ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ÇİFT DİZİLERİN ALTDİZİLERİNİN TOPLANABİLME ÖZELLİKLERİ

Emre TAŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2015

TEZ ONAYI

Emre TAŞ tarafından hazırlanan " **Çift Dizilerin Altdizilerinin Toplanabilme Özellikleri** " adlı tez çalışması 08/06/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Cihan ORHAN

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Oktay DUMAN
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Cihan ORHAN
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Elgiz BAYRAM
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Gülen TUNCA BAŞCANBAZ
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim Demir
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

08/06/2015

Emre TAŞ

ÖZET

Doktora Tezi

ÇİFT DİZİLERİN ALTDİZİLERİNİN TOPLANABİLME ÖZELLİKLERİ

Emre TAŞ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Cihan ORHAN

Bu tez altı bölümden oluşmuştur.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, alışılmış dizilerin toplanabilmesine ilişkin temel tanım ve teoremler verilip iki boyutlu q-Cesàro matrislerinin Buck-Pollard özelliği incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, çift dizilerin toplanabilmesine ilişkin temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, çift diziler uzayında dört boyutlu Cesàro matrisinin ve dört boyutlu q-Cesàro matrislerinin Buck-Pollard özelliği incelenmiştir.

Beşinci bölümde, dört boyutlu bir toplanabilme matrisinin Borel özelliğine ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir.

Son bölümde ise elde edilen sonuçların analizi yapılmıştır.

Haziran 2015, 46 sayfa

Anahtar Kelimeler: Çift dizi, Pringsheim yakınsaklık, Buck-Pollard özelliği, Borel özelliği

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SUMMABILITY PROPERTIES OF SUBSEQUENCES OF DOUBLE SEQUENCES

Emre TAŞ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Cihan ORHAN

This thesis consists of six chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some definitions and theorems concerning the summability of ordinary sequences have been recalled. Then the Buck-Pollard property of two dimensional q-Cesàro matrices has been examined.

In the third chapter, some definitions and theorems concerning the summability of double sequences have been given.

In the fourth chapter, the Buck-Pollard property for four dimensional Cesàro matrix and four dimensional q-Cesàro matrices has been studied in the space of double sequence space.

In the fifth chapter, some results concerning the Borel property of a four dimensional matrix have been considered.

Finally, the last chapter is devoted to the analysis of the results obtained.

June 2015, 46 pages

Key Words: Double sequence, Pringsheim convergence, the Buck-Pollard property, the Borel property

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren, araştırmalarımın her aşamasında engin bilgilerini benden hiçbir zaman esirgemeyen ve matematiksel düşünme yeteneğimi geliştirmeme yardımcı olan danışman Hocam Sayın Prof. Dr. Cihan ORHAN' a haftalık seminerlerimiz boyunca benimle birlikte olan arkadaşlarıma ve özellikle lisans ve lisansüstü eğitimim boyunca maddi manevi desteğini esirgemeyen çok değerli arkadaşlarım Tuğba YURDAKADİM, Mehmet ÜNVER, İlknur SAKAOĞLU, Nilay ŞAHİN BAYRAM' a ve hayatım boyunca yanımda olduğu gibi çalışmalarım süresince de fedakarlıklar göstererek beni destekleyen aileme ve eşime en içten duygularımla teşekkür ederim.

Bu tez "TÜBİTAK-2211 Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir.

Emre TAŞ
Ankara, Haziran 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$(C,1)$	İki boyutlu Cesàro matrisi
$(C,1,1)$	Dört boyutlu Cesàro matrisi
C_q	q-Cesàro matrisleri
$(C_q,1,1)$	Dört boyutlu q-Cesàro matrisleri
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
l_∞	Reel terimli sınırlı diziler uzayı
$l_\infty^{(2)}$	Sınırlı çift diziler uzayı
$\mathbf{x}$	Çift dizi
c_A	İki boyutlu A matrisinin toplanabilirlik alanı
$c_A^{(2)}$	Dört boyutlu A matrisinin toplanabilirlik alanı
$\mathcal{A}\mathbf{x}$	$\mathbf{x}$ dizisinin $\mathcal{A}$-dönüşüm dizisi $\left(\sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{nm}\right)_{n,m}$
$\mathcal{A}(\mathbf{x})$	$\mathcal{A}\mathbf{x}$ dizisinin p-limiti
$p-\lim$	Pringsheim limit
P	Olasılık ölçüsü
E	Beklenen değer
$s(\mathbf{x})$	$\mathbf{x}$ elemanına karşılık gelen çift altdizi
r_{jk}	Çift diziler için Rademacher fonksiyonu
χ_D	D kümesinin karakteristik dizisi
D^c	D kümesinin tümleyeni

1. GİRİŞ

Dizilerin yakınsaklığının incelenmesi matematik analizde önemli bir yer tutmaktadır. Toplanabilme teorisi genellikle alışılmış seriler ve diziler için çalışılmıştır ve bunlar için bir çok yakınsaklık metotları tanımlanmıştır. Bunlardan en ilgi çekici olanları matris toplanabilme ve özellikle de Cesàro toplanabilme metodudur.

Bilindiği gibi bir dizi yakınsak ise her altdizisi de yakınsaktır ve bunun karşıtı da doğrudur. Bu düşünceden yola çıkarak 1943 yılında Buck ve Pollard verilen bir dizinin altdizileri ile $(0, 1]$ aralığı arasında birebir bir eşleme kurup " her altdizi" kavramı yerine "hemen her altdizi" kavramını alarak verilen bir dizinin Cesàro toplanabilmesi ile altdizilerinin Cesàro toplanabilmesi arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Diğer taraftan Tsuchikura, 1950 yılında Cesàro toplanabilen bir dizinin hemen her altdizisinin Cesàro toplanabilmesi için Buck ve Pollard' ın koşulundan farklı bir koşul vermiştir. Ayrıca Keogh ve Petersen(1961) benzer düşünceleri Riesz ortalama matrisi için genelleştirmiştir. Bununla birlikte Petersen(1960) hemen hemen yakınsaklık için Buck-Pollard özelliğini incelemiştir. Daha sonra Miller(1982) verilen bir dizinin regüler bir A matrisi ile toplanabilen altdizilerin oluşturduğu kümenin Lebesgue ölçüsünü incelemiştir. Miller(1995) alışılmış dizilerin istatiksel yakınsaklığını altdizilerin istatistiksel yakınsaklığı yardımıyla karakterize etmiştir. Miller ve Orhan(2001) verilen bir dizinin hemen hemen yakınsaklığı ve istatistiksel yakınsaklığı ile sırasıyla altdizilerinin hemen hemen yakınsaklığı ve istatistiksel yakınsaklığı arasındaki bağlantıyı Lebesgue ölçüsü açısından incelemiştir. Ayrıca Khan ve Orhan(2010) bir dizinin A-istatistiksel yakınsaklığını Lebesgue ölçüsü anlamında hemen her altdizisinin A-istatistiksel yakınsaklığı yardımıyla karakterize etmiştir.

Terimleri 0 ve 1' lerden oluşan dizilerin toplanabilmesi de toplanabilme teorisinin önemli bir problemidir. Altdizilerin toplanabilmesine paralel olarak terimleri 0 ve 1' lerden oluşan dizilerin toplanabilmesi de yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Bilindiği gibi regüler bir matrisin toplayamayacağı terimleri 0 ve 1' lerden oluşan en az bir dizi vardır. 1909 yılında Borel, terimleri 0 ve 1' lerden oluşan dizilerin hemen hepsinin $\frac{1}{2}$ değerine Cesàro toplanabildiğini göstermiştir. 1945 yılında Hill, terimleri 0 ve 1' lerden oluşan tüm dizilerin kümesi ile $(0, 1]$ aralığı arasında birebir bir eşleme kurarak regüler A toplanabilme matrisleri için Borel' in sonucunu incelemiştir. Terimleri 0 ve 1' lerden oluşan dizilerin hemen hepsi $\frac{1}{2}$ değerine A-toplanabilir ise A matrisi Borel özelliğine sahiptir denir. Ayrıca Hill, 1951 ve 1954 yıllarındaki çalışmalarında bir matrisin Borel özelliğine sahip olabilmesi için gerek olduğu halde yeter olmayan, ayrıca yeter olduğu halde gerek olmayan şartlar vermiştir. Bununla birlikte Parameswaran(1961) bir matrisin Borel özelliğine sahip olmasına ilişkin benzer sonuçlar vermiştir. Ayrıca Garreau(1951) bir matrisin Borel özelliğine sahip olması için Hill' in verdiği bir gerek koşulun yeter koşul olmadığına ilişkin bir örnek vermiştir. Matris toplanabilme metodu olmayan toplanabilme metodlarının da Borel özelliğine sahip olup olmadığı da incelenmiştir. Bu bağlamda Connor(1990) terimleri 0 ve 1' lerden oluşan dizilerin hemen hiçbirisinin Lorentz(1948) anlamında hemen hemen yakınsak olmadığını göstermiştir.

Çift indisli dizilerde çalışmak alışılmış dizilere göre daha karmaşıktır. Çift diziler için çeşitli altdizi tanımları mevcuttur (Patterson 1999), (Crnjac, Čunjalo ve Miller 2004), (Unver 2013). Diğer yandan 2004 yılında Miller ve arkadaşları tarafından çift diziler için yeni bir altdizi kavramı verilmiştir. Bu tanım yardımıyla çift dizilerin istatistiksel yakınsaklığı için hemen her altdizisinin istatistiksel yakınsaklığını kullanarak bir karakterizasyon elde edilmiştir. Ayrıca Borel' in sonucuna paralel olarak terimleri 0 ve 1' lerden oluşan çift dizilerin hemen hepsinin $\frac{1}{2}$ değerine dört boyutlu Cesàro toplanabildiğini göstermişlerdir.

Bu tezde ise ilk olarak alışılmış diziler uzayında q-Cesàro matrisinin Buck-Pollard özelliği incelenecektir. Bu bağlamda alışılmış sınırlı dizilerin q-Cesàro toplanabilmesi için bir karakterizasyon verilecektir. Çift dizilerin matris toplanabilmesinde dört boyutlu sonsuz matrisler kullanılmaktadır. Burada dört boyutlu Cesàro ve dört boyutlu q-Cesàro matrislerinin Buck-Pollard özelliği de incelenecektir.

Diğer taraftan dört boyutlu toplanabilme matrislerinin Borel özelliğine ilişkin gerek şart olup yeter şart olmayan, ayrıca yeter şart olup gerek şart olmayan bazı sonuçlar verilecektir.

2. İKİ BOYUTLU Q-CESÀRO MATRİSLERİNİN BUCK-POLLARD ÖZELLİĞİ

2.1 Giriş

Bir dizinin yakınsaklığı toplanabilme teorisinin temelini oluşturmaktadır. Bilindiği gibi bir dizinin yakınsaklığı ve toplanabilmesi arasında kuvvetli bir ilişki vardır. Buck ve Pollard, 1943 yılında verilen bir dizinin altdizileri ile $(0, 1]$ aralığı arasında *birebir* bir eşleme kurup " her altdizi" kavramı yerine "hemen her altdizi" kavramını alarak verilen bir dizinin yakınsaklığı ve $(C, 1)$ toplanabilmesi ile sırasıyla yakınsak altdiziler ve $(C, 1)$ toplanabilen altdizilerden oluşan kümelerin Lebesgue ölçüsü arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Buck ve Pollard, " Sınırlı bir (s_n) dizisinin Cesàro toplanabilmesi için gerek ve yeter koşul hemen her altdizisinin Cesàro toplanabilmesi" olduğunu göstermiştir. Bu durumda Cesàro matrisi Buck-Pollard özelliğine sahiptir denir. Bu bölümde iki boyutlu q-Cesàro matrislerinin Buck-Pollard özelliği incelenecektir.

Bu amaçla ilk olarak alışılmış diziler için bazı temel tanım ve kavramlardan söz edelim.

Bu tez boyunca $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ doğal sayılar kümesini gösterecektir ve tez boyunca reel terimli $x = (x_k)$ dizisi alışılmış dizi ya da sadece "dizi" olarak adlandırılacaktır.

Tanım 2.1 ω, reel ya da kompleks terimli tüm dizilerin uzayı ve $E \subseteq \omega$ alt vektör uzayı olmak üzere E uzayına bir dizi uzayı denir. Bir E dizi uzayından reel veya kompleks cisme tanımlı lineer bir f fonksiyoneline toplanabilme metodu denir. Eğer E yakınsak diziler uzayını içeriyor ve $\lim x = L$ olduğunda $f(x) = L$ oluyorsa f fonksiyoneline regüler toplanabilme metodu denir.

Tanım 2.2 $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli sonsuz bir matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise

$$(Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

olmak üzere $Ax := \{(Ax)_n\}$ dizisine x dizisinin A dönüşüm dizisi denir (Wilansky 2000).

$$\omega_A := \{x \in \omega : \{(Ax)_n\} \ \textit{dizisi mevcut}\}$$

ve

$$c_A := \{x \in \omega_A : \{(Ax)_n\} \ \textit{dizisi yakınsak}\}$$

kümelerini tanımlayalım. Eğer $f : c_A \to \mathbb{K}$ fonksiyonelini $f(x) = \lim_n (Ax)_n$ şeklinde tanımlarsak f bir toplanabilme metodudur. Eğer $\lim_n (Ax)_n = L$ ise x dizisi L değerine $A - toplanabilirdir$ denir. Eğer A matrisi keyfi yakınsak bir diziyi, limitini de koruyarak yakınsak bir diziye dönüştürüyor ise A matrisine regüler matris denir. Regüler matrisler aşağıdaki teorem ile karakterize edilirler.

Teorem 2.1 (Silverman-Toeplitz) Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul;

(i) $||A|| := \sup_{n} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ (her k için)

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

olmasıdır (Boos 2000).

Örneğin

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & , \quad 1 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan birinci mertebeden $(C, 1) = (c_{nk})$ Cesàro matrisi regülerdir.

Şimdi de bu bölümde kullanacağımız iki boyutlu q-Cesàro matrisini hatırlatalım.

$C_q = (c_{nk})$ matrisini $0 < q < \infty$ olmak üzere

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^q} & , \quad 1 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmaktadır (Rhaly 1989). Bu matrise iki boyutlu q-Cesàro matrisi denir ve C_q ile gösterilir. Bu matris $q \neq 1$ durumunda regüler bir matris değildir.

Diğer taraftan verilen bir dizinin altdizileri ile $(0, 1]$ aralığını *birebir* eşlememize yardımcı olan ikili açılım tanımını verelim.

Tanım 2.3 $a_k \in \{0, 1\}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$$

serisinin toplamına ikili açılım denir ve $0, a_1 a_2 a_3 ...$ biçiminde gösterilir.

Her $t \in [0, 1]$ noktası $t = 0, a_1 a_2 a_3 ...$ biçiminde ikili açılıma sahiptir. Bazı noktalara iki farklı ikili açılım karşılık gelir. Örneğin

$$\frac{1}{2} = 0, 0111... \qquad \text{ve} \qquad \frac{1}{2} = 0, 1000...$$

biçiminde ifade edilebilir. Daha genel olarak $h = 1, 3, ..., 2^m - 1$ olmak üzere $\frac{h}{2^m}$ formundaki noktalara iki farklı ikili açılım karşılık gelir (Nathanson 1964). Böyle bir durumda sonsuz çoklukta 1 içeren ikili açılımı tercih edeceğiz. İkili açılımlar, $(0, 1]$ aralığı ile bir dizinin altdizilerini eşlememizde büyük öneme sahiptir.

Şimdi de $(0,1]$ aralığı ile verilen bir dizinin altdizileri arasında *birebir* bir eşlemeyi nasıl yapacağımızı ifade edelim. Keyfi bir (s_n) dizisini gözönüne alalım. Aşağıdaki gibi $(0,1]$ aralığı ile onun altdizileri arasında *birebir* bir dönüşüm elde edebiliriz. $t = 0,a_1a_2a_3...$ ile aralığın bir t noktasının sonsuz ikili açılımını gözönüne alalım. Buna göre altdiziyi şöyle seçeriz: Açılımdaki $a_j = 1$ ise s_j terimini alalım ve $a_j = 0$ ise s_j terimini atalım. Karşıt önerme açıktır. Örneğin $(s_{k_n}) = (s_2, s_3, s_4, ...)$ altdizisini gözönüne alalım. Bu taktirde bu altdiziye karşılık gelen ikili açılım
$\frac{1}{2} = 0,0111...$ olur.

Şimdi Lebesgue ölçüsü anlamında (s_n) dizisinin altdizileri için "*hemen hepsi*" veya "*hemen hiçbiri*" kavramlarını kullanabiliriz. (s_n) dizisinin altdizilerine karşılık gelen ikili açılımların oluşturduğu noktaların kümesinin Lebesgue ölçüsü 1 ise altdizilerinin "*hemen hepsi*" kavramını ve benzer şekilde bu kümenin ölçüsü 0 ise "*hemen hiçbiri*" kavramını kullanacağız.

Tanım 2.4 $n = 1,2,3,...$ ve $0 \le t \le 1$ için R_n Rademacher fonksiyonu

$$R_n(t) = \begin{cases} (-1)^{k+1} & , \quad \frac{k}{2^n} < t < \frac{k+1}{2^n} \quad , \quad k = 0,1,...,2^n - 1 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Aşağıda Rademacher fonksiyonunun bazı özelliklerini verelim.

(i) D^* , $(0,1]$ aralığından $\frac{h}{2^m}$ biçimindeki bütün noktaların sayılabilir kümesini çıkardığımızda geriye kalan küme olsun. Bu taktirde her $t = 0,a_1a_2a_3... \in D^*$ için $a_k = \frac{1+R_k(t)}{2}$, $k = 1,2,...$ olur.

(ii) $$\int_0^1 R_j(t)\, R_k(t)\, dt = \begin{cases} 0 & , \quad j \neq k \\ 1 & , \quad j = k \end{cases}$$

olduğu biliniyor. Rademacher fonksiyonunun diğer özellikleri (Hill 1945) , (Kacmarz ve Steinhaus 1935) ve (Knopp 1931)' de bulunabilir.

Tanım 2.5 $S \subset (0,1)$ ve $t = 0,a_1a_2a_3...$ olmak üzere S kümesinin bir t elemanının sonsuz bir ikili açılımı olsun. Bu durumda a_i terimlerinin sonlu sayıda değişmesiyle elde edilen eleman da S kümesine ait ise S kümesine homojen küme adı verilir (Visser 1938).

Homojen bir küme 0 veya 1 ölçülüdür (Visser 1938).

Lemma 2.1 S kümesinin Lebesgue ölçüsü 1 olsun. Bu taktirde S , ölçüsü 1 olan ve $t \in E$ ise $1 - t \in E$ koşulunu sağlayan bir E altkümesine sahiptir (Buck ve Pollard 1943).

Şimdi teoremlerimizin ispatında büyük öneme sahip olan Kronecker lemmasını hatırlatalım.

Lemma 2.2 (Kronecker Lemması) (x_n) reel terimli bir dizi , her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ ve $a_n \nearrow \infty$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{a_n} \text{ serisi yakınsak ise } \frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{n} x_j \to 0 \quad , \quad (n \to \infty)$$

gerçeklenir (Knopp 1931).

Lemma 2.3 $\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2$ serisinin yakınsak veya ıraksak olmasına göre $\sum_{k=1}^{\infty} s_k R_k(t)$ serisi sırasıyla ölçüsü 1 veya 0 olan bir küme üzerinde yakınsaktır (Buck ve Pollard 1943).

2.2 Altdizilerin q-Cesàro Toplanabilmesi

Orijinal sonuçlarımızın ilk kısmını içeren bu kısımda Buck ve Pollard(1943) tarafından $(C, 1)$ matrisi için verilen sonuçlardan esinlenerek iki boyutlu q-Cesàro matrisleri için benzer sonuçlar verilecektir. Diğer bir ifade ile verilen bir dizinin q-Cesàro toplanabilmesi ile onun altdizilerinin q-Cesàro toplanabilmesi arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. Bu bağlamda q-Cesàro toplanabilir bir dizinin hemen her altdizisinin q-Cesàro toplanabilmesi için bir yeter koşul vereceğiz.

Bu amaçla ihtiyaç duyacağımız bazı yardımcı sonuçları verelim.

Lemma 2.4 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k^2}{k^{2q}}$ serisi yakınsak olsun. Bu taktirde hemen her $t \in [0, 1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} \sum_{k=1}^{n} s_k R_k(t) = 0 \tag{2.1}$$

gerçeklenir.

İspat. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k^2}{k^{2q}}$ serisi yakınsak ise Lemma 2.3' den hemen her $t \in [0, 1]$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k R_k(t)}{k^q}$ serisi yakınsaktır. Diğer taraftan Lemma 2.2' de $a_k = k^q$ alınırsa hemen her t için

$$\frac{1}{n^q} \sum_{k=1}^{n} s_k R_k(t) \to 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 2.5

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} \sum_{k=1}^{n} s_k R_k(t) = L(t) \tag{2.2}$$

limiti hemen her yerde mevcut olsun. Bu taktirde hemen her yerde $L(t) = 0$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2q}} \sum_{k=1}^{n} s_k^2 = 0 \tag{2.3}$$

gerçeklenir.

İspat. Egorov teoreminden (2.2) ifadesi pozitif ölçülü bir A kümesi üzerinde düzgün yakınsak olmak zorundadır. Böylece her $t \in A$ için

$$|L(t)| \leq M$$

olacak biçimde bir $M > 0$ vardır. Bununla birlikte bu eşitsizliği sağlayan elemanların kümesi homojendir. Dolayısıyla homojen bir küme 0 veya 1 ölçülü olduğundan son eşitsizliği sağlayan noktaların kümesi 1 ölçülü olup $L(t)$, hemen her yerde sınırlıdır. Açık bir şekilde $L(t)$ integrallenebilirdir. O halde

$$\int_0^1 L(t)\, dt = a \tag{2.4}$$

olsun. Şimdi bir $\epsilon > 0$ sayısı seçelim ve sırasıyla

$$\begin{aligned} L(t) - a &> \epsilon \\ L(t) - a &< \epsilon \\ |L(t) - a| &\leq \epsilon \end{aligned}$$

koşullarını sağlayan I_1 , I_2 , I_3 kümelerini gözönüne alalım. Bu kümeler homojendir. Bunların birleşiminin ölçüsü 1 olduğundan bunların en az birinin ölçüsü 1 olmalıdır. Eğer I_1 ya da I_2 kümesinin ölçüsü 1 ise (2.4) gerçeklenmez. Böylece hemen her yerde $|L(t) - a| \leq \epsilon$ olur. O halde ölçüsü 1 olan bir B kümesi üzerinde $L(t) = a$ gerçeklenir. Lemma 2.1' den B kümesinden t_0 ve $1 - t_0$ noktalarını seçebiliriz. (2.2)' den

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} \sum_{k=1}^{n} s_k R_k(t_0) = a$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^q} \sum_{k=1}^{n} s_k R_k(1 - t_0) = a$$

elde edilir. Bunları toplayıp $R_k(t_0) + R_k(1 - t_0) = 0$ olduğunu kullanırsak $a = 0$ bulunur ve (2.1) eşitliğini elde ederiz. Şimdi $S_{m,n}(t) = \sum_{k=m}^{n} s_k R_k(t)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} S_{m,n}^2(t) &= \sum_{j,k=m}^{n} s_j s_k R_j(t) R_k(t) \\ &= \sum_{k=m}^{n} s_k^2 + 2 \sum_{m\leq j<k\leq n} s_j s_k R_j(t) R_k(t) \end{aligned}$$

olur. Hemen her $t \in [0,1]$ için (2.1) sağlanırsa Egorov teoreminden pozitif ölçülü bir F kümesinde de düzgün olarak sağlanmalıdır. O halde

$$M = 2 \sum_{m \leq j < k \leq n} s_j s_k \int_F R_j(t) R_k(t) \, dt$$

olmak üzere

$$\int_F S_{m,n}^2(t) \, dt = \mu(F) \sum_{k=m}^{n} s_k^2 + M \tag{2.5}$$

gerçeklenir. $b_{jk} = \int_F R_j(t) R_k(t) \, dt$ olmak üzere Schwarz eşitsizliğinden

$$|M| \leq 2 \left(\sum_{m \leq j < k \leq n} s_j^2 s_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m \leq j < k \leq n} b_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

elde edilir.
$1 \leq j < k < \infty$ için $R_j(t) R_k(t)$ fonksiyonlarının $(0,1)$ aralığı üzerinde ortonormal olduğunu bu bölümün başında söylemiştik. O halde χ_F , F kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere Bessel eşitsizliğinden

$$\sum_{1 \leq j < k < \infty} b_{jk}^2 \leq \int_0^1 [\chi_F(t)]^2 \, dt = \mu(F)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yeterince büyük bir m değeri için

$$\left(\sum_{m \leq j < k < \infty} b_{jk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\mu(F)}{4}$$

olur. (2.6)' dan

$$|M| \leq \left(\sum_{j,k=m}^{n} s_j^2 s_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu(F)}{2} \leq \frac{\mu(F)}{2} \sum_{j=m}^{n} s_j^2$$

olur. Daha sonra (2.5)' den

$$\int_F S_{m,n}^2(t) \, dt \geq \frac{\mu(F)}{2} \sum_{j=m}^{n} s_j^2 \tag{2.7}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu sayede sabit bir m değeri için F kümesi üzerinde düzgün olarak

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{2q}} S_{m,n}^2(t) = 0$$

gerçeklenir. (2.7)' den

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{2q}} \sum_{j=m}^{n} s_j^2 = 0$$

elde ederiz ve böylece ispat tamamlanır. ■

Tanım 2.6 $A = (a_{nk})$ toplanabilme matrisi terimleri 0 ve 1' lerden oluşan dizilerin hemen hepsini $\frac{1}{2}$ değerine topluyor ise A matrisi Borel özelliğine sahiptir denir (Hill 1945).

Hill, bir matrisin Borel özelliğine sahip olması için aşağıdaki gerek koşulları vermiştir.

Lemma 2.6 $A = (a_{nk})$ toplanabilme matrisi Borel özelliğine sahip ise

(i) Her bir n için $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}$ anlamlı ve $n \to \infty$ için 1 değerine yakınsaktır,

(ii) Her bir n için $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^2 < \infty$,

(iii) Her bir k için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0$,

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^2 = 0$,

gerçeklenir (Hill 1951).

Lemma 2.7 $A = (a_{nk})$ keyfi bir toplanabilme matrisi, $\{s_k\}$, $s \neq 0$ değerine A-toplanabilir bir dizi ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^2 s_k^2 = o\left(\frac{1}{\log n}\right) \tag{2.8}$$

olsun. Bu durumda $\{s_k \alpha_k(t)\}$ dizilerinin hemen hepsi $\dfrac{s}{2}$ değerine A-toplanabilirdir. Burada $\alpha_k(t)$, $t \in [0,1]$ noktasının ikili açılımındaki k-inci terimdir (Hill 1954).

Lemma 2.8 Bir $A = (a_{nk})$ matrisi verilsin. Ayrıca

$$\text{her bir } n \text{ için} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \text{ serisi anlamlı ve } n \to \infty \text{ için 1 değerine yakınsak olsun}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^2 = o\left(\frac{1}{\log n}\right)$$

koşulları gerçeklensin. Diğer yandan $\{s_k\}$ dizisi, 0 değerine A-toplanabilir olsun. Eğer (2.8) koşulu gerçeklenirse $\{s_k \alpha_k(t)\}$ dizilerinin hemen hepsi 0 değerine A-toplanabilirdir (Hill 1954).

Aşağıdaki teoremlerde Buck ve Polard(1943)' ın $(C,1)$ matrisleri için elde ettiği sonuçların benzerleri iki boyutlu q-Cesàro matrisleri için verilecektir.

Teorem 2.2 $0 < q < \infty$ olmak üzere bir $s = (s_k)$ dizisi $L \neq 0$ değerine q-Cesàro toplanabilir ve

$$\frac{1}{n^{2q}} \sum_{k=1}^{n} s_k^2 = o\left(\frac{1}{\log n}\right)$$

ise s dizisinin hemen her altdizisi $2^{q-1}L$ değerine q-Cesàro toplanabilirdir.

İspat. (s_k) dizisinin hemen her altdizisinin q-Cesàro toplanabilmesi hemen her $t \in [0,1]$ için

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} s_k \frac{1}{2}\left[1+R_k(t)\right]}{\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left[1+R_k(t)\right]\right\}^q} \tag{2.9}$$

ifadesinin limitinin varlığına denktir. Bu ifade

$$\frac{\frac{1}{n^q}\sum_{k=1}^{n} s_k \frac{1}{2}\left[1+R_k(t)\right]}{\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left[1+R_k(t)\right]\right\}^q} \tag{2.10}$$

biçiminde tekrar yazılabilir. (2.10) kesrinin payının yakınsaklığı $\{s_k \alpha_k(t)\}$ dizisinin q-Cesàro toplanabilmesine denktir. Lemma 2.7 gereğince (2.10) ifadesinin payı $\dfrac{L}{2}$ değerine yakınsaktır. Diğer taraftan Cesàro matrisi Borel özelliğine sahip olduğundan (2.10) ifadesinin paydası $\frac{1}{2^q}$ değerine yakınsaktır. Dolayısıyla s dizisinin hemen her altdizisi $2^{q-1}L$ değerine q-Cesàro toplanabilirdir. ■

$L = 0$ durumunda $q \neq 1$ iken $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{nk} \neq 1$ olduğundan Lemma (2.8)' i kullanamayız. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 2.3 $0 < q < \infty$ olmak üzere bir $s = (s_k)$ dizisi 0 değerine q-Cesàro toplanabilir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k^2}{k^{2q}} < \infty$$

ise s dizisinin hemen her altdizisi 0 değerine q-Cesàro toplanabilirdir.

İspat. Daha önce de belirtildiği gibi (s_k) dizisinin hemen her altdizisinin q-Cesàro toplanabilmesi hemen her t için (2.9) ifadesinin hemen her t için yakınsamasına denktir. Böylece (2.9) ifadesinden

$$\frac{\frac{1}{2n^q}\sum_{k=1}^{n} s_k R_k(t) + \frac{1}{2n^q}\sum_{k=1}^{n} s_k}{\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left[1+R_k(t)\right]\right\}^q}$$

elde ederiz. Lemma 2.3' den $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k^2}{k^{2q}} < \infty$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k}{k^q} R_k(t)$ serisi 1ölçülü bir küme üzerinde yakınsaktır. Lemma 2.4 gereğince $\left\{\frac{1}{n^q}\sum_{k=1}^{n} s_k R_k(t)\right\}$ dizisi hemen her t için 0 değerine yakınsaktır. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 2.4 $0 < q < \infty$ olmak üzere bir $s = (s_k)$ dizisinin hemen her altdizisi q-Cesàro toplanabilir ise (s_k) dizisi bir L değerine q-Cesàro toplanabilirdir. Bu durumda altdizilerinin hemen hepsi $2^{q-1}L$ değerine q-Cesàro toplanabilirdir.

İspat. Hipotezden $n \to \infty$ için (2.9) ifadesi hemen her t için yakınsaktır. Lemma 2.4' den (2.9) ifadesinin paydası hemen her t için 1 değerine yakınsaktır. O halde

$$\rho_n(t) = \frac{1}{n^q} \sum_{k=1}^{n} s_k \frac{1}{2} \left[1 + R_k(t)\right] \tag{2.11}$$

ifadesi ölçüsü 1 olan bir M kümesi üzerinde yakınsaktır. Lemma 2.1' den M kümesine ait olan t_0 ve $1 - t_0$ noktalarını seçebiliriz. Dolayısıyla $R_k(t_0) + R_k(1 - t_0) = 0$ olduğunu da kullanarak

$$\rho_n(t_0) + \rho_n(1 - t_0) = \frac{1}{n^q} \sum_{k=1}^{n} s_k$$

bulunur. Diğer yandan $t_0 \in M$ ve $1 - t_0 \in M$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(t_0) = a$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(1 - t_0) = b$$

limitleri mevcuttur. Dolayısıyla (s_k) dizisi $L = a + b$ değerine q-Cesàro toplanabilirdir. Lemma 2.5' den hemen her t için $\frac{1}{n^q} \sum_{k=1}^{n} s_k R_k(t) \to 0$ gerçeklenir. Dolayısıyla (s_k) dizisinin hemen her altdizisi $2^{q-1}L$ değerine q-Cesàro toplanabilirdir.

■

Teorem 2.2, Teorem 2.3 ve Teorem 2.4 birlikte gözönüne alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1 $p > \frac{1}{2}$ olmak üzere sınırlı bir dizinin q-Cesàro toplanabilmesi için gerek ve yeter koşul hemen her altdizisinin q-Cesàro toplanabilmesidir.

Aşağıdaki teorem kendisi q-Cesàro toplanabilir bir dizi olmasına rağmen hemen her altdizisi q-Cesàro toplanamayan bir dizi örneği verilebilmesi için çok önemlidir.

Teorem 2.5 $0 < q < \infty$ olmak üzere bir $s = (s_k)$ dizisinin hemen her altdizisi q-Cesàro toplanabilir ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2q}} \sum_{k=1}^{n} s_k^2 = 0 \tag{2.12}$$

gerçeklenir.

İspat. (s_k) dizisinin hemen her altdizisi q-Cesàro toplanabilir ise Teorem 2.4' ün ispatında olduğu gibi hemen her yerde $\left\{ \dfrac{1}{n^q} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_k R_k(t) \right\} \to 0$ elde edilir. Lemma 2.5' den (2.12) gerçeklenir. ■

q-Cesàro toplanabilen fakat hemen hiçbir altdizisi q-Cesàro toplanamayan iki dizi örneği vereceğiz.

Örnek 2.1 $(s_k) = \left((-1)^k k\right)$ dizisini gözönüne alalım. $q > 1$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^q} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{q-1}}$$

serisi yakınsaktır. Lemma 2.2' den

$$\frac{1}{n^q} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k \to 0, \quad (n \to \infty)$$

elde edilir. Diğer taraftan $q = \dfrac{3}{2}$ alınırsa

$$\frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \to \frac{1}{3} \neq 0, \quad (n \to \infty)$$

bulunur. (s_k) dizisi sıfır değerine $C_{\frac{3}{2}}$-toplanabilirdir fakat Teorem 2.5 gereğince hemen hiçbir altdizisi $C_{\frac{3}{2}}$-toplanabilir değildir.

Şimdi de $0 < q < 1$ olacak biçimde bir örnek verelim.

Örnek 2.2 $(s_k) = \left((-1)^k \sqrt{k}\right)$ ve $q = \dfrac{3}{4}$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k^q} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{q-\frac{1}{2}}}$$

serisi yakınsaktır. Lemma 2.2' den (s_k) dizisi sıfır değerine $C_{\frac{3}{4}}$-toplanabilirdir. Ayrıca

$$\left\{ \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^{n} k \right\} = \left\{ \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

dizisi sıfıra yakınsak olmadığından Teorem 2.5 gereğince (s_k) dizisinin hemen hiçbir altdizisi $C_{\frac{3}{4}}$-toplanabilir değildir.

3. ÇİFT DİZİLER İÇİN TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çift (double) dizilerin toplanabilmesine ilişkin bazı tanım ve kavramlardan söz edilecektir. Tanım kümesi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olan fonksiyona "çift dizi" denir. Örneğin her j, k için $x_{jk} = jk^2$ ile tanımlı $\mathbf{x} = (x_{jk})$ bir "çift dizi" olup

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & \cdots \\ 2 & 8 & 18 & \cdots \\ 3 & 12 & 27 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.

Bir çift dizinin yakınsaklığı alışılmış dizilerin yakınsaklığına benzer olarak aşağıdaki gibi verilmektedir:

Tanım 3.1 $\mathbf{x} = (x_{jk})$ bir çift dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $j, k \geq N$ olduğunda $|x_{jk} - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı varsa $\mathbf{x}$ dizisi L sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır (p-yakınsak) denir ve $p - \lim \mathbf{x} = L$ ile gösterilir (Pringsheim 1898).

Aşağıdaki tanımda bir çift dizinin sınırlılığı verilmektedir.

Tanım 3.2 $\mathbf{x} = (x_{jk})$ bir çift dizi olsun. $\sup\limits_{j,k} |x_{jk}| < \infty$ ise $\mathbf{x}$ dizisi sınırlıdır denir. Tüm sınırlı çift dizilerin uzayı $l_\infty^{(2)}$ ile gösterilir.

Çok iyi bilinmektedir ki bir dizi yakınsak ise sınırlıdır. Ancak p-yakınsak bir çift dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz:

Örnek 3.1

$$x_{jk} := \begin{cases} k^2, & j = 1 \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı $\mathbf{x} = (x_{jk})$ çift dizisi sıfıra p-yakınsak olduğu halde sınırlı değildir.

Burada bir çift dizinin p-yakınsaklığı ile satır ve sütun dizilerinin yakınsaklığı arasında nasıl bir ilişki olduğu sorulabilir. Bunun için aşağıdaki iki örneği inceleyelim:

Örnek 3.2 $\mathbf{x} = (x_{jk})$ çift dizisini

$$x_{jk} := \frac{1}{2 + \min\{j, k\} + (-1)^{j+k}}$$

ile tanımlayalım. O halde $p - \lim\limits_{j,k} \mathbf{x} = 0$ olur. Ancak j_0 ve k_0 sabit olmak üzere ne $\{x_{j_0,k}\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi ne de $\{x_{j,k_0}\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi yakınsaktır.

Örnek 3.3 $\mathbf{x} = (x_{jk})$ çift dizisini

$$x_{jk} := \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak her sabit j_0 için $\{x_{j_0,k}\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi ve her sabit k_0 için $\{x_{j,k_0}\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi sıfıra yakınsak olduğu halde $\mathbf{x}$ dizisi p-yakınsak değildir.

p-yakınsak bir çift dizinin aynı zamanda satır ve sütunları da yakınsak ise bu diziye regüler olarak p-yakınsaktır denir (Hardy 1919). Regüler olarak p-yakınsak bir dizinin sınırlı olduğu açıktır. Ayrıca Hardy (1919), regüler olarak p-yakınsak bir dizinin p-limitinin ardışık (iterated) limitlerle hesaplanabildiğini göstermiştir. Yani $\mathbf{x}$ regüler olarak p-yakınsak bir dizi ise

$$p - \lim_{j,k} \mathbf{x} = \lim_{j} (\lim_{k} x_{jk}) = \lim_{k} (\lim_{j} x_{jk}) \tag{3.1}$$

gerçeklenir. Fakat burada regüler olarak p-yakınsaklık şartı kaldırılırsa (3.1) eşitliği her zaman gerçeklenmez.

Tanım 3.3 $x = (x_{jk})$ bir çift dizi olmak üzere $\sum_{j,k} x_{jk}$ toplamına bir çift seri denir. Eğer bu serinin kısmi toplamlar dizisi $\left\{ \left(\sum_{j=1,k=1}^{r,s} x_{jk} \right)_{r,s} \right\}$ p-yakınsak ise yani $p - \lim_{r,s} \sum_{j=1,k=1}^{r,s} x_{jk}$ limiti mevcutsa seri bu limit değerine Pringsheim anlamında yakınsaktır (p-yakınsak) denir (Bromwich 1942).

Alışılmış dizilerde dönüşüm dizisi ve matris toplanabilmesi tanımlarının benzeri çift diziler için de aşağıdaki gibi verilmektedir:

Tanım 3.4 $\mathcal{A} = (a_{jk}^{nm})$ dört boyutlu sonsuz bir matris ve $x = (x_{jk})$ bir çift dizi olmak üzere her $n\,, m$ için

$$(\mathcal{A}\mathbf{x})_{nm} := \sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{nm}$$

çift serisi p-yakınsak ise

$$\mathcal{A}\mathbf{x} := \left(\sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{nm} \right)_{n,m}$$

dizisine x dizisinin A-dönüşüm dizisi denir.

Aşağıda $\mathcal{A}\mathbf{x}$ dönüşüm dizisinin nasıl elde edildiği gösterilmiştir:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\mathbf{x} &= \begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_{11}^{11} & a_{12}^{11} & \cdots \\ a_{21}^{11} & a_{22}^{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}^{12} & a_{12}^{12} & \cdots \\ a_{21}^{12} & a_{22}^{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \cdots \\
\begin{pmatrix} a_{11}^{21} & a_{12}^{21} & \cdots \\ a_{21}^{21} & a_{22}^{21} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}^{22} & a_{12}^{22} & \cdots \\ a_{21}^{22} & a_{22}^{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{11} & \sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{12} & \cdots \\
\sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{21} & \sum_{j,k} x_{jk} a_{jk}^{22} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ayrıca dört boyutlu birim (identity) matris $I = (e_{jk}^{nm})$,

$$
e_{jk}^{nm} := \begin{cases} 1 & , \quad j = n \ ve \ k = m \\ 0 & , \quad di\breve{g}er \ durumlarda \end{cases}
$$

ile verilir ve aşağıdaki gösterime sahiptir:

$$
\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \cdots \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}.
$$

Eğer $\mathcal{A}\mathbf{x}$ çift dizisi bir L sayısına p-yakınsak ise $\mathbf{x}$ dizisi L sayısına $\mathcal{A}$-toplanabilirdir denir ve bu durum $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = L$ şeklinde ifade edilir. Tüm $\mathcal{A}$-toplanabilen çift dizilerin kümesine $\mathcal{A}$ matrisinin toplanabilirlik alanı denir ve bu küme $c_{\mathcal{A}}^{(2)}$ ile gösterilir.

Tanım 3.5 Sınırlı p-yakınsak bir çift diziyi kendi limitine toplayan dört boyutlu matrise RH-regüler matris denir.

Aşağıdaki teorem dört boyutlu bir matrisin RH-regülerliğini karakterize etmektedir.

Teorem 3.1 Dört boyutlu bir $\mathcal{A} = (a_{jk}^{nm})$ matrisinin RH-regüler olması için gerek ve yeter şart;
$RH_1 : p - \lim\limits_{n,m} a_{jk}^{nm} = 0$, her j, k
$RH_2 : p - \lim\limits_{n,m} \sum\limits_{j,k} a_{jk}^{nm} = 1$
$RH_3 : p - \lim\limits_{n,m} \sum\limits_{j} \left|a_{jk}^{nm}\right| = 0$, her k
$RH_4 : p - \lim\limits_{n,m} \sum\limits_{k} \left|a_{jk}^{nm}\right| = 0$, her j
$RH_5 : \sum\limits_{j,k} \left|a_{jk}^{nm}\right|$ serisi her n, m için p-yakınsak
$RH_6 :$ Her n, m için $\sum\limits_{j,k>N} \left|a_{jk}^{nm}\right| < M$ olacak biçimde N ve M sayılarının mevcut olmasıdır (Hamilton 1936).

Dört boyutlu sonsuz bir matris iki boyutlu sonsuz matrislerin bir çift dizisi gibi düşünülebilir. Bu bakış açısıyla bir $\mathcal{A} = (a_{jk}^{nm})$ dört boyutlu matrisi

$$a_{jk}^{nm} = \begin{pmatrix} (a_{jk}^{11}) & (a_{jk}^{12}) & \vdots \\ (a_{jk}^{21}) & (a_{jk}^{22}) & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.
$C = (c_{jk}^{nm})$ dört boyutlu matrisini

$$c_{jk}^{nm} = \begin{cases} \dfrac{1}{nm} & , \quad j \leq n \text{ } ve \text{ } k \leq m \\ 0 & , \quad di\breve{g}er \text{ } durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu matrise dört boyutlu Cesàro matrisi denir ve $(C, 1, 1)$ ile gösterilir. Bu matris RH-regüler dört boyutlu bir matristir.

4. DÖRT BOYUTLU MATRİSLER İÇİN BUCK-POLLARD ÖZELLİĞİ

4.1 Giriş

Bu bölümde çift dizilerin yakınsaklığı, Cesàro toplanabilmesi ve q-Cesàro toplanabilmesini altdizilerin sırasıyla yakınsaklığı, Cesàro toplanabilmesi ve q-Cesàro toplanabilmesi yardımıyla karakterize edeceğiz.

Çift diziler için çeşitli altdizi kavramları vardır. Bu bölümde Miller tipli altdizi kavramını kullanacağız. Bu amaçla ilk olarak Miller ve arkadaşları tarafından verilen ölçü kavramını hatırlatalım.

$$X := \{x = (x_{jk}) : x_{jk} \in \{0,1\}, \ j,k \in \mathbb{N}\}$$

biçiminde tanımlı kümeyi gözönüne alalım.

$\Re$, X kümesinin

$$\{x = (x_{jk}) \in X : \ x_{j_1k_1} = a_1, ..., x_{j_nk_n} = a_n\}; \ a_1, ..., a_n \in \{0,1\}, \ n \in \mathbb{N}$$

formundaki bütün altkümelerinin en küçük σ-cebiri olsun. X üzerinde

$$P(\{x = (x_{jk}) \in X : \ x_{j_1k_1} = a_1, ..., x_{j_nk_n} = a_n\}) = \frac{1}{2^n}$$

olacak biçimde birtek olasılık ölçüsü vardır (Crnjac, Čunjalo ve Miller 2004).

$s = (s_{jk})$ bir çift dizi olsun, $x = (x_{jk}) \in X$ olmak üzere s dizisinin x elemanına karşılık gelen altdizisi

$$s_{jk}(x) = \begin{cases} s_{jk} & , \quad x_{jk} = 1 \\ * & , \quad x_{jk} = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Crnjac, Čunjalo ve Miller 2004).

Tanım 4.1 $x \in X$ olmak üzere keyfi $\varepsilon > 0$ için her $n, m \geq N_\varepsilon$ olduğunda $\left| \frac{1}{nm} \sum_{\substack{j \leq n \\ k \leq m}} x_{jk} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ olacak biçimde en az bir N_ε doğal sayısı varsa yani x, $\frac{1}{2}$ değerine Cesàro toplanabiliyorsa x elemanı normaldir denir. X içindeki bütün normal elemanların kümesini η ile gösterelim.

$P(\eta) = 1$ olduğu bilinmektedir (Crnjac, Čunjalo ve Miller 2004). Çift indisli diziler için Rademacher fonksiyonları $(x_{jk}) \in X$ olmak üzere $r_{jk}(\mathbf{x}) = 2x_{jk} - 1$ biçiminde tanımlanmaktadır.

Kronecker lemmasının çift diziler için genişlemesi Móricz(1981) tarafından verilmiştir.

$$\begin{aligned} \Delta_{10}\lambda_{jk} &= \lambda_{j+1,k} - \lambda_{jk}, \\ \Delta_{01}\lambda_{jk} &= \lambda_{j,k+1} - \lambda_{jk}, \\ \Delta_{11}\lambda_{jk} &= \lambda_{j+1,k+1} - \lambda_{j+1,k} - \lambda_{j,k+1} + \lambda_{jk} \quad (j,k = 1,2,...) \end{aligned}$$

sonlu farklarını gözönüne alalım. Burada Kronecker lemmasının çift diziler için genişlemesi ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 4.1 (λ_{jk}) pozitif terimli çift dizisi $\lim\limits_{j,k\to\infty} \lambda_{jk} = \infty$ ve

$$\Delta_{10}\lambda_{jk} \geq 0, \quad \Delta_{01}\lambda_{jk} \geq 0, \text{ (j,k=1,2,...)}$$

$$\Delta_{11}\lambda_{jk} \text{ farkı sabit işaretli (j,k=1,2,...)}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \frac{u_{jk}}{\lambda_{jk}}$$

çift serisi kısıtlanmış anlamda yakınsak ise $\lim\limits_{n,m\to\infty} \dfrac{1}{\lambda_{nm}} \sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} u_{jk} = 0$ gerçeklenir (Móricz 1981).

4.2 Çift Dizilerin Pringsheim Yakınsaklığının Karakterizasyonu

Bilindiği gibi bir dizinin yakınsaklığı ve toplanabilmesi arasında kuvvetli bir ilişki vardır. Buna ilişkin ilk çalışmalar Agnew(1944) ve Buck(1943) tarafından yapılmıştır. Daha sonra Buck ve Pollard, $(0,1]$ aralığı ile verilen bir dizinin altdizileri arasında birebir bir eşleme kurarak verilen bir dizinin yakınsaklığını hemen her altdizisinin yakınsaklığı yardımıyla karakterize etmiştir.

Bu kısımda çift dizilerin p-yakınsaklığı için Buck ve Pollard tarafından verilen bir sonucun benzeri verilecektir.

Aşağıdaki teorem bir çift dizinin p-yakınsaklığını karakterize etmektedir.

Teorem 4.2 $\mathbf{s} = (s_{jk})$ dizisinin hemen her altdizisi bir L değerine p-yakınsak ise s dizisinin kendisi de aynı L değerine p-yakınsaktır.

İspat. $\mathbf{s} = (s_{jk})$ dizisinin hemen her altdizisi L değerine yakınsak, yani $C = \{\mathbf{x} \in X : \ s(\mathbf{x}) \to L\}$ olmak üzere $P(C) = 1$ olsun. Şimdi $\mathbf{x} = (x_{jk}) \in X$ verildiğinde $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_{jk})$ dizisini

$$\bar{x}_{jk} = \begin{cases} 0 & , \ x_{jk} = 1 \\ 1 & , \ x_{jk} = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım.
$Y = C \cap \eta$ ve $\overline{Y} = \{(\bar{x}_{jk}) : \ x_{jk} \in Y\}$ olsun. Dolayısıyla $\overline{Y} = \overline{C} \cap \eta$ elde ederiz. (x_{jk}) dizisini $(\bar{x}_{jk})$ dizisine götüren dönüşüm P ölçüsünü koruduğundan $P\left(\overline{Y}\right) = 1$ ve $P\left(Y \cap \overline{Y}\right) = 1$ elde ederiz. O halde $Y \cap \overline{Y}$, boş küme değildir. $\mathbf{x} = (x_{jk}) \in Y \cap \overline{Y}$ ise

$$\mathbf{x} \in C \ , \mathbf{x} \in \eta$$

ve

$$\bar{\mathbf{x}} \in C \ , \bar{\mathbf{x}} \in \eta$$

bulunur. $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in C$ olduğundan $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \eta$ olmak üzere $s(\mathbf{x}) \to L$ ve $s(\bar{\mathbf{x}}) \to L$ olur. Bu da $\mathbf{s} = (s_{jk})$ dizisinin L değerine p-yakınsaklığını verir. ∎

4.3 Dört Boyutlu Cesàro Matrisi İçin Buck-Pollard Özelliği

Bu kısımda verilen bir çift dizinin dört boyutlu Cesàro toplanabilmesi ile dizinin altdizilerinin dört boyutlu Cesàro toplanabilmesi arasındaki ilişki incelenecektir.

Bu amaçla ilk teoremimizi verelim.

Teorem 4.3 $\mathbf{s} = (s_{jk})$ dizisinin hemen her altdizisi bir L değerine $(C, 1, 1)$-toplanabilir ise s dizisinin kendisi de aynı L değerine $(C, 1, 1)$-toplanabilirdir.

İspat. $\mathbf{s} = (s_{jk})$ çift dizisinin hemen her altdizisi L değerine $(C, 1, 1)$-toplanabilir, yani $G = \{\mathbf{x} \in X : \ s(\mathbf{x}) \to L\,(C, 1, 1)\}$ olmak üzere $P(G) = 1$ olsun. Teorem 4.2' nin ispatına benzer şekilde $\mathbf{x} \in G \cap \eta$ ise $\overline{\mathbf{x}} \in \overline{G} \cap \eta$ elde ederiz. Dolayısıyla $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \eta$ olmak üzere

$$s(\mathbf{x}) \to L\,(C, 1, 1)$$

ve

$$s(\bar{\mathbf{x}}) \to L\,(C, 1, 1)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$p - \lim_{n,m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk} x_{jk}}{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} x_{jk}} = L$$

ve benzer şekilde

$$p - \lim_{n,m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk} \bar{x}_{jk}}{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} \bar{x}_{jk}} = L$$

olur. Ayrıca $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \eta$ olduğundan

$$p - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \sum_{j,k=1,1}^{n,m} x_{jk} = \frac{1}{2} \text{ ve } p - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{nm} \sum_{j,k=1,1}^{n,m} \bar{x}_{jk} = \frac{1}{2}$$

elde edilir.
Diğer taraftan (s_{jk}) çift dizisinin L değerine $(C, 1, 1)$-toplanabilmesi

$$\frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}}{nm} = \frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} x_{jk}}{nm} \frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk} x_{jk}}{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} x_{jk}} + \frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} \bar{x}_{jk}}{nm} \frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk} \bar{x}_{jk}}{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} \bar{x}_{jk}}$$

ifadesinin limitinin L olmasına denktir. Buradan

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}}{nm} = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} = L$$

elde edilir. Böylece (s_{jk}) dizisi L değerine $(C, 1, 1)$-toplanabilirdir. ■

Alışılmış diziler için Khintchine eşitsizliği Rademacher fonksiyonları yardımıyla aşağıdaki gibi verilmektedir.

Lemma 4.1 $t_n(x) = \sum_{j=1}^{n} s_j R_j(x)$,

$B_n = \sum_{j=1}^{n} s_{jk}^2$ ve $t_n^*(x) = \max_{1 \le j \le n} |t_j|$ olsun. Bu durumda r pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$E\left((t_n)^{2r}\right) \le \frac{(2r)!}{2^r r!} (B_n)^r$$

eşitsizliği gerçeklenir (Garling 2007).

Aşağıdaki sonuç Khintchine eşitsizliğinin çift dizilere bir genişlemesidir.

Lemma 4.2 $t_{nm}(\mathbf{x}) = \sum_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk} r_{jk}(\mathbf{x})$,

$B_{nm} = \sum_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}^2$ ve $t_{nm}^*(\mathbf{x}) = \max\limits_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le m}} |t_{jk}|$ olsun. Bu durumda r pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$E\left((t_{nm})^{2r}\right) \le \frac{(2r)!}{2^r r!} (B_{nm})^r$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. $\sum_{\mu=1}^{i} \nu_\mu = 2r$, $A_{\nu_1,\ldots,\nu_i} = \dfrac{(\nu_1 + \ldots + \nu_i)!}{\nu_1!\ldots\nu_i!}$
ve $1 \le j_1, \ldots j_i \le n$, $1 \le k_1, \ldots, k_i \le m$ olmak üzere
$E\left((t_{nm})^{2r}\right) = \sum\limits_{\nu_1+\ldots+\nu_i=2r} A_{\nu_1,\ldots,\nu_i} s_{j_1k_1}^{\nu_1} \ldots s_{j_ik_i}^{\nu_i} E\left[r_{j_1k_1}^{\nu_1}(\mathbf{x}) \ldots r_{j_ik_i}^{\nu_i}(\mathbf{x})\right]$
olur. Beklenen değer ve Rademacher fonksiyonunun özelliğinden

$$E\left[r_{j_1k_1}^{\nu_1}(\mathbf{x}) \ldots r_{j_ik_i}^{\nu_i}(\mathbf{x})\right] = \begin{cases} 1 & , \quad \nu_1, \ldots, \nu_i \text{ çift olduğunda} \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$$

elde edilir ve böylece $\sum_{u=1}^{i} p_u = r$ olacak biçimde $p_1, \ldots, p_i$ pozitif tamsayılar olmak üzere

$$E\left((t_{nm})^{2r}\right) = \sum_{p_1+\ldots+p_i=r} A_{2p_1,\ldots,2p_i} s_{j_1k_1}^{2p_1} \ldots s_{j_ik_i}^{2p_i}$$

bulunur. Diğer taraftan $(2p_1)! \ldots (2p_j)! \ge 2^{p_1} p_1! \ldots 2^{p_j} p_j!$ eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} E\left((t_{nm})^{2r}\right) &= \sum_{p_1+\ldots+p_i=r} \frac{(2r)!}{2^r p_1! \ldots p_j!} \frac{r!}{r!} s_{j_1k_1}^{2p_1} \ldots s_{j_ik_i}^{2p_i} \\ &\le \frac{(2r)!}{2^r r!} \sum_{p_1+\ldots+p_i=r} \frac{r!}{p_1! \ldots p_j!} s_{j_1k_1}^{2p_1} \ldots s_{j_ik_i}^{2p_i} \\ &= \frac{(2r)!}{2^r r!} (B_{nm})^r . \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Şimdi de alışılmış diziler için Marcinkiewicz-Zygmund eşitsizliğini hatırlatıp hemen ardından çift diziler için genişlemesini verelim.

Lemma 4.3 $t_n(x) = \sum_{j=1}^{n} s_j R_j(x)$,
$B_n = \sum_{j=1}^{n} s_j^2$ ve $t_n^*(x) = \max_{1 \le j \le n} |t_j|$ olsun. Bu durumda $a > 0$ olmak üzere

$$E\left(e^{at_n^*(\mathbf{x})}\right) \le 32 e^{a^2 \frac{B_n}{2}}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Tsuchikura 1951).

Lemma 4.4 $t_{nm}(\mathbf{x}) = \sum_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk} r_{jk}(\mathbf{x})$,
$B_{nm} = \sum_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}^2$ ve $t_{nm}^*(\mathbf{x}) = \max_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le m}} |t_{jk}|$ olsun. Bu durumda $a > 0$ olmak üzere

$$E\left(e^{at_{nm}^*(\mathbf{x})}\right) \le 32 e^{a^2 \frac{B_{nm}}{2}}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat.

$$\begin{aligned} e^{at_{nm}^*(\mathbf{x})} &\le 2\frac{e^{at_{nm}^*(\mathbf{x})} + e^{-at_{nm}^*(\mathbf{x})}}{2} \\ &= 2\left\{\frac{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(at_{nm}^*(\mathbf{x}))^r}{r!} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (at_{nm}^*(\mathbf{x}))^r}{r!}}{2}\right\} \\ &= 2\left\{1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(at_{nm}^*(\mathbf{x}))^{2r}}{(2r)!}\right\} \end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Yukarıdaki eşitsizliği kullanarak

$$\begin{aligned} E\left(e^{at_{nm}^*(\mathbf{x})}\right) &\le 2\left\{1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{E\left[(at_{nm}^*(\mathbf{x}))^{2r}\right]}{(2r)!}\right\} \\ &\le 2\left\{1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r)!} a^{2r} E\left[\left(\max_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le m}} |t_{jk}|\right)^{2r}\right]\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. $j \ge 1$, $k \ge 1$ için $E(r_{jk}(x)) = 0$, $X_{jk} := s_{jk} r_{jk}$ martingale farklarının bir dizisidir (Quang ve Huan 2009). Böylece çok indisli diziler için Doob eşitsizliğinden(Huan ve Quang 2012) ve Lemma 4.2' den

$$
\begin{aligned}
E\left(e^{at^*_{nm}(\mathbf{x})}\right) &\leq 2\left\{1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2r}{2r-1}\right)^{4r}a^{2r}E\left[\left(|t_{nm}|\right)^{2r}\right]}{(2r)!}\right\}\\
&\leq 2\left\{1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2r}{2r-1}\right)^{4r}a^{2r}\frac{(2r)!}{2^r r!}\left(B_{nm}\right)^{r}}{(2r)!}\right\}\\
&= 2\left\{1+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{2r}{2r-1}\right)^{4r}\frac{\left(\frac{a^2B_{nm}}{2}\right)^{r}}{(r)!}\right\}\\
&\leq 32\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a^2B_{nm}}{2}\right)^{r}}{(r)!}=32e^{a^2\frac{B_{nm}}{2}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. ■

Aşağıdaki sonuç Teorem 4.3' ün karşıtının doğru olup olmadığını incelemektedir.

Teorem 4.4 (s_{jk}) çift dizisi bir L değerine $(C,1,1)$-toplanabilir ve

$$\sum_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}^2 = o\left(\frac{n^2m^2}{\log\log nm}\right)$$

ise (s_{jk}) çift dizisinin hemen her altdizisi de aynı L değerine $(C,1,1)$-toplanabilirdir.

İspat. (s_{jk}) çift dizisinin hemen her altdizisinin $(C,1,1)$-toplanabilir olması hemen her $\mathbf{x}$ için

$$\frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}x_{jk}}{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} x_{jk}}$$

limitinin varlığına denktir. Yukarıdaki ifade düzenlenirse $r_{jk}(\mathbf{x}) = 2x_{jk}-1$ olmak üzere hemen her $\mathbf{x}$ için

$$\frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}\left(\frac{1+r_{jk}(\mathbf{x})}{2}\right)}{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}\left(\frac{1+r_{jk}(\mathbf{x})}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2nm}\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}+\frac{1}{2nm}\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}r_{jk}(\mathbf{x})}{\frac{1}{nm}\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}\left(\frac{1+r_{jk}(\mathbf{x})}{2}\right)} \tag{4.1}$$

elde edilir. $P(\eta)=1$ olduğundan (4.1)' in paydası hemen her $\mathbf{x}$ için $\frac{1}{2}$ değerine yakınsaktır. İspatı tamamlamak için hemen her $\mathbf{x}$ için

$$p-\lim_{n,m\to\infty}\frac{1}{nm}\sum_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}r_{jk}(\mathbf{x}) = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Her $\varepsilon>0$ ve $2^{j-1}<n\leq 2^j$, $2^{k-1}<m\leq 2^k$ aralığındaki en az bir (n,m) ikilisi için $|t_{nm}(\mathbf{x})| \geqslant nm\varepsilon$ olacak biçimdeki tüm $\mathbf{x}$ elemanlarının kümesini V_{jk} ile gösterelim ve

$$G_{jk}=\left\{\mathbf{x}:\ t^*_{2^j,2^k}(\mathbf{x})>2^{j-1}2^{k-1}\varepsilon\right\}$$

kümesini tanımlayalım. $V_{jk} \subset G_{jk}$ olduğu açıktır. Her $\varepsilon > 0$ için $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} P(G_{jk}) < \infty$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Lemma 4.4' den

$$\begin{aligned} P(G_{jk})\, e^{a2^{j-1}2^{k-1}\varepsilon} &\leq \int\limits_X e^{at^*_{2^j,2^k}(\mathbf{x})} dP(\mathbf{x}) \\ &= E\left(e^{at^*_{2^j,2^k}(\mathbf{x})}\right) \\ &\leq 32 e^{a^2 \frac{B_{2^j 2^k}}{2}} \end{aligned}$$

olup

$$P(G_{jk}) \leq 32 e^{\frac{a^2 B_{2^j2^k}}{2} - a2^{j-1}2^{k-1}\varepsilon}$$

eşitsizliği elde edilir. $a = \frac{2^{j-1}2^{k-1}\varepsilon}{B_{2^j2^k}}$ alınırsa

$$\begin{aligned} P(G_{jk}) &\leq 32 e^{-\dfrac{\varepsilon^2 2^{2(j-1)} 2^{2(k-1)}}{2B_{2^j2^k}}} \\ &= 32 e^{-\dfrac{\varepsilon^2 \left(2^j\right)^2 \left(2^k\right)^2}{32 B_{2^j2^k}}} \end{aligned} \tag{4.2}$$

bulunur. Diğer taraftan hipotez gereğince

$$\frac{B_{2^j2^k}}{\left(2^j\right)^2\left(2^k\right)^2} = o\left(\frac{1}{\log\log 2^j 2^k}\right)$$

$$\frac{B_{2^j2^k}}{\left(2^j\right)^2\left(2^k\right)^2} \leq \frac{\varepsilon^2}{96 \log\log 2^j 2^k}$$

elde edilir. (4.2)' den

$$\begin{aligned} P(G_{jk}) &\leq 32 e^{-\dfrac{\varepsilon^2}{32}\dfrac{96\log\log 2^j2^k}{\varepsilon^2}} \\ &= 32 e^{-3\log\log 2^j 2^k} \\ &= \frac{32}{\left[(j+k)\log 2\right]^3} \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \frac{1}{\left[(j+k)\log 2\right]^3} < \infty$ (Bromwich 1942) olduğundan

$$\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} P(G_{jk}) \leq 32 \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \frac{1}{\left[(j+k)\log 2\right]^3} < \infty$$

olur. Böylece $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} P(G_{jk}) < \infty$ olduğundan $p - \lim\limits_{j,k\to\infty} P(G_{jk}) = 0$ elde ederiz. Dolayısıyla $p - \lim\limits_{j,k\to\infty} P(V_{jk}) = 0$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.3 ve Teorem 4.4' den sınırlı bir dizinin $(C,1,1)$-toplanabilmesini karakterize eden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.1 Sınırlı bir (s_{jk}) dizisinin $(C,1,1)$-toplanabilmesi için gerek ve yeter koşul hemen her altdizisinin $(C,1,1)$-toplanabilir olmasıdır.

Teorem 4.5 Hemen her $\mathbf{x}$ için

$$\lim_{n,m\to\infty}\frac{1}{nm}\sum_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}r_{jk}(\mathbf{x})=0 \tag{4.3}$$

ise

$$\lim_{n,m\to\infty}\frac{1}{n^2m^2}\sum_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}^2=0$$

gerçeklenir.

İspat. $U[p,q]=\{(j,k): p\le j\le n \text{ veya } q\le k\le m\}$ ve

$$T_{p,q,n,m}(x)=\sum_{(j,k)\in U[p,q]} s_{jk}r_{jk}(\mathbf{x})$$

olsun. Böylece

$$T_{p,q,n,m}^2(\mathbf{x})=\sum_{(j,k)\in U[p,q]} s_{jk}^2+2\sum_{\substack{(j_1,k_1),(j_2,k_2)\in U[p,q]\\ j_1\ne j_2 \text{ veya } k_1\ne k_2}} s_{j_1k_1}s_{j_2k_2}r_{j_1k_1}(\mathbf{x})\,r_{j_2k_2}(\mathbf{x})$$

olur. Egorov teoreminden pozitif ölçülü bir $D\subset X$ kümesi üzerinde (4.3) limiti düzgün olarak mevcuttur. Dolayısıyla

$$\int_D T_{p,q,n,m}^2(\mathbf{x})\,dP(\mathbf{x})=P(D)\sum_{(j,k)\in U[p,q]} s_{jk}^2+K \tag{4.4}$$

olup, burada

$$K=2\sum_{\substack{(j_1,k_1),(j_2,k_2)\in U[p,q]\\ j_1\ne j_2 \text{ veya } k_1\ne k_2}} s_{j_1k_1}s_{j_2k_2}\int_D r_{j_1k_1}(\mathbf{x})\,r_{j_2k_2}(\mathbf{x})\,dP(\mathbf{x})$$

biçimindedir. Hölder eşitsizliğinden $v_{j_1k_1j_2k_2}=\int_D r_{j_1k_1}(\mathbf{x})\,r_{j_2k_2}(\mathbf{x})\,dP(\mathbf{x})$ olmak üzere

$$|K|\le 2\left(\sum_{\substack{(j_1,k_1),(j_2,k_2)\in U[p,q]\\ j_1\ne j_2 \text{ veya } k_1\ne k_2}} s_{j_1k_1}^2s_{j_2k_2}^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{\substack{(j_1,k_1),(j_2,k_2)\in U[p,q]\\ j_1\ne j_2 \text{ veya } k_1\ne k_2}} v_{j_1k_1j_2k_2}^2\right)^{\frac12} \tag{4.5}$$

elde edilir. Diğer yandan $r_{j_1k_1}$ ve $r_{j_2k_2}$ fonksiyonlarının X üzerinde dik olduğu bilinmektedir (Crnjac, Cunjalo ve Miller 2004). Dolayısıyla çift diziler için Bessel eşitsizliğinden

$$\sum_{\substack{1 \le j_1 < j_2 \le \infty \\ 1 \le k_1 < k_2 \le \infty}} v_{j_1k_1j_2k_2}^2 \le \int_X (\chi_D(\mathbf{x}))^2 \, dP(\mathbf{x}) = P(D)$$

bulunur. Yeterince büyük p ve q için

$$\left(\sum_{\substack{(j_1,k_1),(j_2,k_2) \in U[p,q] \\ j_1 \ne j_2 \text{ veya } k_1 \ne k_2}} v_{j_1k_1j_2k_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{P(D)}{4}$$

elde edilir. (4.5) eşitsizliğinden

$$|K| \le \left(\sum_{\substack{(j_1,k_1),(j_2,k_2) \in U[p,q] \\ j_1 \ne j_2 \text{ veya } k_1 \ne k_2}} s_{j_1k_1}^2 s_{j_2k_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{P(D)}{2} \le \frac{P(D)}{2} \sum_{(j_1,k_1) \in U[p,q]} s_{j_1k_1}^2$$

olup (4.4) ile birlikte gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \int_D T_{p,q,n,m}^2(\mathbf{x}) \, dP(\mathbf{x}) &= P(D) \sum_{(j,k) \in U[p,q]} s_{jk}^2 + K \\ &\ge \frac{P(D)}{2} \sum_{(j,k) \in U[p,q]} s_{jk}^2 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3)' den

$$\lim_{n,m \to \infty} \frac{1}{n^2m^2} \sum_{(j,k) \in U[p,q]} s_{jk}^2 = 0 \text{ ve } \lim_{n,m \to \infty} \frac{1}{n^2m^2} \sum_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}^2 = 0$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar. ■

Aşağıda kendisi $(C,1,1)$ toplanabilmesine rağmen hemen hiçbir altdizisi $(C,1,1)$ toplanamayan bir dizi örneği verilecektir.

Örnek 4.1 $a_{jk} = (-1)^j (-1)^k \sqrt{j}\sqrt{k}$ çift dizisini gözönüne alalım. O halde

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \sqrt{j}}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\sqrt{j}} \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

serileri yakınsaktır. Diğer taraftan $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \frac{(-1)^j (-1)^k}{\sqrt{j}\sqrt{k}}$ çift serisi yakınsaktır (Bromwich 1942). Ayrıca $k = 1, 2, ...$için

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j (-1)^k}{\sqrt{j}\sqrt{k}} \text{ serisi yakınsak}$$

ve $j = 1, 2, ...$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^j (-1)^k}{\sqrt{j}\sqrt{k}} \text{ serisi de yakınsak}$$

olduğundan $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \frac{(-1)^j (-1)^k}{\sqrt{j}\sqrt{k}}$ serisi kısıtlanmış anlamda yakınsaktır (Móricz 1979). Lemma 4.1 gereğince

$$\left\{ \frac{1}{nm} \sum_{j,k=1,1}^{n,m} (-1)^j (-1)^k \sqrt{j}\sqrt{k} \right\}$$

dizisi $L = 0$ değerine p-yakınsaktır. Böylece (a_{jk}) dizisi $L = 0$ değerine $(C, 1, 1)$-toplanabilirdir. Diğer taraftan

$$p\text{-}\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{n^2m^2} \sum_{j,k=1,1}^{n,m} jk = p\text{-}\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{n^2m^2} \frac{n(n+1)}{2} \frac{m(m+1)}{2} = \frac{1}{4}$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 4.3 gereğince (a_{jk}) dizisi sıfıra $(C, 1, 1)$-toplanabilir olmasına rağmen altdizilerinin hemen hiçbiri $(C, 1, 1)$-toplanabilir değildir.

4.4 Dört Boyutlu q-Cesàro Matrisleri İçin Buck-Pollard Özelliği

Bu kısımda 1943 yılında Buck ve Pollard tarafından verilen sonuçların benzerleri dört boyutlu q-Cesáro matrisleri için verilecektir.
$0 < q < \infty$ olmak üzere

$$c_{jk}^{nm} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^q m^q} & , \quad 1 \leq j \leq n \text{ ve } 1 \leq k \leq m \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $(C_q, 1, 1) = \left(c_{jk}^{nm}\right)$ matrisine dört boyutlu $q-$Cesàro matrisi denir.

Eğer

$$\lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{n^q m^q} \sum_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk} = L$$

limiti mevcut ise (s_{jk}) çift dizisi L değerine $q-$Cesàro toplanabilirdir denir ve $s_{jk} \to L \ (C_q, 1, 1)$ ile gösterilir. $q = 1$ alınırsa $(C, 1, 1)$, dört boyutlu Cesàro matrisi elde edilir. $(C_q, 1, 1)$ matrisi, $q \neq 1$ durumunda RH-regüler bir matris değildir.

Şimdi $q-$Cesàro matrisleri için Teorem 4.3' ün benzerini verelim.

Teorem 4.6 $\mathbf{s} = (s_{jk})$ dizisinin hemen her altdizisi bir L değerine $(C_q, 1, 1)$-toplanabilir ise s dizisinin kendisi de $2^{1-q}L$ değerine $(C_q, 1, 1)$-toplanabilirdir.

İspat. $\mathbf{s} = (s_{jk})$ dizisinin hemen her altdizisi L değerine $(C_q, 1, 1)$-toplanabilir, yani $G = \{\mathbf{x} \in X : \ \mathbf{s}(\mathbf{x}) \to L\,(C_q, 1, 1)\}$ olmak üzere $P(G) = 1$ olsun. Şimdi $\mathbf{x} = (x_{jk}) \in X$ verildiğinde $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_{jk})$ dizisini

$$\bar{x}_{jk} = \begin{cases} 0 & , \quad x_{jk} = 1 \\ 1 & , \quad x_{jk} = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. $Y = G \cap \eta$ ve $\overline{Y} = \{(\bar{x}_{jk}) : \ x_{jk} \in Y\}$ olsun. Dolayısıyla $\overline{Y} = \overline{G} \cap \eta$ elde ederiz. $((x_{jk}) \to (\bar{x}_{jk}))$ dönüşümü, P ölçüsünü koruduğundan $P\left(\overline{Y}\right) = 1$ ve $P\left(Y \cap \overline{Y}\right) = 1$ elde ederiz. O halde $Y \cap \overline{Y}$, boş küme değildir. $\mathbf{x} = (x_{jk}) \in Y \cap \overline{Y}$ ise $\mathbf{x} \in G$, $\mathbf{x} \in \eta$ ve $\bar{\mathbf{x}} \in G$, $\bar{\mathbf{x}} \in \eta$ bulunur. $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in G$ olduğundan $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \eta$ olmak üzere

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) \to L\,(C_q, 1, 1)$$

ve

$$\mathbf{s}(\bar{\mathbf{x}}) \to L\,(C_q, 1, 1)$$

bulunur. Dolayısıyla

$$p - \lim_{n,m\to\infty} \frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}x_{jk}}{\left(\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} x_{jk}\right)^q} = L$$

ve benzer şekilde

$$p-\lim_{n,m\to\infty}\frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}s_{jk}\bar{x}_{jk}}{\left(\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}\bar{x}_{jk}\right)^q}=L$$

olur. Ayrıca $\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}}\in\eta$ olduğundan
$p-\lim\limits_{n,m\to\infty}\frac{1}{nm}\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}x_{jk}=\frac{1}{2}$ ve $p-\lim\limits_{n,m\to\infty}\frac{1}{nm}\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}\bar{x}_{jk}=\frac{1}{2}$
elde edilir.
Diğer taraftan (s_{jk}) dizisinin $(C_q,1,1)$-toplanabilmesi

$$\frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}s_{jk}}{n^qm^q}=\frac{\left(\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}x_{jk}\right)^q}{n^qm^q}\frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}s_{jk}x_{jk}}{\left(\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}x_{jk}\right)^q}+\frac{\left(\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}\bar{x}_{jk}\right)^q}{n^qm^q}\frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}s_{jk}\bar{x}_{jk}}{\left(\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}\bar{x}_{jk}\right)^q}$$

ifadesinin limitinin mevcut olmasına denktir. Buradan

$$p-\lim_{n,m\to\infty}\frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}s_{jk}}{n^qm^q}=\frac{L}{2^q}+\frac{L}{2^q}=2^{1-q}L$$

elde edilir. Böylece (s_{jk}) dizisi $2^{1-q}L$ değerine $(C_q,1,1)$-toplanabilirdir. ■

Şimdi de dört boyutlu q-Cesàro matrisleri için Teorem 4.4' ün benzerini verelim.

Teorem 4.7 (s_{jk}) dizisi bir L değerine $(C_q,1,1)$-toplanabilir ve

$$\sum_{j,k=1,1}^{n,m}s_{jk}^2=o\left(\frac{n^{2q}m^{2q}}{\log\log n^qm^q}\right)$$

ise (s_{jk}) dizisinin hemen her altdizisi de $2^{q-1}L$ değerine $(C_q,1,1)$-toplanabilirdir.

İspat. (s_{jk}) dizisinin hemen her altdizisinin $(C_q,1,1)$-toplanabilir olması hemen her $\mathbf{x}$ için

$$\frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}s_{jk}x_{jk}}{\left(\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}x_{jk}\right)^q}$$

ifadesinin limitinin varlığına denktir. $r_{jk}(\mathbf{x})=2x_{jk}-1$ olmak üzere yukarıdaki ifade düzenlenirse hemen her $\mathbf{x}$ için

$$\frac{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}s_{jk}\left(\frac{1+r_{jk}(\mathbf{x})}{2}\right)}{\left\{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}\left(\frac{1+r_{jk}(\mathbf{x})}{2}\right)\right\}^q}=\frac{\frac{1}{2n^qm^q}\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}s_{jk}+\frac{1}{2n^qm^q}\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}s_{jk}r_{jk}(\mathbf{x})}{\frac{1}{n^qm^q}\left\{\sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m}\left(\frac{1+r_{jk}(\mathbf{x})}{2}\right)\right\}^q}\tag{4.6}$$

elde edilir. $P(\eta) = 1$ olduğundan (4.6)' nın paydası hemen her $\mathbf{x}$ için $\frac{1}{2^q}$ değerine yakınsaktır. İspatı tamamlamak için hemen her $\mathbf{x}$ için $p - \lim\limits_{n,m\to\infty} \dfrac{1}{n^q m^q} \sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk} r_{jk}(\mathbf{x}) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Her $\varepsilon > 0$ ve $2^{j-1} < n \leq 2^j$, $2^{k-1} < m \leq 2^k$ aralığındaki en az bir (n,m) ikilisi için $|t_{nm}(\mathbf{x})| \geqslant n^q m^q \varepsilon$ olacak biçimdeki tüm $\mathbf{x}$ elemanlarının kümesini M_{jk} ile gösterelim ve

$$G_{jk} = \left\{ \mathbf{x} : \ t^*_{2^j,2^k}(\mathbf{x}) > 2^{q(j-1)} 2^{q(k-1)} \varepsilon \right\}$$

kümesini tanımlayalım. $M_{jk} \subset G_{jk}$ olduğu açıktır. Her $\varepsilon > 0$ için $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} P(G_{jk}) < \infty$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Lemma 4.4' yi kullanarak

$$\begin{aligned} P(G_{jk}) e^{a 2^{q(j-1)} 2^{q(k-1)} \varepsilon} &\leq \int\limits_X e^{a t^*_{2^j,2^k}(\mathbf{x})} dP(\mathbf{x}) \\ &= E\left(e^{a t^*_{2^j,2^k}(\mathbf{x})} \right) \\ &\leq 32 e^{a^2 \frac{B_{2^j 2^k}}{2}} \end{aligned}$$

olup

$$P(G_{jk}) \leq 32 e^{\frac{a^2 B_{2^j 2^k}}{2} - a 2^{q(j-1)} 2^{q(k-1)} \varepsilon}$$

elde ederiz. $a = \frac{2^{q(j-1)} 2^{q(k-1)} \varepsilon}{B_{2^j 2^k}}$ alınırsa

$$\begin{aligned} P(G_{jk}) &\leq 32 e^{-\dfrac{\varepsilon^2 2^{2q(j-1)} 2^{2q(k-1)}}{2 B_{2^j 2^k}}} \\ &= 32 e^{-\dfrac{\varepsilon^2 \left(2^j\right)^{2q} \left(2^k\right)^{2q}}{32 B_{2^j 2^k}}} \end{aligned} \tag{4.7}$$

bulunur. Diğer taraftan hipotez gereğince

$$\frac{B_{2^j 2^k}}{\left(2^j\right)^{2q} \left(2^k\right)^{2q}} = o\left(\frac{1}{\log\log 2^{jq} 2^{kq}} \right)$$

$$\frac{B_{2^j 2^k}}{\left(2^j\right)^{2} \left(2^k\right)^{2}} \leq \frac{\varepsilon^2}{96 \log\log 2^j 2^k}.$$

elde edilir. (4.7)' den

$$\begin{aligned} P(G_{jk}) &\leq 32 e^{-\dfrac{\varepsilon^2}{32} \dfrac{96 \log\log 2^j 2^k}{\varepsilon^2}} \\ &= 32 e^{-3 \log\log 2^{jq} 2^{kq}} \\ &= \frac{32}{\left[(j+k) \log 2^q \right]^3} \end{aligned}$$

bulunur. $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \dfrac{1}{[(j+k)\log 2^q]^3} < \infty$ (Bromwich 1942) olduğundan

$$\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} P\left(G_{jk}\right) \leq 32 \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \frac{1}{[(j+k)\log 2^q]^3} < \infty$$

olur. Böylece $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} P\left(G_{jk}\right) < \infty$ olduğundan $\lim\limits_{j,k\to\infty} P\left(G_{jk}\right) = 0$ elde ederiz. Dolayısıyla $\lim\limits_{j,k\to\infty} P\left(M_{jk}\right) = 0$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.6 ve Teorem 4.7 birlikte gözönüne alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.2 Sınırlı bir (s_{jk}) dizisinin $(C_q, 1, 1)$-toplanabilmesi için gerek ve yeter koşul hemen her altdizisinin $(C_q, 1, 1)$-toplanabilir olmasıdır.

Aşağıdaki sonuç Teorem 4.5' in dört boyutlu q-Cesàro matrislerine bir genişlemesi olup ispatı Teorem 4.5' in ispatına benzer şekilde yapılabileceğinden burada ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 4.8 Hemen her $\mathbf{x}$ için

$$p - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{n^q m^q} \sum_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk} r_{jk}\left(\mathbf{x}\right) = 0$$

ise

$$p - \lim_{n,m\to\infty} \frac{1}{n^{2q} m^{2q}} \sum_{j,k=1,1}^{n,m} s_{jk}^2 = 0$$

gerçeklenir.

Aşağıda sırasıyla $0 < q < 1$ ve $1 < q$ olmak üzere kendisi $(C_q, 1, 1)$-toplanabilir olmasına rağmen altdizilerinin hemen hiçbiri $(C_q, 1, 1)$-toplanabilir olmayan iki dizi örneği vereceğiz.

Örnek 4.2 $s_{jk} = (-1)^j (-1)^k \sqrt{j}\sqrt{k}$ ile tanımlı (s_{jk}) çift dizisini gözönüne alalım. $q > \dfrac{1}{2}$ için

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \sqrt{j}}{j^q} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^{q-\frac{1}{2}}} \text{ ve } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k^q} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{q-\frac{1}{2}}}$$

serileri yakınsaktır. Diğer taraftan $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \dfrac{(-1)^j (-1)^k}{j^{q-\frac{1}{2}} k^{q-\frac{1}{2}}}$ çift serisi yakınsaktır (Bromwich 1942). Ayrıca $k = 1, 2, ...$için

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j (-1)^k}{j^{q-\frac{1}{2}} k^{q-\frac{1}{2}}} \text{ serisi yakınsak}$$

ve $j = 1, 2, ...$ için
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^j (-1)^k}{j^{q-\frac{1}{2}} k^{q-\frac{1}{2}}} \text{ serisi de yakınsak}$$

olduğundan $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \dfrac{(-1)^j (-1)^k}{j^{q-\frac{1}{2}} k^{q-\frac{1}{2}}}$ serisi kısıtlanmış anlamda yakınsaktır (Móricz 1979). Lemma 4.1 gereğince

$$\left\{ \frac{1}{n^q m^q} \sum_{j,k=1,1}^{n,m} (-1)^j (-1)^k \sqrt{j}\sqrt{k} \right\}$$

dizisi $L = 0$ değerine yakınsaktır. Böylece (s_{jk}) dizisi $L = 0$ değerine $(C_q, 1, 1)$-toplanabilirdir. Diğer taraftan $q = \dfrac{3}{4}$ alınırsa $\left\{ \frac{1}{n^{2q} m^{2q}} \sum\limits_{j,k=1,1}^{n,m} jk \right\} = \left\{ \frac{1}{n^{2q} m^{2q}} \frac{n(n+1)}{2} \frac{m(m+1)}{2} \right\}$ çift dizisi 0 değerine yakınsak değildir. Dolayısıyla Teorem 4.8 gereğince (s_{jk}) dizisi sıfıra $(C_q, 1, 1)$-toplanabilir olmasına rağmen altdizilerinin hemen hiçbiri $(C_q, 1, 1)$-toplanabilir değildir.

Örnek 4.3 $s_{jk} = (-1)^j (-1)^k jk$ ile tanımlı (s_{jk}) çift dizisini gözönüne alalım. $q > 1$ için $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \dfrac{(-1)^j (-1)^k jk}{j^q k^q}$ serisi kısıtlanmış anlamda yakınsak olduğundan (s_{jk}) dizisi 0 değerine $(C_q, 1, 1)$-toplanabilirdir. Diğer taraftan $q = \dfrac{3}{2}$ olmak üzere (s_{jk}) dizisinin altdizilerinin hemen hiçbiri $(C_q, 1, 1)$-toplanabilir olmadığı Teorem 4.8 yardımıyla kolaylıkla görülebilir.

5. DÖRT BOYUTLU MATRİSLER İÇİN BOREL ÖZELLİĞİ

Terimleri 0 ve 1' lerden oluşan dizilerin toplanabilmesi günümüze kadar pek çok yazar tarafından çalışılmıştır. 1909 yılında Borel, terimleri 0 ve 1' lerden oluşan dizilerin hemen hepsinin $\frac{1}{2}$ değerine Cesàro toplanabildiğini göstermiştir. 1945 yılında Hill, terimleri 0 ve 1' lerden oluşan tüm dizilerin kümesi ile $[0,1]$ aralığı arasında birebir bir eşleme kurarak regüler $A = (a_{nk})$ matrisleri için Borel' in sonucunu incelemiştir. Terimleri 0 ve 1' lerden oluşan dizilerin hemen hepsi $\frac{1}{2}$ değerine A-toplanabilir ise A matrisi Borel özelliğine sahiptir denir. Ayrıca Hill 1951 ve 1954 yıllarındaki çalışmalarında bir matrisin Borel özelliğine sahip olması için gerek olduğu halde yeter olmayan veya yeter olduğu halde gerek olmayan bazı koşullar vermiştir.

2004 yılında Miller ve arkadaşları terimleri 0 ve 1' lerden oluşan çift dizilerin hemen hepsinin $\frac{1}{2}$ değerine $(C,1,1)$ $-$toplanabildiğini göstermiştir. Dolayısıyla dört boyutlu Cesàro matrisi Borel özelliğine sahiptir.

Bu bölümde dört boyutlu matris metodlarının Borel özelliğine ilişkin gerek veya yeter koşullar vereceğiz.

Bu amaçla ilk olarak bazı temel kavramları hatırlatalım. Bölüm 4' de tanımlanan ölçü kavramını bu bölümde de kullanacağız.

Eğer $\mathcal{A} = \left(a_{jk}^{nm}\right)$ dört boyutlu matrisi sınırlı yakınsak her diziyi aynı değere yakınsak sınırlı bir diziye dönüştürüyor ise, bu matrise sınırlı regüler matris denir. Sınırlı regüler matrisler için bir karakterizasyon Robison tarafından verilmiştir.

Önerme 5.1 Dört boyutlu $\mathcal{A} = \left(a_{jk}^{nm}\right)$ matrisinin sınırlı regüler olması için gerek ve yeter şart
(i) Her bir j,k için $p - \lim\limits_{n,m\to\infty} a_{jk}^{nm} = 0$,

(ii) $p - \lim\limits_{n,m\to\infty} \sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} = 1$,

(iii) Her bir j için $p - \lim\limits_{n,m\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|a_{jk}^{nm}\right| = 0$,

(iv) Her bir k için $p - \lim\limits_{n,m\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \left|a_{jk}^{nm}\right| = 0$,

(v) Her m ve n için $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \left|a_{jk}^{nm}\right| \leq M$

olmasıdır (Robison 1926).

Dikkat edilecek olursa yukarıdaki önermenin koşulları RH-regüler bir matrisin sağlaması gereken koşullardan daha kuvvetlidir.

5.1 Borel Özelliği İçin Gerek Koşullar

Bu kısımda dört boyutlu bir matrisin Borel özelliğine sahip olması için gerek koşullar verilecektir.

Teorem 5.1 $A = \left(a_{jk}^{nm}\right)$ matrisi Borel özelliğine sahip ise $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm}$ serisi her n, m için anlamlı ve $n, m \to \infty$ için 1 değerine p-yakınsaktır.

İspat. A matrisi Borel özelliğine sahip olduğundan hemen her $\mathbf{x} \in X$ için $p\text{-}\lim\limits_{n,m\to\infty} \sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} x_{jk} = \frac{1}{2}$ olur. Yani,

$$K = \left\{ \mathbf{x} = (x_{jk}) \in X : \quad (A\mathbf{x})_{nm} \to \frac{1}{2} \right\}$$

olmak üzere $P(K) = 1$ gerçeklenir. $\overline{\mathbf{x}} = (\bar{x}_{jk})$ dizisi

$$\bar{x}_{jk} = \begin{cases} 0 & , \quad x_{jk} = 1 \\ 1 & , \quad x_{jk} = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $Y = K \cap \eta$ ve $\overline{K} = \{(\overline{x}_{jk}) : \ x_{jk} \in Y\}$ olmak üzere $\overline{Y} = \overline{K} \cap \eta$ elde edilir. (x_{jk}) dizisini $(\overline{x}_{jk})$ dizisine götüren dönüşüm P ölçüsünü koruduğundan $P\left(\overline{Y}\right) = 1$ olur. O halde $Y \cap \overline{Y} \neq \emptyset$ elde edilir. $\mathbf{x} = (x_{jk}) \in Y \cap \overline{Y}$ ise $\mathbf{x} \in K$, $\mathbf{x} \in \eta$ ve $\overline{\mathbf{x}} \in K$, $\overline{\mathbf{x}} \in \eta$ olur. $\mathbf{x}$, $\overline{\mathbf{x}} \in K$ olduğundan

$$\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} x_{jk} + \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} \overline{x}_{jk} = \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} \to 1 \quad (n, m \to \infty)$$

bulunur. Böylece ispat elde edilir. ∎

Teorem 5.2 $A = \left(a_{jk}^{nm}\right)$ matrisi Borel özelliğine sahip olsun. Bu taktirde her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \left(a_{jk}^{nm}\right)^2 < \infty$$

gerçeklenir.

İspat. $r_{jk}(\mathbf{x}) = 2x_{jk} - 1$, çift diziler için Rademacher fonksiyonu olmak üzere

$$\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} x_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} r_{jk}(\mathbf{x})$$

eşitliği mevcuttur. A matrisi Borel özelliğine sahip olduğundan Teorem 5.1 gereğince her $n, m \in \mathbb{N}$ için ve hemen her $\mathbf{x}$ için $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} r_{jk}(\mathbf{x})$ serisi yakınsaktır. Hatta hemen her $\mathbf{x}$ için $\lim\limits_{n,m} \sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} r_{jk}(\mathbf{x}) = 0$ olur. O halde $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} r_{jk}(\mathbf{x})$ serisi pozitif ölçülü bir D kümesi üzerinde her $n,m\in\mathbb{N}$ için $\mathbf{x}$ değişkenine göre düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla her bir $n,m\in\mathbb{N}$ ve keyfi $\varepsilon>0$ için $p,\mu>N_1$ ve $q,\nu>N_2$ olduğunda

$$\left|\sum_{j,k=1,1}^{p,q} a_{jk}^{nm} r_{jk}(\mathbf{x})-\sum_{j,k=1,1}^{\mu,\nu} a_{jk}^{nm} r_{jk}(\mathbf{x})\right|<\varepsilon$$

olacak biçimde bir N_1 doğal sayısı ve bir N_2 doğal sayısı vardır.
$U[\mu,p;\nu,q]=\{(j,k):\ \mu<j\le p \text{ veya } \nu<k\le q\}$ olmak üzere yukarıdaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned}\varepsilon^2P(D) &> \int_D\left(\sum_{U[\mu,p;\nu,q]} a_{jk}^{nm} r_{jk}(\mathbf{x})\right)^2 dP(\mathbf{x})\\ &= P(D)\sum_{U[\mu,p;\nu,q]}\left(a_{jk}^{nm}\right)^2+R\end{aligned}$$

olup, burada $R=2\sum\limits_{I[\mu,p;\nu,q]} a_{j_1k_1}^{nm}a_{j_2k_2}^{nm}\int\limits_D r_{j_1k_1}(\mathbf{x})\,r_{j_2k_2}(\mathbf{x})\,dP(\mathbf{x})$ ve
$I[\mu,p;\nu,q]=U[\mu,p;\nu,q]\cap\{(j,k):\ j_1\ne j_2 \text{ veya } k_1\ne k_2\}$ biçimindedir. Hölder eşitsizliğinden

$$|R|\le 2\left\{\sum_{I[\mu,p;\nu,q]}\left(a_{j_1k_1}^{nm}a_{j_2k_2}^{nm}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\sum_{I[\mu,p;\nu,q]}\left(\int_D r_{j_1k_1}(x)\,r_{j_2k_2}(x)\,dP(x)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\tag{5.1}$$

elde edilir. $v_{j_1k_1j_2k_2}^2=\left(\int\limits_D r_{j_1k_1}(\mathbf{x})\,r_{j_2k_2}(\mathbf{x})\,dP(\mathbf{x})\right)^2$ diyelim. Bessel eşitsizliğinden

$$\sum_{\substack{1\le j_1<j_2<\infty\\ 1\le k_1<k_2<\infty}} v_{j_1k_1j_2k_2}^2\le\int_X\left(\chi_D(\mathbf{x})\right)^2 dP(\mathbf{x})=P(D)$$

olur. Yeterince büyük p,q,μ ve ν değerleri için

$$\left\{\sum_{I[\mu,p;\nu,q]} v_{j_1k_1j_2k_2}^2\right\}^{\frac{1}{2}}\le\frac{P(D)}{4}\tag{5.2}$$

bulunur. (5.1) ve (5.2) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}|R| &\le \frac{P(D)}{2}\left\{\sum_{I[\mu,p;\nu,q]}\left(a_{j_1k_1}^{nm}a_{j_2k_2}^{nm}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\le \frac{P(D)}{2}\left\{\sum_{U[\mu,p;\nu,q]}\left(a_{j_1k_1}^{nm}a_{j_2k_2}^{nm}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\le \frac{P(D)}{2}\sum_{U[\mu,p;\nu,q]}\left(a_{j_1k_1}^{nm}\right)^2\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 P(D) &> P(D)\sum_{U[\mu,p;\nu,q]}\left(a_{jk}^{nm}\right)^2-\frac{P(D)}{2}\sum_{U[\mu,p;\nu,q]}\left(a_{jk}^{nm}\right)^2\\ &= \frac{P(D)}{2}\sum_{U[\mu,p;\nu,q]}\left(a_{jk}^{nm}\right)^2\end{aligned}$$

ve $P(D)>0$ olduğundan $\sum\limits_{U[\mu,p;\nu,q]}\left(a_{jk}^{nm}\right)^2<2\varepsilon^2$ elde edilir. Dolayısıyla herbir $n,m\in\mathbb{N}$ için $\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}\left(a_{jk}^{nm}\right)^2<\infty$ gerçeklenir. ■

Teorem 5.3 $\mathcal{A}=\left(a_{jk}^{nm}\right)$ matrisi Borel özelliğine sahip ve Önerme 5.1' in (v) koşulu gerçeklenirse

$$\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}\left(a_{jk}^{nm}\right)^2=o(1)\quad(n,m\to\infty)\tag{5.3}$$

elde edilir.

İspat. $\sigma_{nm}(\mathbf{x})=\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}a_{jk}^{nm}r_{jk}(\mathbf{x})$ olsun. O halde $\sigma_{nm}^2(\mathbf{x})=\left(\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}a_{jk}^{nm}r_{jk}(\mathbf{x})\right)\left(\sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}a_{jk}^{nm}r_{jk}(\mathbf{x})\right)$ eşitliğini ve (v) koşulunu kullanarak

$$\left|\sigma_{nm}^2(\mathbf{x})\right|\le\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}\left|a_{jk}^{nm}\right|\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}\left|a_{jk}^{nm}\right|<\infty$$

olduğundan

$$\sigma_{nm}^2(\mathbf{x})=\sum_{\substack{1\le j_1,j_2\le\infty\\1\le k_1,k_2\le\infty}}a_{j_1k_1}^{nm}a_{j_2k_2}^{nm}r_{j_1k_1}(\mathbf{x})\,r_{j_2k_2}(\mathbf{x})$$

hemen her yerde düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla

$$\int\limits_{\mathbf{X}}r_{j_1k_1}(\mathbf{x})\,r_{j_2k_2}(\mathbf{x})\,dP(\mathbf{x})=\begin{cases}1 & , \quad j_1=j_2 \text{ ve } k_1=k_2\\ 0 & , \quad j_1\ne j_2 \text{ veya } k_1\ne k_2\end{cases}$$

olduğunu da kullanırsak

$$\begin{aligned}\int\limits_X\sigma_{nm}^2(\mathbf{x})\,dP(\mathbf{x}) &= \sum_{\substack{1\le j_1,j_2\le\infty\\1\le k_1,k_2\le\infty}}a_{j_1k_1}^{nm}a_{j_2k_2}^{nm}\int\limits_X r_{j_1k_1}(\mathbf{x})\,r_{j_2k_2}(\mathbf{x})\,dP(\mathbf{x})\\ &= \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}\left(a_{jk}^{nm}\right)^2\end{aligned}\tag{5.4}$$

elde edilir. $\mathcal{A}$ matrisi Borel özelliğine sahip olduğundan düzgün sınırlı $(\sigma_{nm}(\mathbf{x}))$ dizisi hemen her $\mathbf{x}$ için $L = 0$ değerine yakınsaktır. (5.4) ve Lebesgue yakınsaklık teoremi gereğince $p - \lim\limits_{n,m\to\infty} \sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \left(a_{jk}^{nm}\right)^2 = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

■

Teorem 5.4 $\mathcal{A} = \left(a_{jk}^{nm}\right)$ dört boyutlu bir matris ve terimleri 0 ve 1' lerden oluşan dizilerin hemen hepsi $\mathcal{A}$-toplanabilir olsun. Bu taktirde

$$\beta_{nm} = \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} \text{ anlamlı} \quad \text{ve} \quad p - \lim_{n,m} \beta_{nm} = \beta \text{ mevcut,}$$

ve herbir n, m için

$$\mathcal{A}_{nm} = \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \left(a_{jk}^{nm}\right)^2 < \infty$$

gerçeklenir.

İspat, Teorem 5.1 ve Teorem 5.2' nin ispatlarına benzer şekilde yapılabileceğinden burada verilmeyecektir.

5.2 Borel Özelliği İçin Yeter Koşullar

Bu kısımda dört boyutlu matrislerin Borel özelliğine sahip olmasına ilişkin bazı yeter koşullar incelenecektir. Bu amaçla ilk olarak

$$\begin{aligned}
D_0(\mathcal{A}) &= \{\mathbf{x} \in X : \ (\mathcal{A}\mathbf{x})_{nm} \ \textit{ıraksak}\}, \\
D_1(\mathcal{A}) &= \{\mathbf{x} \in X : \ (\mathcal{A}\mathbf{x})_{nm} \ \textit{yakınsaktır}\}, \\
D_2(\mathcal{A}) &= \left\{\mathbf{x} \in X : \ (\mathcal{A}\mathbf{x})_{nm} \to \frac{1}{2} \ (n, m \to \infty)\right\}
\end{aligned}$$

kümelerini gözönüne alarak bu kümelerin ölçüleri arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Teorem 5.5 $\mathcal{A} = \left(a_{jk}^{nm}\right)$ dört boyutlu sınırlı regüler bir matris olsun. Bu durumda $D_1(\mathcal{A})$ ve $D_2(\mathcal{A})$ kümeleri aynı ölçüye sahiptir ve bu değer 0 veya 1 olur.

İspat. Keyfi $\mathbf{x} \in D_1(\mathcal{A})$ (veya $D_2(\mathcal{A})$) alalım. $\mathbf{x}$ dizisinin sonlu tane terimi değiştirildiğinde elde edilen $\widehat{\mathbf{x}}$ dizisi için

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} \widehat{x}_{jk} &= \sum_{j,k=1,1}^{j_0,k_0} a_{jk}^{nm} \widehat{x}_{jk} + \sum_{j>j_0 \text{ veya } k>k_0} a_{jk}^{nm} \widehat{x}_{jk} \\
&= \sum_{j,k=1,1}^{j_0,k_0} a_{jk}^{nm} \widehat{x}_{jk} + \sum_{j>j_0 \text{ veya } k>k_0} a_{jk}^{nm} x_{jk}
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan (i) gereğince $\widehat{\mathbf{x}} \in D_1(\mathcal{A})$ (veya $D_2(\mathcal{A})$) elde edilir. Dolayısıyla $D_1(\mathcal{A})$ ve $D_2(\mathcal{A})$ kümeleri homojendir (Visser 1938). Homojen kümelerin

0 veya 1 ölçülü olduğunu biliyoruz. Ayrıca $D_2(\mathcal{A}) \subset D_1(\mathcal{A})$ olduğundan $P(D_1(\mathcal{A})) = 1$ olması $P(D_2(\mathcal{A})) = 1$ sonucunu gerektirir ise ispat tamamlanır. $\mathbf{x} \in D_1(\mathcal{A})$ olsun.

$$p - \lim_{n,m} \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} x_{jk} = p - \lim_{n,m} \frac{1}{2} \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} + p - \lim_{n,m} \frac{1}{2} \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} r_{jk}(\mathbf{x}) \tag{5.5}$$

olup hemen her $\mathbf{x}$ için $p - \lim\limits_{n,m} \sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} r_{jk}(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ olsun. (v) koşulundan integral ile toplam yer değiştirebilir.

$$\begin{aligned} \int_X h(\mathbf{x})\, dP(\mathbf{x}) &= \int_X \left(p - \lim_{n,m} \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} r_{jk}(\mathbf{x}) \right) dP(\mathbf{x}) \\ &= p - \lim_{n,m} \int_X \left(\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} r_{jk}(\mathbf{x}) \right) dP(\mathbf{x}) \\ &= p - \lim_{n,m} \sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} \left(\int_X r_{jk}(\mathbf{x})\, dP(\mathbf{x}) \right) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla hemen her $\mathbf{x}$ için $h(\mathbf{x}) = 0$ olur. Böylece (5.5) eşitliğinde sağdaki ilk limitin değeri $\frac{1}{2}$ olduğundan $\mathbf{x} \in D_2(\mathcal{A})$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Sonuç 5.1 $\mathcal{A} = \left(a_{jk}^{nm}\right)$ dört boyutlu sınırlı regüler bir matris olmak üzere $D_0(\mathcal{A})$ kümesi sıfır veya bir ölçülüdür.

Sonuç 5.2 $\mathcal{A} = \left(a_{jk}^{nm}\right)$, terimleri 0 ve 1'lerden oluşan dizilerin hemen hepsini toplayabilen dört boyutlu sınırlı regüler bir matris ise Borel özelliğine sahiptir.

Lemma 5.1 $\psi_{nm}(\mathbf{x}) = \sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} r_{jk}(\mathbf{x})$, $\mathcal{A}_{nm} = \sum\limits_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} \left(a_{jk}^{nm}\right)^2$ mevcut olsun ve Önerme 5.1' in (v) şartı gerçeklensin. Bu durumda r pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\int_X |\psi_{nm}(\mathbf{x})|^{2r}\, dP(\mathbf{x}) \leq \frac{(2r)!}{2^r r!} (\mathcal{A}_{nm})^r \tag{5.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Bu teoremin ispatı Lemma 4.2 yardımıyla kolaylıkla elde edilir.

Aşağıda çift diziler için Beppo-Levi teoremi ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 5.6 $\sum\limits_{n,m} f_{nm}$, X kümesi üzerinde tanımlı pozitif ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. Bu durumda

$$\int_X \left(\sum_{n,m=1,1}^{\infty,\infty} f_{nm}(\mathbf{x}) \right) dP(\mathbf{x}) = \sum_{n,m=1,1}^{\infty,\infty} \left(\int_X f_{nm}(\mathbf{x})\, dP(\mathbf{x}) \right)$$

gerçeklenir.

Teorem 5.7 $\mathcal{A} = \left(a_{jk}^{nm}\right)$ dört boyutlu matrisi Önerme 5.1' in (ii) ve (v) koşullarını gerçeklesin. Eğer

$$\sum_{n,m=1,1}^{\infty,\infty}\left(\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty}\left(a_{jk}^{nm}\right)^{2}\right)^{r} \tag{5.7}$$

serisi bir r pozitif tamsayısı için yakınsak ise $\mathcal{A}$ matrisi Borel özelliğine sahiptir.

İspat. $\mathcal{A}$ matrisinin Borel özelliğini gerçeklemesi hemen her $\mathbf{x} \in X$ için

$$\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} x_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1,1}^{\infty,\infty} a_{jk}^{nm} r_{jk}\left(\mathbf{x}\right)$$

ifadesinin $\frac{1}{2}$ değerine yakınsak olmasına denktir. Lemma 5.1 gereğince her r pozitif tamsayısı için (5.6) eşitsizliği gerçeklenmektedir. Diğer taraftan (5.7) serisi en az bir r pozitif tamsayısı için yakınsak olduğundan

$$\sum_{n,m=1,1}^{\infty,\infty}\int_{X}\left|\psi_{nm}\left(\mathbf{x}\right)\right|^{2r} dP\left(\mathbf{x}\right) < \infty$$

bulunur. Çift diziler için Beppo-Levi teoremi gereğince hemen her $\mathbf{x}$ için

$$\int_{X}\left(\sum_{n,m=1,1}^{\infty,\infty}\left|\psi_{nm}\left(\mathbf{x}\right)\right|^{2r}\right) dP\left(\mathbf{x}\right) < \infty$$

olur. Dolayısıyla hemen her $\mathbf{x}$ için

$$p - \lim_{n,m\to\infty} \psi_{nm}\left(\mathbf{x}\right) = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

$(C,1,1)$ dört boyutlu Cesàro matrisinin Borel özelliğine sahip olduğu yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak da kolaylıkla elde edilebilir.

Diğer taraftan Teorem 5.3' de dört boyutlu bir $\mathcal{A}$ matrisinin Borel özelliğine sahip olması için bir gerek koşul verilmişti.

Peki bu teoremin karşıtı doğru mudur? Bu sorunun cevabının "HAYIR" olduğunu aşağıda göstereceğiz.

Dört boyutlu bir matris iki boyutlu sonsuz matrislerin bir çift dizisi gibi düşünülebileceğinden her bir terime bir matris gibi bakabiliriz. Burada her bir terime bir iç matris diyeceğiz.

Dört boyutlu Cesàro matrisini gözönüne alalım ve bu matris yardımıyla dört boyutlu bir $\mathcal{A} = \left(a_{jk}^{nm}\right)$ matrisini aşağıdaki gibi inşa edelim:

Her bir iç matriste sıfır olmayan elemanları sütun olarak her mertebeden sağa doğru öteleyelim.

Örneğin $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ ... \end{bmatrix}$ iç matrisi için iki farklı muhtemel durum olduğundan

$$\left(a_{jk}^{11}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ ... \end{bmatrix}, \quad \left(a_{jk}^{12}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ ... \end{bmatrix}$$

olur. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ ... \end{bmatrix}$ iç matrisi için altı farklı durum söz konusu olduğundan

$$\begin{aligned} \left(a_{jk}^{13}\right) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ ... \end{bmatrix}, \quad \left(a_{jk}^{14}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ ... \end{bmatrix} ... \\ \left(a_{jk}^{17}\right) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ ... \end{bmatrix}, \quad \left(a_{jk}^{18}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ ... \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\left(a_{jk}^{21}\right)$, , $\left(a_{jk}^{26}\right)$ iç matrisleri de

$$\left(a_{jk}^{21}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & ... \\ \frac{1}{2} & 0 & ... \\ 0 & 0 & ... \\ ... \end{bmatrix}, \quad \left(a_{jk}^{22}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & ... \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ ... \end{bmatrix}, ..., \left(a_{jk}^{26}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ... \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ ... \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur. Benzer şekilde devam edilirse istenilen dört boyutlu $\mathcal{A}$ matrisi elde edilir. Açıkça görüleceği gibi inşa edilen $\mathcal{A}$ matrisi (5.3) koşulunu gerçekler. Şimdi de $(\eta, 2\mu)$ dikdörtgensel kısmında $(\eta\mu + r)$-tane 1 ve $(\eta\mu - r)$-tane 0 içeren $\{x_{jk}\}$ çift dizisini gözönüne alalım.

$r = 0$ durumunda terimleri 0 ve 1' lerden oluşan $\mathcal{A}$ matrisinin bir iç matrisi $\{x_{jk}\}$ çift dizisini 0 değerine toplar ve diğer bir iç matris ise 1 değerine toplar. Bu iç matrisler sırasıyla $\left(a_{j,k}^{n_0,m_0}\right)$ ve $\left(a_{j,k}^{n_1,m_1}\right)$ olsun.

Eğer $\dfrac{1}{\eta\mu}$' leri içeren $\left(a_{j,k}^{n_0,m_0}\right)$ iç matrisi için $\{x_{jk}\}$ çift dizisinin $(\eta, 2\mu)$ dikdörtgensel kısmındaki tüm 0' lara $\dfrac{1}{\eta\mu}$' ler karşılık gelirse

$$\sum_{j,k} a_{j,k}^{n_0,m_0} x_{jk} = 0$$

elde edilir. Ayrıca $\dfrac{1}{\eta\mu}$' leri içeren $\left(a_{j,k}^{n_1,m_1}\right)$ iç matrisi için $\{x_{jk}\}$ çift dizisinin $(\eta, 2\mu)$ dikdörtgensel kısmındaki tüm 1' lere $\dfrac{1}{\eta\mu}$' ler karşılık gelirse

$$\sum_{j,k} a_{j,k}^{n_1,m_1} x_{jk} = 1$$

elde edilir.

$r > 0$ durumunda $\dfrac{1}{\eta\mu}$' leri içeren $\left(a_{j,k}^{n_0,m_0}\right)$ iç matrisi için $\{x_{jk}\}$ çift dizisinin $(\eta, 2\mu)$ dikdörtgensel kısmındaki tüm 1' lere $\dfrac{1}{\eta\mu}$' ler karşılık gelirse

$$\sum_{j,k} a_{j,k}^{n_0,m_0} x_{jk} = 1$$

olur. Ayrıca $\dfrac{1}{\eta\mu}$' leri içeren $\left(a_{j,k}^{n_1,m_1}\right)$ iç matrisi için $\{x_{jk}\}$ çift dizisinin $(\eta, 2\mu)$ dikdörtgensel kısmındaki tüm 0' lara $\dfrac{1}{\eta\mu}$' ler karşılık gelirse

$$\sum_{j,k} a_{j,k}^{n_1,m_1} x_{jk} = \frac{r}{\eta\mu}$$

elde edilir.

$r < 0$ durumunda $\dfrac{1}{\eta\mu}$' leri içeren $\left(a_{j,k}^{n_0,m_0}\right)$ iç matrisi için $\{x_{jk}\}$ çift dizisinin $(\eta, 2\mu)$ dikdörtgensel kısmındaki tüm 0' lara $\dfrac{1}{\eta\mu}$' ler karşılık gelirse

$$\sum_{j,k} a_{j,k}^{n_0,m_0} x_{jk} = 0$$

olur. Ayrıca $\dfrac{1}{\eta\mu}$' leri içeren $\left(a_{j,k}^{n_1,m_1}\right)$ iç matrisi için $\{x_{jk}\}$ çift dizisinin $(\eta, 2\mu)$ dikdörtgensel kısmındaki tüm 1' lere $\dfrac{1}{\eta\mu}$' ler karşılık gelirse

$$\sum_{j,k} a_{j,k}^{n_1,m_1} x_{jk} = 1 + \frac{r}{\eta\mu}$$

elde edilir.

Yukarıdaki durumlarda $\dfrac{1}{\eta\mu}$' leri içeren iç matriste $\sum a_{j,k}^{n,m} x_{jk}$ toplamının salınımı en az $1 - \dfrac{|r|}{\eta\mu}$ olur. $\{x_{jk}\}$ çift dizisinin $\mathcal{A}$-toplanabilir olması için $\eta, \mu \to \infty$ iken $\dfrac{|r|}{\eta\mu} \to 1$ olmak zorundadır.

$(C, 1, 1)$ matrisi Borel özelliğine sahip olduğundan $\dfrac{|r|}{\eta\mu} \to 1$ koşulunu sağlayan çift dizilerin kümesi 0 ölçülüdür. Dolayısıyla dört boyutlu $\mathcal{A}$ matrisi Borel özelliğine sahip değildir. O halde (5.3) ifadesi yeter koşul değildir.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Dizilerin yakınsaklığının incelenmesi matematik analizde önemli bir yer tutmaktadır. Bilindiği gibi bir dizi yakınsak ise her altdizisi de yakınsaktır ve bunun karşıtı da doğrudur. Bu düşünceden yola çıkarak 1943 yılında Buck ve Pollard verilen bir dizinin altdizileri ile $(0,1]$ aralığı arasında birebir eşleme kurup "her altdizisi" kavramı yerine "hemen her altdizisi" kavramını alarak verilen bir dizinin Cesàro toplanabilmesi ile altdizilerinin Cesàro toplanabilmesi arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Diğer taraftan altdizilerin toplanabilmesine paralel olarak terimleri 0 ve 1' lerden oluşan dizilerin toplanabilmesi de toplanabilme teorisinin önemli bir problemidir. Bilindiği gibi regüler bir matrisin toplayamayacağı terimleri 0 ve 1' lerden oluşan en az bir dizi vardır. Borel, terimleri 0 ve 1' lerden oluşan dizilerin hemen hepsinin $\frac{1}{2}$ değerine Cesàro toplanabildiğini göstermiştir.

Bu tez çalışmasında alışılmış diziler uzayında q-Cesàro matrisinin Buck-Pollard özelliği incelenmiştir. Bu bağlamda alışılmış sınırlı dizilerin q-Cesàro toplanabilmesi için bir karakterizasyon verilmiştir. Ayrıca dört boyutlu Cesàro ve q-Cesàro matrislerinin Buck-Pollard özelliği de incelenmiştir. Bununla birlikte dört boyutlu toplanabilme matrislerinin Borel özelliğine ilişkin gerek şart olup yeter şart olmayan, ayrıca yeter şart olup gerek şart olmayan bazı sonuçlar verilmiştir.

Ne yazık ki dört boyutlu bir matrisin Borel özelliğine sahip olması için bir gerek ve yeter şart olup olmadığı açık bir problem olarak durmaktadır.
Elde edilen sonuçlar, çift indisli dizilerin toplanabilmesi için oldukça önem arz etmektedir.

KAYNAKLAR

Agnew, R. P. 1944. Summability of subsequences. Bull. Amer. Math. Soc. vol. 50; 596-598.

Borel, E. 1909. Les probabilities denombrables et leurs applications arithmetiques. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. vol. 27; 247-271.

Bromwich, T.J.I'A. 1942 *An Introduction to Theory of Infinite Series.* London, MacMillan.

Buck, R. C. 1943. A note on subsequences. Bull. Amer. Math. Soc. vol. 49; 898-899.

Buck, R. C. and Pollard, H. 1943. Convergence and summability properties of subsequences. Bull. Amer. Math. Soc. vol. 49; 924-931.

Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Univ. Press, UK.

Connor, J. 1990. Almost none of the sequences of 0's and 1's are almost convergent. Internat. J. Math. Math. Sci. vol. 13; 775-777.

Crnjac, M., Čunjalo, F. and Miller, H. I. 2004. Subsequence characterizations of statistical convergence of double sequences. Radovi Math. vol. 12; 163-175.

Garling, D. J. H. 2007. Inequalities: A Journey into Linear Analysis, Cambridge University Press, New York.

Garreau, G.A. 1951. A note on the summation of sequences of 0's and 1's. Annals of Mathematics, vol. 54; 183-185.

Hamilton, H. J. 1936. On transformations of double sequences. Bull. Amer. Math. Soc. vol. 42; 275-283.

Khan, M. K. and Orhan, C. 2010. Characterizations of strong and statistical convergences. Publ. Math. Debrecen. vol.76; 77-88.

Hardy, G. H. 1919. *On the convergence of certain multiple series.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 19, 86-95.

Hill, J. D. 1945. Summability of sequences of 0's and 1's. Annals of Mathematics. vol. 46; 556-562.

Hill, J. D. 1951. The Borel property of summability methods. Pacific J. Math. vol. 1; 399-409.

Hill, J. D. 1954. Remarks on the Borel property. Pacific J. Math. vol. 4; 227-242.

Huan,N. V. and Quang, N. V. 2012. The Doob inequality and strong law of large numbers for multidimensional arrays in general Banach spaces. Kybernetika (Prague). vol. 48; 254–267.

Kacmarz, S. and Steinhaus, H. 1935. Theorie der orthogonalreihen. Warsaw; 125-132.

Keagy, T. A. 1978. Summability of subsequences and rearrangements of sequences. Proc. Amer. Math. Soc. vol. 72;492-496.

Keogh, F. R. and Petersen, G. M. 1961. Riesz summability of subsequences. Quart. J. Math. Oxford (2) vol. 12; 33-44.

Knopp, K. 1931. Theorie und anwendung der unendlichen reihen. Springer. Berlin.

Lorentz, G. G. 1948. A contribution to the theory of divergent sequences. Acta Math. vol. 80; 167-190.

Miller, H. I. 1982. On a result of Steinhaus and Buck. Radovi Math. vol. 20; 149-153.

Miller, H. I. 1995. *A measure theoritic subsequences characterization of statistical convergence*. Trans. Amer. Soc. 347. 5; 1811-1819.

Miller, H. I. and Orhan, C. 2001. On almost convergent and statistically convergent subsequences. Acta. Math. Hungar., vol. 93; 135-151.

Móricz, F. 1979. On the convergence in a resricted sense of multiple series. Analysis Mathematica. vol. 5; 135-147.

Móricz, F. 1981. The kronecker lemmas for multiple series and some applications. Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. vol. 37; 39-50.

Nathanson, I. P. 1964. Theory of functions of a real variable. Frederick Ungar Publishing Co. New York.

Parameswaran, M. R. 1961. Note on the summability of sequences of zeros and ones. Proc. Nat. Inst. Sci. India Part A. vol. 27; 175-177.

Patterson, R. F. 1999. Double sequence core theorems. Int. J. Math. Sci. vol. 22; 785-793.

Petersen, G. M. 1960. Almost convergence and the Buck-Pollard property. Proc. Amer. Math. Soc. vol. 11; 469-477.

Pringsheim, A. 1898. *Elementare theorie der unendliche doppelreihen*. Sitsungs Berichte der Math. Akad. der Wissenschafften zu Müch. Ber. 7, 101-153.

Rhaly, H. C. 1989. p-Cesàro matrices. Houston Journal of Mathematics vol. 15; 137-146.

Quang, N. V. and Huan, N. V. 2009. On the strong law of large numbers and L_p-convergence for double arrays of random elements in p-uniformly smooth Banach spaces. Statist. Probab. Lett. vol. 79; 1891-1899.

Robison, G. M. 1926. Divergent double sequences and series. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 28; 50-73.

Tsuchikura, T. 1950. Arithmetic means of subsequences. Tôhoku Mathematical journals. vol. 2; 188-191.

Tsuchikura, T. 1951. Notes on Fourier analysis (XL): Remarks on the Rademacher system. Proc. Jap. Acad. vol. 27; 141-145.

Unver, M. 2013. Inclusion results for four dimensional Cesàro submethods. Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. vol. 58; 43-54.

Visser, C. 1938. The law of nought-or-one in the theory of probability. Studia Math. vol. 7; 143-149.

Wilansky, A. 2000. Summability through Functional Analysis. Elsevier Science Publisher B.V. Amsterdam.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Emre TAŞ

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 04/06/1986

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Sokullu Mehmet Paşa Lisesi

Lisans : Ankara Üniversitesi, Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi, FBE

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Ankara Üniversitesi

Yayınları:

- **Orhan C., Taş E. and Yurdakadim T.** 2012. The Buck-Pollard property for p-Cesàro matrices. Numer. Funct. Anal. Optim. vol. 33; 1-7.
- **Yurdakadim T., Taş E. and Sakaoğlu İ.** 2012. Approximation of functions by the sequence of integral operators. Applied Mathematics and Computation. vol. 219; 3863-3871.
- **Yurdakadim T., Taş E.** 2013. Double sequences and Orlicz functions. Periodica Mathematica Hungarica. vol. 67; 47-54.
- **Taş E., Orhan C. and Yurdakadim T.** 2013. The Stancu-Chlodowsky Operators based on q-Calculus. AIP Conference Proceedings. vol. 1558; 1152-1155.
- **Yurdakadim T., Taş E. and Atlihan, Ö.** 2013. Statistical Approximation Properties of Convolution Operators for Multivariables. AIP Conference

Proceedings Volume: 1558; 1156-1159.

- **Taş E. and Yurdakadim T.** 2013. Characterization of uniform statistical convergence for double sequences. Miskolc Mathematical Notes. vol. 13; 543-553.
- **Atlihan, Ö. and Taş E.** 2015. An abstract version of the Korovkin theorem via $\mathcal{A}$-summation process. Acta Math. Hungar. vol. 145; 360-368.

- **Taş E**. The Borel Property of 4-dimensional Matrices. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. Accepted.