her bir köşe için sütun matrisleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \hat{1} &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} & \hat{2} &= \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} & \hat{3} &= \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} & \hat{4} &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \\ \hat{5} &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} & \hat{6} &= \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} & \hat{7} &= \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} & \hat{8} &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sütun matrislerini bildiğimize göre T_h Nokta Grubunun elemanlarının matris temsillerini bulmaya çalışalım. İlk olarak “ e ” elemanının matris temsilini bulmaya çalışalım. Varsayalım ki “ e ” elemanının matrisi 3×3 aşağıdaki gibi bir matris olsun.

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

“e” elemanının permütasyon karşılığı yazalım.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Yukarıda yazılmış “e” elemanının permütasyon karşılığına bakarak ilk üç köşeyi nereye götürdüğüne bakalım. “e” elemanının permütasyon karşılığına baktığımızda küpün 1 köşesini yine 1 köşesine götürmüştür. Diğer bir ifadeyle “e” elemanının matris temsili ile küpün 1 köşesinin sütun matrisi ile çarpımı tekrar 1 köşesinin sütun matrisini vermelidir. Yukarıdaki bilgileri kullanarak denklemleri yazalım.

$$\hat{e}(1) = 1$$

$$\hat{e}(1) = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$e_{11} + e_{12} + e_{13} = 1$$

$$e_{21} + e_{22} + e_{23} = 1 \quad (1)$$

$$e_{31} + e_{32} + e_{33} = 1$$

“e” elemanının permütasyon karşılığına baktığımızda küpün 2 köşesini yine 2 köşesine götürmüştür. Diğer bir ifadeyle “e” elemanının matris temsili ile küpün 2 köşesinin sütun matrisi ile çarpımı tekrar 2 köşesinin sütun matrisini vermelidir. Yukarıdaki bilgileri kullanarak denklemleri yazalım.

$$\hat{e}(2) = 2$$

$$\hat{e}(1) = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$-e_{11} + e_{12} + e_{13} = -1$$

$$-e_{21} + e_{22} + e_{23} = 1 \quad (2)$$

$$-e_{31} + e_{32} + e_{33} = 1$$

“e” elemanının permütasyon karşılığına baktığımızda küpün 3 köşesini yine 3 köşesine götürmüştür. Diğer bir ifadeyle “e” elemanın matris temsili ile küpün 3 köşesinin sütun matrisi ile çarpımı tekrar 3 köşesinin sütun matrisini vermelidir. Yukarıdaki bilgileri kullanarak denklemleri yazalım.

$$\hat{e}(3) = 3$$

$$\hat{e}(1) = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -e_{11} - e_{12} + e_{13} &= -1 \\ -e_{21} - e_{22} + e_{23} &= -1 \\ -e_{31} - e_{32} + e_{33} &= 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Yukarıdaki (1) ve (3) denklemlerini kendi aralarında çözdüğümüzde $e_{13}=0$, $e_{23}=0$, $e_{33}=1$ elde ederiz. (1) ve (2) denklemlerini kendi aralarında çözüp yukarıda bulduğumuz sonuçları yerine koyarsak $e_{11}=1$, $e_{21}=0$, $e_{31}=0$ bulunur. Bu bulunan sonuçları her hangi denklemde yerine koyduğumuzda $e_{12}=0$, $e_{22}=1$, $e_{32}=0$ elde edilir. Bu elde ettiğimiz verileri kullanarak “e” elemanın matris temsili aşağıdaki gibi olur.

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Şimdide yukardaki yaptıklarımızı tekrarlayıp “a” simetri elemanının matris temsilini bulalım. Varsayalım ki “a” elemanının matrisi 3x3 aşağıdaki gibi bir matris olsun.

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

“a” elemanının permütasyon karşılığı yazalım.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

“a” elemanın permütasyon karşılığına baktığımızda küpün 1 köşesini yine 1 köşesine götürmüştür. Diğer bir ifadeyle “a” elemanın matris temsili ile küpün 1 köşesinin sütun matrisi ile çarpımı tekrar 1 köşesinin sütun matrisini vermelidir. Yukarıdaki bilgileri kullanarak denklemleri yazalım.

$$\hat{a}(1) = 1$$

$$\hat{a}(1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 1$$

$$a_{21} + a_{22} + a_{23} = 1 \quad (1)$$

$$a_{31} + a_{32} + a_{33} = 1$$

“a” elemanın permütasyon karşılığına baktığımızda küpün 2 köşesini 4 köşesine götürmüştür. Diğer bir ifadeyle “a” elemanın matris temsili ile küpün 2 köşesinin sütun matrisi ile çarpımı 4 köşesinin sütun matrisini vermelidir. Yukarıdaki bilgileri kullanarak denklemleri yazalım.

$$\hat{a}(2) = 4$$

$$\hat{a}(2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$-a_{11} + a_{12} + a_{13} = 1$$

$$-a_{21} + a_{22} + a_{23} = -1 \quad (2)$$

$$-a_{31} + a_{32} + a_{33} = 1$$

“a” elemanın permütasyon karşılığına baktığımızda küpün 3 köşesini 5 köşesine götürmüştür. Diğer bir ifadeyle “a” elemanın matris temsili ile küpün 3 köşesinin sütun matrisi ile çarpımı 5 köşesinin sütun matrisini vermelidir. Yukarıdaki bilgileri kullanarak denklemleri yazalım.

$$\hat{a}(3) = 5$$

$$\hat{a}(3) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$-a_{11} - a_{12} + a_{13} = 1$$

$$-a_{21} - a_{22} + a_{23} = -1 \quad (3)$$

$$-a_{31} - a_{32} + a_{33} = -1$$

Yukarıdaki (1) ve (2) denklemlerindeki her bir denklemi birbiriyle çözersek $a_{11} = 0$, $a_{21} = 1$, $a_{31} = 0$ elde ederiz. (2) ve (3) denklemlerini kendi arasında çözdüğümüzde $a_{12} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{32} = 1$ bulunur. (1) ve (3) denklemlerindeki her bir denklemi birbiriyle çözersek $a_{13} = 1$, $a_{23} = 0$, $a_{33} = 0$ olarak elde ederiz. Bu elde ettiğimiz verileri kullanarak “a” elemanının matris temsili aşağıdaki gibi olur.

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki işlemleri T_h Nokta Grubunun tüm elemanlarına uygulayarak her bir elemanın matris temsili bulunabilir. T_h Nokta Grubunun 24 elemanının matris temsilleri aşağıda verilmiştir (Çizelge 6.4).

Çizelge 6.4. T_h Nokta Grubunun 24 elemanının matris temsilleri

Elemanların matris temsilleri	Elemanların matris temsilleri	Elemanların matris temsilleri
$\hat{e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\hat{i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\widehat{d^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\hat{j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\widehat{f^*} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\hat{k} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\widehat{g^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\hat{l} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\widehat{h^*} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{d} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\hat{l} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\widehat{i^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{f} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\widehat{a^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\widehat{j^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\hat{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\widehat{b^*} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\widehat{k^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
$\hat{h} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\widehat{c^*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\widehat{l^*} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.3.14. T_h Nokta grubunun sınıfları

$T_h = \{e, a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l, I, a^*, b^*, c^*, d^*, f^*, g^*, h^*, i^*, j^*, k^*, l^*\}$ seti T_h Nokta grubunun elemanlarını göstermektedir. T_h Nokta grubunun sınıflarını Tanım 6 ve Tanım 7'yi kullanarak bulabiliriz (Bkz. Bölüm. 4.5). Bir sınıfı bulurken bir eleman alınır ve onun gruptaki tüm elemanlarla eşlenik çifti bulunur ve eşlenik çiftler aynı sınıfta yer alır.

Birim eleman daima tek başına bir sınıf oluşturur ve bir grup oluşturabilen tek sınıftır. Çünkü diğer sınıfların hiçbiri birim eleman içermez. Örneğin “ a ” elemanının eşlenik çiftlerini bulalım;

$$\begin{aligned}
e \cdot a \cdot e^{-1} &= e \cdot a \cdot e = a \cdot e = a \\
a \cdot a \cdot a^{-1} &= a \cdot a \cdot f = f \cdot f = a \\
b \cdot a \cdot b^{-1} &= b \cdot a \cdot g = k \cdot g = i \\
c \cdot a \cdot c^{-1} &= c \cdot a \cdot h = b \cdot h = i \\
d \cdot a \cdot d^{-1} &= d \cdot a \cdot i = l \cdot i = c \\
f \cdot a \cdot f^{-1} &= f \cdot a \cdot a = e \cdot a = a \\
g \cdot a \cdot g^{-1} &= g \cdot a \cdot b = d \cdot b = c \\
h \cdot a \cdot h^{-1} &= h \cdot a \cdot c = j \cdot c = g \\
i \cdot a \cdot i^{-1} &= i \cdot a \cdot d = h \cdot d = g \\
j \cdot a \cdot j^{-1} &= j \cdot a \cdot j = i \cdot j = g \\
k \cdot a \cdot k^{-1} &= k \cdot a \cdot k = c \cdot k = i \\
l \cdot a \cdot l^{-1} &= l \cdot a \cdot g = g \cdot l = c \\
I \cdot a \cdot I^{-1} &= I \cdot a \cdot I = a * \cdot I = a \\
a^* \cdot a \cdot a^{*-1} &= a^* \cdot a \cdot f^* = f^* \cdot f^* = a \\
b^* \cdot a \cdot b^{*-1} &= b^* \cdot a \cdot g^* = j^* \cdot g^* = i \\
c^* \cdot a \cdot c^{*-1} &= c^* \cdot a \cdot h^* = b^* \cdot h^* = i \\
d^* \cdot a \cdot d^{*-1} &= d^* \cdot a \cdot i^* = k^* \cdot i^* = c \\
f^* \cdot a \cdot f^{*-1} &= f^* \cdot a \cdot a^* = I \cdot a^* = a \\
g^* \cdot a \cdot g^{*-1} &= g^* \cdot a \cdot b^* = d^* \cdot b^* = c \\
h^* \cdot a \cdot h^{*-1} &= h^* \cdot a \cdot c^* = l^* \cdot c^* = g \\
i^* \cdot a \cdot i^{*-1} &= i^* \cdot a \cdot d^* = h^* \cdot d^* = g \\
j^* \cdot a \cdot j^{*-1} &= j^* \cdot a \cdot j^* = c^* \cdot j^* = i \\
k^* \cdot a \cdot k^{*-1} &= k^* \cdot a \cdot k^* = g^* \cdot k^* = c \\
l^* \cdot a \cdot l^{*-1} &= l^* \cdot a \cdot l^* = i^* \cdot l^* = g
\end{aligned}$$

Yukarıdaki işlemlerin sonucuna baktığımızda (a, b, c, d, f, g, h, i) elemanlar seti “ a ” elemanının eşlenik çiftidir. Eşleniklerin oluşturduğu sete sınıf denir. (a, b, c, d, f, g, h, i) elemanlar seti T_h Nokta grubunun bir sınıfıdır. Bu set içindeki diğer elemanlar için aynı işlemi uygularsak aynı sonucu tekrar elde ederiz. “ j ” elemanının eşlenik çiftlerini bulalım;

$$\begin{aligned}
e \cdot j \cdot e^{-1} &= e \cdot j \cdot e = j \cdot e = j \\
a \cdot j \cdot a^{-1} &= a \cdot j \cdot f = c \cdot f = k \\
b \cdot j \cdot b^{-1} &= b \cdot j \cdot g = h \cdot g = l \\
c \cdot j \cdot c^{-1} &= c \cdot j \cdot h = a \cdot h = k \\
d \cdot j \cdot d^{-1} &= d \cdot j \cdot i = f \cdot i = l \\
f \cdot j \cdot f^{-1} &= f \cdot j \cdot a = d \cdot a = l \\
g \cdot j \cdot g^{-1} &= g \cdot j \cdot b = i \cdot b = k \\
h \cdot j \cdot h^{-1} &= h \cdot j \cdot c = b \cdot c = l \\
i \cdot j \cdot i^{-1} &= i \cdot j \cdot d = g \cdot d = k \\
j \cdot j \cdot j^{-1} &= j \cdot j \cdot j = e \cdot j = j \\
k \cdot j \cdot k^{-1} &= k \cdot j \cdot k = l \cdot k = j \\
l \cdot j \cdot l^{-1} &= l \cdot j \cdot g = k \cdot l = j \\
I \cdot j \cdot I^{-1} &= I \cdot j \cdot I = l * \cdot I = j \\
a^* \cdot j \cdot a^{*-1} &= a^* \cdot j \cdot f^* = c^* \cdot f^* = k \\
b^* \cdot j \cdot b^{*-1} &= b^* \cdot j \cdot g^* = h^* \cdot g^* = l \\
c^* \cdot j \cdot c^{*-1} &= c^* \cdot j \cdot h^* = a^* \cdot h^* = k \\
d^* \cdot j \cdot d^{*-1} &= d^* \cdot j \cdot i^* = f^* \cdot i^* = l \\
f^* \cdot j \cdot f^{*-1} &= f^* \cdot j \cdot a^* = d^* \cdot a^* = l \\
g^* \cdot j \cdot g^{*-1} &= g^* \cdot j \cdot b^* = i^* \cdot b^* = k \\
h^* \cdot j \cdot h^{*-1} &= h^* \cdot j \cdot c^* = b^* \cdot c^* = l \\
i^* \cdot j \cdot i^{*-1} &= i^* \cdot j \cdot d^* = g^* \cdot d^* = k \\
j^* \cdot j \cdot j^{*-1} &= j^* \cdot j \cdot j^* = k^* \cdot j^* = j \\
k^* \cdot j \cdot k^{*-1} &= k^* \cdot j \cdot k^* = j^* \cdot k^* = j \\
l^* \cdot j \cdot l^{*-1} &= l^* \cdot j \cdot l^* = I \cdot l^* = j
\end{aligned}$$

Yukarıdaki işlemlerin sonucuna baktığımızda (j, k, l) elemanlar seti “ j ” elemanının eşlenik çiftidir. (j, k, l) elemanlar seti T_h Nokta grubunun bir sınıfıdır. Bu işlemleri bu elemanlar dışında T_h Nokta grubunun diğer elemanlarına uyguladığımızda, T_h Nokta grubunun 6 adet sınıfını elde ederiz. T_h Nokta grubunun sınıfları aşağıda verilmiştir (Çizelge 6.5).

Çizelge 6.5. T_h Nokta grubunun sınıfları

Sınıflar	Sınıflar
(e)	(a, b, c, d, f, g, h, i)
(I)	(a*, b*, c*, d*, f*, g*, h*, i*)
(j, k, l)	(j*, k*, l*)

6.3.15. T_h nokta grubunun kosetleri

Daha önce T_h nokta grubunun Abelian alt grupları bulunmuştu (Bkz. Çizelge 6.3.). Tanım 5'i kullanarak T_h nokta grubunun kosetleri bulunabilir (Bkz. Bölüm 4.4.). Herhangi bir Abelian alt grup alıp 'Tanım 5' kullanılarak alınan alt grubun sağ ve sol koseti bulunur. Bu bilgileri kullanarak T_h nokta grubunun tüm kosetleri bulunur.

T_h Nokta grubunun kosetlerinin nasıl bulunduğunu göstermek için, T_h nokta grubunun Abelian alt gruplarından seçilen herhangi bir alt grubun sağ ve sol kosetleri gösterilecektir. Kosetleri bulurken işlemlerin sonucunu T_h nokta grubunun çarpım tablosuna bakarak yazılır (Bkz. Çizelge 6.2.).

(e, a, f) alt grubunu alalım. (e, a, f) Abelian alt grubunun sağ kosetlerini bulalım.

$$\begin{aligned}
(e, a, f) \cdot e &= (e \cdot e, a \cdot e, f \cdot e) = (e, a, f) \\
(e, a, f) \cdot a &= (e \cdot a, a \cdot a, f \cdot a) = (a, f, e) \\
(e, a, f) \cdot b &= (e \cdot b, a \cdot b, f \cdot b) = (b, l, i) \\
(e, a, f) \cdot c &= (e \cdot c, a \cdot c, f \cdot c) = (c, d, j) \\
(e, a, f) \cdot d &= (e \cdot d, a \cdot d, f \cdot d) = (d, j, c) \\
(e, a, f) \cdot f &= (e \cdot f, a \cdot f, f \cdot f) = (f, e, a) \\
(e, a, f) \cdot g &= (e \cdot g, a \cdot g, f \cdot g) = (g, h, k) \\
(e, a, f) \cdot h &= (e \cdot h, a \cdot h, f \cdot h) = (h, k, g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(e, a, f) \cdot i &= (e \cdot i, a \cdot i, f \cdot i) = (i, b, l) \\
(e, a, f) \cdot j &= (e \cdot j, a \cdot j, f \cdot j) = (j, c, d) \\
(e, a, f) \cdot k &= (e \cdot k, a \cdot k, f \cdot k) = (k, g, h) \\
(e, a, f) \cdot l &= (e \cdot l, a \cdot l, f \cdot l) = (l, i, b) \\
(e, a, f) \cdot I &= (e \cdot I, a \cdot I, f \cdot I) = (I, a^*, f^*) \\
(e, a, f) \cdot a^* &= (e \cdot a^*, a \cdot a^*, f \cdot a^*) = (a^*, f^*, I) \\
(e, a, f) \cdot b^* &= (e \cdot b^*, a \cdot b^*, f \cdot b^*) = (b^*, k^*, i^*) \\
(e, a, f) \cdot c^* &= (e \cdot c^*, a \cdot c^*, f \cdot c^*) = (c^*, d^*, l^*) \\
(e, a, f) \cdot d^* &= (e \cdot d^*, a \cdot d^*, f \cdot d^*) = (d^*, l^*, c^*) \\
(e, a, f) \cdot f^* &= (e \cdot f^*, a \cdot f^*, f \cdot f^*) = (f^*, I, a^*) \\
(e, a, f) \cdot g^* &= (e \cdot g^*, a \cdot g^*, f \cdot g^*) = (g^*, h^*, j^*) \\
(e, a, f) \cdot h^* &= (e \cdot h^*, a \cdot h^*, f \cdot h^*) = (h^*, j^*, g^*) \\
(e, a, f) \cdot i^* &= (e \cdot i^*, a \cdot i^*, f \cdot i^*) = (i^*, b^*, k^*) \\
(e, a, f) \cdot j^* &= (e \cdot j^*, a \cdot j^*, f \cdot j^*) = (j^*, g^*, h^*) \\
(e, a, f) \cdot k^* &= (e \cdot k^*, a \cdot k^*, f \cdot k^*) = (k^*, i^*, b^*) \\
(e, a, f) \cdot l^* &= (e \cdot l^*, a \cdot l^*, f \cdot l^*) = (l^*, c^*, d^*)
\end{aligned}$$

(e, a, f) Abelian alt grubunun sağ kosetleri; $\{(e, a, f), (b, l, i), (c, d, j), (h, k, g), (I, a^*, f^*), (b^*, k^*, i^*), (c^*, d^*, l^*), (h^*, j^*, g^*)\}$ olarak bulunur.

(e, a, f) Abelian alt grubunun sol kosetlerini bulalım.

$$\begin{aligned}
e \cdot (e, a, f) &= (e \cdot e, e \cdot a, e \cdot f) = (e, a, f) \\
a \cdot (e, a, f) &= (a \cdot e, a \cdot a, a \cdot f) = (a, f, e) \\
b \cdot (e, a, f) &= (b \cdot e, b \cdot a, b \cdot f) = (b, k, c) \\
c \cdot (e, a, f) &= (c \cdot e, c \cdot a, c \cdot f) = (c, b, k) \\
d \cdot (e, a, f) &= (d \cdot e, d \cdot a, d \cdot f) = (d, l, g) \\
f \cdot (e, a, f) &= (f \cdot e, f \cdot a, f \cdot f) = (f, e, a) \\
g \cdot (e, a, f) &= (g \cdot e, g \cdot a, g \cdot f) = (g, d, l) \\
h \cdot (e, a, f) &= (h \cdot e, h \cdot a, h \cdot f) = (h, j, i) \\
i \cdot (e, a, f) &= (i \cdot e, i \cdot a, i \cdot f) = (i, h, j) \\
j \cdot (e, a, f) &= (j \cdot e, j \cdot a, j \cdot f) = (j, i, h) \\
k \cdot (e, a, f) &= (k \cdot e, k \cdot a, k \cdot f) = (k, c, b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l \bullet (e, a, f) &= (l \bullet e, l \bullet a, l \bullet f) = (l, g, d) \\
I \bullet (e, a, f) &= (I \bullet e, I \bullet a, I \bullet f) = (I, a^*, f^*) \\
a^* \bullet (e, a, f) &= (a^* \bullet e, a^* \bullet a, a^* \bullet f) = (a^*, f^*, I) \\
b^* \bullet (e, a, f) &= (b^* \bullet e, b^* \bullet a, b^* \bullet f) = (b^*, j^*, c^*) \\
c^* \bullet (e, a, f) &= (c^* \bullet e, c^* \bullet a, c^* \bullet f) = (c^*, b^*, j^*) \\
d^* \bullet (e, a, f) &= (d^* \bullet e, d^* \bullet a, d^* \bullet f) = (d^*, k^*, g^*) \\
f^* \bullet (e, a, f) &= (f^* \bullet e, f^* \bullet a, f^* \bullet f) = (f^*, I, a^*) \\
g^* \bullet (e, a, f) &= (g^* \bullet e, g^* \bullet a, g^* \bullet f) = (g^*, d^*, k^*) \\
h^* \bullet (e, a, f) &= (h^* \bullet e, h^* \bullet a, h^* \bullet f) = (h^*, l^*, i^*) \\
i^* \bullet (e, a, f) &= (i^* \bullet e, i^* \bullet a, i^* \bullet f) = (i^*, h^*, l^*) \\
j^* \bullet (e, a, f) &= (j^* \bullet e, j^* \bullet a, j^* \bullet f) = (j^*, c^*, b^*) \\
k^* \bullet (e, a, f) &= (k^* \bullet e, k^* \bullet a, k^* \bullet f) = (k^*, g^*, d^*) \\
l^* \bullet (e, a, f) &= (l^* \bullet e, l^* \bullet a, l^* \bullet f) = (l^*, i^*, h^*)
\end{aligned}$$

(e, a, f) Abelian alt grubunun sol kosetleri; $\{(e, a, f), (b, c, k), (d, g, l), (h, i, j), (I, a^*, f^*), (b^*, c^*, j^*), (d^*, g^*, k^*), (h^*, i^*, l^*)\}$ olarak bulunur. T_h nokta grubunun Abelian alt grupların hepsinin sağ ve sol kosetleri verilmiştir (Çizelge 6.6).

Çizelge 6.6. T_h nokta grubunun Abelian alt gruplarının sağ ve sol kosetleri

T_h Nokta Grubunun Abelian Alt Grupları	Sağ Koset	Sol Koset
(e)	$\{(e), (a), (b), (c), (d), (f), (g), (h), (i), (j), (k), (l), (I), (a^*), (b^*), (c^*), (d^*), (f^*), (g^*), (h^*), (i^*), (j^*), (k^*), (l^*)\}$	$\{(e), (a), (b), (c), (d), (f), (g), (h), (i), (j), (k), (l), (I), (a^*), (b^*), (c^*), (d^*), (f^*), (g^*), (h^*), (i^*), (j^*), (k^*), (l^*)\}$
(e, a, f)	$\{(e, a, f), (b, l, i), (c, d, j), (h, k, g), (I, a^*, f^*), (b^*, k^*, i^*), (c^*, d^*, l^*), (h^*, j^*, g^*)\}$	$\{(e, a, f), (b, c, k), (d, g, l), (h, i, j), (I, a^*, f^*), (b^*, c^*, j^*), (d^*, g^*, k^*), (h^*, i^*, l^*)\}$
(e, b, g)	$\{(e, b, g), (a, d, k), (c, f, l), (h, i, j), (I, b^*, g^*), (c^*, k^*, f^*), (h^*, i^*, l^*), (a^*, j^*, d^*)\}$	$\{(e, b, g), (a, l, h), (c, d, j), (i, f, k), (I, b^*, g^*), (c^*, d^*, l^*), (f^*, i^*, j^*), (a^*, k^*, h^*)\}$
(e, c, h)	$\{(e, c, h), (a, b, j), (d, g, l), (f, i, k), (I, c^*, h^*), (a^*, b^*, l^*), (d^*, g^*, k^*), (f^*, j^*, i^*)\}$	$\{(e, c, h), (a, d, k), (b, i, l), (f, g, j), (I, c^*, h^*), (a^*, d^*, j^*), (b^*, i^*, k^*), (f^*, g^*, l^*)\}$

Çizelge 6.6. T_h nokta grubunun Abelian alt gruplarının sağ ve sol kosetleri (devam)

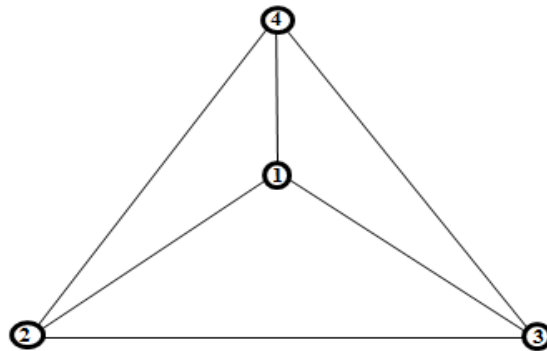
T_h Nokta Grubunun Abelian Alt Grupları	Sağ Koset	Sol Koset
(e, d, i)	$\{(e, d, i), (a, h, l), (b, c, k), (f, g, j), (I, d^*, i^*), (a^*, h^*, k^*), (b^*, c^*, j^*), (f^*, g^*, l^*)\}$	$\{(e, d, i), (a, b, j), (c, f, l), (h, g, k), (I, d^*, i^*), (a^*, b^*, l^*), (c^*, f^*, k^*), (h^*, g^*, j^*)\}$
(e, j)	$\{(e, j), (a, i), (b, d), (c, g), (f, h), (k, l), (I, l^*), (a^*, i^*), (b^*, d^*), (c^*, g^*), (f^*, h^*), (k^*, j^*)\}$	$\{(e, j), (a, c), (b, h), (d, f), (g, i), (k, l), (I, l^*), (a^*, c^*), (b^*, h^*), (d^*, f^*), (g^*, i^*), (k^*, j^*)\}$
(e, k)	$\{(e, k), (a, c), (b, f), (d, h), (g, i), (j, l), (I, j^*), (a^*, c^*), (b^*, f^*), (d^*, h^*), (g^*, i^*), (k^*, l^*)\}$	$\{(e, k), (a, g), (b, d), (c, i), (f, h), (j, l), (I, j^*), (a^*, g^*), (b^*, d^*), (c^*, i^*), (f^*, h^*), (k^*, l^*)\}$
(e, l)	$\{(e, l), (a, g), (b, h), (c, i), (d, f), (j, k), (I, k^*), (a^*, g^*), (b^*, h^*), (c^*, i^*), (d^*, f^*), (l^*, j^*)\}$	$\{(e, l), (a, i), (b, f), (c, g), (d, h), (j, k), (I, k^*), (a^*, i^*), (b^*, f^*), (c^*, g^*), (d^*, h^*), (l^*, j^*)\}$
(e, I)	$\{(e, I), (a, a^*), (b, b^*), (c, c^*), (d, d^*), (f, f^*), (g, g^*), ((h, h^*), (i, i^*), (j, l^*), (k, j^*), (l, k^*)\}$	$\{(e, I), (a, a^*), (b, b^*), (c, c^*), (d, d^*), (f, f^*), (g, g^*), ((h, h^*), (i, i^*), (j, l^*), (k, j^*), (l, k^*)\}$
(e, a^*, f, I, a, f^*)	$\{(e, a^*, f, I, a, f^*), (b, b^*, l, k^*, i, i^*), (c, c^*, d, d^*, j, l^*), (g, g^*, h, h^*, k, j^*)\}$	$\{(e, a^*, f, I, a, f^*), (b, b^*, c, c^*, k, j^*), (d, d^*, g, g^*, l, k^*), (h, h^*, j, l^*, i, i^*)\}$
(e, b^*, g, I, b, g^*)	$\{(e, b^*, g, I, b, g^*), (a, a^*, k, j^*, d, d^*), (c, c^*, f, f^*, l, k^*), (i, i^*, h, h^*, j, l^*)\}$	$\{(e, b^*, g, I, b, g^*), (a, a^*, l, k^*, h, h^*), (c, c^*, d, d^*, j, l^*), (i, i^*, f, f^*, k, j^*)\}$
(e, c^*, h, I, c, h^*)	$\{(e, c^*, h, I, c, h^*), (a, a^*, j, l^*, b, b^*), (d, d^*, g, g^*, l, k^*), (i, i^*, f, f^*, k, j^*)\}$	$\{(e, c^*, h, I, c, h^*), (a, a^*, k, j^*, d, d^*), (b, b^*, i, i^*, l, k^*), (g, g^*, f, f^*, j, l^*)\}$
(e, d^*, i, I, d, i^*)	$\{(e, d^*, i, I, d, i^*), (a, a^*, l, k^*, h, h^*), (b, b^*, c, c^*, k, j^*), (g, g^*, f, f^*, j, l^*)\}$	$\{(e, d^*, i, I, d, i^*), (a, a^*, j, l^*, b, b^*), (f, f^*, c, c^*, l, k^*), (g, g^*, h, h^*, k, j^*)\}$
(e, j^*)	$\{(e, j^*), (c, a^*), (f, b^*), (a, c^*), (h, d^*), (b, f^*), (i, g^*), (d, h^*), (g, i^*), (j, k^*), (k, I), (l, l^*)\}$	$\{(e, j^*), (g, a^*), (d, b^*), (i, c^*), (b, d^*), (h, f^*), (a, g^*), (f, h^*), (c, i^*), (j, k^*), (k, I), (l, l^*)\}$

Çizelge 6.6. T_h nokta grubunun Abelian alt gruplarının sağ ve sol kosetleri (devam)

T_h Nokta Grubunun Abelian Alt Grupları	Sağ Koset	Sol Koset
(e, k^*)	$\{ (e, k^*), (g, a^*), (h, b^*), (i, c^*), (f, d^*), (d, f^*), (a, g^*), (b, h^*), (c, i^*), (j, j^*), (l, l), (k, l^*) \}$	$\{ (e, k^*), (i, a^*), (f, b^*), (g, c^*), (h, d^*), (b, f^*), (c, g^*), (d, h^*), (a, i^*), (j, j^*), (l, l), (k, l^*) \}$
(e, l^*)	$\{ (e, l^*), (i, a^*), (d, b^*), (g, c^*), (b, d^*), (h, f^*), (c, g^*), (f, h^*), (a, i^*), (l, j^*), (j, l), (k, k^*) \}$	$\{ (e, l^*), (c, a^*), (h, b^*), (a, c^*), (f, d^*), (d, f^*), (i, g^*), (b, h^*), (g, i^*), (l, j^*), (j, l), (k, k^*) \}$

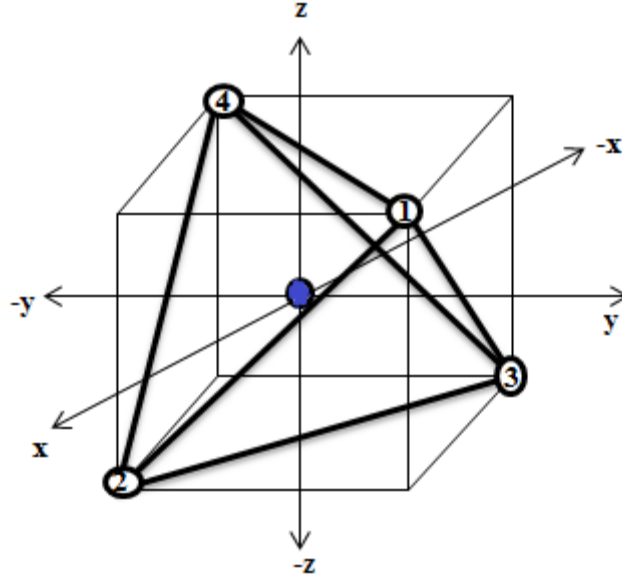
6.4.T Nokta Grubunun P(4) Permütasyon Grubu ile İncelenmesi

P(4) permütasyon grubunun 24 elemanı bulunmaktadır. 12 elemanlı T nokta grubu da P(4) permütasyon grubunun bir alt grubu ile izomorfiktir. Bu bilgi yardımıyla T nokta grubunun simetri elemanlarını aşağıda açık bir şekilde anlatılan simetri işlemleri ile bulabiliriz. Çizelge 6.1' e baktığımızda T nokta grubunun simetri elemanları; E, $3C_2$, $4C_3$, $4C'_3$ simetri elemanlarından oluşan 12 elemanlı bir nokta grubudur (Bkz. Çizelge 6.1). T kristal sistemine baktığımızda düzgün dörtyüzlüdür. Düzgün dörtyüzlüyü değişmez bırakan yukarıda yazılan simetri operasyonlarını uygulayalım ve 12 elemanın permütasyon karşılığını bulalım.



Şekil 6.27. Düzgün dörtyüzlü.

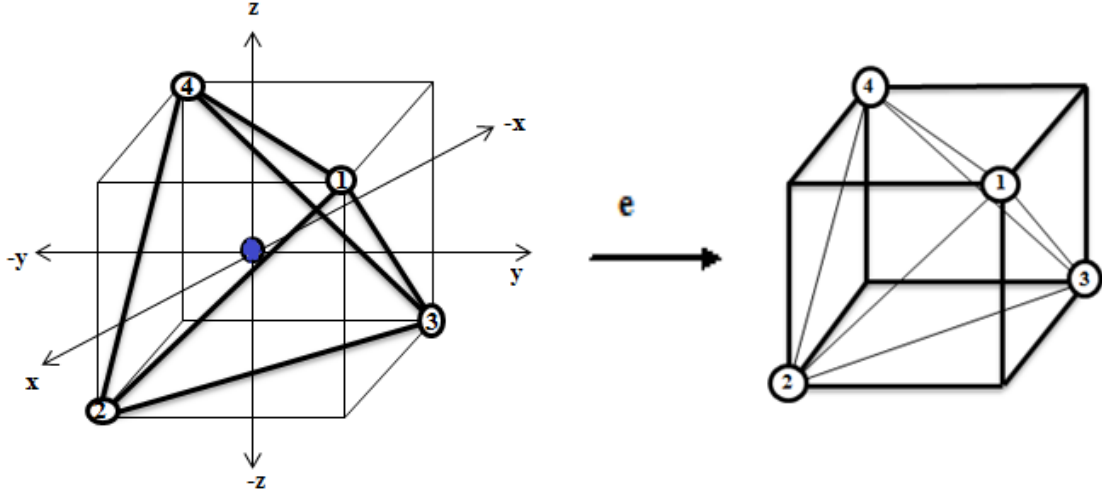
Yukarıda Şekil 6.27’ de düzgün dörtyüzlünün şekli verilmiştir. Düzgün dörtyüzlünün köşelerine numaralar verildikten sonra simetri işlemlerinin daha kolay uygulanması için düzgün dörtyüzlü küpün içine yerleştirildi (Şekil 6.28). Bu şekle T nokta grubunu değişmez bırakan simetri elemanları uygulanır ve yeni oluşan şekle bakılarak simetri elemanlarının permütasyon karşılığı yazılır.



Şekil 6.28. Küp içinde düzgün dörtyüzlü.

6.4.1. Birim eleman

Düzgün dörtyüzlünün ana eksenleri, küpün ana dönme eksenlerine (koordinat eksenlerine (x, y, z)) denk gelmektedir. Bu simetri operatörü, küpün ana dönme eksenlerinden tutularak saatin dönme yönünün tersi yönde (proper dönme) 360 derece ya da sıfır derecelik dönme yapması anlamına gelir. Bu operatör “ e ” ile temsil edilmiştir. Bu işlem sonucunda düzgün dörtyüzlünün ilk durumunu koruması beklenir (Şekil 6.29).



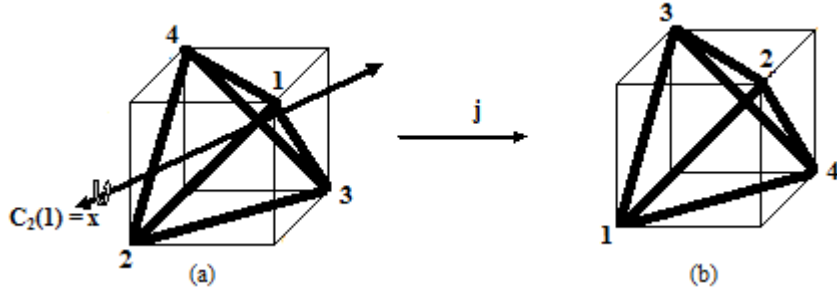
Şekil 6.29. Birim eleman.

Bu simetri operatörünün aşağıdaki gibi bir permütasyon gösterimini yazabiliriz.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

6.4.2. Düzgün dörtyüzlünün iki katlı dönme eksenleri (C_2)

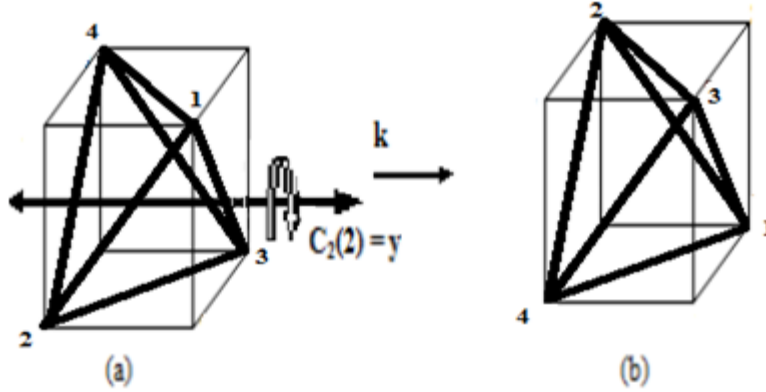
T nokta grubunun elemanlarına baktığımızda $3C_2$ elemanı vardır. C_2 eksenleri küpte (x, y, z) koordinat eksenlerine denk gelmektedir. Bu eksenleri birbirinden farklılaştırmak için x eksenine denk gelen eksen $C_2(1)$, y eksenine denk gelen eksen $C_2(2)$, z eksenine denk gelen eksen $C_2(3)$ ile gösterilir. Küpün 1 ve 2 köşelerinin oluşturduğu yüzeyi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda, seçilen $C_2(1)$ eksen etrafında düzgün dört yüzlünün saat yönünün tersi yönde (proper) 180 derecelik dönme yapması işlemidir. Bu simetri işlemi “j” ile temsil edilmiştir. Düzgün dörtyüzlünün Şekil 6.30 (a)’daki ilk durumu, “j” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.30 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.30).

Şekil 6.30. j elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ j ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

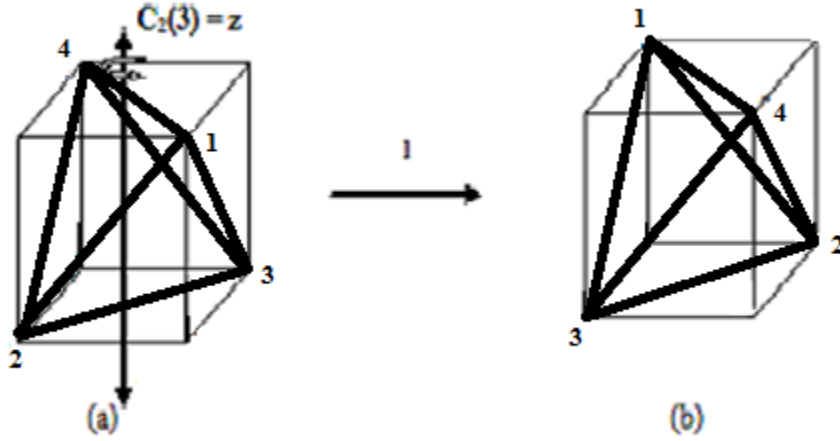
İkinci eksen küpte y eksenine denk gelen $C_2(2)$ eksenidir. Düzgün dörtyüzlünün ilk durumu Şekil 6.31 (a)’ deki gibidir. Küpte şekil 6.31(a)’ de gösterilen küpün 1, 3 köşelerinin oluşturduğu yüzey bize bakacak şekilde $C_2(2)$ ekseninden tutup saatin dönme yönünün tersi yönde döndürülmesidir (Şekil 6.31). Bu simetri işlemi “ k ” ile temsil edilmiştir.

Şekil 6.31. k elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ k ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Üçüncü eksen küpte z eksenine denk gelen $C_2(3)$ eksenidir. Düzgün dörtyüzlünün ilk durumu Şekil 6.32 (a)' deki gibidir. Küpte şekil 6.32 (a)' de gösterilen $C_2(3)$ ekseninden tutulup saatin dönme yönün tersi yönde döndürülmesidir. Bu simetri işlemi “ I ” ile temsil edilmiştir. Düzgün dörtyüzlünün Şekil 6.32 (a)' daki ilk durumu, “ I ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.32 (b)' deki gibi olur (Şekil 6.32).



Şekil 6.32. I elemanı.

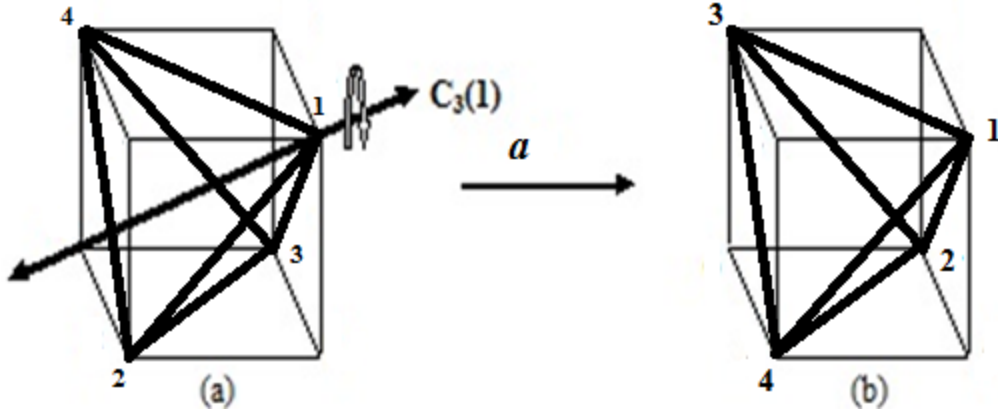
Bu simetri işlemi sonucunda “ I ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz;

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

6.4.3. Düzgün dörtyüzlü için üç katlı dönme eksenini (C_3) simetri işlemleri

T nokta grubunun elemanlarına baktığımızda $4C_3$ elemanı vardır. Küpte dört tane C_3 eksenini vardır ve bu eksenler küpün köşegenlerine karşılık gelir. Eksenleri farklılaştırmak için 1 köşesinden geçen eksen $C_3(1)$, 2 köşesinin karşısındaki köşeden geçen eksen $C_3(2)$, 3 köşesinin karşısındaki köşeden geçen eksen $C_3(4)$, 4 köşesinden geçen eksen $C_3(3)$ ile gösterilir.

İlk işlem C_3 (1) simetri eksenini kullanılarak yapılan simetri işlemidir: Düzgün dörtyüzlünün 1 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda, küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptırılmasıdır. Bu simetri operasyonu “ a ” ile temsil edilmiştir. Düzgün dörtyüzlünün Şekil 6.33 (a)’daki ilk durumu, “ a ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.33 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.33).

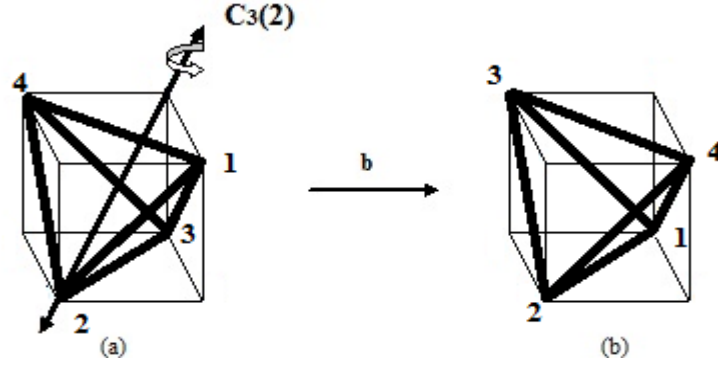


Şekil 6.33. a simetri elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ a ” operasyonunun permütasyon karşılığı aşağıdaki gibidir:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

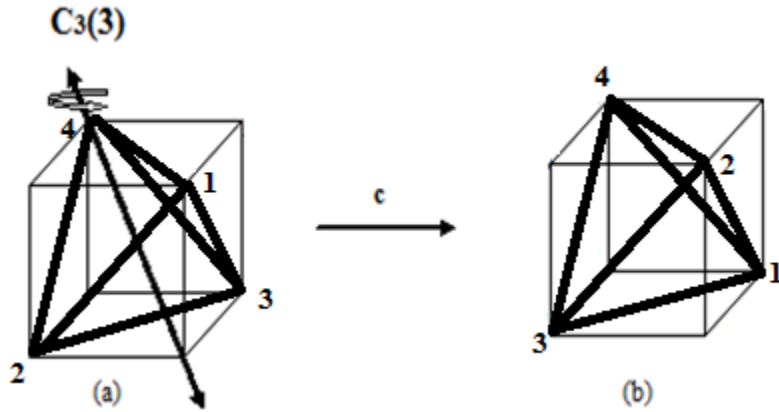
C_3 (2) simetri eksenini kullanılarak düzgün dörtyüzlünün 2 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ b ” ile temsil edilmiştir. Düzgün dörtyüzlünün Şekil 6.34 (a)’daki ilk durumu “ b ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.34(b)’deki gibi olur (Şekil 6.34).

Şekil 6.34. *b* elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “*b*” operasyonunun permütasyon karşılığı aşağıdaki gibidir:

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

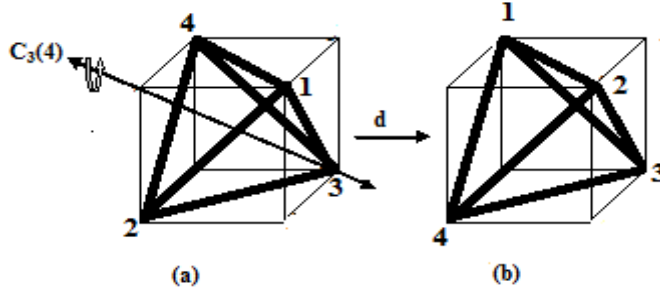
$C_3(3)$ simetri eksenini kullanılarak Düzgün dörtyüzlünün 4 köşesi arkaya bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “*c*” ile temsil edilmiştir. Düzgün dörtyüzlünün Şekil 6.35 (a)’daki ilk durumu “*c*” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.35 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.35).

Şekil 6.35. *c* elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ c ” operasyonunun permütasyon aşağıdaki gibi karşılığını yazabiliriz:

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$C_3(4)$ simetri eksenini kullanılarak düzgün dörtyüzlünün 3 köşesinin karşısında ve eksen üzerinde yer alan köşe bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda düzgün dörtyüzlünün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ d ” ile temsil edilmiştir. Düzgün dörtyüzlünün Şekil 6.36 (a)’daki ilk durumu “ d ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.36 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.36).



Şekil 6.36. d elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ d ” operasyonunun permütasyon karşılığı aşağıdaki gibidir:

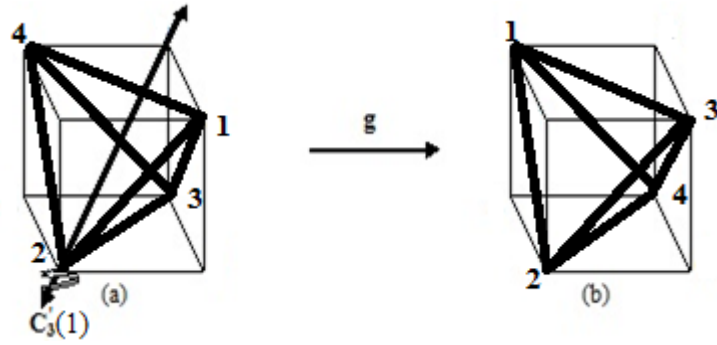
$$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

6.4.4. Düzgün dörtyüzlünün üç katlı dönme eksenini (C'_3) simetri işlemleri

T nokta grubunun elemanlarına baktığımızda $4C'_3$ elemanı vardır. Düzgün dörtyüzlünün dört tane C'_3 eksenini vardır ve bu eksenler küpün köşegenlerine karşılık gelir. Eksenleri farklılaştırmak için 2 köşesinden geçen eksen $C'_3(1)$, 1 köşesinin

karşısındaki köşeden geçen eksen $C'_3(2)$, 3 köşesinden geçen eksen $C'_3(3)$, 4 köşesinin karşısındaki köşeden geçen eksen $C'_3(4)$ ile gösterilir.

$C'_3(1)$ simetri eksenini kullanılarak düzgün dörtyüzlünün 2 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ g ” ile temsil edilmiştir. Düzgün dörtyüzlünün Şekil 6.37(a)’daki ilk durumu “ g ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.37 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.37).

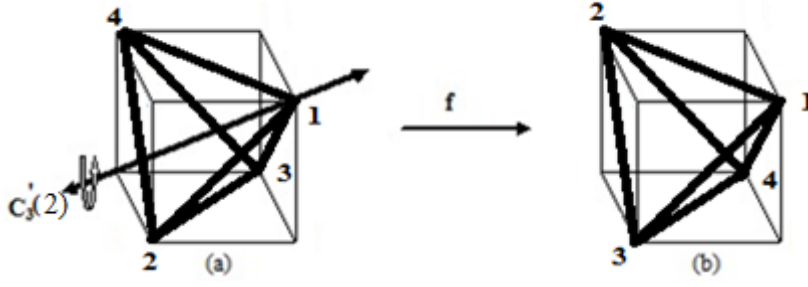


Şekil 6.37. g elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ g ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

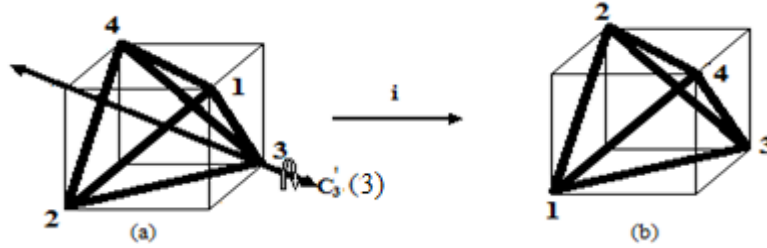
$C'_3(2)$ simetri eksenini kullanılarak düzgün dörtyüzlünün 1 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ f ” ile temsil edilmiştir. Düzgün dörtyüzlünün Şekil 6.38 (a)’daki ilk durumu “ f ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.38 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.38).

Şekil 6.38. f elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ f ” operasyonunun permütasyon aşağıdaki gibi karşılığını yazabiliriz:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

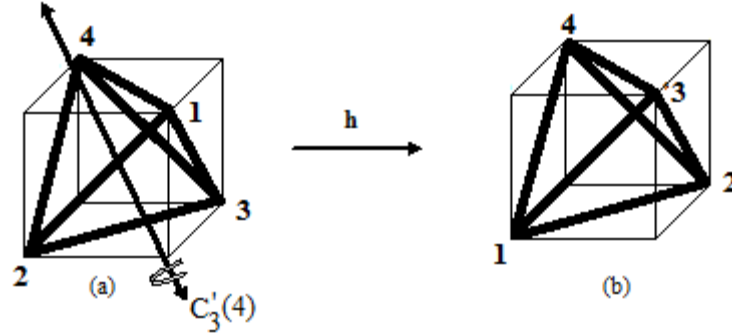
$C_3'(3)$ simetri eksenini kullanılarak düzgün dörtyüzlünün 3 köşesi arkaya bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ i ” ile temsil edilmiştir. Düzgün dörtyüzlünün Şekil 6.39 (a)’daki ilk durumu “ i ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.39 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.39).

Şekil 6.39. i elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ i ” operasyonunun aşağıdaki gibi permütasyon karşılığını yazabiliriz:

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$C_3'(4)$ simetri eksenini kullanılarak düzgün dörtyüzlünün 4 köşesi bize bakacak şekilde tutulduğu bir durumda küpün 120 derece proper (saat yönünün tersi yönde) dönme yapması işlemine denk gelmektedir. Bu simetri operasyonu “ h ” ile temsil edilmiştir Düzgün dörtyüzlünün Şekil 6.40 (a)’daki ilk durumu “ h ” simetri işlemi sonucunda Şekil 6.40 (b)’deki gibi olur (Şekil 6.40).



Şekil 6.40. h elemanı.

Bu simetri işlemi sonucunda “ h ” operasyonunun permütasyon aşağıdaki gibi karşılığını yazabiliriz:

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

6.4.5. T Nokta grubunun çarpım tablosu

T Nokta grubunun 12 elemanı vardır ve $P(4)$ permütasyon grubunun bir alt grubu ile izomorfiktir. T Nokta grubunun çarpım tablosunu oluşturmak için $12 \times 12 = 144$ adet permütasyon çarpımı yapmamız gerekir. Önceki bölümlerden T_h nokta grubunun çarpım tablosunu oluşturmak için Bölüm 6.3.9 ‘da kullandığımız bilgileri kullanarak T nokta grubunun çarpım tablosunu oluşturabiliriz (Bkz. Bölüm 6.3.9.).

Örnek olsun diye “ I ” permütasyon elemanının diğer elemanlarla çarpımı aşağıda verilmiştir.

$$I \cdot e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = I$$

$$l \cdot a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = g$$

$$l \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = h$$

$$l \cdot c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = i$$

$$l \cdot d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = f$$

$$l \cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = d$$

$$l \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = a$$

$$l \cdot h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = b$$

$$l \cdot i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = c$$

$$l \cdot j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = k$$

$$l \cdot k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = j$$

$$l \cdot l = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = e$$

T Nokta grubunun tüm elemanları içim yukarıdaki çarpımları yaparsak çarpım tablosunu aşağıdaki gibi elde edebiliriz (Çizelge 6.7).

Çizelge 6.7. T nokta grubunun çarpım tablosu (Cayley tablosu)

•	e	a	b	c	d	f	g	h	i	j	k	l
e	e	a	b	c	d	f	g	h	i	j	k	l
a	a	f	l	d	j	e	h	k	b	c	g	i
b	b	k	g	l	a	c	e	i	j	h	d	f
c	c	b	j	h	l	k	d	e	f	a	i	g
d	d	l	c	k	i	g	j	a	e	f	b	h
f	f	e	i	j	c	a	k	g	l	d	h	b
g	g	d	e	f	k	l	b	j	h	i	a	c
h	h	j	a	e	g	i	l	c	k	b	f	d
i	İ	h	k	b	e	j	f	l	d	g	c	a
j	J	i	d	g	b	h	c	f	a	e	l	k
k	k	c	f	a	h	b	i	d	g	l	e	j
l	l	g	h	i	f	d	a	b	c	k	j	e

6.4.6. T Nokta grubu için grup aksiyomları

Çizelge 6.7' yi kullanarak T nokta grubunun grup aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim.

1) Kapalılık Aksiyomu

$$a \bullet d = j \text{ ve } j \in T$$

$$k \bullet c = a \text{ ve } a \in T$$

$$d \bullet l = h \text{ ve } h \in T$$

$$l^* \bullet j^* = l \text{ ve } l \in T$$

T Nokta grubu kapalılık aksiyomunu sağlar.

2) Birleşme Aksiyomu

$$(a \cdot k) \cdot c = a \cdot (k \cdot c)$$

$$g \cdot c = a \cdot a$$

$$f = f$$

$$(l \cdot j) \cdot d = l \cdot (j \cdot d)$$

$$k \cdot d = l \cdot b$$

$$h = h$$

T Nokta grubu birleşme aksiyomunu sağlar.

3) Ters Eleman Aksiyomu

Grup içinde her bir elemanın tersi olmalı ve grup içine düşmelidir.

$$e^{-1} = e, a^{-1} = f, b^{-1} = g, c^{-1} = h, d^{-1} = i, f^{-1} = a, g^{-1} = b, h^{-1} = c, i^{-1} = d, j^{-1} = j, k^{-1} = k, l^{-1} = l,$$

Yukarıdan görüldüğü gibi her bir elemanı tersi var ve grubun içine düşer.

4) Birim Eleman Aksiyomu

“e” T nokta grubunun birim eleman özelliğini sağlar.

T nokta seti grup aksiyomlarını sağladığı için bir gruptur.

5) Değişme Özelliği

$$a \cdot k = k \cdot a$$

$$g \neq c$$

$$l \cdot h = h \cdot l$$

$$b \neq d$$

Değişme özelliğini sağlamadığı için T nokta grubu Abelian Grup değildir.

6.4.7. T Nokta grubunun ve elemanlarının dereceleri

Tanım 1, Tanım 3 ve Teorem 1 kullanılarak (Bkz. Bölüm. 4.3) T nokta grubunun derecesi ve her bir elemanın derecesini bulabiliriz. $T = \{e, a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l\}$ seti T nokta grubunun elemanlarını göstermektedir. T Nokta grubunun derecesi Tanım 1’ e göre 12 tür. Tanım 3 ve Teorem1 kullanılarak her bir elemanın derecesini bulalım.

1) $e^1 = e$ olduğundan e’ nin mertebesi 1’ dir.

- 2) $a^3 = a \cdot a \cdot a = a \cdot f = e$ olduğundan a 'nın mertebesi 3' tür.
- 3) $b^3 = b \cdot b \cdot b = b \cdot g = e$ olduğundan b 'nin mertebesi 3' tür.
- 4) $c^3 = c \cdot c \cdot c = c \cdot h = e$ olduğundan c 'nin mertebesi 3' tür.
- 5) $d^3 = d \cdot d \cdot d = d \cdot i = e$ olduğundan d 'nin mertebesi 3' tür.
- 6) $f^3 = f \cdot f \cdot f = f \cdot a = e$ olduğundan f 'nin mertebesi 3' tür.
- 7) $g^3 = g \cdot g \cdot g = g \cdot b = e$ olduğundan g 'nin mertebesi 3' tür.
- 8) $h^3 = h \cdot h \cdot h = h \cdot c = e$ olduğundan h 'nin mertebesi 3' tür.
- 9) $i^3 = i \cdot i \cdot i = i \cdot d = e$ olduğundan i 'nin mertebesi 3' tür.
- 10) $j^2 = j \cdot j = e$ olduğundan j 'nin mertebesi 2'dir.
- 11) $k^2 = k \cdot k = e$ olduğundan k 'nin mertebesi 2'dir.
- 12) $l^2 = l \cdot l = e$ olduğundan l 'nin mertebesi 2'dir.

Yukarıda T nokta grubunun tüm elemanlarının dereceleri bulunmuştur. T Nokta grubunun mertebesi 12'dir. Elemanların mertebelerine baktığımızda T nokta grubunun mertebesinin bir bölenidir. Elemanların mertebeleri şöyledir; 1, 2, 3. Görüldüğü gibi hepsi 12'in bir bölenidir.

6.4.8. T Nokta grubunun Abelian alt grupları

Tanım 4 (Bkz. Bölüm. 4.3) ve daha önce bulduğumuz elemanların derecelerini kullanarak T Nokta grubunun Abelian alt gruplarını bulabiliriz. Her bir elemanın derecesini kullanarak elemanlara Tanım 4'ü uygulayalım.

- 1) a elemanın mertebesi 3'tür.
 $a \rightarrow (e, a, a^2) \rightarrow (e, a, f)$
- 2) b elemanın mertebesi 3'tür.
 $b \rightarrow (e, b, b^2) \rightarrow (e, b, g)$
- 3) c elemanın mertebesi 3'tür.
 $c \rightarrow (e, c, c^2) \rightarrow (e, c, h)$
- 4) d elemanın mertebesi 3'tür.
 $d \rightarrow (e, d, d^2) \rightarrow (e, d, i)$
- 5) f elemanın mertebesi 3'tür.
 $f \rightarrow (e, f, f^2) \rightarrow (e, f, a)$

6) g elemanın mertebesi 3'tür.

$$g \rightarrow (e, g, g^2) \rightarrow (e, g, b)$$

7) h elemanın mertebesi 3'tür.

$$h \rightarrow (e, h, h^2) \rightarrow (e, h, c)$$

8) i elemanın mertebesi 3'tür.

$$i \rightarrow (e, i, i^2) \rightarrow (e, i, d)$$

9) j elemanın mertebesi 2'dir.

$$j \rightarrow (e, j)$$

10) k elemanın mertebesi 2'dir.

$$k \rightarrow (e, k)$$

11) l elemanın mertebesi 2'dir.

$$l \rightarrow (e, l)$$

12) e birim elemanın derecesi 1'dir. $e \rightarrow (e)$

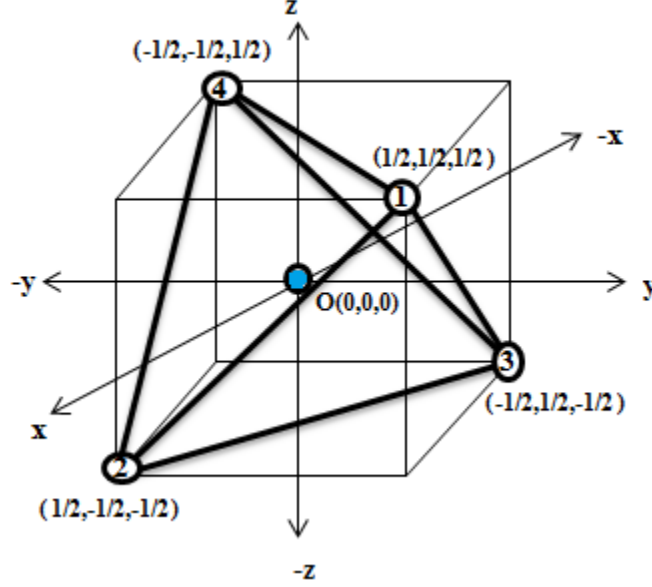
Bu işlemler sonucunda T Nokta grubunun 8 tane Abelian alt grubu olduğunu görebiliriz.

T Nokta grubunun Abelian alt gruplarını aşağıdaki çizelgede görebilirsiniz (Çizelge 6.8)

Çizelge 6.8. T nokta grubunun Abelian alt grupları

Abelian alt gruplar	Abelian alt gruplar
(e)	(e, d, i)
(e, a, f)	(e, k)
(e, b, g)	(e, l)
(e, c, h)	(e, j)

6.4.9. T Nokta grubunun elemanlarını matris temsilleri



Şekil 6.41. Birim düzgün dörtyüzlünün köşe koordinatları.

Küpün bir kenar uzunluğunu 1 birim alalım. Küpün merkezi O (0, 0, 0) noktası olsun. Küpün köşe noktalarını (x, y, z) koordinatları cinsinden O noktasına göre tanımlayalım. 1 köşesine ulaşmak için O (0, 0, 0) noktasından x eksen yönünde $\frac{1}{2}$, y eksen yönünde $\frac{1}{2}$, z eksen yönünde $\frac{1}{2}$ birim yer değiştirmeliyiz. Böylece 1 köşesinin koordinatlarını (1/2, 1/2, 1/2) olarak elde ederiz. Düzgün dörtyüzlünün dört köşesinin koordinatları bu şekilde bulunabilir (Şekil 6.41). Düzgün dörtyüzlünün köşe noktalarındaki sayılar için elde ettiğimiz (x, y, z) koordinatları bir sütun matris oluşturur. Her bir köşe için sütun matrisleri aşağıda verilmiştir.

$$\hat{1} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad \hat{2} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad \hat{3} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad \hat{4} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Sütun matrislerini bildiğimize göre T Nokta Grubunun elemanlarının matris temsillerini bulmaya çalışalım. İlk olarak “e” elemanının matris temsilini bulmaya çalışalım. Varsayalım ki “e” elemanının matrisi 3x3 aşağıdaki gibi bir matris olsun.

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}$$

“e” elemanının permütasyon karşılığı yazalım.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Yukarıda yazılmış “e” elemanının permütasyon karşılığına bakarak ilk üç köşeyi nereye götürdüğüne bakalım. “e” elemanının permütasyon karşılığına baktığımızda küpün 1 köşesini yine 1 köşesine götürmüştür. Diğer bir ifadeyle “e” elemanın matris temsili ile küpün 1 köşesinin sütun matrisi ile çarpımı tekrar 1 köşesinin sütun matrisini vermelidir. Yukarıdaki bilgileri kullanarak denklemleri yazalım.

$$\hat{e}(1) = 1$$

$$\hat{e}(1) = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$e_{11} + e_{12} + e_{13} = 1$$

$$e_{21} + e_{22} + e_{23} = 1 \quad (1)$$

$$e_{31} + e_{32} + e_{33} = 1$$

“e” elemanının permütasyon karşılığına baktığımızda küpün 2 köşesini yine 2 köşesine götürmüştür. Diğer bir ifadeyle “e” elemanın matris temsili ile küpün 2 köşesinin sütun matrisi ile çarpımı tekrar 2 köşesinin sütun matrisini vermelidir. Yukarıdaki bilgileri kullanarak denklemleri yazalım.

$$\hat{e}(2) = 2$$

$$\hat{e}(1) = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$-e_{11} + e_{12} + e_{13} = -1$$

$$-e_{21} + e_{22} + e_{23} = 1 \quad (2)$$

$$-e_{31} + e_{32} + e_{33} = 1$$

“e” elemanın permütasyon karşılığına baktığımızda küpün 3 köşesini yine 3 köşesine götürmüştür. Diğer bir ifadeyle “e” elemanın matris temsili ile küpün 3 köşesinin sütun matrisi ile çarpımı tekrar 3 köşesinin sütun matrisini vermelidir. Yukarıdaki bilgileri kullanarak denklemleri yazalım.

$$\hat{e}(3) = 3$$

$$\hat{e}(1) = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$-e_{11} - e_{12} + e_{13} = -1$$

$$-e_{21} - e_{22} + e_{23} = -1 \quad (3)$$

$$-e_{31} - e_{32} + e_{33} = 1$$

Yukarıdaki (1) ve (3) denklemlerini kendi aralarında çözdüğümüzde $e_{13}=0$, $e_{23}=0$, $e_{33}=1$ elde ederiz. (1) ve (2) denklemlerini kendi aralarında çözüp yukarıda bulduğumuz sonuçları yerine koyarsak $e_{11}=1$, $e_{21}=0$, $e_{31}=0$ bulunur. Bu bulunan sonuçları her hangi denklemden yerine koyduğumuzda $e_{12}=0$, $e_{22}=1$, $e_{32}=0$ elde edilir. Bu elde ettiğimiz verileri kullanarak “e” elemanın matris temsili aşağıdaki gibi olur.

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Şimdide yukardaki yaptıklarımızı tekrarlayıp “b” simetri elemanın matris temsili bulalım. Varsayalım ki “b” elemanın matrisi 3x3 aşağıdaki gibi bir matris olsun.

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

“b” elemanın permütasyon karşılığı yazalım.

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

“b” elemanın permütasyon karşılığına baktığımızda düzgün dörtyüzlünün 1 köşesini 3 köşesine götürmüştür. Diğer bir ifadeyle “b” elemanın matris temsili ile düzgün

dörtüzlünün 1 köşesinin sütun matrisi ile çarpımı 3 köşesinin sütun matrisini vermelidir. Yukarıdaki bilgileri kullanarak denklemleri yazalım.

$$\hat{b}(1) = 3$$

$$\hat{b}(1) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$b_{11} + b_{12} + b_{13} = -1$$

$$b_{21} + b_{22} + b_{23} = 1 \quad (1)$$

$$b_{31} + b_{32} + b_{33} = -1$$

“b” elemanının permütasyon karşılığına baktığımızda düzgün dörtüzlünün 2 köşesini yine 2 köşesine götürmüştür. Diğer bir ifadeyle “b” elemanın matris temsili ile düzgün dörtüzlünün 2 köşesinin sütun matrisi ile çarpımı 2 köşesinin sütun matrisini vermelidir. Yukarıdaki bilgileri kullanarak denklemleri yazalım.

$$\hat{b}(2) = 2$$

$$\hat{b}(2) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$b_{11} - b_{12} - b_{13} = 1$$

$$b_{21} - b_{22} - b_{23} = -1 \quad (2)$$

$$b_{31} - b_{32} - b_{33} = -1$$

“b” elemanının permütasyon karşılığına baktığımızda düzgün dörtüzlünün 3 köşesini 4 köşesine götürmüştür. Diğer bir ifadeyle “b” elemanın matris temsili ile düzgün dörtüzlünün 3 köşesinin sütun matrisi ile çarpımı 4 köşesinin sütun matrisini vermelidir. Yukarıdaki bilgileri kullanarak denklemleri yazalım.

$$\hat{b}(3) = 4$$

$$\hat{b}(3) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$- b_{11} + b_{12} - b_{13} = -1$$

$$- b_{21} + b_{22} - b_{23} = -1 \quad (3)$$

$$- b_{31} + b_{32} - b_{33} = 1$$

Yukarıdaki (1) ve (2) denklemlerindeki her bir denklemi birbiriyle çözersek $b_{11} = 0$, $b_{21} = 0$, $b_{31} = -1$ elde ederiz. (1) ve (3) denklemlerini kendi arasında çözdüğümüzde $b_{12} = -1$, $b_{22} = 0$, $b_{32} = 0$ bulunur. (2) ve (3) denklemlerindeki her bir denklemi birbiriyle çözersek $b_{13} = 0$, $b_{23} = 1$, $b_{33} = 0$ olarak elde ederiz. Bu elde ettiğimiz verileri kullanarak “b” elemanın matris temsili aşağıdaki gibi olur.

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki işlemleri T nokta grubunun tüm elemanlarına uygulayarak her bir elemanın matris temsili bulunabilir. T nokta grubunun 12 elemanının matris temsilleri aşağıda verilmiştir (Çizelge 6.9).

Çizelge 6.9. T nokta grubunun 12 elemanının matris temsilleri

Elemanların matris temsilleri	Elemanların matris temsilleri	Elemanların matris temsilleri
$\hat{e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\hat{d} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\hat{i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
$\hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\hat{f} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\hat{j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
$\hat{b} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\hat{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\hat{k} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
$\hat{c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\hat{h} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\hat{l} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$T_h = \{e, a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l, I, a^*, b^*, c^*, d^*, f^*, g^*, h^*, i^*, j^*, k^*, l^*\}$ seti T_h Nokta grubunun elemanlarını göstermektedir. T_h Nokta grubunun elemanları içinde $T = \{e, a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l\}$ elemanları kendi aralarında bir grup oluşturduğu için T nokta grubu, T_h Nokta grubunun alt grubudur.

6.4.10. T Nokta grubunun sınıfları

$T = \{e, a, b, c, d, f, g, h, i, j, k, l\}$ seti, T nokta grubunun elemanlarını göstermektedir. T Nokta grubunun sınıflarını Tanım 6 ve Tanım 7'yi kullanarak bulabiliriz (Bkz. Bölüm. 4.5).

Birim eleman daima tek başına bir sınıf oluşturur ve bir grup oluşturabilen tek sınıftır. Çünkü diğer sınıfların hiçbiri birim eleman içermez. Örneğin “ b ” elemanın eşlenik çiftlerini bulalım;

$$e \cdot b \cdot e^{-1} = e \cdot b \cdot e = b \cdot e = b$$

$$a \cdot b \cdot a^{-1} = a \cdot b \cdot f = l \cdot f = d$$

$$b \cdot b \cdot b^{-1} = b \cdot b \cdot g = g \cdot g = b$$

$$c \cdot b \cdot c^{-1} = c \cdot b \cdot h = j \cdot h = f$$

$$d \cdot b \cdot d^{-1} = d \cdot b \cdot i = c \cdot i = f$$

$$f \cdot b \cdot f^{-1} = f \cdot b \cdot a = i \cdot a = h$$

$$g \cdot b \cdot g^{-1} = g \cdot b \cdot b = e \cdot b = b$$

$$h \cdot b \cdot h^{-1} = h \cdot b \cdot c = a \cdot c = d$$

$$i \cdot b \cdot i^{-1} = i \cdot b \cdot d = k \cdot d = h$$

$$j \cdot b \cdot j^{-1} = j \cdot b \cdot j = d \cdot j = f$$

$$k \cdot b \cdot k^{-1} = k \cdot b \cdot k = f \cdot k = h$$

$$l \cdot b \cdot l^{-1} = l \cdot b \cdot g = h \cdot l = d$$

Yukarıdaki işlemlerin sonucuna baktığımızda (b, d, f, h) elemanlar seti “ b ” elemanının eşlenik çiftidir. Eşleniklerin oluşturduğu sete sınıf denir. (b, d, f, h) elemanlar seti T Nokta grubunun bir sınıfıdır. Bu set içindeki diğer elemanlar için aynı işlemi uygularsak aynı sonucu tekrar elde ederiz. “ i ” elemanın eşlenik çiftlerini bulalım;

$$e \cdot i \cdot e^{-1} = e \cdot i \cdot e = i \cdot e = i$$

$$\begin{aligned}
a \cdot i \cdot a^{-1} &= a \cdot i \cdot f = b \cdot f = c \\
b \cdot i \cdot b^{-1} &= b \cdot i \cdot g = j \cdot g = c \\
c \cdot i \cdot c^{-1} &= c \cdot i \cdot h = f \cdot h = g \\
d \cdot i \cdot d^{-1} &= d \cdot i \cdot i = e \cdot i = i \\
f \cdot i \cdot f^{-1} &= f \cdot i \cdot a = l \cdot a = g \\
g \cdot i \cdot g^{-1} &= g \cdot i \cdot b = h \cdot b = a \\
h \cdot i \cdot h^{-1} &= h \cdot i \cdot c = k \cdot c = a \\
i \cdot i \cdot i^{-1} &= i \cdot i \cdot d = d \cdot d = i \\
j \cdot i \cdot j^{-1} &= j \cdot i \cdot j = a \cdot j = c \\
k \cdot i \cdot k^{-1} &= k \cdot i \cdot k = g \cdot k = a \\
l \cdot i \cdot l^{-1} &= l \cdot i \cdot g = c \cdot l = g
\end{aligned}$$

Yukarıdaki işlemlerin sonucuna baktığımızda (a, c, g, i) elemanlar seti “ i ” elemanının eşlenik çiftidir. Eşleniklerin oluşturduğu sete sınıf denir. (a, c, g, i) elemanlar seti T nokta grubunun bir sınıfıdır. Bu işlemleri bu elemanlar dışında T nokta grubunun diğer elemanlarına uyguladığımızda, T nokta grubunun 4 adet sınıfını elde ederiz. T nokta grubunun sınıfları Çizelge 6.10 ‘ da verilmiştir.

Çizelge 6.10. T nokta grubunun sınıfları

Sınıflar	Sınıflar
(e)	(a, c, g, i)
(j, k, l)	(b, d, f, h)

7. UZAY GRUPLARI

Doğada 14 tane Bravais örgü vardır. Bu 14 tane Bravais örgüye nokta simetri operasyonları uygularsak 32 tane nokta grubunu elde ederiz. 14 tane Bravais örgüye nokta simetri operasyonları ve öteleme operasyonu uygularsak 230 tane uzay grubu elde ederiz. Yani Bravais örgüye öteleme ve nokta simetri operasyonları beraber uygulandığında uzay grupları elde edilir.

Bir örgü $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ gibi üç temel öteleme vektörü ile tanımlanır. Buna göre, atomların dizilişi bir $\vec{\mathbf{r}}$ konumlu yerde nasılsa;

$$\vec{\mathbf{r}}' = \vec{\mathbf{r}} + n_1\mathbf{t}_1 + n_2\mathbf{t}_2 + n_3\mathbf{t}_3$$

olan $\vec{\mathbf{r}}'$ konumlu bir yerde de aynı olur. Bu denklem ile tanımlanan $\vec{\mathbf{r}}'$ noktaları kümesine örgü denir (Bradley ve Cracknell, 1972). Eğer O orijin olarak belirli bir örgü noktasını seçersek $\mathbf{t}$ kristal öteleme vektörü ile diğer örgü noktalarının pozisyonunu yazabiliriz.

$$\mathbf{t} = n_1\mathbf{t}_1 + n_2\mathbf{t}_2 + n_3\mathbf{t}_3$$

Bu ifadeye kristalin öteleme vektörü denir (Bradley ve Cracknell, 1972). Burada n_1, n_2, n_3 tamsayılarıdır ve $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ O orijinini en yakın komşu atomlarla birleştiren temel öteleme vektörleridir. Bu tanımdan anlaşılacağı gibi kristalin yapıtaşı olabilecek en küçük hücre bu temel öteleme vektörleriyle oluşur. Kristal eksenlerini tanımlamakta genellikle temel öteleme vektörleri kullanılır. Ancak kristal simetrisi daha basit veriliyorsa temel olmayan eksenlerde kullanabiliriz. Yukarıdaki ifade sadece kristal üzerine Bravais örgünün öteleme simetri işleminin temellendirilmesidir. Bu ifadeye Bravais örgünün genel öteleme vektörü denir. Bravais örgünün öteleme simetrisi nokta simetri operasyonları altında kesinlikle değişmezdir.

$\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ temel eksenleri ile tanımlanan paralelkenar prizmaya birim hücre adı verilir (Bradley ve Cracknell, 1972). Birim hücre kristal öteleme işlemini tekrarlamak suretiyle tüm uzayı doldurur.

Birim hücre aynı zamanda minimum hacimli hücredir. Birim hücrede her zaman bir örgü noktası vardır. Eksenleri $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$ olan bir paralel prizmanın hacmi,

$$V = |\mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{t}_2 \times \mathbf{t}_3)|$$

ile hesaplanır (Bradley ve Cracknell, 1972). 14 tane Bravais örgünün birim öteleme vektörleri, birim hücrelerinin birim hacimleri Çizelge 7.1 'de verilmiştir (Çizelge 7.1).

Bir kristal üzerinde yapılan simetri işlemleri kristali tekrar eski konumuna getirir. Örgü ötelemesi de böyle bir işlemdir. Bunun dışındaki dönme ve yansıma işlemlerine nokta simetri işlemleri denir. Öteleme ve nokta simetri işlemlerinin birlikte uygulandığı birleşik işlemler vardır. Kristal örgüye öteleme ve nokta simetri işlemleri uygulandığında uzay grupları elde edilir.

Çizelge 7.1. Bravais örgünün hacmi ve birim öteleme vektörleri (Bradley ve Cracknell, 1972)

Bravais Örgü	Birim vektörler $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3$	Birim hücrenin hacmi V
1) Triklirik (P)	keyfi	$\mathbf{t}_1 \cdot (\mathbf{t}_2 \times \mathbf{t}_3)$
2) Monoklinik (P)	$(0, -b, 0); (a \sin \gamma, -a \cos \gamma, 0); (0, 0, c)$	$abc \sin \gamma$
3) Monoklinik (B)	$(0, -b, 0); 1/2(a \sin \gamma, a - \cos \gamma, -c);$ $1/2(a \sin \gamma, -a \cos \gamma, c)$	$1/2 abc \sin \gamma$
4) Ortorombik (P)	$(0, -b, 0); (a, 0, 0); (0, 0, c)$	bc
5) Ortorombik (C)	$1/2(a, -b, 0); 1/2(a, b, 0); (0, 0, c)$	$1/2 abc$
6) Ortorombik (I)	$1/2(a, b, c); 1/2(-a, -b, c); 1/2(a, -b, -c)$	$1/2 abc$
7) Ortorombik (F)	$1/2(a, 0, c); 1/2(0, -b, c); 1/2(a, -b, 0)$	$1/4 abc$
8) Tetragonal (P)	$(a, 0, 0); (0, a, 0); (0, 0, c)$	$a^2 c$
9) Tetragonal (I)	$1/2(-a, a, c); 1/2(a, -a, c); 1/2(a, a, -c)$	$1/2 a^2 c$
10) Trigonal (P)	$(0, -a, c); 1/2(a\sqrt{3}, a, 2c); 1/2(-a\sqrt{3}, a, 2c)$	$3/2 \sqrt{3} a^2 c$
11) Hegzagonal	$(0, -a, 0); 1/2(a\sqrt{3}, a, 0); 1/2(0, 0, c)$	$1/2 \sqrt{3} a^2 c$
12) Kübik (P)	$(a, 0, 0); (0, a, 0); (0, 0, a)$	a^3
13) Kübik (F)	$1/2(0, a, a); 1/2(a, 0, a); 1/2(a, a, 0)$	$1/4 a^3$
14) Kübik (I)	$1/2(-a, a, a); 1/2(a, -a, a); 1/2(a, a, -a)$	$1/2 a^3$

7.1. Uzak Grupları İçin Matematiksel İfadeler

Tanım 12: Nokta grubu ve öteleme simetri operasyonları, kristali kendi içinde uzak grubu denilen bir grup formuna taşır (Dresselhaus ve ark., 2008).

Uzak grupları için basit notasyon;

$$\{ R_{\alpha} | \tau \}$$

şeklindedir. Burada R_{α} yansıma, dönme, inversiyon gibi nokta simetri operasyonlarını göstermektedir. τ ise öteleme simetri operasyonlarını göstermektedir. Saf öteleme ve saf dönme operasyonları uzak gruplarının özel durumudur.

$\{ \epsilon | 0 \}$ = birim eleman

$\{ \alpha | 0 \}$ = saf dönme ya da nokta simetri operasyonları

$\{ \epsilon | \tau \}$ = saf öteleme operasyonu

$\{ \alpha | \tau \}$ uzak grup operatörü için koordinat dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\{ \alpha | \tau \} \mathbf{r} = \mathbf{r}' = \tilde{\alpha} \mathbf{r} + \boldsymbol{\tau}$$

burada $\tilde{\alpha}$ dönme için dönüşüm matrisini ve $\boldsymbol{\tau}$ öteleme dönüşümünü gösterir.

Tanım 13: İki uzak grup operatörünün çarpımının sonucu

$\{ \beta | \tau' \} \{ \alpha | \tau \} = \{ \beta \alpha | \beta \tau + \tau' \}$ ile verilir (Dresselhaus ve ark., 2008). Burada $\{ \beta | \tau' \}$ birinci uzak grup operatörü, $\{ \alpha | \tau \}$ ise ikinci uzak grup operatörüdür.

Tanım 14: $\{ \alpha | \tau \}$ uzak grup operatörünün tersi

$\{ \alpha | \tau \}^{-1} = \{ \alpha^{-1} | -\alpha^{-1} \tau \}$ şeklinde tanımlanır (Dresselhaus ve ark., 2008; Souvignier, 2008).

Tanım 15: Uzak grup operatörünün matris temsili;

$\{ \alpha | \tau \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{\tau} & \tilde{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklindedir (Dresselhaus ve ark., 2008; Bradley ve Cracknell, 1972; ;

Souvignier, 2008). Burada $\tilde{\alpha}$, 3X3 dönme matrisini ve $\boldsymbol{\tau}$ öteleme vektörünü göstermektedir. 1 bir sayıyı, 0 ise matrisin üç sütunun ilk satırının sıfır olduğunu gösteriyor. 1 ve 0 eklenmesinin nedeni, lineer olmayan öteleme dönüşümlerini, lineer dönüşüm formuna getirmektir. Örnek olsun diye $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}$ sütun matrisi ile $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{\tau} & \tilde{\alpha} \end{pmatrix}$ matrisinin çarpımını gösterelim.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{\tau} & \tilde{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\alpha} \mathbf{r} + \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

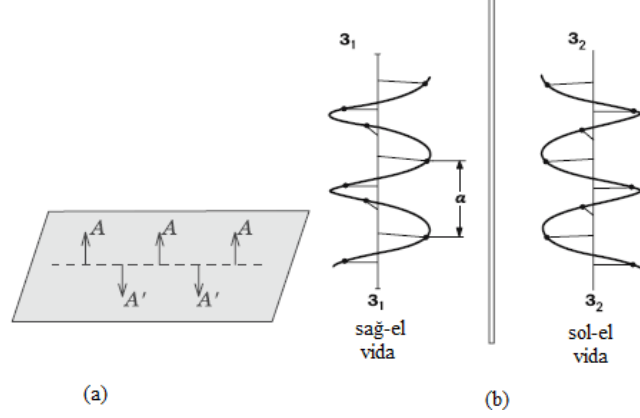
Yukarıdaki matris çarpımı bize $\{ \alpha | \tau \}$ uzay grup operatörü için daha önce gösterdiğimiz koordinat dönüşümünün matris temsili ile gösterimidir.

$\{ \alpha | \tau \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$ uzay grubunun matris temsilinin açık şekilde yazalım. Daha önce de belirtildiği gibi $\vec{\alpha}$, uzay grubu hangi nokta grubuna kullanılarak elde edilmişse o nokta grubunun elemanlarının matris temsilleridir. Yani $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ matrisidir. O halde $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$ matrisini açık şekilde yazdığımızda aşağıdaki gibi olur.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \tau_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \tau_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \tau_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)$$

7.2. Bileşik Uzay Grup Operasyonları

Uzay gruplarında saf öteleme operasyonları yerine, öteleme ve nokta grup operasyonlarının birleşimi olan bileşik simetri operasyonlarını bulmalıyız. Bileşik simetri operasyonları kayma düzlemi ve vida eksenini olmak üzere iki çeşittir (Dresselhaus ve ark., 2008) Nokta grupları için tanımlanan simetri operasyonlarına ek olarak öteleme ile simetri operasyonlarını birleştirdiğimizde kayma düzlemi ve vida eksenini meydana çıkar.



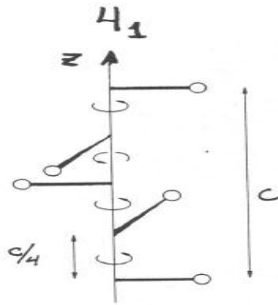
Şekil 7.1. (a) Kayma düzlemi (Dresselhaus ve ark., 2008), (b) Vida ekseni (Dresselhaus ve ark., 2008).

Kayma düzlemi, düzlemden yansımadan sonra verilen düzleme paralel ötelemeden oluşmaktadır (Şekil 7.1.a). Üç çeşit kayma düzlemi vardır (Dresselhaus ve ark., 2008): *Eksenel kayma*; a, b, c simetri eksenleri boyunca, *Köşegen kayma*; köşegen boyunca kayma ($a + b/2$) ya da ($a + b + c/2$) şeklinde kaymadır. *Elmas kayma*; ($a + b/4$) ya da ($a + b + c/4$) karşılığında olan kaymalardır.

Vida ekseni, bir eksen etrafında dönme ve aynı anda eksen boyunca ötelemede operasyonlarından meydana gelmektedir (Dresselhaus ve ark., 2008). Yani önce eksen etrafında dönme uyguladıktan sonra eksen boyunca öteleme uygulanır. Şekil 7.1(b)' de üç katlı vida ekseninin şekli gösterilmiştir. n_p katlı vida ekseni, p/n kadar öteleme ve $2\pi/n$ kadarlık dönmeye sahiptir. Yani n katlı dönme ekseni etrafında dönme ve dönme eksenine paralel p/n kadar öteleme verir.

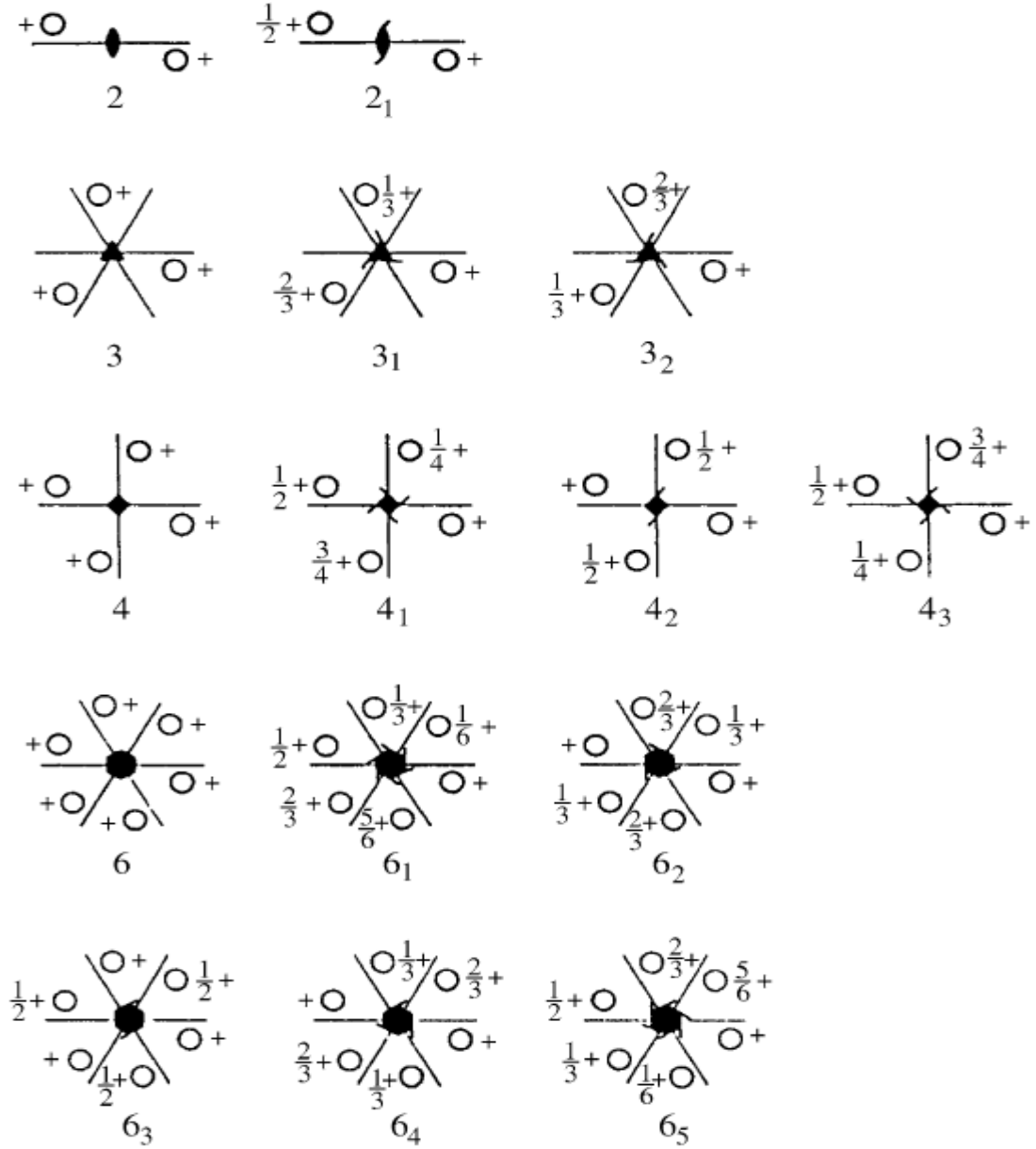
$$n_p = p/n \text{ öteleme} + 2\pi/n \text{ kadarlık dönme}$$

4_1 vida ekseni $2\pi/4$ kadarlık dönme ve eksene paralel $1/4$ kadarlık öteleme verir (Şekil 7.2). Burada c örgü sabitidir.



Şekil 7.2. 4_1 vida ekseni.

Olası vida eksenleri Şekil 7.3 'de verilmiştir. Bravais örgünün olası dönme açılarını öteleme simetrisi sınırlamaktadır. Kristalde olası dönme açıları 1, 2, 3, 4, 6 katlı dönmelerle sınırlıdır. Beş katlı ve altının daha fazla katlı dönmeler kristalde meydana gelmez çünkü bu eksenler öteleme simetrisi ile uyumlu değildir.



Şekil 7.3. Olası vida eksenleri (Dresselhaus ve ark., 2008).

7.3. Simorfik ve Simorfik Olmayan Uzak Grubları

Bir uzak grubu G , örgüyü değışmez bırakan bütün $\{ R_\alpha | \tau \}$ operasyonlarından oluşmaktadır. $\{ R_\alpha | \tau \}$ uzak grubu elemanını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\{ R_\alpha | \tau \} = \{ R_\alpha | R_n + \tau_\alpha \} = \{ \varepsilon | R_n \} \{ R_\alpha | \tau_\alpha \}$$

burada R_n Bravais örgünün genel öteleme vektörüdür. Bravais örgünün genel öteleme vektörü sıfır olduğunda $R_n = 0$; yukarıdaki denklemin ilk ifadesi $\{ \varepsilon | 0 \}$ olur. Bu $\{ \varepsilon | 0 \}$ ifadesi birim elemandır. $\{ R_\alpha | \tau_\alpha \}$ ifadesinde $\tau_\alpha = 0$ olduğunda nokta simetri operasyonları, $\tau_\alpha \neq 0$ olduğunda bileşik operasyonlardan biridir (Dresselhaus ve ark., 2008).

Tanım 16: Eğer düz uzakda orijini uygun seçersek, G uzak grubunun tüm elemanlarını $\tau_\alpha = 0$ olduğunda $\{ R_\alpha | \tau \} = \{ R_\alpha | R_n \} = \{ \varepsilon | R_n \} \{ R_\alpha | 0 \}$ formundadır. Bu G uzak grubuna *simorfik uzak grubu* denir (Dresselhaus ve ark., 2008).

Eğer düz uzakda uygun herhangi bir orijin seçiminde $\{ R_\alpha | \tau_\alpha \}$ operatörünü için en az bir $\tau_\alpha \neq 0$ ise bu uzak grubuna *simorfik olmayan uzak grubu* denir (Dresselhaus ve ark., 2008).

230 uzak grubundan 73 tanesi simorfik, 157 tanesi simorfik olmayan uzak gruplarıdır (Dresselhaus ve ark., 2008; Bradley ve Cracknell, 1972). 230 uzak grubunun 73 tanesi, ekstra simetri operatörleri vida eksen ve kayma düzlem olmadan Kristalografik nokta grubu ve Bravais kafeslerinin kombinasyonundan meydana gelir. Bu uzak gruplarına simorfik uzak grubu denir. Simorfik uzak gruplarını, Bravais örgüye nokta simetri operasyonları ve Bravais örgünün genel öteleme vektörünü uyguladığımızda elde ederiz. Eğer uzak grubunun tüm operatörleri, Bravais örgünün üzerine uygulanan nokta simetri operasyonlarına Bravais örgünün genel öteleme vektörünü eklersek simorfik uzak gruplarını elde ederiz. 73 tane simorfik uzak grubu Çizelge 13’de gösterilmiştir. Bu çizelgede P, örgünün basit örgü olduğunu; I, hacim merkezli örgüyü; F, yüzey merkezli örgüyü; (A, B, C), taban merkezli örgü olduğunu; R, rombohedral Bravais örgüyü göstermektedir.

Çizelge 7.2. 73 Simorfik uzay grupları (Dresselhaus ve ark., 2008)

Kristal Sistem	Bravais Kafesi	Uzay Grubu
Triklinik	P	$P1, P\bar{1}$
Monoklinik	P	$P2, Pm, P2/m$
	B ya da A	$B2, Bm, B2/m$
Ortorombik	P	$P222, Pmm2, Pmmm$
	C, A, B	$C222, Cmm2, Cmmm$
	I	$I222, Imm2, Immm$
	F	$F222, Fmm2, Fmmm$
Tetragonal	P	$P4, P\bar{4}, P4/m, P422, P4mm, P42m, P\bar{4}m2^a, P4/mmm$
	I	$I4, I\bar{4}, P4/m, I422, I4mm, I42m, I\bar{4}m2^a, I4/mmm$
Kübik	P	$P23, Pm3, P432, P\bar{4}3m, Pm3m$
	I	$I23, Im3, I432, I\bar{4}3m, Im3m$
	F	$F23, Fm3, F432, F\bar{4}3m, Fm3m$
Trigonal	P^b	$P3, P\bar{3}, P312, P321^a, P3m1, P31m^a, P\bar{3}1m, P\bar{3}m1^a$
(Rombohedral)	R	$R3, R\bar{3}, R32, R3m, R\bar{3}m$
Hekzagonal	P^b	$P6, P\bar{6}, P6/m, P622, P6mm, P\bar{6}m2, P\bar{6}m2^a, P6/mmm$

7.4. Uzak Gruplarının İsimlendirilmesi

Uzak grupları, uzak grubu sembolü “Xefg” ile adlandırılır (Bradley ve Cracknell, 1972). Burada X kristalin Bravais örgüsünün türünü göstermektedir. Yani X; P, F, I, A, B, C harflerinden birini ya da R harfini göstermektedir. “efg” ise nokta grubunun Hermann-Mauguin adlandırılması ile gösterimidir. Yani nokta grubunun karakteristik sembolüdür. Eğer simetri operasyonları öteleme ile birleşirse vida eksenini ve kayma düzlemini verir. Simetri operasyonları öteleme ile birleştiğinde “efg” ifadesinde dönme eksenini ve yansıma düzlemi yerine sırayla vida eksenini ve kayma düzlemi sembolleri a, b, c, n, 4_1 , 3_2 gibi semboller kullanılır. Yani simorfik olmayan uzak gruplarının gösteriminde a, b, c, n, 4_1 , 3_2 gibi sembolleri içerir. Örneğin monoklinik sistem ayna düzlemi ve iki katlı dönme eksenlerinin ikisiyle sunulabilir. Monoklinik nokta grupları 2, m, 2/m ile gösterilir. Monoklinik Bravais örgü basit ve taban merkezli olmak üzere iki çeşittir. Monoklinik simorfik uzak gruplarının sayısı, monoklinik nokta gruplarının sayısı ile monoklinik kristal sisteminin Bravais örgülerinin sayısının çarpımına eşittir. Yani 3×2 ifadesinden hemen bulunabilir ve 6 tane monoklinik simorfik uzak grubu vardır. Ayna düzlemini ile kayma düzlemi ve dönme eksenini ile de vida eksenini değiştirildiğinde 7 tane monoklinik simorfik olmayan uzak grubu elde edilir. Toplamda 13 tane monoklinik uzak grubu vardır. Böylece simorfik uzak grupları, aynı kristal sistemine ait bir nokta grubunun Bravais örgüsünün her bir noktası ile ilişkilendirilmesi ile ortaya çıkar. Bu bağlamda simorfik uzak gruplarının sayısı $\sum_{i=1}^7 n_i p_i$ formülü ile bulunabilir (Bradley ve Cracknell, 1972). Burada n_i kristal sistemin nokta gruplarının sayısı, p_i ise kristal sistemin Bravais örgülerinin sayısıdır. Bu formül simorfik olmayan uzak grupları için her zaman doğru değildir. Örnek olarak kübik kristal sistemini alalım. Kübik kristal sisteminin 3 tane Bravais örgüsü vardır. Kübik nokta grupları ise 5 tanedir (Bradley ve Cracknell, 1972; Koster, 1957). Bu durumda 15 tane kübik uzak grubu vardır (Çizelge 7.2).

Uzak gruplarını adlandırmada kullanılan diğer adlandırma türü Schönflies adlandırmasıdır (Bradley ve Cracknell, 1972). Schönflies adlandırmasında nokta grubu aynı olan farklı uzak gruplarını gösterirken uzak grubunun ait olduğu nokta grubunun sembolünü kullanarak, sadece nokta grubunun sembolüne derece vererek farklı uzak grupları elde edilir (Bradley ve Cracknell, 1972). Örneğin O_h nokta grubunu alalım.

Nokta grubu O_h 'ın 10 tane uzay grubu vardır. Bu uzay gruplarının 4 tanesi basit kübik, 4 tanesi yüzey merkezli küp, 2 tanesi de hacim merkezli küptür. Bu 10 tane uzay grubunu Schönflies adlandırmasında $O_h^1, O_h^2, \dots, O_h^{10}$ şeklinde gösterilir (Bradley ve Cracknell, 1972). Görüldüğü gibi nokta grubunun sembolü kullanılarak, sadece nokta grubunun sembolünün derecesi 10 kadar artırılarak farklı uzay grupları elde edilmiştir. Schönflies adlandırmasının iki dezavantajı vardır. Birincisi, bu adlandırma uzay grubunun hangi Bravais kafesine ait olduğunu göstermez. Örneğin O_h^8 , yüzey merkezli küp; O_h^9 ise hacim merkezli küptür. İkinci dezavantajı, uzay grubunun simorfik uzay grubu ya da simorfik olmayan uzay grubu olup olmadığı hakkında bilgi vermez.

7.5. Kübik Simorfik Uzay Grupları

Doğada 230 tane uzay grubu vardır. Bu uzay gruplarının 73 tanesi simorfik uzay grubu, 157 tanesi de simorfik olmayan uzay gruplarıdır. 230 tane uzay grubunun 36 tanesi kübik uzay grubudur. 36 tane kübik uzay grubu içinde 15 tanesi kübik simorfik uzay grubudur (Bkz. Çizelge 7.2). 15 tane kübik simorfik uzay grubunun nasıl elde edildiği yukarıda kısaca anlatıldı. Kübik kristal sisteminin üç tane Bravais örgüsü vardır. Kübik kristal sistemin beş tanede nokta grubu vardır. Bu bağlamda simorfik uzay gruplarının sayısı $\sum_{i=1}^7 n_i p_i$ formülü ile bulunabilir (Bradley ve Cracknell, 1972). Burada n_i kristal sistemin nokta gruplarının sayısı, p_i ise kristal sistemin Bravais örgülerinin sayısıdır. Böylece 15 tane kübik simorfik uzay grubu olduğunu buluruz. 15 tane kübik simorfik uzay gruplarının 3 tanesi T, 3 tanesi T_h , 3 tanesi T_d , 3 tanesi O, 3 tanesi O_h nokta grubuna aittir. Uzay gruplarının tanımlamak için her biri için bir numara verilmektedir. 230 tane uzay grupları için numara verilmiş bu numaralara da uzay grubunun uluslararası numarası denir. Kübik simorfik uzay gruplarının uluslararası numaraları 195,196, 197, 200, 202, 204, 207, 209, 211, 215, 216, 217, 221, 225, 229 şeklindedir (Bruns ve Glazer, 1990; Koster, 1957; Mirman, 1999). Uzay grupları için tanımlanan temel matematiksel ifadeler ve uzay grubunun ait olduğu nokta grubunun bilgileri kullanılarak 15 tane kübik simorfik uzay grubu tanımlanacaktır.

Kübik simorfik uzay gruplarında öteleme vektörü sıfırdır, sadece Bravais örgünün genel öteleme vektörü vardır. Kübik simorfik uzay gruplarının elemanları

kübik simorfik uzay grubunu elde etmek için hangi nokta grubu kullanılacaksa o nokta grubunun matris temsilleri ve ötelemeyi sıfır alarak bulunur. Bu bilgileri kullanarak kübik simorfik uzay gruplarının matris temsilleri aşağıdaki gibi olur.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)$$

Yukarıdaki matristen de görüldüğü öteleme sıfır alınmış ve $\vec{a}$ uzay grubu hangi nokta grubu kullanılarak elde edilmişse o nokta grubunun elemanlarının matris temsilleridir.

Örneğin P23, F23, I23 uzay gruplarının elemanlarını elde etmek için T nokta grubunun elemanlarının matris temsilleri ve öteleme sıfır alınarak elde edilir. Yani uzay grubunun matris temsiliinde öteleme yerine sıfır ve $\vec{a}$ yerine T nokta grubunun elemanlarının matris temsilleri yazılır. T nokta grubunun tüm elemanları yazılarak uzay gruplarının elemanları bulunur. T nokta grubunun 12 elemanı olduğu için P23, F23, I23 uzay gruplarının da 12 elemanları vardır. P23, F23, I23 uzay gruplarının elemanları aynı fakat Bravais kafesleri farklıdır.

Simorfik olmayan uzay gruplarının elemanları simorfik olmayan uzay grubunu elde etmek için hangi nokta grubu kullanılacaksa o nokta grubunun matris temsilleri ve ötelemeyi sıfırdan farklı alınarak bulunur. Bu bilgileri kullanarak simorfik olmayan uzay gruplarının matris temsilleri aşağıdaki gibi olur.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \tau_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \tau_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \tau_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)$$

Simorfik olmayan uzay gruplarının elemanları bulunurken o uzay grubunu üretmek için verilen üretçiler kullanılır. Simorfik olmayan uzay gruplarının tüm elemanları bu üreteçler cinsinden yazılarak bulunur.

Kübik simorfik uzay gruplarının elemanlarını, simorfik olmayan uzay grupları gibi o uzay grubunu üretmek için verilen üreteçleri kullanarak üretebiliriz. Kübik simorfik uzay gruplarında öteleme sıfır olduğu için üreteçleri kullanmak yerine, uzay grubunun ait olduğu nokta grubunun elemanlarının matris temsillerinin hepsini teker teker yazdığımız da aynı sonucu buluruz.

7.5.1. P23 (195) uzay grubu

P23 uzay grubu, nokta grubu T olan ve Bravais kafesi basit küp olan simorfik uzay grubudur. Basit küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = (a, 0, 0)$$

$$t_2 = (0, a, 0)$$

$$t_3 = (0, 0, a) \text{ dır (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Burada “a” örgü sabitidir. Bu uzay grubunu tanımlamak için T nokta grubunun matris temsilleri kullanılacaktır (Bkz. Çizelge 6.9). Tanım 12’yi kullanarak (Bkz. Bölüm. 7.1) uzay grubunun elemanları $\{ \alpha | 0 \}$ şeklinde tanımlanır. Burada “ α ”, T nokta grubunun nokta simetri operasyonlarıdır. Tanım 15’e göre (Bkz. Bölüm. 7.1) yukarıda yazdığımız uzay gruplarının matris temsilleri $\{ \alpha | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklindedir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\alpha} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki matris çarpımı, $\{ \alpha | 0 \}$ uzay grup operatörü için koordinat dönüşümünün matris temsili ile gösterimidir. Burada $\vec{\alpha}$, T nokta grubunun elemanlarının matris temsilleridir. T nokta grubunun elemanları ve elemanların matris temsilleri ve yukarıdaki bilgiler kullanılarak P23 elemanlarını tanımlayalım. P23 uzay grubunun elemanlarının bulunması için α yerine T nokta grubu elemanlarını yazılarak ve yazılan elemanın matris temsilleri kullanılarak bulunur. T nokta grubunun 12 tane elemanı olduğu için P23 uzay grubunda 12 tane eleman vardır.

$$1) \{ e | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{e} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani P23 uzay grubunun elemanı (x, y, z) olur. Buradan çıkaracağımız sonuç (x, y, z) noktasına, $\{ e | 0 \}$ uzay grubu elemanı uygulandığında yine (x, y, z) noktasına götürmektedir.

$$2) \{ a | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{a} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani P23 uzay grubunun elemanı (z, x, y) olur. (x, y, z) noktasına, $\{ a | 0 \}$ uzay grubu elemanı uygulandığında (z, x, y) noktasına götürmektedir. Bundan sonraki çarpımlarda sadece (x, y, z) noktasını nereye götürdüğü yazılacaktır.

$$3) \{ b | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani P23 uzay grubunun elemanı $(-y, z, -x)$ olur.

$$4) \{ c | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani P23 uzay grubunun elemanı $(-z, x, -y)$ olur.

$$5) \{ d | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani P23 uzay grubunun elemanı $(-y, -z, x)$ olur.

$$6) \{ f | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani P23 uzay grubunun elemanı (y, z, x) olur.

$$7) \{ g | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani P23 uzay grubunun elemanı $(-z, -x, y)$ olur.

$$8) \{ h | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani P23 uzay grubunun elemanı $(y, -z, -x)$ olur.

$$9) \{ i | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani P23 uzay grubunun elemanı (z, -x, -y) olur.

$$10) \{ j | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani P23 uzay grubunun elemanı (x, -y, -z) olur.

$$11) \{ k | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani P23 uzay grubunun elemanı (-x, y, -z) olur.

$$12) \{ l | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani P23 uzay grubunun elemanı (-x, -y, z) olur.

Böylece P23 uzay grubunun 12 tane elemanı elde edilmiş olur. P23 uzay grubunun 12 elemanı aşağıda verilmiştir (Çizelge 7.3).

Çizelge 7.3. P23 uzay grubunun elemanları

Uzay grubu elemanları	Uzay grubu elemanları	Uzay grubu elemanları
(+x,+y,+z)	(+z,+x,+y)	(+y,+z,+x)
(+x,-y,-z)	(+z,-x,-y)	(+y,-z,-x)
(-x,+y,-z)	(-z,+x,-y)	(-y,+z,-x)
(-x,-y,+z)	(-z,-x,+y)	(-y,-z,+x)

7.5.2. F23(196) uzay grubu

F23 uzay grubu, nokta grubu T olan ve Bravais kafesi yüzey merkezli küp olan simorfik uzay grubudur. Yüzey merkezli küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = 1/2 (0, a, a)$$

$$t_2 = 1/2(a, 0, a)$$

$$t_3 = 1/2 (a, a, 0) \text{ dür (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Burada “a”, örgü sabitidir. Bu uzay grubunu tanımlamak için T nokta grubunun matris temsilleri kullanılacaktır (Bkz. Çizelge 6.9). Tanım 12’yi kullanarak (Bkz. Bölüm. 7.1) uzay grubunun elemanları $\{ \alpha | 0 \}$ ile tanımlanır. Burada “ α ”, T nokta grubunun nokta simetri operasyonlarıdır. Tanım 15’e göre (Bkz. Bölüm. 7.1) yukarıda yazdığımız uzay gruplarının matris temsilleri $\{ \alpha | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklindedir. F23 uzay grubunun elemanlarının bulunması için α yerine T nokta grubun elemanlarını yazıp ve yazılan elemanın matris temsilleri kullanılarak bulunur. T nokta grubunun 12 tane elemanı olduğu için F23 uzay grubunda 12 tane eleman vardır.

$$1) \{ e | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{e} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani F23 uzay grubunun elemanı (x, y, z) olur.

$$2) \{ a | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{a} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani F23 uzay grubunun elemanı (z, x, y) olur.

$$3) \{ b | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{b} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani F23 uzay grubunun elemanı (-y, z, -x) olur.

$$4) \{ c | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani F23 uzay grubunun elemanı (-z, x, -y) olur.

$$5) \{ d | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani F23 uzay grubunun elemanı (-y, -z, x) olur.

$$6) \{ f | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani F23 uzay grubunun elemanı (y, z, x) olur.

$$7) \{ g | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani F23 uzay grubunun elemanı (-z, -x, y) olur.

$$8) \{ h | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani F23 uzay grubunun elemanı (y, -z, -x) olur.

$$9) \{ i | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani F23 uzay grubunun elemanı (z, -x, -y) olur.

$$10) \{ j | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani F23 uzay grubunun elemanı (x, -y, -z) olur.

$$11) \{ k | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani F23 uzay grubunun elemanı (-x, y, -z) olur.

$$12) \{ l | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani F23 uzay grubunun elemanı $(-x, -y, z)$ olur.

Böylece F23 uzay grubunun 12 tane elemanı elde edilmiş olur. F23 uzay grubunun 12 elemanı aşağıda verilmiştir (Çizelge 7.4).

Çizelge 7.4. F23 uzay grubunun elemanları

Uzay grubu elemanları	Uzay grubu elemanları	Uzay grubu elemanları
$(+x, +y, +z)$	$(+z, +x, +y)$	$(+y, +z, +x)$
$(+x, -y, -z)$	$(+z, -x, -y)$	$(+y, -z, -x)$
$(-x, +y, -z)$	$(-z, +x, -y)$	$(-y, +z, -x)$
$(-x, -y, +z)$	$(-z, -x, +y)$	$(-y, -z, +x)$

7.5.3. I23 (197) uzay grubu

I23 uzay grubu, nokta grubu T olan ve Bravais kafesi hacim merkezli küp olan simorfik uzay grubudur. Yüzey merkezli küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = 1/2 (-a, a, a)$$

$$t_2 = 1/2(a, -a, a)$$

$$t_3 = 1/2 (a, a, -a) \text{ dür (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Bu uzay grubunu tanımlamak için T nokta grubunun matris temsilleri kullanılacaktır (Bkz. Çizelge 6.9). Tanım 12'yi kullanarak (Bkz. Bölüm. 7.1) uzay grubunun elemanları $\{ \alpha | 0 \}$ şeklinde tanımlanır. Burada " α ", T nokta grubunun nokta simetri operasyonlarıdır. Tanım 15'e göre (Bkz. Bölüm. 7.1) yukarıda yazdığımız uzay gruplarının matris temsilleri $\{ \alpha | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklindedir. I23 uzay grubunun elemanlarının bulunması için α yerine T nokta grubun elemanları yazılıp ve yazılan

elemanının matris temsili kullanılarak bulunur. T nokta grubunun 12 tane elemanı olduğu için I23 uzay grubunda 12 tane eleman vardır.

$$1) \{ e | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{e} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani I23 uzay grubunun elemanı (x, y, z) olur.

$$2) \{ a | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{a} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani I23 uzay grubunun elemanı (z, x, y) olur.

$$3) \{ b | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{b} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani I23 uzay grubunun elemanı $(-y, z, -x)$ olur.

$$4) \{ c | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani I23 uzay grubunun elemanı $(-z, x, -y)$ olur.

$$5) \{ d | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani I23 uzay grubunun elemanı $(-y, -z, x)$ olur.

$$6) \{ f | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani I23 uzay grubunun elemanı (y, z, x) olur.

$$7) \{ g | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani I23 uzay grubunun elemanı $(-z, -x, y)$ olur.

$$8) \{ h | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani I23 uzay grubunun elemanı $(y, -z, -x)$ olur.

$$9) \{ i | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani I23 uzay grubunun elemanı (z, -x, -y) olur.

$$10) \{ j | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani I23 uzay grubunun elemanı (x, -y, -z) olur.

$$11) \{ k | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani I23 uzay grubunun elemanı (-x, y, -z) olur.

$$12) \{ l | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani I23 uzay grubunun elemanı (-x, -y, z) olur.

Böylece I23 uzay grubunun 12 tane elemanı elde edilmiş olur. I23 uzay grubunun tüm elemanları aşağıda verilmiştir (Çizelge 7.5).

Çizelge 7.5. I23 uzay grubunun elemanları

Uzay grubu elemanları	Uzay grubu elemanları	Uzay grubu elemanları
(+x,+y,+z)	(+z,+x,+y)	(+y,+z,+x)
(+x,-y,-z)	(+z,-x,-y)	(+y,-z,-x)
(-x,+y,-z)	(-z,+x,-y)	(-y,+z,-x)
(-x,-y,+z)	(-z,-x,+y)	(-y,-z,+x)

7.5.4. Pm3 (200) uzay grubu

Pm3 uzay grubu, nokta grubu T_h olan ve Bravais kafesi basit küp olan simorfik uzay grubudur. Basit küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = (a, 0, 0)$$

$$t_2 = (0, a, 0)$$

$$t_3 = (0, 0, a) \text{ dır (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Burada “a” örgü sabitidir. Bu uzay grubunu tanımlamak için T_h nokta grubunun matris temsilleri kullanılacaktır (Bkz. Çizelge 6.4). Tanım 12’yi kullanarak uzay grubunu $\{ \alpha | 0 \}$ şeklinde tanımlanır. Burada “ α ”, T_h nokta grubunun nokta simetri operasyonlarıdır. Tanım 15’e göre (Bkz. Bölüm. 7.1) yukarıda yazdığımız uzay gruplarının matris temsilleri $\{ \alpha | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklindedir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{\alpha} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

Yukarıdaki matris çarpımı, $\{ \alpha | 0 \}$ uzay grup operatörü için koordinat dönüşümünün matris temsili ile gösterimidir. Burada $\vec{\alpha}$, T_h nokta grubunun elemanlarının matris temsilleridir. T_h nokta grubunun elemanları ve elemanların matris temsilleri ve yukarıdaki bilgiler kullanılarak Pm3 elemanlarını tanımlayalım. Pm3 uzay grubunun elemanlarının bulunması için α yerine T_h nokta grubun elemanları yazılarak ve yazılan elemanın matris temsilleri kullanılır. T_h Nokta grubunun 24 tane elemanı olduğu için Pm3 uzay grubunda 24 tane eleman vardır.

$$1) \{ e | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{e} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (x, y, z) olur.

$$2) \{ a | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (z, x, y) olur.

$$3) \{ b | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (-y, z, -x) olur.

$$4) \{ c | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (-z, x, -y) olur.

$$5) \{ d | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (-y, -z, x) olur.

$$6) \{ f | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (y, z, x) olur.

$$7) \{ g | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (-z, -x, y) olur.

$$8) \{ h | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (y, -z, -x) olur.

$$9) \{ i | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (z, -x, -y) olur.

$$10) \{ j | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (x, -y, -z) olur.

$$11) \{ k | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (-x, y, -z) olur.

$$12) \{ l | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (-x, -y, z) olur.

$$13) \{ I | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (-x, -y, -z) olur.

$$14) \{ a^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (-z, -x, -y) olur.

$$15) \{ b^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (y, -z, x) olur.

$$16) \{ c^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{c^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (z, -x, y) olur.

$$17) \{ d^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{d^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (y, z, -x) olur.

$$18) \{ f^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{f^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (-y, -z, -x) olur.

$$19) \{ g^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{g^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (z, x, -y) olur.

$$20) \{ h^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{h^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (-y, z, x) olur.

$$21) \{ i^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{i^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (-z, x, y) olur.

$$22) \{ j^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{j^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (x, -y, z) olur.

$$23) \{ k^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{k^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (x, y, -z) olur.

$$24) \{ l^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{l^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (-x, y, z) olur.

Böylece Pm3 uzay grubunun 24 tane elemanı elde edilmiş olur. Pm3 uzay grubunun 24 elemanı aşağıda verilmiştir (Çizelge 7.6).

Çizelge 7.6. Pm3 uzay grubunun elemanları

Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları
(+x, +y, +z)	(+z, +x, +y)	(-y, +z, -x)
(-z, +x, -y)	(-y, -z, +x)	(+y, +z, +x)
(-z, -x, +y)	(+y, -z, -x)	(+z, -x, -y)
(+x, -y, -z)	(-x, +y, -z)	(-x, -y, +z)
(-x, -y, -z)	(-z, -x, -y)	(+y, -z, +x)
(+z, -x, +y)	(+y, +z, -x)	(-y, -z, -x)
(+z, +x, -y)	(-y, +z, +x)	(-z, +x, +y)
(+x, -y, +z)	(+x, +y, -z)	(-x, +y, +z)

7.5.5. Fm3 (202) uzay grubu

Pm3 uzay grubu, nokta grubu T_h olan ve Bravais kafesi yüzey merkezli küp olan simorfik uzay grubudur. Yüzey merkezli küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = 1/2 (0, a, a)$$

$$t_2 = 1/2(a, 0, a)$$

$$t_3 = 1/2 (a, a, 0) \text{ dür (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Burada “a” örgü sabitidir. Tanım 12’yi kullanılarak (Bkz. Bölüm. 7.1) uzay grubunu $\{\alpha | 0\}$ şeklinde tanımlanır. Burada “ α ”, T_h nokta grubunun nokta simetri operasyonlarıdır. Tanım 15’e göre (Bkz. Bölüm. 7.1) yukarıda yazdığımız uzay gruplarının matris temsileri $\{\alpha | 0\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklindedir. T_h Nokta grubunun elemanları ve elemanların matris temsilleri ve yukarıdaki bilgiler kullanılarak Fm3 elemanlarını tanımlayalım. Fm3 uzay grubunun elemanlarının bulunması için α yerine T_h nokta grubun elemanlarını yazalım ve yazılan elemanın matris temsili kullanalım (Bkz. Çizelge 6.4). T_h Nokta grubunun 24 tane elemanı olduğu için Fm3 uzay grubunda 24 tane eleman vardır.

$$1) \{ e | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{e} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (x, y, z) olur.

$$2) \{ a | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (z, x, y) olur.

$$3) \{ b | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (-y, z, -x) olur.

$$4) \{ c | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (-z, x, -y) olur.

$$5) \{ d | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (-y, -z, x) olur.

$$6) \{ f | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (y, z, x) olur.

$$7) \{ g | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (-z, -x, y) olur.

$$8) \{ h | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (y, -z, -x) olur.

$$9) \{ i | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (z, -x, -y) olur.

$$10) \{ j | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (x, -y, -z) olur.

$$11) \{ k | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (-x, y, -z) olur.

$$12) \{ l | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (-x, -y, z) olur.

$$13) \{ I | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (-x, -y, -z) olur.

$$14) \{ a^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (-z, -x, -y) olur.

$$15) \{ b^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (y, -z, x) olur.

$$16) \{ c^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{c^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (z, -x, y) olur.

$$17) \{ d^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{d^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (y, z, -x) olur.

$$18) \{ f^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{f^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (-y, -z, -x) olur.

$$19) \{ g^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{g^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (z, x, -y) olur.

$$20) \{ h^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{h^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (-y, z, x) olur.

$$21) \{ i^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{i^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (-z, x, y) olur.

$$22) \{ j^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{j^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (x, -y, z) olur.

$$23) \{ k^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{k^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (x, y, -z) olur.

$$24) \{ l^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{l}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Fm3 uzay grubunun elemanı (-x, y, z) olur.

Böylece Fm3 uzay grubunun 24 tane elemanı elde edilmiş olur. Fm3 uzay grubunun 24 elemanı aşağıda tablo halinde verilmiştir (Çizelge 7.7).

Çizelge 7.7. Fm3 uzay grubunun elemanları

Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları
(+x, +y, +z)	(+z, +x, +y)	(-y, +z, -x)
(-z, +x, -y)	(-y, -z, +x)	(+y, +z, +x)
(-z, -x, +y)	(+y, -z, -x)	(+z, -x, -y)
(+x, -y, -z)	(-x, +y, -z)	(-x, -y, +z)
(-x, -y, -z)	(-z, -x, -y)	(+y, -z, +x)
(+z, -x, +y)	(+y, +z, -x)	(-y, -z, -x)
(+z, +x, -y)	(-y, +z, +x)	(-z, +x, +y)
(+x, -y, +z)	(+x, +y, -z)	(-x, +y, +z)

7.5.6. Im3 (204) uzay grubu

Im3 uzay grubu, nokta grubu T_h olan ve Bravais kafesi hacim merkezli küp olan simorfik uzay grubudur. Hacim merkezli küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = 1/2 (-a, a, a)$$

$$t_2 = 1/2(a, -a, a)$$

$$t_3 = 1/2 (a, a, -a) \text{ dür (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Burada “a” örgü sabitidir. Tanım 12’i kullanılarak (Bkz. Bölüm. 7.1) uzay grubunu $\{\alpha|0\}$ şeklinde tanımlanır. Burada “ α ”, T_h nokta grubunun nokta simetri operasyonlarıdır. Tanım 15’e göre (Bkz. Bölüm. 7.1) yukarıda yazdığımız uzay gruplarının matris temsilleri $\{ \alpha | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanır. T_h Nokta

grubunun elemanları ve elemanların matris temsilleri ve yukarıdaki bilgiler kullanılarak $Im3$ uzay grubunun elemanlarını tanımlayalım. $Im3$ uzay grubunun elemanlarının bulunması için α yerine T_h nokta grubun elemanları yazılarak ve yazılan elemanın matris temsili kullanılarak bulunur (Bkz. Çizelge 6.4). T nokta grubunun 24 tane elemanı olduğu için $Im3$ uzay grubunda 24 tane eleman vardır.

$$1) \{ e | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{e} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani $Im3$ uzay grubunun elemanı (x, y, z) olur.

$$2) \{ a | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani $Im3$ uzay grubunun elemanı (z, x, y) olur.

$$3) \{ b | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani $Im3$ uzay grubunun elemanı $(-y, z, -x)$ olur.

$$4) \{ c | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani $\text{Im}3$ uzay grubunun elemanı $(-z, x, -y)$ olur.

$$5) \{ d | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani $\text{Im}3$ uzay grubunun elemanı $(-y, -z, x)$ olur.

$$6) \{ f | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani $\text{Im}3$ uzay grubunun elemanı (y, z, x) olur.

$$7) \{ g | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani $\text{Im}3$ uzay grubunun elemanı $(-z, -x, y)$ olur.

$$8) \{ h | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani $\text{Im}3$ uzay grubunun elemanı $(y, -z, -x)$ olur.

$$9) \{ i | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani $\text{Im}3$ uzay grubunun elemanı $(z, -x, -y)$ olur.

$$10) \{ j | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani $\text{Im}3$ uzay grubunun elemanı $(x, -y, -z)$ olur.

$$11) \{ k | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani $\text{Im}3$ uzay grubunun elemanı $(-x, y, -z)$ olur.

$$12) \{ l | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani $\text{Im}3$ uzay grubunun elemanı $(-x, -y, z)$ olur.

$$13) \{ I | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani $\text{Im}3$ uzay grubunun elemanı $(-x, -y, -z)$ olur.

$$14) \{ a^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani $\text{Im}3$ uzay grubunun elemanı $(-z, -x, -y)$ olur.

$$15) \{ b^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani $\text{Im}3$ uzay grubunun elemanı $(y, -z, x)$ olur.

$$16) \{ c^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{c}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Im3 uzay grubunun elemanı (z, -x, y) olur.

$$17) \{ d^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{d^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Im3 uzay grubunun elemanı (y, z, -x) olur.

$$18) \{ f^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{f^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Im3 uzay grubunun elemanı (-y, -z, -x) olur.

$$19) \{ g^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{g^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Im3 uzay grubunun elemanı (z, x, -y) olur.

$$20) \{ h^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{h^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Im3 uzay grubunun elemanı (-y, z, x) olur.

$$21) \{ i^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{i^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Im3 uzay grubunun elemanı (-z, x, y) olur.

$$22) \{ j^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{j^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Im3 uzay grubunun elemanı (x, -y, z) olur.

$$23) \{ k^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{k}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Im3 uzay grubunun elemanı (x, y, -z) olur.

$$24) \{ l^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{l}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Im3 uzay grubunun elemanı (-x, y, z) olur.

Böylece Im3 uzay grubunun 24 tane elemanı elde edilmiş olur. Im3 uzay grubunun 24 elemanı tablo halinde aşağıda verilmiştir (Çizelge 7.8).

Çizelge 7.8. Im3 uzay grubunun elemanları

Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları
(+x, +y, +z)	(+z, +x, +y)	(-y, +z, -x)
(-z, +x, -y)	(-y, -z, +x)	(+y, +z, +x)
(-z, -x, +y)	(+y, -z, -x)	(+z, -x, -y)
(+x, -y, -z)	(-x, +y, -z)	(-x, -y, +z)
(-x, -y, -z)	(-z, -x, -y)	(+y, -z, +x)
(+z, -x, +y)	(+y, +z, -x)	(-y, -z, -x)
(+z, +x, -y)	(-y, +z, +x)	(-z, +x, +y)
(+x, -y, +z)	(+x, +y, -z)	(-x, +y, +z)

7.5.7.Pm3m (221) uzay grubu

Pm3m uzay grubu, nokta grubu O_h olan ve Bravais kafesi basit küp olan simorfik uzay grubudur. Basit küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = (a, 0, 0)$$

$$t_2 = (0, a, 0)$$

$$t_3 = (0, 0, a) \text{ d\u00fcr (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Burada “a” \u00f6rg\u00fc sabitidir. Bu uzay grubunu tanımlamak i\u00e7in O_h nokta grubunun matris temsilleri kullanılacaktır. O_h Nokta grubunun matris temsilleri bulunmuştur (Delibas ve ark., 2013). Tanım 12’yi kullanarak (Bkz. B\u00f6l\u00fcm. 7.1) uzay grubunun elemanları $\{ \alpha | 0 \}$ şeklinde tanımlanır. Burada “ α ”, O_h Nokta grubunun nokta simetri operasyonlarıdır. Tanım 15’e g\u00f6re yukarıda yazdığımız uzay gruplarının matris temsilleri $\{ \alpha | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlarız. Burada $\vec{\alpha}$ ifadesi O_h nokta grubunun elemanlarının matris temsilleridir. O_h nokta grubunun elemanları ve elemanların matris temsilleri ve yukarıdaki bilgiler kullanılarak Pm3m elemanlarını tanımlayalım. Pm3m uzay grubunun elemanlarının bulunması i\u00e7in α yerine O_h nokta grubun elemanları yazılıp ve yazılan elemanın matris temsili kullanılarak bulunur. O_h nokta grubunun 48 tane elemanı oldu\u011fu i\u00e7in Pm3m uzay grubunda 48 tane eleman vardır.

$$1) \{ e | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{e} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (x, y, z) olur.

$$2) \{ a | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (z, x, y) olur.

$$3) \{ b | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-y, z, -x) olur.

$$4) \{ c | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-z, x, -y) olur.

$$5) \{ d | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-y, -z, x) olur.

$$6) \{ f | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (y, z, x) olur.

$$7) \{ g | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-z, -x, y) olur.

$$8) \{ h | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (y, -z, -x) olur.

$$9) \{ i | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (z, -x, -y) olur.

$$10) \{ j | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (x, -y, -z) olur.

$$11) \{ k | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-x, y, -z) olur.

$$12) \{ l | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-x, -y, z) olur.

$$13) \{ m | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (x, -z, y) olur.

$$14) \{ n | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (x, z, -y) olur.

$$15) \{ o | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ y \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (z, y, -x) olur.

$$16) \{ p | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-z, y, x) olur.

$$17) \{ r | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-y, x, z) olur.

$$18) \{ s | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (y, -x, z) olur.

$$19) \{ t | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -z \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-x, -z, -y) olur.

$$20) \{ u | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-x, z, y) olur.

$$21) \{ v | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-z, -y, -x) olur.

$$22) \{ w | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -y \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (z, -y, x) olur.

$$23) \{ y | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ x \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (y, x, -z) olur.

$$24) \{ z | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -x \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-y, -x, -z) olur.

$$25) \{ I | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-x, -y, -z) olur.

$$26) \{ a^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-z, -x, -y) olur.

$$27) \{ b^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (y, -z, x) olur.

$$28) \{ c^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{c^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (z, -x, y) olur.

$$29) \{ d^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{d^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (y, z, -x) olur.

$$30) \{ f^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{f^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-y, -z, -x) olur.

$$31) \{ g^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{g^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (z, x, -y) olur.

$$32) \{ h^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{h^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-y, z, x) olur.

$$33) \{ i^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{i^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-z, x, y) olur.

$$34) \{ j^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{j^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (x, -y, z) olur.

$$35) \{ k^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{k^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (x, y, -z) olur.

$$36) \{ l^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{l^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3 uzay grubunun elemanı (-x, y, z) olur.

Böylece Pm3 uzay grubunun 24 tane elemanı elde edilmiş olur.

$$37) \{ m^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{m^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-x, z, -y) olur.

$$38) \{ n^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{n^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-x, -z, y) olur.

$$39) \{ o^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{o^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-z, -y, z) olur.

$$40) \{ p^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{p^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (z, -y, -x) olur.

$$41) \{ r^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{r^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (y, -x, z) olur.

$$42) \{ s^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{s^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ x \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-y, x, -z) olur.

$$43) \{ t^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{t^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -z \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (x, -z, -y) olur.

$$44) \{ u^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{u^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (x, y, -z) olur.

$$45) \{ v^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{v^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ y \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-z, y, -x) olur.

$$46) \{ w^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{w^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (z, y, x) olur.

$$47) \{ y^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{y^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (-y, -x, z) olur.

$$48) \{ z^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{z^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

Yani Pm3m uzay grubunun elemanı (y, x, z) olur.

Böylece Pm3m uzay grubunun 48 elemanı bulunmuş olur. Pm3m uzay grubunun 48 elemanı aşağıda verilmiştir (Çizelge 7.9).

Çizelge 7.9. Pm3m uzay grubunun elemanları

Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları
(+x, +y, +z)	(+z, +x, +y)	(+y, +z, +x)	(+x, +z, +y)	(+y, +x, +z)	(+z, +y, +x)
(+x, -y, -z)	(+z, -x, -y)	(+y, -z, -x)	(+x, -z, -y)	(+y, -x, -z)	(+z, -y, -x)
(-x, +y, -z)	(-z, +x, -y)	(-y, +z, -x)	(-x, +z, -y)	(-y, +x, -z)	(-z, +y, -x)
(-x, -y, +z)	(-z, -x, +y)	(-y, -z, +x)	(-x, -z, +y)	(-y, -x, +z)	(-z, -y, +x)
(-x, -y, -z)	(-z, -x, -y)	(-y, -z, -x)	(-x, -z, -y)	(-y, -x, -z)	(-z, -y, -x)
(-x, +y, +z)	(-z, +x, +y)	(-y, +z, +x)	(-x, +z, +y)	(-y, +x, +z)	(-z, +y, +x)
(+x, -y, +z)	(+z, -x, +y)	(+y, -z, +x)	(+x, -z, +y)	(+y, -x, +z)	(+z, -y, +x)
(+x, +y, -z)	(+z, +x, -y)	(+y, +z, -x)	(+x, +z, -y)	(+y, +x, -z)	(+z, +y, -x)

7.5.8. Fm3m (225) uzay grubu

Fm3m uzay grubu, nokta grubu O_h olan ve Bravais kafesi yüzey merkezli küp olan simorfik uzay grubudur. Yüzey merkezli küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = 1/2 (0, a, a)$$

$$t_2 = 1/2(a, 0, a)$$

$$t_3 = 1/2 (a, a, 0) \text{ dür (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Tanım 12’i kullanılarak (Bkz. Bölüm 7.1) uzay grubunu $\{ \alpha | 0 \}$ şeklinde tanımlanır. Burada “ α ”, T_h nokta grubunun nokta simetri operasyonlarıdır. Tanım 15’e göre (Bkz. Bölüm 7.1) yukarıda yazdığımız uzay gruplarının matris temsillerini $\{ \alpha | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlayabiliriz. Fm3m uzay grubunun elemanları, α yerine O_h nokta grubun elemanlarını yazılıp ve yazılan elemanın matris temsili kullanılarak bulunur. O_h Nokta grubunun matris temsilleri bulunmuştur (Delibas ve ark., 2013). O_h

Nokta grubunun 48 tane elemanı olduğu için Fm3m uzay grubunda 48 tane eleman vardır (Çizelge 7.10). Fm3m uzay grubunun elemanları, Pm3m uzay grubunun elemanlarının aynısıdır. Sadece Bravais örgü türü farklıdır. Bu nedenle Fm3m uzay grubunun elemanları işlem yapılmadan yazıldı.

Çizelge 7.10. Fm3m Uzay Grubunun elemanları

Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları
(+x, +y, +z)	(+z, +x, +y)	(+y, +z, +x)	(+x, +z, +y)	(+y, +x, +z)	(+z, +y, +x)
(+x, -y, -z)	(+z, -x, -y)	(+y, -z, -x)	(+x, -z, -y)	(+y, -x, -z)	(+z, -y, -x)
(-x, +y, -z)	(-z, +x, -y)	(-y, +z, -x)	(-x, +z, -y)	(-y, +x, -z)	(-z, +y, -x)
(-x, -y, +z)	(-z, -x, +y)	(-y, -z, +x)	(-x, -z, +y)	(-y, -x, +z)	(-z, -y, +x)
(-x, -y, -z)	(-z, -x, -y)	(-y, -z, -x)	(-x, -z, -y)	(-y, -x, -z)	(-z, -y, -x)
(-x, +y, +z)	(-z, +x, +y)	(-y, +z, +x)	(-x, +z, +y)	(-y, +x, +z)	(-z, +y, +x)
(+x, -y, +z)	(+z, -x, +y)	(+y, -z, +x)	(+x, -z, +y)	(+y, -x, +z)	(+z, -y, +x)
(+x, +y, -z)	(+z, +x, -y)	(+y, +z, -x)	(+x, +z, -y)	(+y, +x, -z)	(+z, +y, -x)

7.5.9. Im3m (229) uzay grubu

Im3m uzay grubu, nokta grubu O_h olan ve Bravais kafesi hacim merkezli küp olan simorfik uzay grubudur. Hacim merkezli küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = 1/2 (-a, a, a)$$

$$t_2 = 1/2(a, -a, a)$$

$$t_3 = 1/2 (a, a, -a) \text{ dür (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Tanım 12'yi kullanarak (Bkz. Bölüm 7.1) uzay grubunun elemanları $\{ \alpha | 0 \}$ şeklinde tanımlarız. Burada " α ", T_h nokta grubunun nokta simetri operasyonlarıdır. Tanım 15'e göre (Bkz. Bölüm 7.1) yukarıda yazdığımız uzay gruplarının matris temsilleri $\{ \alpha | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklindedir. Im3m uzay grubunun elemanları, α yerine O_h nokta grubun

elemanlarını yazılır ve yazılan elemanın matris temsili kullanılarak bulunur. O_h Nokta grubunun matris temsilleri bulunmuştur (Delibas ve ark., 2013). O_h Nokta grubunun 48 tane elemanı olduğu için $Im3m$ uzay grubunda 48 tane eleman vardır (Çizelge 7.11). $Im3m$ uzay grubunun elemanları, $Pm3m$ uzay grubunun elemanlarının aynısıdır. Sadece Bravais örgü türü farklıdır. Bu nedenle $Im3m$ uzay grubunun elemanları işlem yapılmadan yazıldı.

Çizelge 7.11. $Im3m$ Uzay Grubunun elemanları

Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları
(+x, +y, +z)	(+z, +x, +y)	(+y, +z, +x)	(+x, +z, +y)	(+y, +x, +z)	(+z, +y, +x)
(+x, -y, -z)	(+z, -x, -y)	(+y, -z, -x)	(+x, -z, -y)	(+y, -x, -z)	(+z, -y, -x)
(-x, +y, -z)	(-z, +x, -y)	(-y, +z, -x)	(-x, +z, -y)	(-y, +x, -z)	(-z, +y, -x)
(-x, -y, +z)	(-z, -x, +y)	(-y, -z, +x)	(-x, -z, +y)	(-y, -x, +z)	(-z, -y, +x)
(-x, -y, -z)	(-z, -x, -y)	(-y, -z, -x)	(-x, -z, -y)	(-y, -x, -z)	(-z, -y, -x)
(-x, +y, +z)	(-z, +x, +y)	(-y, +z, +x)	(-x, +z, +y)	(-y, +x, +z)	(-z, +y, +x)
(+x, -y, +z)	(+z, -x, +y)	(+y, -z, +x)	(+x, -z, +y)	(+y, -x, +z)	(+z, -y, +x)
(+x, +y, -z)	(+z, +x, -y)	(+y, +z, -x)	(+x, +z, -y)	(+y, +x, -z)	(+z, +y, -x)

7.5.10. P432 (207) uzay grubu

P432 uzay grubu, nokta grubu O olan ve Bravais kafesi basit küp olan simorfik uzay grubudur. Basit küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = (a, 0, 0)$$

$$t_2 = (0, a, 0)$$

$$t_3 = (0, 0, a) \text{ dür (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Bu uzay grubunu tanımlamak için O nokta grubunun matris temsilleri kullanılacaktır. Tanım 12'i kullanılarak (Bkz. Bölüm. 7.1) uzay grubunu $\{ \alpha | 0 \}$ şeklinde tanımlanır.

Burada “ α ” O nokta grubunun nokta simetri operasyonlarıdır. Tanım 15’e göre (Bkz. Bölüm. 7.1) uzay gruplarının matris temsilleri $\{ \alpha | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklindedir. Burada $\vec{\alpha}$, O nokta grubunun elemanlarının matris temsilleridir. O nokta grubunun elemanları ve elemanların matris temsilleri ve yukarıdaki bilgiler kullanılarak P432 elemanlarını tanımlayalım. P432 uzay grubunun elemanlarının bulunması için α yerine O nokta grubun elemanlarını yazıp ve yazılan elemanın matris temsilini kullanalım. O nokta grubunun 24 tane elemanı olduğu için P432 uzay grubunda 24 tane eleman vardır.

$$1) \{ e | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{e} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı (x, y, z) olur.

$$2) \{ a | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı (z, x, y) olur.

$$3) \{ b | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı (-y, z, -x) olur.

$$4) \{ c | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı $(-z, x, -y)$ olur.

$$5) \{ d | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı $(-y, -z, x)$ olur.

$$6) \{ f | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı (y, z, x) olur.

$$7) \{ g | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı $(-z, -x, y)$ olur.

$$8) \{ h | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı $(y, -z, -x)$ olur.

$$9) \{ i | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı $(z, -x, -y)$ olur.

$$10) \{ j | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı (x, -y, -z) olur.

$$11) \{ k | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı (-x, y, -z) olur.

$$12) \{ l | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı (-x, -y, z) olur.

$$13) \{ m | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı (x, -z, y) olur.

$$14) \{ n | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı (x, z, -y) olur.

$$15) \{ o | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ y \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı (z, y, -x) olur.

$$16) \{ p | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı (-z, y, x) olur.

$$17) \{ r | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı $(-y, x, z)$ olur.

$$18) \{ s | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı $(y, -x, z)$ olur.

$$19) \{ t | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -z \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı $(-x, -z, -y)$ olur.

$$20) \{ u | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı $(-x, z, y)$ olur.

$$21) \{ v | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı $(-z, -y, -x)$ olur.

$$22) \{ w | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -y \\ x \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı $(z, -y, x)$ olur.

$$23) \{ y | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ x \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı (y, x, -z) olur.

$$24) \{ z | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -x \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani P432 uzay grubunun elemanı (-y, -x, -z) olur.

P432 uzay grubunun tüm elemanları aşağıda verilmiştir (Çizelge 7.12).

Çizelge 7.12. P432 uzay grubunun elemanları

Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları
(+x, +y, +z)	(+z, +x, +y)	(+y, +z, +x)
(+x, -y, -z)	(+z, -x, -y)	(+y, -z, -x)
(-x, +y, -z)	(-z, +x, -y)	(-y, +z, -x)
(-x, -y, +z)	(-z, -x, +y)	(-y, -z, +x)
(-x, -z, -y)	(-y, -x, -z)	(-z, -y, -x)
(-x, +z, +y)	(-y, +x, +z)	(-z, +y, +x)
(+x, -z, +y)	(+y, -x, +z)	(+z, -y, +x)
(+x, +z, -y)	(+y, +x, -z)	(+z, +y, -x)

7.5.11. F432 (209) uzay grubu

F432 uzay grubu, nokta grubu O olan ve Bravais kafesi yüzey merkezli küp olan simorfik uzay grubudur. Yüzey merkezli küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = 1/2 (0, a, a)$$

$$t_2 = 1/2(a, 0, a)$$

$$t_3 = 1/2 (a, a, 0) \text{ dür (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Tanım 12’i kullanılarak (Bkz. Bölüm. 7.1) uzay grubunun elemanları $\{ \alpha | 0 \}$ şeklinde tanımlanır. Burada “ α ”, O nokta grubunun nokta simetri operasyonlarıdır. Tanım 15’e

göre (Bkz. Bölüm. 7.1) uzay gruplarının matris temsilleri $\{ \alpha | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$

şeklindedir. F432 uzay grubunun elemanları, α yerine O nokta grubun elemanlarını yazıp, yazılan elemanın matris temsilleri kullanılarak bulunur. O nokta grubunun 24 tane elemanı olduğu için F432 uzay grubunda 24 tane eleman vardır (Çizelge 7.13). F432 uzay grubunun elemanları, P432 uzay grubunun elemanlarının aynısıdır. Sadece Bravais örgü türü farklıdır. Bu nedenle F432 uzay grubunun elemanları işlem yapılmadan yazıldı.

Çizelge 7.13. F432 uzay grubunun elemanları

Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları
(+x, +y, +z)	(+z, +x, +y)	(+y, +z, +x)
(+x, -y, -z)	(+z, -x, -y)	(+y, -z, -x)
(-x, +y, -z)	(-z, +x, -y)	(-y, +z, -x)
(-x, -y, +z)	(-z, -x, +y)	(-y, -z, +x)
(-x, -z, -y)	(-y, -x, -z)	(-z, -y, -x)
(-x, +z, +y)	(-y, +x, +z)	(-z, +y, +x)
(+x, -z, +y)	(+y, -x, +z)	(+z, -y, +x)
(+x, +z, -y)	(+y, +x, -z)	(+z, +y, -x)

7.5.12. I432 (211) uzay grubu

I432 uzay grubu, nokta grubu O olan ve Bravais kafesi hacim merkezli küp olan simorfik uzay grubudur. Hacim merkezli küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = 1/2 (-a, a, a)$$

$$t_2 = 1/2(a, -a, a)$$

$$t_3 = 1/2 (a, a, -a) \text{ dür (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Tanım 12’i kullanılarak (Bkz. Bölüm. 7.1) uzay grubunun elemanları $\{ \alpha | 0 \}$ şeklinde tanımlanır. Burada “ α ”, O nokta grubunun nokta simetri operasyonlarıdır. Tanım 15’e göre (Bkz. Bölüm. 7.1) yukarıda yazdığımız uzay gruplarının matris temsilleri $\{ \alpha | 0 \}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklindedir. I432 uzay grubunun elemanlarının bulunması için α yerine O nokta grubun elemanlarını yazılır ve yazılan elemanın matris temsili kullanılır. O nokta grubunun 24 tane elemanı olduğu için I432 uzay grubunda 24 tane eleman vardır (Çizelge 7.14). I432 uzay grubunun elemanları, P432 uzay grubunun elemanlarının aynısıdır. Sadece Bravais örgü türü farklıdır. Bu nedenle I432 uzay grubunun elemanları işlem yapılmadan yazıldı.

Çizelge 7.14. I432 uzay grubunun elemanları

Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları
(+x, +y, +z)	(+z, +x, +y)	(+y, +z, +x)
(+x, -y, -z)	(+z, -x, -y)	(+y, -z, -x)
(-x, +y, -z)	(-z, +x, -y)	(-y, +z, -x)
(-x, -y, +z)	(-z, -x, +y)	(-y, -z, +x)
(-x, -z, -y)	(-y, -x, -z)	(-z, -y, -x)
(-x, +z, +y)	(-y, +x, +z)	(-z, +y, +x)
(+x, -z, +y)	(+y, -x, +z)	(+z, -y, +x)
(+x, +z, -y)	(+y, +x, -z)	(+z, +y, -x)

7.5.13. $\bar{P}43m$ (215) uzay grubu

$\bar{P}43m$ uzay grubu, nokta grubu T_d olan ve Bravais kafesi basit küp olan simorfik uzay grubudur. Basit küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = (a, 0, 0)$$

$$t_2 = (0, a, 0)$$

$$t_3 = (0, 0, a) \text{ dür (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Tanım 12'i kullanarak (Bkz. Bölüm. 7.1) uzay grubunun elemanları $\{ \alpha | 0 \}$ şeklinde tanımlanır. Burada " α ", T_d nokta grubunun nokta simetri operasyonlarının matris temsilleridir. Tanım 15'e göre (Bkz. Bölüm. 7.1) yukarıda yazdığımız uzay gruplarının

matris temsilleri $\{ \alpha | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklindedir. Burada $\vec{\alpha}$ ifadesi T_d nokta grubunun elemanlarının matris temsilleridir. T_d nokta grubunun elemanları ve elemanların matris temsilleri ve yukarıdaki bilgiler kullanılarak $P\bar{4}3m$ elemanlarını tanımlayalım. $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanlarının bulunması için α yerine T_d nokta grubu elemanlarını yazıp sonra yazılan elemanın matris temsili kullanılır. T_d Nokta grubunun 24 tane elemanı olduğu için $P\bar{4}3m$ uzay grubunda 24 tane eleman vardır.

$$1) \{ e | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{e} \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı (x, y, z) olur.

$$2) \{ a | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı (z, x, y) olur.

$$3) \{ b | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı (-y, z, -x) olur.

$$4) \{ c | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı $(-z, x, -y)$ olur.

$$5) \{ d | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı $(-y, -z, x)$ olur.

$$6) \{ f | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı (y, z, x) olur.

$$7) \{ g | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı $(-z, -x, y)$ olur.

$$8) \{ h | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı $(y, -z, -x)$ olur.

$$9) \{ i | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı $(z, -x, -y)$ olur.

$$10) \{ j | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı $(x, -y, -z)$ olur.

$$11) \{ k | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani $\overline{P43m}$ uzay grubunun elemanı $(-x, y, -z)$ olur.

$$12) \{ l | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani $\overline{P43m}$ uzay grubunun elemanı $(-x, -y, z)$ olur.

$$13) \{ m^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{m^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani $\overline{P43m}$ uzay grubunun elemanı $(-x, z, -y)$ olur.

$$14) \{ n^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{n^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \\ -z \\ y \end{pmatrix}$$

Yani $\overline{P43m}$ uzay grubunun elemanı $(-x, -z, y)$ olur.

$$15) \{ o^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{o^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Yani $\overline{P43m}$ uzay grubunun elemanı $(-z, -y, z)$ olur.

$$16) \{ p^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{p^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani $\overline{P43m}$ uzay grubunun elemanı $(z, -y, -x)$ olur.

$$17) \{ r^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{r^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı (y, -x, z) olur.

$$18) \{ s^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{s^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ x \\ -z \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı (-y, x, -z) olur.

$$19) \{ t^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{t^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ -z \\ -y \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı (x, -z, -y) olur.

$$20) \{ u^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{u^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı (x, y, -z) olur.

$$21) \{ v^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{v^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -z \\ y \\ -x \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı (-z, y, -x) olur.

$$22) \{ w^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{w^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı (z, y, x) olur.

$$23) \{ y^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{y^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı (-y, -x, z) olur.

$$24) \{ z^* | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{smallmatrix} \leftarrow \\ \rightarrow \end{smallmatrix} & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

Yani $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanı (y, x, z) olur.

Böylece $P\bar{4}3m$ uzay grubunun tüm elemanları elde edilmiş olur. $P\bar{4}3m$ uzay grubunun tüm elemanları aşağıda verilmiştir (Çizelge 7.15).

Çizelge 7.15. $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanları

Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları
(+x, +y, +z)	(+z, +x, +y)	(+y, +z, +x)
(+x, -y, -z)	(+z, -x, -y)	(+y, -z, -x)
(-x, +y, -z)	(-z, +x, -y)	(-y, +z, -x)
(-x, -y, +z)	(-z, -x, +y)	(-y, -z, +x)
(+x, +z, +y)	(+y, +x, +z)	(+z, +y, +x)
(+x, -z, -y)	(+y, -x, -z)	(+z, -y, -x)
(-x, +z, -y)	(-y, +x, -z)	(-z, +y, -x)
(-x, -z, +y)	(-y, -x, +z)	(-z, -y, +x)

7.5.14. $F\bar{4}3m$ (216) uzay grubu

$F\bar{4}3m$ uzay grubu, nokta grubu T_d olan ve Bravais kafesi yüzey merkezli küp olan simorfik uzay grubudur. Yüzey merkezli küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = 1/2 (0, a, a)$$

$$t_2 = 1/2(a, 0, a)$$

$$t_3 = 1/2 (a, a, 0) \text{ dür (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Tanım 12'i kullanılarak (Bkz. Bölüm. 7.1) uzay grubunun elemanları $\{ \alpha | 0 \}$ şeklinde tanımlanır. Burada " α ", T_d nokta grubunun nokta simetri operasyonlarıdır. Tanım 15'e göre (Bkz. Bölüm. 7.1) yukarıda yazdığımız uzay gruplarının matris temsileri

$\{ \alpha | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklindedir. $F\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanlarının bulunması için α

yerine T_d nokta grubun elemanları yazılıp, yazılan elemanın matris temsili kullanılır. T_d Nokta grubunun 24 tane elemanı olduğu için $F\bar{4}3m$ uzay grubunda 24 tane elemanı vardır (Çizelge 7.16). $F\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanları, $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanlarıyla aynıdır fakat Bravais örgü türleri farklıdır. Bu nedenle $F\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanları $P\bar{4}3m$ uzay grubundan alındığı için işlem yapılmadan yazıldı.

Çizelge 7.16. $F\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanları

Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları
(+x, +y, +z)	(+z, +x, +y)	(+y, +z, +x)
(+x, -y, -z)	(+z, -x, -y)	(+y, -z, -x)
(-x, +y, -z)	(-z, +x, -y)	(-y, +z, -x)
(-x, -y, +z)	(-z, -x, +y)	(-y, -z, +x)
(+x, +z, +y)	(+y, +x, +z)	(+z, +y, +x)
(+x, -z, -y)	(+y, -x, -z)	(+z, -y, -x)
(-x, +z, -y)	(-y, +x, -z)	(-z, +y, -x)
(-x, -z, +y)	(-y, -x, +z)	(-z, -y, +x)

7.5.15. $I\bar{4}3m$ (217) uzay grubu

$I\bar{4}3m$ uzay grubu, nokta grubu T_d olan ve Bravais kafesi hacim merkezli küp olan simorfik uzay grubudur. Hacim merkezli küpün genel öteleme vektörü

$$t_1 = 1/2 (-a, a, a)$$

$$t_2 = 1/2(a, -a, a)$$

$$t_3 = 1/2 (a, a, -a) \text{ dür (Bradley ve Cracknell, 1972).}$$

Tanım 12’i kullanılarak (Bkz. Bölüm. 7.1) uzay grubunun elemanları $\{ \alpha | 0 \}$ şeklinde tanımlanır. Burada “ α ”, T_d nokta grubunun nokta simetri operasyonlarıdır. Tanım 15’e göre (Bkz. Bölüm. 7.1) yukarıda yazdığımız uzay gruplarının matris temsileri $\{ \alpha | 0 \} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ şeklindedir. $I\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanlarının bulunması için α

yerine T_d nokta grubun elemanlarını yazılıp ve yazılan elemanın matris temsili yazılır. T_d Nokta grubunun 24 tane elemanı olduğu için $\bar{I}43m$ uzay grubunda 24 tane eleman vardır (Çizelge 7.17). $\bar{I}43m$ uzay grubunun elemanları, $P\bar{4}3m$ uzay grubunun elemanlarıyla aynıdır fakat Bravais örgü türleri farklıdır. Bu nedenle $\bar{I}43m$ uzay grubunun elemanları $P\bar{4}3m$ uzay grubundan alındığı için işlem yapılmadan yazıldı.

Çizelge 7.17. $\bar{I}43m$ uzay grubunun elemanları

Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları	Uzay grup elemanları
(+x, +y, +z)	(+z, +x, +y)	(+y, +z, +x)
(+x, -y, -z)	(+z, -x, -y)	(+y, -z, -x)
(-x, +y, -z)	(-z, +x, -y)	(-y, +z, -x)
(-x, -y, +z)	(-z, -x, +y)	(-y, -z, +x)
(+x, +z, +y)	(+y, +x, +z)	(+z, +y, +x)
(+x, -z, -y)	(+y, -x, -z)	(+z, -y, -x)
(-x, +z, -y)	(-y, +x, -z)	(-z, +y, -x)
(-x, -z, +y)	(-y, -x, +z)	(-z, -y, +x)

8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Grup, matematikte soyut cebirsel yapılardır. Bu yapılarla uğraşan teoriye de grup teorisi denir. Kristal sistemlere simetri ve simetri işlemleri uygulanmasının sonucu Grup Teorisi kullanılarak matematiksel ifadelerle açıklanmıştır.

Çalışmanın 3. Bölümünde kristal sistemler ve özellikleri incelenmiştir. Kübik simorfik uzay gruplarını açıklamaya yönelik bir çalışma olduğu için kübik kristal sistemleri daha ayrıntılı şekilde incelendi.

Bu çalışmanın temeli Grup Teorisi üzerine kuruludur. Bölüm 4'te Grup Teorisi ve gerekli bazı temel tanımları verilmiştir. Tanımların anlaşılır olması için eşkenar üçgeni değişmez bırakan simetri operasyonları grubu, bu gruba izomorfik olan $P(3)$ permütasyon grubu kullanılarak incelenmiştir. Simetri grupları modern fiziğin vazgeçilmez araçlarından bir haline gelmiştir. Bir cismin veya bir sistemin simetri grubu, o cismi veya sistemi değişmez bırakan ve grup aksiyomlarını sağlayan simetri operasyonlarının kümesidir. Bir cisme veya bir sisteme simetri operasyonları uygulanır ve Grup Teorisi kullanılarak matematiksel olarak ifade edilir. Çalışmada kübik kristal sistemi ve düzgün dörtyüzlüyü değişmez bırakan simetri operasyonları kullanıldığı için 5. Bölüm' de simetri ve simetri elemanları açıklanmıştır.

Bölüm 6' da daha önceki bölümlerdeki bilgiler kullanılarak nokta grupları incelenmiştir. 32 nokta grubu ve bu grupların hangi simetri elemanlarından oluştuğu tablo halinde verilmiştir. 24 elemanlı T_h Nokta grubu, T_h Nokta grubu ile izomorfik olan $P(8)$ permütasyon grubunun bir alt grubu kullanılarak incelenmiştir. T_h Nokta grubunun kristal sistemi basit küptür. T_h Nokta grubunun simetri elemanları birim küpe uygulandı ve tüm elemanları açıkça şekillerle gösterildi. Simetri elemanları uygulandıktan sonra T_h Nokta grubunun her elemanının permütasyon karşılığı yazıldı. T_h Nokta grubunun çarpım tablosu, elemanların matris temsilleri, kosetleri, Abelian alt grupları, sınıfları bulunmuştur. 12 elemanlı T nokta grubu, $P(4)$ permütasyon grubu kullanılarak incelendi. T nokta grubunun yapısı düzgün dörtyüzlüdür. T nokta grubunun simetri elemanları birim düzgün dörtyüzlüye uygulandı ve tüm elemanları açıkça şekillerle gösterildi. Simetri elemanları uygulandıktan sonra T nokta grubunun her

elemanının permütasyon karşılığı yazıldı. T nokta grubunun çarpım tablosu, elemanların matris temsilleri, kosetleri, Abelian alt grupları, sınıfları bulunmuştur. Bu çalışmada, nokta grupları permütasyon grupları kullanılarak açıklandı. Nokta grupları, bir permütasyon grubu kullanılarak açıklanması işimizi kolaylaştırdı.

Bölüm 7' de uzay grupları tanıtıldı ve kübik simorfik uzay gruplarının elemanları elde edildi. Kübik nokta grupların elemanların matris temsilleri ve ötelemeyi sıfır alınarak kübik simorfik uzay grupları elde edildi. 5 tane kübik nokta grubu vardır ve bu 5 kübik nokta grubu kullanılarak 15 tane kübik simorfik uzay grubu elde edildi. Yani her nokta grubuna ait 3 tane farklı uzay grubu vardır. T nokta grubuna ait 3 uzay grubunu elde ederken T nokta grubunun elemanlarının matris temsilleri kullanılarak ve öteleme sıfır alınarak bulundu. T nokta grubunun üç uzay grubu da aynı elemanlara sahip fakat kristal sistemleri farklıdır.

T_h , T nokta grupları bir permütasyon grubu kullanılarak açık şekilde açıklanması, literatürde bu bilgilerin açık şekli bulunmadığından gelecekte yapılan çalışmalara yarar sağlayacaktır.

15 tane kübik simorfik uzay gruplarının elemanları, nokta grupların elemanlarının matris temsilleri kullanılarak açık şekilde elde edilişi, literatürde kübik simorfik uzay gruplarının elemanları açık şekilde bulunmadığından gelecekte yapılan çalışmalara yarar sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

- Bilgiç, H., 2012. *Soyut Cebir Ders Notları*. Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, Matematik Bölümü.
- Bradley, C.J., Cracknell, A.P., 1972, *The Mathematical Theory of Symmetry in Solids*, Clarendon Press, Oxford. 745.
- Bravais, A., 1850, *On the systems formed by points regularly distributed in a plane or in space*. J. Ec. poly tech. **19**, 1-128
- Bruns G., Glazer A., 1990. *Space Groups For Solid State Scientists*. Academic Press, INC, New York.
- Burns G., Glaser A.M., 1978 . *Space Groups for Solid State Physicists*. Academic Press, New York.
- Cornwell, J.F., 1997, *Group Theory In Physics*, Academic Press, Clifornia, USA.
- Delibaş A., 2014. *Kristal Fiziğinde O_h Nokta Grubu*. YYÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, VAN.
- Delibas A., Aykan V., Türkkkan D., Akkus H., 2013. Point groups in solid state physics I: point group O_h . *American Journal of Modern Physics*, 2(2): 81-87.
- Dresselhaus M.S., 2002. *Applications of Group Theory to the Physics of Solids*. 8.510J, 6.734J, SPRING.
- Dresselhaus M.S., Dresselhaus G., Jorio A., 2008 . *Group Teory*. Massachusetts Institute of Technology Room 13-3005, Cambridge, MA, USA.

- Fjellvåg H., 1994. *Symmetry-Operations, Point Groups, Space Group*. University of Oslo, Department of Chemistry, Oslo.
- Henry, N. F. M., Lonsdale, K., 1965, *International tables for X-ray crystallography*. Vol. I. Symmetry groups.
- Kittel, C., 1986, *Introduction to Solid State Physics (Six Edition)*, John Wiley & Sons, Inc.
- Koster G.F., 1957. *Space Groups and Their Representations*. Academic Press, New York, London. 173.
- Lederman W., 1973. *Introduction to Group Theory*. Longman, London.
- Leslie A., 2013. *Crystals, Symmetry and Space Groups*. Oxford University Press, Oxford. 42.
- Mirman R., 1999. *Point Groups, Space Groups, Crystals, Molecules*. World Scientific, Singapore.
- Riley, K.F. ve Ark., 2006, *Mathematical Methods For Physics And Engineering*, Cambridge University Press, ISBN13: 978-0-511-16842-0
- Souvignier B., 2008. *Group Teory Applied to Crystallography*. Institute For Matematics, Gargnano, Italy.
- Tilley R.J.D., 2006. *Crystals and Crystal Structures*. John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Malatya’da doğdu. İlköğrenimini Şehit Astsubay Birol Akın İlköğretim Okulunda, liseyi 2006 yılında Arguvan Lisesi’nde tamamladı. 2007 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fizik Öğretmenliği Bölümünü kazandı. 2012 yılında Eğitim Fakültesini birincilikle bitirdi. Aynı yıl Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik AnaBilim Dalında tezli yüksek lisans öğrenimine başladı.