

**MATEMATİKSEL MODELLERLE
TEOREM İSPATLARININ İLKÖĞRETİM
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ ÖĞRENCİLERİNİN İSPAT
YAPABİLME BECERİLERİNE, İSPATLA İLGİLİ GÖRÜŞLERİNE
VE AKADEMİK BAŞARILARINA ETKİSİ**

Kübra YILMAZ

**Yüksek Lisans Tezi
İlköğretim Anabilim Dalı
Matematik Eğitimi Bilim Dalı
Doç. Dr. Alper ÇİLTAŞ
2015**

(Her Hakkı Saklıdır)

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MATEMATİKSEL MODELLERLE TEOREM İSPATLARININ
İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ ÖĞRENCİLERİNİN
İSPAT YAPABİLME BECERİLERİNE, İSPATLA İLGİLİ
GÖRÜŞLERİNE VE AKADEMİK BAŞARILARINA ETKİSİ

(The Effect of Theorem Proofs With Mathematical Models on Prospective
Primary Mathematics Teaching Students' Skills in and Views on Proofs and
Academic Achievement)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra YILMAZ

Danışman: Doç. Dr. Alper ÇİLTAŞ

ERZURUM

Temmuz, 2015

KABUL VE ONAY TUTANAĞI

Doç. Dr. Alper ÇİLTAŞ danışmanlığında, Kübra YILMAZ tarafından hazırlanan “Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının İlköğretim Matematik Öğretmenliği Öğrencilerinin İspat Yapabilme Becerilerine, İspatla İlgili Görüşlerine ve Akademik Başarılarına Etkisi” başlıklı çalışma 07 /07/ 2015 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından İlköğretim Ana Bilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ahmet İSİK

İmza:

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Alper ÇİLTAŞ

İmza:

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Fethi BAŞ

İmza:

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.. / .. /

Prof. Dr. H. Ahmet KIRKKILIÇ

Enstitü Müdürü

TEZ ETİK VE BİLDİRİM FORMU

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının İlköğretim Matematik Öğretmenliği Öğrencilerinin İspat Yapabilme Becerilerine, İspatla İlgili Görüşlerine ve Akademik Başarılarına Etkisi” başlıklı çalışmamın, tarafımdan, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden olduğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve onurumla doğrularım.

Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

09 / 07 / 2015

(İmza)
K. YILMAZ

Ad Soyad: Kübra YILMAZ

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİKSEL MODELLERLE TEOREM İSPATLARININ İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ ÖĞRENCİLERİNİN İSPAT YAPABİLME BECERİLERİNE, İSPATLA İLGİLİ GÖRÜŞLERİNE VE AKADEMİK BAŞARILARINA ETKİSİ

Kübra YILMAZ

2015, 157 sayfa

Bu araştırmada, matematiksel modellerle teorem ispatlarının öğrencilerin ispat yapabilme becerilerine etkisi ile ispata yönelik görüşlerindeki ve akademik başarılarındaki değişimin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla, 2014-2015 eğitim-öğretim yılı, Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde öğrenim görmekte olan 45 ikinci sınıf öğrencisi ile çalışılma yürütülmüştür. Çalışmada karma araştırma yaklaşımından paralel yöntem kullanılmış, nitel ve nicel veriler eş zamanlı olarak birlikte toplanmıştır. Araştırmanın nitel boyutunda durum çalışması (case study), nicel boyutunda da zayıf deneysel desen olan tek grup ön test-son test modeli kullanılmıştır. Çalışmanın verileri, Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi, Matematiksel İspat Yapma İle İlgili Görüş Anketi ve Yarı Yapılandırılmış Mülakatlarla toplanmıştır. Verilerin analizinde yüzde ve frekans tablolarından, betimsel analizden ve SPSS paket programından yararlanılmıştır. Araştırma sürecine ilk olarak öğrencilerin ispatla ilgili görüşlerini ve ispat yapabilme becerilerini belirlemek için Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi ile Matematiksel İspat Yapma İle İlgili Görüş Anketi ön test olarak uygulanmıştır. Bu aşamadan sonra üç hafta boyunca matematiksel modeller yardımı ile teorem ispatları yapılmış ve veri toplama araçları son test olarak uygulanmıştır. Elde edilen veriler ışığında seçilen 11 öğrenci ile yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır.

Çalışmanın verilerinin analizi sonucunda ön testte öğrencilerin ispat yapmaya karşı ön yargılı oldukları, ispattan korktukları, ispat yapmayı sevmedikleri, ispat yapmayı bilmedikleri ve ispatı zaman kaybı olarak düşündükleri görülmüştür. Son testte ise öğrenciler matematiksel modellerden yola çıkarak teorem ispatlarını daha kolay yapabilmiş ve bu sayede ispatı yapmaya karşı olumlu bir tutum sergilemişlerdir.

Matematiksel modeller kullanılarak yapılan ispatların daha kalıcı olduğu öğrenciler tarafından belirtilmiş olup modeller sayesinde ispata karşı daha olumlu yaklaşıkları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin ispat yapabilme becerilerinin ve akademik başarılarının da arttığı gözlenmiş, öğrencilerin matematiksel modeller ile ispat yapmaya alıştıkları, bu sayede ispat yapmayı benimsedikleri sonucu çıkarılmıştır. Matematik öğretiminde mantıklı bir model seçmek, öğrencinin daha farklı düşünmesine, anlatılan konuyu içselleştirmesine ve kavramla ilgili bir dizi anlam oluşturmaya olanak sağlayacaktır. Teorem ispatlarında da matematiksel modellerin kullanımı en başta teoremin ifadesini anlamaya yardımcı olacağından ispatlar yapılırken matematiksel modellerin kullanılması önerilmektedir. Matematiksel ispat yaparken modellerden faydalanma üzerine yapılan çalışmaların az olduğu görülmekte olup bu konu üzerine daha fazla çalışma yapılması da önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel ispat, teorem, matematiksel model, ilköğretim matematik öğrencileri

ABSTRACT

MASTER'S THESIS

THE EFFECT OF THEOREM PROOFS WITH MATHEMATICAL MODELS ON PROSPECTIVE PRIMARY MATHEMATICS TEACHING STUDENTS' SKILLS IN AND VIEWS ON PROOFS AND ACADEMIC ACHIEVEMENT

Kubra YILMAZ

2015, 157 pages

The purpose of this study is to identify the effect of theorem proofs with mathematical models on students' skills in and views on proofs and academic achievement. The sample was comprised of 45 sophomore students of elementary school mathematics teaching at Ataturk University's Kazim Karabekir Faculty of Education during the 2014-2015 academic year. This is a parallel study with mixed research design, and qualitative and quantitative data were collected simultaneously. The qualitative aspect was based on a case study. The quantitative aspect involved a weak experimental design: a single-group pretest/posttest design. The data were collected using the Mathematical Skills and Knowledge Test, the Views on Mathematical Proofs Survey and semi-structured interviews. The data were analyzed using percentages and frequency tables, descriptive analysis and SPSS. First, the Mathematical Skills and Knowledge Test and the Views on Mathematical Proofs Survey were administered to the participants as a pretest. Then, theorem proofs with mathematical models were done for three weeks, and the data collection instruments were administered as a posttest. Finally, semi-structured interviews were conducted with 11 students selected in the light of the emerging data.

The results of the pretest showed that the students were biased against proofs, that they were hesitant about proofs, that they neither liked nor knew about proofs and that they considered proofs to be a waste of time. The results of the posttest revealed that the students found it easier to prove theorems with mathematical models and developed a positive attitude towards proofs. The students reported that proofs based on mathematical models were more permanent. In addition, the students' skills in proofs and academic achievement improved. The students internalized proofs with mathematical models. Choosing logical models in mathematics education will enable

students to think in a different way, to internalize them and to generate a series of meanings. Since the use of mathematical models for theorem proofs will, above all, help students understand the expression of the theorem, mathematical models should be used for teaching students about proofs. There is little research on the use of models for mathematical proofs and more studies of the topic should be conducted.

Keywords: mathematical proofs, theorems, mathematical models, students of elementary school mathematics teaching

ÖN SÖZ

Tez konumu seçmemde ve tezin yazımının her aşamasında bana yardımcı olan, rehberlik eden, beni yüreklendiren, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, ihtiyacım olan tüm zamanlarda yanımda olan ve öğrencisi olmaktan onur duyduğum danışmanım Doç. Dr. Alper ÇİLTAS’a en derin saygılarımla teşekkür ediyorum.

Yüksek lisans eğitimim aşamasında dersleriyle, bilgi ve görüşleriyle bizleri aydınlatan ve bizlere yol gösteren Prof. Dr. Ahmet IŞIK, Prof. Dr. Abdullah KAPLAN, Yrd. Doç. Dr. Mustafa ALBAYRAK, Yrd. Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN ve Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN hocalarıma da teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca lisans eğitimimde çok kaliteli bir eğitim alma şerefine erişmemizi sağlayan Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümündeki bütün hocalarıma da teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim süresince sağladığı maddi desteklerden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu’na [TÜBİTAK] en içten duygularıyla teşekkürlerimi sunarım.

Ve son olarak bütün eğitim hayatım boyunca bana destek olan, her zaman yanımda olan aileme ve yine tez yazım aşaması sırasında beni bir an bile yalnız bırakmayan, bunaldığım zamanlarda bana destek olan en değerli dostlarım Kübra SEFEROĞLU ve Esra ERDOĞAN’a hayatımda oldukları için çok teşekkür ediyorum.

Erzurum – 2015

Kübra YILMAZ

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY TUTANAĞI	i
TEZ ETİK VE BİLDİRİM FORMU	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ	vii
TABLolar DİZİNİ	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xii

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ	1
1.1. Problem Durumu.....	2
1.1.1. Problem Cümlesi	6
1.1.2. Alt Problemler	6
1.2. Çalışmanın Amacı ve Önemi	6
1.3. Varsayımlar	8
1.4. Sınırlılıklar	8
1.5. Tanımlar	8

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR.....	10
2.1. Kuramsal Çerçeve	10
2.1.1. İspat ve Matematiksel İspat	10
2.1.2. Matematikte İspatın Önemi	12
2.1.3. Matematiksel İspat Yöntemleri.....	13
2.1.4. Model ve Matematiksel Model.....	18
2.1.5. Modellerin Sınıflandırılması.....	23
2.1.6. Modellerin Faydaları	23
2.1.7. Matematiksel İspat ile Matematiksel Modeller Arasındaki İlişki.....	25
2.2. İlgili Araştırmalar.....	27
2.2.1. Matematiksel İspat İle İlgili Araştırmalar.....	27
2.2.2. Matematiksel Modeller İle İlgili Araştırmalar.....	36

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM.....	47
3.1. Araştırmanın Modeli	47
3.2. Araştırma Grubu.....	48
3.3. Veri Toplama Araçları	49
3.3.1. Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi	49
3.3.2. Matematiksel İspat Yapma İle İlgili Görüş Anketi.....	50
3.4. Verilerin Analizi.....	51
3.4.1. Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi	51
3.4.2. Matematiksel İspat Yapma İle İlgili Görüş Anketi.....	57
3.5. Uygulama	57
3.6. Değişkenler	59
3.6.1. Bağımsız Değişkenler	59
3.6.2. Bağımlı Değişkenler	59

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR VE YORUM.....	60
4.1. Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının Öğrencilerin İspat Yapabilme Becerilerine Etkisine İlişkin Bulgular	60
4.1.1. Sandviç Teoremi'nin İspatına İlişkin Bulgular.....	60
4.1.2. Ortalama Değer Teoremi'nin İspatına İlişkin Bulgular.....	64
4.1.3. Fermat Teoremi'nin İspatına İlişkin Bulgular	66
4.2. Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının Öğrencilerin Akademik Başarılarına Etkisine İlişkin Bulgular	69
4.3. Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının Öğrencilerin İspatla İlgili Görüşlerine Etkisi İle İlgili Bulgular	74

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER	107
5.1. Sonuç ve Tartışma.....	107
5.1.1. Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının Öğrencilerin İspat Yapabilme Becerilerine Etkisi İle İlgili Sonuç ve Tartışma	107

5.1.2. Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının Öğrencilerin Akademik Başarılarına Etkisi İle İlgili Sonuç ve Tartışma	109
5.1.3. Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının Öğrencilerin İspatla İlgili Görüşleri İle İlgili Sonuçlar ve Tartışma.....	110
5.2. Öneriler	112
KAYNAKÇA	114
EKLER.....	131
EK 1. Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi (Ön Test).....	131
EK 2. Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi (Son Test)	133
EK 3. Matematiksel İspat Yapma İle İlgili Görüş Anketi	136
EK 4. Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi Puanlama Anahtarı (Ön Test).....	138
EK 5. Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi Puanlama Anahtarı (Son Test)	140
EK 6. Örnek Etkinlik	142
ÖZGEÇMİŞ	143

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 3.1. Ön Test (son dört soru)- Spss Sonuçları	55
Tablo 3.2. Son Test (son beş soru)- Spss Sonuçları	56
Tablo 3.3. Çalışma Takvimi	58
Tablo 4.1. Öğrencilerin Sandviç Teoremi’ni İspatlama Durumları İle İlgili Yüzde ve Frekans Dağılımları	61
Tablo 4.2. Öğrencilerin Ortalama Değer Teoremi’ni İspatlama Durumları İle İlgili Yüzde ve Frekans Dağılımları	64
Tablo 4.3. Öğrencilerin Fermat Teoremi’ni İspatlama Durumları İle İlgili Yüzde ve Frekans Dağılımları.....	67
Tablo 4.4. Öğrencilerin Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi’nden Almış Oldukları Puanlar.....	70
Tablo 4.5. Bağımlı t- Testi Sonuçları	74

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Matematiksel ispat yöntem ve teknikleri	14
Şekil 2.2. Matematiksel ispat yöntemleri (Güler, 2013)	14
Şekil 2.3. Modelin sembolik gösterimi (Hestenes, 2010)	19
Şekil 2.4. Matematiksel model (Çiltaş; 2011).....	22
Şekil 3.1. “doğru” kategorisine örnek yanıt	52
Şekil 3.2. Yanlış kategorisine örnek yanıt	53
Şekil 3.3. Kısmen doğru kategorisine örnek yanıt	53
Şekil 3.4. Kısmen yanlış kategorisine örnek yanıt	54
Şekil 4.1. Öğrencilerin Sandviç Teoremi’ni ispatlama durumları ile ilgili yüzdeler	61
Şekil 4.2. EK kodlu öğrencinin soru 1’e son testte verdiği yanıt.....	62
Şekil 4.3. AS kodlu öğrencinin soru 1’e ön testte verdiği yanıt	62
Şekil 4.4. AS kodlu öğrencinin son testteki yanıt	62
Şekil 4.5. AK kodlu öğrencinin soru 1’e ön testte verdiği yanıt.....	63
Şekil 4.6. AK kodlu öğrencinin soru 1’e son testte verdiği yanıt	63
Şekil 4.7. Öğrencilerin Ortalama Değer Teoremi’ni ispatlama durumları ile ilgili yüzdeler	64
Şekil 4.8. MÇ1 kodlu öğrencinin soru 2 ye ön testte verdiği yanıt.....	65
Şekil 4.9. MÇ1 kodlu öğrencinin soru 2 ye son testte verdiği yanıt	65
Şekil 4.10. EK adlı öğrencinin soru 2’ye son testte verdiği yanıt.....	66
Şekil 4.11. Öğrencilerin Fermat Teoremi’ni ispatlama durumları ile ilgili yüzdeler.....	67
Şekil 4.12. MK1 kodlu öğrencinin soru 3’e son testte verdiği yanıt	67
Şekil 4.13. MT1 kodlu öğrencinin soru 3’e verdiği yanıt	68
Şekil 4.14. EK kodlu öğrencinin soru 3’e verdiği yanıt.....	69
Şekil 4.15. MÇ1 kodlu öğrencinin Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi’ne verdiği yanıtlar.....	71
Şekil 4.16. OM kodlu öğrencinin Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi’ne verdiği yanıtları	72
Şekil 4.17. YÇ kodlu öğrencinin Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi’ne verdiği yanıtlar.....	73
Şekil 4.18. RB kodlu öğrencinin soru 1’e ön ve son testte verdiği yanıt.....	75
Şekil 4.19. MG kodlu öğrencinin soru 1’e ön ve son testte verdiği yanıt.....	75

Şekil 4.20. ŞB ve FK kodlu öğrencilerin soru 1'e ön ve son testte verdikleri yanıtlar.....	76
Şekil 4.21. ÜÖ kodlu öğrencinin soru 2'ye ön ve son testte verdiği yanıtlar	77
Şekil 4.22. Sİ, AB ve AS kodlu öğrencilerin soru 2'ye ön ve son testte verdikleri yanıtlar.....	78
Şekil 4.23. AK ve MT1 kodlu öğrencilerin soru 3'e ön ve son testte verdikleri yanıtlar.....	79
Şekil 4.24. ST ve MD kodlu öğrencilerin soru 3'e ön ve son testte verdikleri yanıtlar.....	80
Şekil 4.25. EK kodlu öğrencinin soru 4'e ön ve son testte verdiği yanıt.....	81
Şekil 4.26. ÇŞ, AD ve ZÇ kodlu öğrencilerin soru 4'e ön ve son testte verdikleri yanıtlar.....	83
Şekil 4.27. MÇ1 ve MK2 kodlu öğrencilerin soru 5'e ön ve son testte verdikleri yanıtlar.....	84
Şekil 4.28. SMF ve VA kodlu öğrencilerin soru 5'e ön ve son testte verdikleri yanıtlar.....	85

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Gelişen dünyamızda toplumdaki ihtiyaçlar ile sosyal, siyasal, kültürel, ekonomi ve eğitim gibi birçok alandaki beklentiler değişmektedir. Bu bağlamda eğitimin amacı sürekli öğrenen, öğrendiğini uygulayan, eleştirel düşünen, sorgulayan, yenilik getiren, problemlerin üstesinden gelen ve yeniliğe ayak uyduran insanlar yetiştirmektir (Olkun ve Toluk, 2003). Bu amaç doğrultusunda matematik eğitimcilerinden ve matematikçilerden, gerçek problem durumlarını görebilen ve çözüm üreten, matematik ile gerçek dünya arasında bağ kurabilen, matematiği etkili kullanabilen, matematiği ve matematikle uğraşmayı seven bireyler yetiştirmeleri beklenmektedir (Çiltaş ve Yılmaz, 2013).

Türkiye’de diğer ülkelerdeki gibi eğitim programlarını çağın gereksinimlerine göre düzenlemek için çalışmalar yapılmaktadır (Okur, Bahar, Akgün ve Bekdemir, 2011). Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] tarafından 2013 yılında geliştirilen ve yenilenen ortaokul matematik dersi öğretim programı ile matematiksel düşünme sistemini öğretme ve gerçek hayat problemlerinde temel matematiksel becerileri kullanma amacı benimsenmiştir. Böylece günlük hayatta problemlerin üstesinden gelebilen, teknolojiyi etkili kullanabilen, farklı disiplinler arasında ilişki kurabilen ve model oluşturma becerilerine sahip bireylerin yetiştirilmesi amaçlanmıştır (Çiltaş, 2011).

Bireyler, günlük hayatlarında karşılaştıkları problemlerin çözümünde matematiği ve matematiksel düşünmeyi kullanırlar (Arslan ve Yıldız, 2010). Matematiksel düşünme, matematiksel bakış açısının geliştirilmesidir ve yaşamda karşılaşılan problemlerin çözümünde önemli bir katkı sağlar. Matematiksel düşünme, üst düzey düşünmedir ve matematiksel düşünmeyi belirlemenin bir yolu da matematikçilerin teoremleri nasıl ispatladıklarına bakmaktır (Polya, 1945). O halde ispat, matematiksel düşünmede kullanılan önemli bir araçtır. Çünkü ispat yapmada, bir önermenin neden doğru ya da yanlış olduğunu açıklama ve farklı mantıksal düşünme yolları ile ispat çeşitlerini seçme ve kullanma gibi yapılar söz konusudur (Baki, 2008). İspat,

matematik ve matematiksel düşünme için çok önemli olmasına rağmen öğrenciler için anlaşılması zor bir konu olarak görülmektedir. Öğrencilerin ispat yapmadan korkmalarının birçok nedeni vardır ve bu nedenlerden biri de ispatların anlatılış yöntemleridir. Yapılan bu araştırmada da matematiksel ispatların öğretimi dikkate alınarak aşağıdaki problem giderilmeye çalışılmıştır.

1.1. Problem Durumu

Toplumun gereksinimleri doğrultusunda sayma ve ölçme olarak ortaya çıkan matematik, bilginin ve teknolojinin hızlı gelişmesi ve ilerlemesi ile günümüzde daha da önem kazanmıştır. Çünkü günlük hayatın temelleri artarak matematiksel bir hâl almaktadır ve insanlar günlük hayatlarında alım-satım, seçme ve karşılaştırma gibi birçok şeye karar verirken matematiği kullanmaktadırlar (Yurt ve Sünbül, 2014). Matematiğin hala herkesçe kabul gören bir tanımı, belki de bir tanım cümlesine sığdırılamayıştından ötürü yapılamamıştır. Yapılan tanımlar matematiği bir veya birkaç yönüyle anlatmış, belirli alanlarını öne çıkarmıştır. “Matematik sayı ve uzay bilimidir.”, “Matematik tüm olası örüntülerin incelenmesidir (Baki ve Alan, 1997).”, “Matematik; aritmetik, cebir, geometri gibi sayı ve ölçü temeline dayanan niceliklerin özelliklerini inceleyen bilimlerin ortak adıdır (İşcan, 1969).” şeklinde yapılan tanımlara örnek verilebilir (Altun, 2004). Yaşamımızla iç içe geçmiş olan matematik için düşünmeyi, doğruyu görmeyi ve anlamayı, akıl yürütmeyi ve tahmin etmeyi sağlayan bir bilim dalıdır şeklinde de tanım yapabiliriz.

Matematiğin hayatımızdaki yeri ve önemi çok fazla olmasına rağmen gün geçtikçe matematiğe karşı olan kaygı ve korku da artmaktadır. Öğrenciler matematiği öğrenirken zorluk yaşamaktadırlar. Öğrencilerin matematikte zorlanmalarının bir çok nedeni vardır. Bunlardan bazıları matematiğin karmaşık olduğunun düşünülmesi, bireyin kendine olan güvensizliği, matematiğe karşı olan önyargılar ve ilgisizlik, yetersiz çalışma, matematiğin soyut yapısı, öğretmenlerin yetersiz anlatımı, müfredatın kalabalıklığı, okulların yeterli imkanlara sahip olmaması vs. olarak sıralanabilir. Çıltaş ve Işık’a (2012) göre matematiğin zor olarak kabul edilmesinde; matematikte masal payının olmayışı, matematik zekasının her an kullanılamaması ve matematik öğrencilerinin öğretecekleri kavramları yeterince özümseyememeleri gibi etkenler söz konusudur.

Matematikteki başarısızlığın ve matematiğin zor olarak kabul edilmesinin nedenlerinden biri de matematiğin soyut yapısıdır (Çiltaş, 2011). Matematik için vazgeçilmez olan aksiyomlar, tanımlar, teoremler ve teorem ispatları bilimsel bir disiplin olarak matematiğin yapı iskeletini oluşturduğu için matematiksel önermelerin ispatlanması gerekmektedir (Heinze ve Reis, 2003). Öğrenciler, okullarda matematiksel ifadelerin ve formüllerin ispatlarını yaparken sadece formüllerin son halini bilmenin yeterli olmadığını ve ulaşılan sonuçların nedenleri ile birlikte açıklanması gerektiğini öğrenir (Güler ve Dikici, 2012).

İnsanların diğer canlılardan farklı olmasını sağlayan özelliklerinden biri de muhakeme yapabilmesidir (Umay, 2003). Muhakeme; sonuçlardan, yargılardan, gerçeklerden ya da önermelerden emin olma ve bir sonuç çıkarma işlemidir (Altıparmak ve Öziş, 2005). İnsanoğlu, muhakeme yeteneği ile birçok etkeni aynı zamanda düşünür, yorumlar, akılcı sonuçlara varır ve verilen hükümlerin doğruluğunu gösterebilir. Bu kapsamda muhakeme, matematiğin temelini oluşturur. Matematikte muhakeme ve daha özel bir kavram olarak kanıt yapma ön plana çıkmaktadır (Arslan, 2007).

Doğruluğu kabul edilen fikirlerin muhakeme edilmesi matematik yapmanın ayrılmaz bir parçasıdır (Doruk ve Kaplan, 2013). Eğer bu muhakeme becerisi olmazsa matematik bir işlem dizisini takip etme ve örnekleri taklit etme olur (Ross, 1998). İşte bu noktada matematiksel ispatın önemi ortaya çıkar; matematiksel ispatlar bir ifadenin neden ve nasıl gerçek olduğunun anlaşılmasını sağlayarak sonuçların birbiri ile ilişkilendirilip matematiğin sistemleşmesine ve gelişmesine katkıda bulunur (Hanna ve Barbeau, 2009).

Birçok matematik eğitimcisinin ve matematikçinin ispatın önemi ile ilgili yaptıkları araştırmalara göre ispat matematiğin önemli ve ayrılmaz bir parçası, matematiğin temeli ve ileri matematiğin amacı olarak nitelendirilmektedir (Güven, Çelik ve Karataş, 2005; Heinze ve Reiss, 2003; Turner, 2010; Weber, 2001). Matematiksel ispatın bu kadar önemsenmesinin sebeplerine bakıldığında, matematiğe kattığı faydalar ve öğrencilere matematiksel becerileri kazandırması ön plana çıkmaktadır. Öğrenciler ispat yaparken sadece formülleri bilmenin yeterli olmadığını aynı zamanda formüllerin nerden geldiğinin açıklanması gerektiğini öğrenirler (Güven, Çelik ve Karataş, 2005) ve bu sayede öğrencilerin matematiksel bilgileri gelişir ve

matematiksel düşünme becerileri artar. (Kitcher, 1984). İspatın matematik eğitimindeki önemi üzerine yapılan çalışmalarda, matematik ve ispatın iç içe olduğu, ispatın matematiksel bilginin oluşumunda önemli bir katkısının olduğu ve öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini geliştirdiği görülmüştür (Gökkurt, Deniz, Akgün ve Soylu, 2014).

Matematik bir ispatlama disiplini ve bu özelliği ile diğer disiplinlerden ayrılmaktadır (Ünveren, 2010). Özellikle yükseköğretimde, matematiksel ispat oldukça üzerinde durulan bir konu alanıdır. Öğrencilerin lisans programları incelendiğinde ders içeriklerinde üst düzeyde ispat yapma becerisi kazanmaları hedeflenmektedir. Alan derslerinin temelinde tanımlar ve teoremler bulunmaktadır. Öğrenciler yükseköğretimde aldıkları alan dersleri sayesinde matematiksel ispat yapma konusunda donanımlı olarak yetiştirilmek istenmektedir. Özellikle Soyut Matematik, Analiz ve Cebir gibi derslerde öğrenciler ispat yapma ve ispat teknikleri hakkında bilgilendirilmektedirler. İspata lisans eğitiminin başlangıcından itibaren yer verilmesinin nedenlerinin başında; öğrencilerin diğer derslerde herhangi bir ispatla karşılaştıklarında hangi yöntemin kullanıldığını ayırt etmelerini ya da hangi yöntemin kullanılabileceğini belirlemelerini sağlamak gelmektedir (Güler ve Dikici, 2012). Matematiksel ispat bu kadar önemli olmasına ve lisans eğitiminde bu kadar üzerinde durulmasına rağmen üniversitede ileri matematik gören öğrenciler ispatlamada oldukça güçlük çekmektedirler (Weber, 2004). Öğrencilerin ispatta güçlük çekmelerinin sebepleri olarak ispatla ilgili bilgi eksikliklerine sahip olmaları, tanımları ve tanımları nerde kullanacaklarını yeterince bilmemeleri, ispatın doğasını ve ispat teknik ve stratejilerini anlayamamaları, matematiksel dili doğru kullanamamaları ve kendilerine güvenmemeleri verilebilir (Anapa ve Şamkar, 2010; Baker ve Campbell, 2004; Edwards ve Ward, 2004; Gibson, 1998; Knapp, 2005; Moore, 1994; Moralı, Uğurel, Tüknüklü ve Yeşildere, 2006; Weber, 2006).

Öğrencilerin ispat yapmaya karşı olumsuz tavır sergilemelerinin bir nedeni de verilen teoremin ifadesinde ne anlatılmak istendiğini algılayamamış olmalarıdır. Matematik derslerinde bir kavramın, ifadenin, olgunun ya da teoremin öğrencilere doğrudan verilmesi anlaşılmayı ve içselleştirmeyi zorlaştırmaktadır. Ancak soyut olan matematik kavramları, öğretim sırasında somutlaştırılarak verilirse, bu zorluk

giderilebilir veya azaltılabilir. Bu noktada matematiksel modellerle teorem ispatlarının öğrencilerin ispat yapma ile ilgili görüşlerini değiştireceği düşünülmektedir.

Öğrenciler, okulda öğrendikleri bilgiler ile günlük hayat arasında bağlantı kurma konusunda güçlük yaşamaktadırlar. Okullarda eğitimin öğretmen merkezli ve geleneksel sınıf ortamında olması, öğrencilerin bilgilerini gerçek hayat problemlerine aktarma noktasında olumsuz bir etki oluşturmaktadır (Eraslan, 2011). Bu nedenle matematik eğitiminde birçok kavramın, bilginin ya da ifadenin öğrenciler tarafından daha anlamlı hale gelmesi için farklı uygulama alanları ve değişik yöntem ve stratejiler ile desteklenmesi gerekmektedir (Bransford, Brown ve Cocking, 1999). Bu açıdan bakıldığında matematiksel modeller bir kavramın, olgunun ya da ifadenin öğrenilmesinde ve içselleştirilmesinde önemli katkı sağlayabilir. Doruk'a (2010) göre model, karmaşık sistemleri ve yapıları yorumlamak ve anlamak için zihinde var olan kavramsal yapılar ile bu yapıların dış temsillerinin oluşturduğu bütün olarak tanımlanırken, modelleme bir problem durumunun modeline hizmet eden süreci ifade etmektedir. Başka bir ifadeyle modelleme, matematiğin bilimsel bilgi üretme yöntemidir. Matematiksel model ise gerçek hayatta karşılaşılan durumların matematiksel olarak ifade edilmesidir. Olkun ve Uçar'a (2007) göre de matematiksel kavramın modeli, bu kavramın içinde barındırdığı ilişkiyi gösteren bir resim, çizim, sembol ya da somut bir araçtır.

Ünveren'e (2010) göre matematiksel anlamda özel durumlardan ve örneklerden yola çıkarak genellemelere ve kurallara ulaşma yolu ile kurulan bir model aracılığı ile bir ispat anlatılabilir ve yorumlanabilir; böylece öğrenciler, kendi yaşamlarında karşılığı olan bir model durumunun kullanımıyla yapılan matematiksel ispatları formal yöntemle yapılan ispatlardan daha iyi öğrenir ve kavrarlar. Fischbein'e (1987) göre de ispatın formal dili ve öğretimde kullanılan model dilin farklı yapıda olması, model durumun kişilere ispatı hatırlamalarında bir analogi olma özelliği katar. Böylece kişiler herhangi bir teoremi kendi anladıklarından yola çıkarak modelini oluşturabilir ve model ile ilk defa teoremin ispatını yapıyormuş gibi hissederler. Bu düşünceden hareketle araştırmanın konusu olarak matematiksel modellerin, teoremlerin ispatını yapmada öğrencilere yardımcı olacağı düşüncesinden yola çıkarak öğrencilerin teoremlerin ifadeleri ile ilgili matematiksel modellerle ispat yapabilme becerilerine, akademik başarılarına ve ispatla ilgili görüşlerine bakılmıştır.

Buradan hareketle bu çalışmada aşağıdaki problem cümlesine yanıt aranmıştır.

1.1.1. Problem Cümlesi

“Matematiksel modellerle teorem ispatlarının öğrencilerin ispat yapabilme becerilerine, akademik başarılarına ve ispatla ilgili görüşlerine etkisi nedir?” sorusuna cevap aranmaktadır.

Bu çalışma sırasında probleme daha net bir yanıt bulabilmek için aşağıdaki alt problemlere de cevap aranmıştır.

1.1.2. Alt Problemler

1) Matematiksel modellerle teorem ispatlarının öğrencilerin ispat yapabilme becerilerine etkisi nedir?

2) Matematiksel modellerle teorem ispatlarının öğrencilerin akademik başarılarına etkisi nedir?

3) Matematiksel modellerle teorem ispatlarının öğrencilerin ispatla ilgili görüşlerine etkisi nedir?

1.2. Çalışmanın Amacı ve Önemi

Günümüzde öğrencilere matematiksel düşünme ve üst düzey düşünme yollarını kazandırabilme, günlük yaşamla matematiğin ilişkisini kurabilme, kendi problemleriyle basa çıkabilme ve problemlere etkin çözüm üretebilme, eğitim çalışmalarının önemli bir bölümünü oluşturmaktadır (Karalı, 2013). Öğrencilerin gereksinimlerini karşılamak için matematikten yararlanma kapasitesini ölçen Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) gibi çalışmalar sonucunda Türk Eğitim sisteminde görülen eksiklikleri gidermek için, gelişmiş ülkelerin matematik programları temel alınarak yeni ilköğretim matematik dersi öğretim programı hazırlanmıştır (Yıldırım ve Işık, 2015). Ülkemizde de matematiği yaşamında etkili bir şekilde kullanabilen, gerçek yaşamla matematik arasında ilişki kurabilen, karşılaştığı problemlere farklı çözüm yolları üretebilen, analitik ve matematiksel düşünebilen, akıl yürütme, ilişkilendirme ve muhakeme yapabilme gibi becerilere sahip bireyler yetiştirmek amacıyla 2013 yılında ilköğretim matematik programı yeniden düzenlenmiştir (MEB, 2013). Programda,

matematik ile ilgili kavramlar, doğası gereği soyut nitelikli olduğundan bu kavramların öğretiminin somut ve sonlu yaşam modellerinden yola çıkılarak yapılmasının daha etkili olacağı belirtilmiştir (Yıldırım ve Işık, 2015).

Matematik öğretiminde ispat önemli bir araçtır, bu yüzden matematik öğretiminin temel amaçları arasında, mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili çıkarımlar yapabilecek bireyler yetiştirmek vardır (Gökkurt, Deniz, Akgün ve Soylu, 2014). Bu amaçlar doğrultusunda, öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini geliştirmek için matematiksel ispat süreçlerine yer verilmiştir (Bahtiyari-Albayrak, 2010). Bu yüzden, ispat yapma süreci matematik öğretim programının ayrılmaz bir parçası olup (Schoenfeld, 1994), öğrencilerin bu süreçte, ispat yapma becerilerini kazanmaları gerekir. Öğrencilerin ispat yapabilme becerilerini geliştirmek seçilen stratejiye de bağlıdır. Eğer strateji doğru belirlenemezse kişinin ispat ve muhakeme yeteneği söndürülebilir. Böylece ezberlemeyi kendine rehber edinen, neden-sonuç sürecini takip edemeyen bireyler yetişmiş olurken, strateji uygun belirlenirse kişinin ispat ve muhakeme yeteneği daha da gelişecektir. Böylece bireylerin matematiği ve dolayısıyla hayatı daha rahat anlamaları ve zevk almaları sağlanmış olacaktır. Yapılan ispatlarda da öğrencilerin informal deneyimlerinden formal çıkarımlara erişmeleri sağlarsa, ispatlar daha etkili, anlamlı ve kalıcı olabilecektir (Ünveren, 2010). Bu noktada matematiksel modeller önemli bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır.

Modeller soyut konuları somutlaştırmada öğretmenlere yardımcı olan araçlardır ve öğrenciler için konuların anlaşılmasını kolaylaştırmaktadır. Öğrencilerin ispat yapmada zorlanmalarını azaltmak ve ispatları anlamaları için matematiksel modeller ders sunumları yapılırken kullanılabilir. Matematiksel model ve ispatlama ile ilgili çalışmalar ayrı ayrı yapılmış olmakla birlikte literatüre bakıldığında bu iki kavramın birlikte ele alındığı çalışmalara pek rastlanmamaktadır. Yapılan bu araştırmada matematiksel modellerle teorem ispatlarının öğrencilerin akademik başarılarına, ispatla ilgili görüşlerine ve ispat yapabilme becerilerine etkisi araştırılmaktadır. Böylece gelecekte yapılacak olan çalışmalara katkı sağlayacak ve öğrencilerin teoremlerin ispatına karşı olumlu bir bakış açısı oluşturmaları sağlanacaktır.

1.3. Varsayımlar

- Öğrenciler veri toplama araçlarındaki sorulara samimi bir şekilde yanıt vermişlerdir.
- Yapılan mülakatlarda öğrenciler gönüllü olarak katılmışlar ve sorulara içten yanıt vermiş, gerçek görüşlerini yansıtmışlardır.

1.4. Sınırlılıklar

Araştırmada ilköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıf öğrencilerinde yürütüldüğü için Analiz-I dersi bünyesinde yer alan beş tane teoremin matematiksel modeller kullanılarak ispatının yapılması incelemiş ve örneklem de 2014-2015 eğitim öğretim yılı Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği'nde öğrenim gören 45 ikinci sınıf öğrencisi ile sınırlandırılmıştır.

1.5. Tanımlar

Model: Karmaşık olgu, olay, kavram ve sistemleri anlamak, yorumlamak ve içselleştirmek için zihinde var olan kavramsal yapılar ile bu yapıların dış temsillerininin bütünüdür (Lesh ve Doerr, 2003).

Modelleme: Bilimsel düşünme ve çalışma, belirli bir süreç sonunda ortaya ürün (model) koyma veya hangi ayrıntının nasıl ve ne şekilde yer alacağını belirlediği birçok aşamadan oluşan aktiviteleri karşılayan karmaşık bir süreç olarak tanımlanmaktadır (Gümüş, Demir, Koçak, Kaya ve Kırıcı, 2008).

Matematiksel model: Bir problem durumunu ya da gerçek hayat durumunu matematiksel olarak ifade edebilmek için zihinde var olan ya da oluşturulan denklem, fonksiyon, grafik ve matematiksel düşünme becerileri gibi yapıların tamamıdır (Kertil, 2008).

Matematiksel modelleme: Matematik veya matematik dışındaki bir olayı, olguyu, olaylar arasındaki ilişkileri matematiksel olarak ifade etmeye çalışma, bu olaylar ve olgular içerisinde matematiksel örüntüler ortaya çıkarma sürecidir (Vershaffel, Greer ve De Corte, 2002).

Günlük hayat problemi: Genel olarak günlük hayatla ilişkili olabilecek matematiğin her parçasına ait problemlere günlük hayat problemi denir (Blum ve Niss, 1991).

İspat: Genellikle matematiğe özgü bir kavram sayılan ispatlama, yaygın anlamıyla bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu ya da yanlışlığını yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır (Yıldırım, 2000).

Matematiksel İspat: İddia edilen bir matematiksel ifadenin doğruluğunu ya da yanlışlığını kanıtlamaktır. Bu, her durumda ve her koşulda iddianın doğru olduğunun gösterilmesidir. Başka bir deyişle iddianın, örüntünün bütün şartlarda genellenebilirliğinin gösterilmesidir (Baki, 2008).

Teorem: Kanıtlanabilen bilimsel önermelerdir. Mantıksal usavurma ile kanıtlanan önermenin ya da özelliğin bildirimidir (Karaçay, 2009).

İKİNCİ BÖLÜM

2. KURAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.1. Kuramsal Çerçeve

Bu bölümde ispat ve matematiksel ispatın tanımı, ispatın önemi, ispat türleri, model ve matematiksel modelin tanımı, model çeşitleri, modellerin faydaları ve ispatta matematiksel modellerin kullanımı ile ilgili bilgiler ile yurt içinde ve yurt dışında yapılan araştırmalar detaylı bir şekilde verilecektir.

2.1.1. İspat ve Matematiksel İspat

Matematik, ardışık soyutlamalar ve genellemelerden oluşan bir bilim dalıdır. Matematik; sayılar, şekiller, kümeler, örüntüler, fonksiyonlar ve uzaylar gibi soyut kavramlar ile bu kavramlar arasındaki ilişkileri konu alır. Matematikçiler bu kavramların özelliklerini inceleyip bu kavramlarla ilgili genellemeleri ortaya çıkarırlar. Genellemelerin ortaya konmasında izlenen yol matematiğe özgüdür ve bu yol ‘ispatlama’ olarak adlandırılır (Altun, 2005).

Matematikçiler ve matematik eğitimcileri ispat kavramını farklı şekillerde tanımlamaktadırlar. Selden ve Selden’e (2003) göre ispat, teoremlerin doğruluğunu göstermek için kullanılan önermelerdir. Bell (1976) ispatı, belli adımlar sonucunda gerçekleşen bir süreç olarak görmekte ve bu süreçte doğrulama (bir önermenin doğruluğunu gösterme), açıklama (bir önermenin neden doğru olduğunu gösterme) ve sistematikleştirme (önermeleri, aksiyomları ve teoremleri tümevarımsal bir sistem içerisinde organize etme) kategorilerinin olması gerektiğini vurgulamaktadır. Benzer şekilde Baki (2008) de matematiksel ispatı bir süreç olarak görmüş ve bu süreci doğrulama, açıklama ve soyutlama olarak belirlemiştir.

İspatı, bir gerçeğin, bir formülün, bir iddianın ya da bir teoremin doğruluğunu gösterme süreci olarak söylemek mümkündür. Türk Dil Kurumu (TDK) (2005); ispatı, “Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtlama,

tanıt”, ispat etmeyi de “kanıtlamak ve tanıtlamak” (s. 984-985) olarak tanımlamıştır. İspat sadece matematikte değil günlük hayatta da kullanılır ve bilimsel araştırmaların çoğunda ispat vardır. Fakat bu araştırmalarda ispat kavramı bir ifadenin doğruluğunu göstermek değil, bu ifadenin doğru olup olmadığını test etmek için kullanılmaktadır (Calude ve Marcus, 2004). Matematiksel ispatta ise iki amaç vardır. Bunlardan ilki hipotezin mantıklı adımlarla bir sona götürüldüğünü göstermek, ikincisi de varsayımlardan neden ve nasıl gidildiğini anlamaktır (Tall, 1998). Bu yüzden ispat bir teoremin sadece gerçek olduğunu değil aynı zamanda neden gerçek olduğunun anlaşılmasını sağlar (Doruk ve Kaplan, 2013). Bu şekilde düşünüldüğünde, ispatlar hem ikna edicidir hem de keşfedicidir denilebilir ve ispatların yapılması ile elde edilen sonuçların birbiri ile bağdaştırılarak matematiğin sistematikleşmesine katkıda bulunabilirler (Hanna ve Barbeau, 2009).

Matematiksel ispat matematiğin merkezinde yer almaktadır (Ko, 2010) ve bugün anlaşıldığı haliyle kaynağını M. Ö. IV. yüzyılda yayınlanan Euclid’in Elemanlar kitabından almaktadır. Euclid ispatı dört aşamada incelemiştir. Bu aşamalar; sonucu doğrulama, başkasını ikna etme, sonuç bulma ve sonuçları tümdengelimsel bir sistem içerisine yerleştirme şeklindedir (Almeida, 2003). Matematiksel ispatla ilgili kullanılan bu aşamaların sebepleri incelendiğinde, matematiğe yaptığı katkılar ve öğrencilere matematiksel anlamda kazandırdığı beceriler ön plana çıkmaktadır (Doruk ve Kaplan, 2013).

Matematiksel ispat öğrencilerin matematiksel kavramları daha iyi anlamasına yardımcı olur (Hersh, 1993) ve matematiksel ispatın öğrencilere sağladığı faydalardan bazıları aşağıda verilmiştir:

- Öğrenciler formüllerin son hallerini bilmenin yeterli olmadığını ve formüllerin nerden geldiğinin açıklanması gerektiğini öğrenirler (Güven, Çelik ve Karataş, 2005).
- Matematiksel bilginin kurulmasında, gelişmesinde ve aktarılmasında etkin rol oynar (Stylianides, 2007).
- Matematiksel kavramların daha iyi anlaşılmasına ve matematiksel düşüncenin gelişmesine yardımcı olur (Hanna, 1991).
- Matematikçilerin yaptıklarının ne anlama geldiğini öğretir (İmamoğlu, 2010).

- İspatla birlikte matematiksel bilgiler gelişir ve olgunlaşır (Kitcher, 1984).
- Öğrencilerin kritik düşünme becerilerini geliştirir (Fawcett, 1938).
- Öğrencilere, problem çözme için yeni metotlar, stratejiler ve araçlar sunar (Rav, 1999).

Harel ve Sowder (2007) da matematiksel ispatı bir iddianın doğruluğu hakkındaki şüpheleri gidermek için yapılan zihinsel bir aktivite olarak tanımlamışlardır. İspat yapmayı ise ortaya konulan şüpheleri anlama ve başkalarını yaptıklarına ikna etme olarak ifade etmişlerdir. Ayrıca ikna etmeyi de kişinin bir iddia üzerindeki şüphelerini ortadan kaldırması ve yine iddia üzerindeki başkalarının şüphelerini kişinin kendi uğraşları ile ortadan kaldırılması olarak açıklamışlardır.

İspat süreci birbirleri ile ilişkili üç farklı aşamadan oluşur ve bu aşamalar; ispat yapılacak şeyin araştırılması, ispatın düzenlenmesi ve diğer kişilere açıklanması olarak sıralanır (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006). Matematikçi, ilk olarak problemi veya ifadeyi analiz eder, sonra ifadenin doğru olup olmadığını araştırarak önceden ispatlanmış teoremlerden hareketle ispatı nasıl yapabileceğini inceler. Bu süreç ispatın yapılmasıyla veya bulunan ifadenin yanlış olduğunun gösterilmesiyle biter. Bir ispat ancak matematik dünyası tarafından kabul gördükten sonra bir ispat olur (Lee, 2002).

Matematiksel bir ispatta; tanımlar, teoremler ve işlem süreçleri olmalıdır ve bu yapılar ifadelerde gizli kalan matematiksel-mantıksal öngörülerini ortaya koymalıdır (Tall, 1992). Bu yüzden matematiksel ispatın amacı iddia edilen şeyin doğruluğunun ya da yanlışlığının her durumda kanıtlamanın (Baki, 2008) yanında, doğrulamaların birbiriyle olan ilişkisini de göstermek şeklinde de ifade edilebilir (Kwoen, 2002; Lee, 2002). Böylece öğrencilerin gerçek yaşamdaki bir durumda ya da olayda görülmeyen gerçekleri öngörmeleri, doğruluğunu ve yanlışlığını test ederek olumlu sonuçlara ulaşabilmeleri sağlanabilir (Zaslowsky ve Peled, 1996).

2.1.2. Matematikte İspatın Önemi

İspat, matematiği anlamak ve matematik yapmak için gerekli olan en temel şarttır. İspat öğrencilerin matematiksel kavramları nedenleri ile öğrenmelerine yardımcı olacak biliş ötesi faaliyetler içermektedir (Güler, 2013). Ayrıca National Council of

Teachers of Mathematics (NCTM) (2000) raporunda matematiksel ispatın erken dönemlerden itibaren matematik öğretim programlarında yer alması gerektiğini savunmaktadır. Bu açıdan bakıldığında matematiksel ispatın ne anlama geldiği ve hangi fonksiyonlara sahip olduğunun bilinmesi önem kazanmaktadır. Bu yüzden son yıllarda araştırmacılar matematiksel ispatın ne anlama geldiği ve matematik eğitimi için hangi fonksiyonlara sahip olduğu ile ilgili araştırmalar yapmaktadır (Almeida, 2003; Hanna, 2000; Hanna ve Barbeau, 2002). İspatın matematik eğitimi açısından önemi araştırmacılar tarafından aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

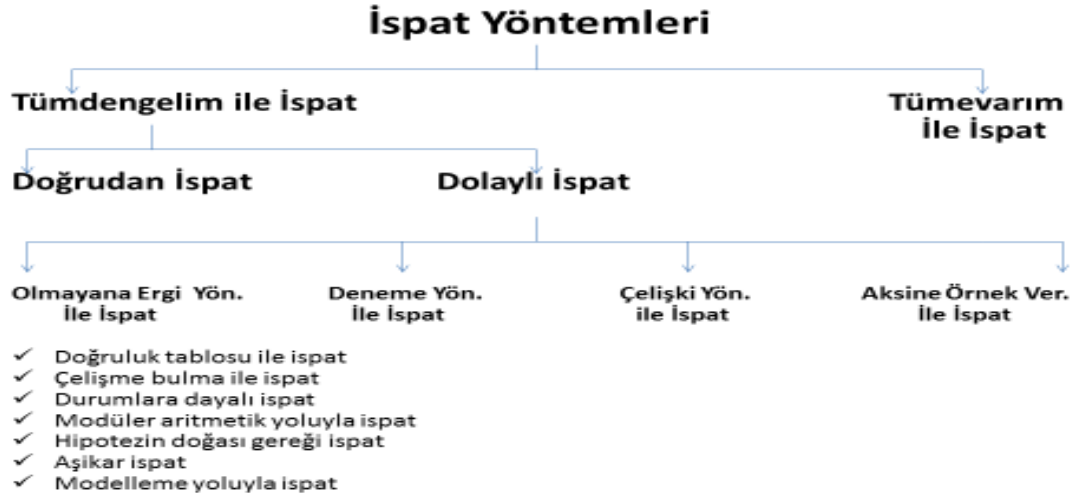
- Doğrulama ya da gerekçe sunma: Bir ifadenin doğruluğunu değerlendirme
- Açıklama ya da aydınlatma: Bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklama
- İnanma: Şüpheleri ortadan kaldırma
- Sistematikleştirme: Sonuçların temel kavramlar, teoremler ve aksiyomların tündengelim sistemi içerisinde organizasyonu
- İletişim: Matematiksel bilgi ve akıl yürütmenin başkalarına aktarımı
- Keşif ya da inşa etme: Yeni sonuçlar keşfetme
- Haz: Sorunların entelektüel bir bakış açısıyla zarifçe karşılanması

Araştırmacılar ispatın anlamı ve fonksiyonlarını inceleyerek sınıf içi matematik öğretimi etkinlikleri ile bütünleştirip ispat yapmanın öğrencilerin matematiksel düşünme yeteneklerinin gelişeceğini savunmuşlardır (Hanna ve Barbeau, 2002; Rav, 1999).

2.1.3. Matematiksel İspat Yöntemleri

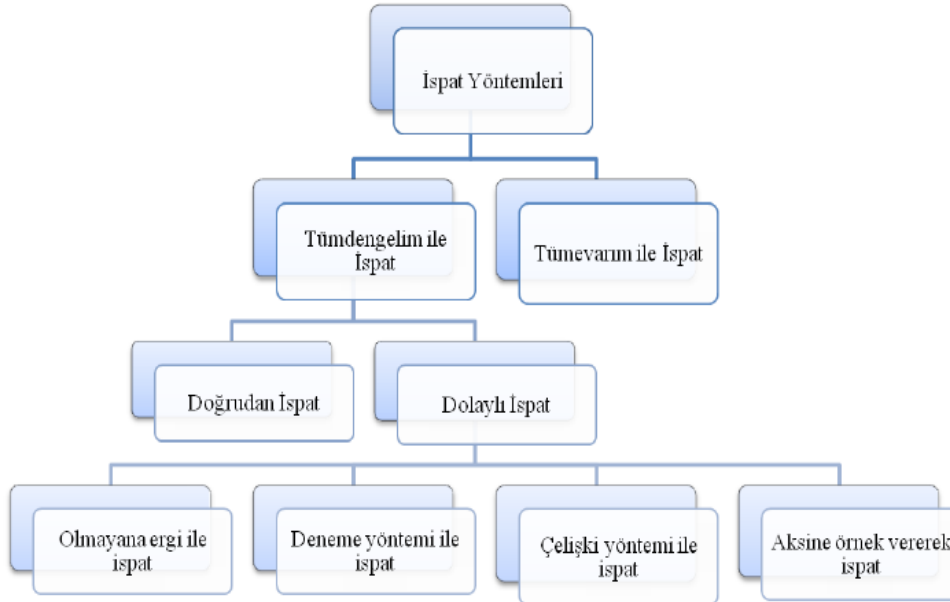
Matematikte yapılan en önemli işlerden biri, verilen teoremleri ispatlamaktır. Teoremlerin doğru olduğunu göstermek için tek bir örnek vermek yeterli değildir. Çünkü teorem bir örnek için doğrulandığı halde başka bir örnek için doğrulanmayabilir (Akkaş, Hacısalihoğlu, Özel ve Sabuncuoğlu, 1988). Bu yüzden bir teoremin doğrulanması için farklı ispat çeşitleri kullanılmaktadır. Matematikte genel olarak tündengelim ve tümevarımsal olmak üzere iki tür ispat yöntemi vardır. Kuramdan yola çıkarak kurama kanıt arama yöntemi tündengelim ve gözlemden yola çıkarak kuram oluşturma süreci ise tümevarım yöntemidir. Her iki yöntemde de esas olan doğru düşünerek, bilinen veya kabul edilen gerçeklerden yeni gerçekler veya sonuçlar

çıkarmak olmalıdır (Irmak, 2008). Literatürde ispat yöntemleri ile ilgili yapılan çalışmalardan yola çıkılarak ispat yöntemleri aşağıda Şekil 2.1’de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Matematiksel ispat yöntem ve teknikleri

Ayrıca Güler (2013) de yaptığı çalışmasında ispat yöntemlerini aşağıdaki Şekil 2.2. deki gibi sınıflandırmıştır.



Şekil 2.2. Matematiksel ispat yöntemleri (Güler, 2013)

Matematikte kullanılan birçok ispat yöntem ve tekniği bulunmaktadır. Bu ispat yöntemleri; tümdengelim ve tümevarım ile ispat olmak üzere ikiye ayrılmaktadır

(Çallıalp, 1999). Ayrıca tümdengelim de kendi içinde doğrudan ispat, dolaylı ispat olmak üzere ikiye ayrılır. Dolaylı ispat ise; olmayana ergi, çelişki bulma, deneme yöntemi ve aksine örnek verme gibi adlarla çeşitli yollara ayrılmaktadır. Bu ispat yöntemleri aşağıda ayrıntılı olarak açıklanmıştır (Altıparmak ve Öziş, 2005; Dede, 2013; Dubinsky, 1986; Güler, 2013).

Tümevarım Yöntemiyle İspat: Matematiksel tümevarım çok kullanılan ve çok güçlü bir ispat yöntemidir. Tümevarımla ispatın aşamaları aşağıda verilmiştir.

Her bir n doğal sayısı için $S \subset N$ ve $1 \in S$ olmak üzere; $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$ gerektirmesi doğru ise $S=N$ dir.

Pozitif tam sayılar hakkında bir $S(n)$ önermesi göz önüne alındığında,

1. $n=1$ için $S(1)$ önermesi doğru ise,
2. Önermenin n için doğruluğu, $n+1$ için de doğruluğunu gerektiriyorsa $\forall n \in N$ için $S(n)$ önermesi doğrudur.

Örneğin; “Her $n \in Z^+$ için $4^n - 1$, 3 ile tam bölünür” önermesi tümevarım yöntemiyle ispatlanabilir. Yani, $n=1$ için $4^1 - 1 = 3$ olduğundan iddia doğrudur. Şimdi önermemiz, $n=k$ için $3 \mid (4^k - 1)$ doğru olsun. Yani, $m \in Z^+$ için $4^k - 1 = 3m$ olsun. O halde $n=k+1$ için iddianın doğru olduğunu yani, $3 \mid (4^{k+1} - 1)$ olduğunu göstermeliyiz.

Şimdi, $4^{k+1} - 1 = 4^{k+1} - 1 - 3 + 3 = 4^{k+1} - 4 + 3 = 4(4^k - 1) + 3$ olarak yazılabilir. Tümevarım hipotezinde, $4^k - 1 = 3m$ olduğunu kabul ettiğimize göre, eşitliği $4.3m + 3 = 3(4m + 1)$ şeklinde yazabiliriz. Buradan $l \in Z^+$ olmak üzere $4^{k+1} - 1 = 3(4m + 1) = 3l$ olarak yazılabilir. Bu ise, $3 \mid (4^{k+1} - 1)$ demektir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Doğrudan ispat yöntemi: $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğrudan ispatı, nesnel kanunların bir veya daha fazla uygulamalarında p önermesi doğru ise q önermesi mutlaka doğrudur kabulüyle başlayan mantıksal olarak geçerli bir delildir. Böylece, $p \Rightarrow q_1, q_1 \Rightarrow q_2, \dots, q_n \Rightarrow q$ koşullu önermelerinin bir veya birkaç adımında q önermesinin doğru olduğu elde edilir (Mishra, 2004). Aşağıda doğrudan ispata örnek verilmiştir.

Teorem: Bir asal sayı ikiden büyükse tektir.

İspat: Kabul edelim ki $p > 2$ bir asal sayı olsun. p nin tek olduğunu göstermek için p nin 2 ile bölünemeyeceğini göstermemiz gerekir. p bir asal sayıdır sadece 1 ve kendisi ile bölünebilir. $2 \neq 1$ ve $2 \neq p$ olduğundan dolayı 2 sayısı p 'yi bölen bir sayı değildir. Böylece p , 2 ile bölünemez. Bundan dolayı p tek bir sayıdır.

Dolaylı ispatlar: Bu yöntemde teoremin kendisini ispatlama yerine teoremin doğruluğunu gösteren başka bir önermenin doğruluğu ispatlanır (Akkaş vd., 1988). Dolaylı ispat çeşitleri aşağıda açıklanmıştır.

Olmayana Ergi İspat Yöntemi: Dolaylı ispat yöntemlerinden biri olan olmayana ergi yönteminde $p \Rightarrow q$ şeklindeki bir teoremi ispatlamak için $p \Rightarrow q \equiv q \Rightarrow p$ denkleğinden yararlanılır. Başka bir deyişle teoremin kendisi yerine karşıt tersi ispatlanır.

Örneğın; “ m bir doğal sayı olmak üzere m^2 çift ise, m de çifttir.” teoremini olmayana ergi yöntemiyle ispatlayalım.

p : “ m^2 çift sayıdır.” (HİPOTEZ)

q : “ m çift sayıdır.” (HÜKÜM)

Önermeleri için, $p \Rightarrow q$ yu ispatlamak yerine $q \Rightarrow p$ teoremini ispatlamak yeterli olacaktır. Buna göre,

q : “ m çift sayı değildir.” $\equiv$ “ m tektir.” (HİPOTEZ)

p : “ m^2 çift değildir” $\equiv$ “ m^2 tektir.” (HÜKÜM)

olduğundan, m tek ise, $m=2n+1$ olacak biçimde bir n doğal sayısı vardır. Bu durumda $m^2 = (2n+1)(2n+1) = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ olur. $2(2n^2 + 2n)$ çift ve $2(2n^2 + 2n) + 1$ tek olacağına göre, de m^2 tek olmak zorundadır.

Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Çelişki Yöntemi ile İspat: Bu yöntemde, verilen bir $p \Rightarrow q$ şeklindeki bir teoremi ispatlamak için $p \Rightarrow q \equiv (p \wedge q)$ denkleğinden yararlanılır ve $(p \wedge q) \equiv 0$ olduğı

gösterilir. Bir başka deyişle, teoremin kendisi yerine, teoremin hipotezi ve hükmünün değilini doğru varsayıp bunun bir çelişki olduğunu göstermeye çalışırız.

Örneğin; “Aynı doğruya paralel olan iki doğru birbirine paraleldir.” teoremi bu yöntemle ispatlanabilir. Doğrular birbirine paralel değillerse bir noktada kesişirler. Bu durumda düzlemde bir doğruya dışındaki bir noktadan birden çok paralel çizilmiş olur. Bu ise daha önceki kabulle “bir doğruya dışındaki bir noktadan ancak bir paralel çizilir” ile çelişir. Bu durumda “bir doğruya paralel olan iki doğru birbirine de paraleldir.” hükmü doğrudur.

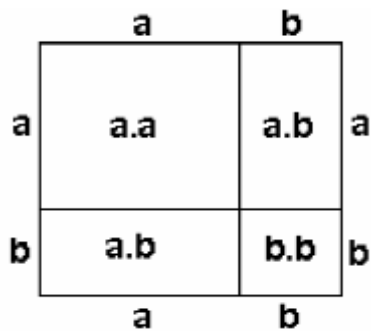
Aksine Örnek Verme Yöntemi: Bu yöntem iki şekilde uygulanabilir. Verilen bileşik önermenin hipotezini doğru kabul ederek hükmüyle çelişkili bir sonuca varmamıza yarayacak en az bir örnek bulmak ya da aynı mantığı içeren $p \Rightarrow q \equiv (p \wedge q)$ denkleğinden faydalananarak $(p \wedge q) \equiv 1$ olacak şekilde bir örnek verme şeklindedir.

Örneğin; $k, l \in N$ olsun. $p: (3 \mid k \wedge 5 \mid l)$ ve $q: (3+5) \mid (k+l)$ önermeleri için $(p \wedge q) \equiv 1$ olup olmadığını araştıralım. Bunun için $p \equiv 1$ iken $q \equiv 0$ olacak şekilde (en az) birer tane $k, l \in N$ sayılarını bulmamız yeterli olacaktır. Buna göre, $k=6$ ve $m=5$ için p önermesi doğrudur ama $(3+5) \mid (k+l)$ önermesi ise yanlıştır. O halde $(p \Rightarrow q) \equiv 0$ olur.

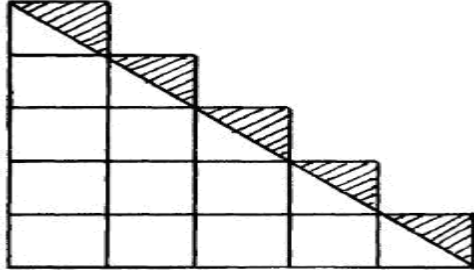
Bu ispat teknikleri dışında literatürde birçok ispat yapma teknikleri de bulunmaktadır. Bu tekniklere örnek olarak aşağıdaki yöntem verilebilir.

Geometrik şekiller yardımıyla yapılan ispatlar: Bu şekilde yapılan ispatlar, aşağıda verilen örneklerle anlatılmaya çalışılmıştır.

Örnek: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ olduğu aşağıdaki şekilde dörtgenler yardımıyla kolayca görülmektedir.



Dörtgenin alanının $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ olduğu şekilden görülmektedir. Başka bir örnek de aşağıda verilmiştir (Nelsen, 1993).



$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Yukarıdaki örnekte taralı olan üçgen sayısı n sayısını verirken; üst üste konulan karelerin sayısı da $\frac{n(n+1)}{2}$ işleminin sonucunu vermektedir.

Matematiksel ispat yapmak için birden fazla yöntem vardır. İspat yaparken öğrencilerin anlayacağı yöntemi kullanmak çok önemlidir. İspatların yapılmasında bir yöntem olarak da matematiksel modeller kullanılabilir. Modeller sayesinde soyut olan ispatlar somutlaştırılarak öğrencilerin ispatı daha kolay yapabilmeleri sağlanabilir. Aşağıda model ve matematiksel modelin tanımı ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

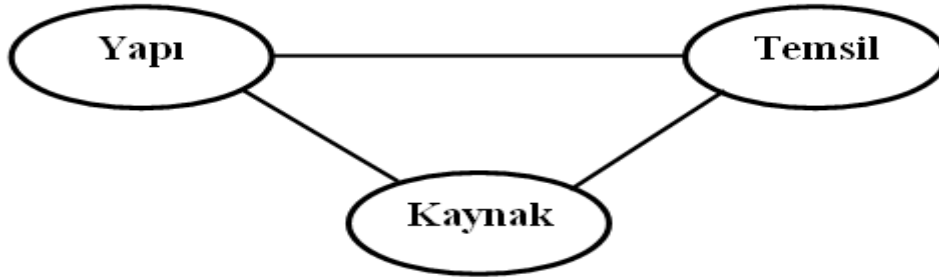
2.1.4. Model ve Matematiksel Model

Matematik eğitiminin amaçlarından biri de gerçek dünya ve matematik arasındaki ilişkiyi kurabilmektir. Model ve modellemenin matematik eğitiminde giderek daha da önemli bir hale gelmesinin sebebi olarak model ve modellemelerin gerçek yaşamı ve matematiği birbirine bağlayan olmasına dayandırılabilir (Ünveren, 2010). Ayrıca öğretim programlarında ve ders kitaplarında geçmiş yıllara oranla konuların gerçek yaşamla ilişkilendirildiği ve problemlerin daha çok gerçek yaşamdan alındığı görülüyor (English ve Watters, 2005).

Gerçek yaşam; insanların etkileşim halinde olduğu doğada, toplumda ve kültürde yer alan her şeydir. Gerçek yaşam ve matematik arasındaki karmaşık etkileşimleri açıklamak için herkes tarafından anlaşılabilir basit modeller kullanılır (Blum ve Niss, 1991). Model, gerçek yaşam durumu ile ilgili zihinde var olan yapılar ve bu yapıların dış temsilleridir (Ünveren, 2010).

Eğitimde önemli bir yer edinen model kavramının tanımı farklı şekillerde yapılmıştır. Daupeto ve Porenti (1999) modelleri belirli bir problemle ilgili gerçeğin sadeleştirilmiş temsili olarak tanımlamış ve problemin bazı yönlerinin görselleştirilmesi, özelliklerinin genellenebilmesi ya da kıyaslama yapılabilmesi için modellerin kullanılabileceğini ifade etmiştir (Akt: Özgün, 2012). Millwood ve Stevens’a (2014) göre de “modelleme” ve “model” terimleri birçok farklı aktiviteleri ve nesneleri tarif etmek için kullanılır.

Bununla birlikte Doruk’a (2010) göre model, karmaşık sistemlerin ya da yapıların anlaşılabilmesi ve yorumlanabilmesi için zihinde oluşturulan kavramsal yapıların dış temsillerinin oluşturduğu bir bütün, modelleme de bir problem durumunun modelini yansıtan süreç olarak tanımlanmıştır. Başka bir ifadeyle modelleme, matematiğin bilimsel bilgi üretme yolu iken matematiksel model ise gerçek yaşam durumlarının matematiğe yansımış şeklidir. Ayrıca model, verilen bir sistemdeki yapının temsil edilmesi olarak da tanımlanmaktadır (Hestenes, 2010). Bu tanıma göre sistem, birbiri ile ilişkili gerçek ya da hayali, basit ya da karmaşık, fiziksel ya da zihinsel nesneler kümesi iken yapı ise bu nesneler arası ilişkiler ağıdır ve model sembolik olarak Şekil 2.3’deki gibi gösterilmektedir:



Şekil 2.3. Modelin sembolik gösterimi (Hestenes, 2010)

Kapsamlı bir tanım da Kertil (2008) tarafından yapılmıştır. Kertil’e (2008) göre farklı simgelerle ve şekillerle aktarılan modeller, karmaşık sistemleri oluşturma, tanımlama ve açıklama sürecinde kullanılan kuralları, işlemleri, ilişkileri ve daha farklı yapıları içeren zihindeki kavramsal sistemlerdir. Bu tanıma ek olarak model teriminin zihinsel birer “şema” olarak kullanıldığını ve bu şemaların matematik eğitimi araştırmalarında hipotetik problem çözme modeli olarak problem çözme sürecinde

zihinde gerçekleşen soyutlama ve genelleme gibi süreçleri tarif ettiğini belirtmiştir. Son olarak Yıldız'a (2006) göre modeller gerçek değildir ve gerçeği de resmetmez; modeller fikirlerin gelişimi ve bilgiyi bir üst basamağa transfer edebilmek için yol göstericidirler. Fakat unutulmamalıdır ki hiçbir model bir hedefi yüzde yüz temsil etmez. Eğer model ile hedef tıpa tıp aynı olursa bu durumda model hedefin kendisi olur, dolayısıyla da modele ihtiyaç kalmaz (Sağırlı, Kırmacı ve Bulut, 2010).

Yapılan tüm bu tanımlardan yola çıkarak modeli bir varlığın, objenin, fikrin ya da olgunun görselleştirilmesi ve somutlaştırılması olarak ifade edebiliriz. Modeller, gerçekte göremediğimiz ya da anlamakta zorlandığımız sistemleri görmemize, anlamamıza ve yorum yapmamıza olanak sağlar. Ayrıca modellerle öğretim yönteminin gerçek objelerin, olayların ve olguların aynı veya başka maddeden yapılan örnekleri ile doğal ortamından sınıfa getirilmiş cisimler veya şekiller yardımıyla uygulanan bir yöntem olduğunu söylemek mümkündür (Çiltaş, 2011).

Modeller, öğretim süreci içerisinde öğretmen tarafından farklı amaçlarla kullanılabilir. Bunlardan bilişsel seviyede kullanılanlar, öğrencilere mantıksal düşünme ve problem çözme becerilerinin geliştirilmesinde yardımcı olurken, davranışsal seviyede olanlar, öğrenmeye karşı ilginin artmasını teşvik etmede, sosyal seviyede olanlar da uygun grup havası oluşturmada kullanılırlar (Cohen, Manion ve Morrison, 1996).

Soyut kavramları somutlaştırmak amacıyla elde edilen araçların hepsi model değildir. Çünkü modellerde bulunması gereken bazı özellikler vardır. Öğrenme ve öğretme ortamlarında kullanılan modeller daha çok bilimsel modeller olarak adlandırılmaktadır. Bilimsel modeller, bilimsel süreç becerileri kapsamında açıklanabilen modeller olup kompleks bir nesnenin ya da sürecin basitleştirilmiş bir resmi veya benzetmesidir (Günbatar ve Sarı, 2005). Dolayısıyla çalışmada bahsedilen modeller bilimsel modellerdir. Van Driel ve Verloop (1999) bilimsel modellerde bulunması gereken özellikleri şu şekilde ifade etmiştir;

- Bir model, her zaman temsil ettiği hedeflerle ilişkilidir. Bu hedefler bir sistem, nesne, olgu veya süreç olabilir.
- Bir model, doğrudan gözlenemeyen veya ölçülemeyen bir hedef hakkında bilgi elde etmek için kullanılan bir araç olup bu ölçeklendirme modelleri bir nesnenin

başka bir ölçekteki kopyasıdır (ev, köprü maketleri gibi) ve bilimsel model olarak kabul edilmezler.

- Bir model temsil ettiği hedef ile doğrudan etkileşmez, bu yüzden bir fotoğraf veya spektrum bir model olarak nitelendirilmez.
- Bir model hedefe uygun benzetmelere dayanır ve bu nedenle araştırmacıların modellenen hedef kavramla ilgili çalışmaları süresince test edilebilir hipotezler üretebilmelerine imkân verir.
- Bir model her zaman hedeften belirgin ayrıntılarla farklılık gösterir. Genel olarak bir model olabildiğince basite indirgenir ve yapılacak olan araştırmanın özel amaçlarına bağlı olarak hedefin bazı ayrıntıları model dışında bırakılarak farklılık oluşturulur.
- Bir model oluşturulurken, hedef ile model arasındaki benzerlik ve farklılıklar, araştırmacılara modelin temsil ettikleriyle ilgili tahminler yapabilme imkânı sağlayabilmelidir.
- Bir model karşılıklı olarak birbirini etkileyen süreçler sonucunda geliştirilir ve hedefle ilgili yeni çalışmalar ortaya çıktıkça modellerde düzeltilmeye ya da geliştirilmeye gidilebilir.
- Modellere doğru ya da yanlış diye sınıflandıramaz.

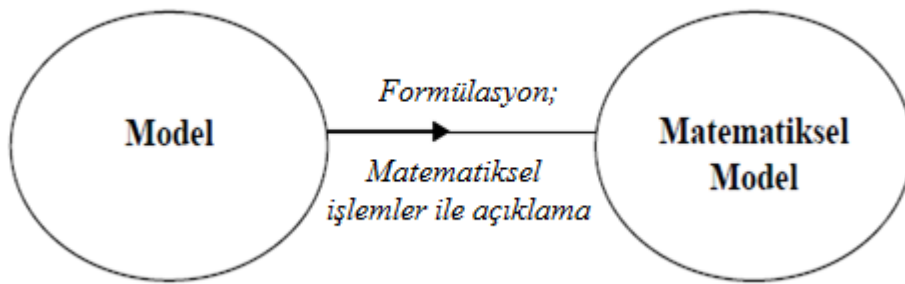
Matematiksel kavrama özgü model ise, kendisi ile kavram arasında ilişkinin kurulabileceği herhangi bir nesne, resim veya çizim anlamına gelmektedir (Van de Walle, 2012). Matematiksel model, bir problem durumunu ya da gerçek yaşam durumunu matematiksel olarak ifade etmek için zihinde var olan ya da oluşturulan denklem, fonksiyon, grafik ve matematiksel düşünme becerileri gibi yapıların tamamıdır (Lesh ve Doerr, 2003).

Lesh, Carmona, Hjalmarson ve Mason'a (2006) göre matematiksel modeller öğrencilerin, öğretmenlerin, araştırmacıların ve diğer öğretim elemanlarının matematiksel kavramlar ile ilgili uygulamalarda, öğrenme faaliyetlerinde daha iyi anlamayı, anlamlandırmayı ve kavramayı sağlayan kavramsal ve görsel araçlardır. Olkun ve Uçar'a (2007) göre matematiksel kavramın modeli, bu kavramın özelliklerini gösteren bir resim, sembol, grafik ve ya somut bir araçtır. Blum ve Niss'e (1991) göre de matematiksel model gerçek modelin, matematik yardımıyla oluşturulan türüne denir.

Yani matematiksel model, gerçek objeleri içeren, gerçek dünya olaylarını matematiksel nesnelere veya işlemlere dönüştürmedir.

Matematiksel modeller gerçek hayattan bir nesnenin veya durumun fiziksel özelliklerinin haricinde bu nesnenin ya da durumun yapısal özellikleriyle ve çalışma prensipleriyle ilgilenir (Lehrer ve Schauble, 2003, 2007; Lesh ve Doerr, 2003). Örneğin, $E = mc^2$ formülü kütle, ışık hızı ve enerji arasındaki ilişkiyi açıklayan bir matematiksel model olup kişinin bu modele sahip olması için formülü kullanarak işlemler yapabilmesinin yanı sıra, bu formülün temsil ettiği fiziksel yapıları anlayarak farklı bağlamlarda yorumlayabilmesi gerektirir (Erbaş vd., 2014).

Yapılan bu tanımlardan yola çıkarak matematiksel modeli Şekil 2.4'deki gibi özetleyebiliriz.



Şekil 2.4. Matematiksel model (Çiltas; 2011)

Şekil 2.4'de de görüldüğü gibi matematiksel model, gerçek modelin matematiksel formüllere, işlemlere ve denklemlere dönüştürülmesidir, yani bir modelin matematikle eşleştirilmesidir. Öğrenme sürecinde de ulaşılmak istenen hedef, gerçek hayat veya problem durumlarının modellerinden matematiksel modellere ulaşılmasıdır. Bu sayede öğrenciler bu modelleri matematiksel düşünme süreçlerinde kullanabileceklerdir (Gravemeijer ve Stephan; 2002).

Model oluşturma, fikirleri, nesneleri veya olayları zihinsel, fiziksel veya sözel yollarla göstermeyi içerir. Sistemlerin nasıl çalıştığını ve nasıl yapılandığını fiziksel veya zihinsel modelleri kullanarak sunmaktır. Aynı olay, nesne ve fikirler farklı şekillerde ifade edilebilir. Modelleştirme yüksek bir düşünme basamağıdır ve bilimsel literatürün önemli bir parçasıdır. Model oluşturma, bilimsel süreç becerilerinin son

basamaklarından biridir. Bu becerinin kazanılabilmesi için gözlem, sınıflandırma, hipotez kurma gibi birçok basamağın başarıyla geçilmiş olması gerekir.

Justi ve Gilbert'in (2003) "Kimya eğitiminde modeller ve modelleştirme" adlı çalışmalarında modelleştirmenin bir iskeleti oluşturularak model oluşturma'nın hangi süreçlerden geçerek oluştuğu vurgulanmıştır. Buradaki basamaklar incelendiğinde önce amaç belirlenmekte ve belirli süreçlerden geçerek amaç tamamlanmaktadır. Amaç tamamlandıktan sonra elde edilen modelin sınırlılıkları ve faaliyet alanı belirlenmektedir. Bu sayede sonraki aşamalarda modelleştirme yeteneği düşük kişilerce kullanılan modelin, gerçeğin kopyası olarak değil de sınırlılıkları olan bir nesne olarak görülmesi sağlanır (Akt: Yıldız, 2006).

2.1.5. Modellerin Sınıflandırılması

Modellerin sınıflandırılmasına yönelik çalışmalarda modellerin; bilimsel olan/olmayan modeller, görünüş bakımından modeller (somut-soyut modeller), işlevleri bakımından modeller (tanımlayıcı-açıklayıcı-betimleyici modeller) olarak çeşitli sınıflandırmalarının yapıldığını görmek mümkündür (Güneş, Gülçiçek ve Bağcı, 2004).

Gilbert ve Boulter (1998) modelleri; maddesel modeller (bir fiziksel objenin kullanıldığı modeller), görsel modeller (bir diyagramın kullanıldığı modeller), sözel modeller (sözlü açıklamaların yapıldığı modeller) ve simgesel modeller (matematiksel simgelerle ifade edilen modeller) şekilde sınıflandırmışlardır.

Harrison ve Treagust (2000), yaptıkları çalışmada modelleri; ölçeklendirme, pedagojik analogik, simgesel veya sembolik, matematiksel, teorik, haritalar, diyagramlar ve tablolar, kavram-süreç, simülasyonlar, zihinsel vb. şekilde gruplara ayırmıştır.

2.1.6. Modellerin Faydaları

Yapılan araştırmalar sonucunda modellerin kullanımının eğitimde fayda sağladığı sonucuna varılmıştır. Aynı zamanda matematik dersi öğretim programında modellerin kullanımı teşvik edilmektedir. Bunun nedeni modellerin öğretimde öğrenciye birçok açıdan kolaylık sağlamasıdır. Modellerin sağladığı faydalar da araştırmacılar tarafından incelenmiştir.

Harrison (2001) modellerin öğrenme ortamında kullanılma sebeplerini şu şekilde sıralar:

Kolaylaştırma: Karmaşık soyut kavramları, nesne ve süreçleri gözünde canlandırma fırsatı sunduğu için, anlaşılması güç soyut konularda daha kolay algılama sağlar. Somutlaştırılan konular, öğrencinin zihninde daha çabuk yerini alır. Konu öğrencilerin gözünde kolaylaştığı için öğrenme zamanı kısalır, uygulama ve alıştırma yapmaya daha çok zaman bırakır.

Abartma: Modeller konu veya sürecin temel özelliklerini abartarak fikirlerin kilit görünüşlerine dikkat çeker. Özellikle de model gereksiz detay ve çizimlerden arındığı zaman öğrenme de çok daha etkili olur. Ancak bu detaylardan arındırma ve bazı yönlerini vurgulama tehlikeli olabilir. Modelini yapmak istediğimiz, gerçek nesne veya süreçten uzaklaşırsa yanlış kavramalara da götürebilir.

Tanıdıklık: Modeller, animasyonlar ve simülasyonlar sayesinde basit nesnelerden dizilerek gelir. Günlük hayatımızdan tanıdık nesnelerle oluşturulan modeller öğrencilerin kavramalarını daha da kolaylaştırmaktadır.

Ulaşılabilirlik: Öğrencilerin modellere istedikleri zaman ulaşabilmesi tekrar yapmada veya bireysel çalışmada bir başka kolaylık sağlamaktadır.

Heddens (2005) de model kullanımının öğrencilere; problem çözmede ekip çalışması yapabilmelerini ya da sunum yapabilmelerini, problem çözmede birden çok yolun olduğunu görebilmelerini, matematiksel düşüncelerini geliştirebilmelerini ve ifade edebilmelerini sağladığını belirtmiştir (Akt: Aydın, 2008).

Van de Walle'ye (1998) göre matematiksel bir kavram çocuğa doğrudan gösterilemez. Bunun yerine çocuğa matematiksel modeller kullanılır. Bu modeller çocuğun öğrenmiş olduğu matematiksel kavramı zihninde oluşturmaya yardımcı olur.

Modeller bir nesnenin yapısının nasıl olduğunu veya bir sürecin nasıl meydana geldiğini anlamada bize yardımcı olurlar. Öğrenme ortamında konunun rahat kavranması ve kavrananların test edilmesi için kullanılabilir. Harrison (2001), modellerin öğrenme ortamında kullanılmasının, karmaşık soyut kavramları, nesne ve süreçleri zihinde canlandırma fırsatı sunduğu ve anlaşılması güç olan soyut konularda daha kolay algılamayı sağladığı için önemli olduğunu vurgulamıştır. Fikirlerin gelişimi

ve bilgiyi bir üst basamağa transfer edebilmek için yol göstericidir. Ayrıca modeller, öğrencilerin kendileriyle diğer kişilerin görüşleri hakkında düşüncelerine, modellerle araştırma yapmalarına, kendi soyut fikirlerini açıklamada zorlandıklarında modellerle kendilerini ifade etmelerine ve üzerinde akıl yürütmelerine olanak sağlar (Van de Walle, 2012).

2.1.7. Matematiksel İspat ile Matematiksel Modeller Arasındaki İlişki

Matematik, her adımda daha önceki bilgi ve becerilerin kullanımını gerektiren, bilgilerin üst üste yığılmadığı aynı zamanda iç içe geçtiği bir bilim dalıdır. Günümüzde matematiksel işlem süreçlerini ezberlemek ve bu işlemleri benzer problem durumlarında uygulamak yeterli değildir (Moralı, Uğurel, Tüknüklü ve Yeşildere, 2006). Öğrencileri geleceklere hazırlamada, matematiksel düşünce sistemini ve yeni kavram oluşturma gelişimini sağlayan karmaşık problem durumlarıyla karşılaştırmak ve deneyim sahibi olmalarını sağlamak gerekmektedir (Lesh ve Zawojewsky, 2007). Bu yüzden matematiğin yaşam içindeki anlamlılığını ve gücünü vurgulamak amacıyla öğretmenlerden, öğrencilerine kavramsal yapıları anlamlı bir biçimde kazandırmaları beklenmektedir. Öğrencilerden beklenen ise bu doğrultuda problem çözme becerilerini geliştirmeleridir. Bu da ancak ispatlamanın tam olarak anlaşıldığı sağlıklı sınıf ortamlarında gerçekleştirilebilir (Ünveren, 2010). Matematik öğretmeni adaylarının üniversite eğitimlerine bakıldığında, ispat yapma becerilerinin üst seviyede olması gerekmektedir. Matematik öğretmeni yetiştirme programındaki birçok dersin temelinde tanım ve teoremler yer almakta ve bu dersler sayesinde öğretmenlerin alan bilgisi oluşmaktadır (Moralı, Uğurel, Tüknüklü ve Yeşildere, 2006).

Lisans düzeyindeki alan derslerinin hemen hepsinde ispat yapma vardır. Üniversite düzeyindeki ispatlar, hem önceki teoremleri ve formel tanımları kullanmayı hem de anlamayı, üretici ve derin düşünmeyi ve kavramayı da içermelidir (Dede ve Karakuş, 2014). İspat yapmaya lisans eğitiminin başlangıcından itibaren yer verilmesinin nedenlerinin başında; öğrencilerin diğer derslerde ispatla karşılaştıkları zaman hangi yöntemin kullanıldığını veya kullanılabileceğini belirlemelerini sağlamak gelmektedir. Öğretmen adaylarının ispat yapabilme becerileri hem matematikçi hem de ilerde matematik öğretmeni olarak sahip olması gereken bilgi düzeyini etkileyecektir (Moralı, Uğurel, Tüknüklü ve Yeşildere, 2006).

İspatın matematikte öneminin çok fazla olduğu bilinmesine rağmen öğrenciler ispat yaparken zorluk yaşamaktadırlar. Öğrencilerin ispat yapma konusunda yaşadıkları zorlukların sebepleri irdelendiğinde, bu sebeplerden birinin de üniversitelerde okutulan matematik derslerindeki ispatın ilk etapta öğrencilerde anlaşılmaz ya da zor anlaşılır bir izlenim bırakmasıdır. Bu yüzden de çoğu öğrenci ispatı anlamadan, teoremler ve ispatları hakkında bir şey bilmeden sadece sınav geçme amacıyla sınavlara girip dersi geçer. Bu da matematiğin temel taşlarından biri olan ispatın bir kat daha zor anlaşılır olarak algılanmasına neden olur (Doruk ve Kaplan, 2013). Böylece ispatlar öğrencilerin sadece sınavlardan geçmek için ezberledikleri bilgi yığını olarak kalmaktadır. Eğer öğretmenler geniş öğrenme ortamı sunarak değişik kanıt yöntemlerini verirlerse, öğrenciler de matematiksel düşünciyi daha iyi kavrayarak yaratıcılıklarını artırır (Altıparmak ve Öziş, 2005). Öğrencilerde matematiksel düşüncenin ve kavramsal bilginin gelişmesinde öğretmenlerin yanı sıra sınıf içinde yapılan sorgulamalar da önemli bir rol oynamaktadır (Martino ve Maher, 1999). Ayrıca öğretmenlerin sınıf içinde kullandıkları yöntemler de öğrencilerin kanıt kapasitelerini artırmakta etkilidir (Stylianides, 2007). Bu yöntemlerden biri de matematiksel model ve modellemedir.

Matematiksel anlamda özel durumlardan ve örneklerden yola çıkarak genellemelere ve kurallara ulaşma yolu ile kurulan bir model aracılığı ile bir ispat gösterilebilir, anlatılabilir ve yorumlanabilir. Bireyin yaşadığı çevrede karşılaştığı bir olayda ya da konuda başarılı olabilmesi için öncelikle kendini o konuda yeterli hissetmesi son derece önemlidir (Gümüş, 2015). Bireyin kendi yaşamında karşılığı olan bir model durumunun kullanımı da matematiksel ispatların öğretiminde formal yöntemle yapılan öğretimden daha etkilidir (Ünveren, 2010). Fischbein'e (1987) göre; ispatın formal dili ve öğretimde kullanılan model dilin farklı yapıda olması model durumun kişilere ispatı hatırlamalarında bir analogi olma özelliği katar. Böylece kişiler herhangi bir teoremi özel modelinden yola çıkarak ilk defa gerçekliyormuşçasına ispatlama deneyimini yaşarlar (English, 2003).

Öğretmenlerin derslerde uyguladıkları yöntem ve teknikler, öğrencilere olan yaklaşımları öğrencilerin derse yönelik tutumlarını etkilemektedir. Matematik öğretmenleri, derslerde uyguladıkları strateji, öğretim yöntem ve teknikleri öğrencilerin matematiği öğrenmeleri üzerinde oldukça etkili bir faktördür (Dursun ve Dede, 2004). Teorem ispatı yaparken öncelikle teoremin ne anlatmak istediğini anlamak ispat

yapmanın ilk adımıdır. Öğrenciler soyut olarak verilen teoremin ifadesini anlayamadıkları için de ispatına başlayamamaktadırlar. Bu noktada matematiksel modeller ile teoremin ifadesi somutlaştırılarak öğrencilerin teoremi anlamlandırması sağlanabilir. Öğrenciler kendilerine özel modeli kullanarak teoremi anlamlandırır ve sonradan ispatını yaparlar. Bu yüzden matematiksel modellerin ispat yapmada kullanılması son derece önemlidir.

2.2. İlgili Araştırmalar

Bu bölümde matematiksel ispatla ilgili yapılan araştırmalar, matematiksel modeller ile ilgili yapılan araştırmalar ve ispat ile modellerin birlikte ele alındığı araştırmalar ayrı ayrı başlıklar altında incelenmiştir.

2.2.1. Matematiksel İspat İle İlgili Araştırmalar

Matematik ile ispat arasında sıkı bir ilişki vardır. Çünkü matematik neyin doğru ya da yanlış olduğunu göstermekle birlikte bir durumun ya da sistemin neden doğru ya da yanlış olduğunu gösterir ve ne işe yaradığını ikna etme ile de ilgilenir (Hanna, 2000). Son yıllarda yurt dışında ispat konusunda birçok çalışmanın (Almeida, 2000; Jones, 2000; Knuth, 2002; Raman, 2003; Recio ve Godino, 2001; Weber, 2001) yapılmış olması matematik eğitiminde ispatın anlamı ve öneminin giderek arttığını göstermektedir. Matematiksel ispat ile ilgili özellikle yurt dışında birçok çalışmanın olduğu görülmekte ve ülkemizde de son on yıl içerisinde matematik eğitimcilerinin bu konu ile ilgili çalışmaları bulunmaktadır.

İspatın matematik eğitimindeki önemini inceleyen çalışmalara bakıldığında; Bahtiyari-Albayrak (2010) çalışmasında, sekizinci sınıf öğrencilerinin mevcut matematik eğitimi ile matematik eğitiminde ispatın önemi hakkındaki görüşlerini belirlemeye çalışmıştır. Araştırma sonucunda, okulların teknik ve fiziki imkânlar bakımından yetersiz olduğunu, teknik ve fiziki imkânları yeterli olan okullarda ise bu imkânların etkili olarak kullanılmadığı gözlenmiş, ayrıca öğrencilerin birçoğunun ispatın anlamından ve gerekliliğinden haberdar olmadıkları ve öğrencilerin ispat ve muhakeme açısından yeterli deneyime sahip olmadıkları tespit edilmiştir. Uğurel (2010) de yaptığı çalışmasında, ortaöğretim öğrencilerinin ispat kavramına yönelik bilgilerini

sınıf içi iletişime dayalı olarak nasıl düzenlediklerini belirlemeyi amaçlamıştır. Bu amaçla, öğrencilerin sınıf içi iletişim süreçlerinde var olan söylemlerinden yararlanılmıştır. Araştırma sonucunda ortaya çıkan bulgular, öğrencilerin ispata yönelik öğrenmelerinde ve bilgiyi yapılandırmalarında öğretmenleri ile aralarında var olan sınıf içi söylemlerin önemli etkisi olduğunu; öğrencilerde, ispatın ne olduğuna, ispata yönelik temel kavramların anlamlandırılmasına, ispat yapma yöntemlerine, ispat yapma mekanizmasının neyi içerdiğine ve nasıl uygulandığının algılanmasına ilişkin bazı bilgi eksikliklerinin olduğunu göstermiştir. Yapılan bu iki çalışmada da öğrencilerin ispat yapmaya yönelik bilgi eksikliklerinin olduğu, yeterli deneyime sahip olmadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Hemmi (2006) doktora tez çalışmasında, matematik bölümündeki öğrencilerin farklı derslerde ispatla nasıl karşılaştıklarını ve öğretim üyelerinin ispat hakkındaki bilgilerini öğrencileriyle nasıl paylaştıklarını incelemiştir. Araştırma, 170 üniversite öğrencisi ve 40 matematikçi ile yürütülmüştür. Araştırma bulgularına bakıldığında, öğrencilerin ispat etkinliklerinin başlangıcında ispata karşı pozitif bir yaklaşımlarının olduğu görülmüştür. Öğretim üyelerinin derslerin başlangıç aşamasında çok fazla ispatla uğraşmak istememelerine rağmen öğrencilerin en başta ispatla karşı karşıya geleceklerini düşünmekte oldukları ve ispatın uygulamalardaki rolünü, ispatın ne anlam ifade ettiğini ve ispatın niçin yapıldığını anlamakta zorluk yaşadıkları görülmüştür. Benzer bir çalışma yapan Bayazit (2009), matematik öğretmeni adaylarının matematiksel tanımlar, ispat ve matematik hakkındaki fikirlerini araştırmıştır. Bununla birlikte öğretmen adaylarının ispat yaparken matematiksel tanımları kullanabilme ve başkası tarafından yapılmış olan ispatları değerlendirebilme becerilerini de incelemiştir. Araştırmada Lineer Cebir dersi alınmış ve çalışmaya katılmaya gönüllü olan dört öğretmen adayıyla yürütülmüştür. Araştırma sonuçlarına göre matematik öğretmeni adaylarının matematik hakkında farklı fikirlere sahip olduklarını ve bu farklılığın matematiksel ispat yapma yaklaşımlarını etkilediğini göstermiş ve öğretmen adaylarının kavram tanımı bilgilerinin kavram imajı oluşturma süreçlerine olumlu katkı sağladığı görülmüştür. Buradan farklı fikirlere sahip olan öğrencilerin ispat yapmaya da farklı şekillerde yaklaştıklarını, ispat ile ilgili olumlu düşünceleri olsa bile ispatın nasıl yapıldığı konusunda ve ispatın önemi hakkında bilgi eksikliklerinin olduğu söylenebilir.

Weber (2004) çalışmasında, üniversite seviyesinde okutulan matematik derslerinin tanım→teorem→ispat formatında anlatıldığını ancak bu şekilde yapılan eğitimin nedenlerinin ve bu formatta yürütülen derslerin öğrencilerin öğrenmelerini nasıl etkilediği üzerine sınırlı sayıda çalışmanın olduğunu vurgulamıştır. Matematik derslerinin neden bu formatta işlendiğini derinlemesine inceleyebilmek için reel analize giriş dersini anlatan bir öğretim üyesiyle dersinde nasıl bir öğretim yaptığını ve neden bu formatta dersini işlediğini araştırmak istemiştir. Araştırmaya konu olan ders hocasının reel analize giriş dersini tanım→teorem→ispat formatında anlattığı görülmüş, ayrıca dersin bu şekilde anlatılmasında ders hocasının ders hakkında sahip olduğu bilgi kadar matematiğe karşı tutumu, öğretim stili, öğrenciler ve eğitim sistemi bileşenlerinin hepsinin etkisinden söz edilmiştir. Aynı şekilde Abramovitz, Berezina, Berman ve Shvartsman (2009) “bir teorem nasıl anlaşılır” adlı çalışmalarında, kişisel öğrenme metodunu teoremler üzerinden uygulamalı olarak geliştirmek istemişlerdir. Bunun için analiz dersi kapsamında Rolle ve Fermat teoremleri ile ilgili kişisel öğrenme etkinlikleri, Rolle ve Fermat teoremleri ile ilgili örnekler, genellemeye yardımcı olacak sorular, doğru yanlış soruları ve boşluk doldurma etkinliklerine yer verilmiştir. Yapılan çalışma sonucunda öğrencilerin farklı öğrenme stillerinin olması, teorem ispatını farklı şekillerde anlamalarına yol açtığı görülmüştür. Dersin anlatılış biçimi öğrencilerin teorem ispatlarını anlama düzeyini bir ölçüde değiştirebilir fakat esas önemli etken öğrencilerin farklı öğrenme stillerinin olmasıdır.

Powers, Craviotto ve Grassl (2010) da benzer olarak soyut cebirdeki ispatların doğruluklarının değerlendirilmesinin ispat yapma üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Çalışma sonunda, matematiksel ispat yapmanın ileride matematik öğretmenlerini yetiştirebilmek için çok önemli bir yetenek olduğunu fakat birçok üniversite öğrencisinin ispat yapmakta güçlük yaşadığını, ayrıca matematik ve ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin yapılan ispatların doğruluğunu değerlendirme yeteneklerinin de sınırlı olduğunu ve bu yüzden öğrencilerin ispat değerlendirme yeteneklerinin geliştirilmesinin ispat yapma yeteneklerini geliştireceği ön görüşünde bulunulmuştur. Bu çalışmaya bakılarak lisans düzeyinde teorem ispatı yapmanın öğrencilerin meslek hayatları için önemli olduğu sonucu çıkarabilir. Doruk ve Kaplan (2013) da ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı ile ilgili ispat değerlendirme becerilerini incelemek amacıyla, üçüncü sınıfta

öğrenim gören 6 matematik öğretmeni adayı ile çalışmışlardır. Araştırmanın verileri yarı yapılandırılmış “Dizilerin Yakınsaklığı Kavramı İspat Değerlendirme Mülakat Formu” (DYKİDMF) ile elde edilmiştir. Verilerin analizleri sonucunda öğretmen adaylarının ispat değerlendirmede başarısız oldukları ve bu başarısızlığın sebebi olarak, öğretmen adaylarının ispatlardaki anahtar düşüncelere dikkat etmemeleri ve ispatları öğrenmek için düşünce sürecine girmeden direkt olarak ezberleme yoluna gittikleri gözlenmiştir. Böylece ispatların doğruluklarının değerlendirilmesi sürecinde öğrencilerin başarısız oldukları, ispat üzerine düşünmeden direk ezberleme yoluna gittikleri ve bu yüzden ispat değerlendirme becerisi kazandırılması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

Matematikte ispatın öneminin artışı ile çeşitli yaş gruplarındaki öğrencilerin ispat yapmadaki düşünsel süreçleri ve gelişimleri araştırma konusu haline getirmiştir. (Knuth, 2002; Stylianides, 2007). Ancak ispat yapmanın, hemen hemen bütün öğretim dönemlerinde öğrencilerin sıkıntı yaşadığı, korktuğu ve çoğunlukla da sevilmeyen bir süreç olduğu yapılan çalışmalarla ortaya konmuştur. (Almeida, 2003; de Villiers, 1990; Jones, 2000; Raman, 2003). Yani ispat matematiğin gelişmesi ve büyümesi için önemli olmasına (Mingus ve Grassl, 1999) rağmen, öğrenciler genellikle matematiksel ispatın gerekliliğine inanmamaktadırlar (İskenderoğlu, 2010; Moralı, Uğurel, Tüknüklü ve Yeşildere, 2006).

Öğrencilerin ispat yapmaya karşı olan tutum, görüş ve inanışları ile ispat yapma süreçleri ile ilgili yapılan çalışmalara bakıldığında; Karaoğlu (2010) yüksek lisans tez çalışmasında, matematik öğretmeni adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performanslarını, bu fikirlere ilişkin görüşlerini ve teoremleri ispatlamada bu fikirlerin kullanımının etkisini incelemiştir. Çalışmanın başlangıcında araştırmacı tarafından hazırlanan, anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş soruları içeren çalışma kâğıtları kullanılmıştır. Öğretmen adayları çalışma kâğıtlarında yer alan soruları yanıtlarken yaşanan süreç gözlemlenmiş ve not tutulmuştur. Sonra öğretmen adaylarıyla görüşmeler yapılmıştır. Araştırma sonucunda, matematik öğretmeni adaylarının, anahtar nokta ve fikirlerden yararlandıklarında; ispat yapma performanslarının arttığı ve teoremleri ispatlamak için daha istekli davrandıkları gözlemlenmiş olup öğretmen adayları, matematik derslerinin ispatların anahtar nokta ve

fikirler üzerine vurgu yapılarak öğretilmesinin, ispat yapma performanslarını arttıracakını belirtmişlerdir.

Ceylan (2012) çalışmasında ilköğretim matematik öğretmenliği 2. sınıf adaylarının GeoGebra matematik yazılımı ile geometriye yönelik ispat yapma becerilerini ve kullanmış oldukları ispat biçimlerini incelemiştir. Çalışmada, nitel bir araştırma modeli olan durum çalışması yöntemi kullanılmış olup 6 matematik öğretmeni adayı ile çalışılmıştır. Uygulama sürecinde öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerini belirlemek için yarı yapılandırılmış görüşmelerden yararlanılmıştır. Araştırmanın sonucunda öğretmen adayları verilen bir ispat probleminde GeoGebra yazılımını amaçları doğrultusunda kullanabilmişler ve çözüm sürecinde doğru sonuca ulaşmak için yazılımda yer alan birçok araçtan yararlanmışlardır. Böylece öğretmen adaylarının farklı çözüm yolları arama, geometrik özellikleri keşfetme, genelleme ve akıl yürütme becerilerinin desteklendiği görülmüştür. Ayrıca GeoGebra yazılımı birçok özelliği ve araçları sayesinde öğretmen adaylarının varsayım yapmalarına yardımcı olmuş ve onları ispat yapmaya teşvik etmiştir.

Benzer olarak İmamoğlu (2010) çalışmasında, öğrencilerin matematiksel ispat konusundaki tutum ve inançlarını, ispat yaparken kullandıkları yöntem ve akıl yürütme şekillerini, ayrıca başkaları tarafından yapılan ispatları nasıl değerlendirdiklerini araştırmayı hedeflemiştir. Araştırma sonucunda, birinci sınıf ve son sınıf öğrencilerinin altyapı, tutum, öz yeterlik ve inanç puanları arasında istatistiksel olarak anlamlı farklar olduğunu ortaya çıkarmıştır. Ayrıca birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel ispat yaparken tümevarımsal akıl yürütme kullanımına eğilimli oldukları, son sınıf öğrencilerinin ise daha çok genelleme isteği duyduklarından tümdengelimsel yöntemler kullanmaya çalıştıkları görülmüştür. İskenderoğlu, Baki ve Palancı (2011) çalışmalarında, öğretmen adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini belirlemeye yönelik bir ölçek geliştirmeye çalışmışlardır. Çalışmada farklı sınıf seviyelerinden 187 ilköğretim matematik öğretmeni adayına ait ölçek formu değerlendirmeye alınmıştır. Yapılan analizler sonucunda ölçekte 29 likert türü ve 3 tanede açık uçlu soru yer almıştır. Bu çalışma sonucunda geliştirilen “Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği” ile ileride öğretmen olarak karşımıza çıkacak ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının okullarda eğitim-öğretim sırasında kanıtla yönelik güven, tutum-inanç, öz değerlendirme ve zihinsel süreçlerinin daha kolay ortaya

çıkarılabileceğine vurgu yapılmıştır. Ayrıca ölçeğin sadece ilköğretim matematik eğitimi alanında değil, diğer konu alanlarındaki öğretmen ve öğretmen adaylarına da uygulanabileceği belirtilmiştir.

Kayagil (2012) çalışmasında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini ve bu görüşlerin cinsiyet, mezun olunan lise türü, sınıf ve matematikle ilgili bilimsel bir etkinliğe katılma durumu değişkenlerine göre farklılık gösterip göstermediğini incelemiştir. Araştırma ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 357 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Araştırmanın verileri ispata ilişkin görüş ölçeği yardımıyla elde edilmiştir. Araştırma sonucunda, öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik ne olumlu ne de olumsuz görüşlerinin olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının bu görüşleri arasında cinsiyete ve matematikle ilgili bilimsel etkinliğe katılma durumuna göre istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık bulunamamıştır. Ayrıca sınıf ve mezun olunan lise türü değişkenlerine göre de gruplar içi ve gruplar arası anlamlı farklılık tespit edilememiştir. Yine matematik öğretmeni adaylarının ispat hakkındaki görüşlerini incelemeyi amaçlayan Öçal ve Güler (2010), bu amaçla 22 öğretmen adayının katılımı ile ispat hakkında yirmi dakika süren beyin fırtınası etkinliği yapmışlardır. Adaylar ispat hakkındaki düşüncelerini sesli bir şekilde belirtmişler ve her bir adayın düşüncesi tahtaya yazılmıştır. Beyin fırtınası etkinliğinde adaylar ispat hakkında toplam 21 farklı anahtar kelime türetmişlerdir. Araştırmanın ikinci aşamasında bu anahtar kelimelerini kavram haritası ile göstermeleri ve anahtar kelimeler arasındaki ilişkileri göstermeleri istenmiştir. Adayların geliştirdikleri kavram haritaları kullandıkları anahtar kelimeler ve aralarındaki ilişkilere göre incelenmiştir. Araştırmada elde edilen bulgulara göre öğretmen adaylarının ispat hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları ve ispat hakkındaki düşünceleri arasındaki ilişkileri net olarak ortaya koyamadıkları görülmüştür.

Güler, Özdemir ve Dikici (2012) çalışmalarında, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini, tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme ve bu ikisi arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Araştırmanın sonucunda, öğretmen adaylarının ispat ile ilgili görüşlerinin tam oluşmadığı ve tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerilerinin düşük olduğu ayrıca ispat hakkındaki görüşleriyle tümevarım yöntemiyle ispat yapabilme becerileri arasında istatistiksel

olarak pozitif ve anlamlı bir ilişki olduğu görülmüştür. Matematik öğretmeni adayları ile yapılan başka bir çalışmada ise öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin ne olduğu araştırılmıştır (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006). Çünkü ispata ilişkin görüşler sayesinde öğretmen adaylarının ispat yapabilme becerilerine ilişkin varsa sorunlar ortaya çıkacak ve sorunları gidermek için ilk adımı oluşturacak bilgiler sağlanacaktır. Çalışmadan elde edilen bulgulara göre, öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı, ispat yapmanın matematik ve matematik öğretimi açısından önemini bilmedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Yapılan bu iki çalışma dikkate alındığında öğretmen adaylarının ispatın ne olduğu ve matematik için önemi hakkında yeterli bilgiye sahip olmadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Ayrıca öğrencilerin ispat yapma süreci ile ilgili yaşadıkları zorlukların neler olduğu ile ilgili yapılan çalışmalardan Güler, Kar, Öçal ve Çiltaş (2011), matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmada yaşadıkları güçlükleri belirlemek amacıyla yaptıkları çalışmalarında öğretmen adaylarının yaşadıkları güçlükleri *eşitlik kullanma, örneklerden yararlanma ve görselleştirme* olarak belirlemişler ve elde edilen bulgular sonucunda öğretmen adaylarının daha çok *eşitlik kullanma* stratejisinde zorlandıklarını ve ayrıca, matematiksel tümevarım yapabilmeye yetersiz olduklarını, ispat yaparken karşılaşılan en önemli sorunun ise kolay bir yol olarak görülen örnek vererek ispat yapma yoluna gidildiğini belirlemişlerdir. Başka bir çalışmada, lise öğrencilerinin neredeyse tamamının istenilen düzeyde tümevarım ve tümdengelim yoluyla ispat yapamadıkları ortaya çıkmıştır (Özer ve Arıkan, 2002). Harel (2001) sayılar teorisi dersine katılan öğretmen adaylarının tümevarımla ispat yapmalarındaki kavram gelişimlerini ve güçlüklerini incelemiştir. Bu çalışma sonucunda neredeyse bütün adayların genelleme yapabilmeye yetersiz kaldığı tespit edilmiştir.

Gibson (1998) da, öğrencilerin matematiksel ispat konusunda yaşadıkları zorlukları dört değişkene bağlamış olup bu değişkenler, matematiksel ispatın doğasını ve kuralları anlama, kavramsal anlama, ispat teknikleri ve stratejiler ve biliş kaygısıdır. Ayrıca Weber (2006) de öğrencilerin matematiksel ispatla ilgili yaşadıkları problemler üzerine araştırma yapmış ve bu problemleri üç grupta sınıflandırmıştır. Birinci grup, öğrencilerin matematiksel ispat hakkında sahip oldukları kavramsal bilginin yetersiz oluşu; ikinci grup, öğrencilerin bir kavramı ya da teoremi yanlış anlamaları ve buna

bağlı olarak bu kavramı veya teoremi yanlış uygulamaları iken üçüncü grup ise, öğrencilerin ispat için strateji geliştirmede yetersiz oluşlarıdır.

Knapp (2005) çalışmasında ispat ile ilgili yapılan çalışmaların bir derlemesini yapmıştır. Bu sayede öğrencilerin matematiksel ispat ile ilgili yaşadıkları sorunlar literatürden yararlanarak sınıflandırılmıştır. Çalışma sonucunda matematiksel ispat ile ilgili yapılan çalışmalar; öğrencilerin ispat yetenekleri ve yaşadıkları güçlükler, öğrencilerin ispata yönelik düşünceleri, öğrencilerin yaptıkları ispatların sınıflandırılması ve öğrencilerin ispat yapmak için hangi bilgilere ihtiyaç duyduğu şeklinde sınıflandırılmıştır. Ayrıca çalışmada elde edilen bulgular ışığında öğrencilerin ispat yeteneklerini geliştirmek için daha fazla ispat yapma uygulamaları yapmaları gerektiği vurgulanmıştır. Bu yüzden ispata geçiş derslerinin faydalı olabileceği ifade edilmiştir. Benzer olarak Gökkurt, Deniz, Akgün ve Soylu (2014) da çalışmalarında, matematik eğitimcilerinin, öğretmenlerin, öğretmen adaylarının, üniversite ve ortaöğretim öğrencilerinin ispata yönelik görüşleri, ispat yapabilme düzeyleri, ispat yapma sürecinde yaşadıkları zorlukları, ispat yapmada kullandıkları yöntemleri, strateji ve yaklaşımları, ispat çeşitleri, ispatın matematik eğitimindeki rolü ve ispatla ilgili süreçler üzerine yapılmış olan araştırmalardan bazılarının derlenmesine çalışılmıştır. Araştırma sonunda, incelenen çalışmalarla öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispat yapma sürecinde kullanılan yöntemlere, stratejilere, yaklaşımlara ve ispat yapma yetilerini geliştirme yerine ispat yapma sürecine odaklandıkları görülmüştür. Bu yüzden ispat sürecinin kavrama alanına ağırlık verilmesi ve bu doğrultuda çalışmalar yürütülmesi yararlı olacaktır.

Güler (2013) doktora tez çalışmasında, matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki matematiksel ispat süreçlerini incelemiştir. Araştırmada nitel durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu amaçlı örnekleme yöntemine göre belirlenen ve araştırmaya katılmaya gönüllü olan 10 orta öğretim matematik öğretmeni adayı oluşturmaktadır. Çalışmada her bir öğretmen adayı ile 6 klinik mülakat yapılmıştır. Bu mülakatlardan birincisi öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini belirlemek için diğer 5 klinik mülakat ise cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerini belirlemeye yönelik olarak gerçekleştirilmiştir. Araştırmada kullanılan her bir etkinlik temelli mülakat cebir kavramlarına yönelik problem çözme, ispat yapma ve başkası tarafından yapılan ispatın doğruluğunu

değerlendirme etkinliklerinden oluşmaktadır. Araştırmanın bulgularında, öğretmen adaylarının matematiksel ispat ile ilgili genellikle olumlu görüşlere sahip oldukları görülmüştür. Bununla birlikte öğretmen adaylarının ispat süreçlerinde; kavram imajı oluşturma, problem çözme, ispat yapma ve ispatın doğruluğunu değerlendirme etkinliklerinde sahip oldukları güçlüklerin literatürde yer alan güçlüklerle paralel olduğu görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının ispat yapma süreci içerisinde değerlendirilen problem çözme süreci içerisinde problemi anlama ve kümeden eleman seçme, ispat yapma süreci içerisinde ispata nasıl başlayacağını belirleme ve ispatın doğruluğunu değerlendirme süreci içerisinde ise kavram kullanımını inceleme kategorilerinin ispat sürecinde kilit rol oynadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Uygan, Tanışlı ve Köse (2014) de araştırmalarında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıtın anlamına ve özelliklerine yönelik inançlarını, kanıtlama ve örnek kanıtların geçerliliğini değerlendirirken yaptıkları muhakeme süreçlerini incelemişler ve kanıta ilişkin inançlar incelendiğinde, katılımcıların kanıtı bir tür problem çözümü ve bilginin kaynağını araştırma olarak gördükleri; kanıtın tümdengelimli, sonucu genellenebilir ve anlaşılabilir olması gerektiğini vurguladıkları görülmüştür. Bunun yanı sıra katılımcıların kanıt yapmaya ilişkin yeterli düzeyde olmadıklarına da inandıkları belirlenmiştir. Kanıt yapma süreçleri incelendiğinde ise katılımcıların teoremdeki hüküm ifadesini teoremin öncülü gibi düşündükleri ve ezbere stratejiler kullandıkları görülmüştür.

Doruk, Özdemir ve Kaplan (2014) yaptıkları çalışmada matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerini ve matematiğe karşı öz-yeterlik algılarını inceleyerek, söz konusu iki duyuşsal değişken arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Çalışma, ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü dördüncü sınıfında öğrenim gören 76 matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ile matematiğe karşı öz-yeterlik algılarının orta düzeyde olduğu tespit edilmiştir. İskenderoğlu, Baki ve Palancı (2011) da çalışmalarında, farklı sınıf seviyelerinde öğrenim görmekte olan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıta yönelik görüşlerini incelemeyi amaçlamışlar ve çalışmanın sonucunda, öğretmen adaylarının kanıt ile ilgili olumlu bakış açılarının olduğu buna rağmen kanıt yapmaya yönelik güvenlerinin öz değerlendirme, zihinsel süreç ve tutum-inanç boyutlarından daha düşük olduğu ortaya

konulmuştur. Özkaya, Işık ve Konyalıoğlu'nun (2014) yaptıkları çalışmanın amacı da, öğrencilerin ispat ve ters örnek üretme yeteneklerini ve matematiksel algılarını belirlemektir. Bu çalışmanın bulguları, katılımcıların ispat ve ters örnek yazmada zorluk yaşadıklarını, öğrenme ve öğretmede ispat ve ters örnek verirken daha dikkatli olunması gerektiğini düşündürmektedir. Daha da önemlisi, bir teoremin ispatını yapmak veya ters örnek kurmak müfredat analizi ve ileri matematik derslerinde öğretim tasarımı oluşturma düşüncesini geliştirebilir. Matematik eğitiminde ispatla ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, ispat yapmanın matematik eğitiminde tamamlayıcı bir role sahip olduğu görülmektedir (Hanna, 2000; Jones, 2000; NCTM, 2000; Schoenfeld, 1994).

2.2.2. Matematiksel Modeller İle İlgili Araştırmalar

Günümüzde sadece matematiksel işlem süreçlerini ezberleyip benzer problem durumlarına uygulamak yeterli olmamaktadır. Öğrencileri geleceğe hazırlamak için matematiksel düşünce ve kavram oluşturma gelişimini sağlayan karmaşık problem durumlarıyla karşılaştırmak ve bu konuda deneyim sahibi olmalarını sağlamak gerekmektedir (Lesh ve Zawojewsky, 2007). Öğrenciler gerçek yaşam durumlarını temsil eden karmaşık problemlerle karşılaştıkları zaman bu problemlerin çözümünde matematiksel model ve modellemeyi faydalanabilirler (Sriraman, 2005). Modelleme, matematiksel kavram ve uygulamaların gerçek ve karmaşık problem durumlarının anlaşılmasındaki ve keşfedilmesindeki modellerin kurulmasıdır. Modelleme bir süreç iken model bu sürecin sonunda elde edilen üründür.

Spanier'a (1992) göre geçmiş 1972 yılına dayanan matematiksel modelleme, Claremont matematik kliniğinde öğretilmeye başlanmış ve bu klinikte bir matematikçinin, mühendislik ve fizikte yer alan çeşitli problemleri çözebilen bir birey olarak yetiştirilebileceği belirtilmiştir. Böylece matematikte ve diğer alanlarda matematiksel modellemeye yer verilmiş ve günümüze kadar çeşitli çalışmalar yapılmıştır. English ve Watters (2004) ilköğretim düzeyindeki öğrencilerle yaptıkları modelleme etkinlikleri ile öğrencilerin matematiksel düşünme ve problem çözme becerilerini geleneksel problem çözme etkinliklerinden daha fazla geliştirdiğini göstermişlerdir. Boaler (2001) iki farklı ilköğretim okulundaki yaklaşık 300 öğrenci üzerinde üç yıl süre çalışmış ve öğrencilerin, bir kısmına matematiksel modelleme

eğitimi uygulayarak diğer kısmına geleneksel yöntemlerle eğitim vermiştir. Çalışma sonunda matematiksel modelle eğitim alan öğrencilerin kavramsal sorulardaki başarıları, geleneksel yöntemlerle eğitim alanlara göre daha yüksek çıkmış, ayrıca geleneksel yöntemlerle eğitim alan öğrencilerin matematiğin günlük yaşamdan kopuk olduğunu düşündüğü, matematiksel modellemeyle matematik eğitimi alan öğrencilerin ise okul matematiği ile günlük yaşamda karşılaştıkları matematiğin birbirinden farklı olmadığını belirttikleri görülmüştür. Bal ve Doğanay (2014) da sınıf öğretmenleri adaylarının matematiksel modelleme sürecini anlamalarını sağlamak amacıyla yaptıkları çalışmada, başlangıçta öğretmen adaylarının matematiksel problemlere ilişkin modeller oluşturmamadıkları görülmüş ve uygulanan etkinlikler sonucunda öğretmen adaylarının problemleri kavrama başarılarının ve işlem başarılarının arttığı ve verilen problemlere ilişkin modeller oluşturabildikleri gözlenmiştir.

Model oluşturma etkinlikleri ile ilgili yapılan Tekin-Dede ve Bukova-Güzel'in (2013) özel durum çalışmasında dört matematik öğretmenleri tarafından oluşturulan Obezite Problemi isimli bir Model Oluşturma Etkinliđinin (MOE) tasarım sürecini ve oluşturulan MOE'yi MOE tasarım prensipleri çerçevesinde incelenmesi amaçlanmıştır. Tasarıma gerçek yaşam durumlarından yola çıkan öğretmenler, genellenebilir bir model oluşturmaya ve MOE'nin öğrencilerin seviyesine uygun olmasına özen göstermişlerdir. Bu çalışmayla ortaöğretim seviyesinde matematik derslerinde kullanılabilecek bir MOE'nin matematik öğretmenleri tarafından tasarlanması sağlanarak, ilgili alana katkı sağlamak hedeflenmiştir.

Matematiksel modelleme süreci ve model oluşturma etkinlikleri ile ilgili yapılan çalışmalar sonucunda öğrencilerin problem çözme ve kavrama becerilerinin arttığı ve günlük yaşamda matematiği daha etkili kullanabildikleri görülmüştür. Buna rağmen bazı araştırmalarda ise model oluşturma zor olduğu, problem çözümünde uygun model kullanılmadığı zaman modellerin etkili olmadığı görülmüştür. Nitekim Ikeda, Stephens ve Matsuzaki (2007) matematiksel modelleme etkinlikleri yaparak öğrencilerin "Matematiksel model nedir? Matematiksel model yapmak zor mu, kolay mı?" sorusuna yanıt vermelerini istemişlerdir. Çalışmaya katılan öğrencilerin hepsi uygulama öncesinde ve sonrasında matematiksel model oluşturma zor olduğunu belirtmişlerdir. Kertil (2008) da matematik öğretmen adaylarının problem çözme becerilerinin modelleme sürecinde incelenmesi konusunda bir özel durum çalışması

yapmıştır. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının modelleme etkinlikleri sürecinde problem çözme becerilerinin yeteri kadar iyi olmadığını, problemin çözümü için hedefi belirginleştirme, bir matematiksel model seçme ve uygulama, grafik gösterimlerden yararlanma gibi modelleme sürecinin bazı aşamalarında zorlandıkları belirlenmiştir. Aynı şekilde Bayazit (2013) de yedi ve sekizinci sınıfta okuyan 116 öğrenciye uyguladığı çalışmada, ilköğretim öğrencilerinin gerçek-yaşam problemlerini çözerken sergiledikleri yaklaşımlar ile kullandıkları stratejileri ve modelleri inceleyerek sonucunda az sayıda da olsa bazı öğrencilerin model kullandığı, fakat bunların büyük çoğunluğunun problem çözümlerinde yine de başarısız olduğunu gözlemlemiştir. Araştırmacı tarafından bu başarısızlığın, problem durumunun temsili için uygun ve yeterli modellerin oluşturulamaması nedeniyle gerçekleştiği düşünülmektedir.

Benzer olarak Özgün (2012), “İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Problem Çözme Sürecinde Ürettiği Matematik Modellerinin Nitel Bir Yaklaşımla İncelenmesi” adlı çalışmada, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde geliştirdiği matematik modellerinin bilişsel ve kavramsal boyutlarının incelenmesini amaçlamıştır. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının sayısal veriler içermeyen, gerçek yaşamla yakından alakalı açık uçlu durumlara ilişkin çıkarımlarda bulunma noktasında sıkıntılar çektikleri, dolayısıyla sahip oldukları matematiksel bilgileri problem durumuna uyarlamada oldukça zorlandıkları ve ağırlıklı olarak aritmetiksel ve cebirsel araçlar içeren modeller kullanma noktasında güçlü eğilimlerinin olduğu görülmüştür.

Model oluşturma süreçlerini inceleyen Eraslan (2011), ilköğretim öğretmen adaylarının model oluşturma etkinlikleri ve bunların matematik öğrenimine etkisi hakkında görüşlerini ortaya koymaya çalışmıştır. Elde edilen sonuçlara göre öğretmen adayları model oluşturma etkinliklerinin belirsizliğini, matematik öğrenimine pozitif katkılarını, ilköğretim ve diğer seviyelerde etkili olarak kullanılabilirliğini ifade ederek yararlılıklarını, sınırlılıklarını ve zorluklarını ortaya koymuşlardır. Benzer şekilde Berber ve Güzel (2009) de, Fen ve Matematik öğretmen adaylarının modellerin bilim ve fendeki rolüne ve amacına ilişkin algılarını belirlemek amacıyla bir devlet üniversitesinde Fizik, Kimya, Biyoloji, Fen Bilgisi ve İlköğretim Matematik Öğretmenliğinde okuyan 435 öğretmen adayıyla çalışmıştır. Elde edilen bulgular sonucunda öğretmen adaylarının büyük bölümünün gerçek ile modeli birbirinden

ayırıldığı, bilimsel modellerin kopyalar olmayıp temsiller olduğu, bilimsel bir olguyu açıklayan çok sayıda model oluşturulabileceği ve bir modelin kabulünün hem sonuçları açıklamadaki başarısına hem de aldığı desteğe bağlı olduğunu düşündükleri görülmüştür. Araştırmanın sonuçları göstermektedir ki öğretmen adayların modeller konusunda doğru algılara sahiptirler. Bu iki araştırmayla anlaşılmaktadır ki öğretmen adayları modeller hakkında doğru bilgilere sahip olup modellerin sınırlılıklarını, kullanım alanlarını ve faydalarını açıklayabilmektedirler.

Farklı bir çalışma yapan Pişkin- Tunç, Durmuş ve Akkaya (2012) ise, İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematik öğretiminde somut materyalleri ve sanal öğrenme nesnelerini kullanma yeterliliklerini tespit etmek amacıyla ilköğretim matematik öğretmenliğinde okuyan 71 öğretmen adayı ile çalışmayı yürütmüşlerdir. Çalışma sonucunda ilköğretim matematik öğretmen adaylarının somut materyalleri kullanma yeterliliklerinin, sanal öğrenme nesnelerini kullanma yeterliliklerinden daha yüksek olduğu ve bu yüzden somut materyallerin kullanımını sanal öğrenme nesnelere oranla daha çok tercih ettikleri görülmüştür. Benzer olarak Hıdıroğlu ve Güzel (2014) de yaptıkları çalışmada, matematiksel modelleme sürecinde GeoGebra'nın nasıl kullanılabileceğini örneklemiştir. Çalışmada, matematiksel modellemeye uygun olarak tasarlanan bir problemin çözüm sürecinde GeoGebra'dan yararlanılmış ve GeoGebra'nın süreçteki kullanım amaçları açıklanmıştır. Araştırmacılar tarafından tasarlanmış Boy-Ayak Uzunluğu probleminin çözümü, yedi basamaklı matematiksel modelleme süreci dikkate alınarak gerçekleştirilmiştir. GeoGebra'nın modelleme becerilerinin ortaya çıkarılmasında ve geliştirilmesinde katkı sağlayacağı ve işlemler içinde kaybolmayı önleyerek daha fazla kavramsal ve matematiksel düşüncenin ortaya çıkarılmasını sağlayacağı düşünülmektedir. Buradan sanal öğrenme nesnelerinin veya somut materyallerin matematiksel kavramların öğretiminde ve matematiksel düşüncenin geliştirilmesinde faydalı olacağı sonucu çıkarılabilir.

Bu çalışmalar göstermiştir ki modellerin matematik öğretiminde kullanılması öğrenciler açısından faydalı olacaktır. Bununla birlikte sadece öğrencilerin model oluşturması değil öğretmenlerin modellerle ilgili yeterince donanıma sahip olmaları ve konuları öğretirken modelleri kullanması son derece önemlidir. Matematik öğretmenlerinin, derslerde uyguladıkları strateji, öğretim yöntem ve teknikleri öğrencilerin matematiği öğrenmeleri üzerinde oldukça etkili bir faktördür (Dursun ve

Dede, 2004). Bu anlamda öğretmenlerin matematiksel modelleri kullanma becerileri ile ilgili yapılan çalışmalar aşağıda verilmiştir.

Tekin- Dede ve Bukova-Güzel (2013) çalışmalarında, ortaöğretim matematik öğretmenlerinin model oluşturma etkinlikleri ve matematik derslerinde kullanımlarına yönelik görüşlerini belirlemek amacıyla 17 matematik öğretmeniyle çalışmışlardır. Milli Eğitim Müdürlüğü ile ortaklaşa düzenlenen matematik çalıştayında öğretmenlere model ve modellemeye ilgili bilgiler verilmiş ve sonrasında uygulama yapmaları sağlanmıştır. Çalıştay sonrasında tüm öğretmenler model oluşturma etkinliklerini derslerde kullanmayı düşündüklerini ve konu başında, sonunda, dönem ödevi veya projeler kapsamında ve ek çalışma ya da kulüp saatleri içerisinde modellerden yararlanabileceklerini ifade etmişlerdir. Ayrıca öğretmenler model oluşturma etkinliklerini öğrencilerin ilgilerini çekme, onlara da model tasarlatma, lise son sınıfların konuyu dinlenmesini sağlama, farklı matematik konularını ya da farklı disiplinleri bütünleştirme, öğrencilerin matematiği öğrenmelerine yönelik sorularını yanıtlama, ölçme aracı olarak kullanma ve dersleri günlük yaşamla ilişkilendirme amacıyla kullanabileceklerini belirtmişlerdir.

Aydın (2008), İngiltere’de öğrenim gören öğrencilerin matematiksel model kullanımlarına yönelik yaptığı çalışmasında öğrencilerin matematik derslerinde öğrendikleri bilgileri gerçek hayatlarında kullanıp kullanmadıklarını araştırmıştır. Araştırmaya ikisi İngiliz biri Türk olmak üzere üç öğretmen ve Londra’da değişik okullarda okuyan üç Türk öğrenci katılmıştır. Öğretmen ve öğrencilerle yüz yüze mülakatlar yapılmış, bu mülakatların dökümü çıkarılmış ve verilen yanıtlar kategorilere ayrılarak nitel analizleri yapılmıştır. Araştırma sonucunda; öğretmenlerin derslerinde teknoloji ve hareketli nesne modellemesi yapıp kullandıkları görülmesine rağmen öğrencilerin bu modellerin kendilerini tembelliğe ittiğini, matematik bilgilerini gerçek hayatta kullanamadıkları görülmüştür.

Deniz (2014) çalışmasında, ortaöğretim matematik öğretmenlerinin matematiksel modellemeye uygun etkinlikler oluşturabilme ve bu etkinlikleri uygulayabilme yeterliklerinin incelenmesini amaçlamıştır. Çalışma üç farklı lise türünde görev yapan 13 matematik öğretmeni ile yürütülmüş olup ayrıca 37 ortaöğretim öğrencisinin uygulamalarla ilgili görüşleri de alınmıştır. Araştırmada durum çalışması

deseni kullanılmıştır. Öğretmenlerin matematik dersi ile gerçek hayat arasında bağlantı kurulmasıyla ilgili görüşlerini ve matematiksel modelleme yöntemiyle ilgili önbilgilerini belirlemek amacıyla ön görüşmeler yapılmış, sonra matematiksel modelleme yöntemi tanıtılmış ve matematiksel modelleme yöntemini içeren etkinlik örnekleri sunulmuştur. Çalışmaya katılan öğretmenlerden Model Oluşturma Etkinliği (MOE) tasarım prensiplerini dikkate alarak en az üçer tane etkinlik oluşturmaları ve bu etkinlikleri sınıflarında uygulamaları istenmiştir. Öğretmenler MOE tasarım prensiplerini dikkate alarak uygun buldukları konularda etkinlikler oluşturmuşlar ve bu etkinlikleri sınıflarında uygulayabilme yeterlikleri gözlemlenmiştir. Öğretmenlerin etkinlikleri uygulama süreçleri gözlemlendiğinde modelleme basamaklarından modeli gerçek hayata yorumlama basamağında eksikliklerin olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca öğretmenler matematiksel modelleme etkinliklerinin muhakeme yapma yeteneğini geliştirdiğini, günlük hayatta kullanıldığında olayları daha anlaşılır hale getirdiğini fakat buna rağmen derslerde her zaman kullanamayacaklarını, bunun için öğrenci seviyesinin uygun olması gerektiğini belirtmişlerdir. Öğrenciler ise modelleme etkinliklerinin faydalı ve eğlenceli olduğunu, kalıcı öğrenmeyi ve gerçek hayat problemlerinde kullanıldığında anlaşılmayı kolaylaştırdığını ifade etmişlerdir.

Güneş, Gülçiçek ve Bağcı (2004) diğer araştırmalardan farklı olarak bir üniversitenin eğitim fakültesinde görev yapan fizik, kimya, biyoloji, fen bilgisi ve matematik öğretim elemanlarının modellerin ne olduğu, fen bilimleri içerisindeki rolleri, modellerin niçin/nasıl kullanıldıkları, modellerin değişmesine nelerin sebep olduğu ve nelerin model olduğu hakkındaki görüşlerini tespit etmeyi amaçlamıştır. Çalışma sonucunda model ve modellemenin doğası ile ilgili olarak öğretim elemanlarının bir takım eksikliklerinin olduğu ve bu eksikliklerin de özellikle modellerin temsil ettiği nesneyi veya durumu ne derece yansıttığı ve nelerin model olarak nitelendirilebileceği ile ilgili olduğu görülmüştür.

Eric, Dawn, Wanty ve Seto (2015) da çalışmalarında öğretmenlerin modelleme yeteneklerinin geliştirilmesi üzerine yapmış oldukları çalışmalarında modelleme faaliyetlerini kolaylaştırmak ve etkili hale getirebilmek için öğretmenlerin modelleme sürecine alışkın olmaları gerektiğini yani modelleme sürecinde tecrübenin şart olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca öğretmenlere kendi modellerini oluşturma fırsatı vererek çoklu düşünme yeteneklerini artıracak faaliyetlerde bulunmuşlardır. Bu araştırmalar

sonucunda; öğretmenlerin veya öğretim elemanlarının modeller hakkında yeterli bilgiye sahip olmadığı ve modellerin kullanımı hakkında eksikliklerinin olduğu görülmüştür. Ayrıca hangi araçların model olduğu tam olarak kavranamadığı gibi modeller derslerde de pek kullanılmamaktadır.

Matematiksel modellerin kullanımının akademik başarıya etkisini konu edinen araştırmalara bakıldığında; Sağırılı, Kırmacı ve Bulut (2010) modellerin lise öğrencileri üzerindeki etkisini incelemişlerdir. Türev konusunu matematiksel modelleme yöntemi ile öğretmenin öğrencilerin akademik başarılarına etkisini incelemek amacıyla bir fen lisesinde 12.sınıfta öğrenim gören 18'i deney grubunda 19'u kontrol grubunda olmak üzere 37 öğrenci ile çalışmışlardır. Dokuz hafta devam eden çalışmanın sonunda ön testte iki grup arasında anlamlı bir fark olmadığı halde son test sonuçlarına göre deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark tespit edilmiştir. Bu durum da modelleme yöntemi ile öğrenimin akademik başarıyı artırdığını göstermektedir. Yine lisans düzeyinde benzer bir çalışmada ise Çiltaş ve Işık (2012), ilköğretim matematik öğretmenliği üçüncü sınıfta okuyan 75 öğrenciye diziler ve seriler konusunun öğretiminde modellemeyi kullanmışlardır. Çalışma sonunda uygulanan test sonuçlarına göre modellemenin akademik başarıya olumlu etki sağladığını göstermiştir.

Moslev ve Jenaabadi (2015) modellemenin akademik başarıyı ne düzeyde etkilediğini belirlemek amacıyla İran'da bir devlet okulunda öğrenim gören 50 bayan öğrenci ile çalışmışlardır. Çalışmada öğrencilerin kavramsal algılarını ve matematiksel bilgilerini geliştirmek, yanlış anlamaları tanımlamak için matematiksel modelleme etkinlikleriyle sınıf tartışmaları yapılmıştır. Elde edilen bulgular sonucunda modelleme etkinliklerinin kullanımının öğrencilerin matematik başarıları üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğu görülmüştür. Yine matematiksel modelleme etkinlikleriyle zenginleştirilen bir öğretim uygulamasının ortaokul beşinci sınıf öğrencilerinin matematik dersindeki akademik başarılarına etkisini inceleyen Yıldırım ve Işık (2015) çalışmalarını bir ortaokulun 55 beşinci sınıf öğrencisi ile gerçekleştirmişlerdir. Öğretim, deney grubunda (28 öğrenci) matematiksel modelleme etkinliklerine dayalı olarak, kontrol grubunda (27 öğrenci) ise matematiksel modelleme etkinliklerinin yer almadığı mevcut programa göre gerçekleştirilmiştir. Geçmiş yıllara ait Parasız Yatılılık ve Bursluluk Sınav sorularıyla oluşturulan başarı testi her iki gruba da ön test ve son test olarak uygulanmıştır. Araştırmanın sonucunda, matematiksel modelleme etkinlikleriyle

yapılan öğretimin, matematiksel modelleme etkinliklerinin yer almadığı programa göre öğretim uygulamasından, akademik başarıyı artırmada daha etkili olduğu tespit edilmiştir. Modellemenin öğrencilerin akademik başarılarına etkisini inceleyen bu çalışmalara bakıldığında, modelleme etkinliklerinin akademik başarıyı önemli derecede artırdığı sonucuna ulaşılmıştır. Yine benzer olarak Sandalcı (2013) çalışmasında matematiksel modelleme ile cebir öğretiminin 6. sınıf öğrencilerinin akademik başarılarına ve matematiği günlük yaşamla ilişkilendirmelerine etkisini incelemeyi amaçlamıştır. Çalışmanın örneklemini 6. sınıfta öğrenim gören 65 öğrenci oluşturmuştur. Araştırma sonucunda elde edilen bulgularda, öğrencilerin cebir konusundaki akademik başarılarının ve matematiği günlük yaşamla ilişkilendirme düzeylerinin anlamlı olarak yüksek olduğu ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin modelleme etkinliklerinin uygulanışı sürecinde model oluşturmada zorluklar yaşadıkları ancak, aynı konuya yönelik modelleme etkinlikleri uygulandıkça yaşanan zorlukların azaldığı görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin matematiksel modelleme etkinlikleri ile işlenen derslere yönelik duygu ve düşüncelerinin olumlu olduğu, başarı düzeyi düşük öğrencilerin de modelleme sürecine etkin bir şekilde katıldıkları gözlemlenmiştir.

Yurt ve Sünbül (2014) çalışmalarında, ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin matematiksel problem çözme ve akıl yürütme becerilerini, matematik öz yeterlik kaynaklarını, uzamsal yeteneklerini ve matematik başarıları arasındaki açıklayıcı ve yordayıcı ilişkileri bir model üzerinde incelenmesini amaçlamışlardır. Bu amaçla farklı ortaokullarda öğrenim gören 470 tane 8. sınıf öğrencisi ile çalışmıştır. Elde edilen sonuçlara göre, matematik başarısına doğrudan ve dolaylı etkileri bulunan “matematik öz yeterlik kaynakları”, “uzamsal yetenek, problem çözme ve akıl yürütme becerileri” matematik başarısındaki değişimin yaklaşık %75’ini açıklamaktadırlar. Bu değişkenler matematik başarısı üzerinde oldukça önemli bir etkiye sahiptir. Birbiri ile ilişkili olan bu değişkenlerin bir arada bulunduğu bir matematik öğretim programının geliştirilerek öz yeterliliği destekleyici etkinliklerle uygulanması, matematik başarısını önemli ölçüde artırabilir. Bu çalışmalar göstermiştir ki matematiksel modelleme ile modeller sadece ilköğretimde değil ortaöğretim ve yükseköğretim düzeyinde de araştırılmış olup akademik başarıyı olumlu yönde etkilemektedir.

Üniversite düzeyinde matematik bölümlerinin en temel derslerinden biri Analiz dersidir. Bezuidenhout (2001), çalışmasında üniversite birinci sınıf öğrencilerinin

Analiz derslerinin ilk bölümlerinde yer alan limit ve süreklilik kavramlarını nasıl anladıklarını ortaya koymuştur. Çalışma sonucunda da, öğrencilerin fonksiyonun sürekliliğini o noktada limitin varlığına bağladıkları ifade edilmektedir. Süreklilikle ilgili yapılan çalışmalarda temel problemin, sürekliliğin bilinen tanımlarından ziyade öğrencilerin kendilerinin oluşturdukları bilimsellikten uzak tanımları kullanılıyor olmaları sonucuna ulaşılmıştır (Baştürk ve Dönmez, 2011; Bezuidenhout, 2001; Tall ve Vinner, 1981). Fonksiyonlarla ilgili epistemolojik engeller üzerine çalışan araştırmacıların ulaştıkları ortak sonuçlardan biri, öğrencilerin ve bazı öğretmenlerin sürekli fonksiyonların bir tek formülle ifade edildiğini düşünmeleridir (Hitt, 1994). Yapılan çalışmalardan öğrencilerin matematikte kendilerinin formül çıkarmak için çabalamadıkları, formül oluşturmaya çalıştıkları zaman da yanlış formüller oluşturdukları görülmüştür. Öğrencilere formüllerin nerden geldiğini göstermek daha açıklayıcı ve akılda kalıcı olacaktır. Bu da ispat sayesinde olmaktadır. Ayrıca Analiz ve Genel matematik gibi dersler üniversite öğrencileri için en temel dersler arasında yer aldığından, bu derslerde verilen temel kavramlar en iyi şekilde öğrencilere öğretilmelidir.

Matematiksel ispat ile ilgili yapılan araştırmalarda ispatın matematikte önemli bir yeri olduğunu, ispat olmadan bir olgunun, kavramın ya da teoremin doğruluğunun gösterilemeyeceği sonucuna ulaşılmıştır. İspatın bu kadar önemli olmasına rağmen öğrencilerin ispat yaparken zorluk yaşadıkları da araştırmalar sonucunda ulaşılmış ve yaşanan zorlukların sebepleri yine araştırma konusu olmuştur. İspatın anlaşılmasını sağlayacak olan bir etken de öğretmenlerin anlatış yöntemidir. Bu noktada matematiksel model ve modelleme yöntemi devreye girebilir. Modeller sayesinde öğrenciler kendi soyut fikirlerini açıklamada zorlandıklarında kendilerini daha rahat ifade edebilirler. Matematiksel modelleme ve modeller ile ilgili yapılan araştırmalarda modellerin öğrencilerin akademik başarılarını artırdığı, dersi daha iyi dinledikleri ve anlatılan konuyu rahatça kavrayabildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca birçok araştırmacı modellerin kullanımını önermektedir. Matematiksel modeller ile soyut olan teorem ispatları da somutlaştırılarak öğrencilerin ispatı daha kolay anlamaları sağlanabilir. Fakat literatüre bakıldığında ispat yapmada modellerin kullanımıyla ilgili çalışmalara pek rastlanmamıştır.

Hanna ve Jahnke (2007) çalışmalarında ispat yapmada matematiksel model ve modellemenin kullanılmasının fayda sağlayacağı sonucuna ulaşmışlar ve ispat ile model ve modellemenin birbiriyle ayrılmaz ve iç içe geçmiş bir bağlantılarının olduğunu da belirtmişlerdir.

Ünveren (2010) yaptığı çalışmasında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik tutumlarını incelemiştir. Bu araştırmada matematik eğitiminde ispatlamaya farklı bir açıdan bakan modelleme yaklaşımı benimsenmiştir. Araştırmanın örneklemini 60 İlköğretim Matematik Öğretmeni adayı oluşturmuştur. Araştırmanın başında öğretmen adaylarının geleneksel yöntemle yapılan ispata yönelik tutumlarını almak için ‘İspata Yönelik Tutum Ölçeği’ uygulanmıştır. Sonra matematiksel modellemenin tanıtımını yapan, matematiksel modelleme etkinliklerinin gerçekleştirildiği ve matematiksel modelleme yöntemi ile gerçekleştirilen ispatların yapıldığı bir öğretim yapılmıştır. Bu öğretimin ardından öğretmen adaylarının tutumlarını ölçmek için tutum ölçeği tekrar uygulanmıştır. Daha sonra öğretmen adaylarının matematiksel modelleme ile gerçekleştirilen ispata yönelik tutumlarını daha yakından incelemek için 10 öğrenci ile görüşmeler yapılmıştır. Araştırmanın sonucunda; öğretmen adaylarının geleneksel anlamda gerçekleştirilen ispatlara yönelik tutumlarının oldukça düşük olduğu, matematiksel modelleme ile gerçekleştirilen ispatlarda ise daha yüksek tutum puanlarının olduğu tespit edilmiş ve gerçekleştirilen görüşmeler ışığında matematiksel modellemenin matematik eğitiminde kullanılmasının gerektiğini ve ispat öğretiminin anlamlı, kolay ve etkili olmasında da matematiksel modellemenin kullanılmasının önemini belirttikleri görülmüştür. Bu çalışmada da görüldüğü gibi ispat yapmada modellerin kullanılması öğrencilerin ispata yönelik tutumlarını etkilemekte ve ispatların daha kolay anlaşılmasını sağlamaktadır.

Yaptığımız bu yüksek lisans çalışmasının literatüre faydalı olacağı ve bundan sonra ispatla ilgili yapılacak olan çalışmalara yardımcı olacağı düşünülmektedir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. YÖNTEM

Bu bölümde araştırma modeline, katılımcılara, veri toplama araçlarına ve verilerin analizine yer verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Modeli

Araştırma modeli, araştırmanın sorularını cevaplamak ya da hipotezlerini test etmek amacıyla araştırmacı tarafından geliştirilen bir plandır (Büyüköztürk, Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2012). Araştırma modelleri nicel (pozitivist), nitel (yorumlayıcı) ve karma model olmak üzere üçe ayrılmaktadır.

Bu çalışmada karma araştırma yaklaşımı kullanılmıştır. Creswell'e (2008) göre; karma yöntem araştırmalarının temel varsayımı, nitel ve nicel araştırma yöntemlerinin birlikte veya harmanlanarak kullanılmasının araştırma problem ve sorularının bu yöntemlerin ayrı kullanılmasından daha iyi anlaşılmasını sağlamasıdır.

Creswell (2008), eğitsel araştırmalarda en sık kullanılan karma yöntem araştırmalarını; gömülü, açıklayıcı, keşfedici ve paralel karma yöntem olmak üzere dört başlık altında sınıflandırmıştır. Bu sınıflandırma ve özellikleri aşağıda özetlenmiştir (Fırat, Yurdakul ve Ersoy, 2014).

- Açıklayıcı: Önce nicel veriler toplanır, daha sonra nicel verileri açıklamak amacıyla nitel veriler toplanır.
- Keşfedici: Bir olguyu incelemek amacıyla nitel veriler toplanıp daha sonra nitel veriler arasındaki ilişkiyi açıklamak için nicel veriler toplanır.
- Paralel: Bir araştırma problemini anlamak için nicel ve nitel veriler eş zamanlı olarak toplanır, birleştirilir ve sonuçları kullanılır.
- Gömülü: Nicel ve nitel veriler eş zamanlı olarak toplanır, bir veri biçimi diğerini desteklemek amacıyla kullanılır.

Bu çalışmada paralel karma yöntemi kullanılmıştır. Çalışmada nitel ve nicel veriler eş zamanlı olarak toplanmıştır. Paralel karma yönteminde nicel ve nitel yaklaşımlar eşit statüdeledir (Creswell, 2008). Araştırma süresince nitel ve nicel veriler birlikte toplanır, ayrı analiz edilir, her iki veri setinin analiz sonuçları karşılaştırılır ve sonuçların birbirleriyle uyumlu olup olmadığına bakılarak yorumlanır. Bu çalışmanın nitel boyutunda durum çalışması (case study), nicel boyutunda da zayıf deneysel yöntem olan tek grup ön test-son test modeli kullanılmıştır. McMillan (2000), durum çalışmalarını bir ya da daha fazla olayın, ortamın, programın, sosyal grubun ya da diğer birbirine bağlı sistemlerin derinlemesine incelendiği yöntem olarak tanımlamaktadır. Tek gruplu ön test son test modelinde ise bir gruba bağımsız değişken uygulanır ve uygulama öncesi ve sonrası ölçme yapılır (Blum, 1998).

3.2. Araştırma Grubu

Araştırmanın katılımcılarını, 2014-2015 eğitim-öğretim yılı, Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde öğrenim görmekte olan 45 ikinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Çalışma grubu, seçkisiz olmayan örnekleme yöntemlerinden amaçsal örnekleme yöntemine göre seçilmiştir.

Büyüköztürk ve diğerlerine (2012) göre, seçkisizlik (yansızlık), örneklemede temel alınan birimlerin örneklem için seçilme olasılıklarının eşit olmasını tanımlar. Seçkisiz olmayan (olasılıklı olmayan) örnekleme yöntemleri, örnekleme alınacak birimlerin seçkisizlik ilkesine bağlı olmaksızın belirlendiği yöntemlerdir. Amaçsal örnekleme, derinlemesine araştırma yapabilmek amacıyla çalışmanın amacı bağlamında bilgi açısından zengin durumların seçilmesidir. Bu çalışmada uygulanan etkinlikler Analiz-I dersi içeriğinden alındığından, ikinci sınıfta öğrenim gören katılımcılar seçilirken Analiz-I dersini alan ya da almakta olan öğrenciler dikkate alınmıştır. Dolayısıyla araştırmada çalışma grubu amaçsal örnekleme yöntemlerinden biri olan ölçüt örnekleme göre seçilmiştir. Ölçüt örnekleme, örneklemin problemle ilgili olarak belirlenen niteliklere sahip kişiler, olaylar, nesneler ya da durumlardan oluşturulmasıdır (Büyüköztürk vd., 2012).

Katılımcıları belirlemek için ad ve soyadlarının baş harfleri kullanılarak kodlar oluşturulmuştur. Örneğin Kübra Yılmaz adlı bir öğrencinin kodu KY'dir. Aynı koda sahip olan öğrencilerde ise kodların yanında numaralandırma yapılmıştır. Örneğin Kübra Yılmaz ile Kader Yazıcı isimli öğrencilerin kodları KY olur. İkisini ayırt etmek için Kübra Yılmaz'a KY1 kodu, Kader Yazıcı'ya da KY2 kodu verilmiştir.

3.3. Veri Toplama Araçları

Yapılan bu çalışmada, matematiksel modellerle gerçekleştirilen teorem ispatları sonucunda öğrencilerin ispat yapma becerilerinde, akademik başarılarında ve görüşlerinde bir farklılaşmanın olup olmadığına bakılmıştır. Bu nedenle birinci ve ikinci alt problemimiz olan matematiksel modellerle teorem ispatlarının öğrencilerin ispat yapabilme becerilerine ve akademik başarılarına etkisini araştırmak için “Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi” ön test ve son test olarak uygulanmıştır.

Üçüncü alt problemimiz olan matematiksel modellerle teorem ispatlarının öğrencilerin görüşlerindeki değişimi görebilmek için “Matematiksel İspat Yapma İle İlgili Görüş Anketi” ön test ve son test olarak uygulanmıştır. Ayrıca öğrencilerle yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılarak öğrencilerin ispat ve modeller ile ilgili görüşleri alınmıştır.

Bu kısımda yukarıda sözü geçen uygulamalarda kullanılan veri toplama araçlarının tanıtımı ayrıntılı olarak yapılacaktır.

3.3.1. Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi

Bu test matematiksel modellerle teorem ispatlarının öğrencilerin ispat yapabilme becerilerine ve akademik başarılarına etkisini araştırmak için ön test ve son test olarak uygulanmıştır. Ön testte altı açık uçlu soru yer almaktadır; ilk iki soru öğrencilerin ispat yapma becerilerini görmek ve son dört soru ise öğrencilerin akademik başarılarını ölçmek amacıyla hazırlanmıştır (EK 1). Son testte de ise sekiz soru yer almakta olup, ilk üç soru öğrencilerin ispat yapma becerilerini görmek, son beş soru ise öğrencilerin akademik başarılarını ölçmek amacıyla hazırlanmıştır (EK 2). Ön test uygulandıktan sonra öğrencilerin ilk iki soruya doğru yanıt verememiş oldukları görülmüş ve bundan dolayı daha zengin ve güvenilir veri elde etmek amacıyla son testte soru sayısı

artırılmıştır. Test soruları hazırlandıktan sonra bir uzman tarafından incelenerek, geçerliliği test edilmiştir. Araştırmacı tarafından Matematiksel Beceri ve Bilgi Testinin hazırlanması aşamasında teoremler dikkate alınarak kaynak kitaplardan ve literatürden faydalanılmış (Akdeniz, Ünlü ve Dönmez, 2012; Balcı, 2012; Dönmez, 1985; Kadioğlu ve Kamali, 2009) ve uzman görüşleri alınarak hazırlanmıştır. Matematiksel Beceri ve Bilgi Testi için katılımcılara soruları çözmeleri için iki ders saati (100 dakika) verilmiştir.

3.3.2. Matematiksel İspat Yapma İle İlgili Görüş Anketi

Eğitimde bir araştırma konusu üzerinde kişilerin düşüncelerini belirlemek istenildiğinde en çok tercih edilen veri toplama araçlarından biri ankettir. Anket; bir konu hakkında belirlenen sorulara cevap aramak amacıyla bir evren ya da örnekleme oluşturan kişilerin fikirlerini kısa sürede ve sistemli bir şekilde belirlemede kullanılan veri toplama aracıdır (Metin, 2014). Ankette bireylerin düşüncelerini belirlemek amacıyla yazılı sorular sorulur ve bireylerin bu sorulara verdiği cevaplardan yola çıkarak araştırma sorusuna cevap aranır. Görüşme anketinde öğrencilerin düşüncelerini rahatlıkla ifade edebilmeleri için açık uçlu sorular sorulmuştur.

Bu anketi öğrencilerin ispat yapma ile ilgili görüşlerini almak için çalışmanın başında ve sonunda uygulanmıştır. Uzman görüşü alınarak hazırlanan bu görüş anketi beş açık uçlu sorudan oluşmaktadır (Ek3). Başlangıçta altı sorudan oluşan anket, pilot çalışma sonunda beş soruya indirilmiştir. Pilot çalışmada öğrencilerin sorulan iki soruya da çok benzer cevaplar verdiği görülmüş ve bu sorulardan biri görüş anketinden çıkarılmıştır. Bu sorular; “Bir ispatın doğruluğunu değerlendirirken genelde nasıl bir yaklaşım izlersiniz? Açıklayınız.” ve “Yaptığınız bir ispatın doğru olduğuna nasıl ikna olursunuz? Açıklayınız.” şeklinde olup son soru olan “Yaptığınız bir ispatın doğru olduğuna nasıl ikna olursunuz? Açıklayınız.” sorusu anketten çıkarılmıştır. Öğrencilere bir ders saati verilmiş (50 dakika) ve sorulara yazılı olarak yanıt vermeleri sağlanmıştır.

Ayrıca öğrencilerin Matematiksel İspat Yapma İle İlgili Görüş Anketi’ndeki sorulara verdikleri cevapları teyit etmek ve daha derin bilgi toplamak amacıyla uygulamalar sonrasında yarı yapılandırılmış mülakat yapılmıştır. Yarı yapılandırılmış mülakatlarda sorular önceden hazırlanıp belirlenir ancak soruların sırasını

değiştirebilme ve daha ayrıntılı açıklanması imkânı vardır (Karasar, 2009). Bu çalışmada da sorular önceden hazırlandığı için yarı yapılandırılmış mülakat türü seçilmiştir. Mülakatlar; öğretmen adaylarının bilgi, duygu ve düşüncelerini rahat bir şekilde belirtebilecekleri uygun bir ortamda bire-bir gerçekleştirilmiştir.

Mülakatların başlangıcında, her öğretmen adayına bu çalışmanın amacı açıklanmış ve uygulama sürecinde “açıkla”, “nasıl”, “niçin”, “neden” gibi ifadelerle öğrencilerin görüş anketindeki sorulara yönelik bilgileri detaylı olarak belirlenmeye çalışılmıştır. Mülakatlar da öğretmen adaylarının testteki yanıtları önceden incelenerek belirlenen kavramlardan öğretmen adaylarına sorular yöneltilmiştir. 11 öğrenci ile 8-10 dakikalık görüşmeler lisansüstü derslikte yapılmıştır. Öğrencilerin izni alınarak mülakatlar ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir.

3.4. Verilerin Analizi

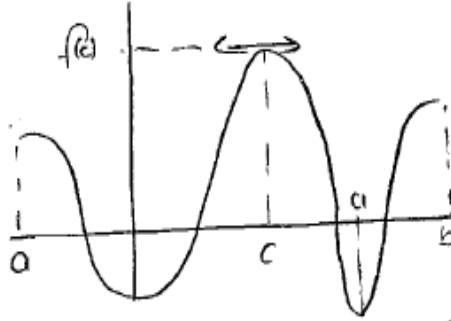
3.4.1. Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi

Ön testindeki ilk iki soruda ve son testindeki ilk üç soruda öğrencilerin ispat yapabilme becerilerine bakılmıştır. Öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlar betimsel analiz yapılarak “boş”, “yanlış”, “kısmen doğru”, “kısmen yanlış” ve “doğru” şeklinde beş kategoriye ayrılmış, analizlerinde yüzde ve frekans kullanılmış ve kategoriler aşağıda açıklanmıştır.

- Boş: Açıklama yapamayanlar bu kategori içerisinde yer almaktadır.
- Yanlış: Tamamıyla yanlış olan açıklamaları içeren ifadelerin yer aldığı kategoridir.
- Kısmen Doğru: Yanıtta sadece hipotez verileri yazılmış ya da çok az çözüme başlanılmışsa yanıt, bu kategoride yer alır.
- Kısmen Yanlış: Yanıtın hemen hemen doğru olduğu fakat işlemsel veya simgesel hatalardan dolayı tam doğru sayılamayan kategoridir.
- Doğru: Bilimsel olarak doğru ve tam kabul edilecek açıklamalar bu kategori içerisinde yer alır.

Aşağıda “boş”, “yanlış”, “kısmen doğru”, “kısmen yanlış” ve “doğru” şeklinde kategorilere ayrılan yanıtlara örnekler verilmiştir.

3. "FERMAT TEOREMİ: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $c \in (a, b)$ noktasında bir yerel maksimumu veya minimumu varsa ve f fonksiyonu c noktasında türevlenebiliyorsa $f'(c) = 0$ dir." Teoreminin ispatını yapınız.



f fonksiyonu için c noktası yerel maksimum bir değer olsun. Öyleyse $f \in \mathbb{R}^+$ sağlayan $|x - c| < \delta$ için $f(x) \leq f(c)$ vardır.

$|h| < \delta$ değeri için sağlan. Her $|h|$ için

$$x - c = h \quad f(x) \leq f(c)$$

$$x = c + h$$

$$f(c+h) \leq f(c) \Rightarrow f(c+h) - f(c) \leq 0 \text{ olur.}$$

Buradan $h > 0$ için

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0 \text{ olur.} \quad f'(c) \leq 0 \dots (1)$$

$h < 0$ için

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0 \text{ olur.} \quad f'(c) \geq 0 \dots (2)$$

Hipotezden h ister küçük ister büyük olsun. her değer için

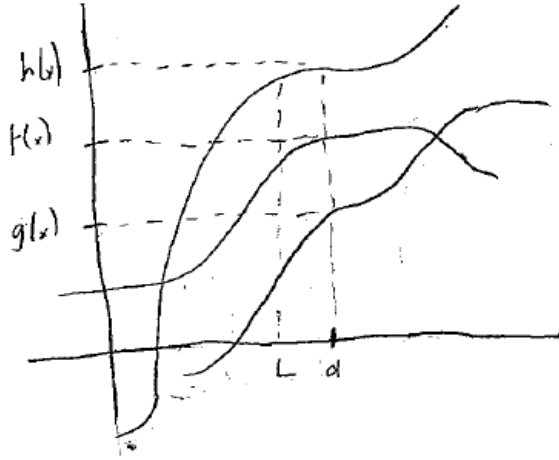
$$\frac{f(c+h) - f(c)}{c - h} = f'(c) \text{ olur.}$$

(1) ve (2)'den $f'(c) = 0$ olacaktır.

Şekil 3.1. "doğru" kategorisine örnek yanıt

Öğrencinin verdiği yanıt incelendiğinde ispatı doğru bir şekilde çözdüğü görülmektedir.

1."SANDVIÇ TEOREMİ: a nın bir komşuluğunda a dan farklı her x için $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dir." Teoreminin ispatını yapınız.



$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

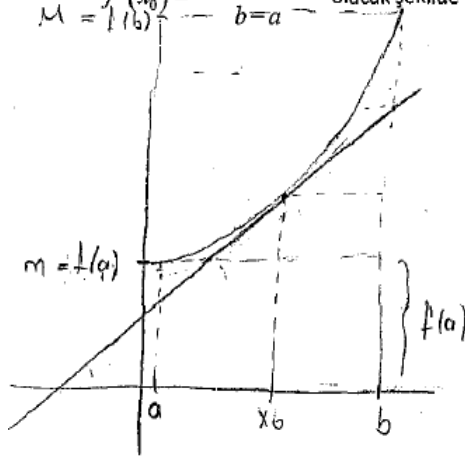
$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Şekil 3.2. Yanlış kategorisine örnek yanıt

Öğrencinin verdiği yanıt incelendiğinde, grafiği yanlış çizmiş ve ispatla ilgili doğru bir bilgiye rastlanmamıştır.

2."DİFERANSİYEL HESABIN ORTALAMA DEĞER TEOREMİ: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu taktirde (a, b) aralığında

$M = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır." Teoreminin ispatını yapınız.



Fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki en büyük değeri M ve en küçük değeri m olsun.

$$\forall x \text{ için } m \leq f(x) \leq M \text{ olur.}$$

$$\text{Buradan } m \leq f(a) \leq M \text{ ve } m \leq f(b) \leq M \text{ dir.}$$

$$\text{Dolayısıyla } m \leq f(b) - f(a) \leq M \text{ olur.}$$

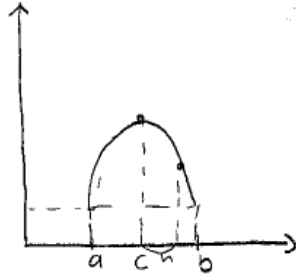
her yeri $(b - a)$ ya bölersek

$$\frac{m}{b-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq M$$

Şekil 3.3. Kısmen doğru kategorisine örnek yanıt

Verilen yanıtta grafik doğru çizilmiş fakat yan tarafında yazılanlarla ispatın ilgisi yoktur. Grafik doğru olduğu için kısmen doğru kategorisi içerisinde yer almıştır.

3. "FERMAT TEOREMİ: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $c \in (a, b)$ noktasında bir yerel maksimumu veya minimumu varsa ve f fonksiyonu c noktasında türevlenebiliyorsa $f'(c) = 0$ dir." Teoreminin ispatını yapınız.



$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun pozitif bölgede olduğunu düşünelim. h pozitif veya negatif bir sayı olmak üzere

$$f(c+h) - f(c) \leq 0 \text{ olur.}$$

$$h \geq 0 \text{ için } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) = 0 \text{ olur.} \quad \text{--- (1)}$$

$$h \leq 0 \text{ için } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) = 0 \text{ olur.} \quad \text{--- (2)}$$

① ve ②'den h pozitif veya negatif bir sayı olmak üzere $f'(c) = 0$ olduğu görülür.

Şekil 3.4. Kısmen yanlış kategorisine örnek yanıt

Verilen yanıt incelendiğinde yanlış ifadenin olmadığı fakat hipotezde fonksiyonun türevlenebilir olduğu verilmiş olup öğrenci bu ifadeyi kullanmadığı için yanıt kısmen yanlış kategorisine koyulmuştur.

Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi'nin ön testindeki dört soru ve son testindeki beş soru ile öğrencilerin akademik başarılarını ölçme hedeflenmiştir. Öğrencilerin yanıtları, 100 puan üzerinden değerlendirilmiş ve Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi Puanlama Anahtarı oluşturularak puanları hesaplanmıştır. Puanlama anahtarı ön ve son test için ayrı hazırlanmış ve EK 4 ve EK 5 de verilmiştir. Öğrencilerin akademik başarılarındaki değişimi bulabilmek için elde edilen veriler SPSS paket programı kullanılarak analiz edilmiştir.

İstatistiksel çalışmalarda pek çok analizi uygulayabilmek için verilerin dağılımının normal ya da normale yakın olması gerekmektedir (Kalaycı, 2010). Verilerin dağılımını görebilmek için genellikle histogram, saplı kutu grafiği, detrended normallik grafiği, dal yaprak grafiği, çarpıklık katsayı, Kolmogrov Smirnov ve Shapiro Wilks gibi grafikler ve test yöntemleri kullanılmaktadır. Bu çalışmada normalliğe çarpıklık katsayısı ile bakılmıştır. Çarpıklık katsayısı, çarpıklığın standart hatasına bölünerek çıkan sonuca göre +1.96 ile -1.96 arasındaki değerler için dağılım normal olurken; 1.96'nın üzerinde veya -1.96'nın altındaki değerler +3 ve -3 aralığındaki değerlere kadar 0.05 anlamlılık düzeyinde normal kabul edilmektedir (Kalaycı, 2010). Aşağıdaki tablolarda ön ve son test verilerinin SPSS sonuçları verilmiştir.

Tablo 3.1.

Ön Test(son dört soru)-Spss Sonuçları

N	Valid	45
	Missing	0
Mean (Ortalama)		16.8889
Median (Medyan)		5.0000
Mode (mod)		.00
Std. Deviation		19.07786
Variance (Varyans)		363.965
*Skewness (Çarpıklık katsayısı)		.772
*Std. Error of Skewness (Çarpıklık standart hatası)		.354
Kurtosis		-.915
Std. Error of Kurtosis		.695
Range		55.00
Minimum		.00
Maksimum		55.00

Tablo 3.1'deki sonuçlara bakıldığında Çarpıklık katsayısı / çarpıklığın standart hatası = $0.772 / 0.354 = 2.18 > 1.96$ olup normal değildir fakat 3'ten küçük olduğu için Kalaycı'ya (2010) göre ön test normal kabul edilmiştir.

Tablo 3.2.

Son Test(son beş soru)- Spss Sonuçları

N	Valid	45
	Missing	0
Mean (Ortalama)		48.5556
Median (Medyan)		47.0000
Mode (mod)		47.00
Std. Deviation		23.12472
Variance (Varyans)		534.753
*Skewness (Çarpıklık katsayısı)		-.038
*Std. Error of Skewness (Çarpıklık standart hatası)		.354
Kurtosis		-.509
Std. Error of Kurtosis		.695
Range		94.00
Minimum		.00
Maksimum		94.00

Tablo 3.2'deki sonuçlara bakıldığında çarpıklık katsayı / çarpıklığın standart hatası = $-0.038 / 0.354 = -0.107 > -1.96$ olduğundan son test normal dağılmıştır.

Çalışmada veriler normal dağıldığı için parametrik testlerden bağımlı t- Testinin yapılması uygun görülmüştür. Bağımlı t- Testi ortalamaları karşılaştırmak amacıyla kullanılan ve aynı örneklem üzerinde analizlerin yapıldığı t- Testi çeşididir (Kalaycı, 2010). Bağımlı t- Testi'nin sonuçları doğrultusunda anlamlılık düzeyine göre etki büyüklüğüne de bakılacaktır. Etki büyüklüğü, örneklemde elde edilen sonuçların kabul edilen hipotezde tamamlanan beklentilerden sapma değerini gösteren istatistiksel bir değerdir (Field, 2009). Cohen'e (1992) göre eğer, etki büyüklüğü 0.10 ise etki derecesi düşük, 0.30 ise etki derecesi orta ve 0.50 ve daha yüksek değerlerde de etki derecesi yüksektir (Akt: Field, 2009, s.57).

3.4.2. Matematiksel İspat Yapma İle İlgili Görüş Anketi

Görüş anketi betimsel analiz yöntemiyle incelenmiş ve görüşülen ya da gözlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Betimsel analiz yapılırken önce veriler sistematik ve açık bir biçimde betimlenir, sonra yapılan betimlemeler açıklanır ve yorumlanır, son olarak neden sonuç ilişkileri irdelenir ve bir takım sonuçlara ulaşılır (Karasar,2009).

Ayrıca Matematiksel İspat Yapma İle İlgili Görüş Anketi'ne verilen yanıtlar sonucunda seçilen 11 öğrenci ile yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmış ve transkript edilen bu mülakatlar da betimsel analiz yöntemiyle incelenmiştir. Bu öğrenciler seçilirken çalışmanın başında ve sonunda düşüncelerinde değişiklik olan veya olmayan öğrenciler olarak seçilmiştir.

3.5. Uygulama

Bu çalışma yapılmadan önce pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışmanın yapılması; veri toplama araçlarının son şeklinin verilmesi ve çalışmanın geçerlik güvenirliğinin sağlanması için oldukça önemlidir. Pilot çalışma, 2013-2014 eğitim-öğretim yılı güz dönemi 2. sınıfta öğrenim gören 44 öğrenci ile yapılmıştır. Öncelikle asıl çalışmada kullanılacak olan testler, teorem ispatları ve mülakatlar yapılmıştır. Teorem ispatları etkinlik olarak yapılmıştır. Sonra da uzman görüşü alınarak gerekli düzenlemeler yapılmış ve veri toplama araçlarına son şekli verilmiştir.

Ana çalışma, 2014-2015 eğitim-öğretim yılı güz dönemi 2. sınıfta öğrenim gören 45 öğrenci ile yapılmıştır. Uygulamalar Bilimsel Araştırma Yöntemleri dersinde gerçekleştirilmiştir. Toplamda altı hafta süren uygulamalar 21.11.2014 – 26.12.2014 tarihleri arasında yapılmıştır. Aşağıda Tablo 3.3'de çalışma takvimi verilmiştir.

Tablo 3.3.

Çalışma Takvimi

Yapılan uygulamalar	
21.11.2014	Ön testler
28.11.2014	Etkinlik-1 ve Etkinlik-2
5.12.2014	Etkinlik-3 ve Etkinlik-4
12.12.2014	Etkinlik-5 ve Etkinlik-6
19.12.2014	Son testler
26.12.2014	Mülakatlar

İlk hafta bilgi testi ile görüş anketi ön test olarak uygulanmıştır. Ardından üç hafta boyunca etkinlikler yapılmıştır. Toplamda altı tane etkinlik olup her bir etkinlikte teorem ispatı yapılmıştır. Teoremler, Analiz-1 ders programı içerisinde seçilmiştir. Etkinliklerde sırası ile Fermat, Rolle, Ara Değer, Balzano, İntegral İçin Ortalama Değer ve Sandviç Teoremleri'nin ispatı yapılmıştır. Her bir etkinlik için bir ders saati (50 dakika) ayrılmıştır. Ders başlangıcında öğrencilere etkinlik kâğıtları çoğaltılarak dağıtılmış ve teoremin ispatını yapmaları istenmiştir. Bu aşama için öğrencilere dersin ilk 25 dakikası ayrılmıştır. Araştırmacı tarafından öğrenciler yönlendirilerek etkinliği tüm öğrencilerin tamamlaması sağlanmıştır. Bu süreç sonunda araştırmacı öncelikle teorem ifadesinde yer alan matematiksel kavramları öğrencilere hatırlatmıştır. Teoremin ispatına geçmeden önce teorem ifadesi okunarak teoremle ilgili model oluşturulmuştur. Teoremlerde model olarak grafik çizimi kullanılmıştır. Daha sonra çizilen grafik yardımıyla ispat yapılmıştır. Etkinliğin her aşamasında öğrencilerin ispatı anlaması sağlanmıştır. Etkinliklerin sonunda da ispatı yapılan teorem ile ilgili bir örnek çözülerek öğrencilerin ispatı daha iyi pekiştirmeleri sağlanmıştır. Örnek olarak yapılan bir etkinlik EK 6 da verilmiştir. Etkinliklerin ardından beşinci haftada bilgi testinin ve görüş anketinin son testi uygulanıp öğrencilerin görüş anketine verdikleri yanıtlar incelenerek 11 öğrenci seçilip altıncı haftada da bu öğrencilerle mülakat yapılmıştır.

3.6. Değişkenler

3.6.1. Bağımsız Değişkenler

Çalışmada kullanılan bağımsız değişken öğretim yöntemidir. Bu çalışmada bağımsız değişken matematiksel modeller ile yapılan öğretim yöntemidir.

3.6.2. Bağımlı Değişkenler

Öğrencilerin ispat yapma ile ilgili akademik başarıları araştırmanın bağımlı değişkenleridir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde araştırma konusu olan matematiksel modellerle teorem ispatlarının öğrencilerin ispat yapabilme becerilerine, akademik başarılarına ve ispatla ilgili görüşlerine olan etkisine bakabilmek için toplanan verilerin çözümlenmesine ait bulgular yer almaktadır. Çalışmamız üç alt probleme ayrılmış ve bulgular bu alt problemlere dayalı olarak oluşturulmuştur.

4.1. Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının Öğrencilerin İspat Yapabilme Becerilerine Etkisine İlişkin Bulgular

Bu bölümde birinci alt problem için öğrencilere uygulanan Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi'ndeki teorem ispatı yapma ile ilgili olarak sorduğumuz ön testteki ilk iki soruya ve son testteki ilk üç soruya verilen yanıtların analiz edilmesiyle elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Araştırmanın deseninden dolayı gerekli görülen öğrencilerin yanıtları taranarak sunulmuştur. Öğrencilerin vermiş oldukları yanıtlar “boş”, “yanlış”, “kısmen doğru”, “kısmen yanlış” ve “doğru” şeklinde kategorize edilip yüzde ve frekans tablosu ile bulgular verilmiştir.

4.1.1. Sandviç Teoremi'nin İspatına İlişkin Bulgular

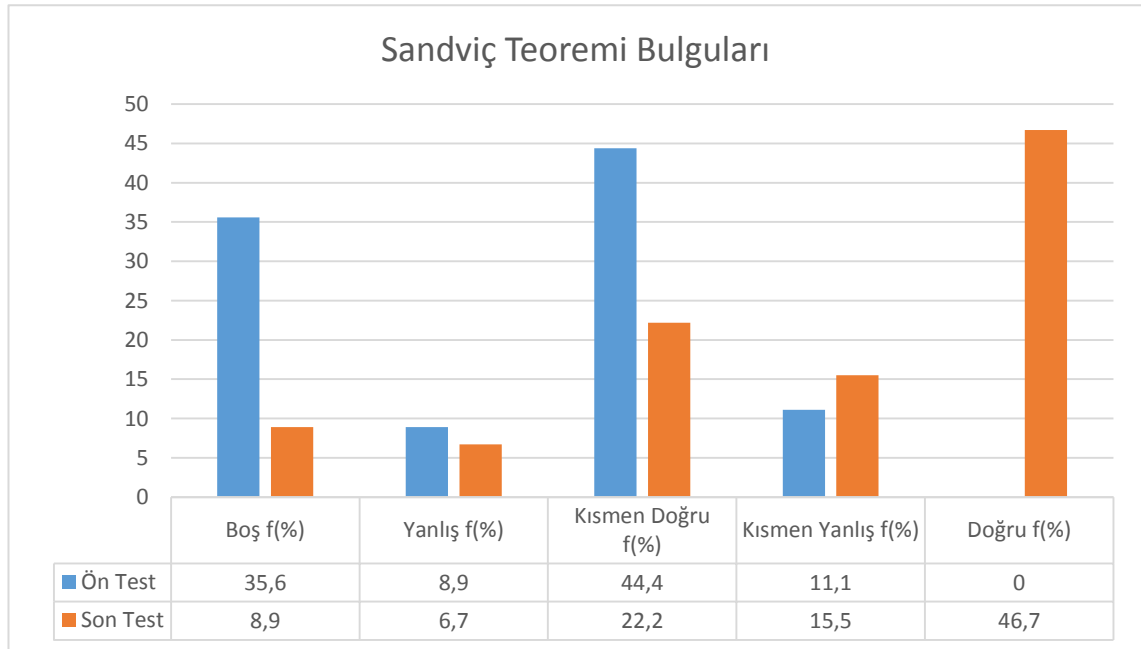
Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi'nin ön ve son testinde öğrencilere; “Sandviç Teoremi: a nın bir komşuluğunda a dan farklı her x için $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dir.” İspatlayınız.” olarak soruldu. Öğrencilerin ön ve son testte vermiş oldukları yanıtların yüzde ve frekans dağılımı aşağıda Tablo 4.1'de verilmiştir. Ayrıca yüzde ve frekans dağılımına göre sütun grafiği aşağıda Şekil 4.1'de verilmiştir.

Tablo 4.1.

Öğrencilerin Sandviç Teoremi'ni ispatlama durumları ile ilgili yüzde ve frekans dağılımları

Ölçütler	Boş	Yanlış	Kısmen Doğru	Kısmen Yanlış	Doğru
Testler	f(%)	f(%)	f(%)	f(%)	f(%)
Ön Test	16(35,6)	4(8,9)	20(44,4)	5(11,1)	0(0,0)
Son Test	4(8,9)	3(6,7)	10(22,2)	7(15,5)	21(46,7)

Öğrencilerin Sandviç Teoremi'ni ispatlama durumları ile ilgili veriler incelendiğinde başlangıçta öğrencilerin %0'ı (n=0) doğru yanıt verirken son testte %46.7'si (n=21) doğru yanıt vermiştir. Ayrıca ön testte öğrencilerin %35.6'sı (n=16) soruyu boş bırakırken son testte %8.9' u (n=4) boş bırakmıştır.



Şekil 4.1. Öğrencilerin Sandviç Teoremi'ni ispatlama durumları ile ilgili yüzdeler

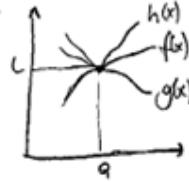
Ayrıca öğrencilerin ön testte ve son testte yapmış oldukları ispatlara örnekler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \text{ olduğundan } |x-a| < \delta \text{ için } |g(x)-L| < \varepsilon/4 \text{ ve } |h(x)-L| < \varepsilon/4 \text{ olur.} \\ |f(x)-g(x)| &\leq |h(x)-g(x)| = |h(x)+L-L-g(x)| \\ &\leq |h(x)-L| + |g(x)-L| \\ &\leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Buna göre

$$\begin{aligned} |f(x)-L| &= |f(x)+g(x)-g(x)-L| \\ &\leq |f(x)-g(x)| + |g(x)-L| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Buradan $|f(x)-L| \leq \varepsilon$ olup teoremiyle ispat biter olur.



Şekil 4.2. EK kodlu öğrencinin soru 1'e son testte verdiği yanıtı

EK kodlu öğrenci ön testte soruyu boş bırakmış, son testte ise doğru yanıt vermiştir.

$$\begin{aligned} 1) \quad &g(x)=b \quad f(x)=b \quad h(x)=b \\ &\lim_{x \rightarrow a} g(x)=L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x)=L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)=L \\ 2) \quad &g(x)=b \quad f(x)=c \quad h(x)=d \quad b < c < d < L \\ &\lim_{x \rightarrow a} g(x)=L \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)=L \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x)=L \\ 3) \quad &g(x)=b \quad f(x)=c \quad h(x)=d \quad L < b < c < d \\ &\lim_{x \rightarrow a} g(x)=L \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)=L \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x)=L \end{aligned}$$

Şekil 4.3. AS kodlu öğrencinin soru 1'e ön testte verdiği yanıtı

$$\begin{aligned} &g(x), h(x), f(x) \text{ için } \forall \varepsilon > 0 \\ &|g(x)-L| = \frac{\varepsilon}{4}, \quad |h(x)-L| = \frac{\varepsilon}{4} \text{ dersenek} \\ &f(x) \leq h(x) \Rightarrow |f(x)-g(x)| \leq |h(x)-g(x)| = |h(x)-L+L-g(x)| \\ &\leq |h(x)-L| + |g(x)-L| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \\ &|g(x)-L| < |f(x)-L| = |f(x)-g(x)+g(x)-L| \\ &\leq |f(x)-g(x)| + |g(x)-L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad |g(x)-L| < \varepsilon \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)=L \text{ olur.} \end{aligned}$$

Şekil 4.4. AS kodlu öğrencinin son testteki yanıtı

AS kodlu katılımcının ön ve son testteki yanıtları incelendiğinde, ön testte teorem için uğraştığı fakat ispatla ilgili olmayan ifadelerin olduğu görülmüştür. Bununla birlikte son teste ise ispatı tam olarak doğru bir şekilde ifade ettiği belirlenmiştir. Bir başka katılımcı olan AK soru 1 için ön testte hipotezde verilen bilgileri açıklamış fakat ispatı yapmadığından dolayı yanıtı kısmen doğru kategorisine koyulmuştur. Son testte ispatı tam doğru yapmıştır. AK'nın ön testte ve son testte vermiş olduğu yanıtlar aşağıdaki Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da verilmiştir.

Limitte depar arasında sonsuz küçük olduğunu göre ;

$$\begin{aligned} \rightarrow \varepsilon_1 &\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ in sonsuz küçüğü} \\ \varepsilon_3 &\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} h(x) \text{ in sonsuz küçüğü} \\ \varepsilon_2 &\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ in sonsuz küçüğü ve} \\ \varepsilon_1 &< \varepsilon_2 < \varepsilon_3 \text{ olsun.} \end{aligned}$$

Limit alırken sonsuz küçükler depara yazılmaz.
Yani $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ olur
öyleyse $f(x) \leq h(x)$ elde edilir.

Şekil 4.5. AK kodlu öğrencinin soru 1'e ön testte verdiği yanıt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \text{ olduğundan } \forall \varepsilon > 0 \text{ için } |x-a| < \delta \text{ için} \\ |f(x)-L| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ ve } |h(x)-L| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ olur. Aynı } x \text{ ler için} \\ |f(x)-g(x)| &\leq |h(x)-g(x)| = |h(x)+L-L-g(x)| \\ &\leq |h(x)-L| + |g(x)-L| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Buradan $|f(x)-L| = |f(x)+g(x)-g(x)-L|$
 $\leq |f(x)-g(x)| + |g(x)-L|$
 $< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$|f(x)-L| < \varepsilon$ olup ispat tamamlanır.

Şekil 4.6. AK kodlu öğrencinin soru 1'e son testte verdiği yanıt

4.1.2. Ortalama Değer Teoremi 'nin İspatına İlişkin Bulgular

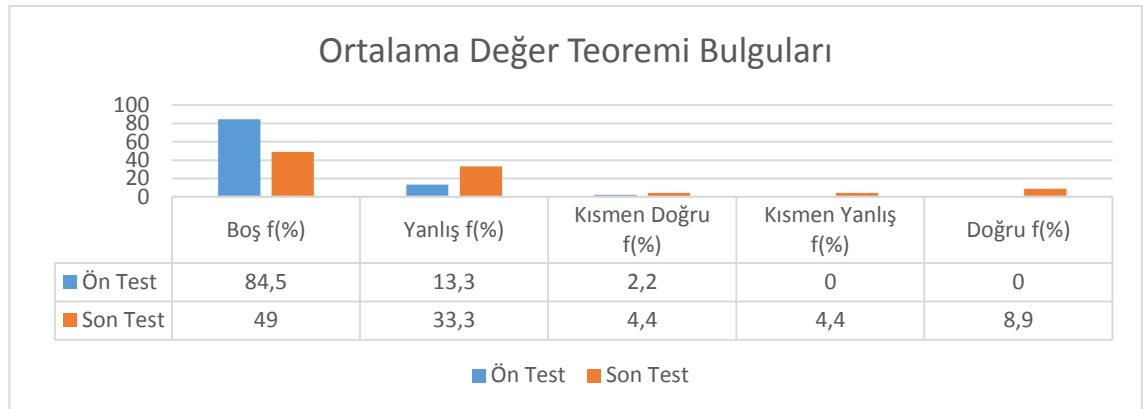
Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi'nin ön ve son testinde öğrencilere ikinci soru; “Ortalama Değer Teoremi: $f:[a,b] \rightarrow R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu takdirde (a,b) aralığında $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır. İspatlayınız.” şeklinde sorulmuştur. Öğrencilerin ön testte ve son testte yapmış oldukları ispatların yüzde ve frekans dağılımı aşağıda tablo 4.2 'de verilmiştir.

Tablo 4.2.

Öğrencilerin Ortalama Değer Teoremi'ni ispatlama durumları ile ilgili yüzde ve frekans Dağılımları

Ölçütler Testler	Boş f(%)	Yanlış f(%)	Kısmen Doğru f(%)	Kısmen Yanlış f(%)	Doğru f(%)
Ön Test	38(84,5)	6(13,3)	1(2,2)	0(0,0)	0(0,0)
Son Test	22(49,0)	15(33,3)	2(4,4)	2(4,4)	4(8,9)

Öğrencilerin Ortalama Değer Teoremi'ni ispatlama durumları ile ilgili yüzde ve frekans tablosu incelendiğinde başlangıçta öğrencilerin %0'ı (n=0) doğru yanıt verirken son testte %8.9'u (n=4) doğru yanıt vermiştir. Ayrıca ön testte öğrencilerin %84.5'i (n=38) soruyu boş bırakırken son testte %49' u (n=22) boş bırakmıştır.



Şekil 4.7. Öğrencilerin Ortalama Değer Teoremi'ni ispatlama durumları ile ilgili yüzdelere

Ayrıca öğrencilerin ön testte ve son testte yapmış oldukları ispatlara örnekler aşağıda verilmiştir.

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

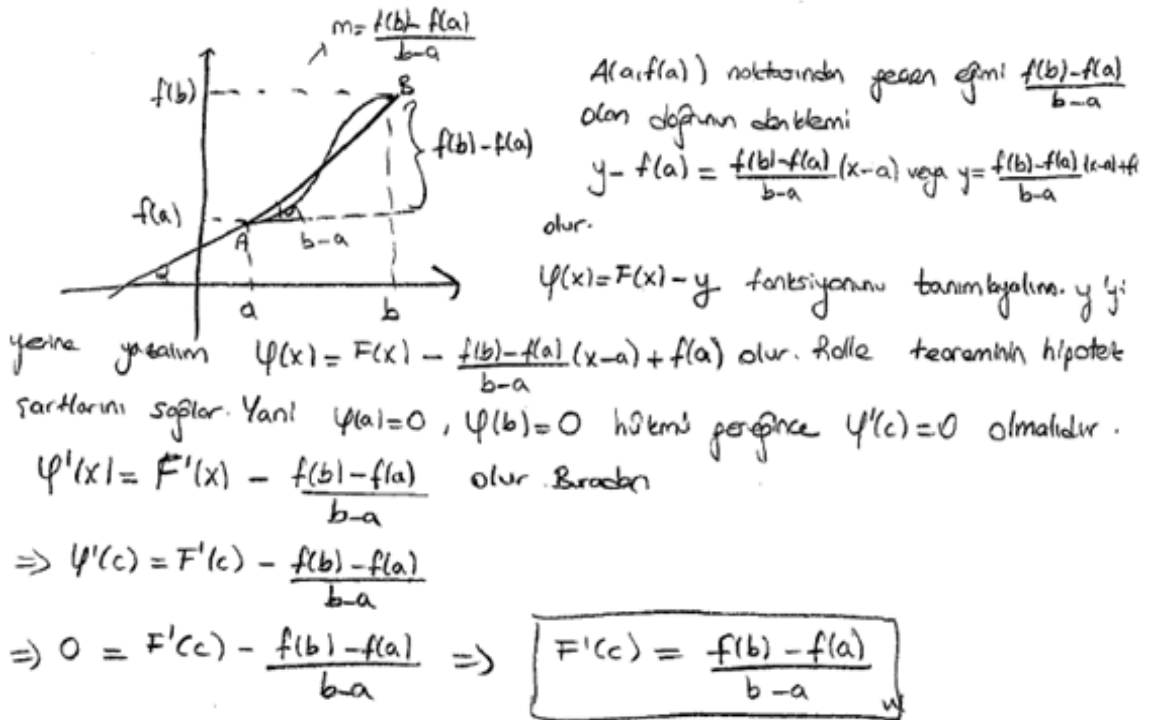
$$f(x+\Delta x) = f'(x) \cdot \Delta x + f(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x+\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(x) \Delta x + f(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) = f(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad \text{buck = farklılığın tanımı}$$

Şekil 4.8. MÇ1 kodlu öğrencinin soru 2 ye ön testte verdiği yanıt



Şekil 4.9. MÇ1 kodlu öğrencinin soru 2 ye son testte verdiği yanıt

MÇ1 kodlu katılımcının ön ve son testteki yanıtları incelendiğinde, ön testte teorem için uğraştığı fakat ispatla ilgili olmayan ifadelerin olduğu görülmüştür. Bununla

birlikte son teste ise ispatı tam olarak doğru bir şekilde ifade ettiği belirlenmiştir. Bir başka katılımcı olan EK soru 2'yi ön testte tamamen boş bırakmış fakat son testte ispatı doğru yapmıştır. EK'nın son teste vermiş olduğu yanıt aşağıdaki Şekil 4.10'da verilmiştir.

$A(a, f(a))$ noktasının eğimi $m_{AB} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dan AB doğrusunun denklemi
 $y-f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$ ya da $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (x-a) + f(a)$
 $U(x) = f(x) - y$ fonksiyon tanımlanır. y yi yitelim.
 $U(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (x-a) - f(a)$
 $U(x)$ fonksiyonu Rolle teoreminin şartlarını sağlar. Yani $[a, b]$ aralığında sürekli
 (a, b) aralığında $U'(x) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır.
 $U'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $U'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
 $U'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Buradan $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ olur.

Şekil 4.10. EK adlı öğrencinin soru 2'ye son testte verdiği yanıt

4.1.3. Fermat Teoremi'nin İspatına İlişkin Bulgular

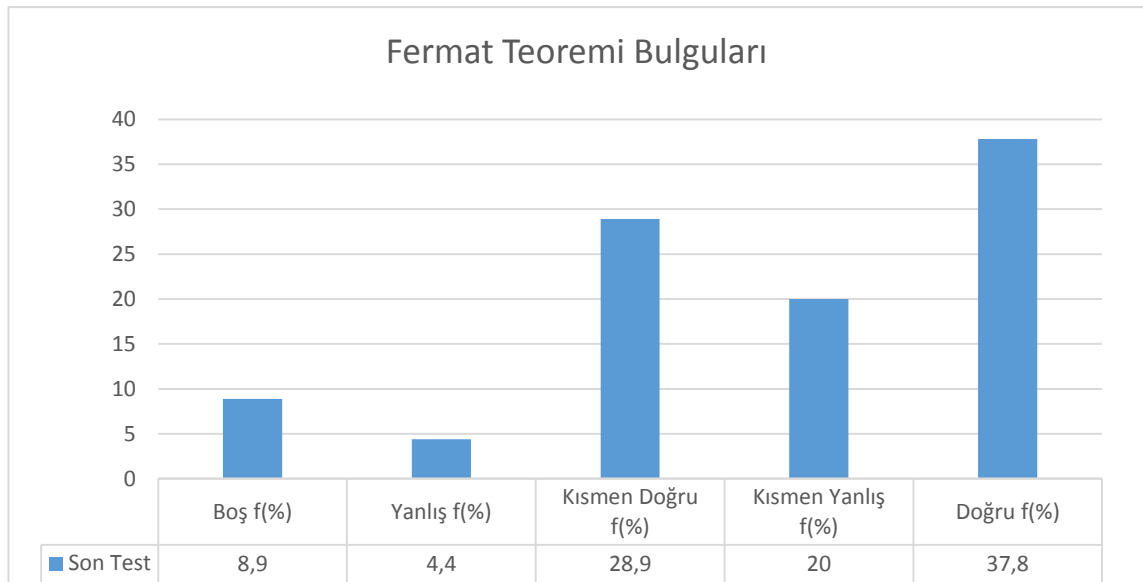
Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi'nde öğrencilere son testte üçüncü soru; "Fermat Teoremi: $f : [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonunun bir $c \in (a, b)$ noktasında bir yerel maksimumu veya minimumu varsa ve f fonksiyonu c noktasında türevlenebiliyorsa $f'(c) = 0$ dır. İspatlayınız." olarak soruldu. Öğrencilerin son testte yapmış oldukları ispatların yüzde ve frekans dağılımı aşağıda Tablo 4.3'de verilmiştir.

Tablo 4.3.

Öğrencilerin Fermat Teoremi'ni İspatlama Durumları İle İlgili Yüzde ve Frekans Dağılımları

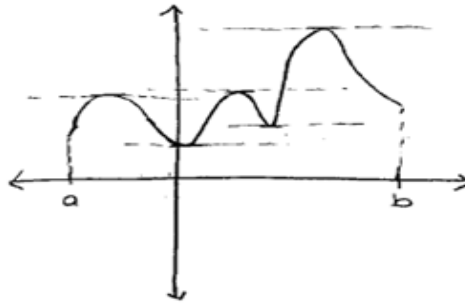
Ölçütler	Boş	Yanlış	Kısmen Doğru	Kısmen Yanlış	Doğru
Testler	f(%)	f(%)	f(%)	f(%)	f(%)
Son Test	4(8,9)	2(4,4)	13(28,9)	9(20,0)	17(37,8)

Öğrencilerin Fermat Teoremi'ni ispatlama durumları incelendiğinde öğrencilerin %37.8'i (n=17) doğru yanıt verirken, %28.9'u (n=13) kısmen doğru, %4.4'ü (n=2) ise yanlış yanıt vermiştir.



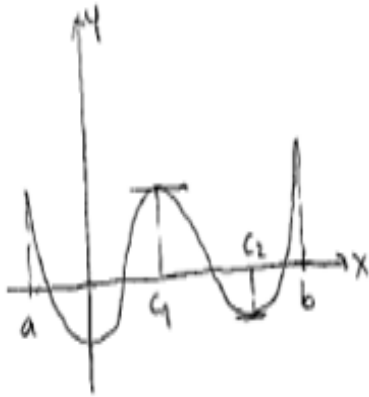
Şekil 4.11. Öğrencilerin Fermat Teoremi'ni ispatlama durumları ile ilgili yüzdeler

Ayrıca öğrencilerin yapmış oldukları ispatlara örnekler aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.12. MK1 kodlu öğrencinin soru 3'e son testte verdiği yanıt

MK1 kodlu katılımcının son testteki üçüncü soruya verdiği yanıtı bakıldığında hipotezle ilgili verileri kullanarak grafik çizdiği yani matematiksel model oluşturduğu görülmüştür. Grafik doğru çizilmiş fakat teoremin ispatı yapılmadığı için öğrencinin yanıtı kısmen doğru olarak kabul edilmiştir. Bir başka katılımcı olan MT1 ise hem grafiği çizmiş hem de ispatı tam doğru yapmıştır. Bu öğrencinin soru 3'e verdiği yanıt aşağıda Şekil 4.13'te verilmiştir.



f -fonksiyonu c_1 noktasında yerel max. sahip olsun. Bu durumda $\delta \in \mathbb{R}^+$ vardır ki $|x - c_1| < \delta$ şartını sağlayan $\forall x$ için $f(x) \leq f(c_1)$ dir.

$|h| < \delta$ şartını sağlayan $\forall h$ için

$x = c_1 + h$ olsun

$x = c_1 - h$ olsun.

$f(x) \leq f(c_1) \Rightarrow f(c_1 + h) \leq f(c_1)$ olarak yazılır.

$f(c_1 + h) \leq f(c_1) \Rightarrow f(c_1 + h) - f(c_1) \leq 0$ olur.

$h > 0$ için $\frac{f(c_1 + h) - f(c_1)}{h} \leq 0$ olur. Buradan $f'(c_1) \geq 0$... (1)

$h < 0$ için $\frac{f(c_1 + h) - f(c_1)}{h} \geq 0$ olur. Buradan $f'(c_1) \leq 0$ olur ... (2)

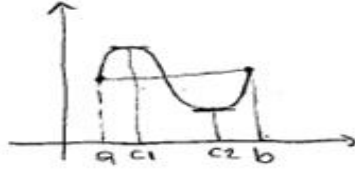
f -fonksiyonu c noktasında türevlenebilir olduğundan h ister negatif ister pozitif olsun.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c_1 + h) - f(c_1)}{h} = f'(c_1) \text{ olur}$$

(1) ve (2) eşitliklerinden $f'(c_1) = 0$ olarak yazılır.

Şekil 4.13. MT1 kodlu öğrencinin soru 3'e verdiği yanıt

$|x-c| < \delta$ olsun. $|h| < \delta$ buradan $x-c=h$
 $x=c+h$ olur
 $f(x) \leq h(c)$ için
 $f(c+h) \leq h(c)$
 $f(c+h) - h(c) \leq 0$ olur.
 $h > 0$ için $\frac{f(c+h) - h(c)}{h} < 0$ dir. $f'(c) = 0$
 $h < 0$ için $\frac{f(c+h) - h(c)}{h} > 0$ dir. $f'(c) = 0$
 h ister negatif ister pozitif olsun. $f'(c) = 0$ olduğunu gösterir.



Şekil 4.14. EK kodlu öğrencinin soru 3'e verdiği yanıt

EK kodlu katılımcı teoremin ispatı ile ilgili matematiksel model çizmiş ve ispatı yapmıştır. Fakat teoremin ispatının tam olarak doğru olması için hipotezde olan türevlenebilme bilgisini kullanılması gerekirdi. Yani “ f fonksiyonu türevlenebilir olduğundan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c)$$

olur ve iki eşitsizlikten $f'(c) = 0$ olur.” yazılması gerekirdi. Bu yüzden yanıt kısmen yanlış kategorisine konulmuştur.

4.2. Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının Öğrencilerin Akademik Başarılarına Etkisine İlişkin Bulgular

Bu bölümde öğrencilerin akademik başarılarındaki değişimi bulmak için Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi'nin ön testindeki dört soru ve son testindeki beş soruya verilen yanıtların analiz edilmesiyle elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Öğrencilerin vermiş olduğu yanıtlar Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi Puanlama Anahtarı'na göre 100 puan üzerinden değerlendirilmiştir. Öğrencilerin ön testte ve son testte almış oldukları puanlar, ad ve soyadlarından oluşturulan kodlarla aşağıda Tablo 4.4'te verilmiştir.

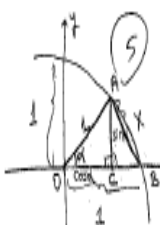
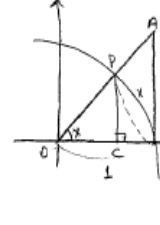
Tablo 4.4.

Öğrencilerin Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi'nden Almış Oldukları Puanlar

Öğrenci	Ö.T	S.T	Öğrenci	Ö.T	S.T	Öğrenci	Ö.T	S.T
CK	0	40	KA	25	0	AB	40	57
MÇ1	30	87	ZÇ	0	60	BB	0	80
MK1	40	84	ŞÖ	5	20	HİG	25	54
BK	0	60	ST	5	70	SK1	25	27
ŞB	5	27	FK	5	24	SMF	10	30
RB	5	47	UG	55	60	VA	30	27
MK2	5	47	MÇ2	5	50	SK2	50	77
SA	55	74	NBD	0	37	MZ	50	60
MT1	0	60	EK	0	67	AD	50	40
AK	0	34	ÜÖ	0	27	FBA	40	60
OE	5	20	MG	0	67	OM	40	94
AS	0	27	ÇŞ	5	51	RÇ	50	47
MT2	25	12	HSB	0	87	FD	15	38
BS	0	0	KŞ	5	47	Sİ	25	47
HA	0	34	YÇ	0	80	MD	30	47

Ö.T: Ön Test S.T: Son Test

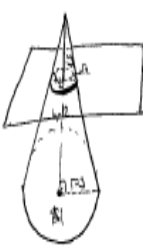
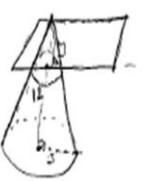
Tablo 4.4 incelendiğinde ön testte 15 öğrenci hiçbir soruyu yanıtlamayıp 0 puan alırken son testte ise 2 öğrenci 0 puan almıştır. Son testte öğrencilerin daha yüksek puan aldıkları görülmektedir. 39 öğrenci ön testte aldıkları puanları yükseltmişlerdir. Öğrencilerin aldıkları puanlara göre değişim oranı yüksek olanlardan birkaçının kâğıtları örnek olarak aşağıda verilmiştir. Hake'e (1998) göre değişim oranı (Son sınav puanı- Ön sınav puanı) / (Maksimum puan – Ön sınav puanı) şeklinde bulunabilir (Akt: Kurnaz, 2014). Örneğin OM kodlu öğrencinin değişim oranı = $(94 - 40) / (100 - 40) = 0.9$ olarak bulunurken HSB kodlu öğrencinin değişim oranı = $(80 - 0) / (100 - 0) = 0.8$ olarak bulunur. Bu sonuçlara göre değişim oranı yüksek olan OM kodlu öğrencinin daha başarılı olduğu söylenir.

Ön test	Son test
3. $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun ortalama değerini hesaplayınız. $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $f'(x_0) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)}$ $f(2) = 4 + 4 = 8$ $f(-1) = 1 - 2 = -1$ $f'(x_0) = \frac{8 - (-1)}{2 - (-1)} = \frac{9}{3} = 3$ $2x + 2 = 3$ $2x = 1$ $x = \frac{1}{2}$ 4. $x^3 + x^2 - 1 = 0$ denkleminin 0 ile 1 arasında bir köke sahip olduğunu gösteriniz. $x^2(x+1) = 1$ $(x-1)^3 + 4x^2 - 3x = 0$ $x^2 = 1 \quad x+1 = 1 \quad x = 1 \quad x(4-3) = 0$ $x = 1 \quad x = 0 \quad x < 0 \quad x = \frac{3}{4}$ $0 < x < 1$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.  $ AB = \sin x$ $ OA = 1$ $ CB = \cos x$ $ AB = 1 - \cos x$ $ AB = x$ $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x =$ $ AB = \sin^2 x + (1 - \cos x)^2$ $= \sin^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x$ $= 2 - 2\cos x$ $A(AB) = A$ $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x =$ 6. Taban yarıçapı 3, yüksekliği 12 birim olan bir dairesel dik koni tepesinden y birim uzakta, tabanına paralel bir düzlemle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değeri nedir? 	4. $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun ortalama değerini hesaplayınız. $f'(x) = 2x + 2$ $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $f(2) = 8$ $f(-1) = -1$ $2c + 2 = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{8 + 1}{3}$ $2c + 2 = 3$ $c = \frac{1}{2} \in [-1, 2]$ 5. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ denkleminin 0 ile 3 arasında bir köke sahip olduğunu gösteriniz. $(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$ $x^2 - 4 = 0$ $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, x = -2$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.  $A(POA) < A(POB) \text{ daireesel kesitinin Alanı } < A(ACB)$ $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$ $\sin x < x < \tan x$ $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 < \frac{1}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \sin x < x < \tan x$ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x < \lim_{x \rightarrow 0} x < \lim_{x \rightarrow 0} \tan x$ $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$ 7. Taban yarıçapı 3, yüksekliği 12 birim olan bir dairesel dik koni tepesinden y birim uzakta, tabanına paralel bir düzlemle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değeri nedir? $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $\frac{y}{12} = \frac{x}{3}$ $y = 4x$ $f(x) = \frac{\pi r^2 h}{3}$ $\frac{\pi (4x)^2 \cdot 12}{3} = \frac{\pi (16x^2) \cdot 12}{3} = \frac{\pi (192x^2)}{3} = 64\pi x^2$ 8. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x$ fonksiyonunun (0, 2) aralığında bir köke sahip olduğunu gösteriniz. $f(2) = 16 - 72 + 104 - 48 = 0$ $f(0) = 0$ $f'(x) = 4x^3 - 27x^2 + 52x - 24$ $f'(c) = 4c^3 - 27c^2 + 52c - 24 = 0$

Şekil 4.15. MÇ1 kodlu öğrencinin Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi'ne verdiği yanıtlar

MÇ1 kodlu öğrencinin ön ve son test yanıtları incelendiğinde, ön testte sadece birinci soruda tam puan aldığı son testte ise sadece yedinci soruda tam puan alamayarak,

MÇ1 ön testte 30 puan son testten ise 87 puan almıştır. Bir başka katılımcı olan OM kodlu öğrenci ise Şekil 4.16 incelendiğinde ön testte 40 puan son testte ise 94 puan olarak katılımcılar arasında son testte en yüksek not alan öğrenci olmuştur.

Ön test	Son test
3. $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun ortalama değerini hesaplayınız. $x_0 = -1$ için $f(-1) = 3$ $x_1 = 2$ için $f(2) = 8$ $\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{8 - 3}{3} = \frac{5}{3}$ 4. $x^2 + x^2 - 1 = 0$ denkleminin 0 ile 1 arasında bir köke sahip olduğunu gösteriniz. 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$ 6. Taban yarıçapı 3, yüksekliği 12 birim olan bir dairesel dik koni tepesinden y birim uzakta, tabanına paralel bir düzlemle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değeri nedir?  $M = \pi r^2$ $A_2 = \pi r_2^2$ $\frac{A_2}{A} = \left(\frac{r_2}{r}\right)^2$ $\frac{A_2}{\pi \cdot 3^2} = \left(\frac{r_2}{3}\right)^2$ $A_2 = 9r_2^2$ $r_2 = \frac{y}{3}$	4. $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun ortalama değerini hesaplayınız. $f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $\frac{8 - (-1)}{2 - (-1)} = f(x_0)$ $f(-1) = 1 - 2 = -1$ $f(2) = 4 + 4 = 8$ $f(x_0) = \frac{9}{3} = 3$ 5. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ denkleminin 0 ile 3 arasında bir köke sahip olduğunu gösteriniz. $f(0) = 0 - 0 - 4 = -4$ $f(3) = 81 - 27 - 4 = 50$ $f(1) = 1 - 3 - 4 = -6$ $f(2) = 16 - 12 - 4 = 0$ $C \in (0, 3)$ olur. 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1$ 7. Taban yarıçapı 3, yüksekliği 12 birim olan bir dairesel dik koni tepesinden y birim uzakta, tabanına paralel bir düzlemle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değeri nedir?  $\frac{y}{12} = \frac{r_2}{3}$ $r_2 = \frac{y}{4}$ $A = \pi r^2$ $A = \pi \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \frac{\pi y^2}{16}$ 8. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x$ fonksiyonunun $(0, 2)$ aralığında bir köke sahip olduğunu gösteriniz. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x = 16 - 72 + 108 - 48 = 0$ $f(0) = 0$ $f(2) = 16 - 72 + 108 - 48 = 0$ $f(x) \neq f(0) = 0$ Rolle teoremine göre $f'(c) = 0$ yapan bir $C \in (0, 2)$ vardır. $f'(x) = 4x^3 - 27x^2 + 52x - 24$ $f'(c) = 4c^3 - 27c^2 + 52c - 24$

Şekil 4.16. OM kodlu öğrencinin Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi'ne verdiği yanıtları

Son test

4. $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun ortalama değerini hesaplayınız.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ ten, } \frac{1}{2-(-1)} \int_{-1}^2 (x^2+2x) dx = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_{-1}^2$$

$$\frac{1}{3} \left[\left(\frac{2^3}{3} + 2^2 \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 \right) \right] = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{20}{3} - \frac{2}{3} \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{18}{3} \Rightarrow \frac{18}{9} = 2$$

$x^2+2x=2 \Rightarrow x^2+2x-2=0$ elde edilenlerde en az bir x_0 vardır

5. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ denkleminin 0 ile 3 arasında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

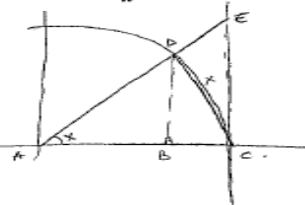
$x=0$ tam, $f(0) = -4$
 $x=3$ tam, $f(3) = 50$

$f(0)$ ile $f(3)$ tut. Raraltır çıkışından Baktarı
 kesime göre 0 ile 3 arasında

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ sağlanan en az bir x_0 vardır.

20

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.



ABC üçgeni den $\angle ABC$ dairesel köşü den $\angle AEC$ üçgeni den.

$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$

$\sin x < x < \tan x$ her tarafı $\sin x$ 'e bölümler.

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ ters çevirilir.

$\frac{1}{\frac{1}{\cos x}} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ olur. Sınırımdan, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ olur.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olacaktır.

20

7. Taban yarıçapı 3, yüksekliği 12 birim olan bir dairesel dik koni tepesinden y birim uzakta, tabanına paralel bir düzlemle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değeri nedir?



$\frac{y}{12} = \frac{r}{3}$
 $r = \frac{y}{4}$ olur
 $\pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{y}{4} \right)^2$

Ortalama değer teoreminden;
 $\frac{1}{12-0} \int_0^{12} \pi \cdot \frac{y^2}{16} dy$ olur. Buradan,
 $\frac{1}{12} \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \left(\frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{12} \Rightarrow \frac{\pi}{12 \cdot 16} \cdot \left(\frac{12^3}{3} - 0 \right)$
 $= \frac{\pi}{12 \cdot 16} \cdot \frac{12^3}{3} = \frac{12^2 \cdot \pi}{16 \cdot 3} = \frac{3\pi}{1} = 3\pi$ olur.

20

8. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x$ fonksiyonunun $(0, 2)$ aralığında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

$f(0) = 0 - 0 + 0 - 0 = 0$
 $f(2) = 2^4 - 9 \cdot 2^3 + 26 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 = 0$

$f(0) = f(2)$ olur. Rolle teoreminin koşulları sağlanır.

$f'(c) = 4c^3 - 27c^2 + 52c - 24$
 $f'(c) = 4c^3 - 27c^2 + 52c - 24 = 0$ uppede elerde bir $c \in (0, 2)$ vardır.

20

Şekil 4.17. YÇ kodlu öğrencinin Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi'ne verdiği yanıtlar

YÇ adlı öğrenci ön testte hiçbir soruyu çözmayerek sıfır puan alırken, son testte ise sadece bir soruyu yapamayarak 80 puan almıştır. Son testte YÇ dört soruyu da tam doğru olarak yanıtlamıştır.

Ayrıca ortalamalar arasındaki farkın anlamlılığını belirlemek için bağımlı grup t-testi analizi yapılarak aşağıda Tablo 4.5’te SPSS sonuçları verilmiştir.

Tablo 4.5.

Bağımlı t- Testi Sonuçları

	Paired Differences			
	T	df	Sig. (2- tailed) (p)	r (Etki Büyüklüğü)
Pair 1 Ön test- Son test	-8,111	44	,000	0,77

Tablo 4.5’e bakıldığında $p = 0.00$ olup ön test ile son test ortalamaları arasında anlamlı bir fark bulunmuştur. Bir test sonucunu yorumlamak için sadece anlamlılık düzeyine bakmak yeterli değildir, aynı zamanda etki büyüklüğüne de bakılmalıdır. Çünkü bir testin sonucu anlamlı olabilir fakat etkisi düşük olabilir. Etki büyüklüğü aşağıdaki formülle hesaplanır.

Etki büyüklüğü $= r = \sqrt{\frac{t^2}{t^2 + df}} = 0.77$ olarak hesaplanmıştır. Yapılan araştırmanın etki büyüklüğü $r = 0.77$ olup etki büyüklüğü yüksek çıkmıştır.

4.3. Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının Öğrencilerin İspatla İlgili Görüşlerine Etkisi İle İlgili Bulgular

Bu bölümde öğrencilerin görüşlerindeki değişimi görmek için ön ve son test olarak uygulanan Matematiksel İspat Yapma İle İlgili Görüş Anketi’ne verilen yanıtların analiz edilmesiyle elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Ankette yer alan sorular öğrencilerin ön ve son testteki yanıtlarına göre ayrı ayrı incelenmiştir. Ankette ilk soru “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor? Açıklayınız.” şeklinde sorulmuş ve RB ve MG kodlu öğrencilerin yanıtları Şekil 4.18 ve Şekil 4.19’da verilmiştir.

Bildiğimiz yada bilmediğimiz kavramları, formüllerin açıklamalarını, nereden geldiğini, nasıl ulaşıldığını düzenli, arızalı şekilde açıklanmıştır.
RB kodlu öğrencinin soru 1'e ön testte verdiği yanıt
Matematiksel ispat, bilinmeyen ifadelerin, bilinenlerin yardımıyla doğruluğunu göstermektedir. Doğruluğunu göstermek, nasıl ulaşıldığını, bilmek, öğrendiklerinizi kalıcı hale getirir ve zihninizde anlatılandırmanıza yardımcı olur.
RB kodlu öğrencinin soru 1'e son testte verdiği yanıt

Şekil 4.18. RB kodlu öğrencinin soru 1'e ön ve son testte verdiği yanıt

Formüller ezberlemekten ziyade mantıklı bir şekilde nasıl ulaşıldığını öğreniyoruz. Nereden geldi demek yerine birden gelebileceğin kaygısız matematik gibi mantıklı bir dersin ispatla bütünlüğüne gerektiklerini düşünüyorum. Herşey daha somut daha açık uygun, tabirlerden uzak olmalıdır.
MG kodlu öğrencinin soru 1'e ön testte verdiği yanıt
Matematik mantıklı bir ders olduğundan matematiksel ispatla matematiğin olmazsa olmazıdır. Formül ezberliyoruz ama bir ispat yaparak o formülün nereden nasıl geldiğini görüyoruz. Ezber unutulabilir ama mantıklı ispatlanan formül unutulmaz. Daha kalıcı bir hal almakla beraber herşey gördüğümüzden nereden geldi sonuçlarını somutlaştırmaya da yetmektedir.
MG kodlu öğrencinin soru 1'e son testte verdiği yanıt

Şekil 4.19. MG kodlu öğrencinin soru 1'e ön ve son testte verdiği yanıt

RB ve MG kodlu öğrencilerin birinci soruya ön ve son testte verdikleri yanıtlar incelendiğinde ispatla ilgili olumlu ifadeler kullandıkları ve ispatı önemli gördükleri belirlenmiştir. Ayrıca MG matematiksel ispat için “matematiğin olmazsa olmazıdır” ifadesini kullanarak matematiksel ispatın önemini vurgulamıştır. Dolayısıyla katılımcı öğrenciler için ispat matematik eğitiminin önemli bir parçası ve kalbi olarak görülmektedir. Diğer taraftan ŞB ve FK kodlu öğrencilerin yanıtları incelendiğinde ön ve son testte ispatla ilgili hem olumlu hem de olumsuz ifadeler kullandıkları görülmüştür. Örneğin Şekil 4.20’de ŞB kodlu öğrencinin yanıtı incelendiğinde

matematiksel ispatın önemli olduğunu ifade etmesine rağmen yine de ispat yapmanın meslek hayatında kullanılmaya uygun olmadığı düşüncesini savunmaktadır. FK kodlu öğrencinin yanıtı incelendiğinde ise matematiksel ispatla ilgili düşüncelerinin daha olumsuz olduğu görülmektedir. FK ispat yapmanın sıkıcı olduğunu, bir yığın harf ve sayılardan oluştuğunu ifade etmektedir. ŞB ve FK kodlu öğrencilerin yanıtları aşağıda verilmiştir.

Matematiksel ispat neyin nereden geldiğini, nedenini anlamamızı sağlar. Birçok şeyi ezberden kurtarıp mantığa sığdırır ve işlemler arasında ilişki kurma yeteneğini kuvvetlendirir. Fakat okulda öğretilen matematiksel ispat çok temel düzeydedir ve meslek hayatında kullanılmaya uygun değildir. Ayrıca ispatın temelinde yine ezberdir ve kişi herhangi bir bilgi si olmadan temel bilgileriyle ispat yapamaz.
ŞB kodlu öğrencinin soru 1'e ön testte verdiği yanıt
Matematiksel ispat öğrencilerin daha mantıklı düşünebilmesini ve olaylar arasında bağlantı kurmasını sağlar. Fakat bu katkının çok olduğunu düşünmüyorum. Çünkü öğrenci ispat yaparken önce ezberleyip sonra ezber olan bu bilgiyi mantığa oturtmaktadır.
ŞB kodlu öğrencinin soru 1'e son testte verdiği yanıt
Batı konularda kavrama kolaylığı sağlarken batı konularda kafa karışıklıkları yaratabiliyor. Önceki eğitimimde ispat önemsenmediği için baten zorlanıyorum.
FK kodlu öğrencinin soru 1'e ön testte verdiği yanıt
Bir yığın harf ve sayı. Sıkıcı bulduğum için mi zorlanıyorum, zorlandığım için mi sıkıcı buluyorum her ikisi de diyemedim.
FK kodlu öğrencinin soru 1'e son testte verdiği yanıt

Şekil 4.20. ŞB ve FK kodlu öğrencilerin soru 1'e ön ve son testte verdikleri yanıtlar

Öğrencilerin birinci soruya vermiş oldukları yanıtlar incelendiğinde genel olarak aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır:

- İspat, bilinmeyen ifadelerin bilinen tanımlar ve aksiyomlar yardımıyla doğruluğunun gösterilmesidir.
- İspat matematiğin olmazsa olmazıdır.
- Formüllerin ve kavramların nerden geldiğini mantıklı bir şekilde açıklamak için ispat kullanılır.
- İspat anlamlı ve kalıcı öğrenmeyi sağlar.
- İşlemler arasında ilişki kurmak için ispat kullanılır.
- İspat ezber yapmadır, bir yığın harf ve uzun işlemler oluşur.

Görüş anketinde yer alan ikinci soru “*Matematiksel ispatın önemi nedir? Açıklayınız.*” şeklinde olup ÜÖ kodlu öğrencinin yanıtı aşağıda Şekil 4.21’de verilmiştir.

Bir formülün nerden geldiğini tam anlayıla anlamamıza yarıyor.
ÜÖ kodlu öğrencinin soru 2’ye ön testte verdiği yanıt
Eskiden süregelen birşey formülü sorgulemeden araştırmadan kabul etmemiz kim, ne, nerden gelmiş, nasıl olmuş bu gibi sorulara cevap bulmak.
ÜÖ kodlu öğrencinin soru 2’ye son testte verdiği yanıt

Şekil 4.21. ÜÖ kodlu öğrencinin soru 2’ye ön ve son testte verdiği yanıtlar

ÜÖ kodlu öğrencinin ikinci soruya verdiği yanıtlar incelendiğinde matematiksel ispatın önemli olduğunu belirttiği görülmüştür. Ayrıca öğrenci matematikte kullanılan formüllerin nerden geldiğini, nasıl oluştuğunu anlamak ve öğrenmek için ispatın önemli olduğunu söylemiştir. Benzer şekilde Sİ, AB ve AS kodlu öğrencilerin ikinci soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde bu öğrencilerin de matematiksel ispatın önemli olduğunu vurguladıkları görülmüştür. Öğrenciler, matematiksel ispat için öğrenilen bilgilerin, formüllerin ve teoremlerin doğruluğu ve güvenilirliği için vazgeçilmez olduğunu belirtmişlerdir. Aşağıda Şekil 4.22’de Sİ, AB ve AS kodlu öğrencilerin verdiği yanıtlar verilmiştir.

Asuenirlik acısından önemlidir. İspat olunca doğru olduğuna karar vermiş oluruz -
Sİ kodlu öğrencinin soru 2'ye ön testte verdiği yanıt
Öğrendiğimizi teoremleri, kuralları ispatını bilince onları anlamak, kavramak, sorularda kullanmak daha kolay ve daha basit olur. Bu yüzden de matematiksel ispat önemlidir.
Sİ kodlu öğrencinin soru 2'ye son testte verdiği yanıt
Matematiksel ispat öğrenmiş olduğumuz bilgilerin doğruluğunu ve güvenilirliğini görebilmemiz için önemlidir. Öğrenmiş olduğumuz yeni bilgilerle ilgili aklımızda soru işaretleri kalması için önemlidir. Matematikte mantığımıza sığdıramadığımız bilgiler ispat yaparak doğruluğu test ederek onaylayabilmemiz için gereklidir. "Eğer Matematik ile ilgili bir bölüm okuyacak matematiksel ispatları bizim için önemlicek bilgilerdir"
AB kodlu öğrencinin soru 2'ye ön testte verdiği yanıt
Bazı bilgileri ve teoremlerin direkt olarak kabul etmeden önce bunun güvenilirliği ve doğruluğunun da doğrulanması gerekir. Bu doğrulamada en çok matematiksel ispat sayesinde yapılır.
AB kodlu öğrencinin soru 2'ye son testte verdiği yanıt
Matematiğin mantığını anlamamızı sağlar.
AS kodlu öğrencinin soru 2'ye ön testte verdiği yanıt
Nasıl bir çok alanda gerçek ve doğru bilgiye ulaşılacak isteniyorsa bunun için ispat şarttır. Matematiksel ispat da bize matematiksel konularda, alanlarda doğru bilgiye ulaşmamızı sağlar. Kullandığımız bilgilerin sağlanmasını yapar.
AS kodlu öğrencinin soru 2'ye son testte verdiği yanıt

Şekil 4.22. Sİ, AB ve AS kodlu öğrencilerin soru 2'ye ön ve son testte verdikleri yanıtlar

Öğrencilerin soru 2'ye verdikleri yanıtlar incelendiğinde genel olarak aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır:

- İspat mantıklı öğrenmeyi sağladığından önemlidir.
- İspat doğru bilgilere uşaltırır, bu yüzden güvenilirdir.
- Matematikte kullanılan teoremlerin, ifadelerin ve formüllerin anlamlandırılması ispat sayesinde olur.
- İspat meslek hayatında ve günlük yaşamda kullanılmadığı için önemsizdir.

Görüş anketinde yer alan üçüncü soru “*Matematiksel ispatın amacı nedir?*” şeklinde olup AK ve MT1 kodlu öğrencilerin yanıtları aşağıda Şekil 4.23’de verilmiştir.

Neyin nereden geldiğini alabiliriz diye mantıklı bir şekilde verebiliriz. Ezberden çok öğrenmeyi öğrenmek, kavramayı çok almaktır.
AK kodlu öğrencinin soru 3’e ön testte verdiği yanıt
Verilen bir formülü bilinen bilgilerden yararlanarak ezberi azaltarak kavrayarak anlamayı sağlamaktır.
AK kodlu öğrencinin soru 3’e son testte verdiği yanıt
Matematiksel ispat öğrencilerin kafasındaki soru işaretlerini ortadan kaldırır, onların formülü veya konuyu daha iyi öğrenmelerinin yanında, bir ifadenin ispatını yaparken ondan önceki konu, ifade ve formüllerden yararlandığımızdan, matematiksel bir bütünlük ve bütüncü düşünmeyi amaçlar. Bence yani...
MT1 kodlu öğrencinin soru 3’e ön testte verdiği yanıt
Öğrencinin konular arası ilişki kurup, konulara bir bütün olarak yaklaşmasını, kompleks düşüncelerini sağlamayı amaçlar.
MT1 kodlu öğrencinin soru 3’e son testte verdiği yanıt

Şekil 4.23. AK ve MT1 kodlu öğrencilerin soru 3’e ön ve son testte verdikleri yanıtlar

AK ve MT1 kodlu öğrencilerin soru 3'e ön ve son testte verdikleri yanıtlar incelendiğinde matematiksel ispatın ezber yapmanın aksine kavramsal öğrenmeyi sağladığını, matematiksel bir bütünlük oluşturduğunu ve formüllerin nerden geldiğini gösterdiğini belirtmişlerdir. Benzer şekilde ST ve MD kodlu öğrencilerin soru 3'e verdikleri yanıtlar incelendiğinde matematiksel ispatın amacının verilen bir ifadenin veya teoremin doğruluğunu gösterme olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca öğrenciler sadece teoremlerin ifadesini bilmenin yeterli olmadığını, teoremlerin nerden geldiğinin bilinmesi gerektiğini; bunun da matematiksel ispat sayesinde olacağını ve ispatın matematiksel düşünmeyi geliştirdiğini belirtmişlerdir. Aşağıda ST ve MD kodlu öğrencilerin yanıtlar bulunmaktadır.

Öğrendiğimiz konuları ve örnekleri daha iyi kavrayabilmek.
ST kodlu öğrencinin soru 3'e ön testte verdiği yanıt
Göz düğümüne soru ve teoremlerin daha iyi anlaşılmasıdır. Beklemediğimiz bir anda "Şu nerden geldi, niye var?" diye sorulan sorulara direkt ve mantıklı cevaplar vermemizi sağlar. Formül ezberlemek yerine o formülün nerden geldiğini bilirse daha iyi kavrarız.
ST kodlu öğrencinin soru 3'e son testte verdiği yanıt
Verilen ifadenin doğruluğunu göstermektir. Matematiksel kavramın daha iyi anlaşılmasını sağlar.
MD kodlu öğrencinin soru 3'e ön testte verdiği yanıt
Kabul edilen teoremin doğruluğunu daha iyi anlamak, bildiğimiz diğer matematiksel ifadelerle ilişkisini göstererek doğruluğunu göstermek.
MD kodlu öğrencinin soru 3'e son testte verdiği yanıt

Şekil 4.24. ST ve MD kodlu öğrencilerin soru 3'e ön ve son testte verdikleri yanıtlar

Genel olarak öğrencilerin Soru 3'e verdikleri yanıtlar incelendiğinde aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır:

- Verilen bir ifadenin doğruluğunu göstermek.
- Matematiksel bir bütünlük ve bakış açısı kazandırmak.
- Matematikte kullanılan formüllerin, teoremlerin ve ifadelerin nerden geldiğini ezber olarak değil, mantıklı bir şekilde vermek.
- Merak duygusunun giderilmesi.

Görüş anketinde yer alan dördüncü soru ise “Başarılı ve başarısız olduğunuz bir ispatı düşündüğünüzde bu ispatın özellikleri nelerdir?” şeklinde olup EK kodlu öğrencinin yanıtı aşağıda şekil 4.25’de verilmiştir.

Örneğin ben Analizde yaptığım ispatlardan anlamama rağmen Lineer Cebirde yaptığımız ispatlardan anlamıyorum. Lineer cebirdeki konular çok uzak geldiği içindir belki de Analizdeki konulara oradaki ispatlara kıyasla liseden daha asikar olduğumun için.
EK kodlu öğrencinin soru 4’e ön testte verdiği yanıt
İspatlarda en ince ayrıntıyı düşünmek gerekir. Seçtiğin değerler seçtiğin aralıklar bu anlamda geçerli ve mantıklı olmalı. Bende pek başarılı olduğumu söyleyen ispat konusunda acıktı.
EK kodlu öğrencinin soru 4’e son testte verdiği yanıt

Şekil 4.25. EK kodlu öğrencinin soru 4’e ön ve son testte verdiği yanıt

EK kodlu öğrencinin soru 4’e verdiği yanıtlar incelendiğinde, öğrenci ispat yapmada başarısız olduğunu fakat yine de dersten derse ispatların kolay ya da zor olabildiğini ve ispat yapmak için her değeri ve ayrıntıyı düşünmenin gerekli olduğunu belirtmiştir. Ayrıca ÇŞ, AD ve ZÇ kodlu öğrencilerin bu soruya verdiği yanıtlar incelendiğinde başarısız olunan ispatların uzun ve birden çok kavram içermesi, sürekli kullanılmaması ve ispat basamaklarının birbiriyle ilişkilendirilememesi gibi sebepler öne sürdükleri görülmüştür. Başarılı olunan ispatların ise daha kısa olduğu, ispatın

mantığının anlaşıldığı, nerde kullanılacağına gösterildiği ve ispat adımlarının birbiriyle bağlantılı olduğu gibi özellikler belirtilmiştir. Aşağıda ÇŞ, AD ve ZÇ kodlu öğrencilerin soru 4'e verdikleri yanıtlar verilmiştir.

Genellikle başarısız olduğum ispatlar uzun ve birden çok kavram içeren ispatlardır.
ÇŞ kodlu öğrencinin soru 4'e ön testte verdiği yanıt
Başarılı olduğum ispatlar genellikle kısa olanlar ve sürekli kullanıldığımız ispatlardır. Bunları ne kadar çok kullanırsak o kadar da kalıcı oluyor. Eleberlemek yerine mantığını anlamak ispatı yapmak için kabaylık sağlıyor.
ÇŞ kodlu öğrencinin soru 4'e son testte verdiği yanıt
<u>Başarılı bir ispat:</u> → ispat basamaklarının ard arda olma özeli. → ispatın her basamağı anlaşılır ve matematiksel verilerin yanında, sözel yorumlarında olması özelliği. → ispatın verilen problemle son basamakta alakasının uygun biçimde kurulması özeli. → ispatın önceki ispatlarla ilişkisinin olup olmadığının gösterilme özelliği. Başarısız bir ispatta: → Başarılı olduğum ispatları saydığım özelliklerin eksik veya tam monosiyolo, açıklanmamış olması başarısız bir ispat yapmama neden olur
AD kodlu öğrencinin soru 4'e ön testte verdiği yanıt
→ Başarısız ispatı ele alırsam. • Gerekli matematiksel bilgi ve yorumlanmaların yetersiz kalması • ispatın her basamağının birbirine ilişkilendirilmemesi • ispatın asıl amacının yani sonucunun ilişkilendirilerek sunulmaması • ispatta destek alınan başka ispatların belirtilmemesi. benim için başarısız bir ispatın temsil eder özelliklerini
AD kodlu öğrencinin soru 4'e son testte verdiği yanıt

Kavramların anlamlarını bilmemek, sacıma gelmesi, akılda tutulmaması, bağımsız olması.
ZÇ kodlu öğrencinin soru 4'e ön testte verdiği yanıt
Başarılı olduğum ispatlar genelde bildiğim konularla kavramlarla daha iyi anlamamı sağlıyor. Başarısız olduklarım ise eksik bilgilerim tekrar dönüşümü olarak hatırlatıp iletmemi sağlıyor.
ZÇ kodlu öğrencinin soru 4'e son testte verdiği yanıt

Şekil 4.26. ÇŞ, AD ve ZÇ kodlu öğrencilerin soru 4'e ön ve son testte verdikleri yanıtlar

Öğrencilerin soru 4'e verdikleri yanıtlar incelendiğinde genel olarak aşağıdaki bulgulara ulaşılmıştır:

- İspatın her basamağı anlaşılır ve her basamak birbiriyle ilişkilendirilerek art arda geliyorsa öğrenciler ispat yamada başarılı oluyorlar.
- Kısa ve sürekli kullanılan ispatlarda başarılı, uzun ve birden çok kavram içeren ispatlarda başarısız oluyorlar.
- Hem sayısal verilerin hem de sözel ifadelerin verildiği ispatlarda başarılı olunurken, sadece sözel ifadelerin olduğu ispatlarda başarısız olunuyor.
- İspatta yer alan kavramların anlamlarını bilmemek, kavramların birbirinden bağımsız olması ve kavramların iyi öğrenilmemiş olmasından dolayı başarısız olunuyor.

Görüş anketinde yer alan beşinci soru da “Bir ispatın doğruluğunu değerlendirirken genelde nasıl bir yaklaşım izlersiniz?” şeklinde olup MÇ1 ve MK2 kodlu öğrencilerin soru 5'e ön ve son testte verdikleri yanıtlar aşağıda Şekil 4.27'de verilmiştir.

Arada ters örnekler veririm. Eğer sağlıyorsa yanlış, sağlamıyorsa doğru ilestediyim kanıt getiriyorum.
MÇ1 kodlu öğrencinin soru 5'e ön testte verdiği yanıt
Olmayan ergi metodunu kullanarak ispatlamaya çalışıyorum. Ya da aksine örnek verme.
MÇ1 kodlu öğrencinin soru 5'e son testte verdiği yanıt
Yukarıda verilen hipotezi kabul edelim diyerek ispatı başlıyorum. Soru küresel verilen ifade teoremleri kullanırım. Sonuçta kabul ettiğimizi ifadenin doğruluğunu bulup teoremi doğrulanmış olurum.
MK2 kodlu öğrencinin soru 5'e ön testte verdiği yanıt
Doğruluğunu değerlendiren şekilde olmayan ergi metodunu kullanırım. Örneğin $\sqrt{2}$ irrasyonel olduğunu göstermek için kabul ederiz ki $\sqrt{2}$ rasyonel olsun. Tüm işlemler yapıldıktan sonra bir yanlış çıkıyor çıkar ve kabulümüz yanlıştır diyor $\sqrt{2}$ irrasyoneldir olur.
MK2 kodlu öğrencinin soru 5'e son testte verdiği yanıt

Şekil 4.27. MÇ1 ve MK2 kodlu öğrencilerin soru 5'e ön ve son testte verdikleri yanıtlar

MÇ1 ve MK2 kodlu öğrencilerin soru 5'e ön ve son testte verdikleri yanıtlar incelendiğinde, öğrenciler bir ispatın doğru olduğunu değerlendirirken olmayana ergi metodunu kullandıklarını, ters örnekler vermeye çalıştıklarını ya da verilen hipotezi kabul ederek kendilerinin ispatı yapmaya çalıştıklarını belirtmişlerdir. Ayrıca SMF ve VA kodlu öğrencilerin yanıtlarında da benzer ifadeler bulunmakta olup ispatın basamaklarına tek tek bakılması gerektiğini ve bazı ispatların modellerinin çizilerek ispatın doğru olup olmadığına bakılabileceği belirtilmiştir. SMF ve VA kodlu öğrencilerin yanıtları aşağıda Şekil 4.28'de verilmiştir.

Matematikteki konuların kurallarına uygunluk göstererek basamaklar kullanılmalı. İspat yapılırken açık ve anlaşılır olmalı, ifadeler uygun bir sıra halinde yazılmalı. Cevabın doğruluğunu göstermek için ispat uygun bir şekilde genelleştirilerek başka soruların çözümünde kullanılabilir.
SMF kodlu öğrencinin soru 5'e ön testte verdiği yanıt
Bir ispatın doğruluğunu değerlendirirken, basamaklar halinde incelemem. Basamaklar bir zincir halinde, bir önceki kısmın bir sonraki adımı doğrular niteliğe olmalı. İspattan elde etmek istediğim sonucun etae edilip edilmediğine bakmam. İspat aynı zamanda matematiksel mantık ilade desteklenmeli, bizi aynı sonuca götürmelidir. İspatın uygunluğu sorular üzerinden denenebilir.
SMF kodlu öğrencinin soru 5'e son testte verdiği yanıt
1) Bilinenden bilinmeyene bulma 2) bilinmeyenden bilineni bulma İkisinde de aynı sonucu bulma
VA kodlu öğrencinin soru 5'e ön testte verdiği yanıt
Bir ispatın doğruluğunu değerlendirirken, ispatı farklı bir yolla göstererek sonuçları karşılaştırılabilir. Yanlış doğru kabul ettiğimi yanlış kabul ederek sonucu yanlış bulur. Yanlış kabul ettiğimi doğru kabul ederek sonucu yanlış bulur.
VA kodlu öğrencinin soru 5'e son testte verdiği yanıt

Şekil 4.28. SMF ve VA kodlu öğrencilerin soru 5'e ön ve son testte verdikleri yanıtlar

Genel olarak öğrencilerin soru 5'e verdikleri yanıtlar incelendiğinde aşağıdaki bulgular elde edilmiştir.

- Ters örnekler vererek.
- Olmayana ergi metodunu kullanarak.
- Verilen hipotezden yola çıkarak ispat adımlarını takip etmek.
- Matematiksel modelleri kullanarak ispatı yapmak.

Görüş anketinde verilen öğrenci yanıtlarının incelenmesi sonucunda daha derinlemesine bilgi elde etmek için 11 öğrenci ile yarı yapılandırılmış mülakatlar yapılmıştır. Yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlar aşağıda verilmiştir.

KŞ kodlu öğrenci ile yapılan mülakat:

Mülakatçı: Birinci sorumuz “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?” şeklindedir. Siz ön ve son testte şu yanıtları vermişsiniz:

Bize öğretilen doğru veya yanlış bir bilginin, neden doğru ya da neden yanlış olduğunu bizzat görebilmemizi ispatlar sağlar. Bilginin doğru ve değişmez olduğunu ifade eder.
KŞ kodlu öğrencinin soru 1’e ön testte verdiği yanıt
Öğretmenlik etkinliğimiz boyunca matematiksel ispatlar yaptık ve ardından örnekler gördük, bu ispatlar sayesinde örneklerin sonuçlarını daha aklımızla kavradık. Matematiksel ispat, anlamsız gibi görünen soruları anlamlı kılmayı ifade eder. Sorunun başıyla sonunu zihnimizde birleştirmeyi amaçlar.
KŞ kodlu öğrencinin soru 1’e son testte verdiği yanıt

Ön ve son testte verdiğiniz yanıtlara bakıldığında matematiksel ispatla ilgili olumlu yanıtlar verdiğiniz görülüyor. Neden bu cevapları verdiğinizi açıklar mısınız?

KŞ: *Ön testte ve son testte sorduğunuz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ sorusunu analiz dersinde hoca ispatlamıştı fakat pekişmediği için aklıma gelmedi ve yapamadım. Ama son testte siz anlattıktan sonra aynı soruyu görünce hemen yaptım. Ayrıca teoremlerin önemli olduğunu biliyorum. Teoremler olmadan formüller falan çıkmaz. Bu yüzden hem ön testte hem de son testte olumsuz bir şey yazmadım. Son testte ispatla alakalı düşüncelerim daha iyi oturdu.*

Mülakatçı: Son testte ilk sorunun yanıtında etkinliklerimizi anlatarak başlamışsınız. Etkinliklerimizin size nasıl bir faydası oldu?

KŞ: *Değerlendirme yaparsanız ön testtim boştu fakat son testi doldurdum. Sizin anlattığınız teoremleri Analiz dersinde de görmüştük fakat üzerinde durmadan geçtiğimiz için aklımda kalmamış. Siz teoremlerin üstünde durdunuz, neyin nereden geldiğini anladım. Ben grafikleri aklımda tuttum. Görsel zekâm daha ağır bastığı için önce grafikleri zihnime alıyorum. Sınavda da grafikler sayesinde ispatı yaptım. Önce grafiği çizdim, sonra ispatı yapabildim.*

Mülakatçı: Diğer derslerinizin de matematiksel modeller yardımı ile anlatılmasını ister misiniz?

KŞ: *Tabi ki isterim, konular daha kalıcı olur. Fakat her konu için modelle anlatmaya vakit yetmeyebilir. Bu yüzden en azından önemli konuları modelle göstererek işlesek daha iyi olur. Mesela siz önemli teoremleri seçerek anlattınız, bütün teoremleri anlatmadınız. Zaten hepsini anlatmaya vakit yetmezdi. Fakat sizin yaptığınız gibi önemli teoremlerin üzerinde bir saat durularak modelle anlatılsa çok iyi olur. Sizin bize çok yararınız oldu.*

NBD kodlu öğrenci ile yapılan mülakat:

Mülakatçı: Birinci sorumuz “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?” şeklindeydi. Siz ön testte şu yanıtı vermişsiniz:

Matematik öğretimi yapılırken anlaşılmayan bir konuda hocam bu neden geldi sonuna cevap bulmak için önemlidir. Anlaşılmayan konuda yada inanılmayan cevaplara tam yanıtlar vermek zorunludur. İspatla ispat önemlidir benim için. Anlatımların etkisi olduğu ve insanların kafalarına birde ağırlıkla yapıldığı için, genelde bunun ispatı nedir merak etmişim. Şunu soruda nasıl kullanmamız gerektiğini öğrenmeye çalıştık. Ve öğretmenler sınıfında bulup önce-sonra dediği gibi yapıldı.

NBD kodlu öğrencinin soru 1'e ön testte verdiği yanıt

Bu yanıtınızı açıklayabilir misiniz?

NBD: Sistem oraya doğru gidiyor. Ben fen lisesi çıkışlıyım. Orda biz, arkadaşlarımız bu nerden geliyor ispatlar mısınız dediğimizde öğretmenlerimiz; "Önemli değil siz sonucu bilin, sınavda yapın, yeter." diyorlardı. Ben ispatını merak ediyordum aslında ama hocamız öyle söylediği için bizim için de ispatın hiçbir önemi yoktu. Kalıp gibi alıp sonucunu sorulara koyuyorduk.

Mülakatçı: Matematiksel ispat sizin için önemli mi?

NBD: İspat önemli hocam. Kafa karıştığı zaman, ne nerden geldi denildiği zaman biz bunu ispatla gösteririz.

Mülakatçı: Son testte de birinci soruya şu yanıtı vermişsiniz:

Bir matematiksel teorem hakkında konuşabilmek onun doğruluğunu gösterabilmek için daha derinliği ne nereden geliyor sorusuna açıklık getirebilmek için matematiğin ispatı önemlidir. İleride bir matematik öğretmeni olursam ve bana hocam şunu bana öğrettiğin anlamı, nereden geliyor dediklerinde matematiğin dilinde konuşmayı öğrenmem gerektirir için matematiksel ispatın önemi büyük.

NBD kodlu öğrencinin soru 1'e son testte verdiği yanıt

Hem ön testte hem de son testte matematiksel ispat önemlidir demişsiniz. Bu yanıtınızı ve yaptığımız etkinliklerin bir faydası olup olmadığını açıklar mısınız?

NBD: Hocam oldu tabi ki. Çünkü teoremleri öğrendik ya biz daha analiz dersinde bu teoremlerin tamamını görmemiştik. Hoca derste anlatırken baktık ki bizim bir temelimiz var ki bu etkinliklerin sayesinde oldu. Öğrendiğimiz teoremler analiz dersinde işimize yaradı ve artık bir şeyler oturdu kafamda. Teoremler hakkında ilişki kurabiliyorum.

Mülakatçı: Dördüncü sorumuz “Başarılı ve başarısız olduğunuz bir ispatı düşündüğünüzde bu ispatın özellikleri nelerdir? Açıklayınız.” şeklindedir. Son testte verdiğiniz yanıt şöyledir:

Başarılı olduğum ispatı hemen yaparım. Çünkü o konu benim zihnimde oturmuştur. Kabul edebiliyorum ki neyin nerde geldiğini. Ancak başarısız olduğum ispatta peşide birşey yaparım. O konunun ötesini anlamamıdır. Bu yüzden ispatta uydurma yoluna gitmiyorum. Mesela sizinle yaptığımız ispatları daha önce görmemiştik. Burada öğrendikten sonra analiz dersinde işledik. Bu sefer daha iyi birşeyler şimdiki.

NBD kodlu öğrencinin soru 4’e son testte verdiği yanıt

Bu yanıtınızı açıklar mısınız?

NBD: Uydurma derken hocam hani ispat hakkında tam bir şeyler bilmiyoruz ama matematiksel temelimiz var, onlardan yola çıkarak bir şeyler bulmaya çalışmayı kastettim. Orada aslında birbirine benzer olan ispatlardan yola çıkarak birini diğerine benzetme olarak da düşündüm. Mesela ben Sandviç Teoremi’ni Ara Değer Teoremi’ne benzetmiştim. O öyleyse Sandviç Teoremi de onun gibi ispatlanabilir diye düşünmüştüm. Sizinle yaptığımız etkinliklerin faydası da oldu tabi ki. Model çizmek şöyle önemli, ben ezber yapamıyorum. Model çizince mesela fonksiyonun a ile b aralığında olduğunu göstermek daha kolay. Ben önce grafiği çizdim, yorumladım, aklımda tuttum. Daha sonra grafikten yola çıkarak ispatı yapmaya çalıştım. Artık çalışınca da hep görsel olarak çalışıyorum. Sizin sayenizde grafik çizmem ve yorumlamam gelişti.

Mülakatçı: İkinci sorumuz “Matematiksel ispatın önemi nedir? Açıklayınız.” şeklindedir. Siz ön testte şu yanıtı vermişsiniz:

Sayılar arasında bir anlam ilişkisi oluşturmaları açısından önemlidir. Matematik bulmaca gibidir. Parçalar yerlerlikse ipodeler anımlar kazanır. Sayut kanuları bile ispatlamak zihninde canlandırmak önemli olduğu için matematiksel ispatlar önemlidir. İncelikleri ve daha kolay anlatmayı sağlar. Neden ne peldirir jecüvün.

NBD kodlu öğrencinin soru 2’ye ön testte verdiği yanıt

Bu yanıtınızda matematik bulmaca gibidir demişsiniz. Bunu açıklar mısınız?

NBD: Evet, matematik bulmaca gibidir. Bildiğimiz bir şeyi diğerine uyguluyoruz. İşlemlerde sıra önemli.

KŞ ve NBD kodlu öğrenciler görüş anketine verdikleri yanıtları mülakatta da teyit edilmiş olup matematiksel ispat hakkında olumlu düşüncelere sahiptirler. Matematiksel ispatın önemli olduğunu, teoremlerin doğruluğunu ispat sayesinde görebildiklerini ve ispatlar sayesinde matematiksel bütünlük sağlandığını belirtmişlerdir. Ayrıca uygulamada yaptığımız teorem ispatlarının öğrencilere çok faydasının olduğunu, matematiksel modeller sayesinde ispatların daha iyi anlaşıldığını ve modeller sayesinde ispata başlayıp devam edebildiklerini söylemişlerdir.

HA kodlu öğrenci ile yapılan mülakat:

Mülakatçı: Birinci sorumuz “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?” şeklindeydi. Siz ön ve son testte şu yanıtları vermişsiniz:

Matematiksel ispat doğruluğu kabul edilmiş aksiyomlardan yola çıkarak verilen teoremleri kanıtlamak. Ama öğrencilere yeterince kavratıla modeli ve ilköğretim öğrencilerin matematiksel ispatları kavrayamazlığı düşüncesinden gereksiz olduğunu düşünüyorum.

HA kodlu öğrencinin soru 1’e ön testte verdiği yanıt

Çok saçma bir şey hiç bir şey ifade etmiyor.
Öğrencilerin basıya anlamını alıyor.

HA kodlu öğrencinin soru 1'e son testte verdiği yanıt

Hem ön testte hem de son testte matematiksel ispatla ilgili gereksiz, saçma gibi olumsuz ifadeler yazmışsınız. Bunun sebebini açıklar mısınız?

HA: İspatı biz anlıyoruz, akademik kariyer yapacak olan arkadaşlar için de mantıklı ama ilköğretim öğrencileri için gereksiz geliyor. Onlara ispatı anlatmayacağız. Öğrencilerin de bir şeyin ispatını sorması için çok üstün zekâlı olmaları gerekir bence. İspat benim için bir şeyler ifade ediyor tabi ki ama soyut olarak verildiğinde bir şey ifade etmiyor. Modelle somutlaştırılarak verildiğinde benim için bir anlam ifade ediyor. Ama ispat hala tam olarak oturmadı bende, ezbere yönelik olduğunu düşünüyorum.

Mülakatçı: Etkinliklerde matematiksel model kullanmak size faydalı oldu mu?

HA: Tabi ki grafiklerle çizince daha iyi anladım. Teoremi okuyunca, grafiğini çizince ispatını yapabiliyorsun bir şekilde, ya da model olunca mantık yürütebiliyorsun. Teoremin ispatına grafiğini çizerek başlamak daha kolay geliyor bana.

Mülakatçı: Yaptığımız etkinlikler ispata karşı olan fikirlerinizi neden değiştirmede?

HA: Etkinlikler güzeldi fakat bana vakit kaybı olarak geliyor ispat. Sınav olarak düşünmesem sadece anlamak olarak düşünsem ispat faydalı geliyor. İlerde de çok ağır ispatları kullanacağımı düşünmüyorum, basit ispatları kullanacağımı düşünüyorum. İspat yerine göre önemlidir bence.

YÇ kodlu öğrenci ile yapılan mülakat:

Mülakatçı: Birinci sorumuz “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?” şeklindeydi. Siz ön ve son testte şu yanıtları vermişsiniz:

Bazı ispatların gereksiz olduğunu düşünüyorum. Özellikle de lineer cebirdeki ispatlar. Soyut olan ispatlarda abla fazla zorlanıyorum sanırım. Bence ispat yapmak Allah'ın bahsettiği bir yetenek. Ve ben de yok.
YÇ kodlu öğrencinin soru 1'e ön testte verdiği yanıt
Hala bir şey ifade etmiyor.
YÇ kodlu öğrencinin soru 1'e son testte verdiği yanıt

Hem ön testte hem de son testte matematiksel ispat ile ilgili olumsuz şeyler yazmışsınız. Bunun sebebini açıklar mısınız?

YÇ: Hala bir şey ifade etmiyor hocam. Çünkü ispatlayan ispatladığı için bizim için sonuç önemli. Biz sonucuna bakalım, sonucunu geliştirelim. Bu yüzden ispat gereksiz benim için, yapan yapmış zaten. Mesela lineer cebir gibi soyut derslerde de çok zorlanıyorum ispat olduğu için.

Mülakatçı: Yaptığımız etkinliklerin size bir faydası oldu mu?

YÇ: Oldu hocam aslında. Dikkatli bakınca mantıklı geliyor ama zorunlu olduğumuz için ezberlemek zorunda kalıyoruz ve sonradan da unutuyoruz, hiçbir yararı olmuyor. Ama şuan sizin anlattığınız ispatlar sorulsa ispatını yapabilirim.

Mülakatçı: Etkinliklerde matematiksel model kullanmak size faydalı oldu mu?

YÇ: Kesinlikle daha kalıcı oldu. Hele son etkinliğimizde sandviç teoremini ben farklı çizmiştim fakat siz anlattıktan sonra anladım ve hala aklımda. Grafiğe göre de yorum yapabilirim şuan.

Mülakatçı: Matematiksel ispat hala sizin için bir şey ifade etmiyor mu?

YÇ: Ediyor aslında hocam. Tabi ki sonucun nereden geldiği de önemli. Ama ben yine de sonucun nereden geldiğine pek bakmam.

Mülakatçı: Dördüncü sorumuz “Başarılı ve başarısız olduğunuz bir ispatı düşündüğünüzde bu ispatın özellikleri nelerdir?” şeklindeydi. Siz son testte şu yanıt vermişsiniz:

Soyut düşünmeler ve başka teoremlerden yararlanıp sonra ispatlamaya çalışılan teoremleri hata yapamıyorum. Entreson olan diğerlerini de yapamıyorum.
YÇ kodlu öğrencinin soru 4’e son testte verdiği yanıt

Bu yanıtınızı açıkla mısınız?

YÇ: Soyut matematikte daha çok harfleri kullanıyoruz. Onları yapamıyorum. Ya da bir teoremden diğerini yapmaya çalışıyoruz ya onları da yapamıyorum. Ama kolay olanları yaparım herhalde. Yani içerisinde sayıların olduğu ispatları yapabilirim.

Mülakatçı: Diğer dersleriniz de matematiksel model kullanılmasını ister misiniz? İlerde öğretmen olduğunuzda matematiksel modelleri kullanarak ders anlatmayı düşünür müsünüz?

YÇ: Daha kalıcı olacağını düşünüyorum. İlerde de model kullanmayı kesinlikle düşünüyorum. Etkinliklerinizden dolayı ispata karşı fikirlerim biraz daha olumlu oldu gibi. En başta etkinliklerde bir şey yapamıyordum fakat çalışınca ve etkinlikler ilerleyince ispatı anlamaya ve yapmaya başladım. Artık ispat daha normal bir şey geliyor.

HA ve YÇ kodlu öğrencilerin hem ön testte hem de son testte matematiksel ispatla ilgili olumsuz düşüncelere sahip oldukları, ispatın gereksiz olduğunu, öğrencileri ezbere yönelttiğini ve bu yüzden bir şey ifade etmediğini belirttikleri görülmüştür. Matematiksel ispatın üniversite düzeyi olduğunu ilköğretim öğrencilerinin işine yaramayacağını belirten HA, bu yüzden ilerde ispatı kullanmayacağını öne sürmüştür. Bu iki öğrenci, ispat hakkında olumsuz görüşlere sahip olmasına rağmen yaptığımız etkinliklerin güzel olduğunu, kendilerine fayda sağladığını ve matematiksel modeller kullanılarak yapılan ispatların daha kalıcı olduğunu belirtmişlerdir.

FBA kodlu öğrenci ile yapılan mülakat:

Mülakatçı: Birinci sorumuz “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?” şeklindeydi. Siz ön testte ve son testte şu yanıtları vermişsiniz:

Matematiksel ispat benim için sınavlar için ezberleyip daha sonra unutmayı ifade ediyor. Bunun doğru olmadığını biliyorum ve farkındayım ama tembellik daha kolayına geliyor sanırım. Derste anlayıp daha sonra tekrar etmemenden dolayı ezberden ibaret ispat kısacası.
FBA kodlu öğrencinin soru 1’e ön testte verdiği yanıt
Matematiksel ispat benim için konuyu daha iyi anlamam ve o konuda neyin neden geldiğini kavramamda yardımcı olan bir yöntemi ifade ediyor.
FBA kodlu öğrencinin soru 1’e son testte verdiği yanıt

Ön testte ispat için ezberden ibaret demişsiniz, olumsuz ifadeler kullanmışsınız. Son testte ise fikirleriniz olumlu olarak değişmiş. Bunun nedenini açıklar mısınız?

FBA: Sadece etkinlikler değil, derslerde de ispat yaptıkça ispata alıştım. O yüzden ispata karşı olumlu bakmaya başladım. Etkinliklerin analiz dersine de faydası oldu. Etkinliklerde ilk başta ispatı görsel olarak yaptığımız için daha çok kavramamızı sağladı. Etkinlikler sadece yazıdan ibaret değildi, yani soyut değildi. Etkinliklerin sonunda da örnekler çözdük ispat daha iyi pekişti. Her derste görsellik daha çok dikkatimi çekiyor zaten. Teoremleri analiz dersinde gördüğümde ilk aklıma grafikleri geldi. Teoremlerin ispatını yaparken de ilk aklıma grafiği geliyor sonra yorum yapabiliyorum. İlerde ben de model kullanarak ders anlatmayı düşünüyorum.

CK kodlu öğrenci ile yapılan mülakat:

Mülakatçı: Birinci sorumuz “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?” şeklindeydi. Siz ön testte ve son testte şu yanıtları vermişsiniz:

Matematikte belli kurallar vardır. Bu kuralların nereden geldiğini anlamak için matematiksel ispat gereklidir. Açıkçası matematiksel ispat benim bölümden için bana gereksiz geliyor. Sonraki öğretmen olduğumda öğrencilerine ben bunları anlatmayacağım.
CK kodlu öğrencinin soru 1'e ön testte verdiği yanıt
Matematiksel ispat matematik kurallarının, teoremlerin nasıl oluşturulduğunu anlamamı için gereklidir. Her ne kadar anlamakta zorlansamda matematiksel ispat gerekli bence. Belki de biraz ezberci alıştığım için anlamakta zorlanıyorum. Ama insan biraz kendini zorlarsa herşey öğrenilir.
CK kodlu öğrencinin soru 1'e son testte verdiği yanıt

Ön ve son testte verdiğiniz yanıtlar incelendiğinde ön testte ispat benim için gereksiz derken son testte ise fikriniz değişmiş ve ispat benim için gereklidir demişsiniz. Fikrinizin değişmesinin sebebini açıklayabilir misiniz?

CK: Ezberci alıştığım için, ispatlar biraz zor ya o yüzden ispatları anlamak bana çok zor geliyor. Ama zamanla gerekli olduğunu gördüm. Hocamız dedi ki birine yüzmeyi öğretmek için yüzmeyi tam olarak bilmeniz gerekir. Bizim de matematiği tam olarak anlamamız için ispatları bilmemiz gerekir. Benim donanımlı bir öğretmen olabilmem için ispat gerekli.

Mülakatçı: Etkinliklerimizin size faydası oldu mu?

CK: Yani oldu muhakkak. Mesela analiz dersinde de ispat yapıyoruz, o derse de faydası oldu. İspatları açıklayarak anlattınız iyi oldu. Model çizerek anlatmanız da çok faydalı oldu. Görerek öğrenmiş olduk.

FBA ve CK kodlu öğrencilerin görüş anketindeki yanıtları incelendiğinde ön testte matematiksel ispatla ilgili olumsuz fikirlerinin olduğu görülürken son testte fikirleri olumlu olarak değişmiştir. Bu değişimin sebebinde yaptığımız teorem ispatlarının etkili olduğunu söyleyen öğrenciler daha çok ispat yaparak ispata alıştıklarını ve ispatın önemini gördüklerini belirtmişlerdir. FBA kodlu öğrenci ön testte ispatların sınavlardan geçmek için ezberlendiğini sonra da unutulduğunu başka bir yerde kullanılmadığını ifade etmiş olmasına rağmen son testte matematiksel ispatın konunun anlaşılmasında ve teoremlerin nerden geldiğinin kavranmasında önemli olduğunu belirtmiştir. Bu iki öğrenci de sonuç olarak matematiksel ispatın önemli olduğunu bir kez de mülakatta dile getirmişler ve yaptığımız etkinliklerin faydalı olduğunu, modeller sayesinde ispatların akılda kalabildiğini ve diğer derslerde de yapılan teorem ispatlarının kullanıldığını ifade etmişlerdir.

HİG kodlu öğrenci ile yapılan mülakat:

Mülakatçı: Birinci sorumuz “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?” şeklindeydi. Siz ön ve son testte şu yanıtları vermişsiniz:

Benim için matematiksel ispat oldukça önemlidir. Çünkü matematik ispatsız olmaz. Dünyadaki bir insan bile sizin söylediğiniz şeyin aksini iddia edebilir. Bu yüzden matematiksel ispat benim için bir gerekliliktir.
HİG kodlu öğrencinin soru 1’e ön testte verdiği yanıt
Matematiksel ispatın bende bir anlamı yok. Matematiksel ifade herkes için aynı şeyi ifade eder. Çünkü amaç bellidir ve izlenecek yollarda bellidir. Matematiksel ispat matematiksel ifadenin doğruluğunu göstergesidir.
HİG kodlu öğrencinin soru 1’e son testte verdiği yanıt

Ön testte matematiksel ispat için benim için oldukça önemlidir derken son testte fikirleriniz değişmiş ve ispatın bende bir anlamı yok demişsiniz. Bu değişimin nedenini açıklayabilir misiniz?

HİG: *Teste başlamadan önce matematiksel ispatın daha görsel, şekiller üzerine ve somut olduğunu düşünmüştüm. Etkinlikleri yapınca ispatın daha ezberci olduğunu mantık üzerine olmadığını gördüm. Hem etkinlikler hem de derslerimizin anlatılış şeklinden dolayı böyle düşünüyorum. Ben matematiği seviyorum. Bu yüzden buradayım. İlk başta matematiğin hayat için önemli olduğunu düşünüyordum. Fakat şimdi matematiğin matematik için olduğunu düşünüyorum. Düşüncelerim somutlaştı. Açıkçası hem etkinlikler hem de hocalardan dolayı ispata karşı olumsuz düşündüm. İspatın başka bir anlatılış tarzı da yok. Etkinlik yaptıktan sonra örnekler de verdiniz fakat o örnekler bana teoremden bağımsız geldi. Bir teoremin ispatını yaparken diğer teoremden dolayı böyle olur, ispat biter demememiz lazım bence, ispat daha açıklayıcı olmalı. Etkinliklerde grafik çiziyoruz, grafiği yorumluyoruz sonra sayılarla değil de harflerle genel olarak ifade ediyoruz. Ben ispatı genel olarak ifade etmeyi sevmiyorum. Mesela her x için diyoruz ya kafam karışıyor. Genel olduğu için ispatları sevmiyorum. Fakat yapılan her şey insanı geliştirir. Sizin etkinliklerin de faydası olmadı değil. Bugün sınavda sorulan sorular önceden sorulsaydı yapamazdım. Fakat etkinliklerde gördüğüm için hatırladım ve yaptım.*

HİG kodlu öğrencinin ön ve son testte verdiği yanıtlar incelendiğinde ön testte matematiksel ispat ile ilgili olumlu düşüncelere sahip olup son testte fikirlerinin değiştiği ve olumsuz olduğu görülmüştür. Bu değişimin sebebini ise yapılan etkinliklerden ve derslerin anlatılış şeklinden dolayı olduğunu öne sürmüştür. Ayrıca ispatlarda harflerin kullanılması ve genele ulaşılması öğrenci için anlaşılabilir ve zor gelmektedir.

MK1 kodlu öğrenci ile yapılan mülakat:

Mülakatçı: Birinci sorumuz “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?” şeklindeydi. Siz ön testte ve son testte şu yanıtları vermişsiniz:

Bazı formüllerin veya özelliklerin aereden geldiğini öğrenince daha rahat kavrayabiliyorum. Ama bazende o formüllerin ispatını veya özelliklerin ispatını öğrendiğimde daha fazla karışıklık yaşıyorum için öğrenmesem daha iyiydi diyorum.
MK1 kodlu öğrencinin soru 1'e ön testte verdiği yanıt
Bazen her şey, bazen hiçbir şey ifade etmiyor. Yani bazı teoremlerin veya özelliklerin aereden geldiğini, aeder böyle bir özellik olduğunu öğrendiğimde sanki her şeyi biliyormuşum ve her şeyin bir ispatı, bir gerekçesi varmış diye düşünüyorum. Bazen de öğrendiğim ispatın sosyal hayatta bana ne gibi bir faydası var diye düşündüğümde sonuçta sıfır olduğunu görüyorum.
MK1 kodlu öğrencinin soru 1'e son testte verdiği yanıt

Ön testte ve son testte verdiğiniz yanıtlara bakıldığında matematiksel ispatla ilgili hem olumlu hem de olumsuz ifadeler yazmışsınız. Bu kararsızlığınızın sebebini açıklar mısınız?

MK1: Kararsızlığım hala devam ediyor. Sevdiğim önemli şeylerin özelliklerini, gerekçesini öğrendiğim zaman hem mutlu oluyorum hem de kendimi daha iyi hissediyorum. Ama bazen de bakıyorum diyorum ki bu benim ilerde sosyal hayatımda ne işime yarayacak diye düşünüyorum ve sonuç hayır yaramayacak oluyor. Sadece o alanı bilen biriyle konuştuğum zaman işime yarar, başa zamanlarda işime yaramaz.

Mülakatçı: Etkinliklerimizin bir faydası oldu mu size?

MK1: Tabi ki, şu an analizde de aynı teoremlerin ispatını görüyoruz. Sizle daha önceden gördüğümüz için pekiştirme oldu. Fakat her şey öğrencide bitiyor. Siz her gün dört-beş saat aynı şeyi anlatsanız bile öğrenci çalışmadıktan sonra bir başarı elde edilemez. Başarının olması için öğrencinin de istemesi ve çalışması gerekir.

Mülakatçı: İkinci sorumuz “Matematiksel ispatın önemi nedir? Açıklayınız.” şeklindeydi. Ön testte bu soruya şu yanıtı vermişsiniz:

Bir durumda sonucu varabilmek için bazı sebeplerin olması gerekir ve bunları bilmek gerekir. Matematik tamamen soyut bir ders olmasıyla rağmen sanki bazı şeylerin ispatını yaptığımızda somutlaştırıyoruz gibi daha rahat anlaşılabilir. Yani her neyse bir formülün veya özelliğin nereden, ne sebeple geldiğini bilmek Matematiği değerlendirir.

MK1 kodlu öğrencinin soru 1'e ön testte verdiği yanıt

Bu yanıtınızda da ispatla ilgili olumlu ifadeler kullanmışsınız. İlk sorunun yanıtında ispat için bir kararsızlık varken bu yanıtınızın olumlu olmasının sebebini açıklar mısınız?

MK1: İspatın önemini dediği için pozitif düşündüğüm özelliklerini yazdım. Bazen bakıyorum, senelerden beri bildiğim bir özelliğin ispatını öğrendiğimde ne kadar farklıymış, bu kadar çaba sarf edilmiş diyorum. İspat olmasaydı bunları öğrenemezdim. Önemini düşündüğüm zaman ispatı illa ki olumlu düşünüyorum. Akademik kariyer yaparsam eğer ispat tabi ki benim için çok önemli. Fakat öğretmen olacaksam küçük bir çocuğa ispat anlatacağımı düşünmüyorum. İspat o çocuk için bir şey ifade etmez.

Mülakatçı: Etkinliklerde ispatı yaparken matematiksel model kullandık. Matematiksel modelleri kullanarak ispat yapmanın size bir faydası oldu mu?

MK1: İnsanda birçok zekâ çeşidi var. Ne kadar çok zekâ türüne dikkat çekersek tabi ki insan daha çok kavrar. Yapılan ispatları sözel olarak gördüğümüzde bu ne dedim. Fakat siz grafik çizerek ispatları soyuttan somuta getirdiniz. Görsel zekâımıza da hitap ettiği için de daha iyi kavradım. Somutlaşınca daha çok zekâ türüne hitap etmiş oldu. Etkinlikler bende göz aşinalığı yaptı, ispata alıştım. İspatı yapabilince de daha mutlu oldum. Teoremi görünce artık aklıma direk modeli geliyor. Tabi bu kişiden kişiye değişebilir.

SK2 kodlu öğrenci ile yapılan mülakat:

Mülakatçı: Birinci sorumuz “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?” şeklindeydi. Siz ön testte ve son testte şu yanıtları vermişsiniz:

Bence bu ispatların kullanım alanı sınırlı yani bize pek lazım olacağını düşünmüyorum. Ama gereksiz diyemem çünkü bilime saygı duymak gerekir.
SK2 kodlu öğrencinin soru 2’ye ön testte verdiği yanıt
Matematiksel ispatın fazla işimize yarayacağını düşünmüyorum. Ama matematiksel ispat gereksiz birşeyde diyemem. Çünkü bilime saygı duymak gerekir.
SK2 kodlu öğrencinin soru 1’e son testte verdiği yanıt

Ön ve son testte aynı cümleleri kullanmışsınız, fikirleriniz hiç değişmemiş. Bunun nedenini açıklar mısınız?

SK2: Evet, aynı cümleler hocam. Aklımdakiler değişmedi. Mesela siz bize ispatları yaptırdınız, anlattınız ama onun etkisi olmadı bana. Siz değil başkası da yaptırsa yine aynı sonuç olurdu ve etkisi olmazdı. Sınırlı olmasının nedeni de sadece şimdi işimize yarayacak fakat öğretmen olduğumuz zaman öğrencilere anlatmayacağız. O yüzden ispat sınırlı bence yani meslekten dolayı sınırlı diyorum.

Mülakatçı: Etkinliklerimizin size bir faydası olduğunu düşünüyor musunuz?

SK2: Oldu tabi ki. Derslerimizde yardımcı oluyor. Etkinlikler işimize çok yaradı. Öğrenmediğimiz teoremleri öğrenirken zorluk çekmedik. Diğer sınıflarda karşımıza çıkınca da yabancılık çekmeyeceğim.

Mülakatçı: Diğer derslerinizde de matematiksel modellerin kullanılmasını ister misiniz?

SK2: Tabi ki grafik çizilerek, model kullanılarak anlatılması çok daha iyi olur. Çünkü aklımda kalıcılığı artırıyor. Mesela bu son sınavda teoremleri

okudum ve hemen aklıma grafikler geldi. Grafikleri çizip ispata öyle başladım. Grafik üzerinde teoremin ne demek istediği daha iyi anlaşılıyor. Ama sözel ifadeye geçince sıkıntılar oluyor yine. Sayısal olunca aklımda kalıyor ama sözel olunca zorlanıyorum. Sonuç olarak etkinlikler çok faydalı oldu. Öğretmenlik mesleğine geçince ispatın pek yardımcı olacağını düşünmüyorum fakat sizin etkinlikleriniz biraz daha netleştirdi düşüncelerimi.

MK1 ve SK2 kodlu öğrencilerin görüş anketine vermiş oldukları yanıtlar incelendiğinde matematiksel ispat hakkında hem olumlu hem de olumsuz ifadeler kullanarak kararsız oldukları görülmüştür. Bu öğrenciler matematiksel ispatın teoremlerin nerden geldiğini açıklamasına rağmen ilerde meslek hayatında ve sosyal hayatta kullanılmayacağı için kullanım alanının sınırlı olduğunu ifade etmişlerdir ve kararsızlıklarının hala devam ettiğini söylemişlerdir. Buna rağmen yaptığımız etkinliklerin diğer derslerdeki ispatlarda da faydalı olduğunu, matematiksel modellerle teorem ispatlarının akılda kalıcılığının daha fazla olduğunu ve modeller sayesinde teoremin ne anlatmak istediğinin daha net olarak görüldüğünü ifade etmişlerdir.

BB kodlu öğrenci ile yapılan mülakat:

Mülakatçı: Birinci sorumuz “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?” şeklindeydi. Siz ön testte ve son testte şu yanıtları vermişsiniz:

İspat yapmak bence çok mantıklı. Benim için hiçbir anlam ifade etmiyor. İspatları ezberlemek sorunda kalıyoruz. Ama mantıkta ezber alınmalı, herşeyin mantıklı bir açıklaması olmalı. Bu da ispat yapmak olarak diye birşey yok. Şu ana kadar öğrendiğim ispatların bana hiçbir faydası olmadı. Aksine çok zararlı oldu, mesela şundan dolayı net düşmek gibi. Ezberleri bir sınırdan sonra unutuyoruz ve bir öğretmen söylediğimizde 5, 6, 7, 8. sınıflara da ispat yaptırılıyor gerek yok diye düşünüyoruz.

Ama sayfada sorulmuş örnekler yapmadım. Çünkü ZARARLIDIR İSPATLARI UNUTUYUM !!

BB kodlu öğrencinin soru 1’e ön testte verdiği yanıt

Verilen bazı önermelerin gerçekten doğru olup olmadığını veya nasıl öyle olduğunu anlamak için ispat yapıyoruz. Ama bazı ispatlar çok uzun olduğu için ezberlemek zorunda kalıyoruz. Ezberlediğimiz zamanda kısa bir süre sonra unutuyoruz. Çok fazla ispat öğrendik. Sınıfta zamanında bunları karıştırıyoruz. İspatlar bence sınavlarda sorulmaması, çünkü o an Odessa anlamak için o ispatlar yapıyor sonra o ispatların sınavlarda sorulması çok mantıksız.

BB kodlu öğrencinin soru 1'e son testte verdiği yanıt

Ön ve son testte verdiğiniz yanıtlar incelendiğinde ön testte matematiksel ispat için bence çok mantıksız, hiçbir şey ifade etmiyor aksine kafa karıştırıyor demişsiniz. İspatla ilgili son testte de olumsuz ifadeler kullanmışsınız. İspatla ilgili neden böyle düşündüğünüzü açıklar mısınız?

BB: İşte ispat yapıyoruz derste, onları ezberlemek zorunda kalıyoruz, zaten sayfa sayfa ispatlar çok uzun hepsini aklımızda tutamıyoruz. Biri bir şey sorduğunda hatırlayamıyoruz. Mesela bugün sınavda çalıştık bir şeyler yaptık ama birkaç gün sonra bana sorarsanız hatırlamakta çok zorluk çekeceğim ezber olduğu için. İspatta matematiksel terimler çok olduğu için hepsini aklımızda tutamıyoruz, bir yerini unutunca devamı gelmiyor yazamıyoruz. Dediğim gibi derste öğretmen ispatı açıklar, şu şuradan geliyor bunun sebebi bu diye. Biz de onu o an mantığımıza sindirip diğer soruları çözmek için kullanabiliriz. Ama sınavlarda sorulunca hepsini birbirine karıştırıyoruz. O yüzden ispatlar gözümüzde çok korkunç bir şey olarak gözüküyor. Ve ben artık ispatlara mantığını öğreneyim diye bakamıyorum ezberleyip geçiyorum.

Mülakatçı: Etkinliklerimizin size bir faydası olduğunu düşünüyor musunuz?

BB: Tabi ki ispatları anlama noktasında yardımcı oldu. Ne nerden geldi gördük. Şekillerle, modellerle ispatlar daha kalıcı oldu. Zaten görsel zekâm olduğu için grafikler zihnime kolay yerleşiyor, onun yorumlarını yapabiliyorum. Fakat ispatını yapmaya gelince biliyorum ama yazamıyorum. Sözel olunca sıkıntı oluyor. Hep bir yeri eksik kalıyor.

Mülakatçı: İkinci sorumuz “Matematiksel ispatın önemi nedir? Açıklayınız.” şeklindedir. Ön ve son testte verdiğiniz yanıtlar aşağıdadır:

Bir ifadenin doğruluğunu ispatlamada kullanılır. Ama biz derslerde özellikle Lsma geometri dersinde pek çok teorem gördük fakat hiçbirini hatırlamıyoruz. Demek ki faydalı değil sadece ezber.
BB kodlu öğrencinin soru 2’ye ön testte verdiği yanıt
Verilen ifadelerin doğruluğundan veya yanlışlığından emin olmak için ispat yaparız. Eğer ispat olmasa doğru ya yanlışlığını bilemeyiz.
BB kodlu öğrencinin soru 2’ye son testte verdiği yanıt

Ön ve son testte ikinci soruya verdiğiniz yanıtlar incelendiğinde ön testte ispat için yine faydalı değil derken son testte fikirleriniz biraz olumlu olarak değişmiş gibi. İspat olmazsa verilen ifadenin doğru veya yanlış olduğunu bilemeyi demişsiniz. Bu değişimin sebebini açıklar mısınız?

BB: Yaptığınız etkinliklerden sonra baktım ki teoremin doğruluğunu nasıl gösterebiliriz diye ispat yapmazsak açıklayamayız. İspat yapmazsak doğru veya yanlış olduğunu anlayamayız. Bu yüzden ispat çok önemli. Sadece sınav için ezberlemek zorunda kalıyoruz.

Mülakatçı: Diğer derslerde de matematiksel modellerin kullanılması iyi olur mu sizce?

BB: Aklımızda daha kalıcı olur tabi ki hatta %100 olur. Somut olduğu zaman ispatları daha iyi hatırlıyoruz, soyut olduğu zaman kafamız karışıyor.

BB kodlu öğrencinin görüş anketine vermiş olduğu yanıtlara göre ön testte matematiksel ispatla ilgili olumsuz düşüncelere sahip olduğu görülürken son testte düşünceleri biraz daha olumlu gibi olup kararsız olduğu görülmüştür. Bu öğrenci ön testte ispat yapmanın gereksiz ve mantıksız olduğunu, sadece ezber yapmaktan ibaret olduğunu ve hiçbir faydasının olmadığını öne sürmüştür. Son testte ise ispatların

sınavlarda sorulmaması gerektiğini çünkü sınavlardan dolayı teoremlerin ispatlarını birbirine karıştırdığını buna rağmen ispatlar olmasa teoremlerin doğruluğunun gösterilemeyeceğini ifade etmiştir. Ayrıca yaptığımız etkinlikler sayesinde ispatların daha somut hale geldiğini ve akılda kaldığını belirtmiştir.

SA kodlu öğrenci ile yapılan mülakat:

Mülakatçı: Birinci sorumuz “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?” şeklindeydi. Siz ve son testte şu yanıtları vermişsiniz:

İspat bana tam anlamıyla çok önemli gelmiyor. Bilmediğim formülün nereden geldiğini öğrenmek benim için daha kalıcı olurken, bazı ispatlar ezberle yönettirir için bazı hoşuma gitmediğini söyleyebilirim.
SA kodlu öğrencinin soru 1'e ön testte verdiği yanıt
Matematiksel ispat kendimi biraz olsun matematikçi olduğumu hissettiriyor. Yeteri kadar ispat ve bana yeni okuma yapan ispatlar için bunu düşünüyorum. Bazı ispatların ise sadece ezberle yönettirildiğini düşünüyorum. Kısacası ispat zevkli olabilir ezber olmadığı sürece.
SA kodlu öğrencinin soru 1'e son testte verdiği yanıt

Ön ve son testte verdığınız yanıtlar incelendiğinde ön testte matematiksel ispatın sizin için önemli olmadığını söylerken son testte fikirleriniz daha olumlu olarak değişmiş ve ispatların matematikçi olduğunuzu hissettirdiğini yazmışsınız. Fikirlerinizin neden değiştiğini açıklar mısınız?

SA: *Ön testte ispatları bilmeden girdiğim için daha olumsuz şeyler yazdım. Lineer cebir dersinde ispatları ezberlediğim için, neyin nereden geldiğini bilmediğim için sizin sorduğunuz sorulara da o yüzden olumsuz cevaplar verdim. Fakat sizinle etkinlik yaptıktan sonra neyin nereden geldiğini gördüm, öğrendim ve ispata yönelik olan olumsuz düşüncelerim değişti. Bilmediğim şeyleri öğrenince ispat hoşuma gitmeye başladı.*

Mülakatçı: İkinci sorumuz “Matematiksel ispatın önemi nedir? Açıklayınız.” şeklindedir. Ön ve son testte verdiğiniz yanıtlar aşağıdadır:

Matematiksel ispatın önemi bence bir öğretmenin öğrencilerinin karşısında onlardan farklı olduğunu. Bilgi anlamında daha çok bildiğini gösterir. Bu da saygınlığını artırır. Örneğin Linear Cebir dersimiz teoremlerinin çoğu ezber olmasına rağmen Ahmet hoca. hepsini kavramış ve bunu bize kavratarak anlatmaya çalışıyor. Bu da benim gözümde hocanın saygınlığını artırıyor.
SA kodlu öğrencinin soru 2'ye ön testte verdiği yanıt
matematik herkesin bildiği gibi kolay bir ders değil. matematiksel ispat insanı matematik ile sevdirebilir ve o yüzden eğer iyi bir öğretmen olmak istiyorsak önemli işpatları yani öğrencilerin merak ettiği soruların nereden geldiğini bilmek önemlidir.
SA kodlu öğrencinin soru 2'ye son testte verdiği yanıt

İkinci soruya verdiğiniz yanıtlar incelendiğinde matematiksel ispatın önemli olduğunu yazmışsınız. Son testte de öğretmenin saygınlığını direk ispat bilmesine bağlamışsınız. Bu yanıtlarınızı açıklar mısınız?

SA: Karşımızdaki herhangi biri için ya da öğrencilerimiz için biri soru sorduğu zaman bu nerden geliyor diye öğretmen ispatını yapsa, neyin nereden geldiğini açıklasa o öğretmenin karşısındakinden daha çok şey bildiği görülür ve hatta öğrenciler “Vay, öğretmenimiz bizden daha çok şey biliyor, bak bize anlattı.” Şeklinde söylerler. Bu da öğretmenin saygınlığını artırır. Bu yüzden ispat bilmek önemlidir.

Mülakatçı: İlerde öğretmen olduğunuzda derslerinizde matematiksel model kullanmayı düşünür müsünüz?

SA: Bence öğrenciler model çizilerek anlatılınca daha iyi anlarlar. Bu yüzden bende ilerde model kullanırım.

Mülakatçı: Etkinliklerimizin size bir faydası olduğunu düşünüyor musunuz?

SA: *Oldu tabi ki. Analiz dersinde de aynı teoremleri gördüm. Sizin etkinlikleriniz sayesinde dersi daha iyi anladım, pekiştirdim. Grafik çizmeden ispatı anlatsaydınız ben önceki ispatlar gibi ezber yapardım. Fakat grafik çizerek anlattığınız için bende grafikleri aklımda tutarak ispatını kendim maddeler halinde yazdım. Grafiklerden yola çıkarak ispat yapabildim. Model ile anlatmanız çok yararlı oldu.*

SA kodlu öğrencinin matematiksel ispat ile ilgili görüşlerine bakıldığında ön testte matematiksel ispatın önemli olmadığını, öğrencileri ezber yapmaya yönelttiğini fakat bilmediği teorem ve formüllerin nerden geldiğini öğrenirken de ispatı kullanması gerektiğini söyleyerek hem olumlu hem de olumsuz ifadeler kullanmış olup kararsızdır. Son testte ise fikirleri olumlu olarak değişmiş ve ispatın zevkli olduğunu ve kendisinin ispatlar sayesinde matematikçi hissettiğini belirtmiştir. Fikirlerinin değişmesinin sebebi olarak da yaptığımız teorem ispatlarını söyleyerek etkinlikler sayesinde ispat yapmayı sevdiğini, modellerin teorem ifadelerini netleştirdiğini ve akılda kalıcılığı artırdığını ifade etmiştir. Hatta grafikler sayesinde teorem ispatlarına başlayabildiğini, ispata başlarken önce grafik çizip sonra sözel ifadelere geçtiğini söylemiştir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5.1. Sonuç ve Tartışma

Araştırmanın bu bölümünde matematiksel modellerle teorem ispatlarının öğrencilerin ispat yapabilme becerilerine, akademik başarılarına ve ispatla ilgili görüşlerine etkisinin belirlenmesi ile elde edilen bulgulardan çıkarılan sonuçlar ve bu sonuçlara dayalı olarak geliştirilecek önerilere yer verilmiştir.

5.1.1. Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının Öğrencilerin İspat Yapabilme Becerilerine Etkisi İle İlgili Sonuç ve Tartışma

Öğrencilerin ispat yapabilme becerilerindeki değişimi incelemek için Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi ön ve son test olarak uygulanmış, öğrencilerden ön testte iki teorem, son testte de üç teorem ispatı yapmaları istenmiş ve yanıtlara ait bulgular yüzde ve frekans tablosu ile gösterilmiştir.

Öğrencilerin Sandviç Teoremi'nin ispatına vermiş oldukları yanıtlar incelendiğinde ön testte hiç doğru cevap alınmazken son testte %46.7'lik bir başarı elde edilmiştir. Bununla birlikte çoğu öğrencinin de ispatı yapmak için uğraştığı, soruyu boş bırakmadıkları görülmüştür. Teoremin ispatını yapan öğrencilerin yanıtlarına göre başarının artmasında modellerin kullanılmasının etkili olduğu düşünülmektedir. Çünkü öğrenciler ön testte soruyu boş bırakmalarına rağmen son testte tam doğru cevap veremeyenler de ispatı yapmak için uğraşmışlar ve sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Öğrenciler, Ortalama Değer Teoremi'nin ispatına da yine ön testte hiç doğru cevap vermezken son testte %8.9'luk kısmı doğru cevap vermiştir. Ayrıca ön testte öğrencilerin %84.5'i, son testte %49'u boş bırakmıştır. Bu teoremin ispatının sonuçlarına bakıldığında öğrencilerin teoremin ispatını yapamadıkları, yapanların sayısının çok az olduğu (4 öğrenci) ve çoğunun boş bıraktığı görülmüştür. Son testte teoremin ispatını yapan öğrencilerin olması modellerin faydasını göstermektedir. Çünkü

öğrenciler son testte modellerle teoremin ispatını yapabilmişlerdir. Son teoremden (Fermat Teoremi) ise öğrencilerin %37.8'inin doğru, %28.9'unun kısmen doğru, %4.4'ünün yanlış olduğu görülmüştür. Sonuçlara bakıldığında teoremin ispatını öğrencilerin çoğunun yaptığı görülmüştür.

Genel olarak üç teoremin ispatına bakıldığında ön testte öğrencilerin teoremlerin ispatını yapamadıkları ve çoğu öğrencinin de ispatla uğraşmak istemedikleri ve bu yüzden boş bıraktıkları görülmüştür. Bahtiyari-Albayrak (2010) yaptığı çalışmada benzer sonuç bulmuş ve öğrencilerin ispat ve muhakeme açısından yeterli deneyime sahip olmadıklarını tespit etmiştir. Doruk ve Kaplan (2013) da öğretmen adaylarının ispat yapmada ve değerlendirme de başarısız olduklarını, bu başarısızlığın sebebinin de ispatlardaki anahtar düşüncelere dikkat etmeden ve ispatı öğrenmek için düşünce sürecine girmeden sadece ezberleme yoluna gittiklerini belirtmişlerdir. Teoremlerin ifadeleri öğrenciler için anlaşılması zor, karmaşık ve soyut geldiği için öğrenciler teoremi anlayamamış ve dolayısıyla da ispatını da yapamamışlardır. Nitekim yapılan araştırmalarda öğrencilerin ispat yapamamalarının sebepleri olarak ispatla ilgili eksikliklerine sahip olmaları, tanımları ve tanımları nerde kullanacaklarını bilmemeleri, ispat teknik ve stratejilerini bilmemeleri ve başarılı olamayacaklarına inanmaları ve korkmaları verilmiştir (Almeida, 2003; Anapa ve Şamkar, 2010; Baker ve Campbell, 2004; Edwards ve Ward, 2004; Gibson, 1998; Güler, 2013; Jones, 2000; Knapp, 2005; Morali, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006).

Ayrıca literatüre bakıldığında öğrencilerin, ispata nasıl başlayacağını belirleme (Moore, 1990, 1994; Selden ve Selden, 2003, 2007), ispatta kullandıkları tanımları ifade etme (Azrou, 2013; Bayazit, 2009; Knapp, 2005), ispatı kendi cümleleri ile ifade etme (Dubinsky, 2000), mantık ve ispat yöntemi kullanımı (Harel ve Sowder, 2007; Knapp, 2005; Selden ve Selden, 2007; Stylianides, Stylianides, Philippou, 2004, 2007), matematiksel dil ve notasyon kullanımı (Biehler ve Kempen, 2013; Moore, 1994; Selden ve Selden, 2007) güçlüklerinin de olduğu görülmüştür. Böylece araştırma sonuçları ile literatürde yer alan çalışmalar birbiriyle tutarlıdır.

Matematikte yer alan kavramlar soyut nitelikte olup kavramların doğrudan algılanması öğrenciler açısından zor bir durumdur (Van de Walle, 1998). Bu yüzden matematiksel kavramlar somutlaştırılarak öğretilmelidir. Kavramların özümsemesi ve

tam olarak anlaşılması için kişisel olarak ilgili kavrama yönelik zihinsel bir model oluşturulmalıdır. Kavramların öğretiminde modelleri seçmek, öğrencinin daha farklı düşünmesine ve kavramla ilgili bir dizi anlam oluşturmaya olanak sağlayacaktır. Ünal ve Engin'e (2006) göre anlamlı öğrenmeyi gerçekleştiren birey, bilgiyi çevresiyle etkileşerek yapılandırır ve bu etkileşim sonucunda kavrama ait bir matematiksel model oluşturulabilir. Bu bağlamda modele dayalı öğrenmenin, yani bir sistem ya da olaya ilişkin zihinsel modellerin oluşturulmasının, kavramların içselleştirilmesinde önemli bir adım olduğu söylenebilir.

Öğrenme ortamında daha iyi anlamayı, anlamlandırmayı ve kavramayı sağlayan; verilen bir ifadenin, olgunun görselleştirilmesinde ve somutlaştırılmasında kullanılan matematiksel modellerin teoremlerin ispatında kullanılması ile öğrenciler ispatları daha iyi anlamış ve kavramışlardır. Matematiksel modeller kullanıldığında teorem ifadeleri daha rahat anlaşılmış ve öğrenciler teoreme ait modeli çizerek kendileri ispat yapabilmişlerdir. Hanna ve Jahnke (2007) çalışmalarında ispat yapmada modellerin ve modellemenin kullanabileceğini, ispat ve modellemenin birbiriyle iç içe olduğunu belirtmiş olup matematiksel modellerin teoremlerin ispatlarını yapmada kullanılabilecek bir yöntem olduğu görülmüştür. Ünveren (2010) de benzer sonuçlara ulaştığı çalışmasında, matematiksel anlamda özel durumlardan ve örneklerden yola çıkarak genellemelere ve kurallara ulaşma yolu ile kurulan bir model aracılığı ile ispatın anlatılabileceğini ve yorumlanabileceğini söylemiştir. Ayrıca Fischbein (1987) de ispatın formal dili ve öğretimde kullanılan model dilin farklı yapıda olması model durumun kişilere ispatı hatırlamalarında bir analogi olma özelliği katacağını belirtmiştir. Gerçekten de öğrenciler modeli hatırlayarak teoremlerin ispatını yapabilmişlerdir. Buradan matematiksel modellerin öğrencilerin ispat yapabilme becerilerini olumlu yönde etkilediği sonucuna ulaşılmıştır.

5.1.2. Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının Öğrencilerin Akademik Başarılarına Etkisi İle İlgili Sonuç ve Tartışma

Öğrencilerin akademik başarılarındaki değişimi bulmak için Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi'nin ön testinde dört soru ve son testinde beş soru sorulmuş ve yanıtlar Bilgi ve Beceri Testi Puanlama Anahtarı'na göre 100 puan üzerinden değerlendirilmiştir. Elde edilen veriler SPSS paket programı ile analiz edilmiştir.

Öğrencilerin ön testte aldıkları notların aritmetik ortalaması 16.8 iken son testte 48.5 olarak bulunmuştur. Aritmetik ortalamasının artması öğrencilerin akademik başarılarının artmasının bir göstergesidir. Verilerin bağımlı t-testi sonuçlarına göre son test lehine anlamlı bir fark olup ayrıca etki büyüklüğünün de yüksek bulunması ön test ile son test arasında başarı yönünden büyük bir fark olduğunun göstergesidir. Benzer bir sonuç da Sandalcı (2013) tarafından bulunmuş ve çalışmada matematikte model kullanımının 6. sınıf öğrencilerinin cebir erişilerine etkisi incelenmiştir. Araştırma sonucunda model kullanımının cebir erişisini arttırdığı yönünde istatistiksel olarak anlamlı bir fark bulunmuştur. Yapılan birçok çalışmada da matematiksel model ve modellemenin öğrencilerin akademik başarılarını olumlu olarak etkilediği ve artırdığı sonucuna ulaşılarak bu çalışma ile paralellik gösteren sonuçlara ulaşılmıştır (Blum, 1993; Çiltaş ve Işık, 2012; English, 2006; Sağırılı, Kırmacı ve Bulut, 2010; Moslev ve Jenaabadi, 2015).

5.1.3. Matematiksel Modellerle Teorem İspatlarının Öğrencilerin İspatla İlgili Görüşleri İle İlgili Sonuçlar ve Tartışma

Öğrencilerin görüşlerindeki değişimi görmek için Matematiksel İspat Yapma İle İlgili Görüş Anketi ön ve son test olarak uygulanmıştır. Ön testte öğrencilerin birçoğu matematiksel ispatı gereksiz, saçma, zaman kaybı ve derslerden geçmek için ezberlemek zorunda kaldıkları bilgi yığını olarak gördüklerini belirtmişlerdir. Ayrıca öğrenciler yapılan ispatları anlayamadıklarını ve ispatı gerçek hayatta kullanmayacaklarını da belirtmişlerdir. Son testte ise öğrencilerin çoğunun görüşleri değişmiş ve ispatın matematik için önemli olduğunu, ispat sayesinde matematiksel ifadelerin, formüllerin ve bilgilerin doğruluğunun gösterildiğini, ispat ile matematiksel bütünlük sağlandığını ve ispatın matematiksel düşünmeyi geliştirdiğini belirttikleri görülmüştür. Öğrencilerin ispat hakkında olumlu düşüncelere sahip olmaları önemlidir (Almeida, 2000, 2003; Jones, 2000). Çünkü literatürde ispat hakkında olumlu düşüncelere sahip olan öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının öğrencilerine ispatı daha iyi aktarabilecekleri savunulmaktadır (Morali, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; Öçal ve Güler, 2010). Benzer bir çalışma da İmamoğlu (2010) tarafından yapılmış ve öğretmen adaylarının ispatın olumlu yönlerine yönelik görüşler belirttikleri görülmüştür.

Ayrıca öğrencilerin ön testte verdikleri yanıtlara bakıldığında ispat yapmaktan korktukları, teoremlerin ifadelerini anlayamadıkları için ispatını yapamadıkları, ispatın basamakları arasında ilişki kuramadıkları zaman ispatın anlamsız geldiğini ve bu yüzden başarısız oldukları görülmüştür. Weber (2006) de yaptığı çalışmasında benzer sonuçlara ulaşmış ve öğrencilerin ispatla ilgili yaşadıkları zorlukları üç kategoriye ayırmıştır. Birinci kategori, öğrencilerin ispat yama hakkında kavramsal olarak yetersiz bilgiye sahip oldukları; ikinci kategori, öğrencilerin bir kavramı veya teoremi yanlış anlamaları ve buna bağlı olarak bu tanımı veya teoremi yanlış uygulamaları ve üçüncü kategori ise öğrencilerin ispat yapmada kullanacakları yöntem ve stratejileri bilmemeleridir. Matematiksel modellerle teorem ispatları yapıldıktan sonra öğrencilerin çoğunun ispatla ilgili görüşleri olumlu olarak değişmiştir. Çünkü matematiksel modeller sayesinde teoremlerin ifadeleri daha net olarak anlaşılmış ve bu sayede öğrenciler ispat yapmaya karşı istekli hale getirilmiştir. Ayrıca matematiksel modeller sayesinde ispatlar daha kalıcı ve anlamlı hale gelmiştir. Böylece son testte öğrencilerin çoğu ispatla ilgili olumlu görüşler belirtmişlerdir. Ünveren (2010) de ispat yapmada model ve modellemenin kullanılmasının öğrencilerin ispata yönelik görüşlerini olumlu olarak değiştirdiği sonucuna ulaşmıştır.

Ayrıca seçilen 11 öğrenci ile yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlarda öğrenciler ankette yazdıkları yanıtlarını teyit etmişlerdir ve çoğunun düşünceleri olumlu yönde değişmiştir. Sadece bir öğrencinin görüşü olumsuz yönde değişmiş olup bu öğrenciye fikrinin neden değiştiği sorulduğunda genel olarak üniversite derslerinin soyut olmasından ve ispatların sonucunda genel ifadeleri varıldığı için bu genel ifadeye varmanın öğrenci için anlaşılması zor olduğunu belirterek olumsuz fikirler söylemiştir. Bu öğrenci dışında mülakat yapılan öğrencilerin neredeyse tamamı yapılan etkinlikler sayesinde ispat yapmaya alıştıklarını ve artık ispat yapmaktan korkmadıklarını, teorem ifadelerine uygun matematiksel model çizerek ispatı kendilerinin yapabildiğini ve modeller sayesinde ispatların daha anlaşılır ve akılda kalıcı olduğunu belirtmişlerdir.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada matematiksel modellerle teorem ispatlarının öğrencilerin ispat yapabilme becerilerine, akademik başarılarına ve görüşlerine nasıl etki ettiğine bakılmıştır ve sonuç olarak modellerin ispat yapmada öğrencilere birçok fayda sağladığı görülmüştür.

5.2. Öneriler

1. Araştırma sonucuna göre, öğrencilerin üniversitelerde öğretildiği şekliyle yapılan ispatlara yönelik tutumlarının düşük olduğu tespit edilmiş ve bunun nedeninin teoremlerin ifadelerinin ve ispatta kullanılan matematiksel dilin kişiler için anlaşılır olmaması verilebilir. Bu nedenle teoremlerin ifadelerinin anlaşılır olması için matematiksel modeller kullanılabilir.

2. Teoremler ispatlanırken öğretmenin gerçekleştirdiği tümdengelimsel ispatlar öğrenciler tarafından anlaşılmadan yalnızca kopyalanarak geçici belleğe alındığı ve günlük yaşamla ilişkilendiremedikleri için teoremlerin ispatlarının unutulduğu gözlenmiştir. Bunun yerine öğrencilerin kendilerinin ispat adımlarını anlamlaştırarak kurmaları sağlanmalıdır. Böylece bu teoremlerin günlük yaşamdaki karşılığını da anlayabilirler ve bu sayede günlük yaşamdaki ispat ve muhakeme güçleri de gelişebilir.

3. Lisans eğitiminde ispatlar yapılırken görselleştirmelerden yeterince faydalanılmadı görülmüştür. Görsel materyallerin ve bilgisayar teknolojilerinin kullanımı, öğrencilere varsayımları daha anlaşılır kılabilir.

4. Lisans eğitimi için ispat yapma vazgeçilmezdir fakat öğrencilerin en çok zorlandıkları konu olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu yüzden lisans eğitimine matematiksel modeller ile ispat yapma etkinlikleri dersi koyulabilir ve öğrenciler açısından ispat daha anlaşılır olabilir.

5. Öğrencilerin ve öğretmenlerin matematiksel model kullanmaları geliştirilebilir. Öğrencilerin modelleri daha iyi anlamaları ve günlük hayatta kullanmaları için her seviyedeki eğitim programlarına modellerin kullanıldığı örnek etkinlikler konulması önerilmektedir. Öğretmenlerin de modellerin kullanılması ile ilgili daha detaylı bilgiye sahip olmaları öğrencilere modelleri daha iyi aktarmasını sağlar. Bu yüzden öğretmenlere hizmet içi eğitim verilerek öğretmenlerin modellerin kullanımı hakkında detaylı bilgiye sahip olmaları sağlanabilir.

6. Matematiksel modeller yardımıyla kavramların öğrenilmesinin ve ispat yapmanın önündeki engellerden biri zaman problemidir. Bu nedenle öğretim programlarında ayrılan zaman dilimi dikkate alınarak kavramlara ayrılan ders saatleri yeniden belirlenebilir.

7. Yapılan çalışma ilköğretim matematik öğretmenliği ikinci sınıfta öğrenim gören 45 öğrenci ile sınırlı kalmıştır. Çalışmanın, ispat öğretiminin başladığı lise düzeyinden itibaren geliştirilmesi ve incelenmesi yapılabilir.

8. Araştırmada Analiz-I dersi bünyesinde bulunan beş teoremin ispatı ile çalışılmıştır. Matematiğin daha farklı dallarında daha farklı ispatlarla da çalışılabilir.

9. Sadece üniversite düzeyinde değil, daha alt düzeylerde de matematiksel modeller kullanılarak anlatılan kavramların ve konuların öğrenciler açısından nasıl anlaşıldığı üzerine de çalışmalar yapılabilir.

10. Ayrıca ispat ve matematiksel modeller ile ilgili ayrı ayrı çalışmalar yapılmış olup her ikisinin birbirine olan etkisi üzerine yapılan çalışmaların sayısının az olduğu görülmüştür. Bu yüzden araştırmacılar bu konu ile ilgili çalışmalar yapabilirler.

11. Sadece matematiksel modeller kullanılarak ispat yapma tekniğini geliştirecek olan “Proofs Without Words” (Ara İfadeleri Yazmadan İspat Yapma) şeklindeki gibi kitapların çoğaltılarak literatüre kazandırılması da öneriler arasındadır.

KAYNAKÇA

- Abramovitz, B., Berezina, M., Berman, A., and Shvartsman, L. (2009). How to understand a theorem?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(5), 577-586.
- Akdeniz, F., Ünlü, Y., ve Dönmez, D. (2012). *Analize giriş cilt-I (8. Baskı)*. Adana: Nobel Kitabevi.
- Akkaş, S., Hacısalihoğlu, H. H., Özel, Z., ve Sabuncuoğlu, A. (1988). *Soyut matematik (İkinci Baskı)*. Ankara: Gazi Üniversitesi Yayınları.
- Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications form mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869–890.
- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.
- Altıparmak, K., ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme, *Ege Eğitim Dergisi*, 6,1, 25.
- Altun, M. (2004). İlköğretim ikinci kademedede (6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi. *Alfa Basım Yayım Dağıtım, İstanbul*.
- Altun, M. (2005). 'Matematik Öğretimi', Aktüel Yayınevi, Erkam Matbaası, Bursa, s.79.
- Anapa, P., and Şamkar, H. (2010). Investigation of undergraduate students' perceptions of mathematical prof. *Procedia Social and Behavioral Sciences*. 2, 2700–2706.
- Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi*. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi, Bursa.
- Arslan, S., ve Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim, Cilt 35, Sayı 156*.
- Aydın, H. (2008). *İngiltere'de öğrenim gören öğrencilerin ve öğretmenlerin matematiksel modelleme kullanımına yönelik fenomenografik bir çalışma*.

- Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Azrou, N. (2013). *Proof in algebra at the university level: Analysis of students difficulties*. Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Antalya, Turkey.
- Bahtiyari-Albayrak, Ö. (2010). *8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Baker, D., and Campbell, C. (2004). Fostering the development of mathematical thinking: Observations from a proofs course. *Primus*. 14 (4), 345–353.
- Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi (4. Baskı)*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.
- Baki, A., ve Alan, B. (1997). Ortaöğretimde Matematik Öğretimi. Milli Eğitim Geliştirme Projesi, Bilkent, Ankara.
- Bal, A. P., ve Doğanay, A. (2014). Sınıf öğretmenliği adaylarının matematiksel modelleme sürecini anlamalarını geliştirmeye yönelik bir eylem araştırması. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 14 (4), 1363-1384.
- Balcı, M. (2012). *Genel matematik (8. Baskı)*. Ankara: Balcı yayınları.
- Baştürk, S., ve Dönmez, G. (2011). Mathematics student teachers' misconceptions on the limit and continuity concepts. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education*, 5 (1), 225-249.
- Bayazit, N. (2009). *Prospective mathematics teachers' use of mathematical definitions in doing proof*. Unpublished Doctoral Dissertation, Florida State University, Florida.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.
- Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies*, 7(1/2), 23-40.

- Berber, C.N., ve Güzel, H. (2009). Fen ve matematik öğretmen adaylarının modellerin bilim ve fende rolüne ve amacına ilişkin algıları. *Selçuk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 21, 87-97.
- Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(4), 487–500.
- Biehler, R., and Kempen, L. (2013). *Students' use of variables and examples in their transition from generic proof to formal proof*. Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Antalya, Turkey.
- Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. T. Breiteig, I. Huntley ve G. Kaiser-Messmer (Ed.), *Teaching and learning mathematics in context*. New York: Ellis Horwood, 3-14.
- Blum, W. (1998). On the role of grund for stellungen for reality-related proofs-examples and reflections'', *Mathematical Modelling- Teaching and Assessment in Technology-Rich World*, Harwood, 63.
- Blum, W., and Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 37-68.
- Boaler, J. (2001). Mathematical modelling and new theories of learning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 20(3), 121-128.
- Bransford, J. D., Brown, S. J., and Cocking, R. (1999). *How People Learn*. Washington, D.C.:National Academy Press.
- Büyüköztürk, Ş., Çakmak, E. K., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş., ve Demirel, F. (2012). *Bilimsel araştırma yöntemleri* (12. Baskı). Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.
- Calude, C. S., and Marcus, S. (2004). Mathematical proofs at a crossroad? LNCS 3113, pp. 15–28, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Ceylan, T. (2012). *Geogebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

- Cohen, L., Manion, L., and Morrison, K., (1996). A guide to teaching practice, London: Routledge.
- Creswell, J. W. (2008). *Educational research planning, conducting and evaluating quantitative and qualitative research*. International Pearson Merrill Prentice Hall.
- Çallıalp, F. (1999). *Örnekler ile soyut matematik*. Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi Yayınları, 3. Baskı, İstanbul.
- Çiltaş, A. (2011). *Dizi ve seriler konusunun matematiksel modelleme yoluyla öğretiminin ilköğretim matematik öğretmen adaylarının öğrenme ve modelleme becerileri üzerine etkisi*. Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Çiltaş, A., ve Işık, A. (2012). Matematiksel modelleme yönteminin akademik başarıya etkisi. *Çağdaş Eğitim Dergisi Akademik*, 2, 57-67.
- Çiltaş, A., ve Yılmaz, K. (2013). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının teoremlerin ifadeleri için kurmuş oldukları modeller. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2(2), No: 12, 107-115.
- de Villiers, M. (1990). The role and function of proof with sketchpad. *Pythagoras*, 24, 17-24.
- Dede, Y. (2013). Matematikte ispat: önemi, çeşitleri ve tarihsel gelişimi (ss.15-34). İ.Ö. Zembat, M.F. Özmentar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Eds.) Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar. Ankara: Pegem Akademi.
- Dede, Y., ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(2), 47-71.
- Deniz, D. (2014). *Ortaöğretim matematik öğretmenlerinin matematiksel modelleme yöntemine uygun etkinlik oluşturabilme ve uygulayabilme yeterlikleri*. Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Doruk, B. K. (2010). *Matematiği günlük yaşama transfer etmede matematiksel modellemenin etkisi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Ankara: Hacettepe Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü.

- Doruk, M., Özdemir, F., ve Kaplan, A. (2014). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri ile matematiğe karşı öz-yeterlik algıları arasındaki ilişki. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(2), 861-874.
- Doruk, M., ve Kaplan, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2(1), 241-252.
- Dönmez, A. (1985). *Gerçek analiz*. Erzurum: Atatürk Üniversitesi Yayınları-608, Fen Fakültesi Yayınları-83, Ders Kitapları Serisi-19.
- Dubinsky, E. (1986). Teaching mathematical induction. *I. Journal of Mathematical Behavior*, 5, 305–317.
- Dursun, Ş., ve Dede, Y. (2004). Öğrencilerin matematikte başarısını etkileyen faktörler: Matematik öğretmenlerinin görüşleri bakımından. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(2), 217- 230.
- Edwards, B.S., and Ward, M.B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*. 111, 411–424.
- English, L. D. (2003). Reconciling theory, research, and practice: A models and modelling perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 54(2-3), 225-248.
- English, L. D. (2006). Mathematical modeling in the primary school: Children's construction of a consumer guide. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 303-323. doi: 10.1007/s10649-005-9013-1
- English, L. D., and Watters, J. J. (2005). Mathematical modelling in the early school years. *Mathematics education research journal*, 16(3), 58-79.
- Eraslan, A. (2011). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının model oluşturma etkinlikleri ve bunların matematik öğrenimine etkisi hakkındaki görüşleri. *Elementary Education Online*, 10(1), 364-377.
- Erbaş, A. K., Kertil, M., Çetinkaya, B., Çakıroğlu, E., Alacacı, C., ve Baş, S. (2014). Matematik eğitiminde matematiksel modelleme: Temel kavramlar ve farklı yaklaşımlar. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 14 (4), 1-21.

- Eric, C. C. M., Dawn, N. K. E., Wanty, W., and Seto, C. (2015). A case study on developing a teacher's capacity in mathematical modelling. *The Mathematics Educator*, 16(1), 1-31.
- Fawcett, H . P. (1938). The nature of proof: a description and evaluation of certain procedures used in a senior high school to develop an understanding of the nature of proof. (NCTM year book 1938). New York: Teachers' College, Columbia University.
- Fırat, M., Kabakçı Yurdakul, I., ve Ersoy, A. (2014). Bir eğitim teknolojisi araştırmasına dayalı olarak karma yöntem araştırması deneyimi. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi - Journal of Qualitative Research in Education*, 2(1), 65-86.
- Field, A. (2009). *Discovering Statistics Using SPSS*. Sage Publications Ltd., UK: London.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science and Business Media.
- Gibson, D. (1998). *Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. Students' proof schemes*. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, and J.Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, 3, 284–307. AMS.
- Gilbert, J., and Boulter, C. (1998). Models in explanations, Part 1: Horses for courses? *International Journal Science Education*, 20(1), 83-97.
- Gökkurt, B., Deniz, D., Akgün, L., ve Soylu, Y. (2014). Matematik alanında ispat yapma süreci üzerine yapılmış bazı araştırmalardan bir derleme. *Başkent University Journal Of Education*, 1(1).
- Gravemeijer, K., and Stephan, M. (2002). Emergent models as an instructional design heuristic. In Gravemeijer, K., Lehrer, R., Oers, B., and Verschaffel, L. (Eds.). *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education*, 145-169.
- Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

- Güler, G., Kar, T., Öçal, M. F., ve Çiltaş, A. (2011). Prospective mathematics teachers' difficulties in proof. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 336-340.
- Güler, G., Özdemir, E., ve Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219-236.
- Güler, G., ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571-591.
- Gümüş, F. Ö. (2015). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının problem çözme stratejileri tercihleri ile matematiğe karşı öz yeterliklerinin incelenmesi. *Elektronik Sosyal Bilimler Dergisi*, 14(52), 34-42.
- Gümüş, İ., Demir, Y., Koçak, E., Kaya, Y., ve Kırıcı, M. (2008). Modelle öğretimin öğrenci başarısına etkisi. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi*, 10(1), 65-90.
- Günbatar, S., ve Sarı, M. (2005). Elektrik ve manyetizma konularında anlaşılması zor kavramlar için model geliştirilmesi. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 25(1), 185-197.
- Güneş, B., Gülçiçek, Ç., ve Bağcı, N. (2004). Eğitim fakültelerindeki fen ve matematik öğretim elemanlarının model ve modelleme hakkındaki görüşlerinin incelenmesi. *Türk Fen Eğitimi Dergisi*, 1(1), 34-48.
- Güven, B., Çelik, D., ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi*, 30, 319.
- Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Hingham, MA: Kluwer Academic Publishers.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23
- Hanna, G., and Barbeau, E. (2002). What is a proof? In B. Baigrie (Ed.). *History of modern science and mathematics*, 1, 36-48.
- Hanna, G., and Barbeau, E. (2009). Proof in mathematics university of Toronto, Canada <http://www.math.toronto.edu/barbeau/hannajoint.pdf>.

- Hanna, G., and Jahnke, H. N. (2007). 'Proving and modelling', *Modelling and Applications in Mathematics Education*, Springer, New York, p145.
- Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: a model for DNR-based instruction. In S. Campbell and R. Zaskis (Eds.), *Learning and Teaching Number Theory*. In C. Mather (Ed.). *Journal of Mathematical Behavior* (p.185-212). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.
- Harel, G., and Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics* (Vol. 2). NCTM.
- Harrison, A. G. (2001). How do teachers and textbook writers model scientific ideas for students. *Research in Science Education*, 31, 401-435.
- Harrison, A. G., and Treagust, D. F. (2000). Typology of school science models. *International Journal of Science Education*, 22(9), 1011-1026.
- Heinze, A., and Reiss, K. (2003). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. In M.A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italy.
- Hemmi, K. (2006). *Approaching proof in a community of mathematical practice*. Unpublished Doctoral Dissertation, Stockholm University, Stockholm.
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389-399.
- Hestenes, D. (2010). Modelling theory for math and science education. Lesh, R., P.L Galbraith, C.R Haines and A. Hurford. (Ed.), *Modelling Students' Mathematical Modelling Competencies: ICTMA* (ss. 13-41). New York, Springer.
- Hıdıroğlu, Ç. N., ve Bukova Güzel, E. (2013). Matematiksel modelleme sürecini açıklayan farklı yaklaşımlar. *Bartın Eğitim Fakültesi Dergisi*, 2(1), 127-145.
- Hıdıroğlu, Ç. N., ve Bukova Güzel, E. (2014). Matematiksel modellemede GeoGebra kullanımı: Boy-Ayak uzunluğu problemi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 36(2), 29-44.

- Hitt, F. (1994). Teachers' difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 16 (4), 10-20.
- Ikeda, T., Stephens, M., and Matsuzaki, A. (2007). A teaching experiment in mathematical modelling. In C. Haines P. Galbraith, W. Blum and S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: education, engineering and economics*, 101-109, ICTMA 12, Horwood Publishing, Chishester, UK.
- Irmak, H. (2008). *Soyut matematik (1.baskı)*. Pegem Akademi: Ankara
- İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi*. Doktora Tezi, Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları*. Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- İskenderoğlu, T. A., Baki, A., ve Palancı, M. (2011). Matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüş ölçeği: Geçerlik ve güvenirlik çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(1), 181-203.
- İşcan, K. (1969). Ansiklopedik matematik sözlüğü, İstanbul.
- Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 31(1), 53-60.
- Justi, R. S., and Gilbert, J. K. (2003). Teachers' views on the nature of models. *International Journal of Science Education*, 25(11), 1369–1386.
- Kadioğlu, E., ve Kamali, M. (2009). *Genel matematik (5. Baskı)*. Erzurum: Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi.
- Kalaycı, Ş. (2010). *SPSS uygulamalı çok değişkenli istatistik teknikleri*. Ankara: Asil Yayın Dağıtım Ltd. Şti.
- Karaçay, T. (2009). *Soyut matematiğe giriş*. Kuban Matbaacılık Yayıncılık, 2. Baskı, Ankara.

- Karalı, D. (2013). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme hakkındaki görüşlerinin ortaya çıkarılması*. Yüksek lisans tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bolu.
- Karaoğlu, Ö. (2010). *Matematik öğretmen adaylarının anahtar nokta ve fikirlerle desteklenmiş ispatları yapabilme performansları*. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Karasar, N. (2009). *Bilimsel araştırma yöntemi (19. Baskı)*. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*, 1(2), 134-141.
- Kertil, M. (2008). *Matematik öğretmen adaylarının problem çözme becerilerinin modelleme sürecinde incelenmesi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. New york: Oxford university press.
- Knapp, J. (2005). Learning to prove in order to prove to learn. [online] : Retrieved on 20-November-2009 at URL: http://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf
- Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61-88.
- Ko, Y. Y. (2010). Mathematics teachers' conceptions of proof: implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8, 1109–1129.
- Kurnaz, M. A. (2014). Öğretmen adaylarının ölçme ve değerlendirmenin gerekçesi ve öğrenme değişiminin belirlenmesi hakkındaki kavramsal anlamlandırmaları. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 14(5), 1977-1995.

- Kwoen, L. J. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education, *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 16, <http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome16/docs/lee.pdf>
- Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 16.
- Lehrer, R., and Schauble, L. (2003). Origins and evaluation of model-based reasoning in mathematics and science. In R. Lesh, and H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 59-70). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lehrer, R., and Schauble, L. (2007). A developmental approach for supporting the epistemology of modeling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn, and M. Niss (Eds.), *Modeling and applications in mathematics education* (pp. 153-160). New York, NY: Springer.
- Lesh, R., and Doerr, H. M. (2003). *A modeling perspective on teacher development*. Beyond Constructivism: A model and perspective on mathematics problem solving, lerning and teaching (3-33). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R., and Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *The handbook of research on mathematics teaching and learning* (2nd ed., pp. 763-804). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Lesh, R., Carmona, G., Hjalmarson, M., and Mason, G. (2006). Working group models and modeling. *PME-NA Proceedings*, 1, 92-95.
- Martino, A. M., and Maher, C. A. (1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: What research practice has taught us. *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (1), 53–78.
- McMillan, H. J. (2000). *Educational research: fundamentals for the consumer* (3rd ed.). New York: Longman.
- Metin, M. (2014). *Nicel veri toplama araçları*. [Ed. Metin, M. Kuramdan Uygulamaya Eğitimde Bilimsel Araştırma Yöntemleri], Pegem Akademi, 1. Baskı, 162-213.

- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2013). *Ortaokul matematik dersi 5-8. sınıflar öğretim programı*. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, Devlet Kitapları Müdürlüğü Basım Evi, Ankara.
- Millwood, R., and Stevens, M. (2014, May). What is the modelling curriculum?. In *Computer Assisted Learning 1989: Selected Proceedings from the CAL '89 Symposium 11-14 April 1989, University of Surrey* (p. 249). Elsevier.
- Mingus, T. Y., and Grassl, R. M. (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *School Science and Mathematics*, 8, 438–444.
- Mishra, S. M. (2004). *Discrete mathematics*. New Delhi: Indira Gandhi, National Open University.
- Moore, R. C. (1990). *College students' difficulties in learning to do mathematical proofs*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Georgia, Georgia.
- Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 249-266.
- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E., ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147–160.
- Moslev, O. T., and Jenaabadi, H. (2015). The impact and role of modeling on learning and achievements in mathematics among junior high schools of iransahr. *Applied Psychology*, 3(11), 42-49.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nelsen, R. B. (1993). *Proof without words: exercises in visual thinking*. Publish and Distributed by the Mathematical Association of America, Washington.
- Okur, M., Bahar, H. H., Akgün, L., ve Bekdemir, M. (2011). Matematik bölümü öğrencilerinin öğrenme stilleri ile sürekli kaygı ve akademik başarı durumları. *Türkiye Sosyal Araştırma Dergisi*, 15(3), 123-134.

- Olkun, S., ve Toluk, Z. (2003). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi (I.Baskı)*. Ankara: Anı Yayıncılık.
- Olkun, S., ve Uçar, T. Z. (2007). *İlköğretimde Etkinlik Temelli Matematik Öğretimi*. Ankara: Maya Akademi Yayın Dağıtım.
- Öçal, M. F., ve Güler, G. (2010). Pre-service mathematics teachers' views about proof by using concept maps. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 9, 318–323.
- Özer, Ö., ve Arıkan, A. (2002). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 2, 1083-10989.
- Özgün, D. (2012). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının problem çözme sürecinde ürettiği matematik modellerinin nitel bir yaklaşımla incelenmesi*. Yüksek lisans tezi. Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.
- Özkaya, M., Işık, A., ve Konyalıoğlu, A. C. (2014). İlköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin sürekli fonksiyonlarla ilgili ispatlama ve ters örnek oluşturma performansları. *Middle Eastern & African Journal of Educational Research*, 11, 27-42.
- Pişkin- Tunç, M., Durmuş, S., ve Akkaya, R. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının somut materyal ve sanal öğrenme nesnelerini kullanma yeterlikleri. *Matematik Eğitimi Dergisi*, 1/2.
- Polya, G. (1945). *How to solve it: a new aspect of mathematical method* (5th ed.). Princeton University Press.
- Powers, R. A., Craviotto, C., and Grassl, R. M. (2010). Impact of proof validation on proof writing in abstract algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(4), 501-514.
- Raman, M. J. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 319-325.
- Rav, Y. (1999). Why do we proof theorems? *Philosophia mathematica*, 7(1), 5-41.
- Recio, A. M., and Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 1, 83-89.

- Ross, K. A. (1998). The place of algorithms and proofs in school mathematics. *Doing and Proving*, March, 252-255
- Sağırlı, M. Ö., Kırmacı, U., ve Bulut, S. (2010). Türev konusunda uygulanan matematiksel modelleme yönteminin ortaöğretim öğrencilerinin akademik başarılarına ve öz-düzenleme becerilerine etkisi. *Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 3(2), 221-247.
- Sandalcı, Y. (2013). *Matematiksel modelleme ile cebir öğretiminin öğrencilerin akademik başarılarına ve matematiği günlük yaşamla ilişkilendirmelerine etkisi*. Yüksek lisans tezi, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Rize.
- Schoenfeld, A. (1994). What we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behaviour*, 13, 55-80.
- Selden, A., and Selden, J. (2003). *Errors and misconceptions in college level theorem proving*. (Tech. Rep. No. 3). Cookeville, TN: Tennessee Technological University, Mathematics Department.
- Selden, A., and Selden, J. (2007). *Overcoming students' difficulties in learning to understand and construct proofs*. Technical Report, Mathematics Department, Tennessee Technological University 05.06.2012 tarihinde erişildi. URL: http://www.math.tntech.edu/techreports/TR_2007_1.pdf
- Spanier, J. (1992). Modelling-a personel viewpoint. *Mathematics Computer Modelling*, 16(5), 147-149.
- Sriraman, B. (2005). Conceptualizing the model-eliciting perspective of mathematical problem solving. *Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics Education* (pp. 1686-1696), Feliu de Guixols, Spain
- Stylianides, A. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1-20.
- Stylianides, A. J., Stylianides, G. J., and Philippou, G. N. (2004). Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 133–162.

- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., and Philippou. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145-166.
- Tall, D. (1998). The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some?, Conference of the University of Chicago School Mathematics Project.
- Tall, D. D. (1992). 'The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof', Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillian, New York, p495.
- Tall, D. O. and Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Tekin-Dede, A., ve Bukova-Güzel, E. (2013). Matematik öğretmenlerinin model oluşturma etkinliği tasarım süreçlerinin incelenmesi: Obezite problemi. *İlköğretim Online*, 12(4), 1100- 1119.
- Tekin-Dede, A., ve Bukova-Güzel, E. (2013). Ortaöğretim matematik öğretmenlerinin model oluşturma etkinlikleri ve matematik derslerinde kullanımlarına ilişkin görüşleri. *Bartın Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 2/1, 300-322.
- Turner, J. W. (2010). A brief introduction to proofs. 23.03.2012 tarihinde http://www.google.com.tr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&frm=1&source=web&cd=1&ved=0CCkQFjAA&url=http%3A%2F%2Fpersweb.wabash.edu%2Ffacstaff%2Fturnerw%2FWriting%2Fproofs.pdf&ei=YG5sT6XgLqHW0QWsp6TPBg&usg=AFQjCNHtvXRGppPMiuoLT_edwQa00e_hUw&sig2=obqGpMIyytWpP9_AmOVwfMA adresinden alınmıştır.
- Türk Dil Kurumu [TDK]. (2005). *Türkçe sözlük*. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Uğurel, I. (2010). *Ortaöğretim matematik programının temel öğeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi*. Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234– 243.

- Uygan, C., Tanışlı, D., ve Köse, N.Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtlardaki değerlendirme süreçlerinin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 5(2), 137- 157.
- Ünal, G., ve Engin, Ö. (2006). Fen eğitimi ve modeller. *Milli Eğitim Dergisi*, 171.
- Ünveren, E. N. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik tutumlarının matematiksel modelleme sürecinde incelenmesi*. Yüksek lisans tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.
- Üzel, D., ve Özdemir, E. (2009). ‘Elementary mathematics teacher candidates’ attitudes towards proof and proving’, *Journal of New World Sciences Academy*, 4, 4, p1226.
- Van de Walle, J. A. (1998). *Elementary school mathematics: Teaching developmentally*. New York: Longman.
- Van de Walle, J. A. (2012). *İlkokul ve ortaokul matematiği gelişimsel yaklaşımla öğretim*, (Çeviri. Editörü S. Durmuş). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.
- Van Driel, H. J., and Verloop, N. (1999). Teachers’ knowledge of models and modelling in science. *International Journal of Science Education*, 21(11), 1141-1153.
- Vershaffel, L., Greer, B., and De Corte, E. (2002). ‘Everyday knowledge and mathematical modelling of school word problems’, *Symbolizing, Modelling and Tool Use in Mathematics Education*, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, p171.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119.
- Weber, K. (2004). ‘A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs’, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for The Psychology of Mathematics Education*, 4, p425.

- Weber, K. (2006). *Investigating and teaching the processes used to construct proofs*. In F.Hitt, G. Harel and A. Selden(Eds), *Research in Collegiate Mathematics Education*, VI, 197-232. AMS
- Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel düşünme*. İstanbul: Remzi Kitapevi.
- Yıldırım, Z., ve Işık, A. (2015). Matematiksel modelleme etkinliklerinin 5. Sınıf öğrencilerinin matematik dersindeki akademik başarılarına etkisi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(2), 581-600.
- Yıldız, H. T. (2006). *İlköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin atomun yapısı ile ilgili zihinsel modelleri*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.
- Yurt, E., ve Sünbül, A. M. (2014). Sekizinci sınıf öğrencilerinin matematik başarılarını açıklayan bir yapısal eşitlik modeli. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 14(4), 1629-1653.
- Zaslowsky, O., and Peled, I. (1996). 'Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation', *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 1, 67.

EKLER

EK 1. Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi (Ön Test)

Sevgili öğrenciler sizden istenilen aşağıdaki soruları yanıtlamanızdır. Araştırma sonucunda elde edilen veriler, matematiksel ispat ve modellemeye yönelik çalışmalarda kullanılacaktır. Vereceğiniz bilgilerin tümü gizli kalacaktır. Katkılarınızdan dolayı teşekkür ederim.

Kübra YILMAZ

1. “SANDVIÇ TEOREMİ: a nın bir komşuluğunda a dan farklı her x için $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dir.” İspatlayınız .

2. “ORTALAMA DEĞER TEOREMİ: $f : [a, b] \rightarrow R$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu taktirde (a, b) aralığında

$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.” İspatlayınız.

3. $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun ortalama değerini hesaplayınız.

4. $x^3 + x^2 - 1 = 0$ denkleminin 0 ile 1 arasında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

6. Taban yarıçapı 3, yüksekliği 12 birim olan bir dairesel dik koni tepesinden y birim uzakta, tabanına paralel bir düzlemle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değeri nedir?

EK 2. Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi (Son Test)

Sevgili öğrenciler sizden istenilen aşağıdaki soruları yanıtlamanızdır. Araştırma sonucunda elde edilen veriler, matematiksel ispat ve modellemeye yönelik çalışmalarda kullanılacaktır. Vereceğiniz bilgilerin tümü gizli kalacaktır. Katkılarınızdan dolayı teşekkür ederim.

Kübra YILMAZ

1. "SANDVIÇ TEOREMİ: a nın bir komşuluğunda a dan farklı her x için $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dir." İspatlayınız.

2. "ORTALAMA DEĞER TEOREMİ: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu taktirde (a, b) aralığında

$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır." İspatlayınız.

3." **FERMAT TEOREMİ:** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $c \in (a, b)$ noktasında bir yerel maksimumu veya minimumu varsa ve f fonksiyonu c noktasında türevlenebiliyorsa $f'(c) = 0$ dır." İspatlayınız.

4. $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun ortalama değerini hesaplayınız.

5. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ denkleminin 0 ile 3 arasında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

7. Taban yarıçapı 3, yüksekliği 12 birim olan bir dairesel dik koni tepesinden y birim uzakta, tabanına paralel bir düzlemle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değeri nedir?

8. $f(x) = x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x$ fonksiyonunun $(0, 2)$ aralığında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

EK 3. Matematiksel İspat Yapma İle İlgili Görüş Anketi

MATEMATİKSEL İSPAT YAPMA İLE İLGİLİ GÖRÜŞ ANKETİ

Bu anket, siz değerli öğrencilerimizin matematiksel ispat yapma ile ilgili görüşlerini belirlemek amacı ile hazırlanmıştır. Elde edilen bilgiler, öğrencilerin ispat yapabilme becerileri ve ispata yönelik tutumları hakkında yapılan çalışmalarda kullanılacaktır. Sizlerin vereceği samimi cevaplar, güvenilirliği yüksek, nitelikli bir araştırma için çok önemlidir. İlgi ve katılımınız için çok teşekkür ediyorum.

Kübra YILMAZ

1. Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor? Açıklayınız.

2. Matematiksel ispatın önemi nedir? Açıklayınız.

3. Matematiksel ispatın amacı nedir?
4. Başarılı ve başarısız olduğunuz bir ispatı düşündüğünüzde bu ispatın özellikleri nelerdir?
5. Bir ispatın doğruluğunu değerlendirirken genelde nasıl bir yaklaşım izlersiniz?

EK 4. Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi Puanlama Anahtarı (Ön Test)

MATEMATİKSEL BİLGİ VE BECERİ TESTİ

PUANLAMA ANAHTARI (Ön Test)

① $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun ortalama değerini hesaplayınız.

CEVAP: $f'(x_0) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} \Rightarrow 2x_0 + 2 = \frac{8 - (-1)}{3}$

$2x_0 + 2 = 3 \Rightarrow 2x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ olur.

(25)

Fonksiyonun ortalama değeri 3, x_0 noktası da $\frac{1}{2} \in [-1, 2]$ 'dir.

② $x^3 + x^2 - 1 = 0$ denkleminin 0 ile 1 arasında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

CEVAP: $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında süreklidir.

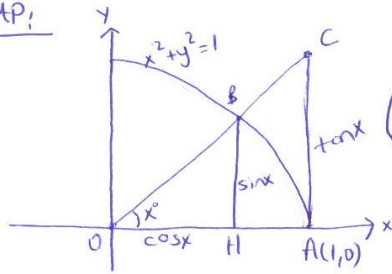
$f(0) = -1 < 0$
 $f(1) = 1 > 0$ olup Bolzano Teoremi'ne göre $f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

(15)

Bu durumda $c^3 + c^2 - 1 = 0$ olur. Bu, c nin bir kök olduğunu gösterir. (10)

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

CEVAP:



Burada $0 < x < \frac{\pi}{2}$ dir.

$\text{Alan}(\triangle BOH) < \text{Alan}(\text{BOA dilimi}) < \text{Alan}(\triangle COA)$ old.

$\frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \sin x < \frac{x}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$

(5)

olup,

$\frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x < \frac{1}{2} \cdot x < \frac{1}{2} \cdot \tan x$ yazılır. Bu eşitsizlik 2 ile çarpılıp

$\sin x$ ile bölünürse, $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ bulunur. (5)

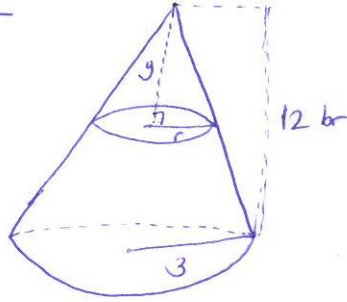
$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$ olduğundan Sandviç Teoremi'nden $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ olur. (5)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1$ olacağından $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ bulunur.

(5)

(4) Taban yarıçapı 3 br, yüksekliği 12 br olan bir dairesel dik koni tepesinden y br uzakta, tabanına paralel bir düzlemle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değeri nedir?

CEVAP:



Benzerlikten;

$$\frac{r}{3} = \frac{y}{12} \Rightarrow r = \frac{y}{4} \text{ olur.}$$

(5)

$0 \leq y \leq 12$ olmak üzere kesitin alanı,

$$A(y) = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \pi y^2 \text{ olur. Ortalama Alan, (10)}$$

$$\bar{A} = \frac{1}{12-0} \int_0^{12} A(y) \cdot dy = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot \int_0^{12} y^2 \cdot dy$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^{12} = 3\pi \text{ bulunur. (10)}$$

EK 5. Matematiksel Bilgi ve Beceri Testi Puanlama Anahtarı (Son Test)

MATEMATİKSEL BİLGİ VE BECERİ TESTİ

PUANLAMA ANAHTARI (son test)

- ① $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun ortalama değerini hesaplayınız.

CEVAP: $f'(x_0) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} \Rightarrow 2x_0 + 2 = \frac{8 - (-1)}{3}$

$2x_0 + 2 = 3 \Rightarrow 2x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ olur.

(20)

Buradan fonksiyonun ortalama değeri 3, x_0 noktası da $\frac{1}{2} \in [-1, 2]$ dir.

- ② $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ denkleminin 0 ile 3 arasında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

CEVAP: $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

$f(0) = -4 < 0$

$f(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^2 - 4 = 50 > 0$

$f(0)$ ile $f(3)$ zıt işaretli olduğundan

Bolzano Teoremi'ne göre $f(c) = 0$ olacak

şekilde en az bir $c \in [0, 3]$ vardır.

(10)

$c^4 - 3c^2 - 4 = 0$ ve $c^2 = a$ denilirse,

$\begin{matrix} a^2 - 3a - 4 = 0 \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ a \quad \quad -4 \end{matrix}$ olup denklemin kökleri $a = 4$ ve $a = -1$ bulunur.

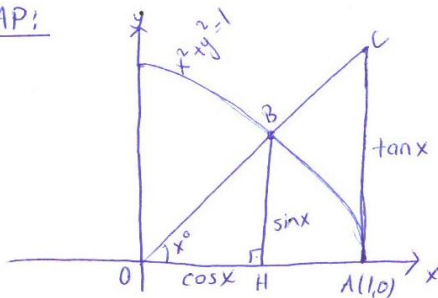
$a = c^2$ olup buradan $c^2 = 4$ ve $c^2 = -1$ olur. $c^2 \neq -1$ olacağından

$c^2 = 4 \Rightarrow c = \pm 2$ olur. $c = 2$ kökü 0 ile 3 arasında bir köktür.

(10)

- ③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

CEVAP:



(4)

Burada $0 < x < \frac{\pi}{2}$ dir.

$\Delta(BOH) < \Delta(BOA \text{ dilimi}) < \Delta(COA)$

$\frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x < \frac{x}{360} \cdot \pi^2 < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$

$\frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x < \frac{1}{2} \cdot x < \frac{1}{2} \cdot \tan x$ yazılır.

(4)

Bu eşitsizlik 2 ile çarpılıp $\sin x$ ile bölünürse, $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ bulunur. (4)

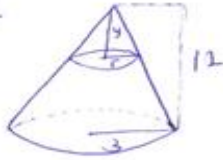
Limit alınırsa $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ olduğundan Sandviç Teoremi'nden

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ bulunur. (4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ olduğundan } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ olur. (4)}$$

(4) Taban yarıçapı 3 br, yüksekliği 12 br olan bir dairesel dik koni tepesinden y br uzaktaki, tabanına paralel bir düzlemlle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değeri nedir?

CEVAP:



Benzerlikten $\frac{y}{12} = \frac{r}{3} \Rightarrow r = \frac{y}{4}$ olur. (7)

$0 \leq y \leq 12$ olmak üzere kesitin alanı;

$$A(y) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot y^2 \text{ olur. (7)}$$

Ortalama Alan;

$$\bar{A} = \frac{1}{12-0} \int_0^{12} A(y) \cdot dy = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} \int_0^{12} y^2 \cdot dy = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^{12} = 3\pi \text{ bulunur. (6)}$$

(5) $f(x) = x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x$ fonksiyonunun $(0,2)$ aralığında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

CEVAP: $f(0) = 0$

$$f(2) = 2^4 - 9 \cdot 2^3 + 26 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 = 0$$

$f(0) = f(2) = 0$ olduğundan Rolle Teoremi'ne göre $f'(c) = 0$

olacak şekilde en az bir c noktası vardır. (7)

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x$$

$$f'(x) = 4x^3 - 27x^2 + 52x - 24$$

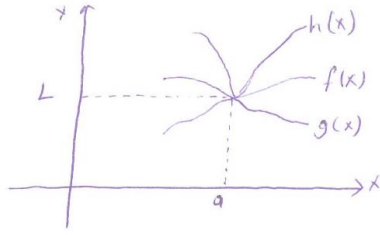
$$f'(c) = 4c^3 - 27c^2 + 52c - 24 = 0 \text{ olacak şekilde bir } c \in (0,2) \text{ vardır. (6)}$$

EK 6. Örnek Etkinlik

"Sandviç Teoremi: a 'nın bir komşuluğunda, a dan farklı her x için $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ ise $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dir."

Teoreminin ispatını yapalım.

Önce bu teorem ifadesine ait grafik modeli yani matematiksel modeli çizelim.



Şimdi teoremin ispatını yapalım.

İSPAT: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle.

ki $|x - a| < \delta$ için,

$|g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{4}$ ve $|h(x) - L| < \frac{\varepsilon}{4}$ kalır. Aynı x 'ler için,

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |(h(x) - g(x))| = |h(x) - L + L - g(x)| \\ &\leq |h(x) - L| + |g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \text{ olur. Buradan,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |f(x) - g(x) + g(x) - L| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ olur ki} \end{aligned}$$

bu sayede ispat tamamlanmış olur.

ÖRNEK: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos n}{n^2 + 1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $-1 \leq \cos n \leq 1$ (Buradaki n ile çarpıp $n^2 + 1$ ile bölecek.)

$$-n \leq n \cdot \cos n \leq n$$

$$\frac{-n}{n^2 + 1} \leq \frac{n \cdot \cos n}{n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^2 + 1} \text{ olup,}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0$ olduğundan Sandviç Teoremi'nden dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos n}{n^2 + 1} = 0 \text{ olur.}$$

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Erzurum’da doğan Kübra YILMAZ, ilk ve orta öğrenimini Erzurum/Merkez’de tamamladı. Lisans eğitimini Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde tamamlayarak 2012 yılında mezun oldu. 2012 yılında Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalında yüksek lisansa başladı. 2013 yılında Erzurum Pasinler Ortaokuluna matematik öğretmeni olarak atandı ve halen bu göreve devam etmektedir.