T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY METRİKİMSİ UZAYLAR VE ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif AYDIN

Matematik Anabilim Dalı

OCAK 2015
SAMSUN

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FUZZY METRİKİMSİ UZAYLAR VE ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif AYDIN
(12210157)

Tezin Savunma Tarihi : 19/01/2015

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Servet KÜTÜKCÜ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Elif AYDIN Tarafından Hazırlanan

FUZZY METRİKİMSİ UZAYLAR VE ÖZELLİKLERİ

başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 19/01/2015 tarihinde yapılan sınav ile YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : **Doç. Dr. İlker ERYILMAZ**
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Yrd. Doç. Dr. Mevlüde DOĞAN**
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Doç. Dr. Servet KÜTÜKCÜ
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

…./…./2015

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Enstitü Müdürü

Aileme,

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasının her aşamasında fikirleriyle beni yönlendiren, bilgisini, öngörüsünü ve tecrübelerini benimle paylaşan, değerli zamanlarını bana ayıran Sayın Hocam Doç. Dr. Servet Kütükcü' ye canı gönülden teşekkür ederim. Ayrıca göstermiş oldukları sabır, sevgi, güven ve inanç için aileme olan minnetimi de belirtmek isterim.

Son olarak bilim insanlarının yetişmesinde çok büyük katkısı olan ve yüksek lisans çalışmalarım süresince beni maddi olarak destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı' na da teşekkürü bir borç bilirim.

Ocak 2015 Elif AYDIN

(Araştırma Görevlisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

$\mathbf{M_A}$	: Üyelik Fonksiyonu
$\mathbf{M_d}$	: d Metriği Tarafından Üretilen Metrikimsi
$\vee$	: Fuzzy Birleşim
$\wedge$	: Fuzzy Kesişim
$\mathbf{A^c}$	: A Fuzzy Kümesinin Tümleyeni
t-norm	: Üçgen Norm
FPM-uzay	: Fuzzy Metrikimsi Uzay
$\boldsymbol{\tau_d}$	: d Metriği Tarafından Üretilen Topoloji
$\boldsymbol{\tau_M}$	: M Fuzzy Metriği Tarafından Üretilen Topoloji
$\mathbf{FPM^2}$**-uzay**	: Fuzzy 2-Metrikimsi Uzay
$\mathbf{FPM^3}$**-uzay**	: Fuzzy 3-Metrikimsi Uzay
$\mathcal{K}_\mathbf{M}(\mathbf{X})$	: Boştan Farklı Kompakt Alt Kümelerin Kümesi
$\mathbf{H_M(A, B, t)}$	: Hausdorff Fuzzy Metriği
B(x, r, t)	: x Merkezli, r Yarıçaplı Yuvar
$\mathbf{N^*}$	: Pozitif Doğal Sayılar

FUZZY METRİKİMSİ UZAYLAR VE ÖZELLİKLERİ

ÖZET

Topoloji Anabilim Dalında en önemli uygulama alanlarından birisi olan sabit nokta teorisinde, temel uzay yapısı fuzzy metrik ve fuzzy metrikimsi uzaylar seçilerek birçok çalışmalar yapılmaktadır. Son yıllarda bu uzaylara ait özellikler ve sınıflandırılmalarıyla ilgili çalışmalara ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu tezde fuzzy metrikimsi uzaylar üzerine çalışılmış, özellikleri incelenmiş ve yeni bir takım sınıflandırmalar yapılmıştır. Bu sınıflandırmalar güçlü fuzzy metrikimsi ve stabil fuzzy metrikimsi olarak adlandırılmış ve aralarındaki ilişkiler incelenip örneklendirilmiştir. Ayrıca bu sınıflandırmalar, fuzzy 2-metrikimsi ve fuzzy 3-metrikimsi uzaylarda da tanımlanmış olup aralarındaki ilişkiler incelenmiş ve örneklendirilmiştir. Çalışmanın bir sonucu olarak, güçlü fuzzy ultrametrikimsi uzaylarda çok değişkenli bir sabit nokta teoremi elde edilmiş ve ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Metrikimsi; Güçlü Fuzzy Metrikimsi; Güçlü Fuzzy 2-Metrikimsi; Güçlü Fuzzy 3-Metrikimsi; Sabit Nokta.

FUZZY PSEUDOMETRİC SPACES AND FEATURES

ABSTRACT

In fixed point theory which is one of the important applied area in the department of Topology, a lot of works are done by choosing fuzzy metric and fuzzy pseudometric spaces as the structure of fundamental spaces. Recently, it is needed to work on classifications and proporties of these spaces.

In this thesis, fuzzy metric spaces have been worked, some properties of them have been examined and some classifications have been introduced. These classifications are called as strong fuzzy pseudometric and stable fuzzy pseudometric, structures and the relationships between them been proved and illustrated with examples. These structures have been also introduced, examined relationships between them and illustrated with examples in fuzzy 2-pseudometric and fuzzy 3-pseudometric spaces. As a result of this thesis, a multi-valued fixed point theorem have been presented and proved in strong fuzzy pseudometric spaces.

Key Words: Fuzzy Pseudometric; Strong Fuzzy Pseudometric; Strong Fuzzy 2-Pseudometric; Strong Fuzzy 3-Pseudometric; Fixed Point.

1. GİRİŞ

Boştan farklı bir küme üzerinde metrik veya bir kümenin iki noktası arasındaki uzaklık kavramının nasıl tanımlanacağı matematiğin temel problemlerinden biri olmuştur. 1906 yılında Frechet, boştan farklı bir küme üzerindeki metrik yapısı üzerinde çalışmış, kümenin farklı iki elemanı arasındaki uzaklığın pozitif bir reel sayı olması gerektiğini göstermiştir. Bu tarihten itibaren metrik uzay kavramı üzerinde çalışmalar yapılmış ve bu yapı geliştirilerek birçok genelleştirilmiş metrik uzaylar elde edilmiştir. Ancak bu süreçte, küme tanımı yetersiz kalmıştır. Örneğin; küme tanımına göre mavi renkteki cisimlerin kümesi oluşturulabilir; ancak renk anlayışı kişiden kişiye değişiklik gösterdiğinden bu kümenin elemanları tek türlü tanımlanamamaktadır. Bu ise kümenin üzerine konulacak olan matematiksel yapıları tehlikeye düşürmektedir. Çünkü klasik küme, verilmiş bir evrendeki nesneleri iki gruba ayıracak şekilde tanımlanır; eğer nesneleri eleman olarak kabul ediyorsa kümeye ait, eleman olarak kabul etmiyorsa kümeye ait değildir.

Bu yetersizliği gören Zadeh, 1965 yılında fuzzy mantık ve fuzzy küme tanımını ortaya atmıştır. Bu tanıma göre bir fuzzy küme, her bir olası elemana onun fuzzy küme içindeki üyelik derecesini gösteren bir değer verilerek tanımlanır. Böylece elemanlar büyük veya küçük olması oranında kümeye çok veya az ait olurlar. Bu üyelik dereceleri $[0,1]$ aralığında bulunan reel sayı değerleri ile temsil edilir. Bundan sonra ise bu şekilde elde edilen elemanlar arasındaki uzaklığın nasıl tanımlanacağı yani bir fuzzy küme üzerinde metrik yapının nasıl oluşturulacağı fuzzy matematiğin temel problemlerinden biri olmuştur. Birçok bilim adamı fuzzy metriği, fuzzy kümeler üzerinde farklı tanımlamışlardır ancak hepsinin ortaya çıkış noktasını bir küme üzerindeki metrik yapı oluşturmuştur. Bu alandaki ilk çalışmayı 1975 yılında Kramosil ve Michalek, 1979 yılında Erceg, 1982 yılında Deng, 1984 yılında Kaleva ve Seikkala, 1994 yılında George ve Veeramani yapmıştır.

Son yıllarda fuzzy mantığı birçok uygulama alanında çalışılmaktadır. Bunlardan bazıları; otomatik kontrol sistemleri, ekonomi, finans, tıp bilimi, mühendislik, bilgisayar bilimleri ve psikolojidir. Kullanım alanlarına örnekler ise Panasonic firmasının video kayıt cihazlarının elle tutulması nedeniyle çekim sırasında oluşan sarsıntıları ortadan kaldırması, Mitsubishi firmasının klimalarda ortam koşullarını değerlendirerek en iyi çalışma durumunu algılaması ve odaya birisi girdiğinde soğutmayı artırması, Sony firmasının televizyonlarda ekran kontrastını, parlaklığını, rengini ayarlaması ve Nissan firmasının ABS fren sistemlerinde tekerleklerin kilitlenmeden frenlenmesini sağlaması verilebilir.

Günümüzde ise fuzzy metrik uzaylarda yeni sınıflandırmalar çalışılmaktadır. Biz bu çalışmamızda daha zayıf bir yapıya sahip olan fuzzy metrikimsi uzaylarda iki yeni sınıflandırmayı tanıtacağız.

2. FUZZY METRİKİMSİ UZAY İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Cantor, kümeyi 1879 yılında şu şekilde tanımlamıştır: $X \neq \emptyset$ olmak üzere; $A \subset X$ için $x \in X$ iken $\mu_A : X \to \{0, 1\}$,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

şeklinde μ_A üyelik fonksiyonu için,

$$A = \left\{ \left(x , \mu_A(x) \right) : x \in X \right\}$$

X de bir kümedir.

Zadeh, fuzzy kümeyi 1965 yılında şu şekilde tanımlamıştır: $X \neq \emptyset$ olmak üzere; $A \subset X$ için $x \in X$ iken $\mu_A : X \to [0, 1]$ ve $\lambda \in (0, 1]$ için,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \lambda, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

şeklinde μ_A üyelik fonksiyonu için,

$$A = \left\{ \left(x , \mu_A(x) \right) : x \in X \right\}$$

X de bir fuzzy kümedir.

Örnek 2.1. $X = \{a, b, c\}$ olsun. $A = \{a, b\}$ olmak üzere;

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x = a \text{ veya } x = b \\ 0, & x = c \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$A = \left\{ \left(x , \mu_A(x) \right) : x \in X \right\}$$

$$A = \left\{ (a, \mu_A(a)), \left(b, \mu_A(b) \right), \left(c, \mu_A(c) \right) \right\}$$

$$A = \{ (a, 1), (b, 1), (c, 0) \}$$

$$A = \{a, b\}$$

X de bir kümedir.

Eğer,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x = a \text{ veya } x = b \\ 0.2, & x = c \end{cases}$$

olarak tanımlarsak,

$$A = \{(a, 1), (b, 1), (c, 0.2)\}$$

fuzzy kümesi bulunur. Her küme fuzzy kümedir.

$$B = \{(a, 0.7), (b, 0.5), (c, 0.1)\}$$

fuzzy kümesiyle birlikte birleşim ve kesişim işlemi sırasıyla,

$$A \vee B = \{(x, \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}) : x \in X\} = \{(a, 1), (b, 1), (c, 0.2)\}$$

$$A \wedge B = \{(x, \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}) : x \in X\} = \{(a, 0.7), (b, 0.5), (c, 0.1)\}$$

şeklinde tanımlanır. A fuzzy kümesinin tümleyeni ise;

$$A^C = \{(x, 1 - \mu_A(x)) : x \in X\} = \{(a, 0), (b, 0), (c, 0.8)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Üçgen normlar, probabilistik metrik uzaylarda mesafeleri modellemek için Schweizer ve Sklar (1960) tarafından ortaya konulmuştur.

Tanım 2.2. $I = [0, 1]$ olmak üzere $* : I \times I \to I$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa sürekli üçgen norm veya $t-$norm olarak adlandırılır; her $a, b, c, d \in I$ için,

t1. $a * 1 = a$, $0 * 0 = 0$

t2. $a * b = b * a$

t3. $(a * b) * c = a * (b * c)$

t4. Eğer $a \leq b$ ve $c \leq d$ ise $a * c \leq b * d$ (Schweizer ve Sklar, 1960).

Örnek 2.3. Her $a, b \in I$ için,

$a * b = \min\{a, b\}$ (minimum $t-$norm)

$a * b = a.b$ (çarpım t-norm)

$a * b = \text{maks}\{a + b - 1, 0\}$ (Lukasiewicz $t-$norm) temel üçgen normlardır ve zayıftan güçlüye doğru,

$$\text{maks}\{a + b - 1, 0\} \leq a.b \leq \min\{a, b\}$$

özelliği vardır (Schweizer ve Sklar, 1960).

Örnek 2.4. Her $a, b \in I$ için $a * b = a.b$ işleminin t-norm olduğunu gösterelim: Herhangi $a, b, c, d \in I$ için,

t1. $a * 1 = a.1 = a$

t2. $a * b = a.b = b.a = b * a$

t3. $a * (b * c) = a * (b.c) = a.(b.c) = (a.b).c = ((a * b) * c)$

t4. $a \leq b, c \leq d$ iken $a * c \leq b * d$

Örnek 2.5. Her $a, b \in I$ için $a * b = \min\{a, b\}$ işleminin t-norm olduğunu gösterelim: Herhangi $a, b, c, d \in I$ için,

t1. $a * 1 = \min\{a, 1\} = a$

t2. $a * b = \min\{a, b\} = \min\{b, a\} = b * a$

t3. $a * (b * c) = a * \min\{b, c\} = \min\{a, \min\{b, c\}\} = \min\{a, b, c\}$

$$= \min\{\min\{a, b\}, c\}$$

$$= \min\{a * b, c\}$$

$$= (a * b) * c$$

t4. $a \leq b,\ c \leq d$ iken $a * c \leq b * d$

1. durum. $a \leq b \leq c \leq d \Rightarrow a * c = \min\{a, c\} = a \leq b = \min\{b, d\} = b * d$

2. durum. $a \leq c \leq d \leq b \Rightarrow a * c = \min\{a, c\} = a \leq d = \min\{b, d\} = b * d$

3. durum. $a \leq c \leq b \leq d \Rightarrow a * c = \min\{a, c\} = a \leq b = \min\{b, d\} = b * d$

4. durum. $c \leq a \leq b \leq d \Rightarrow a * c = \min\{a, c\} = c \leq b = \min\{b, d\} = b * d$

5. durum. $c \leq a \leq d \leq b \Rightarrow a * c = \min\{a, c\} = c \leq b = \min\{b, d\} = b * d$

6. durum. $c \leq d \leq a \leq b \Rightarrow a * c = \min\{a, c\} = c \leq d = \min\{b, d\} = b * d$

Tanım 2.6. $X \neq \emptyset$, $*$ sürekli t-norm ve $M : X \times X \times (0,\infty) \to [0,1]$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın; her $x, y, z \in X$ ve her $t, s > 0$ için,

FPM-1. $M(x, y, t) > 0$

FPM-2. $x = y \Longrightarrow M(x, y, t) = 1$

FPM-3. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$

FPM-4. $M(x, y, t + s) \geq M(x, z, t) * M(z, y, s)$

FPM-5. $M(x, y, \cdot): (0, \infty) \to [0, 1]$ süreklidir.

Bu durumda $(X, M, *)$ üçlüsüne fuzzy metrikimsi uzay denir ve kısaca FPM-uzay şeklinde gösterilir (George ve Veeramani, 1994). Burada $M(x, y, t)$ değerine t-ye göre x ile y arasındaki uzaklık denir. Eğer $M(x, y, t) = 0$ ise x ile y arasındaki uzaklık sonsuz kabul edilir. Eğer her $a, b \in I$ için $a * b = \min\{a, b\}$ alınırsa $(X, M, *)$ üçlüsüne fuzzy ultrametrikimsi uzay denir. Bu durumda FPM4. şartı,

FPM-4*. $M(x, z, t + s) \geq \min\{ M(x, y, t), M(y, z, s) \}$

olur (Gregori ve diğ., 2010).

Lemma 2.7. $M(x, y, \cdot)$ fonksiyonu azalmayandır, yani; her $t, s > 0$ ve $t < s$ için,

$$M(x, y, t) \leq M(x, y, s)$$

dir (Grabiec, 1988).

İspat. Kabul edelim ki; $t > s$ olmak üzere $M(x, y, s) > M(x, y, t)$ olsun. Bu takdirde;

$$M(x, y, s) > M(x, y, t) \geq M(x, y, s) * M(y, y, t - s) \quad (M(y, y, t-s) = 1)$$

$$M(x, y, s) > M(x, y, s)$$

çelişkisi ortaya çıkar. Dolayısıyla $M(x, y, \cdot)$ azalmayandır.

Örnek 2.8. (X, d) alışılmış metrik uzay olsun. Her $a, b \in I$ için $a * b = a.b$ olmak üzere; her $x, y \in X$ ve her $t > 0$ için,

$$M(x, y, t) = \left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right)\right]^{-1}$$

şeklinde tanımlansın. $(X, M, *)$ bir fuzzy metrikimsi uzaydır (George and Veeramani, 1994).

Çözüm. Her $x, y, z \in X$ ve her $t, s > 0$ için,

FM1. $M(x, y, t) > 0$ olduğunu gösterelim:

$$|x - y| \geq 0 \Rightarrow \frac{|x - y|}{t} \geq 0 \Rightarrow \left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right)\right]^{-1} = M(x, y, t) > 0$$

FM2. $x = y \Longrightarrow M(x, y, t) = 1$ olduğunu gösterelim:

$$x = y \Longrightarrow |x - y| = 0 \Longrightarrow \frac{|x - y|}{t} = 0$$

$$\Longrightarrow \left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right)\right]^{-1} = 1 \Longrightarrow M(x, y, t) = 1$$

FM3. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$ olduğunu gösterelim:

$$M(x, y, t) = \left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right)\right]^{-1} = \left[\exp\left(\frac{|y - x|}{t}\right)\right]^{-1} = M(y, x, t)$$

FM4. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$ olduğunu gösterelim:

$|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ olduğundan,

$$|x - z| \leq \left(\frac{t + s}{t}\right)|x - y| + \left(\frac{t + s}{s}\right)|y - z|$$

$$\frac{|x - z|}{t + s} \leq \frac{|x - y|}{t} + \frac{|y - z|}{s}$$

$$\exp\left(\frac{|x - z|}{t + s}\right) \leq \exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right) \exp\left(\frac{|y - z|}{s}\right)$$

$$\left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right)\right]^{-1} \left[\exp\left(\frac{|y - z|}{s}\right)\right]^{-1} \leq \left[\exp\left(\frac{|x - z|}{t + s}\right)\right]^{-1}$$

buradan da aradığımız,

$$M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

FM5. $t_0 > 0$ için,

$$\lim_{t \to t_0} M(x, y, t) = \lim_{t \to t_0} \left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t}\right)\right]^{-1} = \left[\exp\left(\frac{|x - y|}{t_0}\right)\right]^{-1} = M(x, y, t_0)$$

M(x, y, t) fonksiyonunun sürekli olduğu görülür.

Uyarı 2.9. Yukarıdaki örnek her $a, b \in I$ için $a * b = \min\{a, b\}$ olması durumunda da sağlanmaktadır. Ayrıca (X, d) alışılmış metrik uzay yerine X üzerinde herhangi bir metrik uzay alındığında yine fuzzy metrikimsi uzay elde edilmektedir (George ve Veeramani, 1994). Şimdi her metriğin bir fuzzy metrikimsi ürettiğini görelim.

Örnek 2.10. (X, d) bir metrik uzay olsun ve her $a, b \in I$ için $a * b = a.b$ t-norm olmak üzere; her $x, y \in X$ ve her $t > 0$ için,

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

şeklinde tanımlansın. $(X, M_d, *)$ bir FPM-uzaydır. Bu uzaya, d metriğinden üretilen fuzzy metrikimsi veya standart fuzzy metrikimsi uzay denir (George ve Veeramani, 1994).

Çözüm. Her $x, y, z \in X$ ve her $t, s > 0$ için,

FM-1. $M_d(x, y, t) > 0$

FM-2. $x = y \Rightarrow M_d(x, y, t) = 1$ olduğunu gösterelim:

$$x = y \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow t + d(x, y) = t$$

$$\frac{t}{t + d(x, y)} = 1 \Rightarrow M_d(x, y, t) = 1$$

FM-3. $M_d(x, y, t) = M_d(y, x, t)$ olduğunu gösterelim:

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)} = \frac{t}{t + d(y, x)} = M_d(y, x, t)$$

FM-4. $M_d(x, y, t) * M_d(y, z, s) \leq M_d(x, z, t + s)$ olduğunu gösterelim:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$d(x, z) \leq \frac{t + s}{t} d(x, y) + \frac{t + s}{s} d(y, z)$$

$$\frac{d(x, z)}{t + s} \leq \frac{d(x, y)}{t} + \frac{d(y, z)}{s} = \frac{sd(x, y) + td(y, z)}{st}$$

$$1 + \frac{d(x, z)}{t + s} \leq 1 + \frac{sd(x, y) + td(y, z)}{st}$$

$$\frac{t + s + d(x, z)}{t + s} \leq \frac{ts + sd(x, y) + td(y, z)}{st}$$

$$\leq \frac{ts + sd(x,y) + td(y,z) + d(x,y)d(y,z)}{ts}$$

$$\leq \frac{[t + d(x,y)][s + d(y,z)]}{ts}$$

olduğuna göre,

$$\frac{t}{t + d(x,y)} \cdot \frac{s}{s + d(y,z)} \leq \frac{t + s}{t + s + d(x,z)}$$

elde edilir ve buradan istediğimiz,

$$M_d(x,y,t) * M_d(y,z,s) \leq M_d(x,z,t+s)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

FM5. $t_0 > 0$ için,

$$\lim_{t \to t_0} M_d(x,y,t) = \lim_{t \to t_0} \frac{t}{t + d(x,y)} = \frac{t_0}{t_0 + d(x,y)} = M_d(x,y,t_0)$$

$M(x,y,.)$ fonksiyonunun sürekli olduğu görülür.

Uyarı 2.11. Yukarıdaki örnek her $a, b \in I$ için $a * b = \min\{a, b\}$ t-norm ve (X, d) metrik uzayının ultrametrik olması durumunda da sağlanır. Böylece $(X, M_d, *)$ fuzzy ultrametrikimsi uzaydır. Bu uzaya standart fuzzy ultrametrikimsi uzay denir (Sedghi, Shobe, 2013).

Örnek 2.12. $X = IN^*$ olsun. Her $a, b \in I$ için $a * b = a.b$ olmak üzere; her $x, y \in X$ ve her $t > 0$ için,

$$M(x,y,t) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & x \leq y \\ \frac{y}{x}, & y \leq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $(X, M, *)$ bir fuzzy metrikimsi uzaydır (George ve Veeramani, 1994).

Uyarı 2.13. Yukarıdaki örnek için $M(x,y,t)$ fuzzy metriğini üreten X üzerinde bir d metriği yoktur (George ve Veeramani, 1994). Gerçekten; $x \leq y$ için,

$$M(x,y,t) = \frac{x}{y} = \frac{t}{t + d(x,y)}$$

$$\Rightarrow xt + xd(x,y) = yt$$

$$\Rightarrow d(x,y) = \frac{t(y-x)}{x}$$

elde edilen d fonksiyonu simetri şartını sağlamadığından metrik değildir. Buna göre her FPM-uzay, bir metrik uzay değildir.

Tanım 2.14. (X, M, $*$) bir FPM-uzay olsun. $x \in X, 0 < r < 1, t > 0$ olmak üzere,

$$B(x, r, t) = \{ y \in X : M(x,y,t) > 1 - r \}$$

kümesine x merkezli, r yarıçaplı açık yuvar denir (Zi-ke, 1982).

George ve Veeramani (1994), X üzerinde her fuzzy metrikimsinin,

$$\{B(x,r,t) : x \in X, 0 < r < 1, t > 0 \}$$

formundaki açık kümelerin ailesini bir taban olarak kabul eden τ_M topolojisini ürettiğini ispatladı.

Eğer (X, d) bir metrik uzay ve X üzerinde tanımlı fuzzy metrikimsi,

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)}$$

ise bu durumda d tarafından üretilen τ_d topolojisi ile M fuzzy metrikimsi tarafından üretilen τ_M topolojisi aynıdır.

Tanım 2.15. (X, M, $*$) FPM-uzayında bir (x_n) dizisinin yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $\forall\ \varepsilon > 0$ ve $\forall\ t > 0$ için en az bir $n_0(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $\forall\ n \geq n_0$ iken $M(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon$ olmasıdır (George ve Veeramani, 1994).

Tanım 2.16.

i. (X, M, $*$) bir FPM-uzay olsun. X de bir (x_n) dizisi Cauchy dizisidir gerekli ve yeterli koşul $\forall\ \varepsilon > 0$ ve $\forall\ t > 0$ için en az bir $n_0(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki $\forall\ m, n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ (George ve Veeramani, 1994).

ii. (X, M, $*$) FPM-uzayı tam uzaydır gerekli ve yeterli koşul her Cauchy dizisi X de bir noktaya yakınsar (George ve Veeramani, 1994).

iii. (X, M, $*$) FPM-uzayı yuvarsal tamdır ancak ve ancak X deki iç içe azalan her açık yuvar ailesinin arakesiti boştan farklıdır (Sedghi ve Shobe, 2013).

$\mathcal{K}_M(X)$ boş olmayan kompakt alt kümelerin kümesini göstermek üzere; Rodriguez-Lopez ve Romaguera (2004) $\mathcal{K}_M(X)$ üzerinde verilen (X, M, $*$) FPM-uzayının Hausdorff fuzzy metriği için bir notasyon verdi.

Tanım 2.17. (X, M, $*$) bir FPM-uzay olsun. $H_M : \mathcal{K}_M(X) \times \mathcal{K}_M(X) \times (0, \infty) \to [0, 1]$ Hausdorff fuzzy metriği her $A, B \in \mathcal{K}_M(X)$, her $t > 0$ için $M(x, B, t) = \sup\{M(x, b, t) : b \in B\}$ olmak üzere,

$$H_M(A, B, t) = \min\{\inf_{x\in A} M(x, B, t), \inf_{y\in B} M(A, y, t)\}$$

şeklinde tanımlanır (Rodriguez-Lopez ve Romaguera, 2004).

Tanım 2.18. $I = [0, 1]$ olmak üzere $* : I \times I \times I \to I$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa üçgen norm veya sürekli t-norm olarak adlandırılır; her a, b, c, d, e, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in [0, 1]$ olmak üzere,

t1. $a*1*1 = a$, $0*0*0 = 0$

t2. $a*b*c = a*c*b = b*c*a$

t3. $(a*b*c)*d*e = a*(b*c*d)*e = a*b*(c*d*e)$

t4. Eğer $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2, c_1 \leq c_2$ ise, $a_1 * b_1 * c_1 \leq a_2 * b_2 * c_2$ (Kumar, 2008).

Tanım 2.19. $X \neq \emptyset$, $*$ sürekli t-norm ve $M : X \times X \times X \times (0,\infty) \to [0, 1]$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın; her x, y, z, u $\in$ X ve her $t, t_1, t_2, t_3 > 0$ için,

FPM^2-1. $M(x, y, z, t) > 0$

FPM^2-2. Üç noktadan en az iki tanesi eşit $\Rightarrow M(x, y, z, t) = 1$

FPM^2-3. $M(x, y, z, t) = M(x, z, y, t) = M(y, z, x, t)$

FPM^2-4. $M(x, y, z, t_1 + t_2 + t_3) \geq M(x, y, u, t_1) * M(x, u, z, t_2) * M(u, y, z, t_3)$

FPM^2-5. $M(x, y, z, \cdot) : (0, \infty) \to [0, 1]$ süreklidir.

Bu durumda (X, M, $*$) üçlüsüne fuzzy 2-metrikimsi uzay denir ve kısaca FPM^2-uzay şeklinde gösterilir (Ahmed ve diğ., 2010).

Örnek 2.20. (X, d) bir 2-metrik uzay ve $\forall$ a, b, c $\in I = [0, 1]$ için $a*b*c = a.b.c$ t-norm olmak üzere $\forall$ x, y, z $\in$ X ve $\forall\ t > 0$ için,

$$M_d(x, y, z, t) = \frac{t}{t + d(x, y, z)}$$

şeklinde tanımlansın. (X, M_d, $*$) bir FPM^2-uzaydır (Ahmed ve diğ., 2010).

Tanım 2.21. (X, M, $*$) FPM^2-uzayında bir (x_n) dizisi X de bir x noktasına yakınsar gerekli ve yeterli koşul her a $\in$ X, her $\varepsilon > 0$ ve her $t > 0$ için en az bir $n_0(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ iken $M(x_n, x, a, t) > 1 - \varepsilon$ (Kumar, 2008).

Tanım 2.22.

i. (X, M, $*$) bir FPM^2-uzay olsun. X de bir (x_n) dizisi Cauchy dizisidir gerekli ve yeterli koşul her a $\in$ X, her $t > 0$ ve her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki her $m, n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_m, a, t) > 1 - \varepsilon$ (Kumar, 2008).

ii. (X, M, $*$) FPM^2-uzayı tam uzaydır gerekli ve yeterli koşul her Cauchy dizisi X de bir noktaya yakınsar (Kumar, 2008).

Tanım 2.23. $I = [0, 1]$ olmak üzere $* : I \times I \times I \times I \to I$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa sürekli üçgen norm yada t-norm olarak adlandırılır; her a, b, c, d, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 \in [0, 1]$ olmak üzere,

t1. $a*1*1*1 = a$, $0*0*0*0 = 0$

t2. $a*b*c*d = a*b*d*c = a*c*b*d = a*c*d*b = a*d*b*c = a*d*c*b = b*a*c*d = b*a*d*c = \ldots$

t3. $((a*b*c*d)*e*f*g) = (a*(b*c*d*e)*f*g) = (a*b*(c*d*e*f)*g) = (a*b*c*(d*e*f*g))$

t4. Eğer $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$, $c_1 \leq c_2$, $d_1 \leq d_2$ ise $a_1 * b_1 * c_1 * d_1 \leq a_2 * b_2 * c_2 * d_2$ (Singhi ve diğ., 2010).

Tanım 2.24. $X \neq \emptyset$, $*$ sürekli t-norm ve $M : X \times X \times X \times X \times (0, \infty) \to [0, 1]$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın, her x, y, z, u, w $\in$ X ve her $t, t_1, t_2, t_3, t_4 > 0$ için,

FPM^3-1. $M(x, y, z, w, t) > 0$

FPM^3-2. Dört noktadan en az üç tanesi eşit $\Longrightarrow M(x, y, z, w, t) = 1$

FPM^3-3. $M(x, y, z, w, t) = M(x, w, z, y, t) = M(y, z, w, x, t) = M(z, w, x, y, t) = \dots$

FPM^3-4. $M(x, y, z, w, t_1 + t_2 + t_3 + t_4) \geq M(x, y, z, u, t_1) * M(x, y, u, w, t_2)$

$$* M(x, u, z, w, t_3) * M(u, y, z, w, t_4)$$

FPM^3-5. $M(x, y, z, w, \cdot) : (0, \infty) \to [0, 1]$ süreklidir.

Bu durumda $(X, M, *)$ üçlüsüne fuzzy 3-metrikimsi uzay denir ve kısaca FPM^3-uzay şeklinde gösterilir (Singhi ve diğ., 2010).

Tanım 2.25. $(X, M, *)$ FPM^3-uzayında bir (x_n) dizisi X de bir x noktasına yakınsar gerekli ve yeterli koşul her $a, b \in X$, her $t > 0$ ve her $\varepsilon > 0$ olmak üzere en az bir $n_0(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ iken $M(x_n, x, a, b, t) > 1 - \varepsilon$ (Singhi ve diğ., 2010).

Tanım 2.26.

i. $(X, M, *)$ bir FPM^3-uzay olsun. X de bir (x_n) dizisi Cauchy dizisidir gerekli ve yeterli koşul her $a, b \in X$, her $t > 0$ için her $\varepsilon > 0$ olmak üzere en az bir $n_0(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki her $m, n \geq n_0$ iken $M(x_n, x_m, a, b, t) > 1 - \varepsilon$ (Singhi ve diğ., 2010).

ii. $(X, M, *)$ FPM^3-uzayı tam uzaydır gerekli ve yeterli koşul her Cauchy dizisi X de bir noktaya yakınsar (Singhi ve diğ., 2010).

3. FUZZY METRİKİMSİ UZAYLARIN SINIFLANDIRMASI

Bu bölümde, Tanım 2.6. da FPM-4., Tanım 2.19. da FPM^2-4., Tanım 2.24. de FPM^3-4. şartını kuvvetlendirerek ve t sayısından uzaklığı bağımsız bırakarak elde ettiğimiz yapıları inceleyeceğiz.

3.1. Güçlü Fuzzy Metrikimsi Uzaylar

Tanım 3.1.1. $(X, M,*)$ bir FPM-uzay olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ ve her $t > 0$ için,

$$M(x, y, t) \geq M(x, z, t) * M(z, y, t)$$

sağlanırsa M ye güçlü (strong) fuzzy metrikimsi, (X, M, $*$) üçlüsüne de güçlü (strong) FPM-uzay denir.

Uyarı 3.1.2. Tanımdan anlaşılacağı üzere her güçlü FPM-uzay, FPM-uzaydır ancak tersi doğru değildir.

Örnek 3.1.3. $X = \{x, y, z\}$ ve her $a, b \in I$ için $a * b = a.b$ t-norm olsun. Her $x, y, z \in X$ ve her $t > 0$ için $M : X \times X \times (0, \infty) \to [0, 1]$ fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım:

$$M(x, x, t) = M(y, y, t) = M(z, z, t) = 1$$

$$M(x, z, t) = M(z, x, t) = M(y, z, t) = M(z, y, t) = \frac{t}{t + 1}$$

$$M(x, y, t) = M(y, x, t) = \frac{t^2}{(t + 2)^2}$$

Bu durumda (X, M, $*$) FPM-uzaydır. Ancak güçlü FPM-uzay değildir.

Çözüm. Her $x, y, z \in X$ ve her $t > 0$ için,

FPM-1. $M(x, y, t) > 0$

FPM-2. $M(x, x, t) = 1$

FPM-3. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$

FPM-4. $M(x, y, t + s) \geq M(x, z, t) * M(z, y, s)$ olduğunu gösterelim:

$$M(x, y, t + s) - M(x, z, t) * M(z, y, s) = \frac{(t + s)^2}{(t + s + 2)^2} - \frac{t}{t + 1} \cdot \frac{s}{s + 1}$$

$$= \frac{(t - s)^2(s + t + 1)}{(t + s + 2)^2(t + 1)(s + 1)} \geq 0$$

Böylece $M(x, y, t + s) \geq M(x, z, t) * M(z, y, s)$ sağlandığı görülür.

$$M(x, z, t + s) = \frac{t + s}{t + s + 1} \geq \frac{s}{s + 1} = M(z, y, s) \geq \frac{s}{s + 1} \cdot \frac{t}{t + 1}$$

$$= M(z, y, s) * M(x, y, t)$$

$$M(y, z, t + s) = \frac{t + s}{t + s + 1} \geq \frac{t}{t + 1} = M(y, x, t) \geq \frac{t}{t + 1} \cdot \frac{s}{s + 1}$$

$$= M(y, x, t) * M(x, z, s)$$

FPM-5. $t_0 > 0$ için,

$$\lim_{t \to t_0} M(x, y, t) = \lim_{t \to t_0} \frac{t}{t + 1} = \frac{t_0}{t_0 + 1} = M(x, y, t_0)$$

$M(x, y, \cdot)$ fonksiyonunun sürekli olduğu görülür. Sonuç olarak $(X, M, *)$ bir FPM-uzaydır.

Fakat her $t > 0$ için,

$$M(x, y, t) = \frac{t^2}{(t + 2)^2} < \frac{t^2}{(t + 1)^2} = \frac{t}{t + 1} \cdot \frac{t}{t + 1} = M(x, z, t) * M(z, y, t)$$

olduğundan $(X, M, *)$ güçlü değildir.

Örnek 3.1.4. $X = \{x, y, z\}$ ve her $a, b \in I$ için $a * b = \text{maks}\{a + b - 1, 0\}$ t-norm olsun. Her $x, y, z \in X$ ve her $t > 0$ için $M : X \times X \times (0, \infty) \to [0, 1]$ fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım:

$$M(x, x, t) = M(y, y, t) = M(z, z, t) = 1$$

$$M(x, z, t) = M(z, x, t) = M(y, z, t) = M(z, y, t) = \frac{2t + 1}{2t + 2}$$

$$M(x,y,t) = M(y,x,t) = \frac{t}{t+2}$$

Bu durumda $(X, M,*)$ FPM-uzaydır. Gerçekten; her x, y, $z \in X$ ve her t, $s > 0$ için;

FPM-1. $M(x,y,t) > 0$

FPM-2. $M(x,x,t) = 1$

FPM-3. $M(x,y,t) = M(y,x,t)$

olduğu açıktır. Ayrıca,

FPM-4. $M(x,y,t+s) \geq M(x,z,t) * M(z,y,s)$

$$\frac{t+s}{t+s+2} - \text{maks}\left\{\frac{2t+1}{2t+2} + \frac{2s+1}{2s+2} - 1, 0\right\} = \frac{2(t-s)^2}{(t+s+2)(2t+2)(2s+2)} \geq 0$$

$$M(x,z,t+s) \geq M(x,y,t) * M(y,z,s)$$

$$\frac{2(t+s)+1}{2(t+s)+2} - \text{maks}\left\{\frac{t}{t+2} + \frac{2s+1}{2s+2} - 1, 0\right\} \geq 0$$

$$M(y,z,t+s) \geq M(y,x,t) * M(x,z,s)$$

$$\frac{2(t+s)+1}{2(t+s)+2} - \text{maks}\left\{\frac{t}{t+2} + \frac{2t+1}{2t+2} - 1, 0\right\} = \frac{2(t+s)+1}{2(t+s)+2} \geq 0$$

FPM-5. $t_0 > 0$ için,

$$\lim_{t \to t_0} M(x,y,t) = \lim_{t \to t_0} \frac{t}{t+2} = \frac{t_0}{t_0+2} = M(x,y,t_0)$$

$M(x,y,\cdot)$ fonksiyonunun sürekli olduğu görülür. $(X, M,*)$ bir FPM-uzaydır. Fakat her $t > 0$ için,

$$M(x,y,t) = \frac{t}{t+2} < \frac{t}{t+1} = \frac{2t+1}{2t+2} + \frac{2t+1}{2t+2} - 1 = M(x,z,t) * M(z,y,t)$$

olduğundan $(X, M,*)$ FPM-uzay olmasına rağmen güçlü FPM-uzay değildir.

Örnek 3.1.5. (X, d) metrikimsi uzay ve her $a, b \in I$ için $a * b = a.b$ olsun. Her $x, y \in X$ ve her $t > 0$ için, $M_d: X \times X \times (0, \infty) \to [0,1]$ fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım:

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$$

Bu takdirde $(X, M_d,*)$ bir FPM-uzaydır. Aynı zamanda güçlü FPM-uzaydır ve bu uzay standart güçlü FPM-uzay olarak adlandırılır.

Çözüm. Örnek 2.10. da FPM-uzay olduğu gösterildi. Güçlü FPM-uzay olduğunu gösterelim yani,

$$M_d(x,z,t) \geq M_d(x,y,t) * M_d(y,z,t)$$

Metrik uzay tanımından,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

olduğunu biliyoruz.

$$d(x,z) \leq \frac{t}{t}d(x,y) + \frac{t}{t}d(y,z)$$

$$\frac{d(x,z)}{t} \leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{t}$$

$$1+\frac{d(x,z)}{t} \leq 1+\frac{d(x,y)+d(y,z)}{t}$$

$$= \frac{t+d(x,y)+d(y,z)}{t} = \frac{t^2+td(x,y)+td(y,z)}{t^2}$$

$$\leq \frac{t^2+td(x,y)+td(y,z)+d(x,y)d(y,z)}{t^2}$$

$$= \frac{[t+d(x,y)][t+d(y,z)]}{t^2}$$

$$= \frac{t+d(x,y)}{t} \cdot \frac{t+d(y,z)}{t}$$

$$\frac{t}{t+d(x,z)} \geq \frac{t}{t+d(x,y)} \cdot \frac{t}{t+d(y,z)}$$

$$M_d(x,z,t) \geq M_d(x,y,t) * M_d(y,z,t)$$

elde edilir.

Örnek 3.1.6. $X = IR^+$ ve her $a,b \in I$ için $a * b = a.b$ olsun. Her $x,y,z \in X$ ve her $t > 0$ için $M : X \times X \times (0,\infty) \to [0,1]$ fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım:

$$M(x,y,t) = \frac{\min\{x,y\}}{\text{maks}\{x,y\}}$$

Bu durumda $(X, M, *)$ hem FPM-uzay hem de güçlü FPM-uzaydır.

Çözüm. Her $x, y, z \in X$ ve her $t, s > 0$ için,

FPM-1. $M(x, y, t) > 0$

FPM-2. $M(x, x, t) = \min\{x, x\}/\text{maks}\{x, x\} = x/x = 1$

FPM-3. $M(x, y, t) = \min\{x, y\}/\text{maks}\{x, y\} = \min\{y, x\}/\text{maks}\{y, x\} = M(y, x, t)$

FPM-4. $M(x, z, t + s) \geq M(x, y, t) * M(y, z, s)$ olduğunu gösterelim:

1.durum: $x < y < z$ için,

$$M(x, z, t + s) = \frac{\min\{x, z\}}{\text{maks}\{x, z\}} = \frac{x}{z} \geq \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}$$

$$= \frac{\min\{x, y\}}{\text{maks}\{x, y\}} * \frac{\min\{y, z\}}{\text{maks}\{y, z\}}$$

$$= M(x, y, t) * M(y, z, s)$$

2.durum: $x < z < y$ için,

$$M(x, z, t + s) = \frac{x}{z} \geq \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{y} = M(x, y, t) * M(y, z, s)$$

3.durum: $y < x < z$ için,

$$M(x, z, t + s) = \frac{x}{z} \geq \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{z} = M(x, y, t) * M(y, z, s)$$

4.durum: $y < z < x$ için,

$$M(x, z, t + s) = \frac{z}{x} \geq \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{z} = M(x, y, t) * M(y, z, s)$$

5.durum: $z < x < y$ için,

$$M(x, z, t + s) = \frac{z}{x} \geq \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{y} = M(x, y, t) * M(y, z, s)$$

6.durum: $z < y < x$ için,

$$M(x, z, t + s) = \frac{z}{x} \geq \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} = M(x, y, t) * M(y, z, s)$$

FPM-5. $M(x, y, \cdot) : IR^+ \to [0, 1]$ süreklidir. Çünkü $M(x, y, \cdot)$ sabit fonksiyondur.

Dolayısıyla $(X, M, *)$ FPM-uzaydır, aynı zamanda FPM-4'de yapılan işlemler t'den bağımsız olduğundan,

$$M(x,z,t) \geq M(x,y,t) * M(y,z,t)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $(X, M,*)$ güçlü bir FPM-uzaydır.

Tanım 3.1.7. $(X, M,*)$ güçlü FPM-uzay olsun. Eğer her $a, b \in I$ için $a * b = \min\{a, b\}$ ise M ye güçlü fuzzy ultrametrikimsi, $(X, M,*)$ üçlüsüne de güçlü fuzzy ultrametrikimsi uzay denir.

Teorem 3.1.8. M_d güçlü fuzzy metrikimsinin, güçlü fuzzy ultrametrikimsi olması için gerekli ve yeterli koşul d nin ultrametrikimsi olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki; (X, d) ultrametrikimsi uzay olsun. $(X, M_d,*)$ fuzzy ultrametrikimsi olması için, her $x, y, z \in X$ ve her $t > 0$ verildiğinde,

$$M_d(x,y,t) \geq \min\{M_d(x,z,t), M_d(z,y,t)\} \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

olmalıdır. Standart FPM-uzay tanımından,

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)} \geq \frac{t}{t + \text{maks}\{d(x,z), d(z,y)\}} \qquad \mathbf{(3.1.2)}$$

1.durum: $d(x,z) \geq d(z,y)$ olsun.

$$t + d(x,z) \geq t + d(z,y)$$

$$\frac{t}{t + d(x,z)} \leq \frac{t}{t + d(z,y)} \Rightarrow M_d(x,z,t) \leq M_d(z,y,t)$$

(3.1.2) den,

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)} \geq \frac{t}{t + \text{maks}\{d(x,z), d(z,y)\}} = \frac{t}{t + d(x,z)}$$

$$= M_d(x,z,t)$$

$$= \min\{M_d(x,z,t), M_d(z,y,t)\}.$$

2.durum: $d(z,y) \geq d(x,z)$ olsun.

$$t + d(z,y) \geq t + d(x,z)$$

$$\frac{t}{t + d(z,y)} \leq \frac{t}{t + d(x,z)} \Rightarrow M_d(z,y,t) \leq M_d(x,z,t)$$

(3.1.2) den,

$$M_d(x,y,t)=\frac{t}{t+d(x,y)}\geq\frac{t}{t+\text{maks}\{d(x,z),d(z,y)\}}=\frac{t}{t+d(z,y)}$$

$$=M_d(z,y,t)=\min\{M_d(z,y,t),M_d(x,z,t)\}.$$

O halde her iki durum için de $(3.1.1)$ denklemi elde edilir. Böylece $(X,M_d,*)$ güçlü fuzzy ultrametrikimsi uzay olur.

Şimdi de kabul edelim ki; $(X,M_d,*)$ güçlü fuzzy ultrametrikimsi uzay olsun. (X,d) nin ultrametrikimsi uzay olması için, her $x,y\in X$ ve her $t>0$ verildiğinde,

$$d(x,y)\leq \text{maks}\{d(x,z),d(z,y)\} \qquad \textbf{(3.1.3)}$$

olduğunu gösterelim. Güçlü fuzzy ultrametrikimsi uzay tanımından,

$$\begin{aligned}M_d(x,y,t)&\geq\min\{M_d(x,z,t),M_d(z,y,t)\}\\&\geq\min\left\{\frac{t}{t+d(x,z)},\frac{t}{t+d(z,y)}\right\}\end{aligned} \qquad \textbf{(3.1.4)}$$

1.durum:

$$\frac{t}{t+d(x,z)}\leq\frac{t}{t+d(z,y)}$$

olsun. Bu durumda,

$$d(z,y)\leq d(x,z) \qquad \textbf{(3.1.5)}$$

olup (3.1.4) den,

$$M_d(x,y,t)=\frac{t}{t+d(x,y)}\geq\min\{M_d(x,z,t),M_d(z,y,t)\}=\frac{t}{t+d(x,z)}$$

$$\Rightarrow d(x,y)\leq d(x,z) \qquad \textbf{(3.1.6)}$$

Böylece (3.1.5) ve (3.1.6) dan,

$$d(x,y)\leq d(x,z)=\text{maks}\{d(x,z),d(z,y)\}$$

elde edilir. Bu durumda (X,d) ultrametrikimsi uzaydır.

2.durum:

$$\frac{t}{t+d(z,y)}\leq\frac{t}{t+d(x,z)}$$

olsun. Bu durumda,

$$d(x,z)\leq d(z,y) \qquad \textbf{(3.1.7)}$$

olup (3.1.4) den,

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)} \geq \min\{M_d(x,z,t), M_d(z,y,t)\} = \frac{t}{t + d(z,y)}$$

$$\Rightarrow d(x,y) \leq d(z,y) \qquad \textbf{(3.1.8)}$$

Böylece (3.1.7) ve (3.1.8) den,

$$d(x,y) \leq d(z,y) = \text{maks}\{d(z,y), d(x,z)\}$$

elde edilir. Bu durumda (X, d) ultrametrikimsi uzaydır.
O halde her iki durum için de (3.1.3) denklemi elde edilir. Böylece (X, d) ultrametrikimsi uzaydır.

Sonuç 3.1.9. Eğer d ultrametrikimsi olmayan bir metrikimsi ise, $(X, M_d, *)$ üçlüsüne güçlü fuzzy ultrametrikimsi olmayan uzay denir.

Tanım 3.1.10. $(X, M, *)$ bir FPM^2-uzay olsun. Eğer $\forall\ x, y, z, w \in X$ ve $\forall\, t > 0$ için,

$$M(x, y, z, t) \geq M(x, y, w, t) * M(x, w, z, t) * M(w, y, z, t)$$

sağlanırsa M ye güçlü (strong) fuzzy 2-metrikimsi, $(X, M, *)$ üçlüsüne de güçlü (strong) FPM^2-uzay denir.

Uyarı 3.1.11. Tanımdan anlaşılacağı üzere her güçlü FPM^2-uzay, FPM^2-uzaydır ancak tersi doğru değildir.

Örnek 3.1.12. $X = \{x, y, z, w\}$ ve her a, b, c $\in$ I için $a * b * c = a.b.c$ t-norm olsun. Her x, y, z, w $\in$ X ve her $t > 0$ için $M : X^3 \times (0, \infty) \to [0, 1]$ fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım:

$$M(x,x,x,t) = M(y,y,y,t) = M(z,z,z,t) = M(w,w,w,t) = 1$$

$$M(x,y,w,t) = M(x,w,y,t) = M(w,x,y,t)$$

$$= M(w,y,x,t) = M(y,w,x,t) = M(y,x,w,t) = \frac{t}{t+1}$$

$$M(x,w,z,t) = M(x,z,w,t) = M(z,x,w,t) = \cdots = \frac{t}{t+1}$$

$$M(w,y,z,t) = M(w,z,y,t) = M(z,w,y,t) = \ldots = \frac{t}{t+1}$$

$$M(x,y,z,t) = M(x,z,y,t) = M(z,x,y,t) = \ldots = \frac{t^3}{(t+2)^3}$$

Bu durumda (X, M, $*$) FPM^2-uzaydır ancak güçlü FPM^2-uzay değildir.

Çözüm. Her x, y, z, w $\in$ X ve her t, t_1, t_2, t_3 > 0 için,

FPM^2-1. M(x, y, z, t) > 0

FPM^2-2. Her x $\in$ X için M(x, x, x, t) = 1

FPM^2-3. M(x, y, z, t) = M(x, z, y, t) = M(y, x, z, t) = M(y, z, x, t)

= M(z, x, y, t) = M(z, y, x, t)

FPM^2-4. $M(x, y, z, t_1 + t_2 + t_3) \geq M(x, y, w, t_1) * M(x, w, z, t_2) * M(w, y, z, t_3)$

$$\frac{(t_1+t_2+t_3)^3}{(t_1+t_2+t_3+2)^3} - \frac{t_1}{t_1+1} \cdot \frac{t_2}{t_2+1} \cdot \frac{t_3}{t_3+1} \geq 0$$

$M(x, y, w, t_1 + t_2 + t_3) \geq M(x, y, z, t_1) * M(x, z, w, t_2) * M(z, y, w, t_3)$

$$\frac{t_1+t_2+t_3}{t_1+t_2+t_3+1} \geq \frac{t_3}{t_3+1} = M(z,y,w,t_3)$$

$$\geq M(z,y,w,t_3) * M(x,z,w,t_2) * M(x,y,z,t_1)$$

$M(x, w, z, t_1+t_2+t_3) \geq M(x, w, y, t_1) * M(x, y, z, t_2) * M(y, w, z, t_3)$

$$\frac{t_1+t_2+t_3}{t_1+t_2+t_3+1} \geq \frac{t_3}{t_3+1} = M(y,w,z,t_3)$$

$$\geq M(y,w,z,t_3) * M(x,y,z,t_2) * M(x,w,y,t_1)$$

$M(w, y, z, t_1+t_2+t_3) \geq M(x, y, z, t_1) * M(w, x, z, t_2) * M(x, y, z, t_3)$

$$\frac{t_1+t_2+t_3}{t_1+t_2+t_3+1} \geq \frac{t_3}{t_3+1} = M(w,y,x,t_3)$$

$$\geq M(w,y,x,t_3) * M(w,x,z,t_2) * M(x,y,z,t_1)$$

FPM^2-5. $t_0 > 0$ için

$$\lim_{t\to t_0} M(x,y,z,t) = \lim_{t\to t_0} \frac{t^3}{(t+2)^3} = \frac{t_0}{(t_0+2)^3} = M(x,y,z,t_0)$$

M(x, y, z, $\cdot$) fonksiyonunun sürekli olduğu görülür. Sonuç olarak (X, M, $*$) bir FPM^2-uzaydır. Fakat her t > 0 için,

$$M(x,y,z,t) = \frac{t^3}{(t+2)^3} < \frac{t}{t+1} \cdot \frac{t}{t+1} \cdot \frac{t}{t+1}$$

$$= M(x,y,w,t) * M(x,w,z,t) * M(w,y,z,t)$$

olduğundan (X, M, $*$) güçlü değildir.

Örnek 3.1.13. (X, d) 2-metrikimsi uzay ve her a, b, c $\in$ I için $a * b * c = a.b.c$ t-norm olsun. Her x, y, z $\in$ X ve her t > 0 için $M_d : X^3 \times (0, \infty) \to [0, 1]$ fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım:

$$M_d(x,y,z,t) = \frac{t}{t + d(x,y,z)}$$

Bu takdirde (X, M_d,$*$) bir FPM^2-uzaydır. Aynı zamanda güçlü FPM^2-uzaydır ve bu uzay standart güçlü FPM^2-uzay olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.14. (X, M, $*$) bir FPM^3-uzay olsun. Eğer her x, y, z, w, u $\in$ X ve her t > 0 için,

$$M(x,y,z,w,t) \geq M(x,y,z,u,t) * M(x,y,u,w,t) * M(x,u,z,w,t) * M(u,y,z,w,t)$$

sağlanırsa M ye güçlü (strong) fuzzy 3-metrikimsi, (X, M, $*$) üçlüsüne de güçlü (strong) FPM^3-uzay denir.

Uyarı 3.1.15. Tanımdan anlaşılacağı üzere her güçlü FPM^3-uzay, FPM^3-uzaydır ancak tersi doğru değildir.

Örnek 3.1.16. $X = \{x,y,z,w,u\}$ ve her a, b, c, d $\in$ I için $a * b * c * d = a.b.c.d$ t-norm olsun. Her x, y, z, w, u $\in$ X ve her t > 0 için $M : X^4 \times (0, \infty) \to [0, 1]$ fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım:

$$M(x,x,x,x,t) = M(y,y,y,y,t) = M(z,z,z,z,t)$$

$$= M(w,w,w,w,t) = M(u,u,u,u,t) = 1$$

$$M(x,y,z,w,t) = M(x,y,w,z,t) = M(x,z,w,y,t) = M(x,z,y,w,t) = M(x,w,y,z,t)$$

$$= M(x,w,z,y,t) = M(y,x,z,w,t) = M(y,x,w,z,t) = M(y,z,x,w,t)$$

$$= M(y,z,w,x,t) = M(y,w,x,z,t) = M(y,w,z,x,t) = M(z,x,y,w,t)$$

$= M(z,x,w,y,t) = M(z,w,x,y,t) = M(z,w,y,x,t) = M(z,y,x,w,t)$

$= M(z,y,w,x,t) = M(w,x,y,z,t) = M(w,x,z,y,t) = M(w,y,x,z,t)$

$= M(w,y,z,x,t) = M(w,z,y,x,t) = M(w,z,x,t) = \dfrac{t^4}{(t+2)^4}$

$M(x,y,z,u,t) = M(x,y,u,z,t) = M(x,u,y,z,t) = \ldots = \dfrac{t}{t+1}$

$M(x,y,u,w,t) = M(x,y,w,u,t) = M(x,w,y,u,t) = \ldots = \dfrac{t}{t+1}$

$M(x,u,z,w,t) = M(x,u,w,z,t) = M(x,w,u,z,t) = \ldots = \dfrac{t}{t+1}$

$M(u,y,z,w,t) = M(u,y,w,z,t) = M(u,w,y,z,t) = \ldots = \dfrac{t}{t+1}$

Bu takdirde (X, M, $*$) üçlüsü FPM^3-uzaydır ancak güçlü FPM^3-uzay değildir.

Çözüm. Örnek 3.1.3. ve Örnek 3.1.12. nin çözümüne benzerdir. Güçlü FPM^3-uzay olmadığını gösterelim:

$$M(x,y,z,w,t) = \frac{t^4}{(t+2)^4} < \frac{t^4}{(t+1)^4} = \frac{t}{t+1} \cdot \frac{t}{t+1} \cdot \frac{t}{t+1} \cdot \frac{t}{t+1}$$

$$= M(x,y,z,u,t) * M(x,y,u,w,t) * M(x,u,z,w,t) * M(u,y,z,w,t)$$

Örnek 3.1.17. (X, d) 3-metrikimsi uzay ve her a, b, c, d $\in$ I için $a * b * c * d = a.b.c.d$ olsun. Herhangi x, y, z, w $\in$ X ve her $t > 0$ için $M_d : X^4 \times (0, \infty) \to [0, 1]$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$M_d(x,y,z,w,t) = \frac{t}{t + d(x,y,z,w)}$$

Bu takdirde (X, M_d,$*$) bir FPM^3-uzaydır. Aynı zamanda güçlü FPM^3-uzaydır ve bu uzay standart güçlü FPM^3-uzay olarak adlandırılır.

3.2. Stabil Fuzzy Metrikimsi Uzaylar

Tanım 3.2.1. $(X,M,*)$ bir FPM-uzay olsun. Eğer M, t sayısına bağlı değilse yani her $x, y \in X$ ve her $t > 0$ için, $M(x,y,\cdot) : (0,\infty) \to [0,1]$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise $(X,M,*)$ FPM-uzayına stabil (stationary) FPM-uzay denir ve $M(x,y,t) = M(x,y)$ ile gösterilir.

Uyarı 3.2.2. Tanımdan anlaşılacağı üzere her stabil FPM-uzay, FPM-uzaydır ancak tersi doğru değildir.

Örnek 3.2.3. Örnek 2.10. da tanımlanan,

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

standart fuzzy metrikimsi fonksiyonu için $(X, M, *)$ üçlüsü FPM-uzaydır ancak t'ye bağlı olduğundan stabil FPM-uzay değildir.

Tanım 3.2.4. (X, d) metrikimsi uzay ve her a, b $\in$ I için $a * b = a.b$ t-norm olsun. Her $x, y \in X$ ve $t = 1$ için $M_d : X \times X \times (0, \infty) \to [0, 1]$ fonksiyonu,

$$M_d(x, y, 1) = M_d(x, y) = \frac{1}{1 + d(x, y)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde (X, M_d, $*$) bir FPM-uzaydır. Aynı zamanda t'den bağımsız olduğu için stabil FPM-uzaydır. Buna özel olarak standart stabil FPM-uzay denir.

Örnek 3.2.5. Örnek 2.12. ve Örnek 3.1.6. da verilen FPM-uzayları stabil FPM-uzaydır.

Örnek 3.2.6. $X = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ve her a, b $\in$ I için $a * b = \text{maks}\{a+b-1, 0\}$ t-norm olmak üzere, her x, y $\in$ X için,

$$M(x, y, t) = \begin{cases} 1, & x = y \\ x + y, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $(X, M, *)$ stabil FPM-uzaydır.

Çözüm. Her $x, y, z \in X$ ve her $t > 0$ için,

FPM1. $M(x, y, t) > 0$

FPM2. $M(x, x, t) = 1$

FPM3. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$

$x = y$ için,

$$M(x, y, t) = 1 = M(y, x, t)$$

$x \neq y$ için,

$$M(x, y, t) = x + y = y + x = M(y, x, t)$$

FPM4. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$

$x = y = z$ için,

$$M(x, y, t) * M(y, z, s) = \text{maks}\{1 + 1 - 1, 0\} = 1 \leq 1 = M(x, z, t + s)$$

$x = y \neq z$ için,

$$M(x, y, t) * M(y, z, s) = \text{maks}\{1 + y + z - 1, 0\} = y + z \leq x + z$$
$$\leq M(x, z, t + s)$$

$x \neq y = z$ için,

$$M(x, y, t) * M(y, z, s) = \text{maks}\{x + y + 1 - 1, 0\} = x + y \leq x + z$$
$$\leq M(x, z, t + s)$$

$x = z \neq y$ için,

$$M(x, y, t) * M(y, z, s) = \text{maks}\{x + y + y + z - 1, 0\} = x + 2y + z - 1 \leq x + z$$
$$\leq M(x, z, t + s)$$

$x \neq y \neq z$ için,

$$M(x, y, t) * M(y, z, s) = \text{maks}\{x + y + y + z - 1, 0\} = x + 2y + z - 1 \leq x + z$$
$$\leq M(x, z, t + s)$$

FPM5. $M(x, y, \cdot)$ fonksiyonu sabit fonksiyondur ve sabit fonksiyonlar süreklidir.

O halde, $(X, M, *)$ üçlüsü bir FPM-uzaydır. Ayrıca M fonksiyonu t'den bağımsız olduğu için stabil FPM-uzaydır.

Teorem 3.2.7. Her stabil fuzzy metrikimsi uzay, güçlü fuzzy metrikimsi uzaydır.

İspat. (X, M, ∗) stabil FPM-uzay olsun. O halde; Tanım 3.2.1. deki şartları sağlar. Güçlü metrikimsi olduğunu göstermek için FPM-4 şartını gösterelim, diğer şartları sağlayacağı aşikardır. (X, M, ∗) stabil FPM-uzay olduğundan her $x, y, z \in X$ için,

$$M(x,z) \geq M(x,y) * M(y,z)$$

olur. $t > 0$ olmak üzere yukarıdaki ifade t'den bağımsız olduğundan bu eşitsizliği,

$$M(x,z,t) \geq M(x,y,t) * M(y,z,t)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ise M'nin güçlü metrikimsi olması demektir.

Ancak bu teoremin tersi genelde doğru değildir, yani güçlü fuzzy metrikimsi uzaylar stabil fuzzy metrikimsi uzay olmak zorunda değildir.

Örnek 3.2.8. $X = IR^{+}$ ve her $a, b \in I$ için $a * b = \min\{a, b\}$ t-norm olmak üzere her $x, y \in X$, her $t > 0$ için,

$$M(x,y,t) = \begin{cases} 1, & x = y \\ \dfrac{t}{t+1}, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $(X, M, *)$ FPM-uzay güçlüdür. Ancak stabil değildir.

Çözüm. Her $x, y, z \in X$ ve her $t > 0$ için,

FPM1. $M(x, y, t) > 0$

FPM2. $M(x, x, t) = 1$

FPM3. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$

$x = y$ iken $M(x, y, t) = 1 = M(y, x, t)$

$x \neq y$ iken $M(x,y,t) = \frac{t}{t+1} = M(y,x,t)$

FPM4. $M(x,z,t+s) \geq M(x,y,t) * M(y,z,s)$

$x = y = z$ için,

$$M(x,z,t+s) = 1 \geq 1 = \min\{1, 1\} = M(x,y,t) * M(y,z,s)$$

$x = y \neq z$ için,

$$M(x,z,t+s) = \frac{t+s}{t+s+1} \geq \frac{s}{s+1} = \min\left\{1, \frac{s}{s+1}\right\} = M(x,y,t) * M(y,z,s)$$

$x \neq y = z$ için,

$$M(x,z,t+s) = \frac{t+s}{t+s+1} \geq \frac{t}{t+1} = \min\left\{\frac{t}{t+1}, 1\right\} = M(x,y,t) * M(y,z,s)$$

$x = z \neq y$ için,

$$M(x,z,t+s) = 1 \geq \min\left\{\frac{t}{t+1}, \frac{s}{s+1}\right\} = M(x,y,t) * M(y,z,s)$$

$x \neq y \neq z$ için,

$$M(x,z,t+s) = \frac{t+s}{t+s+1} \geq \min\left\{\frac{t}{t+1}, \frac{s}{s+1}\right\} = M(x,y,t) * M(y,z,s)$$

FPM5. $t_0 > 0$ için,

$x = z$ iken,

$$\lim_{t \to t_0} M(x,z,t) = \lim_{t \to t_0} 1 = 1 = M(x,z,t_0)$$

$x \neq z$ iken,

$$\lim_{t \to t_0} M(x,z,t) = \lim_{t \to t_0} \frac{t}{t+1} = \frac{t_0}{t_0+1} = M(x,z,t_0)$$

olup M fonksiyonunun sürekli olduğu görülür. Böylece $(X, M, *)$ FPM-uzaydır. Bu uzayın güçlü FPM-uzay olması için, her $x, y, z \in X$ ve her $t > 0$ için,

$$M(x,z,t) \geq M(x,y,t) * M(y,z,t)$$

olmalıdır.

1.durum: $x = y = z$ için,

$$M(x,z,t) = 1 \geq 1 = \min\{1,1\} = M(x,y,t) * M(y,z,t)$$

2.durum: $x = y \neq z$ için,

$$M(x,z,t) = \frac{t}{t+1} \geq \frac{t}{t+1} = \min\left\{1, \frac{t}{t+1}\right\} = M(x,y,t) * M(y,z,t)$$

3.durum: $x \neq y = z$ için,

$$M(x,z,t) = \frac{t}{t+1} \geq \frac{t}{t+1} = \min\left\{\frac{t}{t+1}, 1\right\} = M(x,y,t) * M(y,z,t)$$

4.durum: $x = z \neq y$ için,

$$M(x,z,t) = 1 \geq \frac{t}{t+1} = \min\left\{\frac{t}{t+1}, \frac{t}{t+1}\right\} = M(x,y,t) * M(y,z,t)$$

5.durum: $x \neq y \neq z$ için,

$$M(x,z,t) = \frac{t}{t+1} \geq \frac{t}{t+1} = \min\left\{\frac{t}{t+1}, \frac{t}{t+1}\right\} = M(x,y,t) * M(y,z,t)$$

O halde $(X, M,*)$ güçlü FPM-uzaydır; ancak $M(x, y, t)$ fonksiyonu t'ye bağlı olduğundan stabil FPM-uzay değildir.

Teorem 3.2.9. $(X, M, *)$ FPM-uzay olsun ve $\{M_t : t \in IR^+\}$ fonksiyon ailesini aşağıdaki gibi tanımlayalım: Her $x, y \in X$ ve her $t > 0$ için,

$$M_t : X \times X \to (0, 1], \; M_t(x, y) = M(x, y, t)$$

Bu durumda, her $t \in IR^+$ olmak üzere $(X, M_t,*)$ üçlüsünün stabil FPM-uzay olması için gerekli ve yeterli koşul $(X, M, *)$ üçlüsünün güçlü FPM-uzay olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ Her $t \in IR^+$ için $(X, M_t,*)$ stabil FPM-uzay olsun. O halde Teorem 3.2.7. den her $t \in IR^+$ için $(X, M_t,*)$ güçlü FPM-uzay olur. Eğer her $x, y \in X$ ve her $t > 0$ için,

$$M(x, y, t) = M_t(x, y)$$

dersek $M(x, y, t)$ de güçlü metrikimsi olur ve dolayısıyla $(X, M,*)$ güçlü FPM-uzaydır.

$(\Leftarrow)$ $(X, M,*)$ güçlü FPM-uzay olsun. O halde $(X, M,*)$ FPM-uzaydır. Bu durumda, $M(x, y, t)$ metrikimsisinde x ile y arasındaki uzaklık t ye bağlıdır. Özel olarak her bir $t > 0$ için, $\varphi(t) : IR^+ \to (0, 1]$, $\varphi(t) = k, k \in (0, 1]$ sabit fonksiyonu (artan sürekli fonksiyon) seçersek,

$$M(x, y, t) = M(x, y, k) = M_k(x, y) = M_t(x, y)$$

olup her $t > 0$ için $M(x, y, t) = M_t(x, y)$ ile gösterirsek $M(x, y, t)$ uzaklığı t'den bağımsız olur. Böylece $(X, M,*)$ yani $(X, M_t,*)$ FPM-uzayının stabil olduğu elde edilir.

Tanım 3.2.10. $(X, M,*)$ stabil FPM-uzay olsun. Eğer her $a, b \in I$ için $a*b = \min\{a, b\}$ ise M'ye stabil fuzzy ultrametrikimsi, $(X, M,*)$ üçlüsüne de stabil fuzzy ultrametrikimsi uzay denir.

Teorem 3.2.11. M_d stabil fuzzy metrikimsinin, stabil fuzzy ultrametrikimsi olması için gerekli ve yeterli koşul d nin ultrametrikimsi olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki (X, d) ultrametrikimsi uzay olsun. Her $x, y, z \in X$, her $t > 0$ ve her $a, b \in I$ için $a * b = \min\{a, b\}$ olmak üzere,

$$M_d(x, y, t) \geq \min\{M_d(x, z, t), M_d(z, y, t)\}$$

olduğunu gösterelim:
(X, d) ultrametrikimsi uzay olduğundan,

$$d(x, y) \leq \text{maks}\{d(x, z), d(z, y)\}$$

eşitsizliğinden,

$$d(x, y) \leq d(x, z) \text{ ve } d(x, y) \leq d(z, y)$$

yazılır ve

$$\frac{1}{1 + d(x, y)} \geq \frac{1}{1 + d(x, z)} \text{ ve } \frac{1}{1 + d(x, y)} \geq \frac{1}{1 + d(z, y)}$$

$$\frac{1}{1 + d(x, y)} \geq \min\left\{\frac{1}{1 + d(x, z)}, \frac{1}{1 + d(z, y)}\right\}$$

elde edilir. Bu ifade de,

$$M_d(x, y) \geq \min\{M_d(x, z), M_d(z, y)\}$$

demektir.

Şimdi de kabul edelim ki; $(X, M_d,*)$ stabil fuzzy ultrametrikimsi uzay olsun. (X, d) nin ultrametrikimsi uzay olması için; her $x, y \in X$ ve her $t > 0$ verildiğinde,

$$d(x, y) \leq \text{maks}\{d(x, z), d(z, y)\} \tag{3.2.1}$$

olduğunu gösterelim. Stabil fuzzy ultrametrikimsi uzay tanımından,

$$M_d(x, y) \geq \min\{M_d(x, z), M_d(z, y)\}$$

$$\geq \min\left\{\frac{1}{1 + d(x, z)}, \frac{1}{1 + d(z, y)}\right\} \tag{3.2.2}$$

1.durum:

$$\frac{1}{1 + d(x, z)} \leq \frac{1}{1 + d(z, y)}$$

olsun.

$$d(z, y) \leq d(x, z) \tag{3.2.3}$$

(3.2.2) den,

$$M_d(x,y) = \frac{1}{1+d(x,y)} \geq \min\{M_d(x,z), M_d(z,y)\} = \frac{1}{1+d(x,z)}$$

$$\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) \quad \textbf{(3.2.4)}$$

(3.2.3) ve (3.2.4) den

$$d(x,y) \leq d(x,z) = \text{maks}\{d(x,z), d(z,y)\}$$

elde edilir. Bu durumda (X,d) ultrametrikimsi uzaydır.

2.durum:

$$\frac{1}{1+d(z,y)} \leq \frac{1}{1+d(x,z)}$$

olsun.

$$d(x,z) \leq d(z,y) \quad \textbf{(3.2.5)}$$

$$M_d(x,y) = \frac{1}{1+d(x,y)} \geq \min\{M_d(x,z), M_d(z,y)\} = \frac{1}{1+d(z,y)}$$

$$\Rightarrow d(x,y) \leq d(z,y) \quad \textbf{(3.2.6)}$$

(3.2.5) ve (3.2.6) dan,

$$d(x,y) \leq d(z,y) = \text{maks}\{d(z,y), d(x,z)\}.$$

Böylece (X,d) ultrametrikimsi uzaydır.

Tanım 3.2.12. $(X, M, *)$ FPM^2-uzay olsun. Eğer M, t sayısına bağlı değilse yani her $x, y, z \in X$ ve her $t > 0$ için $M(x, y, z, \cdot) : (0, \infty) \to [0, 1]$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise; $(X, M, *)$ FPM^2-uzayına stabil (stationary) FPM^2-uzay denir ve $M(x, y, z, t) = M(x, y, z)$ ile gösterilir.

Uyarı 3.2.13. Tanımdan anlaşılacağı üzere her stabil FPM^2-uzay, FPM^2-uzaydır ancak tersi doğru değildir.

Örnek 3.2.14. Örnek 2.20. de verilen

$$M_d(x,y,z,t) = \frac{t}{t+d(x,y,z)}$$

fuzzy 2-metrikimsisi için (X, M, $*$) üçlüsü FPM^2-uzaydır ancak t'ye bağlı olduğundan stabil FPM^2-uzay değildir.

Tanım 3.2.15. (X, d) 2-metrikimsi uzay ve her a,b,c $\in$ I için $a * b * c = a.b.c$ t-norm olsun. Her x, y, z $\in$ X ve t = 1 için $M_d : X \times X \times X \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu,

$$M_d(x, y, z, 1) = M_d(x, y, z) = \frac{1}{1 + d(x, y, z)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde (X, M_d, $*$) bir FPM^2-uzaydır. Aynı zamanda t'den bağımsız olduğu için stabil FPM^2-uzaydır. Buna özel olarak standart stabil FPM^2-uzay denir.

Tanım 3.2.16. (X, M, $*$) FPM^3-uzay olsun. Eğer M, t sayısına bağlı değilse yani her x, y, z, w $\in$ X ve her t > 0 için $M(x, y, z, w, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise; (X, M, $*$) FPM^3-uzayına stabil (stationary) FPM^3-uzay denir ve

$$M(x, y, z, w, t) = M(x, y, z, w)$$

ile gösterilir.

Uyarı 3.2.17. Tanımdan anlaşılacağı üzere her stabil FPM^3-uzay, FPM^3-uzaydır; ancak tersi doğru değildir.

Örnek 3.2.18.

$$M_d(x, y, z, w, t) = \frac{t}{t + d(x, y, z, w)}$$

fuzzy 3-metrikimsisi için (X, M, $*$) üçlüsü FPM^3-uzaydır; ancak t'ye bağlı olduğundan stabil FPM^3-uzay değildir.

Tanım 3.2.19. (X, d) 3-metrikimsi uzay ve her a, b, c, d $\in$ I için $a * b * c * d = a.b.c.d$ olsun. Her x, y, z, w $\in$ X ve t = 1 için $M_d : X \times X \times X \times X \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu,

$$M_d(x, y, z, w, 1) = \frac{1}{1 + d(x, y, z, w)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde (X, M_d, $*$) bir FPM^3-uzaydır. Aynı zamanda t'den bağımsız olduğu için stabil FPM^3-uzaydır. Buna özel olarak standart stabil FPM^3-uzay denir.

4. GÜÇLÜ FUZZY ULTRAMETRİKİMSİ UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMİ

Bu bölümde, Rao, Kishore (2008) ve Sedghi, Shobe' nin (2013) makalelerini güçlü fuzzy ultrametrikimsi uzaylara genişleteceğiz.

Teorem 4.1.1. $(X, M, *)$ bir güçlü fuzzy ultrametrikimsi uzay olsun. $T, S : X \to \mathcal{K}_M(X)$ çok değerli bir dönüşüm ve $f, g : X \to X$ aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm olsun:

(a) $fg(X)$ yuvarsal tam,

(b) $\forall\, x, y \in X$, $fx \neq gy$ için,

$$H_M(Sx, Ty, t) > \min\{M(fx, gy, t), M(fx, Sx, t), M(gy, Ty, t)\},$$

(c) $fS = Sf$, $fg = gf$, $fT = Tf$, $gS = Sg$, $gT = Tg$, $ST = TS$,

(d) $S(x) \subseteq f(x)$, $T(x) \subseteq g(x)$.

Bu durumda, $fu \in Su$, $gv \in Tv$, $fu = gv$, $Su = Tv$ olacak şekilde $u, v \in X$ vardır.

İspat. $B_a = (fga; 1 - \min\{M(fga, Sga, t), M(fga, Tfa, t)\})$ kümesi fga merkezli, $1-\min\{M(fga, Sga, t), M(fga, Tfa, t)\}$ yarıçaplı kapalı yuvarı göstersin. A, tüm $a \in fg(X)$ için tüm açık yuvarların ailesi olsun. Eğer $B_b \subseteq B_a$, A kümesi üzerinde kısmi sıralı ise $B_a \leq B_b$ ilişkisi vardır. A_1, A'nın tam sıralı bir alt kümesi olsun. $fg(X)$ yuvarsal tam olduğu için,

$$\bigcap_{B_a \in A_1} B_a = B \neq \emptyset$$

olur. $b \in fg(X)$ ve $B_a \in A_1$ iken $fgb \in B$ olsun. Bu takdirde $fgb \in B_a$ dır.

$$M(fgb, fga, t) \geq 1 - \min\{M(fga, Sga, t), M(fga, Tfa, t)\} \tag{4.1.1}$$

Eğer $a = b$ olursa $B_a = B_b$ olur. Farz edelim ki $a \neq b$ olsun. $\forall\, x \in B_b$ için,

$$M(x, fgb, t) \geq 1 - \min\{M(fgb, Sgb, t), M(fgb, Tfb, t)\}$$

$Sga \neq \emptyset$ kompakt bir küme olduğu için $\exists\, p \in Sga$ için,

$$M(fga, Sga, t) = M(fga, p, t)$$

şeklindedir. Tfa $\neq \emptyset$ kompakt bir küme olduğu için $\exists$ q $\in$ Tfa için,

$M(fga, Tfa, t) = M(fga, q, t)$

şeklindedir.

$\min\{M(fgb, Sgb, t), M(fgb, Tfb, t)\}$

$= \min\{\sup_{c\in Sgb} M(fgb, Sgb, t), \sup_{d\in Tfb} M(fgb, Tfb, t)\}$

$\geq \min\{M(fgb, fga, t), M(fga, q, t), \sup_{c\in Sgb}(q, c, t), M(fgb, fga, t), M(fga, p, t), \sup_{d\in Tfb}(p, d, t)\}$

$\geq \min\{M(fgb, fga, t), M(fga, Tfa, t), H_M(Tfa, Sgb, t), M(fgb, fga, t), M(fga, Sga, t), H_M(Sga, Tfb, t)\}$

$> \min\{M(fgb, fga, t), M(fga, Tfa, t), M(fga, Sga, t), \min\{M(fgb, gfa, t), M(fgb, Sgb, t), M(gfa, Tfa, t)\}, \min\{M(fga, gfb, t), M(fga, Sga, t), M(gfb, Tfb, t)\}\}$

$\geq \min\{M(fgb,fga,t),M(fga, Tfa, t), M(fga, Sga, t), M(fgb, Sgb, t), M(fgb, Tfb,t)\}$

$\geq \min\{M(fga, Tfa, t), M(fga, Sga, t)\}$

(a), (b) ve (4.1.1) ifadelerinden yararlanılarak elde edildi. Şimdi,

$M(x, fga, t) \geq 1 - \min\{M(x, fgb, t), M(fgb, fga, t)\}$

$\geq 1 - \min\{M(fga, Sga, t), M(fga, Tfa, t)\}$

Böylece x $\in B_a$ olur. Her $B_a \in A_1$ için $B_b \subseteq B_a$ olduğunu gösterdik. B_b, A_1 ailesi için A'da bir üst sınırdır ve Zorn Lemmasından A bir maksimal elemana sahiptir; ayrıca z $\in$ fg(X), B_z. z = fgw olacak şekilde w $\in$ X vardır. Kabul edelim ki;

$f(gfgw) \notin S(gfgw), g(ffgw) \notin T(ffgw)$

olsun. Sgfgw ve Tffgw boş olmayan kompakt kümeler oldukları için,

$$M(fgfgw, Sgfgw, t) = M(fgfgw, k, t) \quad \textbf{(4.1.2)}$$

$$M(fgfgw, Tffgw, t) = M(fgfgw, l, t) \quad \textbf{(4.1.3)}$$

olacak şekilde $\exists$ k $\in$ Sgfgw, l $\in$ Tffgw elemanları vardır.

(b), (c) ve (4.1.2) eşitliğinden,

$M(Sgfgw, TSfgw, t) = \sup_{e\in TSfgw} M(gSfgw, e, t)$

$\geq \min\{M(Sgfgw, fgfgw, t), M(fgfgw, k, t), \sup_{e \in TSfgw} M(k, e, t)\}$

$\geq \min\{M(Sgfgw, fgfgw, t), H_M(Sgfgw, TSfgw, t)\}$ **(4.1.4)**

$> \min\{M(Sgfgw, fgfgw, t), \min\{M(fgfgw, gSfgw, t), M(fgfgw, Sgfgw, t), M(gSfgw, TSfgw, t)\}\}$

$> \min\{M(Sgfgw, fgfgw, t), M(gSfgw, TSfgw, t)\}$

$= M(fgfgw, Sgfgw, t).$

$M(Tffgw, STfgw, t) = \sup_{h \in STfgw} M(fTfgw, h, t)$

$\geq \min\{M(Tffgw, fgfgw, t), M(fgfgw, l, t), \sup_{h \in STfgw} M(l, h, t)\}$

$\geq \min\{M(Tffgw, fgfgw, t), H(Tffgw, STfgw, t)\}$ **(4.1.5)**

$> \min\{M(Tffgw, fgfgw, t), \min\{M(fTfgw, gffgw, t), M(fTfgw, STfgw, t), M(gffgw, Tffgw, t)\}\}$

$= M(Tffgw, fgfgw, t).$

(b), (c) ve (4.1.2)-(4.1.5) eşitliğinden,

$M(fggSw, SggSw, t) = \sup_{m \in SggSw} M(fggSw, m, t)$

$\geq \min\{M(fggSw,TSfgw,t), M(TSfgw,Tffgw,t), M(Tffgw,fgfgw,t), M(fgfgw,l, t), \sup_{m \in SggSw} M(l, m, t)\}$

$\geq \min\{M(fgfgw, Sgfgw, t), M(fgfgw, Tffgw, t), H_M(Tffgw, SgSgw, t)\}$ **(4.1.6)**

$> \min\{M(fgfgw, Sgfgw, t), M(fgfgw, Tffgw, t), \min\{M(fggSw, gffgw, t), M(fggSw, SggSw, t), M(gffgw, Tffgw, t)\}\}$

$> \min\{M(fgfgw, Sgfgw, t), M(fgfgw, Tffgw, t)\}$

$M(fgfTw, TffTw, t) = \sup_{n \in TffTw} M(fgfTw, n, t)$

$\geq \min\{M(fgfTw, STfgw, t), M(STfgw, Sgfgw, t), M(Sgfgw, fgfgw, t), M(fgfgw, k, t), \sup_{n \in TffTw} M(k, n, t)\}$

$\geq \min\{M(fgfgw, Tffgw, t), M(fgfgw, Sgfgw, t), H_M(Sgfgw, TffTw, t)\}$ **(4.1.7)**

$> \min\{M(fgfgw, Tffgw, t), M(fgfgw, Sgfgw, t), \min\{M(fgfgw, gffTwt, t), M(fgfgw, Sgfgw, t), M(gffTw, TffTw, t)\}\}$

$\geq \min\{M(fgfgw, Tffgw, t), M(fgfgw, Sgfgw,t)\}.$

(4.1.4) ve (4.1.6) eşitliğinden,

$\min\{M(Sgfgw, TSfgw, t), M(fggSw, SggSw, t)\} > \min\{M(fgfgw, Sgfgw, t), M(fgfgw, Tffgw, t)\}.$ **(4.1.8)**

(4.1.5) ve (4.1.7) eşitliğinden,

min{M(STfgw, Tffgw, t), M(fgfTw, TffTw, t)} > min{M(fgfgw, Tffgw, t), M(fgfgw, Sgfgw, t)}. **(4.1.9)**

Eğer,

min{M(fgfgw, Sgfgw, t), M(fgfgw, Tffgw, t)} = M(fgfgw, Sgfgw, t)

ise (4.1.8) eşitliğinden fgfgw $\notin B_{gSw} \Longrightarrow$ fgz $\notin B_{gSw}$. Böylece $B_z \not\subset B_{gSw}$. Bu, A'da B_z'nin maksimal olması ile çelişir. Çünkü gSw $\subseteq$ gf(X) = fg(X).

Eğer,

min{M(fgfgw, Sgfgw, t), M(fgfgw, Tffgw, t)} = M(fgfgw, Tffgw, t)

ise (4.1.9) eşitliğinden fgfgw $\notin B_{fTw} \Longrightarrow$ fgz $\notin B_{fTw}$. Böylece $B_z \not\subset B_{fTw}$. Bu, A'da B_z'nin maksimal olması ile çelişir. Çünkü fTw $\subseteq$ fg(X).

Bu yüzden,

f(gfgw) $\in$ S(gfgw), g(ffgw) $\in$ T(ffgw). **(4.1.10)**

Ek olarak,

f(gfgw) = g(ffgw).

(b), (c) ve (4.1.10) eşitliğini kullanarak,

H_M(Sgfgw, Tffgw, t) > min{M(fgfgw, gffgw, t), M(fgfgw, Sgfgw, t), M(gffgw, Tffgw, t)} = 0

Böylece,

S(gfgw) = T(ffgw).

Sonuç 4.1.2. Teorem 4.1.1. de özel olarak T, S : X → X alınırsa Sedghi ve Shobe'nin (2013) Teorem 2. elde edilir.

Sonuç 4.1.3. Teorem 4.1.1. de özel olarak f ve g birim dönüşümü alınırsa T veya S'nin bir tek sabit noktası vardır.

Sonuç 4.1.4. Teorem 4.1.1. de özel olarak S ve g birim dönüşüm alınırsa fz = Tz olacak şekilde z $\in$ X vardır. Eğer f ve T, z $\in$ X noktasının bağlantı noktası (coincidentally commuting) ise z, f ve T nin bir ortak sabit noktasıdır.

Sonuç. 4.1.5. Teorem 4.1.1. de S, g ve f birim dönüşüm alınırsa z = Tz olacak şekilde bir tek z $\in$ X vardır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında fuzzy metrikimsi uzaylar hakkında gerekli bilgiler verildikten sonra bu uzay üzerinde güçlü(strong) ve stabil(stationary) olmak üzere iki yeni sınıflandırma yapıldı ve bu iki sınıflandırma arasındaki ilişki incelenip örneklerle pekiştirildi. Daha sonra bu yapılar fuzzy 2-metrikimsi ve fuzzy 3-metrikimsi uzaylara genişletildi. Son bölümde ise Rao ve Kishore' nin (2008) ultrametrik uzaylarda yaptıkları çalışma, çoğul değerli dönüşümler için güçlü fuzzy ultrametrikimsi uzaylara genişletildi ve Sedghi ile Shobe'nin (2013) makalesi sonuç haline getirildi.

Bu tezde tanımlanan yeni kavramlarla metrikimsi ve fuzzy metrikimsi uzaylarda yapılan birçok çalışma genelleştirilebilir.

KAYNAKLAR

Ahmed, A., Singh, D., Sharma, M., Singh, N., 2010. Results on Fixed Point Theorems in Two Fuzzy Metric Spaces, Fuzzy 2-Metric Spaces Using Rational Inequality. *International Mathematical Forum.* 5(39), 1937-1949.

Deng, Z. K., 1982. Fuzzy pseduo-metric spaces. *Journal of Mathematics Analysis and Applications.* 86, 74-95.

Erceg, M. A., 1979. Metric spaces in fuzzy set theory. *Journal of Mathematics Analysis and Applications.* Volume 69, pp. 205-230.

George, A., Veeramani, P., 1994. On Some Results in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems.* 64(3), 395-399.

Grabiec, M., 1988. Fixed Points in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*. 27, 385-389.

Gregori, V., Morillas, S., Sapena, A., 2010. On A Class of Completable Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*. 161(16), 2193 – 2205.

Kaleva, O., Seikkala, S., 1984. On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems.* Volume 12, pp. 215-229.

Kramosil, O., Michalek, J., 1975. Fuzzy metric and statistical metric spaces. *Kybernetica.* Volume 11, pp. 326-334.

Kumar, S., 2008. Common Fixed Point Theorem in Fuzzy 2-Metric Spaces. *Unıversıtatea Dın Bacău Studıı Şı Cercetări Ştıınţıfice, Seria: Matematica*. 18, 111-116.

Rao, K. P. R., Kishore, G. N. V., 2008. Common Fixed Point Theorems in Ultra Metric Spaces. *Journal of Mathematics.* 40, 31-35.

Rodriguez-Lopez, J., Romaguera, S., 2004. The Hausdorff Fuzzy Metric on Compact Sets. *Fuzzy Sets Systems.* 147, 273-283.

Schweizer, B., Sklar, A., 1960. Statistical Metric Spaces. *Pacific Journal of Mathematics.* 10(1), 313 - 334.

Sedghi, S., Shobe, N., 2013. Coincidence and Fixed Point Theorems in Fuzzy Ultra-metric Spaces. *Azerbaijan Journal of Mathematics*. 3(1), 52-59.

Singhi, J., Bhardwaj, R., Agrawal S., Shrivastava R., 2010. Fixed Point Theorem in Fuzzy Metric Spaces. *International Mathematical Forum*, 5(30), 1473-1480.

Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy Sets. *Information and Control*. 8(3), 338 - 353.

Zi-ke, D., 1982. Fuzzy Pseudo Metric Spaces. *Journal of Mathematics Analysis and Applications.* 86, 74-95.

URL – 1: http://tr.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor (Ziyaret tarihi: 16 Ocak 2015).

URL– 2: http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830905119.html Frechet (Ziyaret tarihi: 16 Ocak 2015)

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Elif AYDIN

Doğum Yeri ve Tarihi: Giresun-1989

E-Posta: elif_aydin80@hotmail.com

Lisans: Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik (2008-2012)

Mesleki Deneyim: Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Araştırma Görevlisi (2014-)

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR

Aydın, E., Kütükçü, S., 2014. *On Fuzzy Pseudometric Spaces*, International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal, Bursa, Türkiye, 23-26 Haziran.