

3917's

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RIVLIN-ERICKSEN AKIŞKANININ DALGALI

BİR KANAL İÇİNDEKİ HAREKETİ

39173

YÜKSEK LİSANS TEZİ
KAYIT
MERKEZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh.S.Ayşe ZALOĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 11 Ekim 1993

Tezin Savunulduğu Tarih : 13 Ekim 1993

Tez Danışmanı : Doç.Dr.Gülgün YALÇINKAYA

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr.Emin ERDOĞAN

Prof.Dr.Cemil Ş.ERKMAN

EKİM 1993

ÖNSÖZ

Çalışmam sırasında bana destek olan ve her hususta değerli yardımlarını esirgemeyen danışmanım Sayın Doç.Dr. Gülgün YALÇINKAYA'ya ve olumlu eleştirileriyle bana yardımcı olan tüm arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İstanbul, EKİM 1993

S.Ayşe ZALOĞLU



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	11
KULLANILAN NOTASYONLAR.....	1v
ÖZET.....	v
SUMMARY.....	vi
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. NON-NEWTONİEN AKIŞKANLARLA İLGİLİ GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Hız Gradyentine Bağlı Viskozite.....	4
2.2. Daimi Kayma Akısında Normal Gerilme Etkileri.....	5
2.3. Daimi Olmayan Kayma Hareketinde Geçici Cevap.....	7
2.4. Diğer Olaylar.....	7
BÖLÜM 3. PROBLEMİN GEOMETRİSİ VE TEMEL DENKLEMLER....	8
BÖLÜM 4. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ.....	15
4.1. Sıfırıncı Mertebe Çözüm.....	15
4.2. Birinci Mertebe Çözüm.....	17
4.3. İkinci Mertebe Çözüm.....	19
BÖLÜM 5. GERİLMENİN VE BASINCIN HESAPLANMASI.....	29
SONUÇLAR.....	33
KAYNAKLAR.....	35
EKLER.....	36
ÖZGEÇMİŞ.....	44

KULLANILAN NOTASYONLAR

Ψ	: Akım fonksiyonu
Re	: Reynolds sayısı
$\bar{d}$	: Kanal yarıçapı
ℓ	: Kanala ait eksenel uzunluk
δ	: Dalgalanma oranı
η	: Kanala ait sınır denklemi
a	: Dalgalanma genliği
V	: Hız
u	: Hızın x eksenine yönündeki bileşeni
v	: Hızın y eksenine yönündeki bileşeni
V_0	: Ortalama hız
ν	: Kinematik viskozite
γ	: İvme
ρ	: Yoğunluk
$\underline{T}$	: Gerilme tensörü
$\underline{I}$	: Birim tensör
p	: Basınç
α_0	: Görünen viskozite katsayısı
α_1	: Elastik viskozite katsayısı
α_2	: Çapraz viskozite katsayısı
A_1	: Birinci mertebe Rivlin-Ericksen tensörü
A_2	: İkinci mertebe Rivlin-Ericksen tensörü
ξ_1	: Elastik katsayı
γ_1	: Boyutsuz elastik katsayı
*	: Boyutlu büyüklükleri gösteren sembol

ÖZET

Bu çalışmada, sınırları dalga şeklinde olan bir kanalda Rivlin-Ericksen akışkanına ait akış, düzlemsel ve daimi hal için incelenmiştir. Kanal sınırlarını veren fonksiyon en genel halde ele alınmış, daha sonra sinüzoidal cidar için çözüm yapılmıştır.

Kanal yarıçapının kanal uzunluğuna oranı olan δ pertürbasyon parametresi olarak seçilmiş, çözüm için gerekli değişken dönüşümleri ve boyutsuzlandırma işlemleri yapılarak akım fonksiyonu, δ 'nın küçük değerleri için uygunluk denkleminin seriye açılmasıyla hesaplanmıştır. Seri çözümdeki yakınsama kontrol edilerek yeterli düzeyde olduğu gösterilmiştir.

Newtonien ve non-Newtonien haller ve değişik Reynolds sayıları için akım çizgileri çizilerek mukayese edilmiştir. Viskoelastik katsayının çok küçük olduğu durumda akışkanın Newtonien akışkana benzer davranış gösterdiği, geri akımın oluşturduğu vorteksin az miktarda büyüdüğü görülmüştür. Viskoelastik katsayının daha büyük değerinde geri akım bariz bir şekilde artmıştır. Düşük hızlarda ise vorteksin ortadan kaybolduğu ve akış profilinin düzgünleştiği belirlenmiştir.

Akışkana ait gerilme tansörünün bileşenleri hareket denkleminden hesaplanmış, kayma gerilmesi değeri için belirli bir noktada çözüm yapılarak viskoelastik katsayının etkisi gösterilmiştir. Basınç dağılımını veren denklemler elde edilmiştir.

SUMMARY

The Flow of a Rivlin-Ericksen Fluid in a Waving Channel

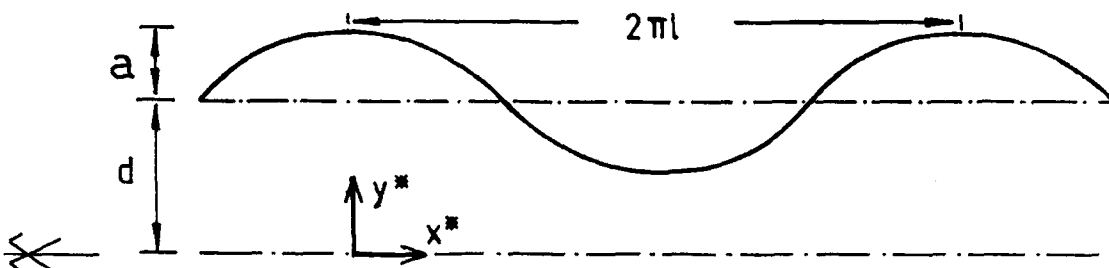
Analysis of forced convection and mass transfer in Laminar flow inside a conduit has been the subject of extensive study. Hydrodynamic solutions on steady laminar flow with moderate Reynolds numbers in conduits with irregular surfaces are obtained. In these surfaces the spread of roughness has been large, compared with the mean radius of the conduit. These results are of considerable interest, especially for blood flow in arteries with stenoses and for membrane Oxygenators using parallel plates with wavy surfaces.

In this thesis, the fluid model is taken to be Rivlin-Ericksen which is a non-Newtonian fluid. To give an idea, some non-Newtonian effects are summarized below.

One of the most important non-Newtonian effects is that viscosity changes due to the change in the velocity field and normal stress differences affects the motion of the fluid. A series of experiments are made to see these effects. Some of these are tube flow where shear thinning or shear thickening occurs; rod climbing where the non-Newtonian Liquid shows the Weissenberg effect; extrudate swell where a non-Newtonian liquid shows diameter increase upon emergence from the capillary tube; occurrence of secondary flows in the disk and cylinder system; the tubeless siphon; the uebler effect and flow through a sudden contraction.

In this study the steady flow of a Rivlin-Ericksen fluid in a channel with waving surfaces is investigated. The fluid is incompressible, the flow is two dimensional, and body forces are negligible. It differs from Sturges' work in the way that Sturges' study is unsteady and is investigated only for sinusoidal boundary. In our study, the boundary function can vary so that the problem can be solved for different forms of the boundary, and the problem is taken into account for steady motion.

The geometry of the flow is shown below.



In our study the boundary of the channel is given by,

$$\eta_+^*(x^*) = d(1 + \epsilon h(x^*)),$$

$$\eta_-^*(x^*) = -d(1 + \epsilon h(x^*))$$

Here $h(x^*)$ is chosen as a sinusoidal function. The wavelength is shown to be $2\pi\delta$. δ is defined as the ratio of channel radius to its length. $d \ll \delta$ and the average channel diameter is $2d$. The velocity field of the flow is defined as,

$$u^* = u^*(x^*, y^*)$$

$$v^* = v^*(x^*, y^*)$$

The constitutive equation of a Rivlin-Ericksen fluid is given as,

$$\underline{T} = -p\underline{I} + \alpha_0 \underline{A}_1 + \alpha_1 \underline{A}_2 + \alpha_2 \underline{A}_1^2,$$

where $\underline{T}$ is the stress tensor, p is pressure, $\underline{I}$ is the tensor of unity, $\underline{A}_1$ and $\underline{A}_2$ are the first and the second order Rivlin-Ericksen tensors respectively. α_0 is the coefficient of apparent viscosity, α_1 is the coefficient of elastic viscosity and α_2 is the coefficient of cross viscosity.

The basic equation of the problem is the compatibility equation of a Rivlin-Ericksen fluid and is obtained by putting the constitutive equation into the equation of motion. The compatibility equation is as follows,

$$\frac{D(\nabla^2 \psi^*, \psi^*)}{D(x^*, y^*)} - \xi_1 \frac{D(\nabla^4 \psi^*, \psi^*)}{D(x^*, y^*)} = \nu \nabla^4 \psi^*$$

The velocity components in terms of the stream function ψ are,

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*}$$

$$v^* = - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*}$$

The boundary conditions for the problem are defined as the following:

1) Velocity is zero at the boundaries. So,

$$\text{At } y^* = \eta_+^* , \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\text{At } y^* = \eta_-^* , \quad \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\text{At } y^* = \eta_+^* , \quad - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = 0$$

$$\text{At } y^* = \eta_-^* , \quad - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = 0$$

2) The value of the flow rate is constant in the channel. So that,

$$\int_{\eta_-^*}^{\eta_+^*} u^* dy^* = \text{constant}$$

In the solution of our problem non-dimensional values are used so that after the necessary non-dimensionalizations are made, the compatibility equation comes out to be,

$$\delta \text{Re} \frac{D(\nabla^2 \Psi, \Psi)}{D(x, y)} - \gamma_1 \delta \text{Re} \frac{D(\nabla^4 \Psi, \Psi)}{D(x, y)} = \nabla^4 \Psi$$

$$\text{Here } \delta = \frac{d}{\ell} \quad \text{and} \quad \gamma_1 = \frac{\xi_1}{d}$$

Perturbation method is used in the solution of our problem and compatibility equation is expanded in series in terms of δ . The transformation of the independent variables are also made in the way,

$$X = x$$

$$Y = \frac{y}{\eta(x)}$$

The compatibility equation is perturbed up to the second order and solutions are made by integrating equations using boundary conditions.

The zeroth order solution of the stream function is,

$$\psi_0 = -\frac{1}{2} (Y^3 - 3Y)$$

The first order solution is,

$$\psi_1 = \frac{1}{4} Re \eta' \left(-\frac{3}{70} Y^7 + \frac{3}{10} Y^5 - \frac{33}{70} Y^3 + \frac{3}{14} Y \right)$$

The value of the second order solution is,

$$\begin{aligned} \psi_2 = & (4\eta'^2 - \eta\eta'') \left\{ \frac{3}{20} Y^5 - \frac{3}{10} Y^3 + \frac{3}{20} Y \right\} - \frac{Re^2}{431200} \{ \eta'^2 (98Y^{11} \\ & - 1155Y^9 + 4488Y^7 - 8778Y^5 + 8222Y^3 - 2875Y) + \eta\eta'' (-35Y^{11} \\ & + 385Y^9 - 1518Y^7 + 3234Y^5 - 3279Y^3 + 1213) \} \\ & - \frac{Re^2}{1120\eta^2} (4\eta'^2 - \eta\eta'') (5Y^9 - 36Y^7 + 126Y^5 - 164Y^3 + 69Y) \} \end{aligned}$$

For small values of δ , the stream function is,

$$\psi = \psi_0 + \delta \psi_1 + \delta^2 \psi_2$$

The streamlines are plotted for Newtonian ($\gamma_1=0$) and Non-Newtonian ($\gamma_1 \neq 0$) cases for different Reynolds numbers. In the Newtonian case a reverse flow is formed

at $\psi = 1.001$ due to the sudden decrease in velocity in the climbing part of the boundary. This flow shows itself in form of a vortex.

In the Non-Newtonian flow, the vortex area gets larger pointing out that the effect of the reverse flow is much more important. When γ_1 gets the value -0.001 at $Re = 25$, the streamlines up to the value $\psi = 1$ are nearly the same, and at the value $\psi = 1.001$ the vortex enlarges slightly. However, at the value $\gamma = -0.01$, the reverse flow becomes more effective and causes the vortex to enlarge significantly. At lower values of the Reynolds number ($Re = 10$, $Re = 1$) vortex disappears and the flow adapts itself to channel geometry more easily. It is observed that the streamlines move upwards as the Reynolds number decreases.

The components of the stress tensor are calculated in terms of the stream function. Solution is made for the shear stress at the point,

$$X = 0$$

$$Y = 1$$

and it's found out to be,

$$T_{XY} \Big|_{\substack{X = 0 \\ Y = 1}} = \frac{6}{Re} + 0,086 + 9,05\gamma_1$$

where the effect of the viscoelastic coefficient is clearly seen.

The pressure equations are also obtained from the equation of motion.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Sınırları dalga şeklinde olan bir kanalda akış problemi özellikle tıpta, damar tıkanıklığı durumunda kan akışının incelenmesinde, ve biyolojide çok hücreli canlılarda oluşan kirpiksi doku tabakasının gerçekleştirdiği hareketin incelenmesinde ele alınmıştır [1,2]. Bu hareketlere örnek olarak üreme sisteminde gametlerin hareketi, beslenme ve solunum gibi olaylarda oluşan akışkan hareketi verilebilir [3]. Bunların dışında bu problem yüzey alanının genişletilmesinin gerekli olduğu durumlarda ve dalgalı yüzeylere sahip paralel levhaların kullanıldığı mambranlı oksijen üreticilerinde oldukça büyük önem taşımaktadır.

Bu konuyla ilgili yapılmış çalışmalarda Chow ve grubu kanal profilinin dalgalanma genişliğinin, ortalama kanal genişliğine oranla büyük olduğu durumlara ait çözümler elde etmişlerdir. Taylor, Newtonien bir akışkanın hareketini, kanalın dalgalanma hareketinin sıfıra gittiği limitte hesaplamıştır. Reynolds bu analizi ikinci mertebe frekans değeri için yapmış ve yerel atalet terimini de çözümüne dahil etmiştir. Ancak konvektif ivmeyi ihmal etmiştir [1]. Tuck ise her iki atalet terimini de dahil ederek bu durumun yüksek frekanslarda akış hızını yarıya kadar indirebildiğini göstermiştir [4]. Sonraları Chaudhury'nin viskoelastik etkileri de gözönüne alması sonucu, akışkan elastistesinin bazı frekans değerleri için akışkan hızını artırdığı, bazıları için ise azalttığı görülmüştür [3].

Dodson, Townsend ve Walters yarıçapı boylamasına eksen boyunca sinüzoidal değişim gösteren dairesel kesitli boruda Newtonien ve non-Newtonien akışkanı incelemiştir. Newtonien akışkan durumunda sinüzoidal yarıçaplı

borudaki akışkan debisi düzgün yarıçaplı borudaki akışkan debisine göre azalma göstermiştir. Viskoelastik akışkan durumunda ise Oldroyd tipi akışkan model alınarak akışkandaki debi düşüşünün non-Newtonien özelliklere bağlı olarak değişim gösterdiği belirlenmiştir. Yapılan teorik çalışmalar deneysel olarak da kanıtlanmıştır [5].

Sturges düşük frekanslarda, daimi olmayan akışkanlara ait integral formda bir bünye denklemi kullanarak sonsuz, uzayamayan, esnek ve dalgalı profile sahip bir levhanın oluşturduğu hız alanını incelemiştir. Sonuç olarak akışkan davranışının düşük frekanslarda, seçilen akışkan modelinden bağımsız olduğu, yüksek frekanslarda ise akışkan modeline bağlı olduğunu göstermiştir [6].

Bu çalışmada sınırları dalga şeklinde olan bir kanalda Rivlin-Ericksen akışkanına ait akış, düzlemsel ve daimi hal için incelenmiştir. Kanal profili Sturges'in çalışmasında olduğu gibi sadece sinüzoidal bir fonksiyon olarak değil, en genel halde ele alınmıştır. Problemin çözümünde kullanılan temel denklem, Rivlin-Ericksen akışkanına ait uygunluk denklemidir. Pertürbasyon çözüm için uygun boyutsuzlandırma işlemleri ve gerekli değişken dönüşümleri yapılarak

$$\delta = \frac{d}{l}$$

pertürbasyon parametresi olarak seçilmiş ve denklem δ 'nın küçük değerleri için seriye açılmıştır. Çözümlere ait diferansiyel denklemler integrasyon metoduyla çözülerek akım fonksiyonu elde edilmiştir.

BÖLÜM 2. NON-NEWTONIEN AKIŞKANLARLA İLGİLİ GENEL BİLGİLER

Akışkanların hareketini, içindeki taşınım olaylarını tanımlamak için kütle, momentum ve enerjinin akışı ifadeleri ile birlikte süreklilik, hareket ve enerji denklemlerine de ihtiyaç vardır. Sıkıştırılamayan bir akışkan olarak kabul edilen, yapısal olarak sabit sıvılar için Newton'un viskozite kanununu kullanarak bünye denklemini tanımlamanın yeterli olduğu görülmüştür.

$$\underline{T} = -p\underline{I} + \mu \underline{A}_1 \quad (2.1)$$

Burada $\underline{T}$ gerilme tansörü, $\underline{I}$ birim tansör, p izotropik basınç ve

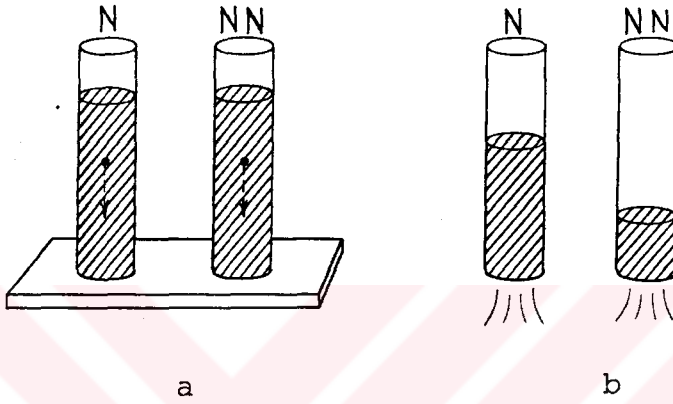
$$\underline{A}_1 = \nabla \underline{\vec{V}} + (\nabla \underline{\vec{V}})^T \quad (2.2)$$

deformasyon hızları tansörüdür. μ viskozitesi sıcaklık, basınç ve konsantrasyona bağlı olup zamana veya herhangi bir kinematik büyüklüğe bağlı değildir. Büyük moleküllü akışkanlar, sabun eriyikleri ve iki fazlı akışkanlar gibi karmaşık yapıları akışkanların (2.1) denklemi ile tanımlanamayacağı bilinmektedir [7].

Şimdiye kadar gözlenmiş olan Non-Newtonien etkilerin en önemlileri viskozitenin hız gradyentine bağlı olarak değişim göstermesi ve normal gerilme farklarının akışkan hareketini etkilemesidir. Bu ve benzeri etkilerin belirlenmesi için çeşitli deneyler yapılmıştır. Aşağıda non-Newtonien etkilerden bahsedilirken bu konuda yapılmış deneylere değinilmiştir.

2.1. Hız Gradyentine Bağlı Viskozite

Düşük kayma hızlarında yaklaşık aynı viskozite değerine sahip olan biri Newtonien diğeri non-Newtonien iki tür akışkanın bulunduğu iki tüp alttan bir levha ile kapatılır ve daha sonra levhalar kaldırılırsa non-Newtonien sıvı dolu tüpün daha çabuk boşaldığı görülür.



Şekil 2.1 Viskozitenin Hız Gradyentine Bağlı Değişimi

(N Newtonien akışkanı, NN ise non-Newtonien akışkanı göstermektedir.)

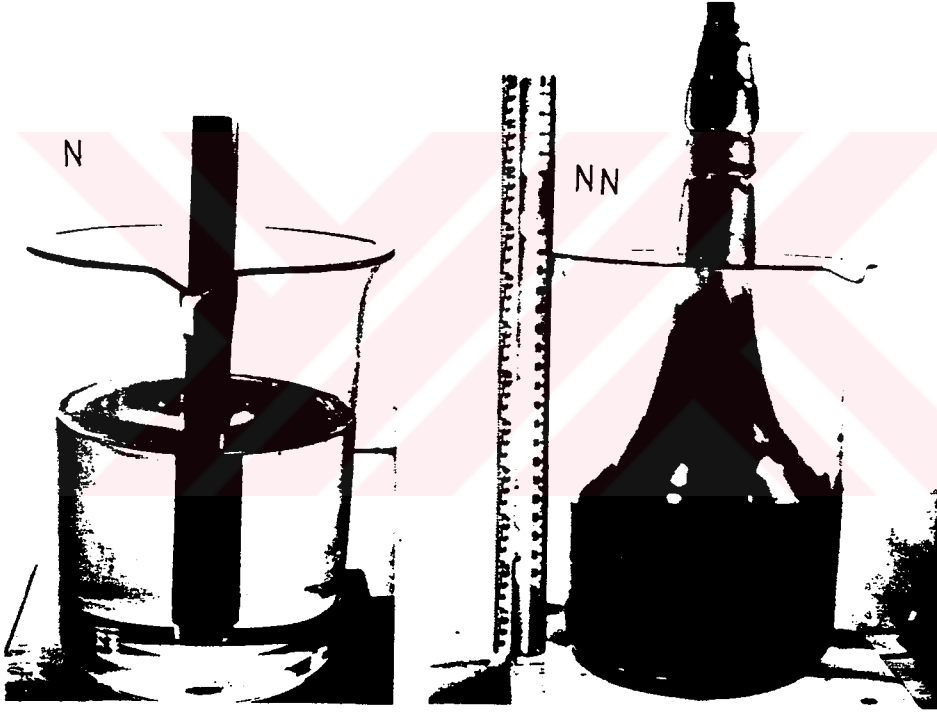
Klasik termodinamikte Hagen ve Poiseuille kanununa göre, verilmiş bir basınç farkı için tüpteki hacimsel debi, akışkan viskozitesiyle ters orantılıdır. Yukarıdaki deney gözönüne alındığında yüksek hız gradyentinde non-Newtonien sıvı viskozitesinin daha düşük olduğu sonucuna varılabilir.

Viskozitenin, artan hız gradyenti ile azalması olayına kayma incelmesi, bu davranışı gösteren akışkana ise pseudoplastik adı verilir. Pseudoplastik sıvılara örnek olarak erimiş polietilen ve polipropilen verilebilir. Bu etkiyi gösteren makromoleküler akışkan sayısı çok fazladır. Bazı akışkanlar ise Şekil 2.1.b de görülen Newtonien sıvıdan daha yavaş akar, yani kayma kalınlığı gösterir. Viskozitesi hız gradyenti ile artan sıvılara dilatant denir. Örnek olarak sukroz eriyiğinde titanyum oksidin oluşturduğu

süspansiyon verilebilir. Bazı sıvılar ise ancak belirli bir akma gerilmesinden sonra akarlar. Bunlara viskoplastik sıvılar adı verilir. Bazı boyalar, yağlar ve macunlar viskoplastiktir.

2.2. Daimi Kayma Akısında Normal Gerilme Etkileri

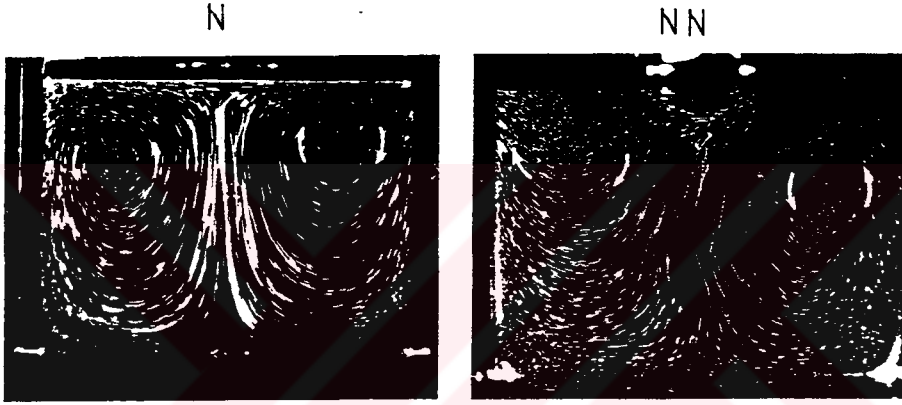
Biri Newtonien diğeri non-Newtonien sıvı içeren iki kaba birer mil sokularak döndürüldüğünde iki değişik durumla karşılaşılır.



Şekil 2.2 Weissenberg Etkisi

Bir Newtonien sıvı olan gliserinle dolu olan kaptaki vortekse rastlanır. Non-Newtonien polikrilamit eriyiği bulunan kaptaki ise polimer eriyik çubuğa tırmanır. Bu olay düşük dönme hızlarında dahi gerçekleşir ve Weissenberg etkisi olarak adlandırılır.

Sıvı dolu bir kaba, dönen bir diskin daldırılmasıyla oluşan akış gözönüne alındığında diskin dönmesi sonucu tegetsel yönde bir akış oluşur. Kabin üst kısmındaki akışkan alttakinden daha büyük açısal hızla dönecektir. Böylece diske yakın akışkan daha büyük bir santrifuj kuvvete maruz kalır. Bunun dışında esas akışa her yönde dik zayıf bir ikincil akış mevcuttur. Buna ait bir fotoğraf Şekil 2.3te gösterilmiştir.



Şekil 2.3 Disk-Silindir Sistemi

Şekil 2.3 te görüldüğü gibi disk-silindir sisteminde non-Newtonien akışkanın bulunduğu durumda ikincil akım çizgilerinin yönü diğerine göre terstir [8].

Non-Newtonien akışkanların daimi kayma hareketinde normal gerilme farkları ile birlikte görülen şaşırtıcı etkilerden biri de meyilli bir kanalda hareket eden non-Newtonien sıvının yüzeyinin kabarması, Newtonien sıvı yüzeyinin ise düz kalmasıdır. Ayrıca paralel iki levha arasında hareket eden non-Newtonien bir akışkanda kanalda açılan oyuğun tabanına ve kanalın üzerine yerleştirilen basınç transdüserlerinde bir basınç farkı ölçülmesine rağmen Newtonien akışkanda böyle bir fark oluşmaz.

2.3. Daimi Olmayan Kayma Hareketinde Geçici Cevap

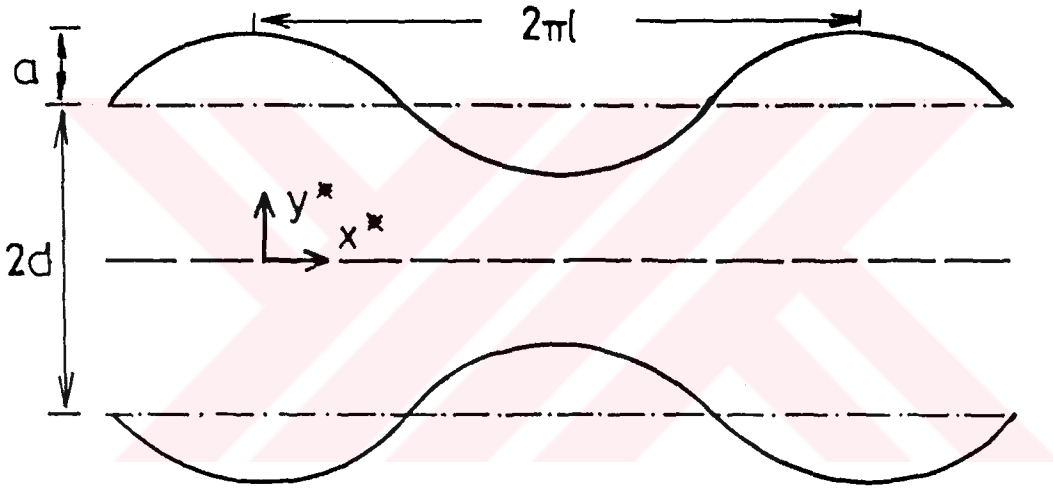
Gerilme rölaksasyonu, sürünme ve sünme gibi küçük amplitütlü dinamik kontrol deneylerinin bir çoğu (örneğin salınımlı hareketler) moleküler yapıyı aydınlatmak için kimyacılar tarafından uygulanmıştır. Ayrıca, sünme, zamana bağlı basınç gradyentli hareket ve salınım hareketi ilave edilmiş kayma akımı gibi büyük amplitütlü zamana bağlı deneyler de yapılmıştır.

2.4. Diğer Olaylar

Yukarıdaki olaylar kayma akımını içermektedirler. Kayma hareketi olmayan hareketler de bu gruptaki olaylardır. Küçük bir hazne çıkışında meydana gelen şişme olayı, hazneden tüpe sıvı akıtıldığında ani daralma sonucu akışkanın bir müddet duraklayıp daha sonra hareketine devam etmesi (Uebler etkisi), sıkıştırma akımında aşırı gerilmenin rolü, sifonun ucu çekildiği halde akmaya devam ettiği tüpsüz sifon olayı, muntazam olmayan tüp çıkışlarında görülen erime kırılması olayı, bir polimer eriyiğinin, aynı polimer eriyiği bulunan bir kaba akıtıldığında, sıvı yüzeyine çarptığı zaman görülen oldukça ilginç tepme olayı veya Kaye olayı, hızlı çarpma testleri uygulandığı zaman polimerik sıvıların katı gibi davranışı, Newton tipi akışkanlara bir miktar polimer ilave edildiğinde girdabın engellenmesi, akışkan içine daldırılmış enine titreşen ince bir silindir civarında akım çizgilerinde görülen tersinirlik olaylarıdır [7].

BÖLÜM 3. PROBLEMİN GEOMETRİSİ VE TEMEL DENKLEMLERİ

Bu çalışmada sınırları dalga şeklinde olan bir kanal içinde Rivlin-Ericksen akışkanının daimi hareketi incelenmektedir. Kullanılan akışkan sıkıştırılamaz, hareket düzlemsel ve kütle kuvvetleri ihmal edilebilecek mertebededir.



Şekil 3.1 Problemin Geometrisi

Şekil 3.1.de görüldüğü gibi kanal cidarları eğri-seldir. Kanala ait üst ve alt sınır denklemleri sırasıyla,

$$\eta_+^*(x^*) = d(1 + \epsilon h(x^*)) \dots \dots \dots (3.1)$$

$$\eta_-^*(x^*) = -d(1 + \epsilon h(x^*)) \dots \dots \dots (3.2)$$

Burada $h(x^*)$ sinüzoidal bir fonksiyondur. ℓ kanal uzunluğu, $2d$ ortalama kanal genişliği, a dalgalanmanın genliğidir.

$$\epsilon = \frac{a}{d}$$

şeklindedir. Dalgalanma oranı

$$\delta = \frac{d}{\ell}$$

olarak tanımlanmıştır ve $d \ll \ell$ dir. Sınırlara ait dalga boyu $2\pi\ell$ dir.

Akışa ait hız alanı,

$$u^* = u^*(x^*, y^*)$$

$$v^* = v^*(x^*, y^*)$$

olarak seçilmiştir.

Çalışmamızda kullanılan Rivlin-Ericksen akışkanına ait bünye denklemi,

$$\underline{T} = -p\underline{I} + \alpha_0 \underline{A}_1 + \alpha_1 \underline{A}_2 + \alpha_2 \underline{A}_1^2 \quad (3.3)$$

şeklindedir. Burada $\underline{T}$ gerilme tansörünü, p basıncı, $\underline{I}$ birim tansörü, $\underline{A}_1$ ve $\underline{A}_2$ sırasıyla birinci ve ikinci mertebe Rivlin-Ericksen tansörlerini göstermektedir [9]. α_0 görünen viskozite katsayısı, α_1 elastik viskozite katsayısı, α_2 çapraz viskozite katsayısıdır. $\underline{A}_1$ ve $\underline{A}_2$ nin değerleri sırasıyla,

$$\underline{A}_1 = \nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T \quad (3.4)$$

$$\underline{A}_2 = \nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T + 2\nabla \vec{V} \cdot (\nabla \vec{V})^T \quad (3.5)$$

olarak ifade edilir. Burada $\vec{V}$ hızı, $\vec{\gamma}$ ivmeyi göstermektedir.

Akışkana ait hareket denklemi,

$$\rho \vec{\gamma} = \rho \vec{f} + \text{div } \underline{T} \quad (3.6)$$

şeklindedir. Burada $\vec{f}$ birim kütle başına dış kuvvet, ρ ise akışkan yoğunluğudur.

Problemin çözümünde kullanılan esas denklem, Rivlin-Ericksen akışkanına ait bünye denkleminin, akışkan hareket denklemine uyarlanmasıyla elde edilen uygunluk denklemidir ve daimi hal için,

$$\frac{D(\nabla^2 \psi^*, \psi^*)}{D(x^*, y^*)} - \xi_1 \frac{D(\nabla^4 \psi^*, \psi^*)}{D(x^*, y^*)} = \nu \nabla^4 \psi^* \quad (3.7)$$

olarak ifade edilir [3]. Burada ψ^* akım fonksiyonu,

$$\xi_1 = \frac{\alpha_1}{\rho}$$

şeklindeki elastik katsayı, ν kinematik viskozitedir.

Görüldüğü gibi uygunluk denklemi akım fonksiyonu cinsinden ifade edilmiştir. Bu ifadeden hız alanına geçiş,

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \quad (3.8)$$

$$v^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \quad (3.9)$$

şeklindedir.

Probleme ait sınır şartları, sınırlarda hızın sıfır olması nedeniyle,

$$y^* = \eta_+^* \text{ da } \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = 0 \quad (3.10)$$

$$y^* = \eta_-^* \text{ de } \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = 0 \quad (3.11)$$

$$y^* = \eta_+^* \text{ da } - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = 0 \quad (3.12)$$

$$y^* = \eta_-^* \text{ de } - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = 0 \quad (3.13)$$

ve kanal debisinin sabitliğinden,

$$\int_{\eta_-^*}^{\eta_+^*} u^* \cdot dy^* = \text{sbt.} \quad (3.14)$$

olarak belirlenir.

Problemin çözümünde kullanılan boyutsuz büyüklükler,

$$x^* \text{ eksenini yönündeki mesafe, } x = \frac{x^*}{l}$$

$$y^* \text{ eksenini yönündeki mesafe, } y = \frac{y^*}{d}$$

$$\text{Akım fonksiyonu, } \psi = \frac{\psi^*}{v_0 \cdot d}$$

$$\text{Reynolds sayısı, } Re = \frac{v_0 \cdot d}{\nu} \text{ (v ortalama hız olmak üzere)}$$

şeklindedir. Sınırların boyutsuzlandırma sonundaki değerlerinin

$$\eta_+ = (1 + \epsilon h(x)) \quad (3.15)$$

$$\eta_- = -(1 + \epsilon h(x)) \quad (3.16)$$

olduğu görülmektedir. Uygunluk denklemindeki $\nabla^2 \psi^*$ ve $\nabla^4 \psi^*$ değerlerinin boyutsuzlandırılması ise,

$$\nabla^2 \psi^* = \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}}, \text{ ve}$$

$$\nabla^4 \Psi^* = \nabla^2 (\nabla^2 \Psi^*)$$

$$= \frac{\partial^4 \Psi^*}{\partial x^{*4}} + 2 \frac{\partial^4 \Psi^*}{\partial x^{*2} \partial y^{*2}} + \frac{\partial^4 \Psi^*}{\partial y^{*4}}$$

olduğu gözönüne alınarak,

$$\nabla^2 \Psi = \delta^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \quad (3.17)$$

$$\nabla^4 \Psi = \delta^4 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \delta^2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} \quad (3.18)$$

şeklinde yapılır. Böylece boyutsuz uygunluk denklemi,

$$\delta \text{Re} \frac{D(\nabla^2 \Psi, \Psi)}{D(x, y)} - \gamma_1 \delta \text{Re} \frac{D(\nabla^4 \Psi, \Psi)}{D(x, y)} = \nabla^4 \Psi \quad (3.19)$$

halini alır. Burada

$$\delta = \frac{d}{\ell}$$

ve

$$\gamma_1 = \frac{\xi_1}{d^2}$$

olarak tanımlanmıştır. (3.19) denklemi açık olarak yazıldığında,

$$\begin{aligned} & \nabla^4 \Psi + \delta \text{Re} \{ \Psi' x (\nabla^2 \Psi)' y - \Psi' y (\nabla^2 \Psi)' x \} - \gamma_1 \text{Re} \delta \{ \Psi' x (\nabla^4 \Psi)' y \\ & - \Psi' y (\nabla^4 \Psi)' x \} = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

elde edilir.

Boyutsuz sınır şartları ise,

$$y = \eta_+ \text{ da } \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad (3.21)$$

$$y = \eta_- \text{ de } \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad (3.22)$$

$$y = \eta_+ \text{ da } - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (3.23)$$

$$y = \eta_- \text{ de } - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (3.24)$$

$$\int_{\eta_-}^{\eta_+} u \cdot dy = sbt \quad (3.25)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.20) denklemi δ 'nın küçük değerleri için

$$\Psi = \Psi_0 + \delta \Psi_1 + \delta^2 \Psi_2 \quad (3.26)$$

şeklinde seriye açıldığında sıfıncı merteye çözümü veren denklem,

$$\frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial y^4} = 0 \quad (3.27)$$

birinci merteye çözümü veren denklem,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 \Psi_1}{\partial y^4} + \text{Re} \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial y^3} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial x \partial y^2} \right) \\ & - \gamma_1 \text{Re} \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial^5 \Psi_0}{\partial y^5} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial^5 \Psi_0}{\partial x \partial y^4} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

ikinci merteye çözümü veren denklem,

$$2 \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Psi_2}{\partial y^4} + \text{Re} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial y^3} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial y^3} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial x \partial y^2} \right) \} - \gamma_1 \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial^5 \psi_1}{\partial y^5} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial^5 \psi_0}{\partial y^5} \right) \right. \\
 & \left. - \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial^5 \psi_1}{\partial x \partial y^4} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial^5 \psi_0}{\partial x \partial y^4} \right) \right\} = 0 \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Uygunluk denkleminin pertürbasyon çözümü için,

$$X = x \quad (3.30)$$

$$Y = \frac{y}{\eta(x)} \quad (3.31)$$

şeklinde bir değişken dönüşümü yapılmıştır. Kısmi türevlere ait değişken dönüşümleri Ek A da sunulmuştur.

BÖLÜM 4. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

4.1. Sıfırıncı Mertebe Çözüm

Sıfırıncı mertebe çözümü veren,

$$\frac{1}{\eta^4} \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial Y^4} = 0 \quad (4.1)$$

denklemini integre edildiğinde,

$$\Psi_0 = \frac{A}{6} Y^3 + \frac{B}{2} Y^2 + CY + D \quad (4.2)$$

olduğu görülür. İntegrasyon sabitleri sınır şartlarından şu şekilde hesaplanır:

Simetri nedeniyle,

$Y = 0$ da $\Psi_0 = 0$ dır.

Dolayısıyla $D = 0$ olarak belirlenir.

(3.21), (3.23) ve (3.31) den, sınırlarda

$$Y = \eta_+ \text{ olduğunda } Y = 1 \text{ ve } \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Psi_0}{\partial Y} = 0 \quad (4.3)$$

$$Y = \eta_+ \text{ olduğunda } Y = 1 \text{ ve } -\frac{\eta'}{\eta} Y \frac{\partial \Psi_0}{\partial Y} = 0 \quad (4.4)$$

(3.22), (3.24) ve (3.31)den,

$$Y = \eta_- \text{ olduğunda } Y = -1 \text{ ve } \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Psi_0}{\partial Y} = 0 \quad (4.5)$$

$$y = \eta_- \text{ olduğunda } Y = -1 \text{ ve } -\frac{\eta'}{\eta} Y \frac{\partial \psi_0}{\partial Y} = 0 \quad (4.6)$$

olduğu görülür. (4.3) ve (4.5) denklemlerinin ortak çözümünden,

$$A = -2 C \quad (4.7)$$

(4.4) ve (4.6) dan,

$$B = 0 \quad (4.8)$$

elde edilir.

(3.25) denklemi,

$$Y = \frac{Y}{\eta}$$

$$\partial Y = \frac{1}{\eta} \partial Y$$

değerleri yerine konduğunda,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\partial \psi_0}{\partial Y} \cdot \partial Y = 2 \quad (4.9)$$

haline gelir. (4.9) ve (4.7) denklemlerinin ortak çözümünden,

$$A = -3$$

$$C = \frac{3}{2}$$

integrasyon sabitleri elde edilir. Böylece,

$$\psi_0 = -\frac{1}{2} (Y^3 - 3Y) \quad (4.10)$$

elde edilir.

4.2. Birinci Mertebe Çözüm

(3.28) denklemi, Ek A'daki kısmî türevler yerine konduğunda,

$$\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial Y^4} = -2Re\eta' \frac{\partial \psi_0}{\partial Y} \cdot \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial Y^2} = 0 \quad (4.11)$$

şekline dönüşür. (4.10)dan gerekli türevler alınarak (4.11) de yerine konursa,

$$\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial Y^4} = -9Re\eta' (Y^3 - Y) \quad (4.12)$$

olarak hesaplanır.

$$\eta = 1 + \epsilon h(x)$$

ifadesinin türevi,

$$\eta' = \epsilon h'(x) \quad (4.13)$$

şeklindedir. (4.13), (4.12)de yerine konduğunda,

$$\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial Y^4} = -9Re\epsilon h' (Y^3 - Y) \quad (4.14)$$

elde edilir. Gerekli integrasyonlar yapıldığı taktirde,

$$\psi_1 = Re\epsilon h' \left(-\frac{3}{280} Y^7 + \frac{3}{40} Y^5 + \frac{A}{6} Y^3 + \frac{B}{2} Y^2 + CY + D \right) \quad (4.15)$$

şeklinde hesaplanır. Sınır şartlarından,

$$Y = 0 \text{ iken } \psi_1 = 0 \text{ ve } D = 0 \text{ dır.}$$

(3.21), (3.23) ve (3.31) den,

$$y = \eta_+ \text{ da } Y = 1 \text{ ve } \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Psi_1}{\partial Y} = 0 \quad (4.16)$$

$$y = \eta_+ \text{ da } Y = 1 \text{ ve } -\frac{\eta'}{\eta} Y \frac{\partial \Psi_1}{\partial Y} = 0 \quad (4.17)$$

(3.22), (3.24) ve (3.31) den,

$$y = \eta_- \text{ de } Y = -1 \text{ ve } \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Psi_1}{\partial Y} = 0 \quad (4.18)$$

$$y = \eta_- \text{ de } Y = -1 \text{ ve } -\frac{\eta'}{\eta} Y \frac{\partial \Psi_1}{\partial Y} = 0 \quad (4.19)$$

olduğu görülür. (4.16) ve (4.18) den,

$$A+2C = -\frac{9}{15} \quad (4.20)$$

(4.17) ve (4.19) dan,

$$B = 0 \quad (4.21)$$

elde edilir.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial Y} \cdot \partial Y = 0 \quad (4.22)$$

şeklindeki debi denklemi ve (4.20)nin ortak çözümünden,

$$A = -\frac{99}{140}$$

$$C = \frac{3}{56}$$

integrasyon sabitleri elde edilir. Bu sabitler (4.15)de yerine konduğunda birinci mertebe çözüm,

$$\Psi_1 = \frac{1}{4} \text{Re} \eta' \left(-\frac{3}{70} Y^7 + \frac{3}{10} Y^5 - \frac{33}{70} Y^3 + \frac{3}{14} Y \right) \quad (4.23)$$

bulunur.

4.3. İkinci Mertebe Çözüm

İkinci mertebe çözümü veren (3.29) denklemi ve Ek B den,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \Psi_2}{\partial Y^4} = & 18Y(4\eta'^2 - \eta\eta'') - \text{Re}^2 \left\{ \eta'^2 \left(\frac{9}{5} Y^7 - \frac{81}{10} Y^5 + \frac{306}{35} Y^3 - \frac{171}{70} Y \right) \right. \\ & + \eta\eta'' \left(-\frac{9}{14} Y^7 + \frac{27}{10} Y^5 - \frac{207}{70} Y^3 + \frac{9}{10} Y \right) - \gamma_1 \frac{\text{Re}^2}{\eta^2} \{ \eta'^2 (54Y^5 - 108Y^3 \\ & + 54Y) - \eta\eta'' \left(\frac{27}{2} Y^5 - 27Y^3 + \frac{27}{2} Y \right) \} \end{aligned} \quad (4.24)$$

şeklinde hesaplanır. Bu denklem integre edildiğinde,

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & (4\eta'^2 - \eta\eta'') \frac{3}{20} Y^5 - \frac{\text{Re}^2}{431200} \{ \eta'^2 (98Y^{11} - 1155Y^9 + 4488Y^7 \\ & - 8778Y^5) + \eta\eta'' (-35Y^{11} + 385Y^9 - 1518Y^7 + 3234Y^5) \} - \gamma_1 \frac{\text{Re}^2}{1120\eta^2} \\ & \{ (4\eta'^2 - \eta\eta'') (5Y^9 - 36Y^7 + 126Y^5) \} + \frac{A}{6} Y^3 + \frac{B}{2} Y^2 + CY + D \end{aligned} \quad (4.25)$$

olduğu görülür. Denklemdaki sabitler sınır şartlarından,

$Y = 0$ iken $\Psi_2 = 0$ ve $D = 0$,
(3.21), (3.23) ve (3.31) den,

$$Y = \eta_+ \text{ da } Y = 1 \text{ ve } \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Psi_2}{\partial Y} = 0 \quad (4.26)$$

$$y = \eta_+ \text{ de } Y = 1 \quad \text{ve} \quad -\frac{\eta'}{\eta} Y \frac{\partial \Psi_2}{\partial Y} = 0 \quad (4.27)$$

(3.22), (3.24) ve (3.31) den,

$$y = \eta_- \text{ de } Y = -1 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Psi_2}{\partial Y} = 0 \quad (4.28)$$

$$y = \eta_- \text{ de } Y = -1 \quad \text{ve} \quad -\frac{\eta'}{\eta} Y \frac{\partial \Psi_2}{\partial Y} = 0 \quad (4.29)$$

denklemleriyle hesaplanır. (4.26) ve (4.28) den

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} (4\eta'^2 - \eta\eta'') - \frac{\text{Re}^2}{431200} \{ -43582\eta'^2 + 17248\eta\eta'' \} \\ & - \frac{\gamma_1 \text{Re}^2}{1120\eta^2} \{ 846(4\eta'^2 - \eta\eta'') \} + A + 2C = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

ifadesi elde edilir. (4.27) ve (4.29) dan,

$$B = 0 \quad (4.31)$$

olarak hesaplanır.

Debi denkleminde,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\partial \Psi_2}{\partial Y} \cdot \partial Y = 0 \quad (4.32)$$

olduğu görülür. (4.30) ve (4.32) den,

$$\begin{aligned} A = & -\frac{9}{5} (4\eta'^2 - \eta\eta'') - \frac{\text{Re}^2}{431200} \{ 49332\eta'^2 - 19674\eta\eta'' \} \\ & - \gamma_1 \frac{\text{Re}^2}{1120\eta^2} \{ -984(4\eta'^2 - \eta\eta'') \} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$C = \frac{3}{20} (4\eta'^2 - \eta\eta'') - \frac{Re^2}{431200} \{-2875\eta'^2 + 1213\eta\eta''\}$$

$$- \gamma_1 \frac{Re^2}{1120\eta^2} \{69(4\eta'^2 - \eta\eta'')\} \quad (4.34)$$

şeklindeki integrasyon sabitleri elde edilir. (4.33) ve (4.34), (4.25) te yerine konarak gerekli düzenlemeler yapılsa, akım fonksiyonunun ikinci mertebe çözümü,

$$\begin{aligned} \psi_2 = & (4\eta'^2 - \eta\eta'') \left\{ \frac{3}{20} Y^5 - \frac{3}{10} Y^3 + \frac{3}{20} Y \right\} - \frac{Re^2}{431200} \{ \eta'^2 (98Y^{11} - 1155Y^9 \\ & + 4488Y^7 - 8778Y^5 + 8222Y^3 - 2875Y) + \eta\eta'' (-35Y^{11} + 385Y^9 - 1518Y^7 + 3234Y^5 \\ & - 3279Y^3 + 1213Y) \} - \gamma_1 \frac{Re^2}{1120\eta^2} \{ (4\eta'^2 - \eta\eta'') (5Y^9 - 36Y^7 + 126Y^5 - 164Y^3 \\ & + 69Y) \} \end{aligned} \quad (4.35)$$

olarak elde edilir.

(4.10), (4.23) ve (4.35), (3.26) da yerine konursa,

$$\begin{aligned} \psi = & -\frac{1}{2} (Y^3 - 3Y) + \frac{1}{4} \delta Re \eta' \left(-\frac{3}{70} Y^7 + \frac{3}{10} Y^5 - \frac{33}{70} Y^3 + \frac{3}{14} Y \right) \\ & + \delta^2 (4\eta'^2 - \eta\eta'') \left\{ \frac{3}{20} Y^5 - \frac{3}{10} Y^3 + \frac{3}{20} Y \right\} - \frac{\delta^2 Re^2}{431200} \{ \eta'^2 (98Y^{11} - 1155Y^9 \\ & + 4488Y^7 - 8778Y^5 + 8222Y^3 - 2875Y) + \eta\eta'' (-35Y^{11} + 385Y^9 - 1518Y^7 \\ & + 3234Y^5 - 3279Y^3 - 1213Y) \} - \frac{\gamma_1 \delta^2 Re^2}{1120\eta^2} \{ (4\eta'^2 - \eta\eta'') (5Y^9 - 36Y^7 + 126Y^5 \\ & - 164Y^3 + 69Y) \} \end{aligned} \quad (4.36)$$

şeklinde akım fonksiyonu elde edilir.

Çözümde kullanılan pertürbasyon metodunda, seri çözümün yeterince yakınsak olup olmadığı araştırılarak,

$$\frac{\delta \Psi_1}{\Psi_0} \quad \text{ve} \quad \frac{\delta^2 \Psi_2}{\delta \Psi_1}$$

oranları sayısal olarak hesaplanmıştır. Hesaplanan oran yaklaşık olarak 10^{-8} - 10^{-7} mertebesinde olduğundan yakınsama yeterli görülmüştür.

Yukarıda elde edilen akım fonksiyonunda, kanal geometrisine ait büyüklükler,

$$\delta = 0.1$$

$$\epsilon = 0.4$$

$$h = \sin 2\pi x$$

şeklinde seçildiğinde ve $Re = 25$ alındığında $\gamma_1 = 0$ (Newtonien), $\gamma_1 = -0.001$ (non-Newtonien) ve $\gamma_1 = -0.01$ değerleri için akım çizgileri çizilmiştir.

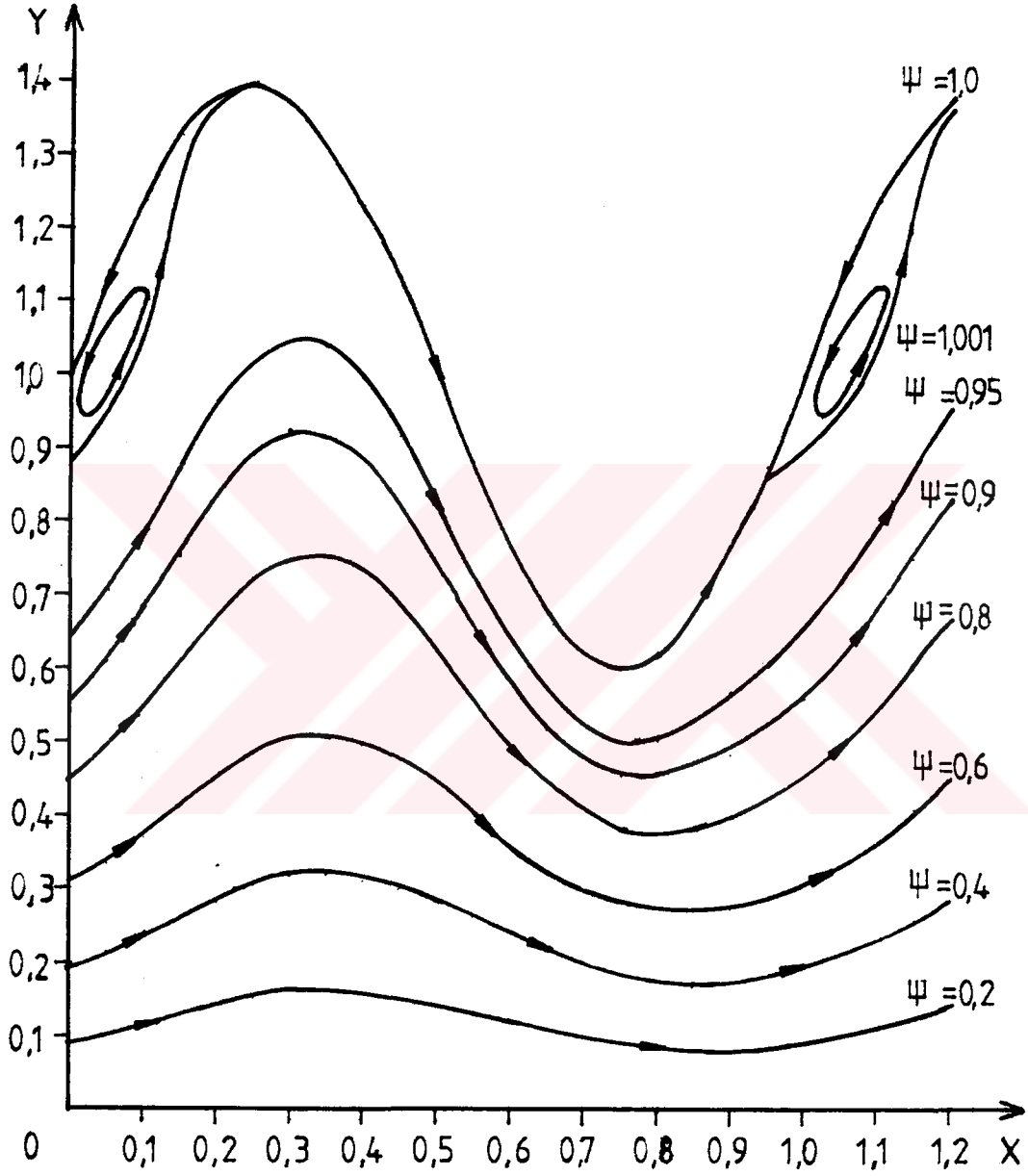
Şekil 4.1. de görüldüğü gibi Newtonien akışkanın akım çizgileri $\Psi=1$ eğrisinde değişime uğrayarak vorteks oluşturmaktadır. Grafikte $\Psi=1$, $\Psi=1.001$ değerlerindeki vorteksler çizilmiştir. Vorteksin nedeni yüksek hızların frenlenmesi sonucu oluşan geri akımdır.

Şekil 4.2 de $\gamma_1 = -0.001$ için akım çizgileri çizildiğinde Newtonien duruma benzer bir akış profiliyle karşılaşılır. Ancak vorteks bir miktar büyümüştür.

Şekil 4.3 te ise $\gamma_1 = -0.01$ değeri için geri akımın etkisi ve cıdardan kopma belirgin bir şekilde artmıştır.

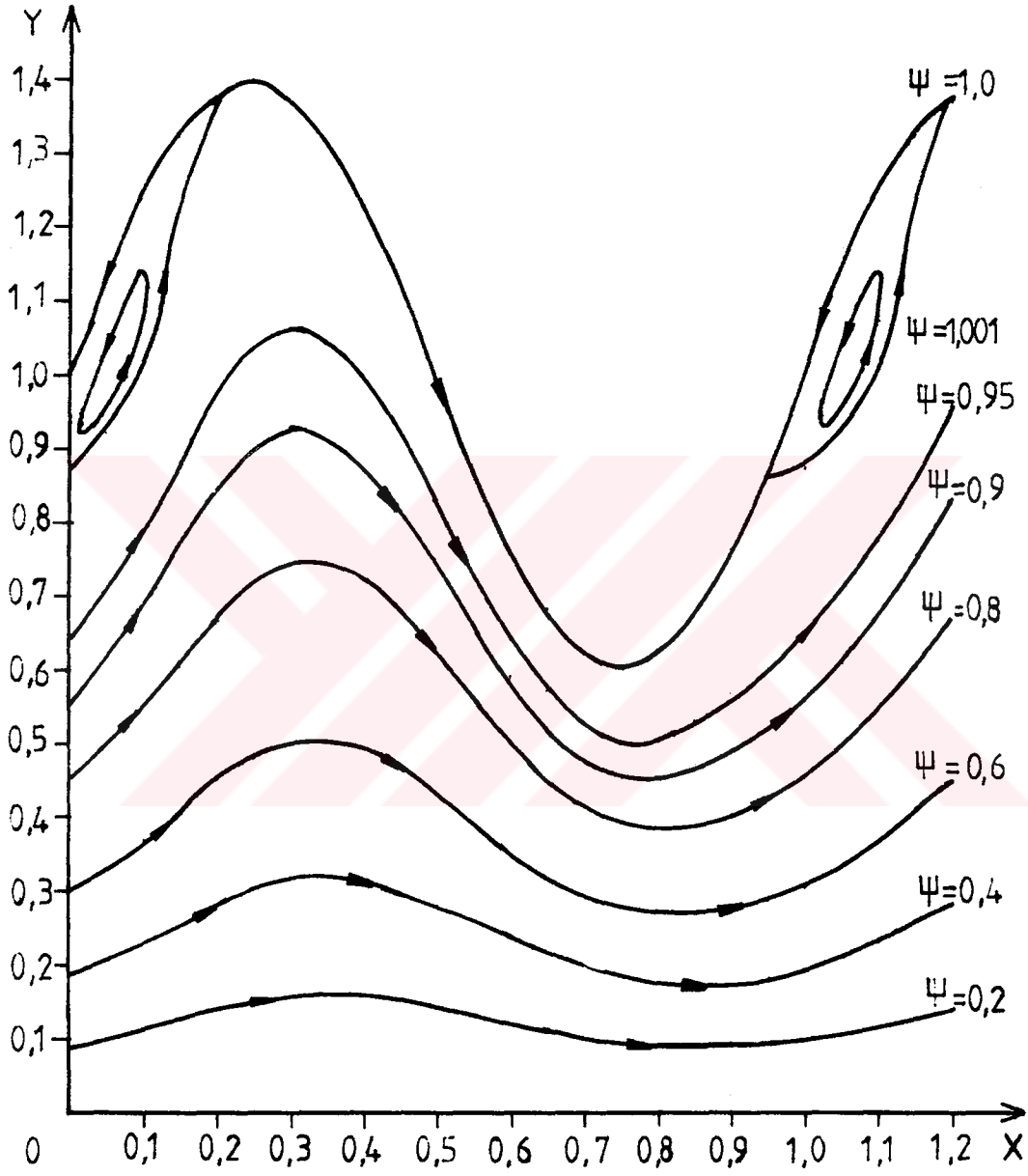
Reynolds sayısının etkisini görmek amacıyla düşük hızlarda Newtonien ve non-Newtonien akışkanlara ait akış profilleri çizilmiştir. Şekil 4.4 ve Şekil 4.5 te görüldüğü gibi $Re = 10$ ve $Re = 1$ değerleri verildiğinde, koordinat farkları seçilen ölçekte çok düşük mertebede kaldığından Newtonien ve non-Newtonien akışkanlara ait akım çizgileri çakışmıştır. Ayrıca, düşük hızlarda akım çizgilerinin yukarı kaydığı ve akışın kanal geometrisine daha iyi uyum sağladığı görülmüştür.





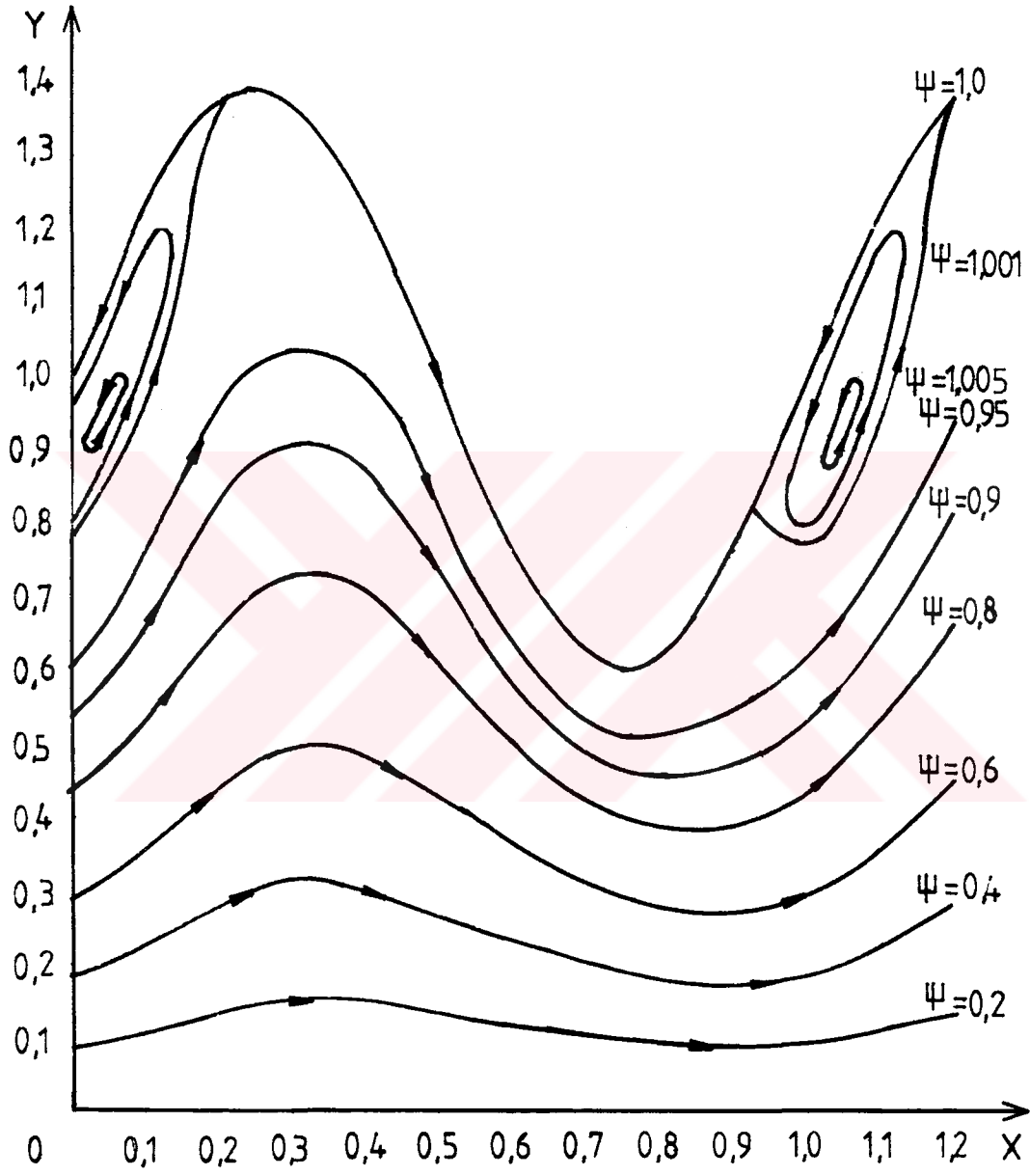
Şekil 4.1 Newtonien Akışkana Ait Akım Çizgileri

$Re = 25$ $\gamma_1 = 0$



Şekil 4.2 Non-Newtonien Akışkana Ait Akım Çizgileri

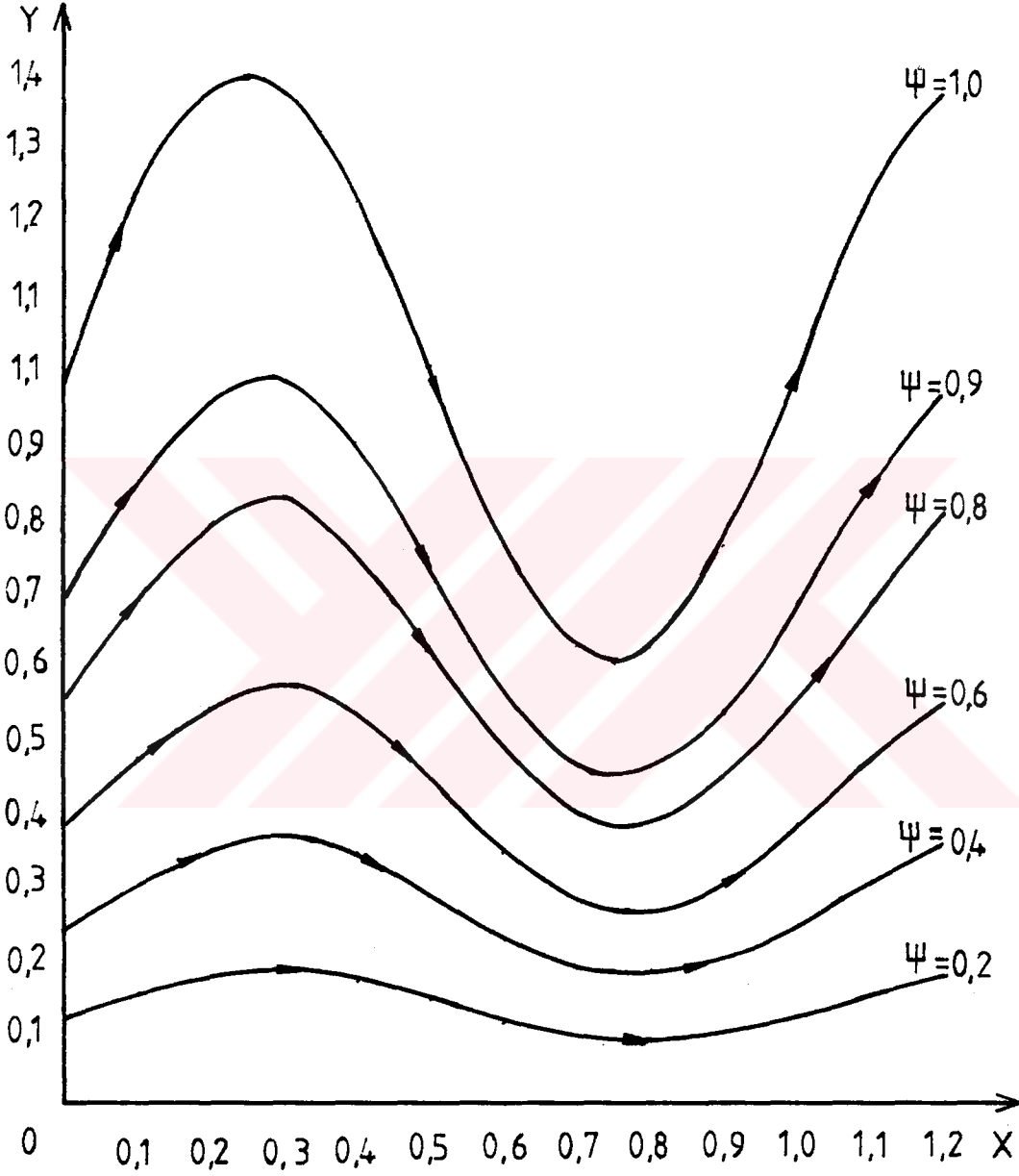
$Re = 25$, $\gamma_1 = -0.001$



Şekil 4.3 Non-Newtonien Akışkana Ait Akım Çizgileri

Re = 25

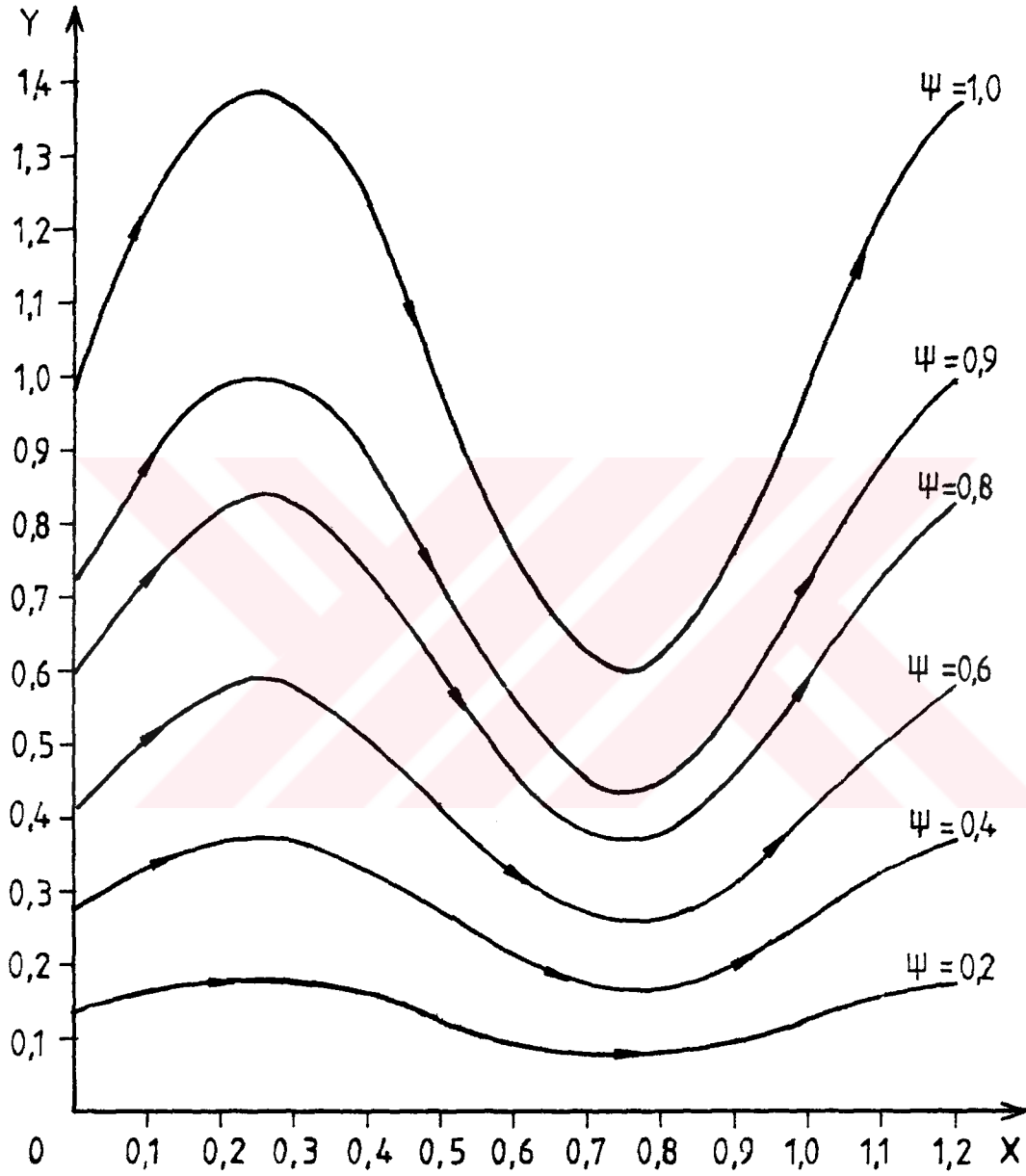
$\gamma_1 = -0.01$



Şekil 4.4 Akışkana Ait Akım Çizgileri

Re = 10

$\gamma_1 = 0, -0.001, -0.01$



Şekil 4.5 Akışkana Ait Akım Çizgileri
 $Re = 1$ $\gamma_i = 0, -0.001, -0.01$

BÖLÜM 5. GERILMENİN VE BASINCIN HESAPLANMASI

Rivlin-Ericksen akışkanı için Bölüm 3'te verilen bünye denkleminde birinci ve ikinci mertebe Rivlin-Ericksen tansörlerinin açık ifadeleri Ek C de verilmiştir.

$$u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*}$$

$$v^* = - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*}$$

olduğunda akışkana ait gerilme tansörünün bileşenleri akım fonksiyonu cinsinden,

$$\begin{aligned} T_{xx}^* = & -p^* + 2\alpha_0 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} + 2\alpha_1 \left\{ 3 \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \right)^2 + \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*2} \partial y^*} \right. \\ & - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \left. \right\} + \alpha_2 \left\{ 4 \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \right)^2 \right. \\ & + \left. \left(- \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} T_{xy}^* = T_{yx}^* = & \alpha_0 \left\{ - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} \right\} + \alpha_1 \left\{ 2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*3}} \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \right. \\ & + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*2} \partial y^*} + \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^* \partial y^{*2}} + 2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial y^{*3}} \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}
 T_{yy}^* = & -p^* - 2\alpha_0 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} + 2\alpha_1 \left\{ -\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} - \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*2} \partial y^*} \right. \\
 & + 2 \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \right)^2 + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^* \partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} \right)^2 \left. \right\} + \alpha_2 \left\{ 4 \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \left(-\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} \right)^2 \right\}
 \end{aligned} \quad (5.3)$$

olarak hesaplanır.

(5.2) denklemi boyutsuzlandırılarak, $\delta^2 \ll 1$ ve $\delta^3 \ll 1$ olduğu gözönüne alındığında,

$$\begin{aligned}
 \frac{T_{xy}^*}{\frac{1}{2} \rho V_0^2} = & -\frac{2}{Re} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2\delta \gamma_1 \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right. \\
 & \left. - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right\}
 \end{aligned} \quad (5.4)$$

şeklindedir. Ek A daki kısmi türevler (5.4)te yerine konduğunda,

$$X = 0$$

$$Y = 1$$

noktasına ait kayma gerilmesi,

$$\eta = 1 + \epsilon \sin 2\pi X$$

$$\epsilon = 0.4$$

durumunda,

$$T_{xy} \Big|_{\substack{X=0 \\ Y=1}} = \frac{6}{Re} + 0,086 + 9,05 \gamma_1 \quad (5.5)$$

olarak belirlenir.

Basıncı dağılımını veren denklemler ise hareket denkleminde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = & \rho \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \right) + \alpha_0 \left(\frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*2} \partial y^*} + \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial y^{*3}} \right) \\ & + \alpha_1 \left(13 \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*2} \partial y^*} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} + \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \cdot \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^{*3} \partial y^*} - \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*3}} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} - 2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^* \partial y^{*2}} \right. \\ & - 2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} - 2 \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*2} \partial y^*} + 4 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*3}} + 2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^* \partial y^{*2}} \\ & + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^{*2} \partial y^{*2}} + 3 \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^* \partial y^{*2}} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \cdot \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^* \partial y^{*3}} + 2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial y^{*3}} \\ & - \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial y^{*3}} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial y^{*4}} \left. \right) + \alpha_2 \left(8 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*2} \partial y^*} \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*3}} - 2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^* \partial y^{*2}} - 2 \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*3}} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} + 2 \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^* \partial y^{*2}} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} \left. \right) \quad (5.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} = & \rho \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \right) + \alpha_0 \left(- \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*3}} - \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^* \partial y^{*2}} \right) \\ & + \alpha_1 \left(3 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*2} \partial y^*} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*3}} - \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \cdot \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^{*4}} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^{*3} \partial y^*} \right. \\ & + 13 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^* \partial y^{*2}} - \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \cdot \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^{*2} \partial y^{*2}} - 2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*2} \partial y^*} \left. \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -3 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial y^{*3}} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^* \partial y^{*3}} + 4 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial y^{*3}} + \alpha_2 \left(8 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^* \partial y^{*2}} \right. \\
 & \left. + 2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*2} \partial y^*} - 2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial y^{*3}} - 2 \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*2} \partial y^*} \cdot \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} + 2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} \cdot \frac{\partial^3 \psi^*}{\partial y^{*3}} \right) \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

SONUÇLAR

Dalgalı bir kanalda akış problemi özellikle tıpta damar tıkanıklığı durumunda kan akışının incelenmesinde ve dalgalı yüzeylere sahip paralel levhaların kullanıldığı oksijen üreticilerinde uygulama açısından büyük önem taşımaktadır.

Bu çalışmada dalgalı bir kanalda Rivlin-Ericksen akışkanına ait akış düzlemsel ve daimi hal için incelenmiştir. Cidarın sinüzoidal olduğu duruma ait çözümler yapılarak Newtonien ve Non-Newtonien akışkan hali için çizilen akım çizgilerinin pek fazla değişmediği görülmüştür.

Kanal geometrisi sabit tutularak $Re = 25$ için boyutsuz elastik katsayı $\gamma_1 = 0$ (Newtonien), $\gamma_1 = -0.001$ (Non-Newtonien) ve $\gamma_1 = -0.01$ (Non-Newtonien) durumlarında akım çizgilerinin grafiği çizilmiştir. Newtonien durumda $\psi = 1$ eğrisine kadar olan kısımda akış, kanal geometrisini takip etmesine rağmen $\psi = 1$ eğrisinin $X = 0.95$ civarında iki farklı eğri durumuna geçtiği, normalde cidarı takip eden bu eğrinin bölgede bir geri akım ve buna bağlı olarak vorteks oluşturduğu görülmektedir. Bunun nedeni, cidar eğrisinin alt bölümünde yükselmiş bulunan hızların frenlenmiş olmasıdır.

Non-Newtonien özelliği veren boyutsuz elastik katsayı $\gamma_1 = -0.001$ değerini aldığı anda Newtonien durumdan aşırı bir sapma görülmez, ancak geri akımın oluşturduğu vorteks bir miktar büyür. $\gamma_1 = -0.01$ değerinde değişim daha çarpıcıdır. Bu durumda geri akım oldukça etkin bir değere kavuşmuş ve vorteksin neden olduğu kopma belirginleşmiştir.

Reynolds sayısının $Re = 10$ ve $R = 1$ şeklindeki daha düşük değerleri için aynı işlemler tekrarlandığında düşük hızlarda geri akımın oluşmadığı, akışın kanal geometrisine son derece iyi uyum sağladığı görülmüştür. Düşük Reynolds sayılarında Newtonien ve Non-Newtonien akışkanlara ait akım çizgilerinde fark çok düşük mertebededir ve akım çizgileri seçilen grafik ölçeğinde üst-üste çakışmış durumdadır. Reynolds sayısının değişimiyle gözlenen bir başka özellik de akış hızının azalmasıyla birlikte akım çizgilerinin yukarı doğru kaymasıdır.

Akışkana ait gerilme tansörünün bileşenleri akım fonksiyonu cinsinden bulunmuş, boyutsuz kayma gerilmesi bir noktada hesaplatılarak viskoelastik katsayının etkisi görülmüştür. Basınç dağılımını veren denklemler hareket denkleminde elde edilmiştir.

Bu çalışmayla ilgili olarak bundan sonra kanal geometrisi değiştirilerek değişik cidar profilleri için çözüm yapılabilir. Ayrıca pertürbasyon çözümünün dışında sayısal çözüm yapılarak mukayese yoluna gidilebilir. Kanal içindeki ısı transferi de inceleme konusu olabilir.

KAYNAKLAR

- [1] CHOW, J.C.F., and SODA, K., "Heat or Mass Transfer in Laminar Flow in Conduits With Constriction", Journal of Heat Transfer, Transactions of the ASME, **Vol.95**, 1973, pp 352-356.
- [2] BLAKE, J.R., "Infinite Models for Ciliary Propulsion", Journal of Fluid Mechanics, Vol.49, 1981, pp. 209-222.
- [3] CHAUDHURY, T.K., "On Swimming in a Visco-elastic Liquid", Journal of Fluid Mechanics, Vol.95, 1979, pp.189-197.
- [4] TUCK, E.O., "A Note on a Swimming Problem", Journal of Fluid Mechanics, Vol.31, 1968, pp.305-308.
- [5] DODSON, A.G., TOWNSEND, P., and WALTERS, K., "On the Flow of Newtonian and non-Newtonian Liquids through Corrugated Pipes", Rheologica Acta, Vol.10, 1971, pp.508-516.
- [6] STURGES, L.D., "Motion Induced by a Waving Plate", Journal of non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol.8, 1981, pp. 357-364.
- [7] YALÇINKAYA, G., "Newton Tipi Olmayan Akışkanlar İçin Kullanışlı Modeller", İ.T.Ü., Cilt 46, Sayı 1-2, 1988, s.7-8.
- [8] BIRD, R.B., ARMSTRONG, G.C., HASSAGER, O., "Dynamics of Polymeric Liquids", Vol.1, 1977, John Wiley and Sons, Inc., pp. 89-127.
- [9] GÜLEKEN, Ö., "Cidarları Gözenekli Aynı Eksenli Sabit İki Silindir Arasında Rivlin-Ericksen Akışkanına Ait Çözüm", İ.T.Ü. Makina Fakültesi Doktora Tezi, 1974, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, s.3,24.

Ek A. Değişken Dönüşümleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial Y} &= \frac{\partial \Psi}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial Y} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial Y} \\ &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Psi}{\partial Y}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3} = \frac{1}{\eta^3} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3}$$

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial Y^4} = \frac{1}{\eta^4} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial Y^4}$$

$$\frac{\partial^5 \Psi}{\partial Y^5} = \frac{1}{\eta^5} \frac{\partial^5 \Psi}{\partial Y^5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial X} &= \frac{\partial \Psi}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial X} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial X} \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial X} - \frac{\eta'}{\eta} Y \frac{\partial \Psi}{\partial Y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} - \frac{\eta''}{\eta} Y \frac{\partial \Psi}{\partial Y} + 2 \frac{\eta'^2 Y \partial \Psi}{\eta^2 \partial Y} - 2 \frac{\eta'}{\eta} Y \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} \\ &\quad + \frac{\eta'^2 Y^2 \partial^2 \Psi}{\eta^2 \partial Y^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} - \frac{\eta'' Y}{\eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial Y} + \frac{\eta''^2 Y}{\eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial Y} - 3 \frac{\eta'' Y}{\eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial Y}$$

$$+ 4 \frac{\eta' \eta''}{\eta^2} \frac{Y \partial \psi}{\partial Y} - 4 \frac{\eta'^3}{\eta^3} \frac{Y \partial \psi}{\partial Y} + 4 \frac{\eta'^2}{\eta^2} \frac{Y}{\partial x \partial Y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y}$$

$$- 2 \frac{\eta'}{\eta} \frac{Y}{\partial x^2 \partial Y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y} + 2 \frac{\eta' \eta''}{\eta^2} \frac{Y^2}{\partial Y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} - 2 \frac{\eta'^3}{\eta^3} \frac{Y^2}{\partial Y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2}$$

$$+ \frac{\eta'^2}{\eta^2} \frac{Y^2}{\partial x \partial Y^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial Y} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial Y} - \frac{\eta'}{\eta^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y} + \frac{Y \partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial Y^2} = \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial Y^2} - \frac{\eta'}{\eta^3} \left(2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{Y \partial^3 \psi}{\partial Y^3} \right)$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial Y} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial Y} - \frac{\eta''}{\eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial Y} - \frac{\eta''}{\eta^2} \frac{Y \partial^2 \psi}{\partial Y^2} + 2 \frac{\eta'^2}{\eta^3} \frac{\partial \psi}{\partial Y}$$

$$+ 4 \frac{\eta'^2}{\eta^3} \frac{Y \partial^2 \psi}{\partial Y^2} - 2 \frac{\eta'^2}{\eta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial Y} - 2 \frac{\eta'^2}{\eta^2} \frac{Y \partial^3 \psi}{\partial x \partial Y^2} + \frac{\eta'^2}{\eta^3} \frac{Y^2}{\partial Y^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3}$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial Y^2} = \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial Y^2} - 2 \frac{\eta''}{\eta^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} - \frac{\eta''}{\eta^3} \frac{Y \partial^3 \psi}{\partial Y^3} + 6 \frac{\eta'^2}{\eta^4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2}$$

$$+ 4 \frac{\eta'^2}{\eta^4} \frac{Y \partial^3 \psi}{\partial Y^3} - 4 \frac{\eta'^2}{\eta^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial Y^2} - 2 \frac{\eta'^2}{\eta^3} \frac{Y}{\partial x \partial Y^3} \frac{\partial^4 \psi}{\partial Y^3} + 2 \frac{\eta'^2}{\eta^4} \frac{Y}{\partial Y^3} \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3}$$

$$+ \frac{\eta'^2}{\eta^4} \frac{Y^2}{\partial Y^4} \frac{\partial^4 \psi}{\partial Y^4}$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x \partial y^3} = -3 \frac{\eta'}{\eta^4} \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} + \frac{1}{\eta^3} \frac{\partial^4 \psi}{\partial X \partial Y^3} - \frac{\eta'}{\eta^4} \frac{Y \partial^4 \psi}{\partial Y^4}$$

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^3 \partial y} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial^4 \psi}{\partial X^3 \partial Y} - \frac{\eta'''}{\eta^3} \frac{\partial \psi}{\partial Y} - \frac{\eta'''}{\eta^3} \frac{Y \partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{\eta''^2}{\eta^3} \frac{\partial \psi}{\partial Y} + \frac{\eta''^2}{\eta^3} \frac{Y \partial^2 \psi}{\partial Y^2}$$

$$-3 \frac{\eta''}{\eta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} - 3 \frac{\eta''}{\eta^2} \frac{Y \partial^3 \psi}{\partial X \partial Y^2} + \frac{4 \eta' \eta''}{\eta^3} \frac{\partial \psi}{\partial Y} + \frac{8 \eta' \eta''}{\eta^3} \frac{Y \partial^2 \psi}{\partial Y^2}$$

$$-4 \frac{\eta'^3}{\eta^4} \frac{\partial \psi}{\partial Y} - 8 \frac{\eta'^3}{\eta^4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{4 \eta'^2}{\eta^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} + \frac{6 \eta'^2}{\eta^3} \frac{Y \partial^3 \psi}{\partial X \partial Y^2}$$

$$-2 \frac{\eta'}{\eta^2} \frac{\partial^3 \psi}{\partial X^2 \partial Y} - 2 \frac{\eta'}{\eta^2} \frac{Y \partial^4 \psi}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{2 \eta' \eta''}{\eta^3} \frac{Y^2 \partial^3 \psi}{\partial Y^3} - 2 \frac{\eta'^3}{\eta^4} \frac{Y^2 \partial^3 \psi}{\partial Y^3}$$

$$+ \frac{\eta'^2}{\eta^3} \frac{Y^2 \partial^4 \psi}{\partial X \partial Y^3}$$

$$\frac{\partial^5 \psi}{\partial x \partial y^4} = -4 \frac{\eta'}{\eta^5} \frac{\partial^4 \psi}{\partial Y^4} + \frac{1}{\eta^4} \frac{\partial^5 \psi}{\partial X \partial Y^4} - \frac{\eta'}{\eta^5} \frac{Y \partial^5 \psi}{\partial Y^5}$$

Ek B. Kısmi Türevler

Problemin pertürbasyon çözümüne ait kısmî türevler aşağıda gösterilmiştir:

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x} = \frac{3}{2} \frac{\eta'}{\eta} (Y^3 - Y)$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial Y} = \frac{1}{\eta} \left(-\frac{3}{2} Y^2 + \frac{3}{2} \right)$$

$$\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial Y^3} = -\frac{3}{\eta^3}$$

$$\frac{\partial^3 \psi_0}{\partial x \partial Y^2} = \frac{9\eta'}{\eta^3} Y$$

$$\frac{\partial^4 \psi_0}{\partial x^2 \partial Y^2} = 9Y \left(\frac{\eta''}{\eta^3} - 4 \frac{\eta'^2}{\eta^4} \right)$$

$$\frac{\partial^5 \psi_0}{\partial x \partial Y^4} = 0$$

$$\frac{\partial^5 \psi_0}{\partial Y^5} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial Y} = \frac{\eta'}{\eta} \text{Re} \left(-\frac{3}{40} Y^6 + \frac{3}{8} Y^4 - \frac{99}{280} Y^2 + \frac{3}{56} \right)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \eta'' \operatorname{Re} \left(-\frac{3}{280} Y^7 + \frac{3}{40} Y^5 - \frac{33}{280} Y^3 + \frac{3}{56} Y \right) - \frac{\eta'^2}{\eta} \operatorname{Re} \left(-\frac{3}{40} Y^7 \right.$$

$$\left. + \frac{3}{8} Y^5 - \frac{99}{280} Y^3 + \frac{3}{56} Y \right)$$

$$\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x \partial Y^2} = \frac{\eta''}{\eta^2} \operatorname{Re} \left(-\frac{9}{20} Y^5 + \frac{3}{2} Y^3 - \frac{99}{140} Y \right) - \frac{\eta'^2}{\eta^3} \operatorname{Re} \left(\frac{63}{20} Y^5 - \frac{15}{2} Y^3 \right.$$

$$\left. + \frac{297}{140} Y \right)$$

$$\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial Y^3} = \frac{\eta'}{\eta^3} \operatorname{Re} \left(-\frac{9}{4} Y^4 + \frac{9}{2} Y^2 - \frac{99}{140} \right)$$

$$\frac{\partial^5 \psi_1}{\partial x \partial Y^4} = -36 \frac{\eta'^2}{\eta^5} \operatorname{Re} (-Y^3 + Y) + 9 \frac{\eta''}{\eta^4} \operatorname{Re} (-Y^3 + Y) - 9 \frac{\eta'^2}{\eta^5} \operatorname{Re} (-3Y^3 + Y)$$

$$\frac{\partial^5 \psi_1}{\partial Y^5} = \frac{\eta'}{\eta} \operatorname{Re} (-27Y^2 + 9)$$

İkinci merteye çözüme ait bazı çarpım değerleri ise şu şekildedir:

$$\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial Y^3} \right) = \frac{3}{2} \frac{\eta'^2}{\eta^4} \operatorname{Re} \left(-\frac{9}{4} Y^7 + \frac{27}{4} Y^5 - \frac{729}{140} Y^3 + \frac{99}{140} Y \right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial Y^3} \right) &= \frac{\eta''}{\eta^3} \operatorname{Re} \left(\frac{9}{280} Y^7 - \frac{9}{40} Y^5 + \frac{99}{280} Y^3 - \frac{9}{56} Y \right) \\ &\quad - \frac{\eta'^2}{\eta^4} \operatorname{Re} \left(\frac{9}{40} Y^7 - \frac{9}{8} Y^5 + \frac{297}{280} Y^3 - \frac{9}{56} Y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial x \partial y^2} \right) &= \frac{\eta''}{\eta^3} \operatorname{Re} \left(\frac{27}{40} Y^7 - \frac{117}{40} Y^5 + \frac{927}{280} Y^3 - \frac{297}{280} Y \right) \\ &\quad - \frac{\eta'^2}{\eta^4} \operatorname{Re} \left(-\frac{189}{40} Y^7 - \frac{639}{40} Y^5 + \frac{4041}{280} Y^3 - \frac{891}{280} Y \right), \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial x \partial y^2} \right) = \frac{\eta'^2}{\eta^4} \operatorname{Re} \left(-\frac{27}{40} Y^7 + \frac{27}{8} Y^5 - \frac{891}{280} Y^3 + \frac{27}{56} Y \right)$$

$$\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial^5 \psi_1}{\partial y^5} \right) = \frac{\eta'^2}{\eta^6} \operatorname{Re} \left(-\frac{81}{2} Y^5 + 54 Y^3 - \frac{27}{2} Y \right)$$

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial^5 \psi_0}{\partial y^5} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial^5 \psi_1}{\partial x \partial y^4} \right) &= \frac{\eta'^2}{\eta^6} \operatorname{Re} \left(-\frac{189}{2} Y^5 + 162 Y^3 - \frac{135}{2} Y \right) + \frac{\eta''}{\eta^5} \operatorname{Re} \left(\frac{27}{2} Y^5 \right. \\ &\quad \left. - 27 Y^3 + \frac{27}{2} Y \right) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial^5 \psi_0}{\partial x \partial y^4} \right) = 0$$

Ek C. Akışkana Ait Büyüklükler

Rivlin-Ericksen akışkanına ait bazı büyüklüklerin ifadesi:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} & \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & 0 \\ 3 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 3 \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 & 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 0 \\ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ÖZGEÇMİŞ

S.Ayşe Zaloğlu 1967 yılında İstanbul'da doğdu. 1986 yılında İstanbul Beyoğlu Anadolu Lisesinden mezun olduktan sonra aynı yıl İ.T.Ü. Makina Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümüne girdi. 1990 yılında bu bölümü bitirerek İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Anabilim Dalı, Konstrüksiyon Programında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen İ.T.Ü. Makina Fakültesi Meknik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

İ.T.Ü. KÜLTÜR VE TURİZM BAKANLIĞI
DOKÜMANTASYON MERKEZİ