

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YÜKSEK BASINÇ GRADYANLI AKIŞIN
SAYISAL MODELLENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Alaz TALAY

Gemi İnşaatı ve Gemi Makinaları Mühendisliği Anabilim Dalı

Gemi İnşaatı ve Gemi Makinaları Mühendisliği Programı

MAYIS 2015

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YÜKSEK BASINÇ GRADYANLI AKIŞIN
SAYISAL MODELLENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Alaz TALAY
(508101002)**

Gemi İnşaatı ve Gemi Makinaları Mühendisliği Anabilim Dalı

Gemi İnşaatı ve Gemi Makinaları Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer GÖREN

MAYIS 2015

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 508101002 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Alaz Talay, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “Yüksek Basınç Gradyanli Akışın Sayısal Modellenmesi” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Ömer GÖREN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Ali Can TAKİNACI**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Fahri ÇELİK
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **4 Mayıs 2015**
Savunma Tarihi : **27 Mayıs 2015**

Güneşli gökyüzünde yıldızları görenlere,

ÖNSÖZ

Son derece zorlu, hayal kırıklıkları ile dolu bu tez çalışması boyunca her umudumu kaybettiğim anda bana yeniden güven veren, her daim elimden tutan, öngörülerini, nezaketi, içtenliği ve hayata karşı tutumuyla bana örnek olan çok değerli hocam Prof.Dr. Ömer Gören'e teşekkür etmek isterim.

Ayrıca öğrenimim sürecinde her türlü lojistik desteğinden dolayı babam Suat Talay'a ve her türlü psikolojik desteğinden ötürü annem Semra Talay'a teşekkürü bir borç bilirim.

Bu çalışma SAN-TEZ kapsamında desteklenmiştir. Bu bağlamdaki katkılarından dolayı yetkililere şükranlarımı sunarım.

Mayıs 2015

Alaz TALAY

(Gemi İnş. ve Deniz Tek. Müh.)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET.....	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
2. HAD ANALİZLERİ	3
2.1.1. Korunum ifadesi.....	3
2.1.2. Akının ayrıntılı incelenmesi.....	6
2.1.3. Kütlenin korunumu ifadesi.....	6
2.1.4. Momentumun korunumu ifadesi.....	7
2.1.5. Enerjinin korunumu ifadesi.....	8
2.2. Ayrıklaştırma Metodu	10
3. SONLU HACİMLER YÖNTEMİ.....	11
3.1. Ağ Tipleri	12
3.2. Yüksek Basınç Gradyanlı Akış İçin Sonlu Hacimler Yöntemi.....	13
3.2.1. Korunum denklemlerinin ayrıklaştırılması	13
3.2.2. Ön-koşullandırma (Preconditioning)	17
3.2.3. Roe flux scheme.....	19
3.2.4. Roe şemasının uygulaması.....	20
3.2.5. CFL koşulu.....	21
3.2.6. İdeal gaz tanımlaması.....	22
3.3. ANSYS FLUENT Hakkında Genel Bilgi	22
4. İNTERPOLASYONLU PARÇACIK HİDRODİNAMİĞİ (İPH)	23
4.1. Sayısal Çözüm Yaklaşımları ve Karşılaştırması	24
4.1.1. Lagrange yaklaşımı	24
4.1.2. Euler yaklaşımı	25
4.2. İPH Formülizasyonu	26
4.2.1. Çekirdek yaklaşımı	26
4.2.2. Parçacık yaklaşımı	28
4.3. Yüksek Basınç Gradyanlı Akış İçin İPH Yöntemi	29
4.3.1. Algoritma	30
4.3.2. Çekirdek fonksiyonu	30
4.3.3. Kütlenin korunumu (Yoğunluk ifadesi).....	31
4.3.4. Momentumun korunumu.....	33
4.3.5. Enerjinin korunumu	34
4.3.6. Yapay viskozite ifadesi	36
5. VAKA ÇALIŞMASI	39
5.1. Çözüm Uzayı.....	39
5.2. Başlangıç Koşulları	40
5.3. Sonlu Hacimler Yöntemi ile Çözüm	40
5.3.1. Çözüm ağı	40
5.3.2. Sınır koşulları.....	42

5.3.3. Ortam koşulları.....	42
5.3.4. Çözücü ayarları	42
5.3.5. Çözüm ağından bağımsızlık çalışması	42
5.3.6. Sonuçlar.....	43
5.4. İPH Yöntemi ile Çözüm.....	48
5.4.1. Parçacık yerleşimi	48
5.4.2. Çözücü ayarları	50
5.4.3. Sonuçlar.....	50
6. SONUÇLAR & YORUMLAR.....	55
KAYNAKLAR.....	57
ÖZGEÇMİŞ.....	59

KISALTMALAR

ALE	: Arbitrary Lagrangian Eulerian
İPH	: İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği
JWL	: Jones-Wilkins-Lee
EOS	: Equation of State
CFL	: Courant–Friedrichs–Lewy
PDE	: Partial Differential Equation
FVM	: Finite Volume Method
SPH	: Smoothed Particle Hydrodynamics
HAD	: Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 : Korunum denklemleri (Lagrange yaklaşımına göre).	24
Çizelge 4.2 : Korunum denklemleri (Euler yaklaşımına göre).	26
Çizelge 5.1 : Başlangıç koşulları.	40
Çizelge 5.2 : Çözüm ağı eleman sayıları.	41

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Korunum ifadesinin geçerli olduğu kontrol hacmi.....	4
Şekil 3.1 : Kontrol hacminin tanımı.	11
Şekil 3.2 : Sonlu hacimler yöntemi akış şeması.	12
Şekil 3.3 : Ağ elemanları.	12
Şekil 3.4 : 3-B akış için çözüm ağı oluşturma süreci.	13
Şekil 3.5 : Çözüm uzayı.....	14
Şekil 3.6 : En küçük kareler metodu.....	16
Şekil 4.1 : i parçacığı için tanımlanmış W fonksiyonunun etki alanı.	28
Şekil 4.2 : İPH kodu algoritması.	30
Şekil 5.1 : Çözüm uzayı.....	39
Şekil 5.2 : Blok yapısı.....	41
Şekil 5.3 : Yakınsama eğrisi.	43
Şekil 5.4 : 0.2×10^{-3} sn de Yoğunluk – Konum eğrisi.....	44
Şekil 5.5 : 0.2×10^{-3} sn de Basınç – Konum eğrisi.....	44
Şekil 5.6 : 0.2×10^{-3} sn de Hız – Konum eğrisi.	45
Şekil 5.7 : 1.0×10^{-3} sn de Yoğunluk – Konum eğrisi.....	45
Şekil 5.8 : 1.0×10^{-3} sn de Basınç – Konum eğrisi.....	46
Şekil 5.9 : 1.0×10^{-3} sn de Hız – Konum eğrisi.	46
Şekil 5.10 : 2.2×10^{-3} sn de Yoğunluk – Konum eğrisi.	47
Şekil 5.11 : 2.2×10^{-3} sn de Basınç – Konum eğrisi.....	47
Şekil 5.12 : 2.2×10^{-3} sn de Hız – Konum eğrisi.	48
Şekil 5.13 : İPH çözüm uzayı.	49
Şekil 5.14 : 0.2×10^{-3} sn de Yoğunluk – Konum eğrisi.	50
Şekil 5.15 : 0.2×10^{-3} sn de Basınç – Konum eğrisi.....	51
Şekil 5.16 : 0.2×10^{-3} sn de Hız – Konum eğrisi.	51
Şekil 5.17 : 1.0×10^{-3} sn de Yoğunluk – Konum eğrisi.	52
Şekil 5.18 : 1.0×10^{-3} sn de Basınç – Konum eğrisi.....	52
Şekil 5.19 : 1.0×10^{-3} sn de Hız – Konum eğrisi.	53
Şekil 5.20 : 2.2×10^{-3} sn de Yoğunluk – Konum eğrisi.	53
Şekil 5.21 : 2.2×10^{-3} sn de Basınç – Konum eğrisi.....	54
Şekil 5.22 : 2.2×10^{-3} sn de Hız – Konum eğrisi.....	54

YÜKSEK BASINÇ GRADYANLI AKIŞIN SAYISAL MODELLENMESİ

ÖZET

Akışkanların hareketlerinin ön görülmesi için hesaplamalı yöntemlerin kullanılması bilgisayar teknolojisinin gelişmesinin etkisiyle günümüzde gittikçe yaygınlaşan bir çalışma alanıdır. Bu konu son derece karmaşık geometriler için ve deney imkanı olmayan olaylar ya da tasarımlar için öngörü imkanı sunmakla beraber, deneysel çalışmaların maliyetini azaltmaya yönelik olarak da kullanılabilir. Bu tez kapsamında yüksek basınç gradyanlı akış problemi deney imkanı son derece kısıtlı ve pahalı olan su altı patlaması probleminin çözümüne öncü olması amacıyla ele alınmıştır.

Su altı patlaması problemi askeri endüstride su üstü ya da su altı gemisi tasarımından, torpido tasarımına kadar geniş bir yelpazede ele alınmaktadır. Tasarımlara yön göstermesi açısından endüstride yapılan simulasyonlar ise genellikle mukavemet hesaplamalarına uygulamasının doğruluğu açısından ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) yöntemi kullanılarak, açık (explicit) çözümler yardımı ile yapılmaktadır.

Ancak bu yöntem su altı patlamasına bağlı deformasyon probleminin ön aşaması olan patlama sonucu oluşan şok dalgasının yayılımı simulasyonları konusunda hem çözümün doğruluğu açısından hem de sayısal çözümün stabilitesi açısından zorluklar ve dezavantajlar içermektedir. Bahsi geçen zorlukların çözümü için yüksek sayıda eleman içeren çözüm ağları ve düşük zaman adımları kullanılmaktadır. Bu nedenle sayısal analizin çözümü görece uzun sürmekte ve çözüm için gerekli bilgisayar konfigürasyonu, dolayısıyla maliyet artmaktadır.

Konunun önemi, elde edilen sonuçların doğruluk oranları ve çözüm süreleri göz önüne alınarak endüstride kullanılan mevcut yöntemlerden daha efektif bir yöntem arayışına girilmiştir. Bu kapsamda uygunluğu ve avantajları Hirch ve Anderson tarafından ifade edilen Sonlu Hacimler Yöntemi ile fiziksel fenomeni temsil edebilme yeteneği Monaghan ve Liu tarafından tarif edilen İPH yöntemi örnek bir probleme uygulanmıştır. İki yöntemde kendi içlerinde uygulama metodolojileri açısından literatür incelemeleri ile optimize edilerek doğruluk oranları artırılmıştır.

Uygulama metodolojileri belirlenirken literatürde bulunan örnek problemin doğasına uygun olarak hareketi tanımlayan denklemlerin ayrıştırılması yapılmış, çözüm adımları ve ortam parametreleri ve sınır koşulları ona göre belirlenmiştir. Ancak tez kapsamında sunulmuş olan metodolojiler bazı değişiklikler uygulanarak su altı patlaması problemine uygun hale getirilebilir. Bu değişikliklere ihtiyaç duyulması büyük oranda örnek çalışmanın ideal gaz tanımına uyan bir ortamda yapılması ile ilişkilidir. Bu nedenle literatürde bolca bulunan sıkıştırılabilir sıvı tanımlamalarından biri kullanılarak denklemler revize edilerek metodoloji su altı patlamalarına uygulanabilir.

Bu tez çalışması kapsamında sonlu hacimler yönteminin uygulamasında ANSYS FLUENT programı kullanılmış, İPH yöntemi için ise Fortran programlama dili kullanılarak iki boyutlu şok dalgasının ilerlemesini hesaplayan bir kod yazılmıştır. Sonuçlar literatürde bulunmuş olan bir çalışma ile karşılaştırılarak doğrulanmış ve yöntemlerin uygunluk miktarı incelenmiştir.

Elde edilmiş olan sonuçlar, kullanılmış olan sayısal yöntemlerin ve uygulama metodolojilerinin yüksek basınç gradyanının ilerlemesi probleminin çözümü açısından uygun olduklarını göstermekle birlikte, literatürde bahsedilmiş olan dezavantajlarını da göstermiştir.

A NUMERICAL STUDY ON HIGH PRESSURE GRADIENT FLOWS

SUMMARY

Due to the developments in computer sciences, numerical solutions to flow related problems are more interesting and developing area. In the last thirty years CFD has become a feasible tool to be integrated in design process. It allows engineers to do simulations for highly complex designs and investigate complex phenomena for which experiments are too expensive or impossible. One of those investigation areas is underwater explosion.

One may divide the underwater explosion phenomenon into two main parts. If the first one is the response of the structure to the acceleration due to an underwater explosion, the second one is the propagation of the shockwave due to the explosion. In this thesis the second part is investigated.

The propagation of the shockwave due to an explosion can be divided into two parts also. One may investigate methods to simulate the time dependent amplitude of the shockwave due to the underwater explosion. This subject may include bubble collapse, secondary shockwaves, cavitation etc. Also there is a problem of capturing a fully developed shockwave's propagation.

In literature and in industry the first part of this problem is commonly captured with JWL equation (Jones-Wilkins-Lee equation), which is an EOS (Equation of State) for explosives. There are several coefficients in the JWL equation and the values of those coefficients are given extensively in many references for different kind of explosives.

The present thesis is focused on the second part, the propagation of the fully developed shockwave. Shockwave can be defined as an abrupt disturbance in the media. There are two characteristic properties of the shockwave. First one is the shockwave's propagation speed is faster or equal to the speed of sound in that media. The second characteristic property of the shockwave is that the disturbance in the media is nearly un-continuous.

Numerical methods that are used for capturing the shockwave, due to its speed and nearly uncontinuous nature, need to be highly complex. The best discretization of the PDE's and the discretization of the field variables are yet to be found. For example the research that is done by Kanamori & Suzuki (2011) shows that high order schemes tend to oscillate near gradient region and low order schemes tends to smooth the discontinuity. Also because of the high propagation speed and pressure gradient, the mesh that needs to be used is highly dense. As a result of the dense mesh computational effort is considerably high for these kind of calculations. Furthermore the CFL number (time step that is used) needs to be small because of the stability issues which results in long computation time.

In this thesis different methods and approaches for simulation of high gradient flows are employed in order to overcome the aforementioned difficulties for calculating high pressure gradient flow (shock propagation).

Two different numerical methods are used for calculating this phenomenon. The first one is Finite Volume Method (FVM) and the second one is Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). In both methods conservative integral forms of Euler equations are used. According to Hirsch (2007), the integral form is fully capable of

defining un-continuities such as shockwaves. This is done in order to eliminate the stability issues related with the nature of the phenomena. Implicit time stepping scheme is used for FVM in order to use higher CFL numbers (time steps) for calculations and reducing the solution time.

SPH method, because that it is a Lagrangian solution method, results in fewer computational nodes (particles) which creates a smaller solution matrix and reduces the solution time. Also according to Monaghan (1988), particle based methods are more suitable to define the physical phenomena because that every particle represents the atomic structure of the fluid.

In the present thesis after a brief introduction to the problem in chapter one, the meaning of conservative form, the definition and the physical meaning of flux and the derivations of Euler equations (continuity, momentum and energy equations) in conservative form are explained at length in chapter two.

In chapter three, the methodology used for capturing high pressure gradient flow using FVM is explained at length. The discretization methods for both field variables and flux, the preconditioning technique and advantages, flux treatment and its application to a simple PDE (partial differential equation), the meaning of CFL condition and the requirement to fulfil in order to solve the problem at hand and the equation of state used to model compressible fluid (in gas state) are explained and mathematically shown.

Fundamentals of SPH method and the methodology for capturing high pressure gradient flow using SPH method is explained in chapter four. SPH is a meshless Lagrangian method which is developed by astrophysicists in the late 70's. This is a relatively new method and shows a great promise on violent flows.

In chapter four, after a brief introduction, Lagrangian and Eulerian approaches to engineering problems are discussed and the related formulations, the difference between them and the advantages/disadvantages of both are given. Characteristic features of SPH formulization are introduced. Integral definition of any field variable is given and the definition and usage of kernel function is introduced. The particle approach and its implementation is discussed. After the fundamentals, the particle approach is applied to Euler equations and the optimum forms of the equations for capturing high pressure gradient flow using SPH method are given.

In chapter five, both FVM and SPH method are employed to the same problem and the results are presented with comparison to the study that is done by Wardlaw (1998). The aforementioned study is done in 2-D and with a compressible fluid which can be defined with ideal gas equation of state. The calculations as a part of present thesis are done using the same operating conditions.

In order to simulate the benchmark case with FVM, a well-documented commercial code, ANSYS FLUENT is used as the solver. Domain is created by ANSYS Design Modeller and the generation of the mesh is performed by the pre-processor, ICEM-CFD. The mesh convergence study is done and the solver preferences are given for the simulation.

For simulating the same benchmark case by SPH method, a solver code is written as a part of this thesis. In chapter five the manipulation of the solution domain and the distribution of real and virtual particles are shown. Solver algorithm and the results are shared.

In the end, the computations performed show that both the numerical methods and the solution strategies that are applied to the benchmark case as a part of this thesis are suitable for capturing shockwaves. The advantages and disadvantages of both methodologies are discussed in chapter six.

1. GİRİŞ

Momentum, ısı ve kütle transferi süreçlerini tanımlamak için kullanılan denklemler Navier-Stokes ve Enerjinin korunumu denklemleri olarak bilinir. Bu kısmi diferansiyel denklemler 19.YY başlarında türetilmiş ve analitik olarak çözülememiştir. Fakat yıllar içerisinde farklı yöntemler ile hesaplamalı olarak çözülmeye çalışılmışlardır. Bunlardan, Lewis Fry Richardson'ın sonlu elemanlar ile yaptığı çalışma (Hunt, 1998), Apollo Milton Olin Smith ve John Hess'in daha sonradan Panel Metodu (Potansiyel akış çözmektedir) olarak isimlendirilen ve Boeing ve Lockheed gibi firmalar tarafından geliştirilerek kullanılan yöntemi (Hess & Smith, 1967), Charlie Boppe'un WIBCO kodu (transonic akışlardaki non-lineerliği de hesaplayabilmektedir (Boppe, 1977)), Jameson'un FLO57 kodu (Euler denklemleri çözülmüştür) (Jameson & Schmidt & Turkel, 1981) HAD açısından en belirginleri olarak sayılabilir. Ancak Navier - Stokes denklemleri nümerik çözücülerin asıl hedeflediği noktadır. Bunun nedeni viskoz etkileri de hesaba katarak akışkan davranışını doğru bir şekilde modelleyebilmesidir.

Bu tez kapsamında ele alınan yüksek basınç gradyanlı akış çözümleri ise su altı patlaması çözümüne öncü olması amacıyla ele alınmıştır. Su altında şokun ilerlemesi probleminin sayısal olarak hesaplanması ise su altı silahlarının etki alanlarının tayini ve onlardan savunmak gibi geniş bir uygulama alanına ve dolayısı ile askeri endüstride büyük bir öneme haizdir.

Su altı patlaması modellemesi genel manada iki adımda incelenebilir. İlk adım patlama, ikincisi ise şokun yayılmasıdır. Patlama oluşan şok dalgasının gücünü (enerjisini) hesaplamak için önemli iken genel olarak patlama probleminin çözülmesinin nedeni olan yüzer ya da batık cisme (gemi, denizaltı vd.) patlama sonrasında ne kadar zarar geleceği şok dalgasının yayılımı ile ilgilidir.

Şok dalgası çok basitçe ortam değişkenlerinde (basınç, yoğunluk vd.) değişikliğe yol açan, zaman ve uzayda ilerleyen bir dalgadır. Bu dalga ortamda (katı, gaz, plazma ya

da sıvıda) ses hızından daha hızlı bir şekilde ilerlediği zaman dalgaya şok dalgası denmektedir. Bu dalganın karakteristik özelliği ise ortamın basınç, yoğunluk ve sıcaklık değerlerinde neredeyse süreksiz denilebilecek bir değişime yol açmasıdır (Anderson, 1995).

Şok dalgasının keskin bir süreksizlik olması doğru bir şekilde yakalanmasını zorlaştırmaktadır. Düşük dereceden nümerik şemalar, var olan süreksizliği düzleştirerek sönümünü hızlandırmakta, yüksek dereceden nümerik şemalar ise süreksizlik bölgesinde salınımlara yol açarak gerçek dışı sonuçlar vermektedirler (Kanamori & Suzuki, 2011).

Konunun önemi ve elde edilen sonuçların doğruluk oranları göz önüne alınarak endüstride kullanılan mevcut yöntemlerden daha efektif bir yöntem arayışına girilmiştir. Bu kapsamda uygunluğu ve avantajları Hirch ve Anderson tarafından ifade edilen Sonlu Hacimler Yöntemi ile fiziksel fenomeni temsil edebilme yeteneği Monaghan ve Liu tarafından tarif edilen İPH yöntemi probleme uygulanmış, kendi içlerinde uygulama metodolojisi de literatür incelemeleri ile optimize edilerek doğruluk oranları arttırılmıştır.

Bu çalışma kapsamında şok dalgasının yayılması incelenirken su gibi sıkıştırılamaz tanımına uyan bir akışkan değil, uygulama basitliği açısından ideal gaz tanımına uyacak bir akışkan kullanılmıştır. Ancak akışkanın yoğunluğu ve buna bağlı olarak bazı parametrelerini tanımlayan hal denklemleri haricinde belirtilmiş olan metodolojilerin şok fenomenine uygulanabilirliği bir değişiklik arz etmemektedir. Belirtilmiş olan metodların şok fenomeninin çözümüne uygunluğu ise örnek bir çalışma ile ortaya konulmuş, çözüm yönteminin avantaj ve dezavantajları sonuçlar ve yorumlar kısmında belirtilmiştir.

2. HAD ANALİZLERİ

HAD analizinin temel ilkesi olarak her şeyden önce akışın matematiksel olarak ifade edilmesi gerekir. Temel olarak akış üç değişkenin zamanda ve çözüm uzayında (çözüm hacminde) korunduğu kabulünden (kuralından) yola çıkılarak ifade edilmektedir. Bunlar kütle, momentum ve enerjidir. Bu bölüm kapsamında üçünün de korunum ifadeleri matematiksel olarak gösterilecek ve uzayda korunumunu sağlayacak şekilde ifade edilecektir.

Korunum ifadeleri hem integral formda hem de türev formunda ifade edilebilmektedir. Aralarındaki temel fark, integral form kullanılması durumunda şok gibi süreksizliklerin ifade edilmesi teorik olarak yanlış olmayacaktır. Ancak türev formu; ifade edilen denklemin çözüm uzayında sürekli olduğunu (türev olduğu için) belirtir (Hirsch, 2007). Bu nedenle bu çalışma kapsamında integral form üzerinde durulmuştur.

2.1.1. Korunum ifadesi

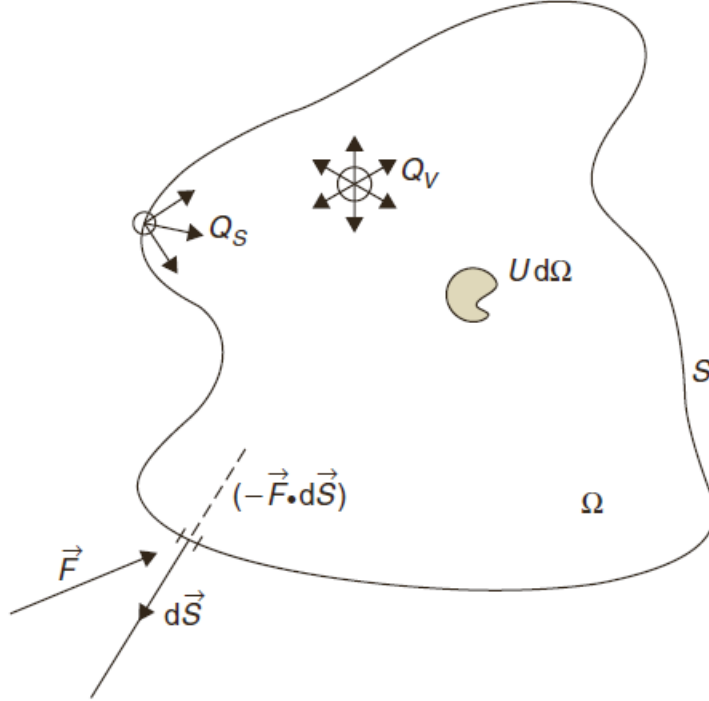
Çok genel anlamda tanımlı bir hacim (kontrol hacmi) içerisinde korunan değişkenin (kütle vd.) değişimi iç kaynaklardan (internal source) ve hacmin sınırı olan yüzeylerden geçen miktar ile ilişkilidir. Başka bir deyiş ile kontrol hacmi içerisindeki herhangi bir değişkenin değeri kontrol hacmine giren ve çıkan miktar ve kontrol hacmi içerisindeki kaynaklardan dolayı oluşan artış ya da azalış ile ifade edilir.

Kontrol hacminin sınırlarından geçen değişken miktarına akı (flux) denir. Daha kesin bir tanım yapmak gerekirse birim zamanda birim kontrol yüzeyinden geçen değişken miktarına akı denir (Hirsch, 2007). Akı zamanda ve uzayda değişmekle birlikte skalar değişkenler (yoğunluk, enerji vd.) için vektörel değer alırken, vektörel değişkenler (momentum vd.) için tensör formunda ifade edilir.

Daha önce de bahsedildiği üzere kütle, momentum ve enerji korunum ifadesini sağlayacak şekilde yazılabilir ancak entropi, sıcaklık gibi değişkenler için korunum

ifadesi uygulanması durumunda gerçekçi olmayacaktır. Bu değişkenler için de denklemler yazılır ancak korunum ifadesi formunda değildir (Hirsch, 2007).

Herhangi bir skalar için korunum ifadesini yazmak gerekirse;



Şekil 2.1 : Korunum ifadesinin geçerli olduğu kontrol hacmi.

Genel geçer değişkene U , tanımlı olduğu kontrol hacmine Ω ve kontrol hacminin dış yüzeylerine S denilirse eğer, kontrol hacmi içerisindeki U değişkenini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz;

$$\int_{\Omega} U d\Omega \quad (2.1)$$

U 'nun zamanla değişimini ise denklem (2.2) ile ifade edilir.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega \quad (2.2)$$

Akı ifadesi ise son derece temeldir ve denklem **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.** e verilmiştir.

$$F_n dS = \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (2.3)$$

Burada dikkat çekilmesi gereken nokta akının vektörel olmasıdır. Daha önce de bahsedildiği üzere eğer değişken skalar ise akı vektörel olur. Vektör, birim yüzey elemanının normali yönündedir.

Aynı ifadeyi tüm kontrol yüzeylerinde tolanırsa, toplam akı denklem (2.4) deki gibi ifade edebiliriz.

$$-\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (2.4)$$

Genel olarak literatürde yüzey normal vektörü dışarıya bakar şekilde tanımlanır. Bu nedenle içeri giren akı negatif değer alacaktır. Bundan kaçınmak için ifadenin başına eksi konulmuştur.

Son olarak ifadeye iç kaynakların tanıtılması gerekmektedir. Kaynakları hacim ve yüzey olarak ikiye ayırmanın anlatım açısından daha verimli olduğu düşünülmektedir. Bütün kontrol hacmi içerisindeki kaynakların toplam katkısı denklem (2.5) de verilmiştir.

$$\int_{\Omega} Q_V d\Omega + \int_S \vec{Q}_S \cdot d\vec{S} \quad (2.5)$$

Denklem (2.2) , (2.4) ve (2.5) birleştirildiğinde skalar bir değişken için korunum ifadesi denklem 2.6 daki haline gelir.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega = -\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \int_S \vec{Q}_S \cdot d\vec{S} \quad (2.6)$$

Denklem (2.6) literatürde genelde denklem (2.7) deki haliyle kullanılır:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} Q_V d\Omega + \int_S \vec{Q}_S \cdot d\vec{S} \quad (2.7)$$

Denklem (2.7) de yazılmış olan korunum ifadesi literatürde integral form olarak geçmektedir.

Eğer ki U değişkeni bir vektör ise akı ve yüzey kaynakları tensördür. Bu nedenle denklem (2.7) denklem (2.8) deki şekilde ifade edilir.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \vec{U} d\Omega + \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \vec{Q}_V d\Omega + \int_S \vec{Q}_S \cdot d\vec{S} \quad (2.8)$$

2.1.2. Akının ayrıntılı incelenmesi

Akı temel olarak iki parçada incelenmektedir. Bunlardan ilki akışkanın hareketinden kaynaklanmaktadır. Bu kısma iletim (convection) kaynaklı akı denilmektedir. İkinci kısım ise akışkanın moleküllerinin titreşiminden kaynaklanan veri aktarımıdır. Bu kısma ise taşınım (diffusion) kaynaklı akı denilmektedir. Taşınım kaynaklı akı akışkan hareket etmese dahi mevcuttur (Hirsch, 2007).

Eğer incelenen değişken skalar ise; iletim kaynaklı U akısı denklem (2.9) daki gibi ifade edilir.

$$\vec{F}_C = U \vec{v} \quad (2.9)$$

Eğer incelenen değişken vektörel ise; iletim kaynaklı $\vec{U}$ akısı denklem (2.10) daki gibi ifade edilir.

$$\vec{F}_C = \vec{U} \otimes \vec{v} \quad (2.10)$$

Taşınım kaynaklı akının incelenmesi ise biraz daha karmaşıktır. Taşınım bileşeni her U değişkeni için geçerli değildir. İlgilendiğimiz üç ifade arasından sadece enerjinin korunumu ifadesi açısından geçerliliği vardır. Bu nedenle enerjinin korunumu ifadesi incelenirken incelenecektir.

2.1.3. Kütlenin korunumu ifadesi

Birim hacmin kütlesi yoğunluk ile ifade edilir. Bu nedenle daha önce belirtilmiş olan genel değişken $U = \rho$ dur.

Daha önce de belirtildiği üzere kütle için akı ifadesi sadece iletim kaynaklıdır. Taşınım kaynaklı akı mevcut değildir. Burada iletim kaynaklı ρ akısı denklem (2.11)'deki gibi ifade edilir.

$$\vec{F}_C = \rho \vec{v} \quad (2.11)$$

Bu durumda ortamda bir kütle kaynağı olmadığı durum için integral formda kütle korunumu ifadesi denklem (2.12) şeklinde yazılabilir.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.12)$$

2.1.4. Momentumun korunumu ifadesi

Birim hacim için momentum ifadesini genel değişken $\vec{U}$ yerine koyulursa, U denklem (2.13) deki gibi ifade edilir.

$$\vec{U} = \rho \vec{v} \quad (2.13)$$

İletim kaynaklı momentum akısı ise denklem (2.14) deki gibi ifade edilir.

$$\vec{\bar{F}}_C = \rho \vec{v} \otimes \vec{v} \quad (2.14)$$

Kaynakların ifadesi için ise Newton kanunu kullanılır. Fiziksel bir sistemde momentumun değişmesine yol açan momentum kaynağı kuvvettir. Bu nedenle birim kütleye etkiyen dış kuvvete $\vec{f}_e$ ve iç kuvvete $\vec{f}_i$ dersek eğer; kaynak ifadeleri (birim hacim için) denklem (2.15) ve (2.16) daki gibi ifade edilir.

$$\vec{Q}_V = \rho \vec{f}_e \quad (2.15)$$

$$\vec{Q}_V = \rho \vec{f}_i \quad (2.16)$$

İç kuvvet uygulandığı yüzeyin konumuna ve oryantasyonuna göre değişim göstermektedir. Bu gerçekliği ifade etmek için iç kuvvet, denklem (2.17) deki gibi açılır.

$$\vec{f}_i = \bar{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (2.17)$$

Denklem (2.17) de kullanılan $\bar{\sigma}$ iç gerilme tensörüdür (hem konuma hem de oryantasyona bağlı olduğu için matematiksel olarak tensör kullanılması gerekir) ve akışkanın fiziksel özelliklerindendir. Newton tipi bir akışkan için iç gerilme tensörü aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\bar{\sigma} = -p\bar{I} + \bar{\tau} \quad (2.18)$$

Denklem (2.18) de kullanılan $\bar{I}$ birim tensör ve $\bar{\tau}$ viskoz kayma gerilmesi tensörüdür.

Viskoz kayma gerilmesi tensörü $\bar{\tau}$ denklem (2.19) daki gibi ifade edilir.

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \delta_{ij} \right] \quad (2.19)$$

Denklem (2.19) da kullanılan λ Stokes bağıntısından (termodinamik dengeye gelmiş Newton tipi akışkanlar için geçerlidir) yararlanarak hesaplanır. Stokes bağıntısı denklem (2.20) de verilmiştir.

$$2\mu + 3\lambda = 0 \quad (2.20)$$

İntegral formda momentumun korunumu denklem (2.21) ve (2.22) de verilmiştir.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega + \oint_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega + \oint_S \bar{\sigma} \cdot d\vec{S} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \vec{v} d\Omega + \oint_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \int_{\Omega} \rho \vec{f}_e d\Omega - \oint_S p \cdot d\vec{S} + \oint_S \bar{\tau} \cdot d\vec{S} \quad (2.22)$$

2.1.5. Enerjinin korunumu ifadesi

Öncelikle enerji denildiğinde genelde akla iç enerji gelmektedir. Ancak akış sırasında korunan değer toplam enerjidir, (Anderson, 1995). Toplam enerji iç enerji ile kinetik enerjinin toplamı olup birim kütle için E ile ifade edilir. E için ifade denklem (2.23)'de verilmiştir.

$$E = e + \frac{\vec{v}^2}{2} \quad (2.23)$$

Birim hacimde toplam enerji ρE ile ifade edilir.

İletim kaynaklı enerji akısı denklem (2.24) de verilmiştir:

$$\vec{F}_C = \rho \vec{v} \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \quad (2.24)$$

Taşıma kaynaklı enerji akısı ise denklem (2.25) de verilmiştir:

$$\vec{F}_D = -k \vec{\nabla} T \quad (2.25)$$

Denklem (2.25) de kullanılan k ısı iletim katsayısı, T ise mutlak sıcaklıktır.

Hacim enerji kaynakları ise dış kuvvetlerin ve diğer ısı kaynaklarının (radyasyon, kimyasal reaksiyon vd.) yaptığı işlerin toplamıdır. Diğer bütün ısı kaynakları q_H ile temsil edilmiştir.

$$Q_V = \rho \vec{f}_e \vec{v} + q_H \quad (2.26)$$

Yüzey enerji kaynağı ise benzer bir şekilde iç enerjilerin yaptığı işler. İfadesi denklem (2.27) de verilmiştir:

$$\vec{Q}_s = \vec{\sigma} \cdot \vec{v} \quad (2.27)$$

Denklemlerin hepsi birleştirildiğinde enerjinin korunumu ifadesi denklem (2.28)'deki halini alır.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega + \oint_S \rho E (\vec{v} \cdot d\vec{S}) - \oint_S k \vec{\nabla} T \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} (\rho \vec{f}_e \vec{v} + q_H) d\Omega + \oint_S (\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) \cdot d\vec{S} \quad (2.28)$$

Viskoz kayma gerilmesi tensörü açıldığında, enerjinin korunumu ifadesi denklem (2.29)'daki halini alacaktır:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho E d\Omega + \oint_S \rho E (\vec{v} \cdot d\vec{S}) - \oint_S k \vec{\nabla} T \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} (\rho \vec{f}_e \cdot \vec{v} + q_H) d\Omega - \oint_S p \vec{v} \cdot d\vec{S} + \oint_S \vec{\tau} \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (2.29)$$

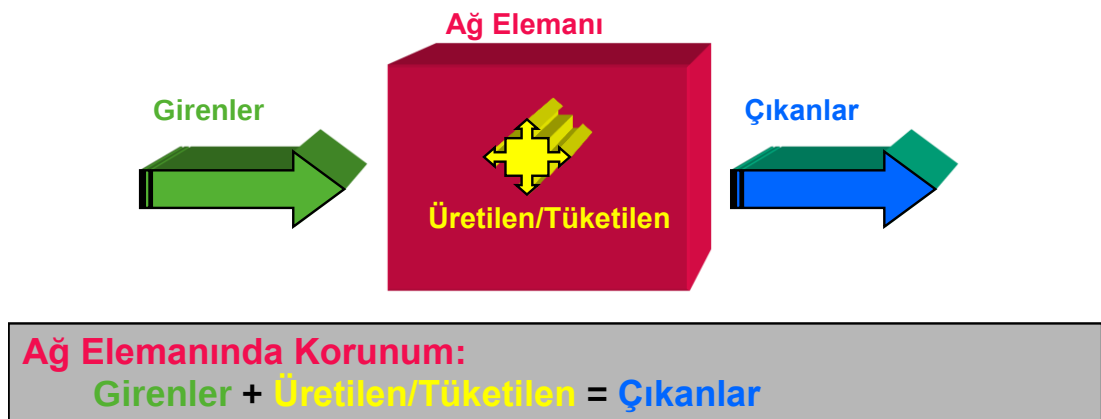
2.2. Ayırıklaştırma Metodu

Kullanılacak olan yöntem belirlendikten sonra ayırıklaştırma işlemi uygulanır. Bu işlem için literatürde bir çok yöntem vardır. Ancak bu çalışma kapsamında Sonlu Hacimler Yöntemi ve İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği uygulaması yapılmıştır.

3. SONLU HACİMLER YÖNTEMİ

Navier-Stokes ve Enerjinin korunumu denklemlerini çözme yöntemlerinden bir tanesi sonlu hacimler yöntemidir. Bu teknikte çözüm uzayı, çözüm ağı olarak adlandırılan küçük bölümlere ayrılır. Hareketi belirleyen denklemler her bir ağ elemanı için ayrılaştırarak iteratif olarak çözülür. Sonuç olarak her ağ elemanındaki değişkenler tüm çözüm uzayı içinde baştan sona tespit edilir. Böylece akışın davranışı tespit edilmiş olur.

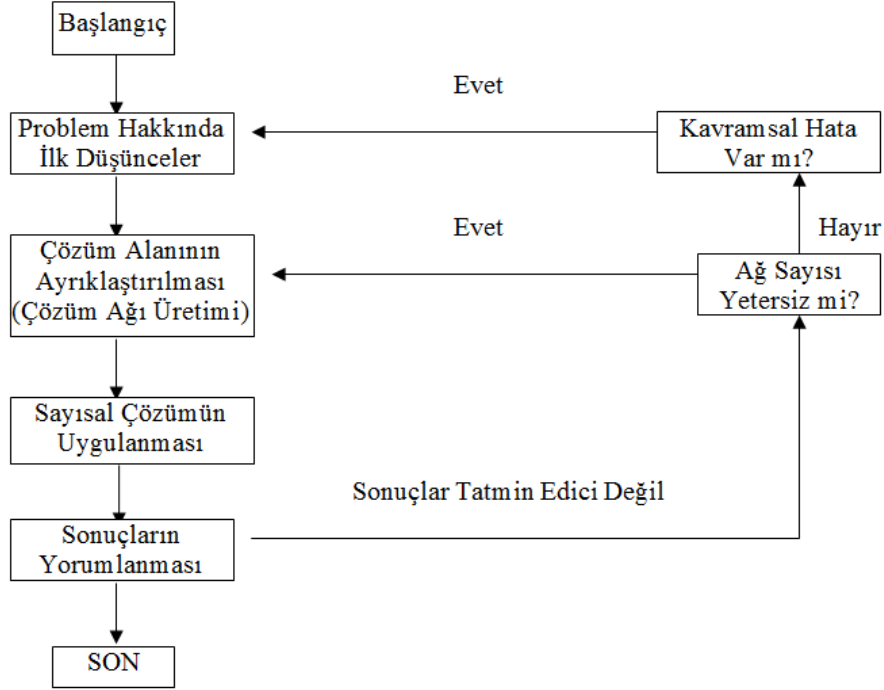
Sonlu hacimler yönteminin tercih edilmesinin iki tane temel nedeni vardır. Bunlardan ilki Navier-Stokes ifadesinin her bir ağ elemanında korunacak şekilde integral formunda yazılmasıdır. Bu durum sonlu hacimler yöntemini özellikle süreksizlikler içeren sıkıştırılabilir akışlarda tercih sebebi olmasına yol açmıştır. Denklemin her bir ağ elemanında korunumunu sağlamak bütün çözüm uzayında korunumunu garanti etmek anlamına gelmektedir. Bu nedenle çözüm uzayını temsil etmekten uzak büyük elemanlar kullanılması halinde dahi denklemlerin korunumu sağlanabilmektedir (Hoffmann, 2000).



Şekil 3.1 : Kontrol hacminin tanımı.

Sonlu hacimler yönteminin bir diğer karakteristik özelliği ise yerel koordinat sistemlerine ihtiyaç duymamasıdır. Bu özelliği düzensiz çözüm ağlarının kullanımına olanak sağlayarak karmaşık geometrilerin temsili olanaklı kılmıştır (Anderson, 1995).

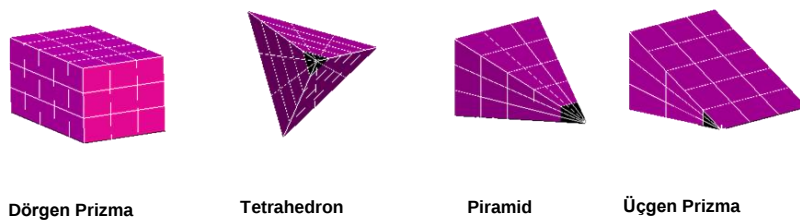
Sonlu hacimlerin çalışma algoritması aşağıda belirtildiği gibidir;



Şekil 3.2 : Sonlu hacimler yöntemi akış şeması.

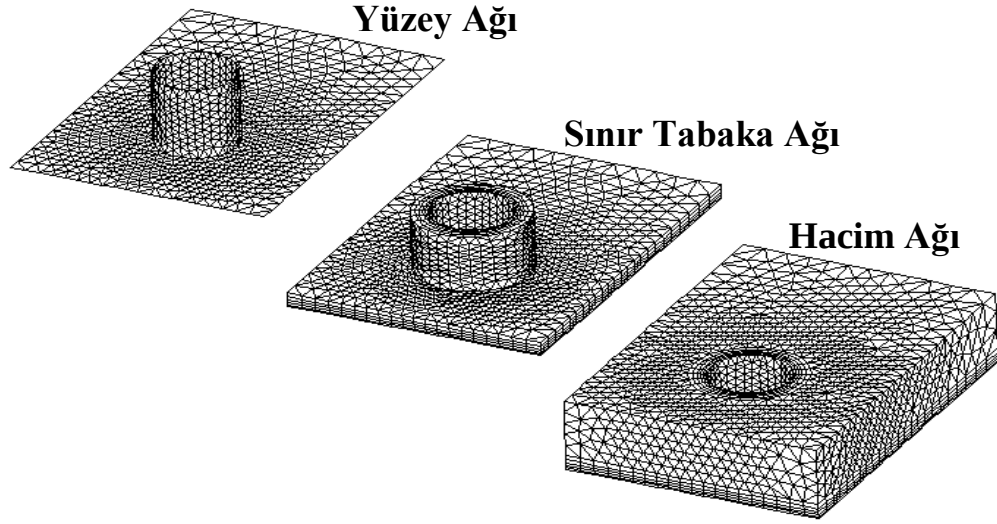
3.1. Ağ Tipleri

Çözüm uzayı farklı türlerde elemanlar ile ayrıştırılabilmektedir. Bunlardan üç boyutlu olanlara örnek vermek gerekirse dörtgen prizma, tetrahedron, üçgen prizma, piramid sayılabilir. Bu eleman tipleri farklı koşullarda uygunlukları değerlendirilerek kullanılırlar.



Şekil 3.3 : Ağ elemanları.

HAD analizleri yapılacak geometrik yapı, cidarlardaki sınır tabaka akışının karakteristiğini ortaya çıkaracak şekilde geometrinin detaylarına bağımlı olarak yoğun kontrol hacimlerine bölünebilir.



Şekil 3.4 : 3-B akış için çözüm ağı oluşturma süreci.

3.2. Yüksek Basınç Gradyanlı Akış İçin Sonlu Hacimler Yöntemi

Bu bölüm kapsamında yüksek basınç gradyanlı akış problemi için hareketi tanımlayan korunum denklemlerine yapılan düzenlemeler tanımlanmış matematiksel ifadeler verilmiş, kullanılan metodolojinin probleme uygunluğu değerlendirilmiştir.

3.2.1. Korunum denklemlerinin ayrıklaştırılması

Bölüm 2 de bahsedilmiş olan korunum ifadelerinin birleştirilmiş hali (vektörel formda) denklem (3.1) de verilmiştir. Şok içeren problemlerde viskoz gerilmenin etkisi çok düşüktür (Anderson, 1995). Bu nedenle denklem (3.1) yazılırken viskoz gerilme tensörü denklem takımına eklenmemiştir, viskoz etkilerin göz önüne alınmadığı Navier Stokes denklem takımına Euler denklemleri denmektedir..

Bununla beraber ortamda kaynak bulunmadığı varsayılarak denklem takımı ona göre düzenlenmiştir.

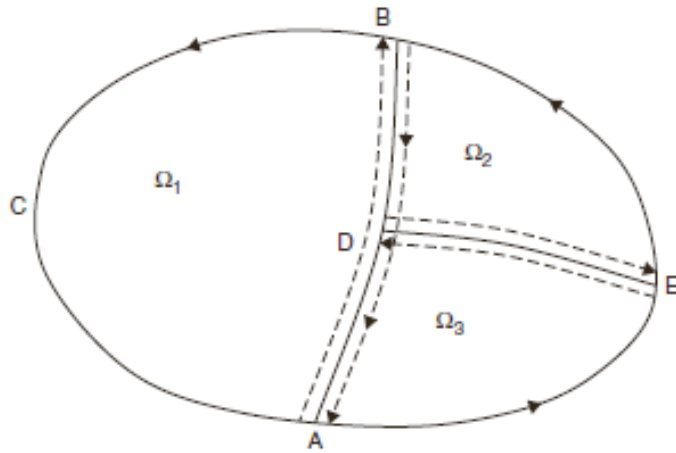
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} W d\Omega + \oint F dS = 0 \quad (3.1)$$

W ve F vektörleri (3.2) de tanımlanmıştır.

$$W = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{Bmatrix} \quad F = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho u v_n + p \hat{i} \\ \rho v v_n + p \hat{j} \\ \rho w v_n + p \hat{k} \\ \rho E v_n + p v - k \Delta T_n \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

Burada tanımlanmış olan ρ yoğunluk, v hız, E birim kütle başına toplam enerji, p basınç, v_n yüzey normalindeki hızdır.

Sonlu hacimler ile ayrıklaştırma için bir örnek yapmak adına **Şekil 3.5** deki çözüm uzayında denklemler tanımlanıp ayrıklaştırılmıştır.



Şekil 3.5 : Çözüm uzayı.

Çözüm uzayı Şekil 3.5’de gösterildiği üzere üç bölgede temsil edildiğinde denklem (3.1) denklem (3.3), (3.4) ve (3.5) deki formuna gelecektir.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_1} W d\Omega + \oint_{ABCA} F dS = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_2} W d\Omega + \oint_{DEBD} F dS = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_3} W d\Omega + \oint_{AEDA} F dS = 0 \quad (3.5)$$

Şekil 3.5 de temsil edilmiş olan 1, 2 ve 3, çözüm ağının elemanlarıdır. Sonlu hacimler yöntemi çözüm ağının yapısından bağımsız olarak korunumu sağlamaktadır (Hirsch, 2007). Bu nedenle elemanlar resmedilirken formuna dair herhangi bir kıstas kullanılmamıştır

1 numaralı eleman için ayrıklaştırılma aşağıdaki gibi yapılır;

$$\frac{\partial}{\partial t} W_1 + \sum_{yüzeyler} F \Delta S = 0 \quad (3.6)$$

Çalışma kapsamında zamana bağlı değişkenler kapalı (implicit) formda ayrıklaştırılmıştır. Bu nedenle denklem (3.6) ‘nın sol tarafındaki ilk terim denklem (3.7) deki gibi ifade edilir.

$$\frac{\partial}{\partial t} W_1 = \frac{W_1^{n+1} - W_1^n}{\Delta t} \quad (3.7)$$

Burada alt indisler eleman numarasını, üst indisler ise zaman adımını temsil eder.

Görüldüğü üzere bir sonraki zaman adımındaki veriyi hesaplamak için iteratif bir çalışma yapılmak zorundadır. Bu durum denklem (3.8) ile ifade edilebilir.

$$W_1^{n+1} \text{ Hesaplanan} = W_1^n + \Delta t \frac{W_1^{n+1} - W_1^n}{\Delta t} \quad (3.8)$$

Yüzeyler üzerindeki integrasyon ise görece daha karmaşıktır. Sonlu hacimler yönteminin korunumu sağlaması yüzeyler üzerindeki korunumun sağlanmasından gelmektedir (Hirsch, 2007).

Bu çalışma kapsamında sonlu hacimler çözücüsü olarak ANSYS FLUENT kullanılmıştır. Fluent çözüm sırasında herhangi bir elemana dair datayı elemanın merkezinde tutmaktadır. Bu nedenle yüzeylerdeki veri elde edilirken interpolasyon yapılmaktadır.

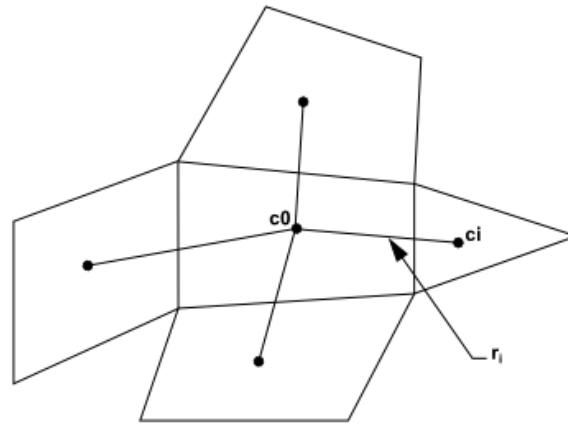
Bu çalışma kapsamında akı ikinci dereceden geriye doğru (secondorder upwind) şema ile ayrıklaştırılmış, interpolasyon için en küçük kareler yöntemi kullanılmıştır.

İkinci dereceden geriye doğru şemanın ifadesi denklem (3.9) da verilmiştir.

$$F_{yüzey} = F_{hücre} + \nabla F \cdot \vec{r} \quad (3.9)$$

Burada tanımlanmış olan r vektörü komşu hücrenin (akının geliş yönüne doğru) merkezinden hücre yüzeyine doğru olan vektördür.

Gradyanın ayrıştırılması en küçük kareler yöntemiyle yapılmaktadır. En küçük kareler yöntemine göre yüzey üzerindeki veri, iki elemanın merkezindeki verinin merkezlere mesafesinin lineer oranıdır.



Şekil 3.6 : En küçük kareler metodu.

Şekil 3.6 da görülen ağ yapısı için en küçük kareler metoduna göre akı gradyanının ifadesi denklem (3.10) da verilmiştir.

$$(\nabla F)_{c0} \cdot \Delta r_i = F_{ci} - F_{c0} \quad (3.10)$$

Mesafe bir ağırlık fonksiyonu olarak düşünülürse ve denklem uzayda kartezyen koordinat sistemine göre ayrıklaştırılırsa denklem (3.10), denklem (3.11), (3.12), (3.13) deki forma dönüşmektedir.

$$(F_x)_{c0} = \sum_{i=1}^n W_{i0}^x \cdot (F_{ci} - F_{c0}) \quad (3.11)$$

$$(F_y)_{c0} = \sum_{i=1}^n W_{i0}^y \cdot (F_{ci} - F_{c0}) \quad (3.12)$$

$$(F_z)_{c0} = \sum_{i=1}^n W_{i0}^z \cdot (F_{ci} - F_{c0}) \quad (3.13)$$

3.2.2. Ön-koşullandırma (Preconditioning)

Temel olarak ön-koşullandırma bir matrisi nümerik çözüme daha uygun bir hale getirmek için kullanılan bir tekniktir. Genelde koşul sayısı yüksek olan matrislerin koşul sayısını düşürmek için kullanılır. Koşul sayısı girdideki değişimin çıktıda oluşturduğu asimptotik değişim olarak tanımlanabilir. Düşük koşul sayısına sahip matrisler iyi koşullu olarak tanımlanırken yüksek koşul sayısına sahip matrisler kötü koşullu olarak tanımlanırlar (Hirsch, 2007).

Sıkıştırılamaz ya da düşük Mach sayılarındaki akışlarda Navier – Stokes denklemleri sayısal olarak katı davranarak yakınsama problemleri çıkarmaktadır. Bu problemin çözümü için zamana bağlı terim bir matris ile çarpılır. Bu matris öz-değerlerini tekrardan boyutlandırarak sayısal katılığı azaltır. Prosedür aşağıdaki gibi işlemektedir;

$$\frac{\partial W}{\partial Q} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q d\Omega + \oint F dS = 0 \quad (3.14)$$

Buradaki Q vektörü aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$Q = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \\ T \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Jacobian matrisi ise aşağıdaki gibidir;

$$\frac{\partial W}{\partial Q} = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho_p u & \rho & 0 & 0 & \rho_T u \\ \rho_p v & 0 & \rho & 0 & \rho_T v \\ \rho_p w & 0 & 0 & \rho & \rho_T w \\ \rho_p H - \delta & \rho u & \rho v & \rho w & \rho_T H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Burada yoğunluğun değişimi ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$\rho_p = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T, \rho_T = \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p \quad (3.17)$$

İdeal gaz için δ ; 1 alınır.

Ön-koşullandırma işlemi sırasında Jacobian matrisi aşağıdaki matris ile değiştirilir;

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{U_r^2} - \frac{\rho_T}{\rho C_p} \right) & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \left(\frac{1}{U_r^2} - \frac{\rho_T}{\rho C_p} \right) u & \rho & 0 & 0 & \rho_T u \\ \left(\frac{1}{U_r^2} - \frac{\rho_T}{\rho C_p} \right) v & 0 & \rho & 0 & \rho_T v \\ \left(\frac{1}{U_r^2} - \frac{\rho_T}{\rho C_p} \right) w & 0 & 0 & \rho & \rho_T w \\ \left(\frac{1}{U_r^2} - \frac{\rho_T}{\rho C_p} \right) H - \delta & \rho u & \rho v & \rho w & \rho_T H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Bu işlem sonucunda öz-değerler u , u , u , $u' + c'$, $u' - c'$ olmuş olur.

Denklem 3.18 de verilmiş olan değişkenler denklem 3.19 – 3.23 de tanımlanmıştır.

$$u = v \cdot \hat{n} \quad (3.19)$$

$$u' = u \cdot (1 - \alpha) \quad (3.20)$$

$$c' = \sqrt{\alpha^2 u^2 + U_r^2} \quad (3.21)$$

$$\alpha = (1 - \beta U_r^2) / 2 \quad (3.22)$$

$$\beta = \left(\rho_p + \frac{\rho_T}{\rho c_p} \right) \quad (3.23)$$

Bu işlem sonucu zamana bağlı terim korunmamış olur. Bu problemi çözmek için sistem aşağıdaki gibi değiştirilerek şekillendirilir;

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V W dV + \Gamma \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V Q dV + \oint [F] dA = 0 \quad (3.24)$$

Burada t gerçek zamana karşılık gelirken τ sahte (pseudo) zamanı temsil etmektedir. $\tau \rightarrow \infty$ koşulu sağlandığında denklem tekrar denklem (3.1) e dönüşür. Bu şekilde zamana bağlı terim korunmuş olur.

3.2.3. Roe flux scheme

Bu işlem temelde denklemi lineerleştirmek için yapılır. Lineerleştirilmiş olan sistemin çözümünün lineer-olmayan denklemin çözümüne yaklaşması amaçlanmaktadır. Bu bağlamda akı (flux) vektörü üzerine işlem yapılmaktadır. Akı vektörü çözüm uzayı içerisindeki herhangi bir ağ elemanı yüzeyindeki veri transferini tanımlar.

Lineerleştirme için akı vektörü, her biri bir yöndeki veri transferini tanımlayacak şekilde parçalara ayrılır.

$F_R = F(Q_R)$ ve $F_L = F(Q_L)$ olmak üzere;

$$F = 1/2 (F_R + F_L) - 1/2 \Gamma |\hat{A}| \Delta Q \quad (3.25)$$

Burada $\Delta Q = Q_R - Q_L$ olmak üzere, Q_R ağ elemanı yüzeyinin sağındaki çözüm vektörü, Q_L ise sol yüzündeki çözüm vektörüdür.

$|\hat{A}|$ ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$|\hat{A}| = \hat{T}|\hat{\Lambda}|\hat{T}^{-1} \quad (3.26)$$

Λ öz-değerlerden oluşan köşegen matriskten, T , $\Gamma^{-1}A$ in köşegen matrisinin çarpanıdır. Burada $A = \delta F / \delta Q$ olarak tanımlanır.

3.2.4. Roe şemasının uygulaması

Metodun uygulanışını göstermek amacıyla bir boyutta Riemann problemi çözülmüştür;

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (3.27)$$

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L & x < 0 \\ U_R & x > 0 \end{cases}$$

(3.27) denklemini aşağıdaki gibi değiştirilir;

$$\frac{\partial U}{\partial t} + [\hat{A}] \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3.28)$$

$$[A] = \frac{\partial E}{\partial U} \quad (3.29)$$

$$[\hat{A}] = [\hat{A}(U_L, U_R)] \quad (3.30)$$

Burada $[\hat{A}]$ Roe ortalama matrisi olarak geçmekte ve sabit kabul edilmektedir. Bu matris aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde belirlenmektedir;

1. U vektörü ile E vektörü arasında lineer bir bağlantı olması gerekmektedir.
2. $U_L \rightarrow U$ ve $U_R \rightarrow U$ koşulunda $[\hat{A}(U_L, U_R)] \Rightarrow [A]$ ($[A]$ orjinal sistemin jacobian ıdır.)
3. $E_R - E_L = [\hat{A}](U_R - U_L)$ koşulu çözüm uzayındaki her bir çözüm ağının her yüzeyinde geçerli olmalıdır.
4. $[\hat{A}]$ matrisinin öz-değerleri gerçekte ve lineer bağımsız olmalıdır.

Yukarıdaki koşulların sağlanması durumunda lineer sistemin çözümü non-lineer sistemin çözümüne eşit olacaktır.

Roe ortalama matrisi aşağıdaki gibi köşegenleştirilir ve denklem (3.29) da yerine konulur.

$$[\hat{A}] = \hat{T}|\hat{\Lambda}|\hat{T}^{-1} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \hat{T}|\hat{\Lambda}|\hat{T}^{-1} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3.32)$$

(3.32) denklemini $\hat{T}^{-1}$ ile çarpılırsa;

$$\frac{\partial W}{\partial t} + |\hat{\Lambda}| \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (3.33)$$

Burada $W = [\hat{T}]^{-1}U$ olarak ifade edilmiştir.

Denklem (3.33) de kullanılan $|\hat{\Lambda}|$ öz-değerlerden (eigenvalue) oluşan diagonal bir matristir.

3.2.5. CFL koşulu

CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) koşulu özellikle hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kritik bir rol oynar. Denklemin stabilitesini temsil eden bu koşul aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$CFL = \Delta t \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{\Delta x_i} \leq CFL_{maksimum} \quad (3.34)$$

Burada Δx en küçük çözüm ağı elemanının boyutu, u ise karakteristik akış hızıdır. n çözüm uzayının boyutuna göre değişmektedir. İki boyutlu bir çözüm için denklem (3.35) şekli almaktadır;

$$CFL = \Delta t \left(\frac{u}{\Delta x} + \frac{v}{\Delta y} \right) \leq CFL_{maksimum} \quad (3.35)$$

Literatürde açık (explicit) çözümler için CFL sayısının birden daha küçük olması önerilmektedir. Kapalı (Implicit) çözümlerde ise çözüm CFL sayısına daha az bağlıdır. Bu nedenle daha büyük CFL sayıları seçilebilmektedir.

Uygulanmış olan ön koşullandırma tekniği nedeniyle sahte zaman CFL sayısına bağlanırken gerçek zaman çözümün frekansına bağlıdır.

3.2.6. İdeal gaz tanımlaması

İdeal gaz bir çok hal denklemi tanımlamasından biridir. Hal denklemleri çözüm sırasında yoğunluk, basınç ve hız arasındaki ilişkiyi tanımlamak için kullanılırlar. İdeal gaz denklemi aşağıdaki gibi kullanılmaktadır;

$$\rho = \frac{p}{\frac{R}{M_w} T} \quad (3.36)$$

Burada ρ yoğunluk, p ortam basıncı ve statik basıncın toplamı, R global gaz sabiti, M_w molekül ağırlığı ve T sıcaklıktır.

Süpersonik bir akış için ideal gaz kullanıldığı durumda denklem (3.23)'de oluşan değişim nedeniyle denklemin öz-değerleri (eigenvalue) $u \pm c$ haline gelmektedir.

3.3. ANSYS FLUENT Hakkında Genel Bilgi

2006 yılında ANSYS Inc. Bünyesine katılmış olan Fluent, sonlu hacimler yöntemini kullanan genel amaçlı bir Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği (HAD) kodudur. Fluent, genel amaçlı bir HAD yazılımı olarak içerisinde laminar veya türbülanslı akışları, taşınım ve iletim içeren problemleri, yanma vb. reaksiyon içeren problemleri, akış kaynaklı gürültüyü ve daha bir çok problemi çözebilme kapasitesi sayesinde beyaz eşya (buzdolabı, fırın, klima vd.) üreten firmalardan, savunma sektöründeki bir çok firmaya kadar çok geniş bir kullanıcı yelpazesine hizmet vermektedir (ANSYS-FLUENT, 2015).

ANSYS programları dünyanın ilk ISO 9001 kalite sertifikasına sahip yazılımlarıdır (ANSYS, 2015). Bunun yanı sıra FLUENT her sene dünya çapında düzenlenen yarışmalarda, farklı konularda testlere tabi tutularak çözücüleri sertifikalandırılmaktadır.

4. İNTERPOLASYONLU PARÇACIK HİDRODİNAMİĞİ (İPH)

İPH çözüm uzayını parçacıklar yardımıyla tanımlayarak çözen bir sayısal çözüm yöntemidir (Monaghan, 2005). İPH yöntemi ilk olarak 1977 yılında astrofizik problemlerinin çözümü için geliştirilmiştir. Yöntemin karakteristik özelliği olan parçacık yaklaşımı, bölgenin tanımlanması sırasında sonlu hacimler yönteminde olduğu gibi bir çözüm ağı yerine, bölgenin yoğunluk, hız, basınç ve enerji değerlerini kendi bünyesinde bulunduran parçacıklar kullanması anlamına gelmektedir. Bu tür yöntemlere ağısız (meshless) denilmektedir. Bu yöntemlerde her bir parçacığa haiz veriler parçacıkla komşu diğer parçacıkların verilerini kullanan interpolasyon yöntemleri ile tayin edilir.

Yöntemin hem akış problemlerine hem de yapısal problemlere uygulamaları literatürde bolca mevcuttur. İPH yönteminin yapısal uygulamaları arasında yüksek deformasyonun olduğu problemler ve kırılma gibi katının parçalandığı problemler özellikle dikkat çekmektedir. Yapısal problemlerdeki uygulamalar incelendiğinde görülebilir ki İPH yönteminin bu tarz problemlere uygulanmasının nedeni çözüm ağının gerçeklik dışı katılık yaratmasından kaçınmaktır. İPH yöntemi bu tarz problemlerde hem uygulama kolaylığı açısından hem de çözümün doğruluğu açısından avantajlar içermektedir.

Akışkan uygulamaları arasında ise şok ilerlemesi, su altı patlaması gibi yüksek gradyenli akış içeren problemlere daha uygun olduğu bir çok araştırmacı tarafından tespit edilmiştir. Von Neumann (1944), parçacık yaklaşımı ile şok probleminin çözülmesi üzerine yazdığı makalesinde; parçacık yöntemlerinin, sadece sürekli akışkan denklemlerinin çözümünde değil; alt yapısında moleküler dinamik sistemlerini de barındıran, zorlu parçacık sistemi denklemlerini ortaya koyan bir yapı olduğunu ve bu haliyle süreklilik denklemlerinden daha temel bir yaklaşım olduğunu belirtmektedir.

4.1. Sayısal Çözüm Yaklaşımları ve Karşılaştırması

Hareketi tanımlayan denklemlerin tanımlanması genel manada Euler yaklaşımı ve Lagrange yaklaşımı olarak ikiye ayrılmaktadır. Bu yöntemlerin temel farklılığı Euler yaklaşımında çözüm uzayı sabitken Lagrange yaklaşımı çözüm uzayını her bir eleman içerisinde tanımlamaktadır.

4.1.1. Lagrange yaklaşımı

Lagrange yönteminde çözüm noktaları çözüm uzayına bağlıdır. Bunun anlamı çözüm uzayının şekil değiştirmesi sonucunda çözüm alınan noktaların da deforme olarak şekil değişimine uyum sağlamasıdır. Bu yaklaşım için kütle, momentum ve enerji denklemleri **Çizelge 4.1** deki gibi yazılır.

Çizelge 4.1 : Korunum denklemleri (Lagrange yaklaşımına göre).

Korunum İfadesi	Langrange Yaklaşımına Göre Denklemi
Kütlenin Korunumu	$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta}$
Momentumun Korunumu	$\frac{Dv^\beta}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^\beta}$
Enerjinin Korunumu	$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta}$

Lagrange yaklaşımında kütlenin, momentumun ve enerjinin iletilmesi çözüm noktasının hareketi ile gerçekleşir. Her bir noktanın kütlesi sabit olduğu için çözüm noktaları arasında akı geçişi olmaz. Malzeme deforme olunca çözüm ağı da ona göre deforme olur. Bunun yanında Lagrange yaklaşımının önemli avantajları da mevcuttur.

- Korunum denklemi içerisinde taşınımaya dayalı ifade olmadığı için çözüm süresi görece kısadır.
- Çözüm ağı incelenen bölgede olduğu için daha küçük çözüm ağları oluşturulur. Bu özelliği son derece verimli olmasını sağlar.

Bahsedilen avantajları nedeniyle çözüm ağı temelli Lagrange yaklaşımı küçük deformasyonların olduğu yapısal problemlerde yoğun olarak kullanılmaktadır (Liu & Liu, 2003).

Ağ temelli yöntemler göz önüne alındığında, yüksek deformasyonun ya da kırılmanın olduğu problemler için Lagrange yaklaşımı uygulandığında malzemenin şekil değiştirmesi sonucu elemanların büyümesi, küçülmesi ya da bozulması çözüm için gerekli kriterleri sağlayamayacak duruma gelmesine sebep olabilmektedir.

Bu nedenle çözüm ağı temelli yöntemlerin bu tarz problemlere uygulaması ancak çözüm ağının zaman içerisinde yenilenmesi ile (re-mesh) mümkün olabilmektedir (Liu & Liu, 2003). Bu yöntemde yeni oluşturulan elemanlara ait veriler eski çözüm ağından Euler yaklaşımı vari bir yöntem ile interpolate edilmesi ile atanır. Ancak bu yöntem çözüm zamanını uzattığı gibi aynı zamanda eleman içerisindeki verinin kaybolmasına da neden olur. Ayrıca ağ yenilemesinin fazlaca kullanılması çözüm yaklaşımını gittikçe Euler yaklaşımına benzeterek Lagrange yaklaşımının avantajlarını yok etmektedir (Benson, 1992; Charles, 1987; Hans, 1999).

Yukarıda anlatılan nedenlerden ötürü çözüm ağı kullanmayarak Lagrange yaklaşımının uygulanması tercih sebebidir.

4.1.2. Euler yaklaşımı

Euler yaklaşımının karakteristik özelliği düğüm noktalarının uzayda sabit olmasıdır. Bu yöntemde ilgilenilen nesne (katı / akışkan) çözüm alınan noktaların içerisinde geçer. Çözüm noktaları harekete ya da deformasyona göre şekil değiştirmez. Çözüm alınan noktalar arasında kütle, hız ve enerji transfer edilir.

Euler yaklaşımına göre korunum denklemleri **Çizelge 4.2'**de gösterilmiştir.

Çizelge 4.2 : Korunum denklemleri (Euler yaklaşımına göre).

Korunum İfadesi	Euler Yaklaşımına Göre Denklemi
Kütlenin Korunumu	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^\beta \frac{\partial \rho}{\partial x^\beta} = -\rho \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta}$
Momentumun Korunumu	$\frac{\partial v^\beta}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^\beta}$
Enerjinin Korunumu	$\frac{\partial e}{\partial t} + v^\beta \frac{\partial e}{\partial x^\beta} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta}$

Teorik olarak bütün problemler katı ve akışkan malzemeler için hazırlanmış bir Euler yaklaşımı çözücüsü ile çözülebilir. Ancak Euler yönteminin de ciddi dezavantajları vardır.

Yüksek gradyenli akış çözümüne uygunluk açısından incelendiğinde bunlardan en önemlisi süreksizliğin temsilinde özel bir işlem yapılmadığı durumlarda (çözüm ağının sıklaştırılması vd.) çözümün düşük doğruluk seviyesidir. Bu problemin bir diğer çözümü ise yerel re-mesh (çözüm ağının yenilenmesi) olabilir.

4.2. İPH Formülizasyonu

Korunum denklemleri İPH metoduna göre düzenlenirken çekirdek yaklaşımı ve parçacık yaklaşımı olmak üzere iki önemli yaklaşım gerçekleştirilir.

4.2.1. Çekirdek yaklaşımı

Herhangi bir fonksiyon integral formda yazılmak istenildiği zaman denklem (4.1) de gösterilen formda yazılabilir

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') \delta(x - x') dx' \quad (4.1)$$

Denklem 4.1 de yer alan “ δ ” Dirac delta fonksiyonu olarak adlandırılır. Dirac delta fonksiyonunun temel özeliği denklem (4.2) de verilmiştir.

$$\int_{\Omega} \delta(x - x') dx' = \begin{cases} 1, & x = x' \\ 0, & x \neq x' \end{cases} \quad (4.2)$$

(4.1) de kullanılan Dirac delta fonksiyonu interpolate edici çekirdek fonksiyonu (smoothing kernel function) ile değiştirilirse ve $f(x)$ tekrar tanımlanırsa

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') W(x - x', h) dx' \quad (4.3)$$

(4.3) de tanımlanan W fonksiyonu interpolate edici çekirdek fonksiyonu (smoothing kernel function) olarak adlandırılır. Çekirdek fonksiyonu (kernel function), h ile temsil edilen etki alanında (smoothing length) geçerlidir ve Dirac delta fonksiyonuna eşit olmadığı müddetçe bir yaklaşımdır.

Literatürde bir çok çekirdek fonksiyonu vardır ancak çözülen probleme göre çekirdek fonksiyonlarının uygunluğu da değişmektedir. Bununla birlikte bütün çekirdek fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlar (Liu & Liu, 2003).

- *Birim olma özelliği* : Fonksiyonun tanımlandığı Ω bölgesinde çekirdek fonksiyonunun integrasyonu 1 ‘e eşittir.

$$\int_{\Omega} W(x - x', h) dx' = 1 \quad (4.4)$$

- *Pozitif olma özelliği* : Fonksiyonun tanımlandığı Ω bölgesinde çekirdek fonksiyonu pozitif değer vermelidir.

$$W(x - x', h) > 0 \quad (4.5)$$

- *Tam desteklenme özelliği* : h yardımı ile tanımlanan Ω bölgesi dışında fonksiyonun değeri sıfır olmalıdır.

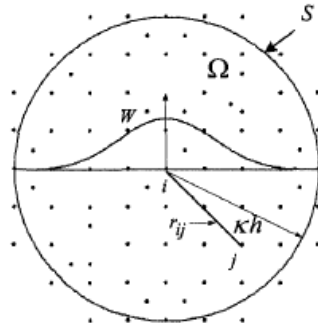
$$W(x - x', h) = 0 \quad (4.6)$$

- *Delta fonksiyonu özelliği* : Limit h sıfıra giderken çekirdek fonksiyonu Dirac delta fonksiyonuna eşit olmalıdır.

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x - x', h) = \delta(x - x') \quad (4.7)$$

4.2.2. Parçacık yaklaşımı

İPH yönteminde çözüm uzayı sonlu sayıda kendi kütlesi olan ve uzayda bir hacim kaplayan parçacıklar ile temsil edilir. Bu daha önce integral formda yazılmış olan çekirdek fonksiyonunun ayrıklaştırılması ile mümkün olur.



Şekil 4.1 : i parçacığı için tanımlanmış W fonksiyonunun etki alanı.

Denklem (4.1) de belirtilmiş olan sonsuz küçük hacim dx ' ifadesi, j parçacığı için sonlu bir hacim değeri olan ΔV_j ile değiştirilir.

$$\Delta V_j = \frac{m_j}{\rho_j} \quad (4.8)$$

Burada belirtilen m_j parçacığın kütlesi ve ρ_j parçacığın yoğunluğudur. ΔV_j denklemde yerine konulduğunda;

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') W(x - x', h) dx' \quad (4.9)$$

$$\cong \sum_{j=1}^N f(x_j) W(x - x_j, h) \Delta V_j \quad (4.10)$$

$$= \sum_{j=1}^N f(x_j) W(x - x_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} \quad (4.11)$$

$$= \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) W_{ij} \quad (4.12)$$

Denklem (4.8) , i parçacığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için yapılan İPH yaklaşımıdır.

Sonraki bölümlerde kullanıldığı için belirtmekte fayda olduğu düşünülerek fonksiyonunun türevi aşağıdaki gibidir:

$$\nabla f(x) = \int_{\Omega} \nabla[f(x') W(x - x', h)] dx' - \int_{\Omega} f(x') \nabla W(x - x', h) dx' \quad (4.13)$$

Denklemin sağ tarafındaki ilk terim diverjans teoremi ile S yüzeyinde tanımlanabilir.

$$\nabla f(x) = \int_S f(x') W(x - x', h) \vec{n} dS - \int_{\Omega} f(x') \nabla W(x - x', h) dx' \quad (4.14)$$

Bu durumda sadece Ω bölgesinde pozitif değer veren ve dışında sıfır değerini veren W fonksiyonu denklemin sağ tarafındaki ilk terimi yok edecektir. Bu durumda denklem (4.15) deki haline gelmiş olur.

$$\nabla f(x) = - \int_{\Omega} f(x') \nabla W(x - x', h) dx' \quad (4.15)$$

Bu denkleme parçacık yaklaşımını uygularsak ayrıklaştırılmış olarak bir denklemin türevi (4.16) daki gibi yazılır.

$$\nabla f(x) = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) \nabla W_{ij} \quad (4.16)$$

4.3. Yüksek Basınç Gradyanlı Akış İçin İPH Yöntemi

Tez kapsamında İPH yönteminin ayrıntılı incelenmesi ve yüksek gradyenli akış problemine uygulanması amacıyla temel yöntemler kullanılarak bir kod yazılmıştır. Bu kodda kullanılan yöntemler bu bölümde incelenmiştir.

4.3.1. Algoritma

Tez kapsamında yazılmış olan İPH çözücüsünün algoritması da gösterilmiştir.



Şekil 4.2 : İPH kodu algoritması.

4.3.2. Çekirdek fonksiyonu

İPH tarihinin başlangıcında küresel olmayan yıldızların modellenmesinde Gingold ve Monaghan (1977) tarafından Gauss tipi çekirdek fonksiyonu kullanılmıştır.

Bu çekirdek fonksiyonun özellikle karışık kümelenmiş parçacıkların kullanılması durumunda sayısal stabilite ve yakınsaklık açısından üstün özellikleri olduğunu belirtmişlerdir. Gauss tipi çekirdek fonksiyonu denklem (4.17) de verilmiştir.

$$W(R, h) = \frac{1}{\pi^{3/2}h} \left(\frac{5}{2h^2} - R^2 \right) \exp(-R^2) \quad (4.17)$$

Gauss tipi çekirdek fonksiyonunun hata mertebesi $O(h^2)$ mertebesinde. Her ne kadar pratikte fonksiyonun değeri hızlıca sifıra yakınsasa dahi gerçeklikte ancak R değeri sonsuz olduğu takdirde fonksiyon sıfır değerini alacaktır. Bu nedenle pratikte öyle olmasa da teoride tam desteklenme özelliğini karşılamamaktadır. Bunun yanı sıra parçacığın etki alanının tayininde kullanılan çekirdek fonksiyonunun tanımlı olduğu alan dışında da etki yaratması ele alınan probleme uygun olmayan bir şekilde gradyan bölgesindeki süreksizliği düzgünleştirecektir.

Gauss tipi çekirdek fonksiyonunun avantajlarının uygulanan problemde bir artı getirmediği ancak dezavantajlarının süreksizliğin yakalanması açısından negatif katkı yapabileceği düşünülerek çalışma kapsamında kübik spline çekirdek fonksiyonu kullanılmıştır. Aynı zamanda bu çekirdek fonksiyonu literatürde en çok kullanılan çekirdek fonksiyonudur.

Çalışmada kullanılan çekirdek fonksiyonunun iki boyutlu problemlere uygulanan hali denklem(4.18) de verilmiştir. Çekirdek fonksiyonunun hata mertebesi $O(h^3)$ mertebesinde.

$$W(R, h) = \frac{15}{7} \pi h^2 \times \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2} R^3 & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{6} (2 - R)^3 & 1 \leq R < 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases} \quad (4.18)$$

Bu çekirdek fonksiyonu Gauss tipi çekirdek fonksiyonuna benzer özellikler göstermekte ancak etki alanı açısından probleme özgü avantajlar sergilemektedir. Bununla beraber stabilite açısından daha kötü performans sergilediği Monaghan ve Lattanzio (1985) tarafından belirtilmiştir.

4.3.3. Kütlenin korunumu (Yoğunluk ifadesi)

Yoğunluğun hesaplanması için geleneksel İPH metodolojinde iki yöntem mevcuttur. Bunlardan ilki toplam yoğunluk yaklaşımı, ikincisi ise sürekli yoğunluk yaklaşımıdır. Bu çalışma kapsamında toplam yoğunluk yaklaşımı kullanılmıştır.

Toplam yoğunluk yaklaşımı yoğunluk ifadesinin integral formda yazılması ve daha sonra ayrıklaştırılması ile elde edilir.

1. Herhangi bir fonksiyonun integral formda ifadesi (4.19) daki gibidir;

$$A(r') = \int_{\Omega} \delta(r' - r) A(r) dV \quad (4.19)$$

2. (4.19) ayrıklaştırıldığında;

$$A_i = \sum_{j=1}^N \delta(r_i - r_j) A(r_j) (dV)_j = \sum_{j=1}^N \delta_{ij} A_j (dV)_j \quad (4.20)$$

3. Daha önce bahsedildiği gibi Dirac delta fonksiyonu İPH literatüründe çekirdek fonksiyonu ile değiştirilir;

$$A_i = \sum_{j=1}^N W_{ij} A_j (dV)_j \quad (4.21)$$

4. j parçacığının sonsuz küçük dV hacmi aynı zamanda m_j / ρ_j olarak da ifade edilebilir.

$$A_i = \sum_{j=1}^N W_{ij} A_j \frac{m_j}{\rho_j} \quad (4.22)$$

5. Genel geçer fonksiyon A_i yerine, ρ_i konulursa denklem (4.23) deki forma gelir.

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N W_{ij} \rho_j \frac{m_j}{\rho_j} \quad (4.23)$$

6. Gerekli düzenleme sonrasında ifade 4.24 deki haline getirilmektedir.

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \quad (4.24)$$

Toplam yoğunluk yaklaşımı çözüm uzayında kütlenin korunumunu sağlamaktadır. Bu bağlamda kütlenin korunumu koşulunu sağlamaktadır. Ancak sınır bölgelerinde bazı

sıkıntılar yaşamaktadır. Tanımlanan etki alanı içerisinde parçacık bulunmaması durumunda (sınır bölgesinin dışında parçacık bulunmaz, bu nedenle sınır parçacıklarının etki alanlarında olması beklenenden az parçacık bulunur) gerçeklik dışı yoğunluk değerleri hesaplanır. Bu problemin çözülmesi için sınır elemanları dışında sanal elemanlar ya da benzer yöntemler kullanılır. Ancak bu yöntemler çözüm süresini arttırmaktadır.

Zaman içerisinde toplam yoğunluk yaklaşımının doğruluğunu arttırmak için bazı değişiklikler yapılmıştır. Randles ve Libersky (1996) tarafından denklem (4.25) önerilmiştir.

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=1}^N m_j W_{ij}}{\sum_{j=1}^N \left(\frac{m_j}{\rho_j} \right) W_{ij}} \quad (4.25)$$

Bu yaklaşım temel olarak hesaplanan yoğunluk değerini bütün çözüm uzayının ortalama yoğunluk değeri ile normalleştirmektedir. Bu yaklaşım bir çok akış problemleri için (özellikle de sınır bölgelerinde) iyi sonuç vermekte ancak süreksizlik içeren şok problemi gibi problemlerde istenilenin aksine basınç gradyanını yumuşatmaktadır.

Daha önce bahsedilen sürekli yoğunluk yaklaşımı ise süreklilik denkleminde yola çıkılarak elde edilmektedir. Ancak bu çalışmada kullanılmamıştır.

4.3.4. Momentumun korunumu

Şok problemi incelenirken bir çok kaynakta momentum ifadesindeki kayma gerilmelerinin (viskoz etkilerin) öneminin çok düşük olduğu tekrarlanmıştır. Bu nedenle bu çalışmada momentum ifadesinin Euler denklemlerindeki kısaltılmış hali kullanılmıştır. Denklem (4.26) da verilmiştir.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (4.26)$$

1. Schlatter momentumun korunumu ifadesini ayırklaştırmak için birçok yöntem önerdikten sonra denklem (4.26) 'nın sağ tarafını denklem (4.27) gibi ayrıştırmanın hem açısal momentumu hem de lineer momentumu koruyacağını belirtmiştir.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P = -1 \times \left(\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho \right) \quad (4.27)$$

2. Daha önce gösterilen denklem (4.16) kullanılarak denklem (4.27) ayrıştırılabilir.

$$\nabla_i \left(\frac{P_i}{\rho_i} \right) = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{P_j}{\rho_j} \nabla_i W_{ij} = - \sum_{j=1}^N m_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \nabla_i W_{ij} \quad (4.28)$$

$$\nabla_i \rho_i = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \rho_j \nabla_i W_{ij} = - \sum_{j=1}^N m_j \nabla_i W_{ij} \quad (4.29)$$

3. Denklem (4.28) ve (4.29) u denklem (4.27) deki yerlerine konulduğunda ifade denklem (4.30) a dönüşür.

$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{P_j}{\rho_j^2} + \frac{P_i}{\rho_i^2} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (4.30)$$

4.3.5. Enerjinin korunumu

İç enerjinin hesabında Langrangian bir metod olan İPH için Lagrangian enerjinin korunumu ifadesi kullanılmıştır. Ancak daha önce belirtilen sebeplerden ötürü viskoz etkiler yine gözardı edilmiştir. Kullanılan ifade denklem (4.31) de verilmiştir.

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{p}{\rho} \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{p}{\rho^2} \left(-\rho \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} \right) \quad (4.32)$$

Burada görülebilir ki denklemin sağ tarafındaki parantez içerisindeki ifade süreklilik (kütlenin korunumu) denklemdir. Bu ifadenin ayrıklaştırılması aynı zamanda sürekli yoğunluk yaklaşımında da kullanılır. Bu bölümde hem sürekli yoğunluk yaklaşımını hem de enerjinin korunumunun ayrıklaştırılması aynı anda gösterilmektedir.

1. Orijinal ifadeyi yazıldığında denklem (4.33) ortaya çıkacaktır:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} = -\rho \nabla v \quad (4.33)$$

2. Daha önce momentumun korunumu bölümünde gösterildiği üzere gradyenli ifade aşağıdaki gibi bölünebilmektedir,

$$\rho_i \nabla_i v_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^N m_j (v_j - v_i) \nabla_i W_{ij} \quad (4.34)$$

$$-\rho_i \nabla_i v_i = \sum_{j=1}^N m_j (v_i - v_j) \nabla_i W_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^N m_j v_{ij} \nabla_i W_{ij} \quad (4.35)$$

3. Denklem (4.35) i (4.32) deki yerine konulduğunda enerjinin korunumunun İPH formülizasyonu ortaya çıkacaktır:

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} = \frac{p_i}{\rho_i^2} \sum_{j=1}^N m_j v_{ij} \nabla_i W_{ij} \quad (4.36)$$

Enerjinin korunumunu ifade ederken stabilizasyon açısından yukarıdaki ifade tek başına kullanılmaz. Bunun yerine;

1. Ana ifade farklı bir şekilde ayrıştırıldığında;

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{p}{\rho} \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} = -\frac{p}{\rho} \nabla v = -\nabla \left(\frac{pv}{\rho} \right) + v \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (4.37)$$

2. (4.37) de verilmiş olan ifade bölüm 4.3.2 de belirtilmiş olan yöntem ile ayrıştırılırsa denklem (4.38) i elde edilir.

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \sum_{j=1}^N m_j \frac{p_j}{\rho_j^2} v_{ij} \nabla_i W_{ij} \quad (4.38)$$

3. Gerçeklikte denklem (4.38) ve (4.36) aynı şeyi ifade etmektedir. Bu nedenle ikisini toplayıp ikiye böldüğümüzde tekrar iç enerjideki değişim elde edilmiş olur. Bu işlemin yapılmış hali denklem (4.39) da verilmiştir.

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) v_{ij} \nabla_i W_{ij} \quad (4.39)$$

4.3.6. Yapay viskozite ifadesi

Daha önce bahsedildiği gibi şok probleminin çözümünde viskozitenin etkisi çok düşüktür, (Anderson, 1995). Ancak İPH yönteminde momentumun korunumu ve enerjinin korunumu denklemlerinin bir parçası olan viskoz ifade parçacıkların fiziksel olmayan salınımlar yapmalarını engellemek ve parçacıkların birbirine fazla yaklaşmasını engellemek için yaygın olarak kullanılır.

Bunun yanısıra bu çalışmanın konusu olan şok probleminde, gradyen bölgesindeki kinetik enerjinin ısı enerjisine dönüşmesi beklenmektedir. Bu nedenle viskoz ifadenin bu değişime duyarlı olması beklenmektedir. Literatürde çokça kullanılan bir yapay viskozite metodu olan “Monaghan Tipi Yapay Viskozite” bu çalışma kapsamında kullanılmıştır.

Monaghanın yapay viskozite ifadesi aşağıda denklem 4.40 da verilmiştir.

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha_{\Pi} \bar{c}_{ij} \phi_{ij} + \beta_{\Pi} \phi_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & v_{ij} \cdot x_{ij} < 0 \\ 0 & v_{ij} \cdot x_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

Denklem 4.40 da tanımlanmış olan;

$$\phi_{ij} = \frac{h_{ij}v_{ij} \cdot x_{ij}}{|x_{ij}|^2 + \varphi^2} \quad (4.41)$$

$$\bar{c}_{ij} = \frac{1}{2}(c_i + c_j) \quad (4.42)$$

$$\bar{\rho}_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j) \quad (4.43)$$

$$h_{ij} = \frac{1}{2}(h_i + h_j) \quad (4.44)$$

$$v_{ij} = v_i - v_j \quad (4.45)$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (4.46)$$

Denklem (4.40) da kullanılmış olan α_{Π} ve β_{Π} genelde 1 civarında verilen katsayılardır (Monaghan, 1988; Evrard, 1988). φ ise genellikle parçacığın etki alanının onda biri alınır. Bu sabit çözüm sırasında parçacıkların birbirine yaklaşması sonucu oluşabilecek sayısal ıraksamadan kaçınmak için kullanılır (Liu & Liu, 2003).

Tanımlanmış olan yapay viskozite terimi hem momentumun korunumu denkleminin sonuna hem de enerjinin korunumu ifadesinin sonuna eklenmektedir. Bu durumda enerjinin korunumu ifadesi denklem (4.47) deki haline, momentumun korunumu ise denklem (4.48) deki haline gelmektedir.

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) v_{ij} \nabla_i W_{ij} + \Pi_{ij} \quad (4.47)$$

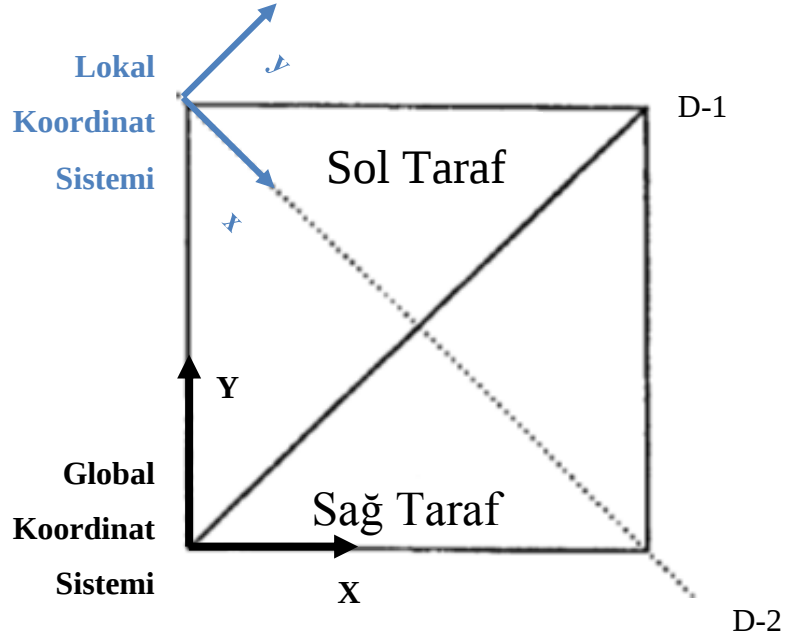
$$\frac{dv_i}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right) \nabla_i W_{ij} + \Pi_{ij} \quad (4.48)$$

5. VAKA ÇALIŞMASI

Çalışmanın amacı yüksek basınç gradyanlı bir akışın çözülmesidir. Problemde iki boyutlu bir vaka ele alınmış ve belirtilen başlangıç ve sınır koşulları için alınan çözüm Wardlaw (1998) tarafından sunulan rapor ile karşılaştırılmıştır.

5.1. Çözüm Uzayı

Vaka çalışması Şekil 5.1 de gösterilmiş olan kare ortamda çözülmüştür.



Şekil 5.1 : Çözüm uzayı.

Kare 300x300 cm boyutundadır. Sonuçlar nokta nokta belirtilen diyagonal üzerinde (D-2) okunmuştur.

Çalışmalar sırasında kullanılmış olan global koordinat sistemi Şekil 5.1 de çözüm uzayının sol alt köşesinde gösterilmiştir. D-2 üzerinde verilmiş olan koordinat eksenine ise lokal koordinat eksenidir. Lokal koordinat sisteminin global koordinat sistemine göre orjin noktası (0,300) ve global koordinat eksenine göre 45° açılı durmaktadır. Bundan sonra global koordinat eksenine göre yapılan gösterimler X-konum / Y-

konum şeklinde, lokal koordinat sistemine göre yapılan gösterimler ise x-konum / y-konum şeklinde yapılacaktır.

5.2. Başlangıç Koşulları

Şekil 5.1 de gösterildiği üzere çözüm uzayı iki bölgeye ayrılmıştır. Her iki bölge için başlangıç koşulları aşağıda gösterildiği gibidir;

Çizelge 5.1 : Başlangıç koşulları.

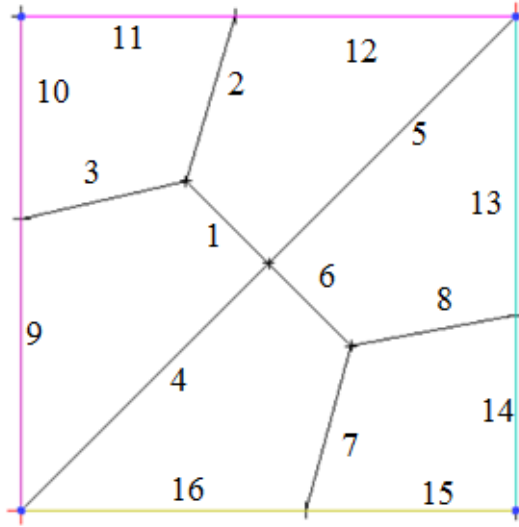
Sol Taraf	Sağ Taraf
$\rho=0.002 \text{ g/cm}^3$	$\rho=0.001 \text{ g/cm}^3$
$e = 12.25\text{E}+9 \text{ erg/g}$	$e = 6.125\text{E}+9 \text{ erg/g}$
$p = 9.80\text{E}+6 \text{ dyn/cm}^2$	$p = 6.125\text{E}+9 \text{ dyn/cm}^2$
$u = 0 \text{ cm/s}$	$u = 0 \text{ cm/s}$

5.3. Sonlu Hacimler Yöntemi ile Çözüm

Bu bölüm kapsamında sonlu hacimler yöntemi Bölüm 3 de anlatılmış olan yöntemler ile Bölüm 5.1 ve Bölüm 5.2 de tarif edilmiş olan probleme uygulanmıştır. Yapılan basitleştirimeler ve gerekli ayarlar tanımlanmış, sonuçlar paylaşılmıştır.

5.3.1. Çözüm ağı

Çözüm ağının oluşturulması sürecinde ICEM – CFD programı kullanılmıştır. Çözüm ağı tamamen dörtgen elemanlardan oluşmaktadır. Bu bağlamda bloklama metodu kullanılmıştır. Sol ve sağ taraf arasındaki sınırı doğru yakalamak amacıyla **Şekil 5.2** de gösterilmiş olan blok yapısı kullanılmıştır.



Şekil 5.2 : Blok yapısı.

Şekil 5.2 da belirtilmiş olan her bir kenardaki eleman sayısı aynı olup çözüm ağı yakınsama (mesh convergence) çalışmasında kullanılan çözüm ağlarına göre kenarlardaki eleman sayıları ve toplam çözüm ağı sayısı Çizelge 5.2 de verilmiştir.

Çizelge 5.2 : Çözüm ağı eleman sayıları.

Çözüm Ağı	Kenar Eleman Sayısı	Çözüm Ağı Eleman Sayısı
Çözüm Ağı 1	124	90774
Çözüm Ağı 2	200	237606
Çözüm Ağı 3	280	476046
Çözüm Ağı 4	342	697686
Çözüm Ağı 5	389	903264

Bütün çözüm ağları için kalite kriterleri aşağıdaki gibidir;

Minimum iç aç: 45°

Minimum Diklik Niteliği (Orthogonal Quality): 0.7

Maksimum Yan Oranı: 3.16

5.3.2. Sınır koşulları

Bütün dış sınırlar dalga modellemesine uygun olarak yansımaz (non-reflecting) koşulunu sağlayan simetri sınır koşulu ile tanımlanmıştır. Simetri sınır koşulu $U \cdot \vec{n} = 0$ anlamına gelmektedir.

5.3.3. Ortam koşulları

Ortam tek fazlı olarak tanımlanmıştır. Akışkan ideal gaz olarak tanımlanmış olup özgül ısı ve moleküler ağırlık sabit alınmıştır.

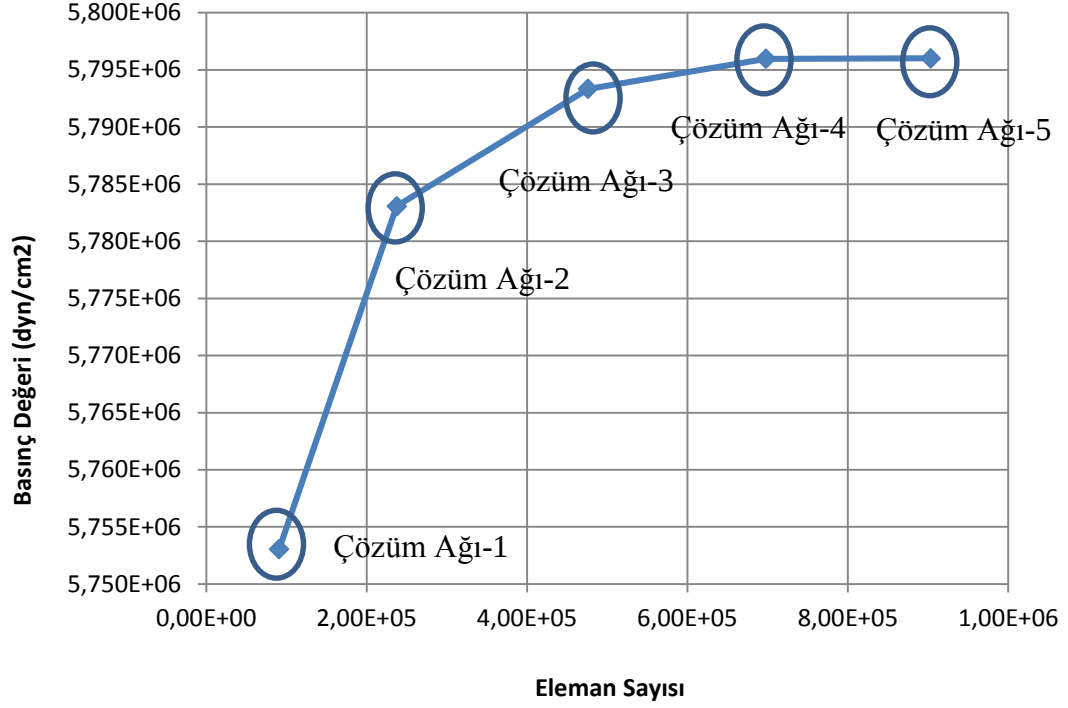
5.3.4. Çözücü ayarları

- Euler denklemleri çözülmüştür.
- Çözüm elemanların merkezlerinde alınmıştır.
- Kapalı (Implicit) çözücü kullanılmıştır.
- Akı için ROE şeması kullanılmıştır.
- Akış denklemleri için second order upwind şeması kullanılmıştır.
- Zaman birinci derece ayrıklaştırılmıştır.
- CFL sayısı 0.1 alınmıştır. ($\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ sn dir.)

5.3.5. Çözüm ağından bağımsızlık çalışması

Çözüm ağı bölümünde belirtilmiş olan beş ağ yapısı için çözüm alınmış olup.

X-konum=144.96 , Y-konum=155.04 noktasındaki basınç değeri yakınsama kriteri olarak kullanılmıştır. Yakınsama eğrisi aşağıdaki gibidir. Çözüm elemanı sayısından tasarruf amacıyla Çözüm Ağı-4 'ün doğruluğu kabul edilmiş, ve çalışmalara onunla devam edilmiştir.



Şekil 5.3 : Yakınsama eğrisi.

5.3.6. Sonuçlar

Yapılan analizin sonuçları değerlendirilirken Şekil 5.1 de gösterilmiş olan D-2 üzerinde, lokal koordinat sistemi kullanılarak okunan veriler kullanılmıştır.

Birim sistemi aşağıdaki gibidir;

Mesafe: cm

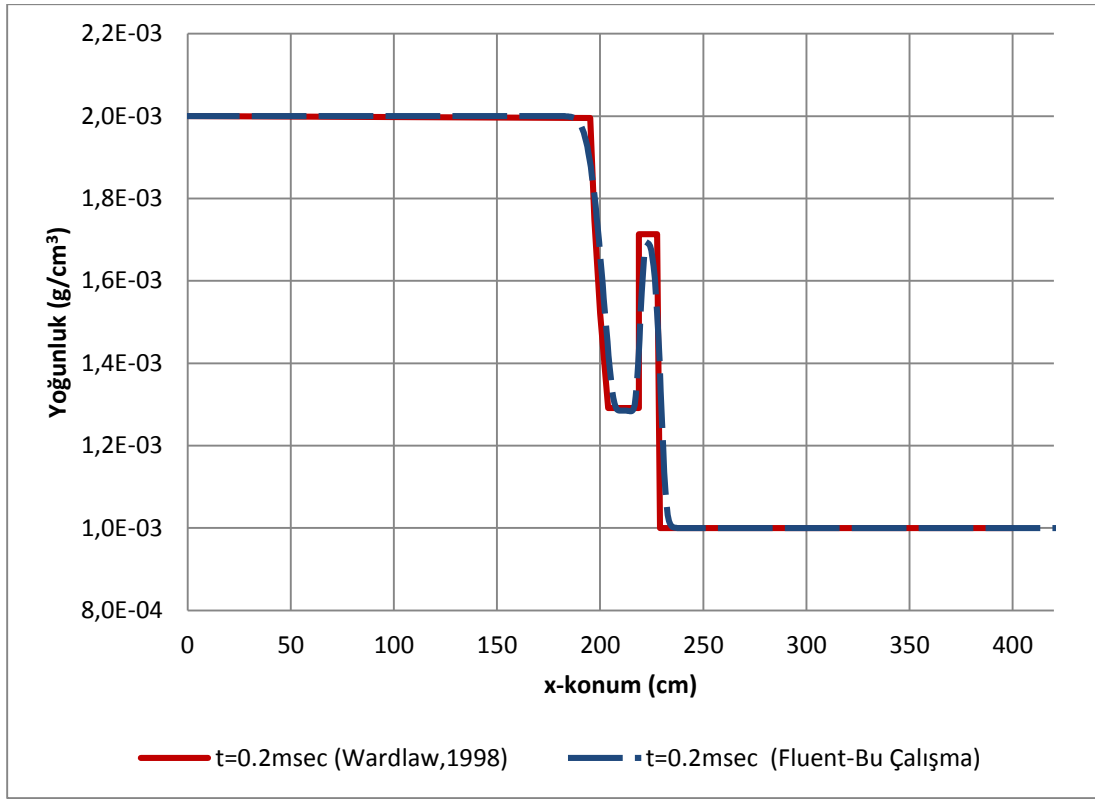
Yoğunluk: g/cm³

Basınç: dyn/cm²

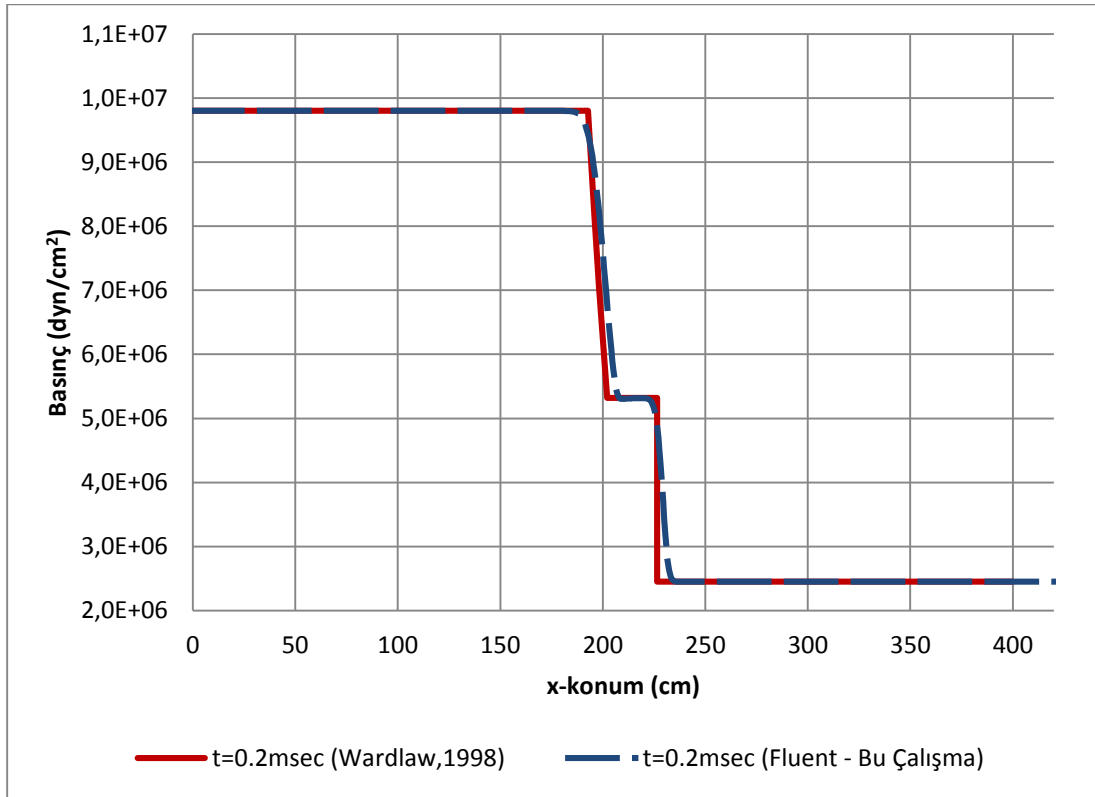
Hız: cm/sn

Wardlaw (1998) 'in sunduğu verileri değiştirmeden kullanmak adına bu çalışma kapsamında elde edilen veriler SI birim sisteminde sunulmamıştır.

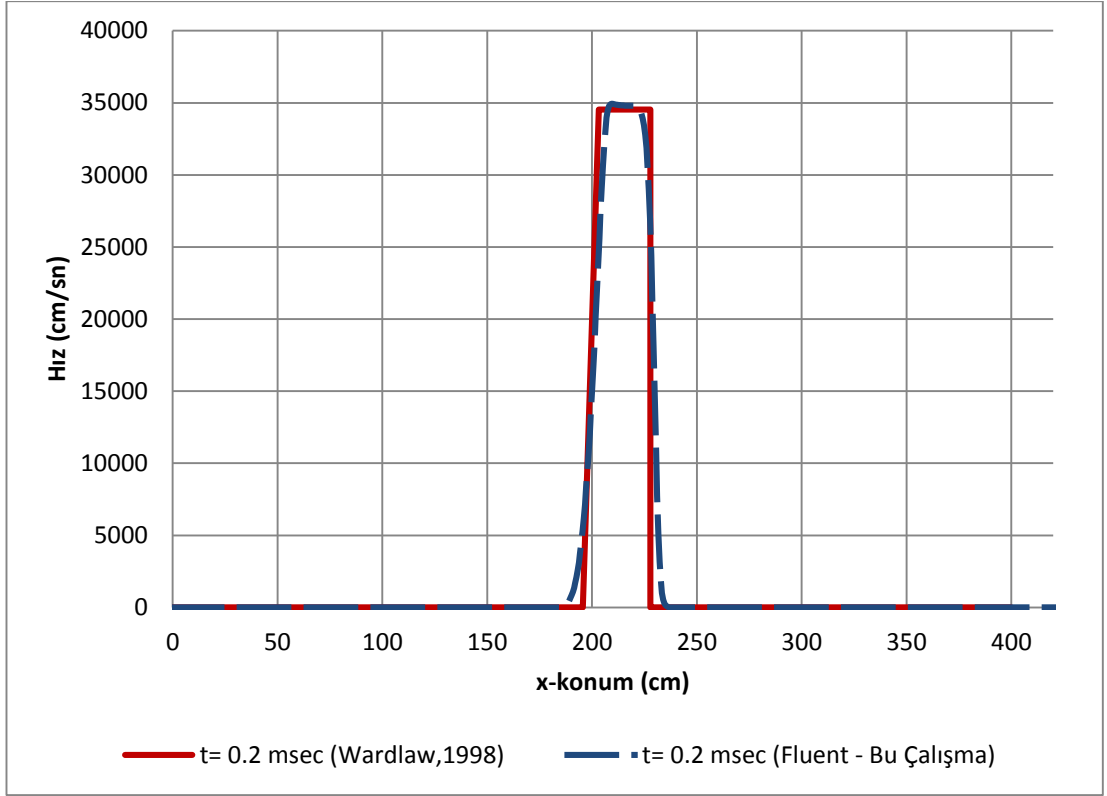
Analizlerin sonuçları farklı zamanlarda ortam verisi olarak aşağıda sunulmuştur.



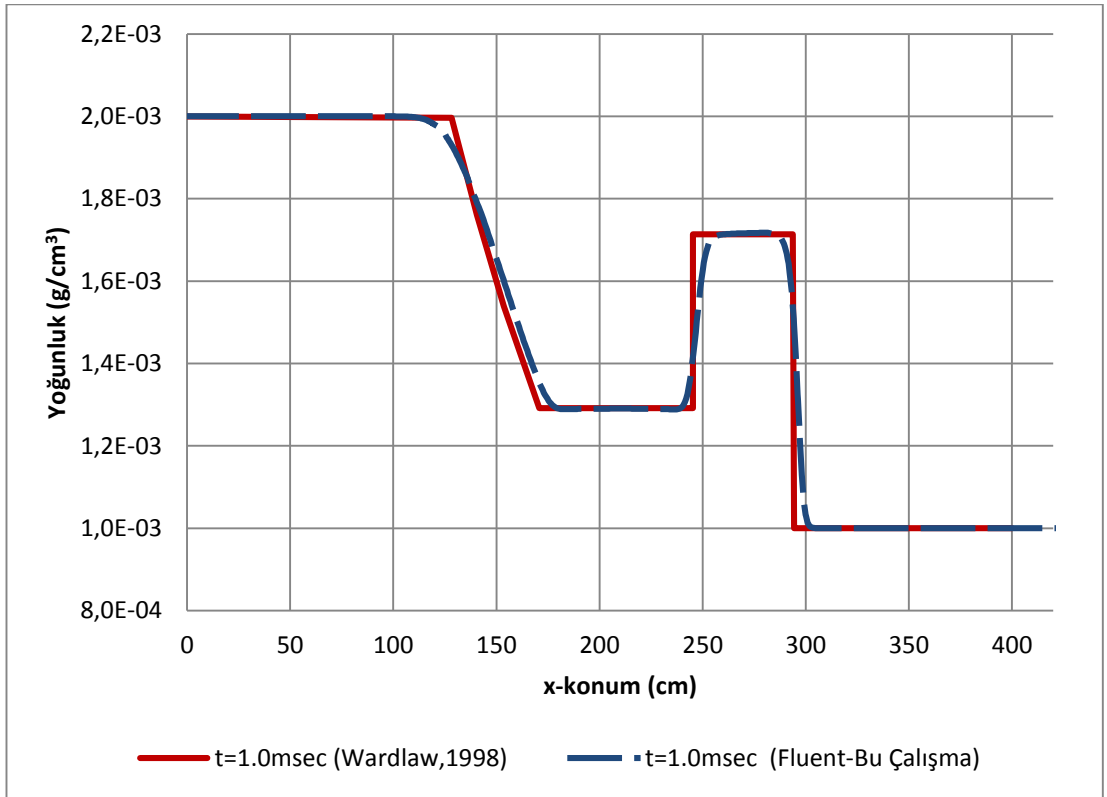
Şekil 5.4 : 0.2×10^{-3} sn de Yoğunluk – Konum eğrisi.



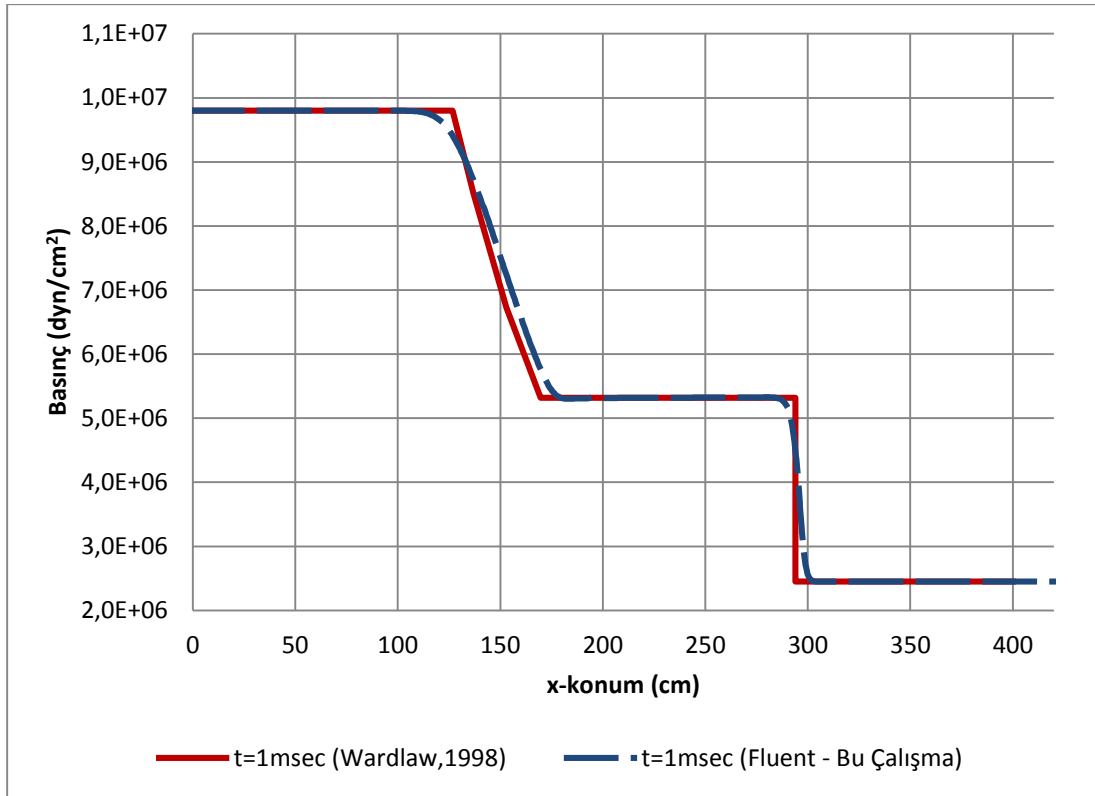
Şekil 5.5 : 0.2×10^{-3} sn de Basınç – Konum eğrisi.



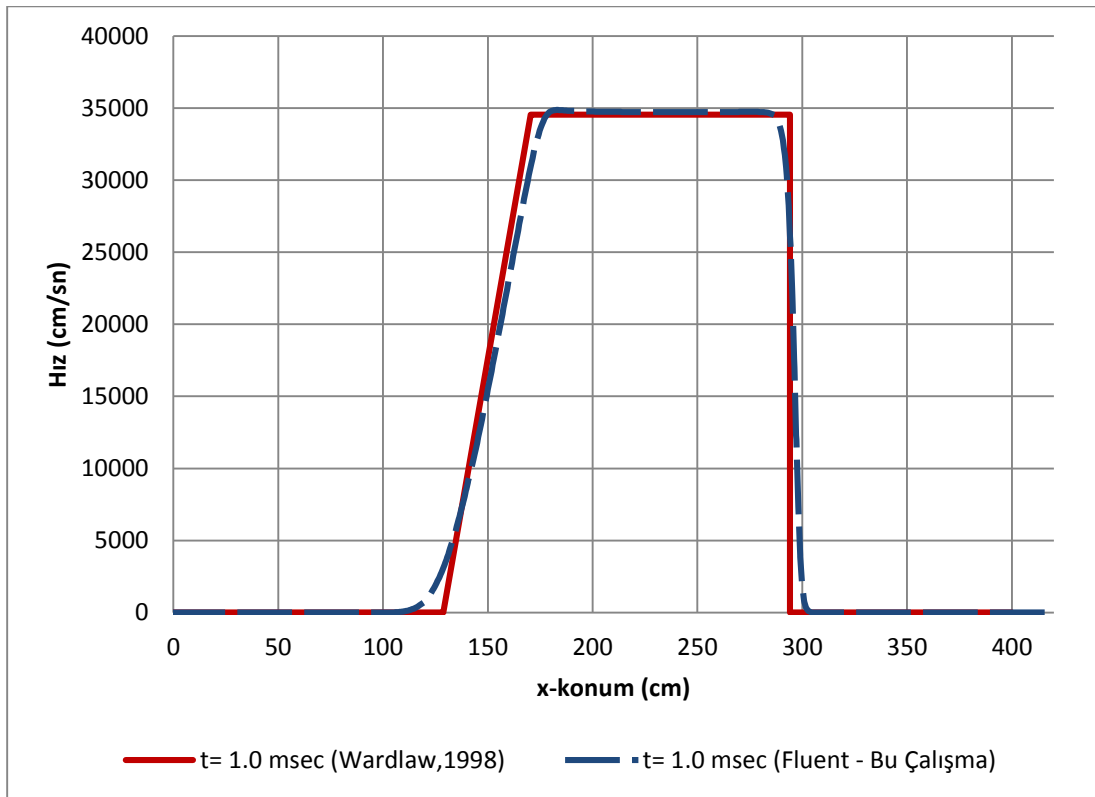
Şekil 5.6 : 0.2×10^{-3} sn de Hız – Konum eğrisi.



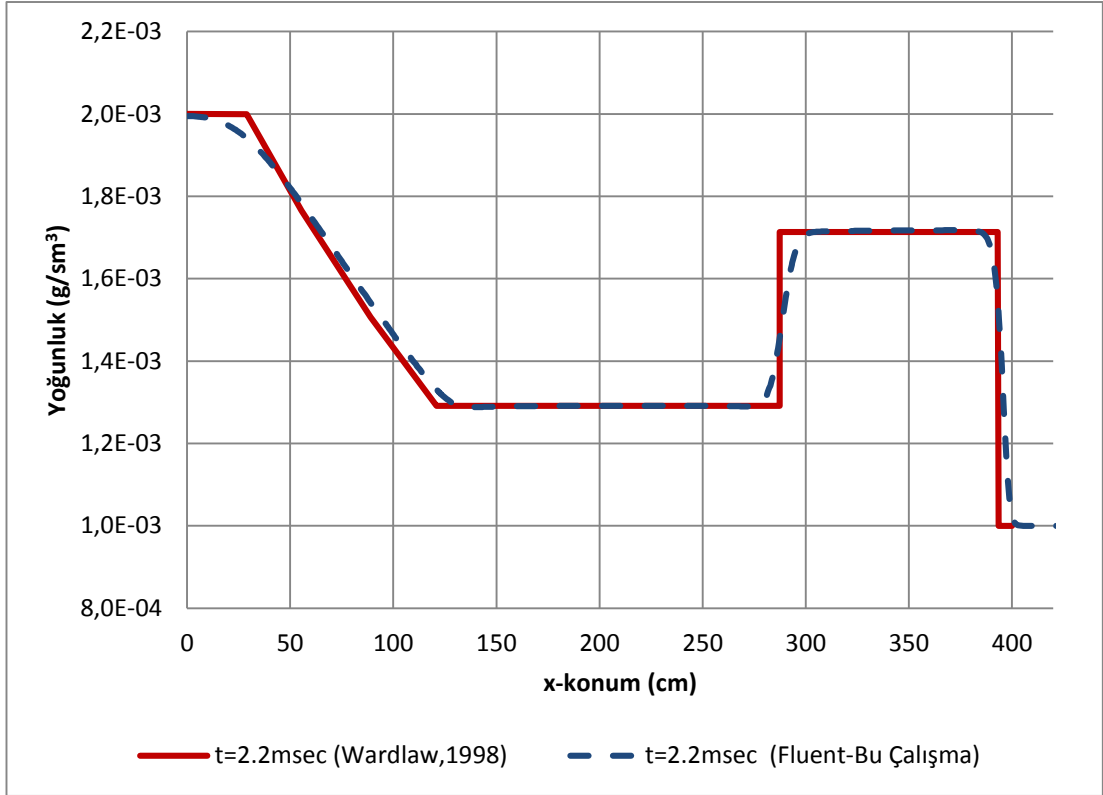
Şekil 5.7 : 1.0×10^{-3} sn de Yoğunluk – Konum eğrisi.



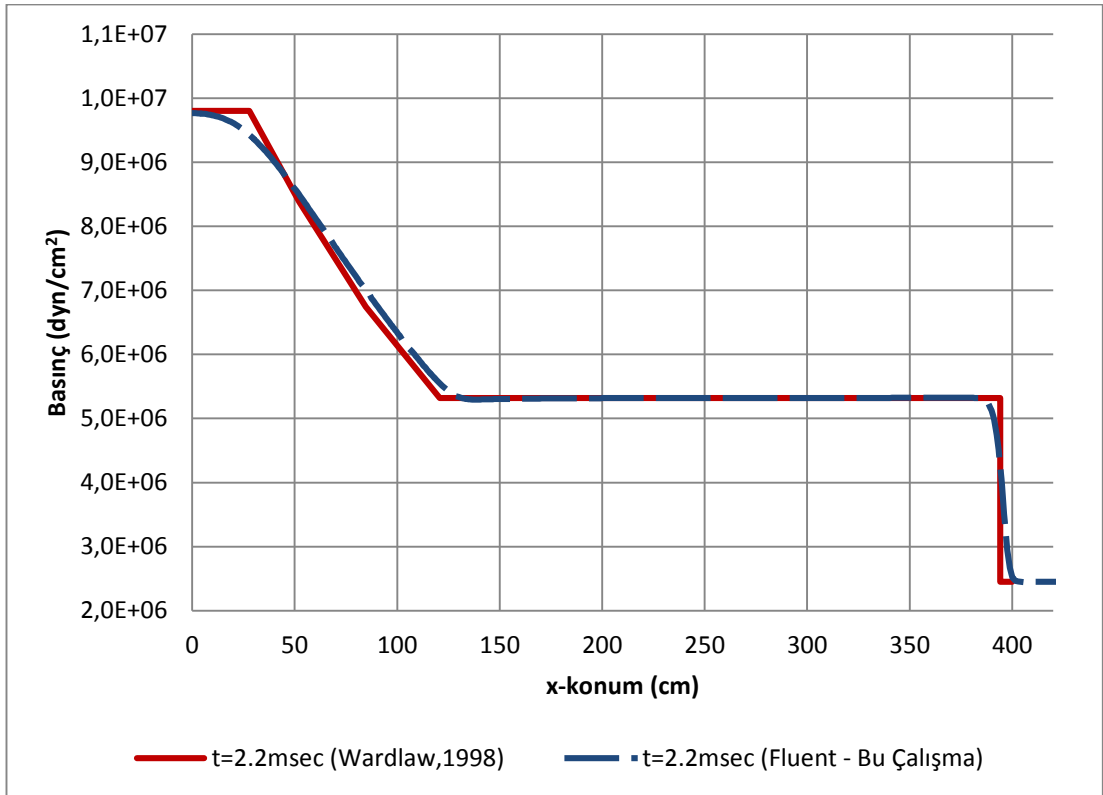
Şekil 5.8 : 1.0×10^{-3} sn de Baskı – Konum eğrisi.



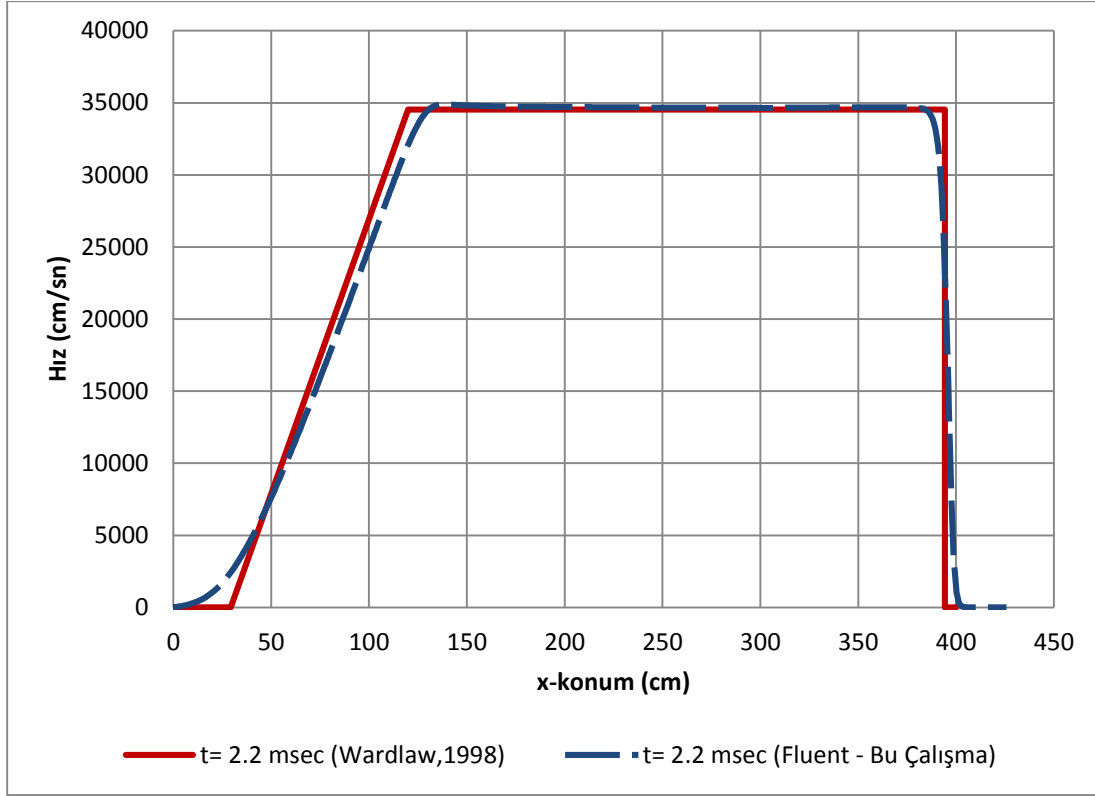
Şekil 5.9 : 1.0×10^{-3} sn de Hız – Konum eğrisi.



Şekil 5.10 : 2.2×10^{-3} sn de Yoğunluk – Konum eğrisi.



Şekil 5.11 : 2.2×10^{-3} sn de Basınç – Konum eğrisi.



Şekil 5.12 : 2.2×10^{-3} sn de Hız – Konum eğrisi.

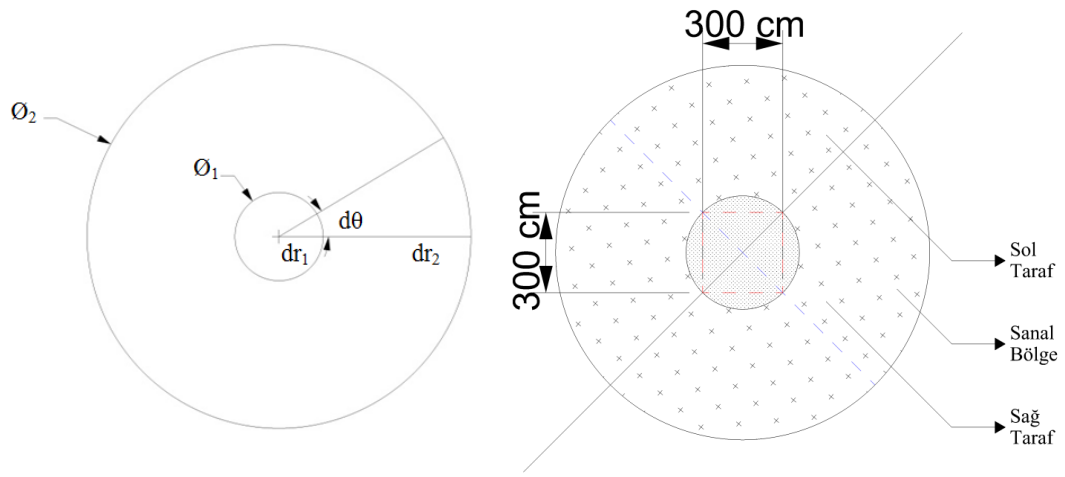
5.4. İPH Yöntemi ile Çözüm

Bu bölüm kapsamında Bölüm 4 de anlatılmış olan yöntemler ile Bölüm 5.1 ve Bölüm 5.2 de tarif edilmiş olan probleme uygulanmıştır. Yapılan basitleştirimeler ve gerekli ayarlar tanımlanmış, sonuçlar paylaşılmıştır.

5.4.1. Parçacık yerleşimi

İPH uygulamasında suni bir sönüm yaratmamak adına sınır koşulu tanımlanmamıştır. Bu nedenle parçacıkların yerleşimi incelenen bölgede sabit kalmamaktadır. Bu durum zaman içerisinde ortamdaki parçacık sayısının azalmasına yol açmakta ve çözüm alınan bölge hakkında edinilen bilgi miktarını düşürmektedir. Çözüm bölgesinde seyrek dağılım ise şok dalgası gibi yüksek gradyenin incelendiği problemlerde hatalı çözüme yol açmaktadır. Bu problemin çözümü için çözüm uzayı çözüm bölgesinde daha sık olacak şekilde çözüm bölgesinin dışına uzatılmıştır.

Modelleme kolaylığı nedeniyle kare bir çözüm bölgesi değil dairesel bir çözüm bölgesi yaratılmıştır. 15000 parçacık ile temsil edilmiş olan çözüm uzayında parçacıkların dağılımı Şekil 5.13 de gösterilmiştir.



$dr_1 =$	1 cm	$\varnothing_1 =$	424.26 cm
$dr_2 =$	12.5 cm	$\varnothing_2 =$	1400 cm
		$d\theta =$	6°

Şekil 5.13 : İPH çözüm uzayı.

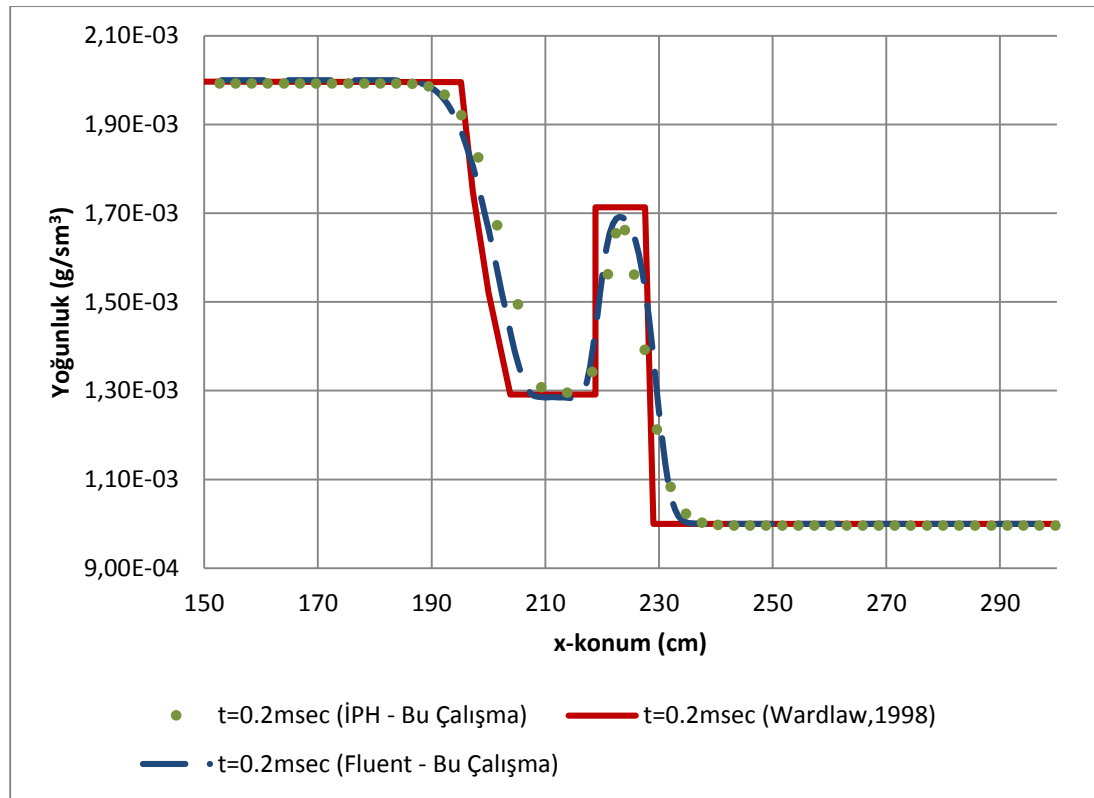
Şekil 5.1 de tanımlanmış olan çözüm uzayı Şekil 5.13 'de belirtilmiş olan İPH çözüm uzayının merkezinde konumlandırılmıştır.

Sonuçlar kesikli çizgi ile gösterilmiş olan D-2 üzerinden lokal koordinat sistemine göre okunmuştur.

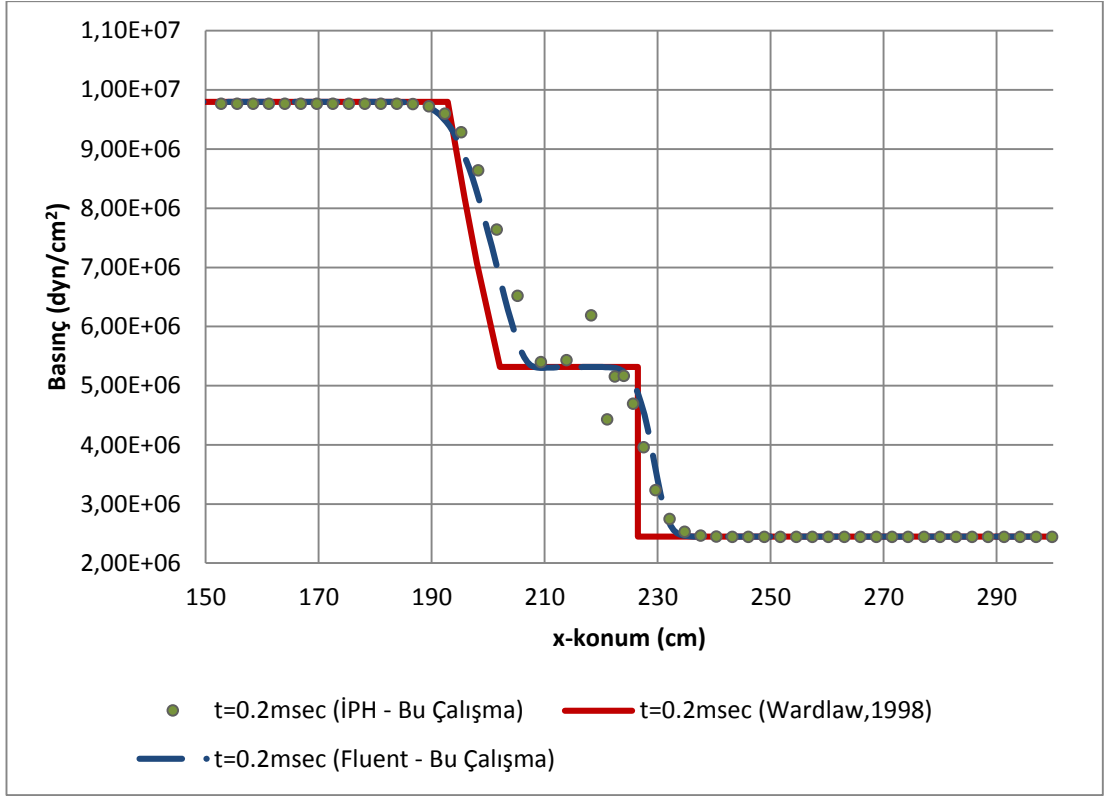
5.4.2. Çözücü ayarları

- Euler Denklemleri Çözülmüştür.
- Toplam Yoğunluk Yaklaşımı Kullanılmıştır.
- Sabit Arma Bölgesi Kullanılmıştır.
- Kübik Triz (Spline) Çekirdek Fonksiyonu Kullanılmıştır.
- Monaghan Tipi Yapay Viskozite Kullanılmıştır.
- Çözüm Her Bir Parçacık İçin Hesaplanmış, İncelenen Bölgeye Mesafeye Bağlı Bir Ağırlık Fonksiyonu İle İnterpole Edilmiştir.

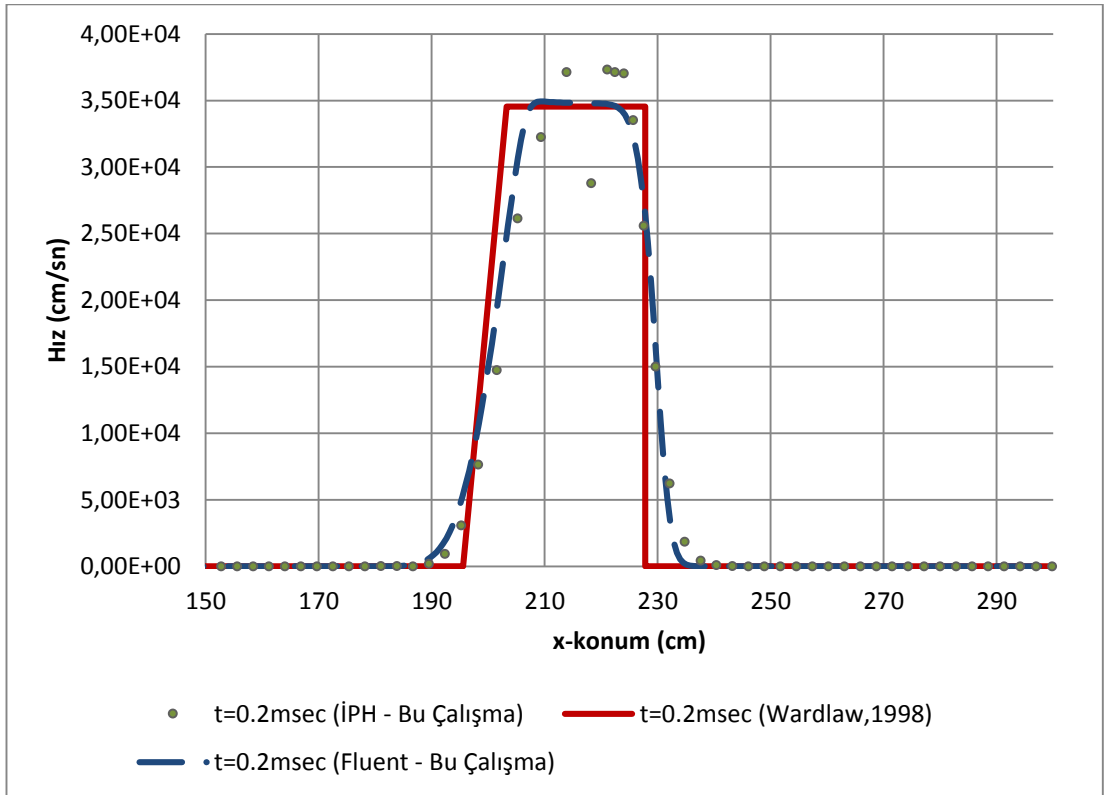
5.4.3. Sonuçlar



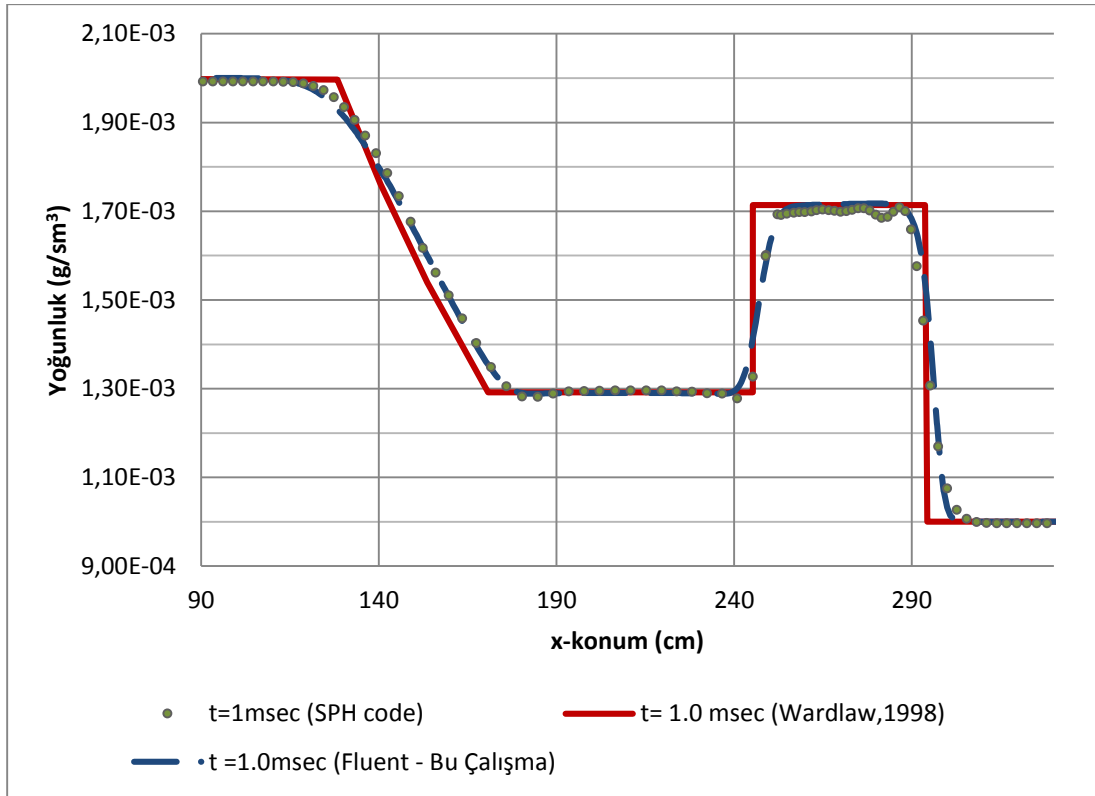
Şekil 5.14 : 0.2×10^{-3} sn de Yoğunluk – Konum eğrisi.



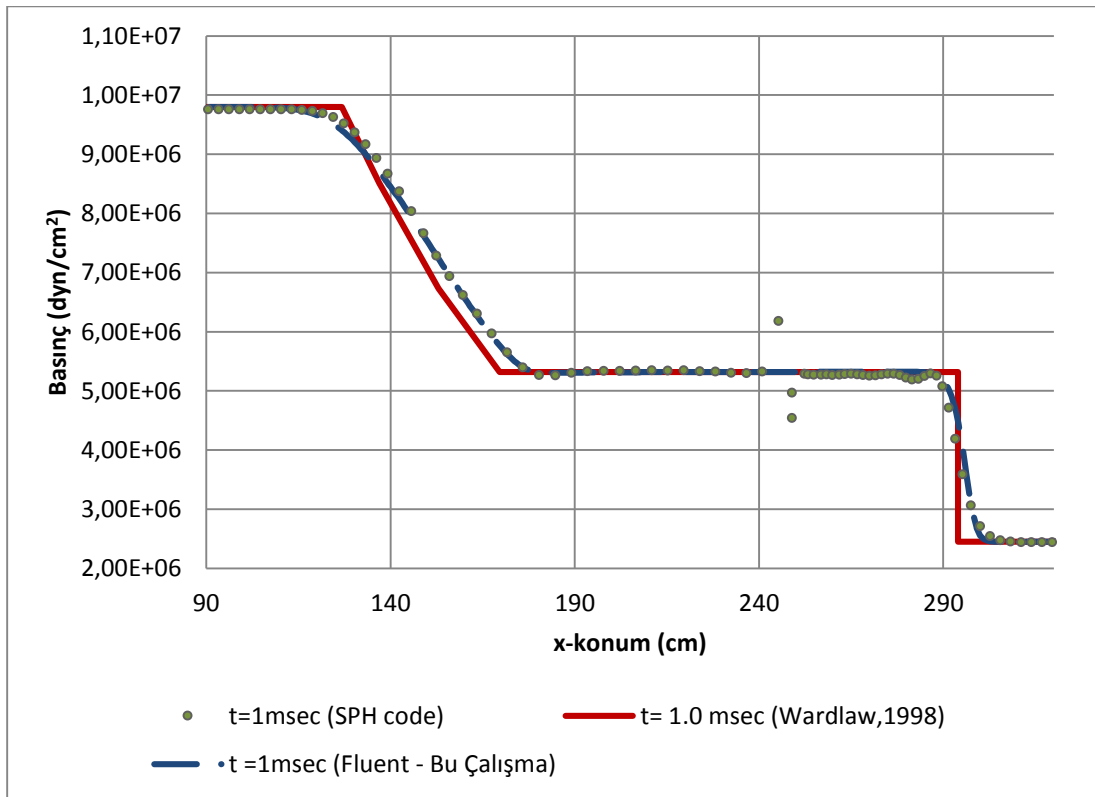
Şekil 5.15 : 0.2×10^{-3} sn de Baskınç – Konum eğrisi.



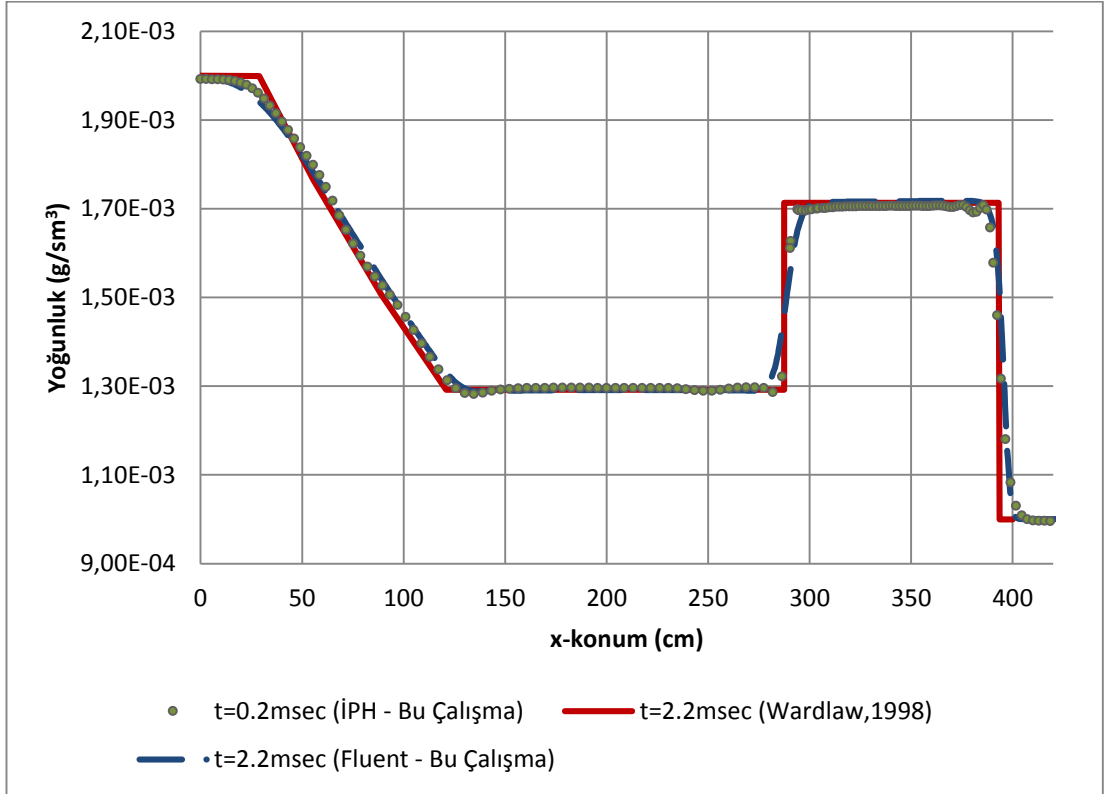
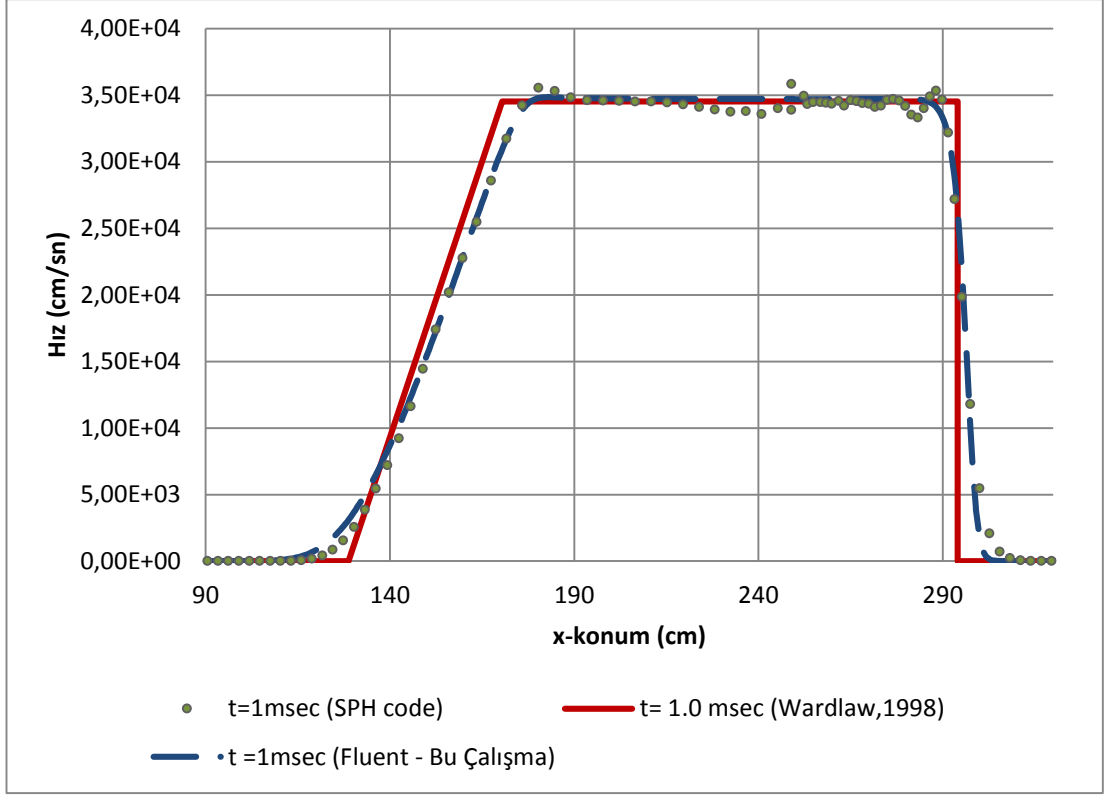
Şekil 5.16 : 0.2×10^{-3} sn de Hız – Konum eğrisi.

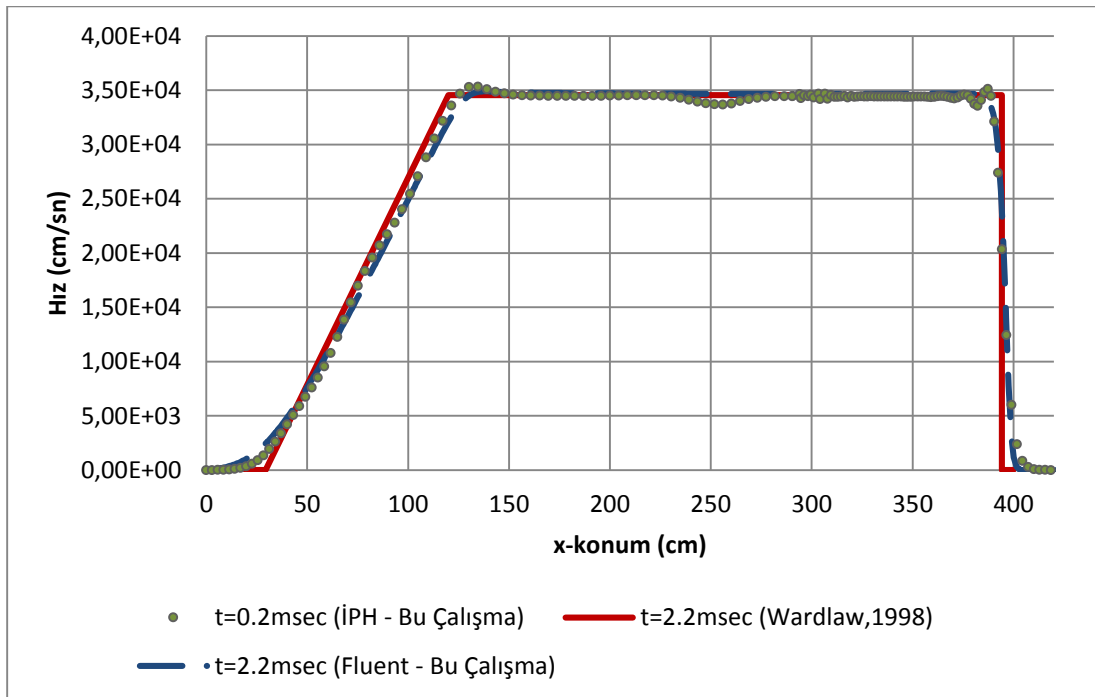
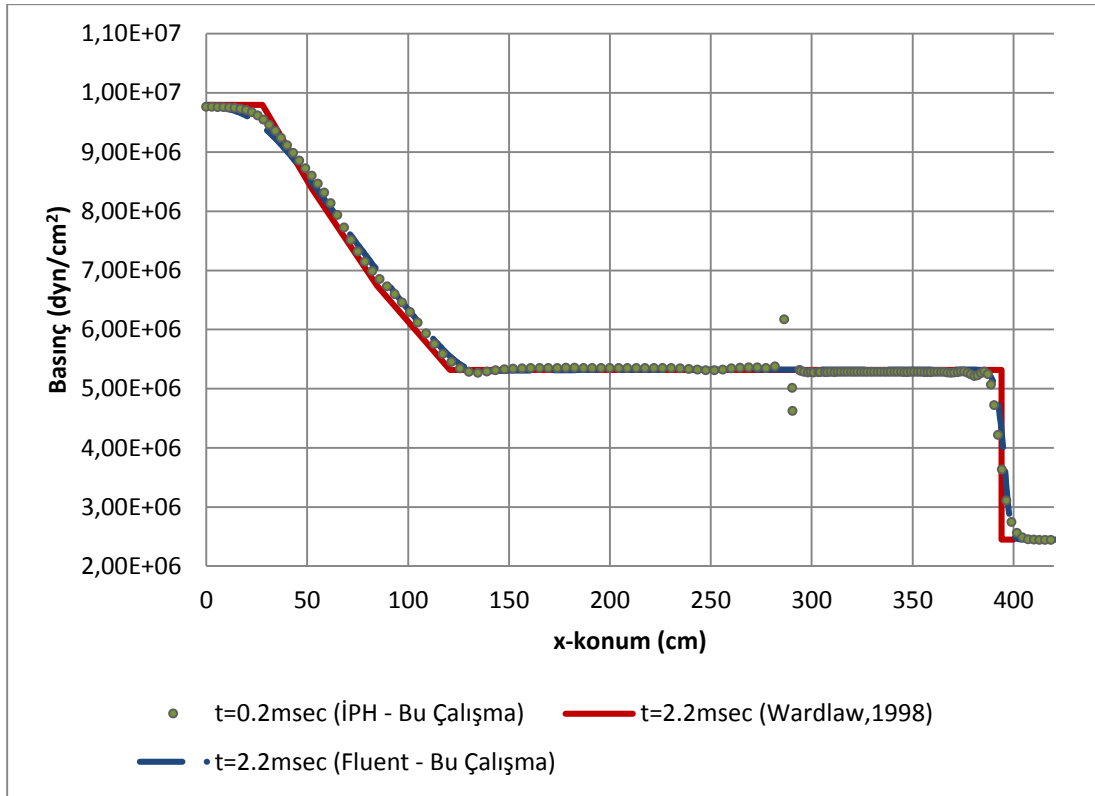


Şekil 5.17 : 1.0×10^{-3} sn de Yoğunluk – Konum eğrisi.



Şekil 5.18 : 1.0×10^{-3} sn de Basınç – Konum eğrisi.





6. SONUÇLAR & YORUMLAR

Sonlu hacimler yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar, Wardlaw (1998) tarafından sunulan sonuçlar ile oldukça uyumludur. Bu durum yüksek basınç gradyanlı akışlar için çözüm yöntemi olarak sonlu hacimlerin kullanılmasının uygun olduğunu göstermektedir.

Çözüm yöntemi uygun olmakla beraber daha önce bahsedilmiş olan yüksek gradyanlı problemler Euler tipi yaklaşımın neden olduğu handikaplar gözlenmiştir. İncelenen problemde mevcut olan yüksek basınç gradyanı euler yaklaşımı temelli bir sonlu hacimler yöntemi uygulanarak doğru bir şekilde modellenememektedir. Grafiklerden anlaşılacağı üzere süreksizlik bölgelerinde gradyanlar oluşmuştur. Bu durum her ne kadar çözüm ağının sıklaştırılması ile çözülmeye çalışılsa da net bir çözümü mevcut değildir.

İPH yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar, Wardlaw (1998) tarafından sunulan ve sonlu hacimler yöntemi kullanılarak hesaplanan sonuçlar ile oldukça uyumludur. Bu durum yüksek gradyanlı akış problemleri için çözüm yöntemi olarak parçacık temelli bir yaklaşım olan İPH'ın kullanılabileceğini göstermektedir.

Problem doğası gereği süreksizlikler içermektedir. Süreksizliklerin modellenmesinde parçacık temelli yöntemin artıları ve eksileri gözlemlenmiştir. Lagrange yaklaşımı kullanan bu yöntemde süreksizlik bölgesinin ayrıntılı incelenmesi için parçacıkların konumları ilgili ek çalışma yapma gerekliliği vardır. Parçacıklar basınç geçişi nedeniyle hareket etmekte ve gradyan bölgesinde seyrekleşmektedir. Bu nedenle keskin geçişlerin olduğu bölgeler istenilen ayrıntıda yakalanamamıştır.

Hareket eden parçacıklar belirli bölgelerde fazla sıklaşarak gerçekçi olmayan yoğunluk (dolayısı ile de basınç ve hız değerleri) oluşturmuştur. Bu durum grafiklerde görülebileceği gibi bazı salınımlara yol açmaktadır. Toplam yoğunluk yöntemi bu durumda yeterince düzgün bir geçiş sağlayamamıştır. Bu problemin çözümü için zaman adımı ara basamaklı bir yöntem kullanılabilir ancak bu da gradyan bölgede

fazla düzgün bir geçiş sağlayarak problemin doğasındaki süreksizliği sönmölemektedir. Bu nedenle bu yöntem tercih edilmemiştir.

Kullanılan ideal gaz ifadesinde basınç değeri sadece yoğunluk değeriine bağıdır. Bu nedenle basınç değeri gerçekçi olmayan salınımlar göstermektedir. Bu durum bütün zaman adımlarında gözlenebilmektedir. Hız ya da iç enerji ifadesine bağı bir hal denklemi ile bu durum giderilebilmektedir. Ancak bu çalışmada uygulanmamıştır.

Bu dezavantajlar ile beraber problem sonlu hacimler yöntemi ile yaklaşık 700 000 eleman kullanılarak çözülebilirken İPH yönteminde sadece 15 000 parçacık ile çözülebirmiştir. Lagrange yaklaşımı kullanan İPH yönteminin en önemli avantajının bu olduğı söylenebilir.

KAYNAKLAR

- Anderson, J.** ,1995. Computational Fluid Dynamics: The Basics With Applications, McGraw-Hill
- Benson, D.** , 1992. Computational methods in Lagrangian and Eulerian. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **99**, 235-394.
- Boppe, C.W.**, Calculation of Transonic Wing Flows by Grid Embedding, *AIAA* 77-207
- Charles, A.**, 1987. An overview of the theory of hydrocodes. *International Journal of Impact Engineering*, **5**, 33-59.
- Evrard, E.**, 1988. Beyond N-Body: 3D cosmological gas dynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **235**, 911.
- Gingold, R., & Monaghan, J.J.** , 1977. Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **181**, 375-389.
- Hans, U. M.**, 1999. Review: hydrocodes for structure response to underwater explosions. *Shock and Vibration*, **6**, 81-96.
- Hess, J.L. & Smith, A.M.O.** , 1967. Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies, *Progress in Aerospace Sciences*, **8**, 1–138.
- Hirsch, C.** ,2007. Numerical Computation of Internal & External Flows, Elsevier
- Hoffmann, K.**, 2000. Computational Fluid Dynamics (Cilt 2).
- Hunt, J.C.R.** , 1998. Lewis Fry Richardson And His Contributions To Mathematics, Meteorology, And Models Of Conflict, *Annual Review of Fluid Mechanics*
- Jameson, A., Schmidt, W. & Turkel, E.**, 1981, Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes, *AIAA*, 81-1259.
- Kanamori M, Suzuki K.**, 2011, Shock wave detection based on the theory of characteristics for CFD results, *AIAA*, 2011-3681.
- Lattanzio, J. C., & Monaghan, J. J.**, 1985. A refined particle method for astrophysical problems. *Astronomy and Astrophysics*, **149**, 135-143.
- Liu, G., & Liu, M.**, 2003. Smoothed Particle Hydrodynamics; A Meshfree Particle Method, World Scientific.
- Monaghan, J. J.**, 1988. An introduction to SPH. *Computer Physics Communications*, **48**, 89-96.
- Monaghan, J. J.**, 2005. Smoothed Particle Hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, **68**, 1703-1759.

- Randles, P., & Libersky, L.** , 1996. Smoothed particle hydrodynamics some recent improvements and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **138**, 375-408.
- Schlatter, B.**, 1999. A Pedagogical Tool Using Smoothed Particle Hydrodynamics to Model Fluid Flow Past a System of Cylinders.
- Von Neumann.** , 1944. Proposal and Analysis of a New Numerical Method For Treatment Hydrodynamical Shock Problems. Von Neumann Collected Works ed A Taub, Oxford:Pergamon.
- Wardlaw, A.** ,1998. Underwater Explosion Test Cases. Office of Naval Research Arlington, VA.
- ANSYS** (2015) Alındığı tarih: 26.4.2015, adres:
<http://www.ansys.com/Support/Quality+Assurance>
- ANSYS-FLUENT** (2015) Alındığı tarih: 26.4.2015, adres:
<http://www.ansys.com/Products/Simulation+Technology/Fluid+Dynamics/Fluid+Dynamics+Products/ANSYS+Fluent>

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad : Alaz TALAY

Doğum Yeri ve Tarihi : İstanbul – 12.10.1988

E-Posta : alaz.talay@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2010, İTÜ, Gemi İnş. ve Deniz Bil. Fak., Gemi İnş. ve Deniz Tek. Müh. Bölümü

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2011 - 2012 İ.T.Ü. Gemi İnş. Fak.– SAN-TEZ Projesi Kapsamında Araştırma Müh.
- 2012 - 2014 FİGES MÜH. – CFD Müh.
- 2014 - 2015 ENGINSOFT TURKEY – CFD Müh.
- 2015 - MİLPER PERVANE TEK. – CFD Müh.