

**KUANTUM AYAR ALAN TEORİLERİNİN
KUANTİZASYONU VE STANDART MODEL**

**QUANTIZATION OF QUANTUM GAUGE FIELD
THEORIES AND THE STANDARD MODEL**

MEHMET KEMAL GÜMÜŞ

PROF. DR. MÜGE BOZ EVİNAY

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı için Öngördüğü

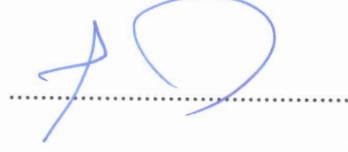
YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2015

MEHMET KEMAL GÜMÜŞ' ün hazırladığı "Kuantum Ayar Alan Teorilerinin Kuantizasyonu ve Standart Model" adlı bu çalışma aşağıdaki jüritarfindan **FİZİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI'** nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

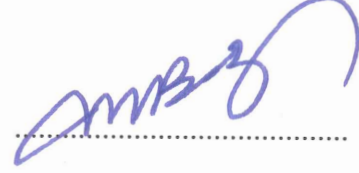
Prof. Dr. Ali Ulvi YILMAZER

Başkan



Prof. Dr. Müge BOZ EVİNAY

Danışman



Prof. Dr. Yiğit GÜNDÜÇ

Üye



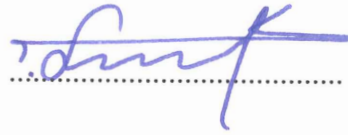
Doç. Dr. İsmail TURAN

Üye



Doç. Dr. Seçkin KÜRKÇÜOĞLU

Üye



Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

15.06.2015


MEHMET KEMAL GÜMÜŞ

ÖZET

KUANTUM AYAR ALAN TEORİLERİNİN KUANTİZASYONU VE STANDART MODEL

Mehmet Kemal GÜMÜŞ

Yüksek Lisans, Fizik Mühendisliği Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Müge BOZ EVİNAY

Haziran 2015, 73 sayfa

Bu çalışmanın temel amacı, çağdaş fiziğin hemen her alanında temel omurga haline gelmiş olan ayar teorilerinin kuantizasyon probleminin incelenmesidir. Bu doğrultuda, bağlı sistemler olan ayar teorilerinin kuantizasyonu, Dirac kanonik kuantizasyon yöntemi ve Feynman yol integrali kuantization formalizmi üzerine inşa edilmiş olan Faddeev - Popov yöntemi kapsamında karşılaştırmalı olarak ele alınmıştır. Ayar teorilerinin kuantizasyonunda en önemli ve incelikli konu olan ayar tespit süreçleri üzerine özel dikkat sarfedilmiştir. Bu süreçlerin kanonik formalizmde son derece karmaşık olmasına karşın, Faddeev - Popov yol integrali formülasyonunda çok daha kolay ve doğrudan halledilebilirler. Bu matematiksel ve estetik üstünlükler, fonksiyonel yol integrali formalizmini ve Faddeev - Popov metodunu, alan kuantizasyonu bağlamında, merkezi bir noktaya taşımıştır. Çalışmanın son evresinde ayar tespit sürecinin bir sonucu olarak ortaya çıkan, BRST simetrisi olarak adlandırılan, bir kalıt simetri üzerinde çalışılmış ve ayar teorilerinin renormalizasyonu bağlamındaki önemli rolüne işaret edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yang - Mills teorisi, bağlı sistemlerin kuantizasyonu, Dirac kanonik kuantizasyon metodu, ayar tespiti, yol integrali kuantizasyonu, Faddeev - Popov yöntemi, BRST simetrisi.

ABSTRACT

QUANTIZATION OF QUANTUM GAUGE FIELD THEORIES AND THE STANDARD MODEL

Mehmet Kemal GÜMÜŞ

Master of Science, Department of Physics Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Müge BOZ EVİNAY

June 2015, 73 pages

The main purpose of this study is to review the quantization problem of gauge theories which have become the fundamental backbone in the modern physics. The quantization of gauge theories, which are constrained systems, were considered in the frameworks of the canonical quantization method of Dirac, and the Feynman's path integral formalism, using Faddeev - Popov method, comparatively. The gauge fixing processes, which are the most important and subtle issues in the quantization of gauge theories, were paid particular attention to. Although, these processes are extremely complex in the canonical formalism, they can be handled easily and straightforwardly in the context of the Faddeev Popov method. These mathematical and aesthetical advantages have elevated the functional Path Integral Formalism and the Faddeev - Popov method to a central position in the area of field quantization. In the last stage of the study, a residual symmetry, known as BRST symmetry, which occurs as a result of the gauge fixing processes, was reviewed, and its important role in the context of the renormalization of gauge theories was discussed.

Keywords: Yang - Mills theory, quantization of constrained systems, Dirac's canonical quantization method, gauge fixing, path integral quantization, Faddeev - Popov ansatz, BRST symmetry.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam süresince, bu çalışmanın titizlikle yapılmasını sağlayan ve destekleyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Müge Boz Evinay’a; engin birikimi ve sabrıyla bana rehberlik eden ve beni destekleyen Sayın Prof. Dr. Namık Kemal Pak’a; bu tez süresince yardımlarını, moral desteklerini ve dostluklarını esirgemeyen tüm arkadaşlarıma ve desteklerini yanımda hissettiğim anneme ve babama, tüm içtenliğim ve minnettarlığım ile teşekkür ederim.

Bu tezin son evrelerinde, 014 A602 006 no’lu “CERN-LHC-CMS Projesi Çerçevesinde Hacettepe - CERN Bilimsel İşbirliğine İlk Adım” isimli alt yapı projesi desteği ile CERN-CMS üyeliği gerçekleştirilmiştir. Yapılan teorik çalışmaların uygulamalarına yönelik ileri eğitim evresinin anılan BAB Projesi çerçevesinde 2015 yazında CERN’e yapılacak ziyaret aracılığı ile gerçekleştirilmesi planlanmaktadır. Projenin sağladığı motivasyon ve potansiyel olanaklar için Üniversitemiz yetkililerine içtenlikle teşekkür ederiz.

GÖSTERİMLER VE KISALTMALAR

Gösterimler

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Minkowski metriği

$$c = 1 = \hbar$$

Doğal Birim sistemi

$$c_i k_i = \sum_i c_i k_i$$

Einstein Toplam Kuralı

Kısaltmalar

1PI

Tek Nokta Etkileşimi (*1 Point Interaction*)

QCD

Kuantum Renk Dinamiği (*Quantum Chromodynamics*)

QED

Kuantum Elektrodinamiği (*Quantum Electrodynamics*)

QG

Kuantum Kütle Çekim (*Quantum Gravity*)

SM

Standart Model (*Standard Model*)

WI

Zayıf Etkileşimler (*Weak Interactions*)

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
GÖSTERİMLER VE KISALTMALAR	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİLLER	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. YEREL AYAR DÖNÜŞÜMLERİ VE AYAR KURAMLARI.....	3
2.1. Global Faz Dönüşümü ve Yerel $U(1)$ Ayar Dönüşümü.....	3
2.2. $SU(N)$ Ayar Dönüşümü ve Yang-Mills Teorisi	6
3. DIRAC'IN KANONİK KUANTİZASYON YÖNTEMİ VE AYAR ALANLARI- NIN KANONİK KUANTİZASYONU	11
3.1. Mekanik Sistemler için Dirac'ın Kanonik Kuantizasyon Yöntemi	11
3.2. Birinci Sınıf Bağlar ve Ayar Dönüşümleri.....	18
3.3. Abelyen Ayar Alanlarının Kanonik Kuantizasyonu	20
3.4. Abelyen Olmayan Ayar Alanlarının Kanonik Kuantizasyonu	25
3.5. Dirac İddiası ve Ayar Teorileri.....	31
4. YOL İNTEGRALİ YÖNTEMİ VE AYAR ALANLARININ YOL İNTEGRALİ YÖNTEMİ İLE KUANTİZASYONU	33
4.1. Yol İntegrali Yöntemi	33
4.1.1. Kuantum Alanlar İçin Yol İntegrali Formalizmi	33
4.1.2. Bağlantılı Diyagramların Üretici.....	35
4.2. Faddeev - Popov Yaklaşımı	38
4.3. Ayar Alanlarının Feynman Kuralları	43
5. BRST SİMETRİSİ	48
5.1. BRST Simetrisi.....	48
5.2. Ward (Slavnov - Taylor) Özdeşlikleri	54
6. SONUÇ.....	57
A.NOETHER TEOREMİ.....	59
B.GRASSMANN İNTEGRALLERİ	62
C.YOL İNTEGRALİNİN İNŞASI VE GEÇİŞ GENLİKLERİ.....	66

D.POISSON PARANTEZLERİNİN DAĞILMA ÖZELLİĞİ	70
KAYNAKLAR	71
ÖZGEÇMİŞ	73

ŞEKİLLER

	<u>Sayfa</u>
Şekil 4.1. Üçüncü mertebede $W[J]$ ve $\Gamma[\phi]$ arasındaki ilişkinin grafik temsili.....	38
Şekil 4.2. Faddeev - Popov Determinantının diagramatik gösterimi.....	41
Şekil A.1. Eylemin değişimi	59
Şekil C.1. Yol integralini hesaplanabilmesi için, yol öncelikle çok sayıdaki ara noktalar üzerinden kesikli hale getirilir.....	66
Şekil C.2. Yol integrali, konfigürasyon uzayında iki noktayı birleştiren tüm olası yollar üzerinden toplam içerir.	67

1.GİRİŞ

4 Temmuz 2012’de CERN’de Higgs bozonunun deneysel olarak gözlemlendiğinin ilan edilmesiyle tamamlanan Standart Model’in iskeletini oluşturan ayar alan kuramları, doğadaki etkileşimleri açıklamada kullanılan en güçlü araçlardır.

Ayar simetrisine sahip bilinen en eski teori, Maxwell’in formüle ettiği elektromanyetik teoridir. Daha sonra Einstein denklemlerinin de benzer bir simetriyi içerdiği Hilbert tarafından gösterilmiştir. *Ayar* kavramı ilk kez bu iki teoriyi birleştirmeye çalışan Hermann Weyl tarafından demiryollarındaki ”ray ölçüsü” teriminden (track gauge/scale) esinlenerek kullanılmıştır. Weyl’in bu iki kuramı birleştirme çabası boşa çıkmasına rağmen, ”ayar” kelimesinin kullanımına devam edilmiştir ve kuantum mekaniğinin geliştirilmesiyle ölçek kavramı $U(1)$ simetrisine denk gelen bir faz değişmezliğine karşılık kullanılmaya başlanmıştır. Bu çerçevede, yüklü nesneler arasındaki etkileşmeyi sağlayan kuvvet taşıyıcı alanların sistematik bir şekilde sisteme dahil edilmesi mümkün olmuştur [1][2][3].

Kronolojik olarak daha önce Kuantum Elektrodinamiğini (QED) modellemede kullanılan Abelyen $U(1)$ ayar alan kuramının 1954’te Chen Ning Yang ve Robert Mills tarafından $SU(N)$ grupları için genişletilmesiyle, Elektrozayıf ve kuvvetli etkileşimlerin (Kuantum Renk Dinamiği - QCD) de ayar alan kuramları ile modellenmesinin önü açılmıştır [4]. Elektrozayıf etkileşim $SU(2)$ grubu ile modellenirken, kuvvetli etkileşimler $SU(3)$ grubu ile modellenir.

Ayar alanlarının kuantizasyonu yukarıda bahsedilen üç temel etkileşimin kuantum kuramı çerçevesinde açıklanabilmesi için gereklidir. Ancak ayar kuramlarının en belirgin ve bilinen özelliği olan ”artık serbestlik derecelerine” sahip olmaları, sistemin bilinen standart kuantizasyon yöntemleri ile kuantize edilmesini engeller. Bu tip fiziksel sistemler; yani sistemi matematiksel olarak betimleyen alanların serbestlik derecelerinin, doğada gözlemsel olarak saptanan serbestlik derecelerinden daha yüksek olduğu sistemler, bağlı fiziksel sistemler olarak adlandırılır.

Bağlı sistemlerin kuantizasyonundaki bu incelik ilk olarak Dirac tarafından kanonik kuantizasyon yöntemi çerçevesinde ele alınmıştır [5]. Bu yöntem daha sonra Anderson, Bergman ve diğerleri tarafından geliştirilmiştir [6].

Bağlı sistemlerin kanonik çerçevede kuantizasyonu için 1980’lerin sonunda Faddeev ve Jackiw, Dirac’ın kanonik Hamilton yönteminden daha kestirme ve ekonomik bir yöntem ortaya atmıştır [7]. Bu yöntem Dirac’ın yönteminin aksine sistemin bağlarını baştan türetilip bunlar sınıflandırmak yerine teoride bağ denklemlerinin adım adım çözülmesini ve yol boyu sistemin artık serbestlik derecelerinin elenmesini içerir.

1960’ların sonunda ayar alan kuramlarının Feynman’ın yol integrali formalizmi çerçevesinde

kuantize edilebilmesi için Faddeev ve Popov bir yaklaşım ortaya atmışlardır [8]. Ayar kuramlarının renormalize edilebilirliği ise t'Hooft, Slavnov ve Taylor'un öncülüğü ve daha birçok bilim insanının katkılarıyla gösterilmiştir [9][10][11].

Ayar alanları Faddeev - Popov yaklaşımı çerçevesinde kuantize edilirken teoriye fiziksel olmayan bazı hayalet parçacıkların dahil edilmesi gerektiği saptanmıştır. Bu hayalet parçacıklar Faddeev - Popov hayaletleri olarak adlandırılırlar. Bu yeni parçacıkların varlığı, kuramda yeni bir simetriye yol açarlar. Böylece Faddeev - Popov yaklaşımı ile ayar sabitlemesi yapılarak kuantize edilen teori, artık ayar simetrisini kaybederken, orijinal simetrisinin kalıntısı yeni bir fermiyonik simetriye sahip olur. Bu simetri ilk olarak Becci, Rouet Stora ve onlardan bağımsız olarak Tyutin tarafından gösterilmiştir ve bu bilim insanlarına ithafen BRST simetrisi olarak adlandırılmıştır [12][13][14].

Bu çalışmada, esas olarak yukarıda bahsedilen kuantizasyon yöntemlerinden Dirac'ın kanonik ve Faddeev ile Popov'un yol integrali yaklaşımları kısaca özetlenerek, Abelyen ve Abelyen olmayan ayar alan kuramlarının bu yöntemlerle nasıl kuantize edildiği çalışılmıştır. Çalışmanın ikinci bölümünde klasik alan kuramı bağlamında ayar alan kuramları ve ayar simetrisi kısaca tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, Dirac kanonik kuantizasyon yöntemi detaylı bir biçimde incelenerek Maxwell ve Yang - Mills teorilerinin bu yöntemle kuantizasyonu çalışılmıştır. Burada özellikle "ayar saptama" konusu ayrıntıyla tartışılmış ve bu sürecin kanonik Hamiltonyen çerçevesinde ne denli karmaşık ve zahmetli olduğu gözlemlenmiştir. Abelyen durumda çok fazla zorlanmadan üstesinden gelinebilen bu husus, Abelyen olmayan durumda neredeyse başedilemez boyutlara ulaşır.

Buna karşılık bu konu Faddeev - Popov formalizmi çerçevesinde son derece basit ve şık bir şekilde çözülebilmektedir. Diğer hesaplama üstünlükleri yanında bu bağlamdaki rahatlığı da, neden bu yöntemin giderek, özellikle ayar teorileri için, standart kuantizasyon yöntemi haline geldiğini göstermektedir.

Dördüncü bölümde Yol integrali yöntemi kısaca özetlenerek, Yang - Mills teorisinin Faddeev - Popov yaklaşımı ile nasıl kuantize edileceği detaylıca gösterilmiş ve bu çerçevede teorisinin Feynman kuralları türetilmiştir.

Son bölümde ise Faddeev - Popov yaklaşımının bir sonucu olarak teoride ortaya çıkan BRST simetrisi incelenmiş, bu bağlamda Faddeev - Popov hayaletlerinin fiziksel durumlar tarafından içerilemeyeceği kısaca gösterilmiştir. Daha sonra kuramın renormalize edilebilirliği için kilit öneme sahip olan Ward (Slavnov - Taylor) özdeşlikleri türetilmiştir.

Bu çalışmalar yapılırken Feynman yol integrali formalizminin yanında kullanılan klasik alan kuramında çığır açıcı bir teorem olan Noether teoremi ve Faddeev - Popov hayaletlerinin yol integrallerinin hesaplanması için gerekli olan Grassmann integralleri çalışmanın sonunda ekler kısmında özetlenmiştir [15].

2. YEREL AYAR DÖNÜŞÜMLERİ VE AYAR KURAMLARI

Yerel ayar simetrisi alanların fazlarının her uzay-zaman noktasında birbirlerinden bağımsız seçilebilme ilkesine dayanır. Yerel ayar simetrisine sahip olan kuramlar ayar kuramları olarak adlandırılırlar. Bu sürekli gruplar bir Lie grubu oluştururlar ve teoremin *simetri grubu* veya *ayar grubu* olarak adlandırılırlar.

Klasik bir alan teorisinde mevcut global faz simetrisi yerelleştirmek istendiğinde Lagranjiyene ayar alanı adı verilen vektör alanlarının eklenmesi gerekir. Böylece teorideki alanların temsil ettiği parçacıklar arasındaki etkileşme, sisteme şık bir biçimde dahil edilmiş olur.

Ayar grubu $U(1)$ olan Kuantum Elektrodinamiği (QED), bir tane ayar alanına sahiptir ki, bu da foton olarak bildiğimiz parçacığı temsil eder.

2.1. Global Faz Dönüşümü ve Yerel $U(1)$ Ayar Dönüşümü

Görelilik kuantum mekaniğinde serbest maddesel parçacıklar, örneğin elektron, Dirac denkleminin çözümleri olan spinör alanları ile betimlenirler. Bu serbest spinör alanların Lagranjiyen yoğunluğu¹ (Dirac Lagranjiyeni),

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.1)$$

dönüşüm parametresi, λ , reel skaler bir sabit ve g , etkileşim sabiti olmak üzere

$$U \equiv e^{ig\lambda} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanmış global faz dönüşümü altında değişmez kalır.

Eşitlik (2.2)'deki global dönüşümün parametresi, $\lambda(x)$ gibi uzay-zamanın bir fonksiyonu olarak değiştirilerek dönüşüm yerel hale getirilebilir. Bu dönüşüm altında Eşitlik (2.1)'deki Lagranjiyen artık değişmez kalmaz. Çünkü λ 'nın uzay-zaman türevlerini içeren terimleri de artık dönüşmüş Lagranjiyene eklenecektir:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} - g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\lambda \quad (2.3)$$

Yerel ayar dönüşümleri altında Lagranjiyeni değişmez bırakmak için, Eşitlik (2.1)'deki türevin kovaryant türevle değiştirilerek, Lagranjiyene ψ ile etkileşen bir vektör alanı eklenmesi gerekir:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu. \quad (2.4)$$

¹Bundan sonra kısaca Lagranjiyen olarak anılacaktır.

Bu durumda yeni Lagranjiyen,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.5)$$

olur.

Eşitlik (2.5)'teki Lagranjiyenin değişmezliğinin sağlanabilmesi için, $D_\mu\psi$ 'nin ψ gibi dönüşmesi gerekir:

$$(D_\mu\psi) \rightarrow D'_\mu\psi' = U(D_\mu\psi) . \quad (2.6)$$

Bu durumda, A_μ ayar alanının dönüşüm kuralı

$$D'_\mu\psi' = (\partial_\mu + igA'_\mu)(e^{ig\lambda(x)}\psi) = e^{ig\lambda(x)}(\partial_\mu\psi) + igA_\mu e^{ig\lambda(x)}\psi \quad (2.7)$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} [(ig\partial_\mu\lambda) + igA'_\mu]\psi &= [igA_\mu]\psi \\ A'_\mu &= A_\mu - \partial_\mu\lambda . \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklinde bulunur.

Böylece yerel ayar dönüşümleri altında değişmez kalan bir Lagranjiyen inşa edilmiş olur. Ancak yeni Lagranjiyen A_μ 'nün dinamik terimlerini de içermelidir. Vektör alanı için anti-simetrik alan şiddeti tensörü

$$F_{\mu\nu} \equiv -\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.9)$$

tanımı ile, ayar alanı için dinamik Lagranjiyen terimi

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

şeklinde ifade edilir. Burada alan şiddeti tensörünün bileşenleri

$$\begin{aligned} F^{0i} &= -E^i \\ \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk} &= B^i \end{aligned} \quad (2.11)$$

olmak üzere, $F^{\mu\nu}$ 'nün kontravaryant matris gösterimi

$$F^{\mu\nu} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

formundadır.

Yerel ayar simetrisini ihlal edeceği için, ayar alanı Lagranjiyeninde A^2 gibi bir terim olmaması gerekir. Kolayca gösterilebileceği gibi, anılan A^2 terimi vektör alanının kütlesinin karesine karşı gelmektedir. Dolayısıyla ayar simetrisine sahip olan bir vektör alanın kütlesiz olması gerekir. Sonuç olarak yerel ayar dönüşümleri altında değişmez kalan Lagranjiyen

$$\mathcal{L} = [i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi] - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

şeklinde yazılabilir.

Ayar alanları için hareket denklemi, Euler - Lagrange denkleminde

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - g\bar{\psi}\gamma^\nu\psi = 0 \quad (2.14)$$

olarak elde edilir.

Yerel $U(1)$ ayar dönüşümleri için Noether Akımı, Eşitlik (A.2)'den yola çıkılarak

$$\delta j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\delta A_\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta\psi + \delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır. Eşitlik (2.2) ve (2.8)'den alanların ayar dönüşümleri altında sonsuzküçük değişimleri

$$\begin{aligned} \delta A_\nu &= -\partial_\nu\delta\lambda \\ \delta\psi &= ig\delta\lambda\psi \\ \delta\bar{\psi} &= -ig\delta\lambda\bar{\psi} \end{aligned} \quad (2.16)$$

göz önüne alındığında, Noether akımı

$$\delta j^\mu = F^{\mu\nu}\partial_\nu\delta\lambda - g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\delta\lambda. \quad (2.17)$$

formunda bulunur. Dolayısıyla, Eşitlik (2.11) kullanılarak ve Eşitlik (A.3)'den hareketle, Noether yükü

$$\begin{aligned} \delta Q &= \int d^3x \delta j^0 = \int d^3x (-E^i\partial_i\delta\lambda - g\delta\lambda\bar{\psi}\gamma^0\psi) \\ &= \int d^3x \delta\lambda (\partial_i E^i - g\psi^\dagger\psi) \\ &= \int d^3x \delta\lambda G(x) \end{aligned} \quad (2.18)$$

şeklinde elde edilir. Burada $G(x)$, klasik elektromanyetik kuramdan hatırlanacağı üzere, Ma-

xwell hareket denklemlerinden birini oluşturan

$$G(x) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho = 0 \quad (2.19)$$

Gauss yasasının kuantum operatör karşılığıdır. Gauss yasasının kuantize edilmiş alanların ayar dönüşümlerinin jeneratörü olduğu ileride ayrıntılı bir şekilde gösterilecektir.

2.2. SU(N) Ayar Dönüşümü ve Yang-Mills Teorisi

Aralarında etkileşme olmayan N tane Dirac alanı ele alındığında, sistemin Lagranjiyeni

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_a \gamma^\mu \partial_\mu \psi_a - m_a \bar{\psi}_a \psi_a, \quad a = 1, 2, \dots, N \quad (2.20)$$

şeklinde ifade edilebilir. Kütlelerin eşit olduğu durumda

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^N \end{pmatrix} \quad ve \quad \bar{\psi} \equiv (\bar{\psi}^1 \dots \bar{\psi}^N) \quad (2.21)$$

tanımları yapılarak, Lagranjiyen daha kompakt bir biçimde

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi \quad (2.22)$$

formunda yazılabilir. Görüldüğü üzere bu Lagranjiyen global bir $SU(N)$ simetrisine sahiptir. Bu ifadenin, λ^a , $a = 1, 2, 3$, uzay-zamanın reel skaler fonksiyonları ve T^a , $SU(N)$ grubunun anti-Hermityen jeneratörleri² olmak üzere,

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi$$

$$U \equiv e^\lambda, \quad \lambda = -gT^a \lambda^a \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanan global dönüşüm altında değişmez kalması gerekir. Bu simetriyi yerelleştirmek için,

$$A_\mu \equiv -gT^a A_\mu^a \quad (2.24)$$

² $SU(N)$ için T^a 'lar grubun anti-Hermityen jeneratörleri olmak üzere $SU(N)$ grubunun Lie cebiri ve normalizasyonu şöyledir:

$$\begin{aligned} [T^a, T^b] &= f^{abc} T^c \\ Tr(T^a T^b) &= -\frac{1}{2} \delta^{ab} \end{aligned}$$

matris değerli bir vektör potansiyel olmak üzere,

$$D_\mu \equiv I\partial_\mu + A_\mu \quad (2.25)$$

kovaryant türevi tanımlanabilir. Bu, kovaryant türevin temel gösterimdeki halidir. Lagranjiyenin değişmez kalması için alanın kovaryant türev de

$$D_\mu \psi \rightarrow D'_\mu \psi' = U (D_\mu \psi) \quad (2.26)$$

şeklinde dönüşmelidir:

$$(I\partial_\mu + A'_\mu) U\psi = U [(I\partial_\mu + A_\mu) \psi] . \quad (2.27)$$

Bu ifadeden hareketle, ayar alanlarının dönüşüm kuralının

$$U (\partial_\mu \psi) + (\partial_\mu U) \psi + A'_\mu U \psi = U (\partial_\mu \psi) + U A_\mu \psi \quad (2.28)$$

ara basamağı göz önüne alınarak

$$A'_\mu = U A_\mu U^{-1} - (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (2.29)$$

olması gerektiği bulunur. Eğer λ sonsuzküçük bir parametre ise, dönüşüm,

$$A'_\mu = A_\mu - \mathcal{D}_\mu \delta \lambda \quad (2.30)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathcal{D}_\mu$ kovaryant türevin adjoint temsildeki ifadesidir ve açık hali

$$\mathcal{D}_\mu \equiv I\partial_\mu + [A_\mu, \quad (2.31)$$

olarak gösterilir. Dolayısıyla yerel $SU(N)$ ayar dönüşümleri altında değişmez kalan Lagranjiyen

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.32)$$

formunda yazılabilir.

Yapıyı tamamlamak için bu Lagranjiyene ayar alanlarının kinetik teriminin de eklenmesi gerekir. Kinetik terimin mevcut Abelyen olmayan durumda belirlenebilmesi için, Abelyen durumdan ipuçları çıkarılabilir. Eşitlik (2.25)'te tanımlanan temel temsildeki kovaryant türevler için, Eşitlik (2.9)'dakine benzer yaklaşımla, Abelyen olmayan alan şiddet tensörü, matris temsilinde

$$[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \equiv F_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

şeklinde bulunur. Eşitlik (2.24)'teki matris gösterimi tanımından hareketle

$$F_{\mu\nu} = -gF_{\mu\nu}^a T^a \quad (2.34)$$

yazılabilir ve bu ifadede

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.35)$$

elde edilir. Burada f^{abc} kompakt $SU(N)$ grubunun yapı sabitidir.

Lagranjiyene (2.33)'te gösterilen alan şiddeti ile yazılan kinetik terim eklenirse, nihai Lagranjiyen

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \quad (2.36)$$

formunda olacaktır. Burada $SU(N)$ gruplarının normalizasyon özelliği kullanılarak, ayar alanlarının kinetik terimi

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} = \frac{1}{2g^2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (2.37)$$

şeklinde de yazılabilir.

Ayar alanları için Euler-Lagrange denklemleri, vektör potansiyelin değişimine karşın eylemin değişmez kalması ilkesi gereği doğrudan elde edilirler³. Öncelikle A_μ 'deki sonsuzküçük değişimlerin, $F_{\mu\nu}$ 'de yarattığı değişikliğe bakılırsa;

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu} &= \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu + [A_\mu, \delta A_\nu] - [A_\nu, \delta A_\mu] \\ \delta F_{\mu\nu} &= \mathcal{D}_\mu \delta A_\nu - \mathcal{D}_\nu \delta A_\mu \end{aligned} \quad (2.38)$$

bulunur. Eylemdeki değişim ise;

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2g^2}Tr[\delta(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})] + i\delta(\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{g^2}Tr(F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}) + i\bar{\psi}\gamma^\mu (\delta A_\mu)\psi \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{g^2}Tr[F_{\mu\nu}(\mathcal{D}^\mu \delta A^\nu - \mathcal{D}^\nu \delta A^\mu)] + i\bar{\psi}\gamma^\mu (\delta A_\mu)\psi \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{2}{g^2}Tr[F_{\mu\nu}(\mathcal{D}^\mu \delta A^\nu)] + i\bar{\psi}\gamma^\mu (\delta A_\mu)\psi \right\} \end{aligned} \quad (2.39)$$

olur. Birinci terimde kısmi integrasyon kullanılırsa,

$$\delta S = \int d^4x \left\{ -\frac{2}{g^2}Tr[(\mathcal{D}^\mu F_{\mu\nu})\delta A^\nu] + i\bar{\psi}\gamma^\mu \delta A_\mu\psi \right\} + \text{yüzey terimleri} \quad (2.40)$$

³Kuşkusuz bu ana basamak atlanıp, Euler - Lagrange denklemleri kullanılarak da bulunabilirler.

bulunur. Bu mertebedeki değişimler altında $\delta S = 0$ olması gerektiğinden, Eşitlik (2.24)'de yer alan tanım da kullanılarak hareket denklemi

$$(\mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu})^a + ig\bar{\psi}_b\gamma^\nu (T^a)_{bc}\psi_c = 0 \quad (2.41)$$

şeklinde elde edilir.

Eşitlik (2.25)'te tanımlanan kovaryant türev operatörleri için de Jacobi özdeşliği:

$$[D_\kappa, [D_\mu, D_\nu]] + [D_\mu, [D_\nu, D_\kappa]] + [D_\nu, [D_\kappa, D_\mu]] = 0 \quad (2.42)$$

formunda yazılabilir. Bu ifadeden hareketle Eşitlik (2.33)'te kullanılarak, Bianchi özdeşliği elde edilir:

$$\epsilon_{\sigma\rho\mu\nu} [D_\rho, F_{\mu\nu}] = 0. \quad (2.43)$$

Dual alan tensörü

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \quad (2.44)$$

şeklinde tanımlandığında,

$$[D_\rho, F_{\mu\nu}] = \mathcal{D}_\rho F_{\mu\nu} \quad (2.45)$$

ifadesi de kullanılarak, Eşitlik (2.43)

$$\mathcal{D}_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.46)$$

formunda yazılabilir. Bu ifadenin, hareket denklemlerinin bir sonucu olmadığına vurgulanması gerekir.

$SU(N)$ Ayar dönüşümleri için, Noether akımı; Eşitlik (2.23) ve (2.29)'dan yararlanılarak, alanların ayar dönüşümleri altında sonsuzküçük değişimleri,

$$\begin{aligned} \delta A_\nu^a &= -\mathcal{D}_\nu^{ab}\delta\lambda^b \\ \delta\psi_a &= -g(T^c)_{ab}\delta\lambda^c\psi_b \\ \delta\bar{\psi}_a &= g\bar{\psi}_b(T^c)_{ab}\delta\lambda^c \end{aligned} \quad (2.47)$$

ve Eşitlik (A.2)'nin de kullanılmasıyla,

$$\delta j^\mu = F^{\mu\nu,a}\mathcal{D}_\nu^{ac}\delta\lambda^c - ig\bar{\psi}_a\gamma^\mu(T^c)_{ab}\delta\lambda^c\psi_b \quad (2.48)$$

şeklinde bulunur. Bu durumda, Noether yükü

$$\begin{aligned}
\delta Q &= \int d^3x \delta j^0 = \int d^3x \left(F^{0\nu,a} \mathcal{D}_\nu^{ac} \delta \lambda^c - ig \bar{\psi}_a (T^c)_{ab} \delta \lambda^c \psi_b \right) \\
&= \int d^3x \left(\mathcal{D}_i^{ac} E^{i,a} - ig \psi_a^\dagger (T^c)_{ab} \psi_b \right) \delta \lambda^c \\
&= \int d^3x G^c(x) \delta \lambda^c
\end{aligned} \tag{2.49}$$

formunda elde edilir. Burada G^c ile gösterilen terim Abelyen olmayan alanlar için Gauss yasasıdır. Maxwell durumunda belirtildiği gibi, bu korunumlu yükün, kuantize edilmiş alanların ayar dönüşümlerinin jeneratörü olduğu ileride ayrıntılı bir şekilde gösterilecektir.

3.DIRAC'IN KANONİK KUANTİZASYON YÖNTEMİ VE AYAR ALANLARININ KANONİK KUANTİZASYONU

3.1.Mekanik Sistemler için Dirac'ın Kanonik Kuantizasyon Yöntemi

Bilindiği gibi konfigürasyon uzayında $L(q_i, \dot{q}_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ gibi bir Lagranjiyen ile temsil edilen sistemin faz uzayında tanımlı Hamiltonyene dönüşümü, p_i 'ler kanonik momentumlar olmak üzere,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (3.1)$$

Legendre dönüşümü ile yapılır:

$$H(p, q) = p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}) . \quad (3.2)$$

Bu dönüşümün tersinir olabilmesi için konfigürasyon uzayında birbirinden bağımsız her $\dot{q}_i$ hızına karşı, diğerlerinden bağımsız bir p_i momentumu karşılık gelmelidir. A dönüşüm matrisi olmak üzere bu iki uzay arasındaki dönüşüm

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ \tilde{b} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada b ve $\tilde{b}$, $N \times N$ boyutlu matrislerdir. $\dot{q}$ 'ın kuadratik terimlerini içeren Lagranjiyenler için

$$b = b(q) \quad \text{ve} \quad \tilde{b} = \tilde{b}(\dot{q}) \quad (3.4)$$

olmalıdır. Dolayısıyla ters dönüşüme karşılık gelecek olan A^{-1} matrisi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ -b^{-1}\tilde{b} & b^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

şeklindedir. Yani A^{-1} , b matrisinin singüler olmadığı durumda tanımlıdır. Eşitlik (3.3)'ten görüleceği üzere p^i momentumu, b ve $\tilde{b}$ matrisleri cinsinden

$$p^i = \tilde{b}^{ij} q_j + b^{ij} \dot{q}_j \quad (3.6)$$

formunda ifade edilebildiğine göre, b matrisinin elemanları

$$b^{ij} = \frac{\partial p^i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (3.7)$$

olmalıdır. Yani, A matrisinin tersinin var olması için, b 'nin tersinin var olması, bunun için de

$$\det b \neq 0 \quad (3.8)$$

olması gerekir. Aksi durumda, dönüşüm tersinir olmayacaktır. Yani N adet birbirinden bağımsız p^i momentumu tanımlanamayacak ve sistemin Hamiltonyeni "*bir tek*" (*unique*) olmayacaktır. Bu tip sistemler bağlı sistemler olarak adlandırılırlar.

b matrisinin rankı R olmak üzere, $R < N$ olduğunda N tane bağımsız hızın sadece R tanesi koordinatlar ve eşlenik momentumlar cinsinden yazılabilir. Ancak, burada faz uzayı değişkenlerini birbiriyle ilişkilendiren $N - R = M$ tane daha bağıntı vardır. Bunlara birincil bağ koşulları adı verilir ve

$$\phi^m(q, p) = p^m - g^m(q, p) = 0 \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (3.9)$$

şeklinde gösterilebilirler. Birincil bağ koşulları sistemin faz uzayını $2N - (N - R) = N + R < 2N$ boyutlu bir Γ_P hiperyüzeye sınırlar. Bu hiperyüzeye birincil bağ yüzeyi denir ve $2N$ boyutlu Γ hiperyüzeyi tarafından kapsanır. Yani sistemi betimleyen Hamiltonyen, bu bağ yüzeyi üzerinde tanımlanır. Bu noktada Dirac'ın yaptığı bir tanımın devreye sokulması gerekir.

Herhangi iki $F, G \in \Gamma$ dinamik değişkeni Γ_C hiperyüzeyi üzerinde birbirlerine eşitse

$$F - G|_{\Gamma_C} = 0 \quad (3.10)$$

bu iki dinamik değişken birbirlerine zayıf eşittir denir ve bu ilişki

$$F \approx G \quad (3.11)$$

şeklinde gösterilir. Bu durumda, Eşitlik (3.9)'da tanımlanan bağ koşulu ifadesi

$$\phi^m(q, p) = p^m - g^m(q, p) \approx 0 \quad (3.12)$$

olarak yazılabilir. Bu bağ koşullarının varlığında, Hamilton hareket denklemlerinin yeni formunun nasıl olacağı Hamiltonyenin değişimi ile belirlenir:

$$\begin{aligned} \delta H &= \dot{q}_i \delta p^i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i \\ &= \dot{q}_i \delta p^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Bu ifadeden Hamiltonyenin sadece q ve p 'nin fonksiyonu olduğu kolaylıkla görülebilir. Ancak bu Hamiltonyen, "*bir tek*" şekilde belirlenemez. Çünkü q ve p arasında bağ koşulları tarafından belirlenen ekstra bir ilişki var olduğundan, bu ilişkinin fiziksel sistemi betimle-

yen, Hamiltonyen içine de taşınması gerekir. Dolayısıyla, sıfıra eşit olan ϕ bağ koşullarının bir lineer kombinasyonu Hamiltonyene eklenir ve Hamiltonyen bağ yüzeyi üzerinde

$$H' \equiv H + u^m \phi_m . \quad (3.14)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (3.14)'te u_m 'ler bilinmeyen Lagrange çarpanlarıdır. Bu eşitlik birincil bağ koşullarını da içerdiğinden, Hamilton hareket denklemlerinin yeni formu

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H}{\partial p^i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p^i} , \quad (3.15)$$

$$-\dot{p}^i \approx \frac{\partial H}{\partial q^i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i} \quad (3.16)$$

şeklindedir. Görüleceği gibi hareket denklemleri bilinmeyen u_m parametrelerini içermektedir ve bu u_m parametreleri, tutarlılık gereği, q ve p 'lerin fonksiyonları olmalıdır. Ayrıca burada H' 'nü, birincil Hamiltonyen, H_p olarak,

$$H_p \equiv H + u^m \phi_m \quad (3.17)$$

tanımlamak mümkündür. Bu birincil Hamiltonyende yer alan bağ koşulları tutarlılık için zaman içinde evrilmemelidirler. Yani

$$\dot{\phi}_m \approx 0 \quad (3.18)$$

olmalıdır. Eşitlik (3.18)'deki bağıntılar tutarlılık şartları olarak adlandırılırlar.

Klasik dinamikten hatırlanabileceği üzere iki F ve G dinamik değişkeninin Poisson parantezleri

$$\{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} , \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanır ve herhangi bir dinamik değişkenin zamanla değişimi

$$\dot{F} = \{F, H\} \approx \{F, H_p\} \quad (3.20)$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla Eşitlik (3.20) kullanılarak, tutarlılık şartları

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_m &\approx \{\phi_m, H_p\} \\ &\approx \{\phi_m, H\} + u^n \{\phi_m, \phi_n\} \\ &\approx h_m + C_{mn} u^n \approx 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

bulunur. Burada C_{mn} , bağ koşullarının Poisson parantezlerinin inşa ettiği matrisin elemanlarıdır.

Eşitlik (3.21)'de elde edilen tutarlılık şartları, yeni tutarsızlıkların ortaya çıkmasına sebep

olabilirler: Örneğin; $L = \dot{q} - q$, Lagranjiyeni $\phi = p - 1$ bağ koşulu ile $H = q$ Hamiltonyenini verir. Bu bağ koşulunun zamana göre türevi $\dot{\phi} \approx -1$ 'dir. Bu da yeni bir tutarsızlığa sebep olur. Bu tür tutarsızlıkların bertaraf edilebilmesi için, Eşitlik (3.21) ile gösterilen şartlar iki farklı durum için yeniden gözden geçirilmelidir:

1. $\det C \neq 0$ durumunda Lagrange çarpanları

$$u^n \approx -C^{nm} h_m \quad (3.22)$$

şeklinde tek ve sabit bir biçimde belirlenir. Bu ifadede

$$C^{nm} = (C^{-1})_{nm} \quad (3.23)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu tespit ile, herhangi bir dinamik değişkenin zaman içindeki değişimi

$$\begin{aligned} \dot{F} &\approx \{F, H_p\} \approx \{F, H\} + \{F, \phi_m\} u^m \\ &\approx \{F, H\} - \{F, \phi_m\} C^{mn} h_n \\ &\approx \{F, H\} - \{F, \phi_m\} C^{mn} \{\phi_n, H\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

şeklinde belirlenir ve Eşitlik (3.24) herhangi bir başlangıç noktasının bağ yüzeyinde bulunmasını garantiler.

2. $\det C \approx 0$ durumunda Lagrange çarpanları belirlenemez. Eğer C 'nin rankı $R < N$ ise $A = N - R$ tane w_a boş özvektörü vardır:

$$w_a^m C_{mn} \approx 0 \quad a = 1, 2, \dots, A. \quad (3.25)$$

Eşitlik (3.21) soldan w_a^m 'lar ile çarpılırsa

$$h_m w_a^m \approx 0 \quad (3.26)$$

elde edilir. Bu durumda Eşitlik (3.22)'deki denklemler tamamen sağlanacağı gibi, K_1 tane yeni bağ koşulu da ortaya çıkar:

$$\phi_k \approx 0, \quad k = M + 1, \dots, M + K_1. \quad (3.27)$$

Bu bağ koşulları ikincil bağ koşulları olarak adlandırılır.

İkincil bağ koşullarının elde edilmesinden sonra, birincil bağ yüzeyinden daha düşük boyutlu bu yeni bağ yüzeyi üzerinde birincil ve ikincil bağ koşulları için tutarlılık şartları sınanmasına devam edilir. Algoritma burada durabileceği gibi yeni bağ koşulları da ortaya çıkabilir.

Dolayısıyla bu algoritma, ortaya çıkan her yeni bağ yüzeyi üzerinde, tutarlılık şartları belirlenip yeni bir bağ koşulu ortaya çıkmayınca kadar sürdürülür ¹. Sonuç olarak bütün bağ koşulları (birincil, ikincil, üçüncül...)

$$\phi_j \approx 0, \quad j = 1, \dots, M + K \equiv J \quad (3.28)$$

şeklinde belirlenir. Burada birincil bağ koşullarının sistemin momentumun tanımından belirlendiğini, ancak ikincil, üçüncül... bağ koşullarının, birincil bağ koşullarının hareket denklemlerinden türetildiğini hatırlatmak gerekir.

Eğer bağ yüzeyi bağ eşitlikleri ile tanımlanıyorsa, bu yüzeyde sıfır olan herhangi bir faz uzayı fonksiyonu bağ koşullarının lineer kombinasyonu biçiminde de yazılabilir. Hamiltonyen de v^j gelişi güzel sabitler olmak üzere

$$H_E = H + v^j \phi_j \quad (3.29)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bağ koşulları Dirac tarafından bir başka sınıflandırmaya daha tabi tutulmuştur. Eğer bir $F(q, p)$ fonksiyonu tüm ϕ_j bağ koşullarıyla Poisson parantezleri sıfıra zayıf eşitse,

$$\{F, \phi_j\} \approx 0, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (3.30)$$

birinci sınıf, diğer durumlarda ise **ikinci sınıf** fonksiyon olarak adlandırılır. Bağ koşullarının bu şekilde, birinci, ikinci sınıf olarak sınıflandırılması; birincil, ikincil, üçüncül... şeklinde sınıflandırılmalarından tamamen bağımsızdır.

Bu noktada, birinci sınıf fonksiyonlar için önemli bir teoremin vurgulanması gerekir:

Teorem 1. *Birinci sınıf fonksiyonlar kümesi Poisson parantezleri altında kapalıdır.*

İspat: Eğer F ve G birinci sınıf ise Eşitlik (3.30) bağ koşullarının lineer kombinasyonuna kuvvetli eşit biçimde yazılabilir:

$$\{F, \phi_j\} = f_{jj'} \phi_{j'} \quad (3.31)$$

ve benzer şekilde

$$\{G, \phi_j\} = g_{jj'} \phi_{j'} \quad (3.32)$$

¹ Algoritma şu üç şekilde sonlanır:

1. $0 \approx 0$ elde edildiğinde,
2. Lagrange çarpanlardan birisi belirlendiğinde,
3. Yeni bir bağ koşulu bulunmadığında.

olarak ifade edilebilir. Jacobi özdeşliğinden faydalanılarak

$$\begin{aligned}
\{\{F, G\}, \phi_j\} &= \{F, \{G, \phi_j\}\} - \{G, \{F, \phi_j\}\} \\
&= \{F, g_{jj'}\phi_{j'}\} - \{G, f_{jj'}\phi_{j'}\} \\
&= g_{jj'}\{F, \phi_{j'}\} + \{F, g_{jj'}\}\phi_{j'} - f_{jj'}\{G, \phi_{j'}\} - \{G, f_{jj'}\}\phi_{j'} \\
&\approx 0.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bu durumda F ve G 'nin Poisson parantezleri birinci sınıftır. Artık sistemdeki tüm bağ koşulları, birbirlerinden bağımsız olan I tane birinci sınıf

$$\varphi_i(q, p) \approx 0, \quad i = 1, \dots, I, \tag{3.34}$$

ve geriye kalan $S = J - I$ tane ikinci sınıf

$$\chi_\alpha(q, p) \approx 0, \quad \alpha = 1, \dots, S \tag{3.35}$$

bağ koşulları olmak üzere iki kategoriye ayrılabilirler.

Zamandan bağımsız bağ koşullarının belirlendiği bu yöntemde tüm Lagrange çarpanları belirlenebileceği gibi, bir kısmı belirsiz de kalabilir. Eğer sistemdeki birincil bağ koşullarından birinci sınıf olanlar varsa, tüm bağ koşullarının belirlenmesi sonucunda hala birincil Hamiltonyende belirlenememiş Lagrange çarpanları kalır.² Bu belirlenemeyen Lagrange çarpanlarının sayısı birincil bağ koşullarından birinci sınıf olanlarının sayısı kadardır.

Birinci sınıf bağ koşulları, daha sonra ayrıntılı şekilde incelenecek olan yerel ayar değişmezliği ile ilişkilerinden ötürü, özel önem taşırlar.

Dirac tarafından yeni bir cebir tanımlamak amacıyla, ikinci sınıf bağ koşullarının, elemanları

$$\Delta_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}, \tag{3.36}$$

şeklinde tanımlanan bir Δ matrisi inşa ettiği gösterilmiştir. Bir sonraki aşamada kullanılmak üzere bu matrisin bazı özelliklerini gözden geçirmek gerekir: İkinci sınıf bağ koşullarının,

1. Δ matrisi singüler değildir. Yani Δ matrisinin determinanı bağ koşulları tarafından tanımlanan en küçük bağ yüzeyi, Γ_C , üzerinde sıfırdan farklıdır:

$$\det \Delta \neq 0. \tag{3.37}$$

²Maxwell alan kuramı için de tutarlı bir Hamilton formalizmi tanımlamak için ayar sabitleme koşullarına ihtiyaç vardır ve bu ayar sabitleme koşullarını birinci sınıf bağ koşulu olacak şekilde seçmek gerekir (Bkz. Bölüm 3.2).

Aksi durum varsayılarak bu ifade ispatlanabilir. Eğer Δ singülerse ve

$$r_a \Delta_{\alpha\beta} = r_\alpha \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \approx 0 \quad (3.38)$$

koşulunu sağlayan $r_\alpha^2 = 0$ karakterine sahip bir r_α vektörü (*null vector*) var ise ikinci sınıf bağ koşullarının zayıf eşitliği kullanılarak Eşitlik (3.38),

$$\{r_\alpha \chi_\alpha, \chi_\beta\} \approx 0 \quad (3.39)$$

şeklinde yazılabilir ve $r_\alpha \chi_\alpha$ ayrıca birinci sınıf bağ koşullarıyla da sıra değiştirebilir. Bu da daha önce birinci sınıf bağ koşulları için Eşitlik (3.30)'da yapılan tanımla çelişir. Yani, Δ matrisinin determinantı sıfırdan farklı olmalıdır.

2. Δ matrisi antisimetriktir. Bundan dolayı matrisin boyutu çift olmalıdır. Bir diğer deyişle, ikinci sınıf bağların sayısı olan S çift sayı olmalıdır.
3. İkinci sınıf bağ koşulları için tutarlılık koşulu yazılırsa

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_\alpha &= \{\chi_\alpha, H\} + v^\beta \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \approx 0 \\ &= \{\chi_\alpha, H\} + v^\beta \Delta_{\alpha\beta} \approx 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

eşitliğine ulaşılır. Dolayısıyla $\det \Delta \neq 0$ özelliği göz önünde bulundurulduğunda, Eşitlik (3.40)'daki denklemler v^β 'lar için çözülebilir.

Bu noktada artık sistemin kuantizasyon işlemine geçilebilir. Bir sistem kuantize edilmek istendiğinde, faz uzayının temel değişkenleri olan konum ve eşlenik momentuma Hilbert Uzayı'nda tanımlı kuantum işlemciler karşı getirilir. Bu tür iki işlemcinin komütasyon bağıntıları da kuantum Hilbert uzayının elemanıdır. Herhangi iki kuantum operatörü olan F ve G için kuantum komütatörü

$$[\hat{F}, \hat{G}] \equiv i \{F, G\} \quad (3.41)$$

şeklinde gösterilir ve bu durumda bağ koşulu bağıntıları $|\psi\rangle$ gibi bir kuantum durumu üzerine sınırlama getiren kuantum işlemciler olarak ele alınır. Dolayısıyla

$$\{\phi_1, \phi_2\} \approx 0 \longrightarrow [\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2] |\psi\rangle = i \{\phi_1, \phi_2\} |\psi\rangle = 0 \quad (3.42)$$

şeklinde bir eşdeğerlik sağlanır. Eşitlik (3.42)'den görüleceği üzere, kapalılık özelliklerinden ötürü, yalnız birinci sınıf bağ koşullarına sahip sistemler için klasik kuramdan kuantum kuramına geçiş yapılabilir. Ancak sistemin Lagrange çarpanları da sistemde ikinci sınıf bağlar olmadan hesaplanamaz.

Bu problemi aşmak maksadıyla, Dirac; ikinci sınıf bağ koşulları için, bağ yüzeyi üzerinde birinci sınıf gibi davranabilmelerini sağlayacak yeni bir cebir tanımlamıştır. İkinci sınıf bağ

koşullarının Poisson parantezleri, Dirac parantezleri ile değiştirilip; karşılık gelen komütatörleri sıfıra kuvvetli eşit hale getirilerek kuantizasyon yapılabilir.

Herhangi iki faz uzayı değişkeni için Dirac parantezi

$$\{F, G\}_D \equiv \{F, G\} - \{F, \chi_\alpha\} \Lambda^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, G\} \quad (3.43)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\Lambda^{\alpha\beta} \equiv (\Delta_{\alpha\beta})^{-1}$ olup, $\Lambda^{\alpha\beta} \Delta_{\alpha\gamma} = \delta_\gamma^\beta$ ’dir. Eşitlik (3.36)’dan kolaylıkla görüleceği üzere herhangi bir faz uzayı fonksiyonunun ikinci sınıf bağ koşullarıyla Dirac parantezleri sıfırdır:

$$\begin{aligned} \{F, \chi_\alpha\}_D &= \{F, \chi_\alpha\} - \{F, \chi_\beta\} \Lambda^{\beta\gamma} \{\chi_\gamma, \chi_\alpha\} \\ &= \{F, \chi_\alpha\} - \{F, \chi_\beta\} \Lambda^{\beta\gamma} \Delta_{\gamma\alpha} \\ &= \{F, \chi_\alpha\} - \{F, \chi_\beta\} \delta_\alpha^\beta = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Poisson parantezlerinin tüm özellikleri Dirac parantezleri tarafından da sağlanır. Tüm birinci sınıf ve ikinci sınıf bağ koşullarının Dirac parantezleri sıfıra zayıf eşit olur.

Son olarak bir faz uzayı fonksiyonunun Hamiltonyeni ile Dirac parantezine bakılırsa

$$\{F, H\}_D = \{F, H\} - \{F, \chi_\alpha\} \Lambda^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, H\} \quad (3.45)$$

bulunur. Hamiltonyenin tüm bağ koşullarıyla Poisson parantezi sıfıra zayıf eşit olacağı için ikinci terim sıfıra zayıf eşit olur ve

$$\{F, H\}_D \approx \{F, H\} = \dot{F} \quad (3.46)$$

elde edilir. Bu ifadeden anlaşılabacağı üzere, Dirac parantezleri, Poisson parantezleri ile aynı hareket denklemlerini verir.

Böylece ikinci sınıf bağ koşullarına sahip bir sistemin kuantizasyonu, Poisson parantezleri Dirac parantezleri ile yer değiştirilerek ve tüm ikinci sınıf bağ koşulları baştan sıfıra kuvvetli eşit olacak şekilde ayarlanarak gerçekleştirilmiş olur.

3.2. Birinci Sınıf Bağlar ve Ayar Dönüşümleri

Bir önceki bölümde belirtildiği üzere birinci sınıf bağ koşullarının ayar dönüşümlerinin jeneratörü olduğu gösterilebilir: Bu maksatla, genişletilmiş toplam Hamiltonyendeki Lagrange çarpanlarına bakmakta fayda vardır. Birincil bağ yüzeyi üzerinde birincil Hamiltonyen Eşitlik (3.17)’deki gibidir ve bu bağ yüzeyi üzerinde birinci sınıf bağ koşullarının tutarlılık şartları

$$\dot{\phi}_j \approx \{\phi_j, H\} + u^m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0 \quad j = 1, \dots, J \quad m = 1, \dots, M \quad (3.47)$$

şeklinde olur. Bu ifade u^m 'ler için J tane homojen olmayan lineer denklem sistemidir ve u^m 'ler için genel çözüm

$$u^m = v^a V_a^m + U^m \quad (3.48)$$

formunda yazılabilir. Bu ifadede V_a^m 'lar homojen çözümler, v^a geliş güzel katsayılar ve U^m 'ler homojen olmayan çözümlerdir. Bu durumda genişletilmiş toplam Hamiltonyen

$$\begin{aligned} H_T &= H + U^m \phi_m + v^a V_a^m \phi_m \\ &= H' + v^a \phi_a \end{aligned} \quad (3.49)$$

düzenlemesiyle ifade edilebilir. Dirac'ın sınıflandırmasına göre H' ve ϕ_a sırasıyla birinci sınıf Hamiltonyen ve birinci sınıf bağ koşullarıdır. Hamiltonyende v^a gibi geliş güzel katsayıların olması tüm durumların gözlenebilir olmadığını ve bir fiziksel durumun sonsuz farklı gösterimi olabileceğini söyler. Yani başlangıçta, $\chi(0) = \chi(q(0), p(0))$, olan bir $\chi(q, p)$ durumu için hareket denklemleri aynı fiziksel durumu temsil eden farklı çözümler verirler ($\chi'(t) \neq \chi(t)$). Bu durum sistemde ayar simetrisinin olduğuna işaret eder.

Bu özellikten faydalanılarak, birinci sınıf bağ koşullarının ayar dönüşümlerinin jeneratörü olduğu gösterilebilir: Bir F dinamik değişkeninin δt gibi sonsuzküçük bir zaman aralığı içindeki ötelenmesi incelendiğinde,

$$\begin{aligned} F(\delta t) &= F(0) + \{F, H_T\} \delta t \\ &= F(0) + [\{F, H'\} + v^a \{F, \phi_a\}] \delta t. \end{aligned} \quad (3.50)$$

bulunur. Eşitlik (3.50)'de v^a 'lar keyfi parametreler olduklarından, v^a 'nın v_1^a ve v_2^a gibi iki özel seçimi için F 'in δt 'deki değerlerinin farkı

$$\begin{aligned} \Delta F(\delta t) = F_2(\delta t) - F_1(\delta t) &= \delta t (v_2^a - v_1^a) \{F, \phi_a\} \\ &\equiv \mu^a \{F, \phi_a\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

şeklinde dir. Bu ifadede, μ sonsuzküçük keyfi bir sayıyı temsil eder.

Eşitlik (3.51) 'deki dönüşüm, "*sonsuzküçük ayar dönüşümüdür*" ve eğer F değişkeni, bu dönüşüm ile yeni bir F' değişkenine dönüştürülürse, bu yeni F' değişkeni de aynı hareket denklemlerini sağlayacaktır. Eşitlik (3.51)'den görüleceği üzere, bu dönüşümün jeneratörü *birincil birinci sınıf bağ koşullarıdır*.

İkincil birinci sınıf bağ koşullarının da ayar dönüşümlerinin jeneratörü olabileceği benzer bir yöntemle gösterilebilir. Bunun için F dinamik değişkenine arka arkaya iki sonsuzküçük ayar dönüşümü uygulanır. μ^a parametrelili ilk dönüşüm F değişkenini

$$F_1 = F(0) + \mu^a \{F, \phi_a\} \quad (3.52)$$

formunda dönüştürürken, $\nu^{a'}$ parametrelili ikinci dönüşüm de uygulandığında, F değişkeni

$$\begin{aligned} F_{12} &= F_1 + \nu^{a'} \{F_1, \phi_{a'}\} \\ &= F(0) + \mu^a \{F, \phi_a\} + \nu^{a'} \{[F(0) + \mu^a \{F, \phi_a\}], \phi_{a'}\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

ve bu dönüşümler ters sırayla uygulandığında

$$F_{21} = F(0) + \nu^{a'} \{F, \phi_{a'}\} + \mu^a \left\{ \left[F(0) + \nu^{a'} \{F, \phi_{a'}\} \right], \phi_a \right\} \quad (3.54)$$

bulunur. Bu iki dönüşüm de F fonksiyonunu aynı fiziksel duruma denk gelecek şekilde dönüştürür. Bu durumda $F_{21} - F_{12}$ farkı, Poisson parantezleri için Jacobi özdeşliği de kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \Delta F = F_{21} - F_{12} &= \mu^a \nu^{a'} [\{\{F, \phi_a\}, \phi_{a'}\} - \{\{F, \phi_{a'}\}, \phi_a\}] \\ &= \mu^a \nu^{a'} \{F, \{\phi_a, \phi_{a'}\}\} \end{aligned} \quad (3.55)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi ayar dönüşümünün jeneratörü $\{\phi_a, \phi_{a'}\}$ 'dir. Bu Poisson parantezi birincil bağ yüzeyi üzerinde sıfıra zayıf eşittir. Ancak Teorem 1'de de gösterildiği üzere birinci sınıf bağlar Poisson parantezleri için kapalılık özelliğine sahiptir; yani $\{\phi_a, \phi_{a'}\}$ birinci sınıf bağ koşullarının bir lineer kombinasyona kuvvetli eşittir:

$$\{\phi_a, \phi_{a'}\} = \lambda_{a'a''}^a \phi_{a''} . \quad (3.56)$$

Dolayısıyla $\phi_{a''}$ 'lar ikincil bağ koşulları da olabilir. Kısaca, birincil birinci sınıf bağ koşulları ayar dönüşümlerinin jeneratörü iken, ikincil birinci sınıf bağ koşulları da ayar dönüşümlerinin jeneratörü olabilir ve bu dönüşümler sistemin fiziksel durumunda bir değişikliğe sebebiyet vermezler.

3.3. Abelyen Ayar Alanlarının Kanonik Kuantizasyonu

Ayar alanlarını kuantizasyonu için, öncelikle $A_\mu(x)$ vektör alanına karşılık gelen kanonik alan momentumun hesaplanması gerekir:

$$\Pi^\mu(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} , \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \Pi^0 &= 0 \\ \Pi^i &= E^i . \end{aligned} \quad (3.58)$$

Vektör alanı ve kanonik momentumu için, eş zamanlı Poisson parantezleri

$$\{A_\mu(x), A_\nu(y)\}|_{x_0=y_0} = 0 = \{\Pi_\mu(x), \Pi_\nu(y)\}|_{x_0=y_0} \quad (3.59)$$

$$\{A_\mu(x), \Pi_\nu(y)\}|_{x_0=y_0} = \delta_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.60)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik (3.58)'ten görüldüğü üzere, $\mu = 0$ durumunda $\Pi^0 = 0$ olduğundan, Π^0 'ın tüm diğer dinamik değişkenlerle Poisson parantezlerinin sıfır vermesi beklenir; ancak bu Eşitlik (3.60) ile çelişir. Dolayısıyla $\Pi^0 = 0$, bağ koşulu olarak sisteme dahil edilmelidir. Bu bağ koşulunun varlığı, teoriyi kuantize etmeye çalışırken bağlı sistemler için geliştirilmiş bir kuantizasyon yönteminin kullanılmasını gerekli kılar.

İlk olarak Dirac'ın kanonik yöntemi kullanılarak, bu kuantizasyon işleminin nasıl gerçekleştirileceğine bakılabilir.

Öncelikle

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} (\Pi^i \Pi^i - B^i B^i) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Lagranjiyenin ile betimlenen sistemin, kanonik Hamiltonyen yoğunluğu

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{can} &= \Pi^\mu \partial^0 A_\mu - \mathcal{L} = -\Pi^i \partial^0 A_i - \mathcal{L} \\ &= -\Pi^i (-\Pi^i + \partial^i A_0) - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} (\Pi^i \Pi^i + B^i B^i) + \Pi_i \partial^i A^0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

olarak elde edilir. Kanonik Hamiltonyen, (3.62)'deki ikinci terim için bir kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned} H_{can} &= \int d^3x \mathcal{H}_{can} \\ &= H_0 - \int d^3x A^0 \partial^i \Pi_i \end{aligned} \quad (3.63)$$

olarak bulunur. Burada H_0 , Eşitlik (3.63)'daki ilk terime karşılık gelen Hamiltonyendir.

Birincil bağ koşulu

$$\varphi_1 = \Pi^0 = 0 \quad (3.64)$$

olmak üzere, birincil Hamiltonyen

$$H_p = H_{can} + \int d^3x \lambda_1 \varphi_1 \quad (3.65)$$

şeklindedir. Bu ifadede λ_1 , Lagrange çarpanını temsil eder. φ_1 bağ koşulu için tutarlılık şartı

ise

$$\dot{\varphi}_1 \approx \{\Pi^0, H_p\} \approx 0 \quad (3.66)$$

şeklinde yazılır. Eşitlik (3.66)'deki Poisson parantezi hesaplanmak istenirse, Eşitlik (3.59) ve (3.60) kullanılarak, bu hesaba tek katkının sadece Eşitlik (3.63)'daki ikinci terimden geleceği kolaylıkla görülür³. Böylece

$$\begin{aligned} - \int d^3y \{ \Pi^0(x), A^0(y) (\partial_i \Pi^i(y)) \}_{x_0=y_0} &= - \int d^3y \{ \Pi^0(x), A^0(y) \}_{x_0=y_0} (\partial_i \Pi^i(y)) \\ &= \int d^3y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) (\partial_i \Pi^i(y)) \\ &= \partial_i \Pi^i(x) \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi birincil bağ koşulu için yazılan tutarlılık şartı ikincil bir bağ koşulu ortaya çıkarmıştır:

$$\varphi_2 = \partial_i \Pi^i \approx 0. \quad (3.68)$$

Öyleyse, ikincil Hamiltonyen;

$$\begin{aligned} H_S &= H_{can} + \int d^3x \lambda_1 \varphi_1 + \int d^3x \lambda_2 \varphi_2 \\ &= H_0 + \int d^3x [\lambda_1 \varphi_1 + (\lambda_2 - A_0) \varphi_2] \end{aligned} \quad (3.69)$$

olmak üzere, Eşitlik (3.60)'daki eş zamanlı Poisson parantezleri vasıtasıyla, yeni tutarlılık şartının

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 &= \{(\partial_i \Pi^i), H_S\} \approx 0 \\ 0 &\approx 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

özdeşliğini sağladığı kolayca gösterilebilir. Tutarlılık şartının aşıkâr bir biçimde sağlanmasıyla, bu noktada algoritma sonlanır.

Görüldüğü üzere, teorinin iki birinci sınıf bağ koşulu vardır. Bir önceki bölümde tartışıldığı üzere, sistemde birinci sınıf bağ koşullarının varlığı yerel ayar simetrisinin varlığına işaret eder. Bu durumda sisteme, bu birinci sınıf koşullarını ikinci sınıfa dönüştürecek şekilde ayar

³Eş zamanlı fonksiyonel Poisson parantezlerinin

$$\{F, GH\} = \{F, G\} H + G \{F, H\}$$

standart dağılım özelliklerini sağladığı EK.D'de gösterilmiştir.

sabitlenme koşulları eklenir. Örneğin;

$$\chi^1(x) \equiv A^0(x) \approx 0 \quad (3.71)$$

$$\chi^2(x) \equiv \partial_i A^i(x) \approx 0 \quad (3.72)$$

Coulomb Ayar sabitleme koşulları seçilebilir.

Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta da ayar sabitleme koşullarının birincil bağ koşullarıyla benzer yapıda, yani:

$$\begin{aligned} \Pi^0(x) \approx 0 &\longrightarrow A^0(x) \approx 0 \\ \partial_i \Pi^i(x) \approx 0 &\longrightarrow \partial_i A^i(x) \approx 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

olmasıdır. Bu ayar sabitleme konusunun taşıdığı incelik, bir sonraki bölümde Abelyen olmayan durum için ayrıntılı bir biçimde tartışılacaktır.

Böylece teoremin tüm bağ koşullarının kümesi

$$\phi_1 \equiv \varphi^1, \phi_2 \equiv \chi^1, \phi_3 \equiv \varphi^2, \phi_4 \equiv \chi^2 \quad (3.74)$$

elde edilir. Bu bağ koşullarının oluşturduğu Δ matrisinin elemanları daha önce Eşitlik (3.36)'da

$$\Delta_{ij}(x, y) = \{\phi_i(x), \phi_j(y)\}|_{x_0=y_0} \quad (3.75)$$

şeklinde tanımlanmıştı. Bu matrisin $\Delta_{13} = -\Delta_{31}$ ve $\Delta_{24} = -\Delta_{42}$ bileşenleri dışındaki bileşenleri sıfırdır. Sıfırdan farklı bileşenler ise

$$\Delta_{12} = -\Delta_{21} = \{\phi_1, \phi_2\} = \{\Pi^0(x), A^0(y)\}_{x_0=y_0} = -\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{34} = -\Delta_{43} &= \{\phi_3, \phi_4\} = \{\partial_i \Pi^i(x), \partial^i A_i(y)\}_{x_0=y_0} \\ &= (\partial_x)^i (\partial_y)^j \{\Pi_i(x), A_j(y)\}_{x_0=y_0} \\ &= -(\partial_x)_i (\partial_y)^j \delta_j^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = -\nabla_x^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) . \end{aligned} \quad (3.77)$$

olarak bulunur Sonuç olarak, $\Delta(\vec{x}, \vec{y})$ matrisi

$$\Delta(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla_x^2 \\ 0 & 0 & \nabla_x^2 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (3.78)$$

ve bu matrisin tersi olan Λ matrisi

$$\Lambda(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_x^{-2} \\ 0 & 0 & -\nabla_x^{-2} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (3.79)$$

formunda elde edilir.

Artık Eşitlik (3.43)'te gösterildiği gibi, iki dinamik alan değişkeninin eş zamanlı Dirac parantezleri hesaplanabilir:

$$\{A_\mu(x), A_\nu(y)\}_D|_{x_0=y_0} = 0 = \{\Pi_\mu(x), \Pi_\nu(y)\}_D|_{x_0=y_0} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned} \{A_\mu(x), \Pi_\nu(y)\}_D|_{x_0=y_0} &= \{A_\mu(x), \Pi_\nu(y)\}|_{x_0=y_0} \\ &\quad - \int \int d^3z d^3w [\{A_\mu(x), \Pi_0(z)\} \delta^3(\vec{z} - \vec{w}) \{A_0(w), \Pi_\nu(y)\} \\ &\quad + \{A_\mu(x), (\partial^i \Pi_i(z))\} \nabla_z^{-2} \delta^3(\vec{z} - \vec{w}) \{(\partial^j A_j(w)), \Pi_\nu(y)\}]_{x_0=y_0} \\ &= \delta_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) - \delta_{\mu 0} \delta_{0\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) - \int \int d^3z d^3w \delta_{\mu i} \delta_{j\nu} \\ &\quad \times [(\partial_z)^i \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) \nabla_z^{-2} \delta^3(\vec{z} - \vec{w}) (\partial_w)^j \delta^3(\vec{w} - \vec{y})] \\ \{A_\mu(x), \Pi_\nu(y)\}_D|_{x_0=y_0} &= \left(\delta_{\mu\nu} - \delta_{\mu 0} \delta_{0\nu} - \delta_{\mu i} \delta_{j\nu} (\partial_x)_i \frac{1}{\nabla_x^2} (\partial_x)_j \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) . \end{aligned} \quad (3.81)$$

Ayar sabitleme denklemlerinin, Eşitlik (3.71) ve (3.72), ışığı altında Dirac parantezleri

$$\{A_\mu(x), A_\nu(y)\}_D|_{x_0=y_0} = 0 = \{\Pi_\mu(x), \Pi_\nu(y)\}_D|_{x_0=y_0} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \{A_i(x), \Pi_j(y)\}_D|_{x_0=y_0} &= \left(\delta_{ij} - (\partial_x)_i \frac{1}{\nabla_x^2} (\partial_x)_j \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= \delta_{ij(tr)}(x - y) \end{aligned} \quad (3.83)$$

şeklinde elde edilir.

Kuantizasyon sürecindeki son adım, tüm Dirac parantezlerinin kuantum komütatörler ile değiştirilmesidir. Bu durumda, Eşitlik (3.82) ve (3.83)

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)]|_{x_0=y_0} = 0 = [\Pi_\mu(x), \Pi_\nu(y)]|_{x_0=y_0} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned}
[A_i(x), \Pi_j(y)]|_{x_0=y_0} &= i \left(\delta_{ij} - (\partial_x)_i \frac{1}{\nabla_x^2} (\partial_x)_j \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\
&= i \delta_{ij(tr)}(x - y)
\end{aligned} \tag{3.85}$$

halini alır ve böylece süreç tamamlanmış olur.

Burada bir ayrıntıya daha değinmek gerekir: Eşitlik (3.71) ve (3.72)'de verilen ayar sabitleme koşulları sayesinde teoremin kanonik Hamiltoniyeni de

$$H_{can} = H_0 = \int d^3x \frac{1}{2} (\vec{\Pi}^2 + \vec{B}^2) \tag{3.86}$$

şeklinde elde edilir.

Abelyen ayar kuramı için, kuantum Noether teoremi uygulanarak, bulunan korunumlu yükün ayar dönüşümlerinin jeneratörü olduğu rahatlıkla gösterilebilir. Bu tartışma Abelyen olmayan durum için EK.A sonunda yapıldığından, Abelyen durum için hesaplamalar ayrıntı ile gösterilmemiştir. Abelyen olmayan kuram için yapılan hesaplarda $SU(N)$ gruplarının yapı sabiti $f^{abc} = 0$ alınarak, tüm sonuçlar kolayca Abelyen durum için uyarlanabilir.

3.4. Abelyen Olmayan Ayar Alanlarının Kanonik Kuantizasyonu

Abelyen olmayan ayar alanlarını kuantizasyon için de, Abelyen duruma benzer şekilde, öncelikle $A_\mu^a(x)$ vektör alanına karşılık gelen kanonik alan momentumlar

$$\Pi^{\mu,a}(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu^a)} = -F^{0\mu,a} \tag{3.87}$$

$$\begin{aligned}
\Pi^{0,a} &= 0 \\
\Pi^{i,a} &= E^{i,a}
\end{aligned} \tag{3.88}$$

oluşturularak, eş zamanlı Poisson parantezleri

$$\{A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)\}|_{x_0=y_0} = 0 = \{\Pi_\mu^a(x), \Pi_\nu^b(y)\}|_{x_0=y_0} \tag{3.89}$$

$$\{A_\mu^a(x), \Pi_\nu^b(y)\}|_{x_0=y_0} = i \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \tag{3.90}$$

şeklinde ifade edilir. Ancak, Eşitlik (3.88)'ten görüldüğü üzere $\Pi^{0,a} = 0$ olduğundan, $\Pi^{0,a}$ 'ın tüm diğer dinamik değişkenlerle Poisson parantezlerinin sıfır vermesi beklenir. Ancak bu durum Eşitlik (3.90) ile çelişeceğinden, $\Pi^{0,a} = 0$, bir bağ koşulu olmalıdır. Abelyen durumda-

kine benzer şekilde teorinin kanonik Hamiltonyen yoğunluğu hesaplanır ve

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{can} &= \Pi_\mu^a \partial^0 A^{\mu,a} - \mathcal{L} = \Pi_0^a \partial^0 A^{0,a} + \Pi_i^a \partial^0 A^{i,a} - \mathcal{L} \\
&= \Pi_i^a (-\Pi^{i,a} + (\mathcal{D}^i A^0)^a) - \mathcal{L} \\
&= \frac{1}{2} (\Pi^{i,a} \Pi^{i,a} + B^{i,a} B^{i,a}) + \Pi_i^a (\mathcal{D}^i A^0)^a
\end{aligned} \tag{3.91}$$

formunda bulunur. Bu ifadeden de kanonik Hamiltonyen

$$\begin{aligned}
H_{can} &= \int d^3x \mathcal{H}_{can} \\
&= H_0 - \int d^3x A^{0,a} (\mathcal{D}^i \Pi_i)^a
\end{aligned} \tag{3.92}$$

şeklinde elde edilir. Buradaki ikinci terim, integral altında bir kısmi integrasyon yapıldıktan sonra yüzey terimleri atılarak bulunmuştur.

Birincil bağ koşulu

$$\varphi_1^a = \Pi^{0,a} = 0 \tag{3.93}$$

olmak üzere, birincil Hamiltonyen

$$\begin{aligned}
H_p &= H_{can} + \int d^3x \lambda_1^a \varphi_1^a \\
&= H_0 - \int d^3x [A^{0,a} (\mathcal{D}^i \Pi_i)^a - \lambda_1^a \varphi_1^a]
\end{aligned} \tag{3.94}$$

şeklindedir.

φ_1^a bağ koşulu için tutarlılık şartı hesaplanırken, fonksiyonel Poisson parantezlerinin dağılım özellikleri kullanılarak tek katkının sadece Eşitlik (3.94)'deki ikinci terimden geldiği kolayca görülebilir:

$$\begin{aligned}
\{\Pi^{0,a}(x_0, \vec{x}), H_p\} &= - \int d^3y \{ \Pi^{0,a}(x_0, \vec{x}), A^{0,b}(x_0, \vec{y}) \} (\mathcal{D}^i \Pi_i(x_0, \vec{y}))^b \\
&= \int d^3y \delta^{ab} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) (\mathcal{D}^i \Pi_i(x_0, \vec{y}))^b \\
&= (\mathcal{D}^i \Pi_i(x_0, \vec{x}))^a \approx 0.
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Eşitlik (3.95)'den görüldüğü üzere, birincil bağ koşulu için yazılan tutarlılık şartı ikincil bir bağ koşulu ortaya çıkarmıştır:

$$\varphi_2^a = (\mathcal{D}_i \Pi^i)^a \approx 0. \tag{3.96}$$

Öyleyse ikincil Hamiltonyen

$$\begin{aligned} H_S &= H_{can} + \int d^3x \lambda_1^a \varphi_1^a + \int d^3x \lambda_2^a \varphi_2^a \\ &= H_0 + \int d^3x [\lambda_1^a \varphi_1^a + (\lambda_2^a - A_0^a) \varphi_2^a] \end{aligned} \quad (3.97)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi φ_2^a 'nin tutarlılık şartına bakılırsa

$$\dot{\varphi}_2^a \approx \{\varphi_2^a, H_S\} \quad (3.98)$$

olmalıdır. Eşitlik (3.98)'te eşitliğin sağ tarafındaki tek katkının Eşitlik (3.97)'teki üçüncü terimden geleceği kolaylıkla görülebilir:

$$\dot{\varphi}_2^a = \left\{ \varphi_2^a(\vec{x}), \int d^3y (\lambda_2^b - A_0^b) \varphi_2^b(\vec{y}) \right\}. \quad (3.99)$$

Bu durumda φ_2^a , bağ koşulları $SU(N)$ grubunun cebiri gereği

$$\{\varphi_2^a(x_0, \vec{x}), \varphi_2^b(x_0, \vec{y})\} = f^{abc} \varphi_2^c(x_0, \vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.100)$$

ifadesini sağlar.

Böylece,

$$\dot{\varphi}_2^a(x) = f^{abc} \varphi_2^c(x) (\lambda_2^b(x) - A_0^b(x)) \quad (3.101)$$

eşitliğine ulaşılmış olur. φ_2^a 'nin tutarlılık şartı

$$\lambda_2^a = A_0^a \quad (3.102)$$

seçimi yapılarak, yani yeni Lagrange çarpanı tespit edilerek sağlanmış olur ve algoritma sonlanır. Bu durumda ikincil Hamiltonyen de

$$H_S = H_0 + \int d^3x \lambda_1^a \varphi_1^a \quad (3.103)$$

ifadesine indirgenmiş olur.

Özetlersek, teoremin iki adet "birinci sınıf" bağ koşulu vardır.

Dirac algoritması çerçevesinde ilerleyebilmek için, bu bağlara eşit sayıda "ayar sabitleme koşulları" eklenerek, tüm bağ koşulları kümesini "ikinci sınıf" bağ koşullarına dönüştürmek gerekir [22].

Ayar alanlarının (örneğin; elektromagnetik alan) fiziksel özelliklerinden biri olan "transvers-

lik” özelliğini sağladığından, Coulomb ayarı, en çok kullanılan ayardır:

$$\chi_2^a = \partial_i A_i^a \approx 0 . \quad (3.104)$$

χ_2^a ’nın φ_2^a ile eşleşerek, istenen özelliği (ikinci sınıfa dönüştürme) yapısı gereği sağlayacağı açıktır. Burada özel dikkat gerektiren φ_1^a ile eşleşmeyi sağlayacak ikinci ayar koşulunun ne şekilde seçileceğidir. Bu incelikli husus Abelyen durumda, basitliğinden dolayı pek sıkıntı yaratmamıştı.

Abelyen olmayan duruma geçmeden önce, bu seçimi ($\chi_1 = A_0 \approx 0$) kritik bir perspektiften tartışmak faydalı olacaktır. Hiç gözardı edilmemesi gereken nokta (Abelyen durumda genel olarak dillendirilmese de), $\chi_2 = \partial_i A_i$ koşulunun da tutarlılık koşulunu (yani zamanda evrilmeme) sağlaması ve bunu φ_2 ile uyumlu olarak yapmasıdır:

$$\dot{\chi}_2 = \partial_0 (\partial_i A_i) = \partial_i (\partial_0 A_i) . \quad (3.105)$$

Bu koşulun, Gauss yasası ile birlikte değerlendirilmesi ve uyumunun sağlanması gerekir. Tanım gereği

$$\Pi_i = -F_{0i} = -\partial_0 A_i + (\partial_i A_0) \quad (3.106)$$

olduğundan,

$$\partial_0 A_i = -\Pi_i + \partial_i A_0 \quad (3.107)$$

yazılabilir. Eşitlik (3.107), Eşitlik (3.105)’de yerine konulursa,

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_2 &= \partial_i (-\Pi_i + \partial_i A_0) \\ &= -\partial_i \Pi_i + \vec{\nabla}^2 A_0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

elde edilir. Gauss yasası ile uyumluluk gereği, χ_2 ’nin tutarlılığı

$$\dot{\chi}_2 = \vec{\nabla}^2 A_0 \approx 0 \quad (3.109)$$

koşuluna ulaşılmasını sağlar. Bu koşulu her yerde sağlayan statik (φ_2 ’nin tutarlılığının gereği bulunan $\vec{\nabla}^2 A_0 \approx 0$ denklemince garanti edilen) A_0 ’ın

$$A_0 \approx 0 \quad (3.110)$$

koşulunu sağlaması gerekir ki, zaten Abelyen durumda da bu seçim yapılmıştır.

Bu tartışmanın bu detayda yapılmasının nedeni, eldeki Abelyen olmayan çerçevede durumun oldukça farklı olması ve bu inceliklerin gözardı edilerek Coulomb ayar seçiminin tıpkı

Abelyen durumda olduğu gibi yapılmasının doğru ve mümkün olmadığıdır. Bu seçimin

$$\chi_2^a = \partial_i A^{i,a} \approx 0 \quad (3.111)$$

kısmı fiziksel olarak "transverslik" özelliğini sağlaması nedeniyle, tartışmasıdır. Öncelikle bu χ_2^a koşulunun tutarlılığının sınanması gerekir:

$$\Pi_i^a = -F_{0i}^a = -\partial_0 A_i^a + \mathcal{D}_i A_0^a \quad (3.112)$$

tanımının ışığı altında

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_2^a &= \partial_0 (\partial_i A_i^a) = \partial_i (-\Pi_i^a + \mathcal{D}_i A_0^a) \\ &= -\partial_i \Pi_i^a + \partial_i \mathcal{D}_i A_0^a \end{aligned} \quad (3.113)$$

bulunur. φ_2^a , Gauss yasası ile uyumluluk zorunluluğu gereği, Eşitlik (3.96) kullanılarak, Eşitlik (3.113)'da

$$\partial_i \Pi_i^a = -\rho^a = -[A_i, \Pi_i]^a = -f^{abc} A_i^b \Pi_i^c \quad (3.114)$$

yazılırsa

$$\dot{\chi}_2^a = \rho^a + \partial_i \mathcal{D}_i^{ab} A_0^b \quad (3.115)$$

elde edilir.

Eşitlik (3.115)'den hemen görülebilir ki; χ_2^a 'nın tutarlılık zorunluluğu $A^{0,a}(x) \approx 0$ gibi bir ayar seçimini dışlamaktadır. Zira, bu seçim, $\rho^a = 0$ olmasını gerektirir, bu da Abelyen olmayan teoriyi Abelyen duruma indirgeyecektir.

Bu seçenek ortadan kaldırıldığına göre φ_1^a ile uyumlu bir eşleşme yapabilecek bir ayar seçimi

$$M^{ab} \equiv \partial_i D_i^{ab} \quad (3.116)$$

tanımı yapılarak, Eşitlik (3.115)'den

$$\chi_2^a = M^{ab} A_0^b + \rho^a \approx 0 \quad (3.117)$$

şeklinde bulunur.

Özetle, Yang - Mills teorisi için birinci sınıf Dirac bağ koşullarına eşlik edecek Coulomb "ayar tespiti" koşulları

$$\begin{aligned} \chi_1^a &= M^{ab} A_0^b + \rho^a \approx 0 \\ \chi_2^a &= \partial_i A^{i,a} \approx 0 \end{aligned} \quad (3.118)$$

olarak seçilir.

Dirac algoritmasındaki bir sonraki adım Dirac parantezlerinin hesaplanmasıdır. Bunun için daha önce Eşitlik (3.36)'da tanımlandığı gibi bağ koşullarının oluşturduğu Δ matrisinin inşası edilmesi gerekir. φ_i^a ve χ_i^a koşulları ϕ_i^a genel ifadesi ile gösterilirse

$$\phi_1^a \equiv \varphi_1^a, \phi_2^a \equiv \chi_1^a, \phi_3^a \equiv \varphi_2^a, \phi_4^a \equiv \chi_2^a \quad (3.119)$$

olmak üzere, Δ matrisinin elemanları,

$$\Delta_{ij}^{ab}(x, y) \equiv \{\phi_i^a(x), \phi_j^b(y)\}|_{x_0=y_0} \quad (3.120)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu matrisin elemanları son derece karmaşık ifadelerdir. Bu durum, özellikle Dirac parantezlerinin inşasında kullanılacak olan Δ^{-1} 'in hesaplanmasında, bu yöntemin kullanışlılığı bağlamında ciddi kuşku yaratan, teknik zorluklar ortaya koyar.

Δ matrisinin sıfırdan farklı elemanları

$$\Delta_{12}^{ab} = -\Delta_{21}^{ab} = \{\phi_1^a, \phi_2^b\} = \{\Pi^{0a}(x), A^{0,b}(y)\}_{x_0=y_0} = M^{ab}(x) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.121)$$

$$\Delta_{22}^{ab} = \{\phi_2^a, \phi_2^b\} = \{\chi_1^a(x), \chi_1^b(y)\}_{x_0=y_0} = f^{abc} \rho^c(x) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{23}^{ab} = -\Delta_{32}^{ab} = \{\phi_2^a, \phi_3^b\} = \{\chi_1^a(x), \varphi_2^b(\vec{y})\}_{x_0=y_0} &= -f^{abc} \varphi_2^c(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ &+ f^{abc} \partial_i [A_0^c \partial_i \delta^3(\vec{x} - \vec{y})] \\ &+ \delta^{ab} (A_0^c \chi_2^c - \chi_2^a A_0^b), \end{aligned} \quad (3.123)$$

$$\Delta_{33}^{ab} = \{\phi_3^a, \phi_3^b\} = \{\varphi_2^a(x), \varphi_2^b(y)\}_{x_0=y_0} = f^{abc} G^c(x) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.124)$$

$$\Delta_{34}^{ab} = -\Delta_{43}^{ab} = \{\phi_3^a, \phi_4^b\} = \{\varphi_2^a(x), \chi_2^b(y)\}_{x_0=y_0} = -M^{ab}(x) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.125)$$

olarak bulunur.

Dirac parantezlerinin elde edilmesi için Δ^{-1} 'in dolayısıyla da, öncelikle M^{-1} 'in hesaplanması gerekir. Bu hesaplamada,

$$M^{ab} = A^{ab} + B^{ab} \quad (3.126)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} A^{ab} &= \delta^{ab} \vec{\nabla}^2 \\ B^{ab} &= f^{abc} A_i^c \partial_i \end{aligned} \quad (3.127)$$

tanımları yapılarak

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \frac{1}{A}B\frac{1}{A}B\frac{1}{A} + \dots \quad (3.128)$$

açılımı kullanılacaktır. Hemen görüldüğü üzere, A^{-1} , $\vec{\nabla}^2$ operatörünün Green fonksiyonudur. M^{-1} 'in kesin ifadesi, ancak

$$G^{ab}(x, y) = c \frac{\delta^{ab}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (3.129)$$

fonksiyonunu içeren sonsuz bir seri açılımı ile ifade edilebilecektir. Bundan sonraki adımlar gereksiz karmaşıklıklar içerdiği için artık bu doğrultuda devam edilmeyecektir.

Bütün bu tartışmadan çıkarılan ders: "kanonik Hamiltonyen" formalizminin, Abelyen durumda çok fazla sıkıntı çıkarmadan ayar teorisinin (ve diğer basit bağlı sistemlerin) kuantizasyonunda kullanılabilmesine karşın, Abelyen olmayan durumda, özellikle Faddeev - Popov yol integrali formalizmi gibi çok şık ve basit bir alternatifi varken, hiç de kullanışlı ve ekonomik bir yöntem olmadığıdır.

Bu perspektiften bakıldığında, bir sonraki bölümde detaylı olarak incelenecek olan Faddeev - Popov yol integrali yönteminin neden bu denli öne çıktığı ve artık ayar alanlarının (ve diğer pek çok bağlı sistemin) standart kuantizasyon yöntemi olarak benimsendiği çok açık şekilde görülecektir.

3.5. Dirac İddiası ve Ayar Teorileri

Dirac'ın birinci sınıf bağ koşullarının ayar dönüşümleri olduğu iddiasını sınamak için tezin kapsamı bağlamında, daha gerçekçi bir platform olarak ayar alan kuramları ele alınabilir: İlk olarak Abelyen kuram ele alınırsa, hatırlanacağı üzere, ayar alanlarının $\delta\lambda$ parametrelili sonsuzküçük dönüşümlerinin

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \delta\lambda \quad (3.130)$$

şeklinde olduğu Bölüm.2'de gösterilmiştir. Bu dönüşümlerin, kuramın birinci sınıf bağları tarafından üretilip üretilmediklerini göstermek amacıyla kuramın birinci sınıf bağların, ayar alanları ile kanonik komütatörlerine bakılırsa;

$$\begin{aligned} [\varphi_1(x), A_\mu(y)]_{x_0=y_0} &= [\Pi_0(x), A_\mu(y)]_{x_0=y_0} = -i\delta_{0\mu} \delta^3(x-y), \\ [\varphi_2(x), A_\mu(y)]_{x_0=y_0} &= [\partial_i \Pi_i(x), A_\mu(y)]_{x_0=y_0} = -i\delta_{i\mu} (\partial_x)_i \delta^3(x-y) \end{aligned} \quad (3.131)$$

olduğu görülür. Eşitlik (3.131)'den çıkarılabilecek ilk ders, birincil birinci sınıf bağ koşulunun, tek başına ayar dönüşümlerini üretmediğidir. Yine burada ikincil birinci sınıf bağ koşulu olan Gauss yasası ise sadece ayar alanlarının uzay bileşenlerinin dönüşümünü ürettiği de söylenebilir.

Kuantum Noether kuramı bağlamında, dönüşümlerin Noether yükünün kuantize edilmiş alanların dönüşümlerinin jeneratörü olduğu bilinmektedir (Bkz. EK.A). Buradan hareketle Abel-

yen durumda Noether yükü, kuramın birinci sınıf bağ koşulları cinsinden

$$\begin{aligned}\delta Q = \int d^3x \delta J^0 &= \int d^3x \Pi^\nu (\partial_\nu \delta \lambda) \\ &= \int d^3x [\varphi_1 (\partial_0 \delta \lambda) - \varphi_2 \delta \lambda]\end{aligned}\quad (3.132)$$

şeklinde yazılabildiği görülür. Eşitlik (3.132)'dan, ayar dönüşümlerinin jeneratörünün ancak birinci sınıf bağ koşullarının özel bir kombinasyonunun olacağı görülebilir.

Benzer tartışma Abelyen olmayan teori çerçevesinde de yapılabilir. Bu durumda birinci sınıf bağ koşullarının ayar alanları ile kanonik komütatörleri

$$\begin{aligned}[\varphi_1^a(x), A_\mu^b(y)]_{x_0=y_0} &= [\Pi_0^a(x), A_\mu^b(y)]_{x_0=y_0} = -i\delta_{0\mu} \delta^3(x-y), \\ [\varphi_2^a(x), A_\mu^b(y)]_{x_0=y_0} &= [(\mathcal{D}_i \Pi_i)^a(x), A_\mu^b(y)]_{x_0=y_0} = -i\delta_{i\mu} \delta^{ab} (\mathcal{D}_x)_i^{ac} \delta^3(x-y)\end{aligned}\quad (3.133)$$

şeklinde yazılır. Abelyen durumda olduğu gibi birincil birinci sınıf bağ koşulu, tek başına, ayar dönüşümü üretmezken; Gauss yasası da sadece uzay bileşenlerinin dönüşümünü üretir. Kuantum Noether kuramı bağlamında ayar dönüşümleri ele alındığında, Noether yükü birinci sınıf bağ koşulları cinsinden

$$\begin{aligned}\delta Q = \int d^3x \delta J^0 &= \int d^3x \Pi^{\nu,a} (\mathcal{D}_\nu \delta \lambda)^a \\ &= \int d^3x [\Pi_0^a (\mathcal{D}_0 \delta \lambda)^a - (\mathcal{D}_i \Pi_i)^a \delta \lambda^a] \\ &= \int d^3x [\varphi_1^a (\mathcal{D}_0 \delta \lambda)^a - \varphi_2^a \delta \lambda^a] \\ &= \int d^3x [\varphi_1^a (\partial_0 \delta \lambda)^a + (\eta^a - \varphi_2^a) \delta \lambda^a]\end{aligned}\quad (3.134)$$

şeklinde yazılabilir. Burada η^a

$$\eta^a = f^{abc} \Pi^{0,b} A_0^c \quad (3.135)$$

şeklinde tanımlanmıştır ve bir "renk yükü" olarak yorumlanabilir.

Eşitlik (3.134), birinci sınıf bağ koşullarının tek başlarına ayar dönüşümlerinin jeneratörleri olamayacağını, ancak özel bir kombinasyonlarının bu dönüşümleri üretebileceğini daha açık bir biçimde göstermiştir. Yani, ancak bu kombinasyon içinde birinci sınıf bağlar ayar dönüşümlerinin jeneratörü işlevini üstlenirler. Bu nedenle, Dirac'ın ortaya attığı birinci sınıf bağ koşullarının ayar dönüşümlerinin jeneratörleri olduğu iddiasının ayar kuramlarında, özellikle de birincil bağ koşulu için, sağlıklı bir şekilde çalışmadığı görülebilir.

4.YOL İNTEGRALİ YÖNTEMİ VE AYAR ALANLARININ YOL İNTEGRALİ YÖNTEMİ İLE KUANTİZASYONU

4.1.Yol İntegrali Yöntemi

Bir önceki bölümde ayar alanlarının kuantizasyonu Dirac'ın bağlı sistemler için geliştirdiği yöntem ile yapıldı. Kanonik yöntem Hamiltonyen sistemler için geliştirilmiş olduğundan doğası gereği açık Lorentz değişmezliğine sahip değildir. Kuşkusuz bu değişmezliğin mevcudiyeti özel tekniklerle (Schwinger cebiri) sınanabiliyorsa da, daha sonra Feynman'ın geliştirdiği bir yöntem olan, *yol integrali kuantizasyon yöntemi* bu bakımdan ve doğrudan fiziksel sonuçların üretilmesine odaklı bir yapıya sahip olması, *c-sayılar* ve *alanlar*la hesap yapmanın kolaylığı, farklı ayar sabitleme koşulları arasında daha rahat bir geçiş sağlaması... gibi başka bağlamlarda da pek çok avantaj sağlamaktadır.

Bu güçlü estetik yanlarına rağmen yol integrali yönteminin teknik bakımdan dikkat gerektiren birkaç özel durumu söz konusudur. Örneğin; yol integrali yöntemi Minkowski uzayında iyi tanımlı değildir. Bu yüzden fonksiyonel integraller daha iyi yakınsama özelliğine sahip olan Öklidyen metrikte hesaplanır ve hesaplamaların sonunda tekrar Minkowski metriğine geri dönüş yapılır. Gauss integralleri ötesinde kesin integral yöntemlerinin bilinmiyor olması, bu yöntemin esas olarak bir pertürbasyon yöntemi olması anlamına gelir.

4.1.1.Kuantum Alanlar İçin Yol İntegrali Formalizmi

Kuantum alan kuramına geçiş, kuantum mekaniksel çerçevedeki sonlu serbestlik derecesinden, $\phi(x)$ gibi sonsuz sayıda serbestlik derecesine sahip değişkenlere geçilerek yapılır. Buna göre, bir x noktasındaki alanın bir y noktasına geçiş olasılığı, T , zaman sıralama operatörü olmak üzere,

$$\langle 0 | T [\Phi(x) \Phi(y)] | 0 \rangle = \int [d\phi] \phi(x) \phi(y) \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}(\phi) \right) \quad (4.1)$$

şeklinde yazılır. Bu integrali hesaplamak için Eşitlik (C.10)'dakine benzer bir üreteç fonksiyoneli tanımlanır:

$$Z[J] = N \int [d\phi] \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi) + J(x) \phi(x)] \right\}. \quad (4.2)$$

Bu ifadede, integral elemanı ve normalizasyon

$$\begin{aligned} [d\phi] &\equiv \prod_x d\phi(x) \\ N^{-1} &\equiv Z[J=0] = \int [d\phi] e^{i \int d^4x \mathcal{L}(x)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

formundadır.

Bu integral skaler alanlar için hesaplarırken, sonlu serbestlik derecesi durumunda izlenen adımlar benzer sırayla uygulanır.

Örnek olarak skaler alan teorisi ele alınırsa; klasik alanların, Klein - Gordon denklemini bir kaynağın varlığında sağlayan, homojen olmayan çözümler olduğu düşünülerek,

$$(\square + m^2) \phi_{cl}(x) = J(x) \quad (4.4)$$

ifadesinden başlanabilir.

Klein - Gordon denkleminin Green fonksiyonu

$$(\square + m^2)_x \Delta_F(x - y) = -\delta^4(x - y) \quad (4.5)$$

ifadesi ile tanımlanır. Bu durumda Eşitlik (4.4)'ün çözümü olan klasik alanlar

$$\phi_{cl}(x) = - \int d^4y \Delta_F(x - y) J(y) \quad (4.6)$$

formunda ifade edilebilir.

Bu noktada skaler alanlar

$$\phi \rightarrow \phi + \phi_{cl} \quad (4.7)$$

şeklinde bir ötelemeye tabi tutularak, Eşitlik (4.2)'deki Gauss integrali alındığında,

$$Z(J) = \exp \left\{ -i/2 \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x - y) J(y) \right\} \quad (4.8)$$

bulunur. Bu durumda, normalizasyon katsayısı, Eşitlik (4.3)'ten

$$N^{-1} = [\det(\square + m^2)]^{-1/2} \quad (4.9)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla Eşitlik (4.5)'te tanımlanan propagatör, Eşitlik (4.8)'den fonksiyonel türevler alınarak,

$$-i \Delta_F(x - y) = \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} Z(J) \Big|_{J=0} \quad (4.10)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik (4.10)'a göre, Eşitlik (4.1)'de tanımlanan alanların geçiş genlikleri

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) &= i^n \langle 0 | T [\phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle \\ &= \frac{\delta Z(J)}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

olarak bulunur. Örneğin 4-nokta için bu türev açıkça,

$$-\left(\prod_{i=1}^4 \frac{\delta}{\delta J(x_i)}\right) Z(J) \Big|_{J=0} = \Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3) \Delta_F(x_2 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_4) \Delta_F(x_2 - x_3) . \quad (4.12)$$

formunda ifade edilir.

Üreteç fonksiyoneli, $Z(J)$, $J = 0$ etrafında kuvvet serisi olarak da yazılabilir:

$$Z(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \cdots \int d^4x_1 \cdots d^4x_n J(x_1) \cdots J(x_n) Z^{(n)}(x_1 \cdots x_n) . \quad (4.13)$$

Bu ifadede,

$$\begin{aligned} Z^{(n)}(x_1 \cdots x_n) &= \frac{\delta}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} Z(J) \Big|_{J=0} \\ &= i^n \langle 0 | T [\phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.14)$$

şeklindedir.

4.1.2. Bağlantılı Diyagramların Üretici

Karmaşık Feynman diagramlarını analiz ederken bu diagramları, bağlantılı ve bağlantısız olarak ayırmak gerekir: Bağlantısız diyagramlar, herhangi bir çizgiyi kesmeden iki parçaya ayrılabilir. Bağlantılı diagramlar içinse bu mümkün değildir.

Eşitlik (4.2)'de tanımlanan $Z(J)$ üreteç fonksiyoneli, hem bağlantılı hem de bağlantısız Feynman diagramlarını üretir. Bu durumda yol integrali yönteminin renormalizasyon kuramını da içeren fiziksel problemlere uygulanmasında, bağlantısız diagramlardan arındırılmış yeni bir $W(J)$ fonksiyoneli tanımlamak gerekir:

$$Z(J) = e^{iW(J)} . \quad (4.15)$$

Z ve W arasındaki ilişkiyi daha açık bir şekilde göstermek için $W(J)$, $J = 0$ civarında kuvvet serisine açılabilir:

$$W(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n J(x_1) \cdots J(x_n) W^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) . \quad (4.16)$$

Bu seride ilk dört terim için türevlere bakılması, Z ve W arasındaki ilişkiyi çözümleyebilmek için yeterlidir. Serideki tek sayıda türev içeren terimler daha önce gösterildiği üzere sıfırdır.

İkinci ve dördüncü türevler ise sırasıyla,

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} = \frac{i}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x_1)} \frac{\delta Z}{\delta J(x_2)} - \frac{i}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \quad (4.17)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\delta^4 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} = & \left(\frac{i}{Z^2} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x_3) \delta J(x_4)} + \text{perm.} \right) \\ & - \frac{i}{Z} \frac{\delta^4 Z}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

şeklindedir. $J = 0$ olduğunda, Eşitlik (4.17)'den rahatlıkla görüleceği üzere ikinci mertebeden türevler içeren terimler için

$$iW^{(2)}(x_1, x_2) = Z^{(2)}(x_1, x_2) \quad (4.19)$$

bağıntısı sağlanır. Ancak dördüncü mertebeden türevleri içeren terimlerde ilişki bu kadar aşikar değildir:

$$W^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = i [Z^{(2)}(x_1, x_2) Z^{(2)}(x_3, x_4) + \text{perm.}] - iZ^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (4.20)$$

$W(J)$ 'nin yalnızca bağlantılı diyagramları ürettiğinin gösterilmesi için, örnek olarak $\lambda\phi^4$ teorisi ele alınabilir. Anılan teori kapsamında, Eşitlik (4.8) kullanılarak

$$Z^{(2)}(x_1, x_2) = -i\Delta_F(x_1 - x_2) + \frac{\lambda}{2} \int d^4z \Delta_F(x_1 - z) \Delta_F(z - x_2) \Delta_F(z, z) \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} Z^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & -[\Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(x_1 - x_2) + 2 \text{ perm. terim}] \\ & - \frac{i\lambda}{2} \left[\int d^4z \Delta_F(x_1 - z) \Delta_F(z, z) \right. \\ & \times \Delta_F(z - x_2) \Delta_F(x_3 - x_4) + 5 \text{ perm. terim} \\ & - \frac{i\lambda}{4!} \left[\int d^4z \Delta_F(x_1 - z) \Delta_F(x_2 - z) \right. \\ & \times \Delta_F(x_3 - z) \Delta_F(x_4 - z) + 23 \text{ perm. terim} \end{aligned} \quad (4.22)$$

sonuçları elde edilir. Bu faktörler Eşitlik (4.20) ile verilen $W^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ifadesine yerleştirildiğinde, bağlantısız diyagramlara karşılık gelen terimlerin birbirini yok ettiği ve sadece bağlantılı diyagramlara denk gelen terimlerin kaldığı görülebilir.

Bu formalizmde önemli olan, ”meşru vertexlerin” (*proper vertices*) üreteç fonksiyonelidir

ve Legendre dönüşümü ile

$$\Gamma(\phi) = W(J) - \int d^4x J(x) \phi(x) . \quad (4.23)$$

şeklinde tanımlanır. Ancak bu ifadede ϕ ve J birbirinden bağımsız değildir ve aralarındaki ilişki aşikar değildir. Bu ilişki, Eşitlik (4.23)'ün J ve ϕ 'ye göre kısmi türevleri alınarak görülebilir:

$$\frac{\delta W(J)}{\delta J(x)} = \phi(x) ; \quad \frac{\delta \Gamma(\phi)}{\delta \phi(x)} = -J(x) . \quad (4.24)$$

Türev işlemi tekrarlandığında:

$$\begin{aligned} G(x, y) &\equiv -\frac{\delta^2 W(J)}{\delta J(x) \delta J(y)} = -\frac{\delta \phi(x)}{\delta J(y)} \\ \Gamma(x, y) &\equiv \frac{\delta^2 \Gamma(\phi)}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} = -\frac{\delta J(x)}{\delta \phi(y)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

bulunur. $\Gamma(x, y)$ ve $G(x, y)$, sürekli uzay zaman indislerine sahip sonsuz boyutlu matrisler olarak düşünülerek birbirlerinin ters matrisleri olduğu gösterilebilir:

$$\begin{aligned} \int d^4z \Gamma(x, z) G(z, y) &= -\int d^4z \frac{\delta^2 \Gamma(\phi)}{\delta \phi(x) \delta \phi(z)} \frac{\delta^2 W(J)}{\delta J(z) \delta J(y)} \\ &= \int d^4z \frac{\delta \phi(z)}{\delta J(y)} \frac{\delta J(x)}{\delta \phi(z)} \\ &= \delta^4(x - y) . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Eşitlik (4.26)'nın bir kez daha J 'ye göre kısmi türevi alındığında

$$\begin{aligned} \int d^4z \frac{\delta^3 W(J)}{\delta J(x) \delta J(u) \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma(\phi)}{\delta \phi(y) \delta \phi(z)} \\ = \int d^4z \frac{\delta^2 W(J)}{\delta J(x) \delta J(z)} \int d^4z' G(u, z') \frac{\delta^3 \Gamma(\phi)}{\delta \phi(y) \delta \phi(z') \delta \phi(z)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

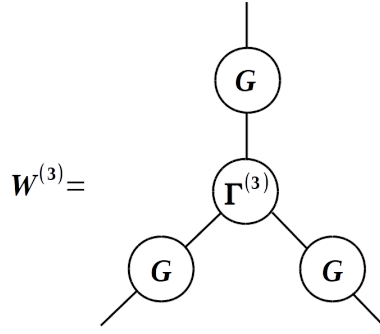
elde edilir. Eşitlik (4.27)'de

$$\frac{\delta}{\delta J(u)} = \int d^4z' \frac{\delta \phi(z')}{\delta J(u)} \frac{\delta}{\delta \phi(z')} = \int d^4z' G(u, z') \frac{\delta}{\delta \phi(z')} \quad (4.28)$$

zincir kuralı kullanılmıştır. Zincir kuralının iki kez daha uygulanmasıyla, ifadenin sadeleştirilmesi mümkündür:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 W(J)}{\delta J(x) \delta J(y) \delta J(z)} &= -\int d^4x' d^4y' d^4z' G(x, x') G(y, y') G(z, z') \\ &\quad \times \frac{\delta^3 \Gamma(\phi)}{\delta \phi(x') \delta \phi(y') \delta \phi(z')} . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Bu ifadenin grafik temsili Şekil 4.1’de gösterilmiştir.



Şekil 4.1: Üçüncü mertebede $W[J]$ ve $\Gamma[\phi]$ arasındaki ilişkinin grafik temsili.

Üreteç fonksiyonelleri arasındaki ilişkiye dikkat edilirse diyagramlardaki bacakların sayısı ile tekrarlanan türevlerin sayısının ilişkili olduğu görülebilir. Fonksiyonel yol integrali yaklaşımının avantajı, bu sonuçların pertürbasyon teorisinden bağımsız olmasıdır. Bu sayede karmaşık grafiksel tekniklere başvurmadan değişik tiplerdeki propagatörler ve verteksler arasındaki ilişkiler rahatlıkla elde edilebilir.

4.2. Faddeev - Popov Yaklaşımı

Yol integrali formalizminin asıl güçlü yönü istenilen ayar sabitleme koşullarında çalışabilme serbestliği vermesindedir (kanonik yöntemde, bu hiç kolay değildir). Yol integrali yönteminde ayar sabitleme, fonksiyonel integrale bir veya bir kaç delta fonksiyoneli yerleştirilerek yapılabilirdi için, istenilen ayarda çalışılabilir. Bu yaklaşım Faddeev ve Popov tarafından 1967 yılında geliştirilmiştir.

Ayar teorilerinde eylem, ayar dönüşümleri altında değişmez kaldığı için yol integralinde $[dA_\mu]$ integral elemanı üzerinden yapılan toplamda, birbirlerine ayar dönüşümü ile bağlı sonsuz A_μ^U konfigürasyonu integrasyona katkı yapar ve yol integrali ıraksar. Yani

$$A_\mu^U = U A_\mu U^{-1} - (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (4.30)$$

dönüşümü altında eylem değişmez kaldığı için $[dA_\mu^U]$ üzerinden alınan integral, U ’dan gelen sonsuzluğu içerir ve

$$\int [dA_\mu] e^{iS[A_\mu]} \rightarrow \infty \quad (4.31)$$

bulunur.

Şöyle ki, bir A_μ ile başlayıp tüm mümkün A_μ^U ’lar dikkate alınırsa fonksiyonel uzayda bir yörünge taranmış olur. Buradaki problem şudur: yörünge boyunca U değiştiğinden sonsuz farklı U için toplam tekrarlanır ve integral sonsuza gider. Bu problemin çözümü yörünge

dilimlenmesiyle mümkün olur. Bunun için de integrale $\delta [\partial_\mu A^{\mu,a}]$ veya $\delta [\partial_i A^{i,a}]$ gibi ayar sabitleme faktörlerinin eklenip, integralin konfigürasyon uzayında $\partial_\mu A^{\mu,a} = 0$ veya $\partial_i A^{i,a} = 0$ gibi bir yüzey üzerinde kalması sağlanır. Genel olarak ayar sabitleme işlemi, alanların herhangi bir fonksiyonu, örneğin,

$$\delta [F (A_\mu)] \quad (4.32)$$

ile yapılabilir ki bu delta fonksiyoneli de

$$F (A_\mu) = 0 \quad (4.33)$$

yüzeyinde ayar sabitler.

Ancak fonksiyonel integrale delta fonksiyoneli doğrudan yerleştirildiğinde, integral elemanı değişir. Faddeev ve Popov, yol integraline delta fonksiyoneli yerine,

$$1 = \Delta_{FP} \int [dU] \delta [F (A_\mu^U)] \quad (4.34)$$

özdeşliği ile tanımlanan bir tamlık koşulu eklenmesi ile bu belirsizliğin ortadan kaldırılabilceğini göstermişlerdir. Bu ifadede, Δ_{FP} , *Faddeev - Popov determinantıdır*. Burada ilk olarak göz önüne alınması gereken husus, grup elemanının ayar dönüşümleri altında değişmezliğidir. Bu da gruptan cebire geçilerek, sonsuzküçük hesaplarla doğrulanabilir. Şöyle ki, U ve $U' \in SU(N)$ grubun elemanları ise, grubun integral elemanı, sonsuzküçük düzeyde,

$$[dU] = [d(U'U)] \simeq d[U''] \quad (4.35)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda $U = e^\lambda$ parametrizasyonu göz önüne alınırsa, sonsuzküçük λ 'lar için grup elemanı

$$U \sim I + \lambda + O(\lambda^2) \quad (4.36)$$

formunda açılacağından, ardarda iki $SU(N)$ dönüşümü, sonsuzküçük λ 'lar cinsinden

$$\begin{aligned} U'U &= U'' \\ (I + \lambda') (I + \lambda) &\simeq I + \lambda'' \\ I + (\lambda + \lambda') &\simeq I + \lambda'' \end{aligned} \quad (4.37)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eşitlik (4.37)'in sol tarafında λ parametresi için diferansiyel alındığında, grup integral elemanı

$$[dU''] = \prod_{a,x} (d\lambda'')^a(x) \simeq \prod_{a,x} (d\lambda)^a(x) \quad (4.38)$$

olarak yazılabilir ki, bu da kapalılık özelliği gereği grubun integral elemanının değişmediğini gösterir.

Eşitlik (4.34)'teki tamlik koşulu Eşitlik (4.31)'deki yol integraline yerleştirilirse

$$\int [dA_\mu] \left(\Delta_{FP} \int [dU] \delta [F (A_\mu^U)] \right) e^{i \int d^4x \mathcal{L}[A]} \quad (4.39)$$

elde edilir.

Bu noktada Faddeev - Popov determinantının çok önemli bir özelliğine değinmek gerekir:

Faddeev - Popov determinantı ayar dönüşümleri altında değişmez kalır: Eğer $\Delta_{FP} (A_\mu)$ 'daki A_μ alanı A_μ^U ile değiştirilirse Eşitlik (4.35)'teki tanım gereği

$$\begin{aligned} \Delta_{FP}^{-1} (A_\mu^U) &= \int [dU'] \delta [F (A_\mu^{U'U})] \\ &= \int [d(U'U)] \delta [F (A_\mu^{U'U})] \\ &= \int [dU''] \delta [F (A_\mu^{U''})] \\ &= \Delta_{FP}^{-1} (A_\mu) \end{aligned} \quad (4.40)$$

bulunur.

Bütün yol integralinde $A_\mu \rightarrow A_\mu^{U^{-1}}$ dönüşümü yapıldığında $[dA_\mu]$ integral elemanı ve eylem değişmez kalır. Ancak $F (A_\mu^U)$ faktörü $F (A_\mu)$ olarak değişir. Bu durumda Eşitlik (4.39)'daki integrali

$$\int [dU] \int [dA_\mu] \Delta_{FP} \delta [F (A_\mu)] e^{i \int d^4x \mathcal{L}[A]} \quad (4.41)$$

formunda yazılır. Böylece

$$\int [dU] = \infty \quad (4.42)$$

sonsuz faktörünün integralden izole edilmesi mümkün olur. Şöyle ki, ayar $F (A_\mu) = 0$ yüzeyinde sabitlendiği için, bu şekilde ayar serbestisi nedeniyle oluşan sonsuzluğun fonksiyonel integralden izolasyonu gerçekleşir.

Bu durumda, yol integralinde ayar sabitleme problemi, Δ_{FP} için açık bir ifade bulma işlemine indirgenmiş olur. Eşitlik (4.33)'ten de yararlanarak Faddeev - Popov determinantı

$$\delta [F (A_\mu^U)] = \delta (U - U_0) \left\{ \det \left| \frac{\delta F (A_\mu^U (x))}{\delta U' (x')} \right| \right\}^{-1}. \quad (4.43)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, Faddeev - Popov determinantı

$$\Delta_{FP} = \det \left| \frac{\delta F (A_\mu^U (x))}{\delta U' (x')} \right| \quad (4.44)$$

olur.

Teorinin Feynman kurallarını yazarken, bu determinantın açık ifadesinin kullanılması gerekir. Bu açık ifadeyi bulmak için, küçük λ grup parametreleri için $F(A_\mu^U)$ seriye açılırsa,

$$F(A_\mu^U(x)) = F(A_\mu(x)) + \int d^4y M(x, y) \lambda(y) + \dots, \quad (4.45)$$

Eşitlik (4.44)'teki determinantın $M(x, y)$ matrisinin determinantına indirgeneceği görülebilir.

Faddeev - Popov determinantı M matrisinin determinantına indirgendikten sonra, bu determinant c ve $\bar{c}$ gibi iki alan üzerinden Gauss integrali formuna dönüştürülebilir:

$$\Delta_{FP} = \det M = \int [dc] [d\bar{c}] \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \bar{c}(x) M(x, y) c(y) \right\}. \quad (4.46)$$

Burada önemli olan nokta şudur: Bu determinantın paydada değil de payda kalabilmesi için c ve $\bar{c}$ 'in Grassmanyen alanlar olması gerekir (Bkz Ek.C). Yani c ve $\bar{c}$, Fermi - Dirac istatistiğine uyan (anti-komütasyon bağıntılarını sağlayan) skaler *hayalet* ve *anti-hayalet* (Faddeev - Popov hayaletleri) alanlardır.

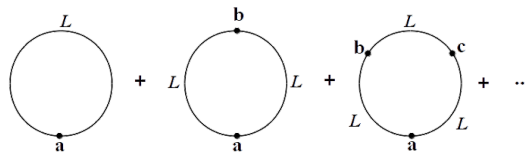
Alternatif olarak bu determinant, lineer cebirdeki bilinen bir özdeşlikten faydalınarak

$$\Delta_{FP} = \det M = e^{Tr(log M)} \quad (4.47)$$

şeklinde yazılabilir. Burada determinantın kesikli hale sokulmuş x ve y uzayları ile izospin indisleri üzerinden alındığı hatırlanmalıdır. Bu ifade $M = I + L$ olacak şekilde yazıldığında

$$\begin{aligned} \det(I + L) &= \exp \{Tr [log(I + L)]\} \\ &= \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} Tr(L^n) \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

elde edilir. L 'nin kuvvetleri üzerinden *iz* işlemi Feynman kuramının pertürbasyon açılımında kapalı halkalar olarak yorumlanır (Bkz Şekil 4.2) ve bu, hayalet alanların sadece iç diagramlarda görülüp, fiziksel olarak gözlemlenemeyeceğinin göstergesidir¹.



Şekil 4.2: Faddeev - Popov Determinantının diagramatik gösterimi

¹Bu tartışma, Bölüm.5'te sistemin fiziksel durum uzayının inşası yapılırken, tekrardan ele alınacaktır.

Bir diğer önemli nokta ise $\delta [F (A_\mu)]$ fonksiyonelinin eksponansiyel bir forma dönüştürülerek Eşitlik (4.40)'deki yol integralindeki eyleme eklenmesidir. Bunun için ayar sabitleme terimi, $F (A_\mu)$,

$$F (A_\mu) = 0 \quad (4.49)$$

yüzeyinden

$$F (A_\mu) = B^a (x) \quad (4.50)$$

gibi bir yüzeye genelleştirilir. Burada $B^a (x)$, ayar alanlarından bağımsız, uzay zamanın keyfi bir fonksiyonudur. Bu durumda Eşitlik (4.34)'te görülen Faddeev - Popov determinantı Δ_{FP} değişmez kalır ve bu ifadedeki özdeşlik

$$1 = \Delta_{FP} \int [dU] \delta [F (A_\mu^U) - B^a (x)] . \quad (4.51)$$

formunda genelleştirilebilir. Eşitlik (4.31)'de tanımlanan yol integraline Eşitlik (4.51) yerleştirilir ve sonsuz hacim faktörleri integralden izole edilirse, üretç fonksiyoneli,

$$Z [J] = \int [dA_\mu] [dB] \Delta_{FP} \delta [F (A_\mu^U) - B^a (x)] \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L} (x) + J^{\mu,a} A_\mu^a - \frac{1}{2\xi} (B^a (x))^2] \right\} \quad (4.52)$$

formunda elde edilir. Eşitlik (4.52)'de integrale eklenen

$$\int [dB] \exp \left\{ -\frac{i}{2\xi} \int d^4x (B^a (x))^2 \right\} \quad (4.53)$$

faktörü bir sabitle çarpıma denk gelir ve dolayısıyla sadece bir normalizasyon faktörüdür. Burada ξ , keyfi sabiti ayar parametresini temsil eder. B^a üzerinden Gauss ağırlıklı bir fonksiyonel integral alındığında üretç fonksiyoneli

$$Z [J] = \int [dA_\mu] \Delta_{FP} \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L} (x) + J^{\mu,a} A_\mu^a - \frac{1}{2\xi} (F (A_\mu))^2 \right] \right\} \quad (4.54)$$

şekline dönüşür.

Bu aşamada,

$$F (A_\mu) = \partial_\mu A^{\mu,a} = 0 \quad (4.55)$$

Landau ayarı için Δ_{FP} determinantı hesaplanabilir: İnfinitesimal λ parametrelili Abelyen olmayan ayar dönüşümleri altında ayar alanlarının dönüşüm kuralı

$$A_\mu^U = A_\mu - \mathcal{D}_\mu \lambda \quad (4.56)$$

göz önüne alınarak, Eşitlik (4.55)'den, ayar sabitleme terimi

$$F(A_\mu^U) = \partial_\mu A^{\mu,a} - \partial_\mu \mathcal{D}^\mu \lambda = 0 \quad (4.57)$$

olarak bulunur. Bu ifade, Eşitlik (4.45) ile karşılaştırılırsa, $M(x, y)$ matrisi için:

$$\begin{aligned} M_{ab}(x, y) &= \frac{\delta}{\delta U^{(a)}(x)} (\partial^\mu A_\mu^U)^b(y) = - \frac{\delta}{\delta \lambda^a(x)} \left\{ \partial_\mu (\mathcal{D}^\mu)^{bc} \lambda^c(y) \right\} \\ &= - [\partial_\mu \mathcal{D}^\mu]^{ab} \delta^4(x - y) \end{aligned} \quad (4.58)$$

ifadesi elde edilir. Bu matrisin determinantı Gauss formunda Grassmann integrasyon yöntemleri de kullanılarak (Bkz. EK.B):

$$\Delta_{FP} = \det M = \int [dc] [d\bar{c}] \exp \left\{ -i \int d^4x \bar{c}^a(x) [\partial_\mu \mathcal{D}^\mu]^{ab} c^b(x) \right\} \quad (4.59)$$

şeklinde elde edilir.

Böylece, Landau ayarı için, yol integrali üreteç fonksiyonelinin

$$\begin{aligned} Z[J=0] &= \int [dA_\mu] [dc] [d\bar{c}] \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{\mu,a})^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \bar{c}^a(x) (\partial_\mu \mathcal{D}^\mu)^{ab} c^b(x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.60)$$

ifadesine ulaşılır.

4.3. Ayar Alanlarının Feynman Kuralları

Eşitlik (4.60)'ta, Landau ayarında, elde edilen

$$\begin{aligned} S_{eff} &= S_{YM} + S_{gf} + S_{FPG} \\ &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{\mu,a})^2 - \bar{c}^a(x) [\partial_\mu \mathcal{D}^\mu]^{ab} c^b(x) \right\} \end{aligned} \quad (4.61)$$

etkin eylemi, ayar alanları ve hayalet alanlar açısından etkileşimsiz kuadratik kısımlar ve etkileşimli kısımlar olmak üzere iki kısma ayrılabilir:

$$f_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a. \quad (4.62)$$

olmak üzere, ayar alanları için etkileşimsiz kısım

$$S_{YM+gf}^{(0)} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} f_{\mu\nu}^a f^{\mu\nu,a} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{\mu,a})^2 \right] \quad (4.63)$$

şeklindedir. Bu ifadeye kısmi integrasyonlar uygulanarak,

$$\begin{aligned} S_{YM+gf}^{(0)} &= \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu^a (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \delta_{ab} A_\nu^b + \frac{1}{2\xi} A_\sigma^a \partial^\sigma \partial^\rho \delta_{ab} A_\rho^b \\ &= \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu^a \left[g^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right] \delta_{ab} A_\nu^b \end{aligned} \quad (4.64)$$

bulunur. Eşitlik (4.64)'te

$$\tilde{K}_{ab}^{\mu\nu}(x-y) = A_\mu^a \left[g^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\mu \partial^\nu \right] \delta^4(x-y) \delta_{ab} \quad (4.65)$$

tanımı yapılarak, Eşitlik (4.65) cinsinden

$$S_{YM+gf}^{(0)} = \int \int d^4x d^4y \frac{1}{2} A_\mu^a(x) \tilde{K}_{ab}^{\mu\nu} \delta^4(x-y) A_\nu^b(y) \quad (4.66)$$

formunda yazılabilir. Bu durumda (etkileşimsiz) üretic fonksiyoneli

$$\begin{aligned} Z_{YM+gf}^{(0)}[J] &= \int [dA_\mu] e^{iS_{YM+gf}^{(0)} + \int d^4x J^{\mu,a} A_\mu^a} \\ &= \int [dA_\mu] \exp \left\{ i \int \int d^4x d^4y \left[\frac{1}{2} A_\mu^a(x) K_{ab}^{\mu\nu}(x,y) A_\nu^b(y) \right] \right. \\ &\quad \left. + i \int d^4x J^{\mu,a}(x) A_\mu^a(x) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int \int d^4x d^4y \frac{1}{2} J^{\mu,a}(x) \Delta_{\mu\nu}^{ab}(x,y) J^{\nu,b}(y) \right\} \end{aligned} \quad (4.67)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\Delta_{\mu\nu}^{ab}(x,y)$, Feynman propagatörü olmak üzere, Eşitlik(4.5)'te verilen tanımı gereği

$$\int d^4z K_{ac}^{\mu\rho}(x,z) \Delta_{\rho\nu}^{bc}(z,y) = \delta^4(x-y) \delta_\nu^\mu \delta_a^b \quad (4.68)$$

özdeşliğini sağlaması gerekir.

Eşitlik (4.65)'te açık hali görülen kernel için propagatör, Eşitlik (4.68) ifadesi ve Fourier dönüşümünden de faydalanılarak

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \delta_\nu^\mu \delta_{ab} &= \int d^4 z \delta^4(x-z) \left[g^{\mu\rho} \square_{(z)} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) (\partial_z)^\mu (\partial_z)^\rho \right] \delta_{ac} \\
&\times \int d^4 k \delta^{bc} \tilde{\Delta}_{\rho\nu}(k) e^{ik(z-y)} \\
&= \int \int d^4 z d^4 k \delta_{ab} \delta^4(x-z) \tilde{\Delta}_{\rho\nu}(k) \\
&\times \left[-g^{\mu\rho} k^2 + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\rho \right] e^{ik(z-y)} \\
&= \int d^4 k \delta_{ab} \tilde{\Delta}_{\rho\nu}(k) \left[-g^{\mu\rho} k^2 + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\rho \right] e^{ik(x-y)}
\end{aligned} \tag{4.69}$$

şeklinde hesaplanır. Artık hesaplama cebirsel bir denklem çözümüne indirgenmiş olur. Feynman propagatörü kapalı formda

$$\tilde{\Delta}_{\rho\nu}(k) = A(k) g_{\rho\nu} + B(k) k_{\rho} k_{\nu} \quad (4.70)$$

olarak yazılırsa, Eşitlik (4.68) ve (4.69)'dan A ve B katsayılarının sağlayacağı bir cebirsel denkleme ulaşılır:

$$-Ak^2\delta_\nu^\mu + k^\mu k_\nu \left[A \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) - \frac{1}{\xi} Bk^2 \right] = \frac{1}{(2\pi)^4} \delta_\nu^\mu \quad (4.71)$$

Buradan hareketle, Eşitlik (4.70)'de tanımlanan A ve B katsayıları

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \\ B &= A(\xi - 1) \frac{1}{k^2} \end{aligned} \quad (4.72)$$

formunda bulunur. Böylece,

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(x, y) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \delta^{ab} \quad (4.73)$$

ile tanımlanan Feynman propagatörü elde edilmiş olur. Bu ifadenin diagramatik gösterimi (*Feynman Diagramı*)

$$\begin{array}{c} \mu,a \\ \text{~~~~~} \end{array} \text{~~~~~} \begin{array}{c} \nu,b \\ \text{~~~~~} \end{array} = -\frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \delta^{ab}. \quad (4.74)$$

şeklindedir².

²Buradaki $i\epsilon$ paramtresi sonsuzküçük bir paramtre olup, reel eksendeki kutupların integralde yol açacağı ıraksamalardan kaçınmak için geliştirilmiş bir regülerizasyon yöntemidir.

Eşitlik (4.74)'te $\xi = 1$ seçimi (Feynman Ayarı) ile propagatör

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(x, y) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad (4.75)$$

formunda daha basit bir hale dönüşür. Skaler alan propagatörüne benzediğinden, bu seçimle hesap yapmak çok daha kolaydır.

Benzer biçimde hayalet alanların kuadratik eylem teriminden başlanarak,

$$S_{FPG}^{(0)} = \int \int d^4 x d^4 y \bar{c}^a(x) \square \delta_{ab} c^b(y) \quad (4.76)$$

propagatörü hesaplandığında

$$\Delta^{ab}(x, y) = - \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} e^{ik'(x-y)} \frac{1}{(k')^2 + i\epsilon} \delta^{ab} \quad (4.77)$$

elde edilir ve diyagramatik olarak

$$\begin{array}{c} \mu, a \\ \text{-----} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \nu, b \\ \text{-----} \end{array} = \frac{\delta^{ab}}{(k')^2 + i\epsilon} \quad (4.78)$$

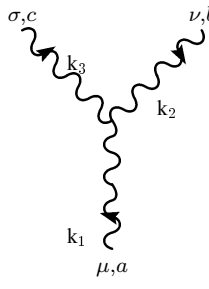
ile gösterilir.

Etkileşimli terimler için verteks faktörlerini hesaplamak amacıyla, eylemdeki etkileşim terimlerinin pertürbatif açılımı yapılabilir. J^μ , η ve $\bar{\eta}$ sırasıyla A_μ , $\bar{c}$ ve c alanlarına karşı gelen kaynak terimler olmak üzere, elde edilen

$$Z[J] = \exp \left\{ i \int d^4 x \mathcal{L} \left[\frac{\delta}{\delta J_\mu^a}, \frac{\delta}{\delta \eta^a}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}^a} \right] \right\} Z_{YM+gf}^{(0)}[J] Z_{FPG}^{(0)}[\eta, \bar{\eta}] \quad (4.79)$$

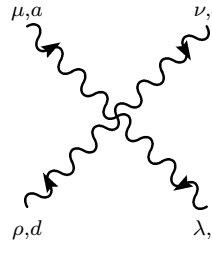
üreteç fonksiyonlarından temel verteks fonksiyonları (Γ) hesaplanabilir:

1. Üç ayar bozonu içeren $-\frac{1}{2}\epsilon^{abc} f_{\mu\nu}^a A^{\mu,b} A^{\nu,c}$ terimi için, $\sum_{i=1}^3 k_i = 0$ durumunda;



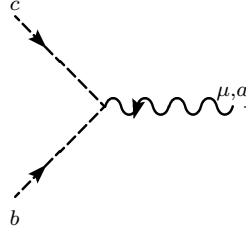
$$\longrightarrow i\Gamma_{\mu\nu\sigma}^{abc} = i\epsilon^{abc} \left[(k_1 - k_2)_\sigma g_{\mu\nu} + (k_2 - k_3)_\mu g_{\nu\sigma} + (k_3 - k_1)_\nu g_{\mu\sigma} \right]. \quad (4.80)$$

2. Dört ayar bozonu içeren $\frac{1}{4}\epsilon^{abc}\epsilon^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu,d} A^{\nu,e}$ terimi için, $\sum_{i=1}^4 k_i = 0$ durumunda;



$$\longrightarrow i\Gamma_{\mu\nu\lambda\rho}^{abcd} = i \left[\epsilon^{abe}\epsilon^{cde} (g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\nu\lambda}g_{\mu\rho}) \right. \\ \left. + \epsilon^{ace}\epsilon^{bde} (g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}) \right. \\ \left. + \epsilon^{ade}\epsilon^{cbe} (g_{\mu\lambda}g_{\rho\nu} - g_{\rho\lambda}g_{\mu\nu}) \right] \quad (4.81)$$

3. İki hayalet ve bir ayar bozonu içeren $\bar{c}^a(x) \partial_\mu \epsilon^{abc} A^{\mu,c} c^b(x)$ terimi için,



$$\longrightarrow i\Gamma_\mu^{abc} = g\epsilon^{abc}k_\mu \quad (4.82)$$

sonuçlarına ulaşılır.

5. BRST SİMETRİSİ

5.1. BRST Simetrisi

Önceki bölümde gösterildiği üzere, ayar sabitlemesi yapıldıktan sonra bulunan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{eff} &= \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{FPG} \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{\mu,a})^2 + \partial^\mu \bar{c}^a (\mathcal{D}_\mu c)^a\end{aligned}\quad (5.1)$$

etkin Lagranjiyeni artık ayar simetrisine sahip değildir. Fakat bu Lagranjiyen hala kalıntı bir fermiyonik simetriye sahiptir. Yeni $\mathcal{L}_{eff}$

$$\begin{aligned}\delta A_\mu^a &= w (\mathcal{D}_\mu c)^a \\ \delta c^a &= -\frac{w}{2} f^{abc} c^b c^c \\ \delta \bar{c}^a &= -\frac{w}{\xi} (\partial_\mu A^{\mu,a}) .\end{aligned}\quad (5.2)$$

dönüşümleri altında değişmez kalır. Burada w dönüşümün parametresi ve sabit bir Grassman sayısıdır.

Eşitlik (5.2)'deki dönüşümlere göre etkin Lagranjiyendeki bazı terimlerin nasıl dönüştüğü incelendiğinde, ϕ genel olarak A_μ , c ve $\bar{c}$ alanlarını temsil etmek üzere $\delta^2 \phi = 0$ olduğu görülür. Gerçekten de, A alanı için başlanarak

$$\begin{aligned}\delta (\mathcal{D}_\mu c)^a &= \mathcal{D}_\mu^a b \delta c^b + f^{abc} \delta A_\mu^b c^c \\ &= -\frac{w}{2} \mathcal{D}_\mu^a b (f^{bcd} c^c c^d) + w f^{bcd} (\mathcal{D}_\mu c)^c c^d = 0\end{aligned}\quad (5.3)$$

elde edilir. Benzer şekilde, c alanına bakıldığında

$$\delta \left(\frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c \right) = f^{abc} \delta c^b c^c = -\frac{w}{2} f^{abc} f^{bde} c^d c^e c^c \quad (5.4)$$

bulunur. Eşitlik (5.4), $SU(N)$ grubunun cebirinden ve hayalet alanların anti-komütasyon ilişkilerinden faydalanılarak¹,

1

$SU(N)$ grubunun anti-Hermityen jeneratörlerinin cebri: $[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$

ve Jacobi özdeşliği: $[T^c, [T^d, T^e]] + [T^d, [T^e, T^c]] + [T^e, [T^c, T^d]] = 0$
 $f^{acb} f^{bde} + f^{adb} f^{bec} + f^{aeb} f^{bcd} = 0$

$$\begin{aligned}
f^{abc} f^{bde} c^d c^e c^c &= \frac{1}{3} (f^{abc} f^{bde} c^d c^e c^c + f^{abd} f^{bec} c^e c^c c^d + f^{abe} f^{bcd} c^c c^d c^e) \\
&= \frac{1}{3} (f^{abc} f^{bde} + f^{abd} f^{bec} + f^{abe} f^{bcd}) c^d c^e c^c
\end{aligned} \tag{5.5}$$

formunda yazılabilir. Eşitlik (5.5)'te eşitliğin sağ tarafında, parantez içindeki ifade $SU(N)$ grubunun Jacobi özdeşliği olduğundan, sıfıra eşittir. Dolayısıyla Eşitlik 5.4'de sıfıra eşit olur. Böylece, hayalet alanlar da iki kez dönüşüme tabi tutulursa sonucun sıfır olacağı ($\delta^2 = 0$ karakteristiği) gösterilmiş olur.

Ayar sabitleme teriminin dönüşümü ise,

$$\delta (\partial_\mu A^{\mu,a}) = w \partial_\mu (\mathcal{D}^\mu c)^a \tag{5.6}$$

şeklindedir. Anti-hayalet alanlar için Euler - Lagrange denklemi yazılırsa, Eşitlik (5.6)'dan

$$\partial_\mu (\mathcal{D}^\mu c)^a = 0 \tag{5.7}$$

bulunur. Bu ifadeden de görüldüğü gibi tüm $\phi^a = \{A_\mu^a, \bar{c}^a, c^a\}$ alan kümesi için

$$\delta^2 \phi^a = 0 \tag{5.8}$$

bağıntısı sağlanmaktadır.

Ancak burada dikkat edilmesi gereken husus, Eşitlik (5.3), (5.5) ve (5.6)'dan da görüleceği üzere, A_μ^a ve c^a alanlarının dönüşümleri için dönüşümlerin $\delta^2 = 0$ karakteri tüm faz uzayında geçerliiyken, $\bar{c}^a$ alanı için bu özelliğin sadece hayalet hareket denklemlerini sağlayan faz uzayındaki hiperyüzey üzerinde geçerli olmasıdır.

Artık Lagranjiyenin bu dönüşümler altında değişmezliği sınanabilir. A_μ^a alanları için dönüşüm, $\lambda^a = w c^a$ parametrelili bir ayar dönüşümüne karşılık geldiğinden, Lagranjiyendeki F^2 terimi otomatik olarak değişmez kalır. Dolayısıyla Lagranjiyende değişmezliğine bakılması gereken terimler ayar sabitleme terimi ve hayalet alan Lagranjiyenleridir. İşlemler yapıldığında, bu kısımdaki değişimin bir tam türeve eşit olduğu görülür:

$$\begin{aligned}
\delta (\mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{FPG}) &= -\frac{1}{\xi} (\partial_\nu A^{\nu,a}) (\partial_\mu \delta A^{\mu,a}) + \partial^\mu (\delta \bar{c}^a) (\mathcal{D}_\mu c)^a \\
&= -\frac{w}{\xi} (\partial_\nu A^{\nu,a}) \partial_\mu (\mathcal{D}_\mu c)^a - \frac{w}{\xi} \partial_\mu (\partial_\nu A^{\nu,a}) (\mathcal{D}_\mu c)^a \\
&= \partial_\mu \left[-\frac{w}{\xi} (\partial_\nu A^{\nu,a}) (\mathcal{D}_\mu c)^a \right].
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Bilindiği gibi Lagranjiyene bir tam türev eklemek eylemde değişikliğe sebep olmayacağından, bu Grassmanyen parametrelili dönüşümler altında eylemin değişmezliği sağlanmış olur.

Bu değişmezlik BRST simetrisi olarak adlandırılır.

Ancak, daha önce de bahsedildiği gibi, BRST dönüşümlerinin yukarıdaki formülasyonunda bir "kısıt" söz konusudur. Çünkü anti-hayalet alanlarının dönüşümlerinin $\delta^2 = 0$ karakteri sadece faz uzayındaki hiperyüzey üzerinde geçerlidir. Bunu aşmak için "yardımcı alan" (*auxiliary field*) tanımına gidilir. Uygun yardımcı alanın kurama dahil edilmesiyle, simetri cebiri tüm faz uzayında kapalı hale getirilir. Yardımcı F^a alanı

$$F^a \equiv \frac{1}{\xi} \partial_\mu A^{\mu,a} \quad (5.10)$$

olarak tanımlandığında, ayar sabitleme terimi şu şekilde yazılabilir:

$$\mathcal{L}_{gf} = (\partial^\mu F^a) A_\mu^a + \frac{\xi}{2} F^a F^a. \quad (5.11)$$

Eğer F^a için hareket denklemleri yazılırsa, görülür ki; Eşitlik (5.11)'deki ifade, Eşitlik (5.1)'deki bilinen ayar sabitleme terimine eşittir. Bu yeni durumda, toplam etkin Lagranjiyen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= L_{YM} + L_{gf} + L_{FPG} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} + (\partial^\mu F^a) A_\mu^a + \frac{\xi}{2} F^a F^a + \partial_\mu \bar{c}^a (\mathcal{D}_\mu c)^a \end{aligned} \quad (5.12)$$

şeklinde yazılır. Anılan durumda, alanların BRST dönüşümleri:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= w (\mathcal{D}_\mu c)^a \\ \delta c^a &= -\frac{w}{2} f^{abc} c^b c^c \\ \delta \bar{c}^a &= -w F^a \\ \delta F^a &= 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

formunda bulunur. Bu dönüşümler, anti-hayalet alanlar için de tüm faz uzayında $\delta^2 = 0$ karakteri gösterir. Yani F^a dahil, tüm bu yeni alan kümesi için, artık hiçbir sınırlamaya gerek kalmadan

$$\delta^2 \phi^a = 0 \quad (5.14)$$

olur.

Bu durumda, etkin Lagranjiyenin dönüşümüne tekrar bakılırsa, $\delta F^a = 0$ olduğu için,

$$\begin{aligned} \delta (\mathcal{L}_{eff}) &= \delta (\mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{FPG}) \\ &= \partial_\mu F^a \delta A^{\mu,a} + \partial_\mu \delta \bar{c}^a (\mathcal{D}^\mu c)^a \\ &= w \partial_\mu F^a (\mathcal{D}^\mu c) - w \partial_\mu F^a (\mathcal{D}^\mu c) = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

bulunur. Böylece etkin Lagranjiyenin tüm BRST dönüşümleri altında değişmezliği bu yeni

çerçevede sağlanmış olur. Bu sonucun, yardımcı alanın olmadığı; dolayısıyla, yalnız anti-hayalet alanların hareket denkleminin sağlandığı rejimde geçerli olan dönüşümlere göre daha üstün olduğu açıktır. Ayrıca bir önceki formülasyonda Lagranjiyende bir tam türev ortaya çıkarken, burada değişmezlik Lagranjiyen düzeyinde ek bir terim ortaya çıkmadan sağlanmaktadır.

Özetle, buradaki BRST simetrisi, orijinal ayar simetrisinin bir kalıntısı gibidir.

BRST dönüşümlerinin Grassmann doğaları gereği anti-BRST dönüşümleri de tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}\bar{\delta} A_\mu^a &= \bar{w} (\mathcal{D}_\mu \bar{c})^a \\ \bar{\delta} c^a &= \bar{w} (F^a - f^{abc} c^b \bar{c}^c) \\ \bar{\delta} \bar{c}^a &= -\frac{\bar{w}}{2} f^{abc} \bar{c}^b \bar{c}^c \\ \bar{\delta} F^a &= \bar{w} f^{abc} F^b \bar{c}^c.\end{aligned}\tag{5.16}$$

Bu dönüşümler de etkin Lagranjiyeni değişmez bırakır, ancak bu tezdeki pedagojik boyutlu çalışma bağlamında BRST simetrisinden farklı ve yeni bir bilgi içermediklerinden ilerki tartışmalarda anti-BRST dönüşümlere değinilmeyecektir. Yine de burada kısaca belirtmek gerekir ki, yukarıda görülen BRST ve anti-BRST dönüşümleri, Grassmann değişkenlerinin asimmetrik doğaları gereği, birbirine simetrik değildir.

Yukarıda ayrıntılı bir biçimde tartışılan BRST simetrisine ek olarak, etkin Lagranjiyen, aşağıdaki ϵ parametrelili sonsuzküçük bozonik global simetri dönüşümleri altında da değişmezdir (hayalet sayısı simetrisi ²):

$$\begin{aligned}\delta c^a &= \epsilon c^a \\ \delta \bar{c}^a &= -\epsilon \bar{c}^a.\end{aligned}\tag{5.17}$$

Artık etkin Lagranjiyeye karşı gelen kuantum durum uzayının fiziksel olarak gözlemlenebilen durumlardan daha fazla durum içerdiği açıktır. Bu nedenle, fiziksel Hilbert uzayının uygun bir biçimde seçilmesi gerekir. Ayrıca bu vektör uzayının sistemin zaman içindeki değişiminden etkilenmemesi de gereklidir. Bunun daha iyi tartışılabilmesi için Landau ayarındaki QED örneği ele alınabilir.

Landau ayarındaki QED için, fiziksel durumlar, Gupta - Bleuler şartı olarak adlandırılan

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)}(x) |\psi\rangle = 0\tag{5.18}$$

şartını yerine getirecek biçimde seçilirler. Burada (+) indisi ayar alanlarının hareket denklemlerinin pozitif frekanslı çözümlerini temsil etmek için kullanılmıştır. Bu tek bir şartmış gibi görünse de, her koordinat için bir değere sahip olacağından, sonsuz sayıda şartı içerir.

²hayalet sayısı simetrisi: ghost scaling symmetry

Ancak Gupta - Bleuler türü bir şartı yazmak Abelyen olmayan durumda mümkün değildir, çünkü ayar alanları Abelyen durumda olduğu gibi, böyle serbest bir hareket denklemini sağlamazlar. Bununla beraber, sırasıyla, BRST simetrisinin ve hayalet sayısı simetrisinin jeneratörleri olan Q_{BRST} ve Q_c Noether yükleri korunur ve bu nedenle sistemin zamanla değişmesine karşın değişmez kalan fiziksel bir Hilbert uzayı tanımlamada kullanılabilirler. Yani sistemin fiziksel vektör uzayının

$$\begin{aligned} Q_{BRST} |\psi\rangle &= 0, \\ Q_c |\psi\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (5.19)$$

ifadelerini sağlaması gerekir. Burada önemli olan noktalardan bir tanesi de bu şartların QED'de de ortaya çıkması ve sonsuz sayıdaki Gupta - Bleuler şartının aksine, sadece iki şart öne sürmesidir. Bu iki şart Gupta - Bleuler şartını yeniden türetmek için kullanılabilir.

Bunu göstermek için BRST simetrisinin korunumlu Noether akımı ele alınırsa,

$$\begin{aligned} j_{BRST}^{(w)\mu}(x) &= -F^{\mu\nu,a} \delta A_\nu^a + \delta \bar{c}^a (\mathcal{D}^\mu c)^a + \partial^\mu \bar{c}^a \delta c^a \\ &= -w \left(F^{\mu\nu,a} (\mathcal{D}_\nu c)^a + F^a (\mathcal{D}^\mu c)^a - \frac{1}{2} f^{abc} (\partial^\mu \bar{c})^a c^b c^c \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

bulunur. Abelyen kuram için $f^{abc} = 0$ olduğundan, Noether yükü

$$\begin{aligned} Q_{BRST} &= \int d^3x (F^{0\nu,a} \partial_\nu c^a + F^a \partial^0 c^a) \\ &= \int d^3x (F^{0i,a} \partial_i c^a + F^a \dot{c}^a) \\ &= \int d^3x (\partial_i (F^{0i,a} c^a) + F^a \dot{c}^a) \\ &= \int d^3x F^a \dot{c}^a \end{aligned} \quad (5.21)$$

şeklinde yazılır. Q_{BRST} hesaplanırken yukarıdaki işlemde kısmi integrasyondan sonra Maxwell hareket denklemleri kullanılmış ve son basamakta yüzey terimleri atılmıştır. Eğer yardımcı ve hayalet alanların yaratma ve yok etme operatörleri cinsinden dekompozisyonu yapılır ve BRST yükü, yok etme operatörleri en sağda olacak şekilde normal sıralamaya tabi tutulursa,

$$Q_{BRST} = i \int dk [c^{(-)}(-k) F^{(+)}(k) - F^{(-)}(-k) c^{(+)}(k)] \quad (5.22)$$

formunda yazılabilir. Benzer biçimde hayalet yükü de

$$Q_c = \int d^3x f^{abc} \bar{c}^a c^b A_0^c \quad (5.23)$$

şeklindedir. Eşitlik (5.19)'daki

$$Q_c |\psi\rangle = 0 \quad (5.24)$$

şartı hatırlanırsa, fiziksel durumların hayalet sayılarının sıfır olması gerektiği görülür. Bu demektir ki, fiziksel durumlar eşit sayıda hayalet ve anti-hayalet parçacık içermelidir. Yani teorelin fiziksel durumları

$$|\psi\rangle = |A_\mu\rangle \otimes |c, \bar{c}\rangle \quad (5.25)$$

şeklinde gösterilirse, BRST yükünün

$$\begin{aligned} Q_{BRST} |\psi\rangle &= i \int dk [c^{(-)}(-k) F^{(+)}(k) - F^{(-)}(-k) c^{(+)}(k)] \times |A_\mu\rangle \otimes |c, \bar{c}\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

koşulunu sağlaması gerekir. Bu da ancak

$$c^{(+)}(k) |c, \bar{c}\rangle = 0 = F^{(+)}(k) |A_\mu\rangle \quad (5.27)$$

olması durumunda gerçekleşir. Yani fiziksel durumlar hiç hayalet parçacık içermemelidir:

$$|\psi\rangle = |A_\mu\rangle \otimes |0, 0\rangle = |A_\mu\rangle \quad (5.28)$$

ve

$$F^{(+)}(k) |\psi\rangle = (\partial_\mu A^{\mu(+)}(k)) |\psi\rangle = 0 \quad (5.29)$$

olmalıdır ki, bu da Abelyen durumda Gupta - Bleuler şartından başka bir şey değildir. Bu durum teorelin Abelyen olmaması halinde de sağlanır ve teorelin fiziksel durumlarının hayalet parçacık içermediği gösterilmiş olur.

Son olarak ayar sabitleme parametresinin fiziksel sonuçlarda görülemeyeceği ve hayalet alanların fiziksel dünyada serbest olarak gözlemlenemeyeceği gösterilebilir. Bunun için etkin Lagranjiyendeki bu ekstra terimlerin bir BRST değişimi olarak yazılabileceğinin gösterilmesi yeterli olacaktır. Gerçekten de dönüşüm parametresi $w = 1$ olarak alınarak

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{FPG} &= (\partial^\mu F^a) A_\mu^a + \frac{\xi}{2} F^a F^a + \bar{c}^a \partial^\mu (\mathcal{D}_\mu c)^a \\ &\quad \delta \left(-\partial^\mu \bar{c}^a A_\mu^a - \frac{\xi}{2} \bar{c}^a F^a \right) \\ &= \left[Q_{BRST}, \left(-\partial^\mu \bar{c}^a A_\mu^a - \frac{\xi}{2} \bar{c}^a F^a \right) \right]_+ \end{aligned} \quad (5.30)$$

olduğu gösterilebilir. Bu durumda, fiziksel bir sistem için $Q_{BRST} |\psi\rangle = 0$ olduğundan, Lag-

ranjiyene eklenen bu terimlerin

$$\begin{aligned}\langle\psi|(\mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{FPG})|\psi'\rangle &= -\langle\psi|\left[Q_{BRST}, \left(\partial^\mu \bar{c}^a A_\mu^a + \frac{\xi}{2} \bar{c}^a F^a\right)\right]_+|\psi'\rangle \\ &= 0\end{aligned}\quad (5.31)$$

denklemini sağladığı, yani teoremin matris elemanlarına bir katkısının olmadığı görülür. Artık, sistemin fiziksel matris elemanlarının ayar parametresi ξ 'den bağımsız olduğu gösterilebilir (dönüşüm parametresi $w = 1$ olarak alınmıştır):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} \langle 0|0\rangle^J &= \frac{\partial Z[J]}{\partial \xi} = \frac{i}{2} \langle 0|\int d^4x F^a F^a|0\rangle^J \\ &= -\frac{i}{2} \int d^4x \langle 0|\delta(\bar{c}^a F^a)|0\rangle^J \\ &= -\frac{i}{2} \int d^4x \langle 0|[Q_{BRST}, \bar{c}^a F^a]_+|0\rangle^J = 0.\end{aligned}\quad (5.32)$$

Son basamakta, fiziksel Hilbert uzayına ait vakumun BRST yükü tarafından yok edilmesi özelliği kullanılmıştır.

5.2. Ward (Slavnov - Taylor) Özdeşlikleri

Ayar kuramlarının BRST değişmezliği teoremin saçılma genlikleri arasında bazı ilişkileri ortaya çıkarır. Anılan ilişkiler, Ward özdeşlikleri veya Slavnov - Taylor özdeşlikleri olarak bilinir. Ayar kuramlarının renormalize edilebilirliği açısından önemli role sahip olan bu özdeşlikler yol integrali formalizmi çerçevesinde ele alınabilirler:

Kaynak terimleri ile beraber etkin Lagranjiyen

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{TOT} + J^{\mu,a} A_\mu^a + J^a F^a + i(\bar{\eta}^a c^a - \bar{c}^a \eta^a) + K^{\mu,a} (\mathcal{D}_\mu c)^a + K^a \left(-\frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c\right), \quad (5.33)$$

şeklinde yazılabilir. Burada J^μ ayar alanlarının, J^a yardımcı F^a alanının, $\bar{\eta}$ ve η sırasıyla hayalet ve anti hayalet alanların kaynak terimleri, K^a ve $K^{\mu,a}$ da kompozit operatörlerin kaynak terimleridir. Üreteç fonksiyoneli³, genel olarak tüm alanlar A ve tüm kaynaklar J ile gösterilmek üzere

$$Z[J] = e^{iW[J]} = N \int [dA] e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{eff}}, \quad (5.34)$$

olarak ifade edilebilir.

³Etkin Lagranjiyende BRST değişimlerine ait kompozit operatörlerin kaynak terimlerinin de bulunmasının nedeni aşağıda açıklanacaktır.

Alan operatörlerinin vakum beklenen değerleri Eşitlik (5.34)'ten

$$\begin{aligned}
\langle A_\mu^a \rangle &= \frac{\delta W}{\delta J^{\mu,a}}, & \langle F^a \rangle &= \frac{\delta W}{\delta J^a}, \\
\langle c^a \rangle &= -i \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}^a}, & \langle \bar{c}^a \rangle &= -i \frac{\delta W}{\delta \eta^a}, \\
\langle (\mathcal{D}_\mu c)^a \rangle &= \frac{\delta W}{\delta K^{\mu,a}}, & \left\langle \left(-\frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c \right) \right\rangle &= \frac{\delta W}{\delta K^a}.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

şeklinde elde edilebilir.

Kaynak terimlerin sabit olması durumunda etkin Lagranjiyenin BRST dönüşümü:

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_{eff} &= J^{\mu,a} A_\mu^a + J^a \delta F^a + i (\bar{\eta}^a \delta c^a - \delta \bar{c}^a \eta^a) \\
&= i w \int d^4 x \left[J^{\mu,a} (\mathcal{D}_\mu c)^a + i \left(\frac{1}{2} f^{abc} \bar{\eta} c^b c^c + F^a \eta^a \right) \right],
\end{aligned} \tag{5.36}$$

olur. BRST dönüşümleri altında üreteç fonksiyonelinin değişmez kalması gerektiğinden;

$$\begin{aligned}
\delta Z[J] = 0 &= N \int [dA] \left(i \int d^4 x \delta \mathcal{L}_{eff} \right) e^{i \int d^4 x \mathcal{L}_{eff}} \\
&= i w \int d^4 x \left[J^{\mu,a} \langle (\mathcal{D}_\mu c)^a \rangle + i \bar{\eta}^a \left\langle \left(-\frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c \right) \right\rangle + i \eta^a \langle F^a \rangle \right] \\
&= \int d^4 x \left[J^{\mu,a} \frac{\delta W}{\delta K^{\mu,a}} - i \bar{\eta}^a \frac{\delta W}{\delta K^a} + i \eta^a \frac{\delta W}{\delta J^a} \right],
\end{aligned} \tag{5.37}$$

elde edilir. Bu ifade, teoremin *bağlantılı Green fonksiyonlarından* türetilmiş ”*Master Denklemdir*”. Burada kompozit operatörlerin kaynaklarının gerekliliği açıkça görülmektedir.

Fiziksel perspektiften anlam taşıdıkları için, genellikle, teoremin 1PI verteksleri ile ilgilenilir. Bu verteks fonksiyonları, daha önce Eşitlik (4.23)'te gösterildiği üzere, bağlantılı Green fonksiyonlarının üreteç fonksiyonelinin Legendre dönüşümü ile gerçek vertekslerin üreteç fonksiyoneline geçilerek elde edilebilir:

$$\Gamma[A, K] = W[J, K] - \int d^4 x \left(J^{\mu,a} A_\mu^a + J^a F^a + i (\bar{\eta}^a c^a - \bar{c}^a \eta^a) \right). \tag{5.38}$$

Eşitlik (5.38)'den

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} &= -J^{\mu,a}, & \frac{\delta \Gamma}{\delta F^a} &= -J^a, \\
\frac{\delta \Gamma}{\delta c^a} &= i \bar{\eta}^a, & \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}^a} &= i \eta^a, \\
\frac{\delta \Gamma}{\delta K^{\mu,a}} &= \frac{\delta W}{\delta K^{\mu,a}}, & \frac{\delta \Gamma}{\delta K^a} &= \frac{\delta W}{\delta K^a},
\end{aligned} \tag{5.39}$$

tanımları kullanılarak, Eşitlik (5.37) ile tanımlanan "Master Denklemi"

$$\int d^4x \left[\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta W}{\delta K^{\mu,a}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta c^a} \frac{\delta W}{\delta K^a} - iF^a \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}^a} \right] = 0 \quad (5.40)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorinin BRST değişmezliğinin sonucu olan bu "Master Denklemi" ayar teorilerinin renormalize edilmesinde önemli bir role sahiptir: Örneğin, Eşitlik (5.40), momentum uzayında

$$\int d^4k \left[\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu^a(-k)} \frac{\delta W}{\delta K^{\mu,a}(k)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta c^a(-k)} \frac{\delta W}{\delta K^a(k)} - iF^a \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}^a(k)} \right] = 0 \quad (5.41)$$

formunda yazılır, $\frac{\delta^2}{\delta F^b(p)\delta c^c(-p)}$ türevi alınır ve alan değişkenleri sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta F^b(p)\delta A_\mu^a(-p)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c^c(-p)\delta K^{\mu,a}(p)} - \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c^c(-p)\delta \bar{c}^a(p)} = 0 \quad (5.42)$$

bulunur.

Bu ifade, F ve A_μ 'ları içeren karışık iki-nokta fonksiyonları ve hayalet fonksiyonlarının iki-nokta fonksiyonlarını içermektedir. Dolayısıyla sonuç olarak kuantum düzeltmelerinin Eşitlik 5.42'deki ifadeyi sağlaması gerekir. Bu bakımdan ayar teorilerinin BRST değişmezliği, bu teorilerin renormalize edilebilirliği ve ayar serbestliği açısından çok temel bir öneme sahiptir.

6.SONUÇ

Bu çalışmanın asıl amacı bağlı sistemler için geliştirilmiş kuantizasyon yöntemlerinden Dirac'ın kanonik kuantizasyon ve Feynman'ın yol integrali yöntemleriyle ayar alan kuramlarının kuantizasyonunun incelenmesidir.

Bu amaçla, ikinci bölümde ilk olarak Abelyen olmayan global simetriye sahip spinör alanların genel örneği üzerinden, bu simetriler yerleştirilerek ayar teorilerinin inşası ile başlandı. Yang - Mills teorisinin temel özellikleri tanıtıldı.

Üçüncü bölümde bağlı sistemler için Dirac'ın geliştirdiği kanonik kuantizasyon yöntemi özetlendi. Bu yöntemde Hamiltonyen, bağlar tarafından belirlenen indirgenmiş faz uzayında yazıldı. Bu indirgenmiş faz uzayında birincil bağlar için, bağ yüzeyinde zamanla değişmeler anlamına gelen, tutarlılık şartlarından ikincil bağlar ortaya çıktı. Bu algoritmanın ayar alanları için ikincil bağ koşullarının elde edilmesiyle sonlandığı ve bu ikincil bağ koşulunun Gauss yasası olduğu görüldü. Bağlar için Dirac tarafından geliştirilen diğer sınıflandırma çerçevesinde, birinci sınıf bağların Lagrange çarpanlarını belirlemek için kullanılamayacağı, ikinci sınıf bağların kuantizasyonda önemli yere sahip olduğu ve teori kuantize edilirken bu yeni bağlar için yeni bir cebirin tanımlanması gerektiği (Dirac parantezleri) anlaşıldı. Bu yöntem kullanılarak, Maxwell ve Yang - Mills teorileri kuantize edildi. Bağ koşulları için önerilen bu yeni sınıflandırma ayar kuramlarına uygulandığında sistemde momentumun zamansal bileşeninin sıfır olması ve Gauss yasası olarak ortaya çıkan bağların birinci sınıf olmalarından ötürü, sisteme bunları ikinci sınıf bağlara dönüştürecek olan ayar sabitleme terimleri (Coulomb ayarı) eklenerek, Dirac parantezleri teorideki ayar alanları ve onların eşlenik momentumları için yazıldı. Bu bölümde, ayrıca, birinci sınıf bağların ayar dönüşümlerinin jeneratörü olduğu Dirac'ın yöntemi kullanılarak gösterildi ve Kuantum Noether teoremi kapsamındaki karşılığı tartışıldı.

Dördüncü bölümde Feynman'ın yol integrali kuantizasyon metodu incelendi. Alanların vakum beklenen değerlerine eşit olan Green fonksiyonlarının üreteç fonksiyoneliinden nasıl elde edildiği, buradan iki nokta geçiş fonksiyonlarının (propagatörler) ve tek nokta etkileşimlerin Green fonksiyonlarının (verteks fonksiyonları) inşa yöntemleri çalışıldı. Ayar alanlarının bu yöntemle kuantizasyonu, Faddeev ve Popov'un geliştirdiği, ayar sabitleme yöntemi ile yapıldı. Bu yaklaşımda yol integraline ayar sabitleme koşulunu içeren delta fonksiyonunun yerleştirilmesi sonucu ortaya çıkan Faddeev - Popov determininantının bir etkin Lagranjiyen terimine dönüştürülebilmesi amacıyla teoriye fermiyonik skaler alanların (Faddeev - Popov hayaletleri) nasıl eklendiği incelendi. Bu yeni formda örnek olarak teorinin iki nokta geçiş fonksiyonları ve tek nokta etkileşim fonksiyonları (Feynman kuralları) elde edildi.

Son bölüm olan beşinci bölümde ise Faddeev - Popov yaklaşımının bir sonucu olarak teoride BRST simetrisi olarak adlandırılan kalıntı bir simetrinin ortaya çıktığı görüldü. Bu dönüşüm-

lerin Grassmann doğalarının bir sonucu olan $\delta^2 = 0$ karakterinden faydalanılarak, Faddeev - Popov hayaletlerinin fiziksel durumlarda ortaya çıkmayacakları gözlemlendi. Bunu yaparken BRST ve bozonik global bir simetri olan hayalet sayısı simetrisi için Noether yükleri yazılarak, bu yüklerin fiziksel sistemi betimleyen uzaylar üzerinde izdüşümünün olmadığı gözlemlendi. Son olarak yine bu bölümde teorinin BRST simetrisi kullanılarak, kuramdaki geçiş genliklerinin renormalize edilmesinde önemli bir yere sahip olan Master Denklemi [Ward (Slavnov - Taylor) özdeşlikleri] inşa edildi.

EK A.NOETHER TEOREMİ

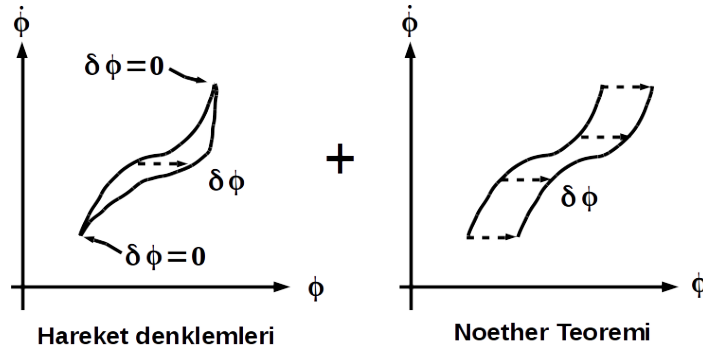
Doğadaki simetrilerin korunum yasaları ile birebir ilişkili olduğu çok eskiden beri bilinmektedir. Klasik mekanik bağlamında çok eskiden beri bilinen bu simetri ve korunum yasaları arasındaki ilişki 20. yy'ın başlarında Emmy Noether tarafından sistemli bir yapıya kavuşturulmuştur.

Herhangi bir fiziksel sistem üzerinde çalışılmaya başlanırken sistemin Lagranjiyeni bütün simetrileri içerecek şekilde inşa edilir. Dolayısıyla Lagranjiyen alan kuramı, eylemin, alanların (iç veya izospin dönüşümleri altında ya da) uzay-zaman ötelenmeleri ve Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalması prensibi üzerine kuruludur.

Genelleştirilmiş ϕ^a alanlarındaki birinci mertebe değişimlerin eylemde değişiklik yapmamasını öngören *en küçük eylem prensibi* çerçevesinde eylemin değişimi

$$\begin{aligned}\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L} &= \int d^4x \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^a} \delta \phi^a + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \delta \partial_\mu \phi^a = 0 \\ &= \int d^4x \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \right) \right] \delta \phi^a + \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \delta \phi^a \right) \\ &= 0\end{aligned}\quad (A.1)$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil A.1: Eylemin değişimi

Bu alan konfigürasyonları Euler - Lagrange denklemini sağlıyorsa Eşitlik A.1'de görülen ilk terim sıfır olacaktır. Eylemin değişmezliği için ikinci terimin de sıfır olması gerekliliği bir korunum yasası verir:

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \phi^a)} \delta \phi^a \right) = \partial_\mu j^\mu = \partial_0 j^0 + \partial_i j^i = 0. \quad (A.2)$$

Bu ifadede j^μ Noether akımıdır. Bu akımın zamansal bileşeninin hacim integrali ise,

$$Q = \int d^3x J^0 \quad (\text{A.3})$$

Noether yükünü tanımlar. Eşitlik (A.2)'deki süreklilik denkleminin hacim integrali alındığında:

$$\int d^3x \partial_0 j^0 + \int ds_i j^i = \frac{dQ}{dt} + \text{yüzey terimleri} = 0 \quad (\text{A.4})$$

bulunur.

Eğer yüzey terimleri sonsuzda yeteri kadar hızlı bir biçimde sıfıra gidiyorsa, Eşitlik (A.3)'teki Q yükü korunuyor demektir ve bu da bir korunum prensibi anlamına gelir:

$$\text{Simetri} \rightarrow \text{Korunan Akım} \rightarrow \text{Korunum Prensibi}$$

Alanlar kuantize edildiğinde, Noether yükü alanların dönüşümlerinin jeneratörleri olur ve Q Noether yükü olmak üzere, kuantum uzayında dönüşümler

$$\mathbb{U} \equiv e^{iQ} \quad (\text{A.5})$$

olarak tanımlanabilir. Bu üniter dönüşümler altında, Genelleştirilmiş bir ϕ alanı

$$\phi' \equiv \mathbb{U}^{-1} \phi \mathbb{U}$$

şeklinde dönüşür. Kuantumlanmış alanların beklenen değerlerinin dönüşümü klasik alanın dönüşümünün ile aynı olması beklenir. Bunu göstermek için ayar alanları örneğinden faydalanabilir. Kuantize edilmiş ayar alanları

$$(A_\mu^a)' \equiv \mathbb{U}^{-1} A_\mu^a \mathbb{U} = U A_\mu U^{-1} - (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (\text{A.6})$$

formunda dönüşür ¹.

Saf Yang - Mills Lagranjiyeni

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} \quad (\text{A.7})$$

¹Burada notasyon karmaşasından kaçınmak için kuantum ayar alanları betimlemek için de aynı A_μ^a gösterimi kullanılacaktır.

için sonsuzküçük ayar dönüşümlerinin Noether yükü

$$\begin{aligned}
\delta Q &= \int d^3x \delta j^0 = \int d^3x (F^{0\nu,a} \mathcal{D}_\nu^{ac} \delta \lambda^c) \\
&= \int d^3x (\mathcal{D}_\mu \Pi^\mu)^c \delta \lambda^c \\
&= \int d^3x G^c(x) \delta \lambda^c
\end{aligned} \tag{A.8}$$

şeklindedir. Sonsuzküçük değişimler için, Eşitlik (A.6)'un sol tarafı

$$\begin{aligned}
(A_\mu^a)' &= \mathbb{U}^{-1} A_\mu^a \mathbb{U} \simeq (\mathbb{I} - i\delta Q) A_\mu^a (\mathbb{I} + i\delta Q) \\
&\simeq A_\mu^a + i [A_\mu^a, \delta Q]
\end{aligned} \tag{A.9}$$

halini alır. Bu değişimin, daha önce Eşitlik (2.46)'de gösterilenle uyumlu olması gerekir. Öyleyse, ayar alanlarının sonsuzküçük değişimlerinin

$$\begin{aligned}
\delta A_\mu^a = i [A_\mu^a(x), \delta Q] &= i \left[A_\mu^a(\vec{x}), \int d^3y ((\mathcal{D}_\nu \Pi^\nu)^c(\vec{y})) \delta \lambda^b(\vec{y}) \right] \\
&= i \int d^3y [A_\mu^a(\vec{x}), \Pi_\nu^c(\vec{y})] (\mathcal{D}_{(y)}^\nu)^{bc} \delta \lambda^b(\vec{y}) \\
&= i \int d^3y [i\delta^{ac} \delta_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})] (\mathcal{D}_{(y)}^\nu)^{bc} \delta \lambda^b(\vec{y}) \\
\delta A_\mu^a(x) &= i [A_\mu^a(x), \delta Q] = -\mathcal{D}_\mu^{ab} \delta \lambda^b(x)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

olduğu görülebilir ki bu sonuç daha önce eşitlik (2.46) ile örtüşür.

EK B. GRASSMANN İNTEGRALLERİ

Antikomütatörleri ve kareleri sıfır olan sayılar, Grassmann sayıları olarak adlandırılır. Fermiyonik sistemler için Grassmann sayıları üzerinden integrallerin alınması gerekir. Grassmann integrallerinin c-sayılardan farklı bazı özellikleri vardır:

θ bir Grassmann değişken, c bir c-sayı olmak üzere, geliş güzel bir $\phi(\theta)$ Grassmann fonksiyonunun tüm uzay üzerinden integrali ötelemeler altında değişmez kalır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\theta \phi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \phi(\theta + c) . \quad (\text{B.1})$$

Bu değişmezliğin sonuçlarının incelenmesi için, örneğin $\phi(\theta)$ Grassmann fonksiyonunun Taylor serisine açıldığı durum ele alınabilir. Bu seride, $\theta^2 = 0$ olduğu için birinci kuvvetten sonraki terimler sıfır olacaktır:

$$\phi(\theta) = a + b\theta . \quad (\text{B.2})$$

Dolayısıyla $\phi(\theta)$ fonksiyonunun integrali, I_0 ve I_1 sırasıyla

$$\begin{aligned} I_0 &= \int d\theta \\ I_1 &= \int d\theta \theta \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \phi(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \phi(\theta + c) \\ aI_0 + bI_1 &= (a + bc) I_0 + bI_1 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik (B.1)'deki değişmezliğin sağlanabilmesi için, sırasıyla,

$$\begin{aligned} I_0 &= \int d\theta = 0 \\ I_1 &= \int d\theta \theta = 1 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

olması gerekir. Kolayca görülebileceği üzere, bir Grassmann değişken üzerinden integral, o değişken cinsinden türeve eşittir:

$$\int d\theta \longleftrightarrow \frac{d}{d\theta} . \quad (\text{B.6})$$

Grassmann integrallerinin önemli bir özelliği daha vardır: I_1 integrali ele alınarak c , bir c-sayı olmak üzere,

$$\theta = c \theta' \quad (\text{B.7})$$

dönüşümü yapıldığında

$$\int d\theta \theta = \int k d\theta' c\theta' = 1 \quad (\text{B.8})$$

olması gerektiğinden ve Jacobian

$$J = \frac{d\theta}{d\theta'} = c \quad (\text{B.9})$$

şeklinde tanımlandığından $k = J^{-1}$ olmalıdır. Bu durumda I_1 integrali

$$I_1 = \int d\theta' J^{-1} c \theta' = 1 \quad (\text{B.10})$$

formunda yazılır. Yani, Grassmann integrallerinde değişken değişimi yapıldığında, Jacobian c-sayılarından farklı olarak integrantta paydaya yazılır.

Bu sonuç, değişken sayısının birden daha fazla olduğu durum için genelleştirilebilir: Şöyle ki,

$$\theta_i = c_{ij} \xi_j \quad i, j = 1, \dots, n \quad (\text{B.11})$$

değişken değişimi yapıldığında, Jacobian

$$J_{ij} = \frac{d\theta_i}{d\xi_j} \quad (\text{B.12})$$

şeklinde tanımlanır. Eşitlik B.11'deki değişken değişimi

$$I = \prod_i \int d\theta_i \theta_i = 1 \quad (\text{B.13})$$

integraline uygulandığında, Eşitlik B.13

$$I = \prod_i \int (det J_{ij})^{-1} d\xi_i c_{ij} \xi_j = 1 \quad (\text{B.14})$$

şeklinde dönüşür.

Eşitlik (B.14)'ün ispatı için, $n = 2$ durumu ele alınabilir:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= c_{11} \xi_1 + c_{12} \xi_2 \\ \theta_2 &= c_{21} \xi_1 + c_{22} \xi_2 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

olmak üzere

$$I = \int d\theta_1 \theta_1 d\theta_2 \theta_2 = 1 \quad (\text{B.16})$$

integrali

$$\begin{aligned} I &= \int d\theta_1 (c_{11} \xi_1 + c_{12} \xi_2) d\theta_2 (c_{21} \xi_1 + c_{22} \xi_2) \\ &= \int K d\xi_1 d\xi_2 (c_{11} c_{22} \xi_1 \xi_2 - c_{12} c_{21} \xi_2 \xi_1) = 1 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda, Grassmann değişkenlerinin anti-komütasyon bağıntılarından, Eşitlik (B.5)'teki I_1 sonucundan, ve Jacobian'ın Eşitlik (B.12)'deki tanımından faydalanılarak, I integrali

$$\begin{aligned} I &= K (-c_{11} c_{22} + c_{12} c_{21}) = -1 \\ &= K (\det J_{ij}) = 1 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

olarak bulunur ve Eşitlik B.16'nın sağlanması için

$$K = \frac{1}{(\det J_{ij})} \quad (\text{B.19})$$

olması gerektiği görülebilir.

Bu sonuçlar, yol integrali bağlamında özel bir önem sahip N tane Grassmann değişkenin olduğu Gauss integrali örneği üzerinden genelleştirilebilir:

$$I(A) = \int \prod_{i=1}^N d\theta_i d\bar{\theta}_i \exp \left(\sum_{i,j=1}^N \bar{\theta}_i A_{ij} \theta_j \right). \quad (\text{B.20})$$

Burada θ_i ve $\bar{\theta}_i$, N iki farklı Grassmann değişken kümesidir. Bu integralin hesaplanabilmesi için exponansiyel terim kuvvet serisine açılır.

Bu hesaplamayı kolaylaştırmak için, $N = 2$ durumu ele alınarak daha yüksek mertebeden durumlar için genelleştirilebilir:

$$I(A) = \int \prod_{i=1}^2 d\theta_i d\bar{\theta}_i \left\{ 1 + \underbrace{(\bar{\theta}_i A_{ij} \theta_j)}_{(I)} + \frac{1}{2!} \underbrace{(\bar{\theta}_i A_{ij} \theta_j)^2}_{(II)} \right\}. \quad (\text{B.21})$$

Herhangi bir sabitin Grassmann integralinin sıfır olmasından kaynaklı olarak ilk terim sıfırdır. Diğer terimler sırası ile ele alındığında, kuvvet serisindeki birinci mertebeden terimin integrali

$$\int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 d\bar{\theta}_2 d\theta_2 (\bar{\theta}_1 A_{11} \theta_1 + \bar{\theta}_2 A_{21} \theta_1 + \bar{\theta}_1 A_{12} \theta_2 + \bar{\theta}_2 A_{22} \theta_2) = 0 \quad (\text{B.22})$$

bulunur.

İkinci terimin integrali hesaplanırken, $\theta_i^2 = \bar{\theta}_i^2 = 0$ durumu dikkate alındığında, sadece belirli terimlerden katkı gelecektir. Bu durumda ikinci terimin integrali

$$\begin{aligned}
& 2 \int d\theta_1 d\bar{\theta}_1 d\bar{\theta}_2 d\theta_2 (\bar{\theta}_1 A_{11} \theta_1 \bar{\theta}_2 A_{22} \theta_2 + \bar{\theta}_2 A_{21} \theta_1 \bar{\theta}_1 A_{12} \theta_2) \\
&= 2 (-A_{11}A_{22} + A_{12}A_{21}) \\
&= -2 \det A
\end{aligned} \tag{B.23}$$

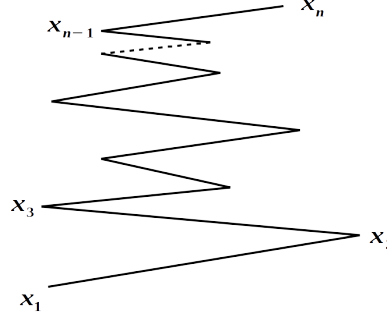
şeklinde bulunur. Bu durumda, tüm terimlerden gelen nihai katkı

$$I(A) = -\det A \tag{B.24}$$

olarak hesaplanır. Bu sonuç, c-sayılar cinsinden alınan Gauss integrallerinden farklı bir sonuçtur ve alanların yol integrali kuantizasyonunda önemli bir rol oynar.

EK C.YOL İNTEGRALİNİN İNŞASI VE GEÇİŞ GENLİKLERİ

Yol integrali, esas olarak konum operatörünün Heisenberg resmindeki iki farklı öz durumunun arasındaki geçiş olasılığı olduğu için, bu olasılığı hesaplanırken önce bu iki zaman arasındaki uzay aralığının sonsuzküçük aralıklara bölünmesi ve bu sonsuzküçük aralıklar boyunca geçiş genliğinin hesaplanması gerekmektedir (Bkz. Şekil C.1):



Şekil C.1: Yol integralini hesaplanabilmesi için, yol öncelikle çok sayıdaki ara noktalar üzerinden kesikli hale getirilir.

$$\begin{aligned} \langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle &= \langle x_N | e^{-iH(t_N - t_1)} | x_1 \rangle = \int dx_{N-1} \dots dx_2 \langle x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \\ &\times \langle x_{N-1}, t_{N-1} | \dots | x_2, t_2 \rangle \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle. \end{aligned} \quad (C.1)$$

Geçiş genliğinin Eşitlik (C.1)'de verilen ifadesinde, bir ara nokta integrali, $\delta t = t_i - t_{i-1}$ olmak üzere, tamlık ve normalizasyon koşulları¹ da kullanılarak,

$$\begin{aligned} \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle &= \langle x_2 | e^{-iH(x, \partial_x) \delta t} | x_1 \rangle = \int dp \langle x_2 | p \rangle e^{-iH(x, \partial_x) \delta t} \langle p | x_1 \rangle \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{-ipx_2} e^{-iH(x, \partial_x) \delta t} e^{ipx_1} = \int \frac{dp}{2\pi} e^{-iH(x, p) \delta t} e^{ip(x_1 - x_2)} \end{aligned} \quad (C.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada q-sayıdan c-sayıya geçişin $H(x, \partial_x) \leftrightarrow H(x, p)$ şeklinde yapıldığına dikkat çekmek gerekir. İnfinitesimal aralık için,

$$\dot{x} \sim \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{(x_1 - x_2)}{(t_2 - t_1)} \quad (C.3)$$

¹ Konum ve momentum öz vektörlerinin normalizasyonları şöyle yapılmıştır:

$$\begin{aligned} I &= \int dx |x\rangle \langle x|, & \langle x | y \rangle &= \delta(x - y), \\ I &= \int dp |p\rangle \langle p|, & \langle p | x \rangle &= \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

olarak tanımlandığından, Eşitlik (C.2)'deki ifade

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{i[p\dot{x} - H(x,p)]\delta t} \quad (C.4)$$

formunda yazılabilir. Dolayısıyla $N \rightarrow \infty$ limitinde tüm ara noktalar üzerinden toplam sürekli hale gelir ve geçiş olasılık genliği

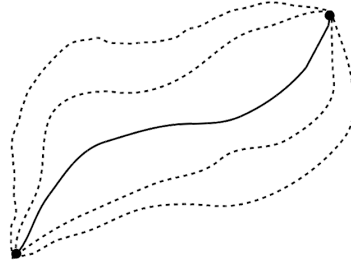
$$\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle = \int [dx] [dp] \exp \left\{ i \int_{t_1}^{t_N} dt [p\dot{x} - H(x, p)] \right\} \quad (C.5)$$

olarak elde edilir.

$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ özel formundaki Hamiltonyenler için, Eşitlik (C.5)'teki genel formdan Feynman formuna kolayca geçilebilir ve

$$\langle x_N, t_N | x_1, t_1 \rangle = \int [dx] \exp \left\{ i \int_{t_1}^{t_N} dt L(x, \dot{x}) \right\} = \int [dx] e^{iS} \quad (C.6)$$

olduğu gösterilmiş olur (Bkz. Şekil C.2)



Şekil C.2: Yol integrali, konfigürasyon uzayında iki noktayı birleştiren tüm olası yollar üzerinden toplam içerir.

Son olarak, *zaman sıralama operatörünün* propagatörde nasıl yer aldığı incelenebilir: Bunun için, $X_j(t_j)$ ve $X_k(t_k)$ operatörlerinin çarpımlarının, $t_j > t_k$ için, $|x_1, t_1\rangle$ başlangıç durumu ile $\langle x_n, t_n|$ son durumu arasında sandviçlenmesiyle elde edilen geçiş ifadesi

$$\begin{aligned} \langle x_n, t_n | X_j(t_j) X_k(t_k) | x_1, t_1 \rangle &= \int dx_{n-1} \dots dx_{j+1} \dots dx_{k+1} \dots dx_2 \\ &\times \langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle \langle x_{n-1}, t_{n-1} | \\ &\dots | x_{j+1}, t_{j+1} \rangle \langle x_{j+1}, t_{j+1} | x_j, t_j \rangle x_j(t_j) \dots \\ &\dots | x_{k+1}, t_{k+1} \rangle \langle x_{k+1}, t_{k+1} | x_k, t_k \rangle x_k(t_k) \\ &\dots | x_2, t_2 \rangle \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \end{aligned} \quad (C.7)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer Eşitlik (C.6)'da $n \rightarrow \infty$ limiti alınırsa, bu ifade

$$\langle x_n, t_n | X_j(t_j) X_k(t_k) | x_1, t_1 \rangle = \int [dx] x_j(t_j) x_k(t_k) \exp \left\{ i \int_{t_1}^{t_n} dt L(x, \dot{x}) \right\} \quad (C.8)$$

halini alır. Eğer zaman sıralaması değiştirilirse, Eşitlik (C.8)'in sol tarafında operatörlerin sırası değişirken, eşitliğin sağ tarafında c-sayıların sıralamasının önemi olmayacaktır. Yani, zaman sıralaması operatör formalizminde operatörlerin sıralaması açısından önemliyen, yol integrali formalizminde c-sayılarla hesap yapıldığından, bu sıralama bir değişiklik yaratmayacaktır. Bunun nedeni, yol integralinde uzay-zamanın eş dilimlere bölünmesiyle bu sıralamanın zaten ilk aşamada yapılmış olmasıdır.

Burada, ileriki tartışmalar için gerekli iki tanımı vermekte fayda vardır: Birincisi, kuantum mekaniksel bir O niceliğinin x_j noktasından x_i noktasına geçiş genliğini veren, $\langle O \rangle$ integrali:

$$\langle O \rangle \equiv N \int [dX] O(x) \exp \left(- \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i D_{ij} x_j \right), \quad (C.9)$$

diğeryse, bu geçiş genliklerinin üreteç fonksiyoneli:

$$I(D, J) \equiv \int \prod_{i=1}^n dx_i \exp \left(- \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i D_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n J_i x_i \right). \quad (C.10)$$

Burada normalizasyon katsayısı N ,

$$I(D, 0) = N^{-1} \quad (C.11)$$

ifadesi ile belirlenebilir.

Bu tanımlamalardaki amaç, $\langle O \rangle$ için genel bir ifade bulup daha sonra $n \rightarrow \infty$ limitinde sonsuz serbestlik derecesine geçmektir. Bu yolda, ilk önce $I(D, 0)$ ifadesinin hesaplanması için D matrisini diagonal hale getiren

$$x'_i = S_{ij} x_j \quad (C.12)$$

gibi bir *benzerlik* dönüşümü yapılabilir:

$$\begin{aligned} I(D, J) &= \int \prod_{i=1}^n dx_i \exp \left(- \sum_{i,j,k,l=1}^n \frac{1}{2} x_i S_{ik}^{-1} S_{ik} D_{ij} S_{jl}^{-1} S_{jl} x_j + \sum_{i,k=1}^n J_i S_{ik}^{-1} S_{ik} x_i \right) \\ &= \int \prod_{k=1}^n dx'_k \exp \left(- \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{2} x'_k D'_{kl} x'_l + \sum_{k=1}^n J'_k x'_k \right). \end{aligned} \quad (C.13)$$

D matrisi diagonal forma getirildiğinde, diagonal elemanlar D matrisinin özdeğerleri oldu-

ğundan, integrale katkı sadece bu özdeğerlerinden gelir. Dolayısıyla $D'_{ii} = d_i$ olmak üzere, her bir x'_i üzerinden Gauss integrali alındığında

$$\begin{aligned} I(D, J) &= \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{(2\pi)}{d_i}} \exp \left(\sum_{i,k=1}^n \frac{1}{2} J_i (D^{-1})_{ik} J_k \right) \\ &= \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det D}} \exp \left(\sum_{i,k=1}^n \frac{1}{2} J_i (D^{-1})_{ik} J_k \right) \end{aligned} \quad (C.14)$$

elde edilir. Bu ifadeden görüldüğü üzere, integralin alınmasıyla paydaya D matrisinin determinantının kare kökü gelir².

Daha önce de belirtildiği gibi amaç, Eşitlik (C.9)'dakine benzer bir geçiş genliği hesaplamaktır. Burada normalizasyon katsayısı

$$N^{-1} = I(D, 0) = (2\pi)^{n/2} (\det D)^{-1/2} \quad (C.15)$$

olmak üzere $x_1 x_2 \cdots x_n$ gibi bir çarpımın geçiş genliği

$$\langle x_1 x_2 \cdots x_n \rangle \equiv N \int \prod_{i=1}^n dx_i x_1 x_2 \cdots x_n \exp \left(- \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i D_{ij} x_j \right) \quad (C.16)$$

şeklinde dir. Bu ifade; üretç fonksiyoneli, $I(D, J)$ 'nin J 'ye göre sırayla türevlerinin alınıp daha sonra J 'nin sıfıra eşitlenmesiyle de üretilebilir.

Her bir türev, integranda bir x_i getireceği için Eşitlik (C.16)'daki ortalama

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 \cdots x_n \rangle &= \prod_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial J_i} I(D, J) \Big|_{J=0} \\ &= \sum_{\text{eşleşmeler}} D_{k_1 k_2}^{-1} \cdots D_{k_{n-1} k_n}^{-1} \end{aligned} \quad (C.17)$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu ifade Gauss integrallerinin özelliği gereği tek sayıda x için sıfıra eşit olacaktır. Ancak, iki ve daha fazla çift sayıdaki x için ise sıfırdan farklı sonuç verecektir. Örneğin, iki x için:

$$\langle x_i x_j \rangle = (D^{-1})_{ij} \quad (C.18)$$

sonucunu verirken, dört x için ise sonuç:

$$\langle x_i x_j x_k x_l \rangle = \left[(D^{-1})_{ij} (D^{-1})_{kl} + (D^{-1})_{ik} (D^{-1})_{jl} + (D^{-1})_{il} (D^{-1})_{jk} \right] \quad (C.19)$$

şeklinde olur. Bu indislerin eşleşmeleri, temelinde **operatörlerin normal sıralaması** yer alan Wick Teoremi'ne göre yapılmıştır.

²Determinant benzerlik dönüşümleri altında değişmezdir.

EK D.POISSON PARANTEZLERİNİN DAĞILMA ÖZELLİĞİ

Mekanik sistemler için iki dinamik değişkenin Poisson parantezi

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (D.1)$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre

$$\begin{aligned} \{F, GH\} &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial (GH)}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial (GH)}{\partial q_i} \\ &= \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} H + G \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} H - G \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right] H + G \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right] \\ &= \{F, G\} H + G \{F, H\} \end{aligned} \quad (D.2)$$

özelliliği sağlanır.

Eş zamanlı Poisson parantezlerinin fonksiyonel genelleştirilmesi

$$\{F(x), G(y)\}_{x_0=y_0} = \int d^3z \frac{\delta F(x_0, \vec{x})}{\delta \phi_i(x_0, \vec{z})} \frac{\delta G(x_0, \vec{y})}{\delta \Pi_i(x_0, \vec{z})} - \frac{\delta F(x_0, \vec{x})}{\delta \Pi_i(x_0, \vec{z})} \frac{\delta G(x_0, \vec{y})}{\delta \phi_i(x_0, \vec{z})} \quad (D.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Mekanik durumda söz konusu olduğu gibi, açık biçimde

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y) H(y)\} &= \int d^3z \frac{\delta F(x_0, \vec{x})}{\delta \phi_i(x_0, \vec{z})} \frac{\delta G(x_0, \vec{y})}{\delta \Pi_i(x_0, \vec{z})} H(x_0, \vec{y}) \\ &\quad + \int d^3z G(x_0, \vec{y}) \frac{\delta F(x_0, \vec{x})}{\delta \phi_i(x_0, \vec{z})} \frac{\delta H(x_0, \vec{y})}{\delta \Pi_i(x_0, \vec{z})} \\ &\quad - \int d^3z \frac{\delta F(x_0, \vec{x})}{\delta \Pi_i(x_0, \vec{z})} \frac{\delta G(x_0, \vec{y})}{\delta \phi_i(x_0, \vec{z})} H(x_0, \vec{y}) \\ &\quad - \int d^3z G(x_0, \vec{y}) \frac{\delta F(x_0, \vec{x})}{\delta \Pi_i(x_0, \vec{z})} \frac{\delta H(x_0, \vec{y})}{\delta \phi_i(x_0, \vec{z})} \end{aligned} \quad (D.4)$$

şeklinde ifade edilen Poisson parantezlerinin fonksiyonel durum için dağılma özelliği de

$$F(x), G(y) H(y) = \{F(x), G(y)\} H(y) + G(y) \{F(x), H(y)\} \quad (D.5)$$

olarak elde edilir.

KAYNAKLAR

- [1] Weyl, H., *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 87-88, S. Hirzel, Leipzig, **1928** (*Theory of Groups and Quantum Mechanics*, translated by H. P. Robertson, 100-101, New York, **1950**).
- [2] London, F., Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl, *Zeitschrift für Physik*, 42, 375-389, **1927**.
- [3] Fock, V., Geometrisierung der Diracschen Theorie des Electrons, *Zeitschrift für Physik*, 57, 261-277, **1929b**.
- [4] Yang, C.N. and Mills, R.L., Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance, *Physical Review*, 96 191-195, **1954**.
- [5] Dirac, P.A.M., *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva Univesity Publications, New York, **1964**.
- [6] Anderson, J.L., and Bergmann, P.G., Constraints in Covariant Field Theories, *Physical Review*, 83, 1018-1025, **1951**.
- [7] Faddeev, L.D. and Jackiw, R.W., Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems, *Physical Review Letters*, 60 , 1692, **1988**.
- [8] Faddeev, L.D., Popov, V.N., Feynman diagrams for the Yang-Mills field, *Physics Letters*, 25B, 29-30, **1967**.
- [9] 'tHooft, G. ,Renormalization of massless Yang-Mills Fields, *Nuclear Physics*, B33, 173-199, **1971**
- [10] Slavnov, A. A., Ward identities in gauge theories, *Theoretical and Mathematical Physics*, 10, 99, **1972**.
- [11] Taylor, J. C., Ward Identities and charge renormalization of the Yang-Mills field, *Nuclear Physics*, B33, 436 **1971**.
- [12] Becchi, C. and Rouet, A. and Stora, R., Renormalization of gauge theories, *Physical Letters*, B52, 344, **1974**.
- [13] Becchi, C. and Rouet, A. and Stora, R., Renormalization of gauge theories, *Annals of Physics*, 98, 287-321, **1976**.
- [14] Tyutin, I.V., Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism, *arXiv:0812.0580* , **2008**.

- [15] Noether, E., Invariant Variation Problems, *Göttingen Nachrichten* 1918, 235-257, **1918**; (English translation by Tavel, M.A. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1, 186-207, **1971**).
- [16] Abers, E.S. and Lee, B.W., *Gauge Theories*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, **1973**.
- [17] Cheng, T., Li, L., *Gauge theory of elementary particle physics*, Clarendon Press, Oxford, **1993**
- [18] Das, A., *Field Theory A Path Integral Approach*, Second Edition, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore **2006**.
- [19] Das, A., *Lectures on Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, **2008**.
- [20] Ghiotti, M. Gauge fixing and BRST formalism in non-Abelian Gauge theories, *arXiv:0712.0876*, **2007**.
- [21] Kaku, M., *Quantum Field Theory A Modern Introduction*, Oxford University Press, Oxford, **1993**
- [22] Pak, N.K., Introduction to Instantons in Yang-Mills Theory, *ICTP Lecture Notes*, IC/80/17, Trieste, Italy, **1980**.
- [23] Pak, N.K., *Quantum Field Theory Lecture Notes*, **2014-2015**.
- [24] Pak, N.K., *Yoğunlaştırılmış Kuantum Ayar Alan Teorisi Atölye Çalışması Notları*, Hacettepe Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümü, Mart-Haziran, **2014**
- [25] Turan, İ., The Faddeev - Jackiw Quantization of the U(1) Gauged SU(2) WZW Model, Master Thesis, The Graduate School of Natural and Applied Sciences of the METU, Ankara, **1999**.
- [26] Zee, A., *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, New Jersey, **2003**.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı: Mehmet Kemal Gümüş

Doğum Tarihi: 24.01.1988, Kelkit

Doğum Yeri: Kelkit/GÜMÜŞHANE

E-posta: mkgumus@hacettepe.edu.tr

Adresi: Hacettepe Üniversitesi Beytepe Kampüsü Fizik Mühendisliği Bölümü 06800 Çankaya/ANKARA

Eğitim

Lise: Yahya Kemal Beyatlı Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi, Yenimahalle/ANKARA (2001 - 2005)

Lisans: Hacettepe Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümü (2005 - 2011)

Yüksek Lisans: Hacettepe Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümü (2012 -)

Yabancı Dil ve Düzeyi:

İngilizce (İyi)

İş Deneyimi:

Araştırma Görevlisi, Hacettepe Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Bölümü (2012 -)

Deneyim Alanları:

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi:

Tezden Üretilmiş Yayınlar:

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar:

Ankara Yüksek Enerji Fiziği (AYEF) Çalıştayı, Sözlü Sunum, (12-14 Şubat 2015)

İstanbul Yüksek Enerji Fiziği (YEFİST) Çalıştayı, Sözlü Sunum, (18-19 Nisan 2015)