

Matris Değişkenli Dağılımlar ve Robust İstatistiksel Analize Uygulamaları

Yakup Murat BULUT

DOKTORA TEZİ
İstatistik Anabilim Dalı
Haziran 2015

**Matrix Variate Distributions and Applications in Robust Statistical
Analysis**

Yakup Murat BULUT

DOCTORAL DISSERTATION
Department of Statistics
June 2015

Matris Değişkenli Dağılımlar ve Robust İstatistiksel Analize Uygulamaları

Yakup Murat BULUT

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisans üstü Yönetmeliği Uyarınca

İstatistik Anabilim Dalı

İstatistik Teorisi Bilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Doç. Dr. Arzu ALTIN YAVUZ

Haziran 2015

ONAY

İstatistik Anabilim Dalı doktora öğrencisi Yakup Murat BULUT’ un DOKTORA TEZİ olarak hazırladığı “**Matris Değişkenli Dağılımlar ve Robust İstatistiksel Analize Uygulamaları**” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Arzu ALTIN YAVUZ

İkinci Danışman : Prof. Dr. Olcay ARSLAN

Doktora Tez Savunma Jürisi:

Üye : Prof. Dr. Olcay ARSLAN

Üye : Prof. Dr. Meral ÇETİN

Üye : Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU

Üye : Doç. Dr. Arzu ALTIN YAVUZ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mükerrerrem Bahar BAŞKIR

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hürriyet Erşahan

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Doç. Dr. Arzu Altın Yavuz ve Prof. Dr. Olcay Arslan danışmanlığında hazırlamış olduğum "Matris Değişkenli Dağılımlar ve Robust İstatistiksel Analize Uygulamaları" başlıklı doktora tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim.

30/06/2015

Yakup Murat BULUT

ÖZET

İstatistik literatürüne bakıldığında, bilgisayar dünyasındaki gelişmelere paralel olarak veri yapılarında da bir değişim ve gelişim olduğu gözlemlenmektedir. Daha önce birimlere ait tek bir değişken incelenirken, son yıllarda ise birden çok değişken incelenmeye başlanmıştır. Günümüzde ise birimlere ait birden çok değişken farklı zamanlarda veya mekanlarda incelenmeye başlanmıştır. Bu tür verileri modellemek için artık çok değişkenli dağılımlar yerine matris değişkenli dağılımlar tanımlanmak ve çok değişkenli dağılımların matris değişkenli dağılımlara genişletilmeleri yapılmak zorunda kalmıştır.

Bu tez çalışmasında genel olarak matris değişkenli dağılımlar ele alınmıştır. Literatürde varolan matris değişkenli normal dağılıma alternatif olan matris değişkenli slash dağılımı tanımlanmıştır. Dağılımsal özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Ayrıca, literatürde tanımlanmış olan fakat detayları verilmemiş olan matris değişkenli t dağılımı ele alınarak matris değişkenli normal dağılımın ölçek karması olarak yeniden tanımlanmıştır. Bu dağılımın dağılımsal özellikleri detaylı olarak incelenmiş ve literatürde olmayan bazı dağılımsal özellikleri verilmiştir. Matris değişkenli slash ve matris değişkenli t dağılımına sahip rassal matrislerin fonksiyonların beklenen değerleri ele alınmıştır. Matris değişkenli slash ve matris değişkenli t dağılımlarının parametrelerini tahmin etmek için EM algoritmaları verilmiştir. Verilen EM algoritmalarının parametre tahminlerini etkin olarak tahmin edip etmediğini kontrol etmek için simulasyon çalışmaları yapılmıştır. Önerilen matris değişkenli slash ve t dağılımı, matris değişkenli normal dağılıma alternatif olarak robust tahminler bulduğunu göstermek için, literatürde varolan matris değişkenli bir veri setini modellemede kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: EM Algoritması, Matris Değişkenli Dağılımlar, Robust Tahmin Ediciler, Parametre Tahmini,

SUMMARY

Recent statistical literatures show that parallel to the improvements in computational software, data structures have changed dramatically. Instead of considering single variables, scientists consider multivariate data. More recently, the structure of the data has changed from multivariate to matrix variate. The multivariate data for units have been considered for different time or location. Therefore, instead of having multivariate data, we have matrix variate data. Because of this data structure, the matrix variate distributions, instead of multivariate distributions, have been proposed to model this type of data. Further, many multivariate distributions are also extended to the matrix variate distributions.

In this thesis, matrix variate distributions are generally investigated. Matrix variate slash distribution is defined as an alternative to matrix variate normal distribution that is around in literature. Distributional properties of the matrix variate slash distribution are examined in detail. Furthermore, matrix variate t distribution, which exists in literature, is redefined using scale mixture of matrix variate normal distribution. Some distributional properties of matrix variate t distribution are also investigated. Some properties that is not given in literature are also obtained. Expected values of some random matrices that have matrix variate t distribution and matrix variate slash distribution are studied. EM algorithm is given to estimate parameters of matrix variate slash and matrix variate t distributions. Simulation study is performed to control whether the proposed EM algorithms correctly find the estimates of the parameters. Furthermore, a real data example is considered to evaluate the robustness of the estimators based on the proposed matrix variate slash distribution and the matrix variate t distribution.

Keywords: EM algorithm, Matrix variate distributions, Robust estimators, Parameter estimation

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca sürekli yanımda olan, bana her zaman her türlü konudaengin bilgileri ve deneyimleri ile desteklerini esirgemeyen, her konuda bana yol gösteren, her zaman örnek aldığım kıymetli danışmanlarım **Prof. Dr. Olcay ARSLAN**'a ve **Doç. Dr. Arzu ALTIN YAVUZ**'a teşekkür ederim.

Tez çalışmasında yaptıkları yorumlarla beni yönlendirerek katkı sağlayan tez izleme komitesi üyelerim **Prof. Dr. Meral ÇETİN**'e ve **Yrd. Doç. Dr. Mükerrerem Bahar BAŞKIR**'a teşekkür ederim.

Hayatıma girdiği andan beri beni her konuda destekleyen ve cesaretlendiren eşim **Yonca BULUT**'a, eğitim ve öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi katkılarını benden hiçbir zaman esirgemeyen, daima beni yüreklendiren hayattaki en büyük destekçilerim babam **Ahmet BULUT** ve annem **Nevriye BULUT**'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bu tezin her aşamasında bana manevi destek sağlayan her zaman yanımda olduklarını bildiğim değerli arkadaşlarım Arş. Gör. **Yusuf KUVVETLİ**'ye, Arş. Gör. **Talha ARSLAN**'a, Arş. Gör. **Fatma Zehra DOĞRU**'ya ve Arş. Gör. **Ebru GÜNDOĞAN**'a teşekkür ederim.

Doktora eğitimim sırasında 2211 Yurtiçi Doktora Burs Programı kapsamında verdikleri maddi desteklerle eğitimime yardımcı olan, TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na (BİDEB) ve karşılaştığım her türlü sorunda yardımlarını esirgemeyen çalışanlarına teşekkür ederim.

Y. Murat BULUT

Haziran 2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET	vi
SUMMARY	vii
TEŞEKKÜR	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xiii
 1. GİRİŞ ve AMAÇ	 1
1.1 Giriş	1
1.2 Amaç	3
 2. MATRİS DEĞİŞKENLİ NORMAL DAĞILIM	 5
2.1 Matris Değişkenli Normal Dağılımın Özellikleri	6
2.2 Matris Değişkenli Normal Dağılıma Sahip Rassal Matrislerin Fonksiyon- larının Beklenen Değerleri	9
2.3 Matris Değişkenli Normal Dağılımın Karakterizasyonu	36
2.4 Matris Değişkenli Normal Dağılımın Parametre Tahmini	40
 3. MATRİS DEĞİŞKENLİ SLASH DAĞILIM	 42
3.1 Matris Değişkenli Slash Dağılımın Özellikleri	44
3.2 Matris Değişkenli Slash Dağılıma Sahip Rassal Matrislerin Fonksiyonlarının Beklenen Değerleri	46

3.3	Matris Değişkenli Slash Dağılımın Parametre Tahmini	81
3.3.1	İteratif yeniden ağırlıklandırılmış algoritma	85
4.	MATRİS DEĞİŞKENLİ t DAĞILIMI	86
4.1	Matris Değişkenli t Dağılımının Özellikleri	88
4.2	Matris Değişkenli t Dağılımına Sahip Rassal Matrislerin Fonksiyonlarının Beklenen Değerleri	94
4.3	Matris Değişkenli t Dağılımının Parametre Tahmini	130
4.3.1	En çok olabilirlik yöntemi	130
4.3.2	EM algoritması ile parametre tahmini	132
4.3.2.1	İteratif yeniden ağırlıklandırılmış algoritma	134
5.	MONTE CARLO SİMULASYON ÇALIŞMASI	136
5.1	Matris Değişkenli Slash Dağılım	136
5.2	Matris Değişkenli t Dağılımı	138
6.	UYGULAMA	140
7.	SONUÇ VE ÖNERİLER	143
	KAYNAKLAR DİZİNİ	145

ŞEKİLLER DİZİNİ

6.1 Veriler ve tahmin edilen ortalama matrisleri	142
--	-----

ÇİZELGELER DİZİNİ

5.1	$q = 5$ için 2×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)	137
5.2	$q = 5$ için 3×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)	137
5.3	$q = 5$ için 4×4 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)	137
5.4	$q = 10$ için 2×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)	137
5.5	$q = 10$ için 3×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)	137
5.6	$q = 10$ için 4×4 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)	138
5.7	$v = 3$ serbestlik dereceli 2×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)	138
5.8	$v = 3$ serbestlik dereceli 3×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)	138
5.9	$v = 3$ serbestlik dereceli 4×4 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)	139
5.10	$v = 5$ serbestlik dereceli 2×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)	139
5.11	$v = 5$ serbestlik dereceli 3×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)	139
5.12	$v = 5$ serbestlik dereceli 4×4 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)	139
6.1	Gerçek veri için log-likelihood değerleri	140

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$ A $	A matrisinin determinantı
$\ A\ $	A matrisinin normu
$A \otimes B$	A ve B matrislerinin Kronocker çarpımı
A'	A matrisinin transpozu
$vec(A)$	A matrisinin sütunlarının alt alta dizilmesi ile elde edilen vektör
$tr(A)$	A matrisinin izi
$etr(A)$	$\exp(tr(A))$
$diag(A)$	i -inci köşegen elemanı A matrisinin i -inci köşegen elemanından oluşan matris
$\exp(a)$	e^a

Kisaltmalar

EÇÖ	En Çok Olabilirlik
b.b.a.d	Birbirinden Bağımsız Aynı Dağılımlı

Açıklama

1. GİRİŞ ve AMAÇ

1.1 Giriş

İstatistiksel dağılımlar, ekonomi, mühendislik, sosyal bilimler, sağlık bilimleri gibi bir çok uygulamalı alanda kullanılmaktadır. Gerçek hayatta elde edilen verilerin modellenmesi için istatistiksel dağılımlar sıklıkla kullanılmaktadır. Bu nedenle istatistiksel dağılımlar ve özellikleri üzerine bir çok çalışma yapılmaktadır. Bu dağılımlar arasında en sık kullanılan dağılım normal dağılımdır. Tek değişkenli ve çok değişkenli durumlarda normal dağılım ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır. Normal dağılıma dayalı istatistiksel sonuç çıkarımları sapan gözlemlere ve normalden daha kalın kuyruklu hatalara karşı hassas oldukları için son zamanlarda sapan gözlem ve/veya daha kalın kuyruğa sahip hatalar içeren veri setleri için normal dağılıma alternatif dağılımlar tanımlanmaktadır. Normal dağılıma alternatif olarak daha kalın kuyruğa sahip olarak tanımlanan dağılımlardan en popüler olanları slash ve t dağılımlarıdır. Her iki dağılımda robust istatistiksel analizlerde normal dağılıma alternatif olarak kullanılmaktadır (Arslan ve Genç, 2009; Jamshidian, 2001; Kafadar, 1982; Kafadar, 2001; Kashid ve Kulkarni, 2003; Lange vd., 1989; Morgenthaler, 1986; Roger ve Tukey, 1972). Slash ve t dağılımları normal dağılımın karması olarak elde edilebilmektedir. Bu yüzden her iki dağılımda normal dağılımlar ailesinin ölçek karması sınıfında yer almaktadır.

Son zamanlarda matris değişkenli dağılımlar üzerine çalışılmaktadır. Örneğin, Fang (1998) simetrik matris değişkenlerin asimptotik özelliklerini incelemiştir, Mathew vd. (1998) matris değişkenlerin güven bölgeleri üzerine çalışmışlardır. Bu alanda ilk çalışmalar Hsu ve Wishart tarafından yapılmıştır.

Matris değişkenli dağılımların ziraat, ekonometri, eğitim, tıp ve psikoloji gibi bir çok alanda uygulamaları yapılmaktadır. Örneğin, çok değişkenli normal teoride örneklem kovaryans matrisi ile ilgili çalışmalarda Wishart dağılımı önemli bir rol oynamaktadır. Ayrıca, rassal matrisler çok değişkenli tekrarlanan ölçümler başta olmak üzere bir çok alanda kullanılmaktadır. İstatistiksel analizde gözlemlerin bağımsızlığı koşulu sıklıkla kullanılmaktadır. Fakat pratikte bu varsayım mümkün olmayabilir. Bu tip veri setlerini analiz edebilmek için, yani verideki bağımlılık yapısını tanımlayabilmek için matris değişkenli dağılımlar kullanılabilir.

Neudecker ve Wansbeek (1987), matris değişkenli normal dağılıma sahip rassal matrislerin çarpımlarının beklenen değerleri üzerine çalışmışlardır. Hudak ve Richter (1996), matris değişkenli normal dağılıma sahip rassal matrislerin momentleri üzerine çalışmışlardır. Gupta ve Varga (1992) çalışmalarında matris değişkenli normal dağılımın koşullu dağılımlar yardımıyla karakterizasyonu üzerine çalışmışlardır. Dinh ve Nguyen (1994) rassal iki vektörün ortak normalliği üzerine çalışmışlar ve bu sonuçları matris değişkenli normal dağılımın karakterizasyonuna uygulamışlardır. Wang ve Lawoko (1994) çalışmalarında matris değişkenli normal dağılımın parametrelerinin tahmini ile ilgilenmişlerdir. Dutilleul (1999) çalışmasında matris değişkenli normal dağılımın parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik (EÇO) tahminlerini önermiştir.

Dickey (1967) çalışmasında, çok değişkenli t ve ters t dağılımlarını matris değişkenli durum için genellemiştir. Javier ve Gupta (1985) bu dağılımın özelliklerini incelemişlerdir. Kibria (2006) bu dağılımı matris değişkenli eliptik dağılımlar altında regresyon matrisi ve gelecekteki bağımlı değişkenler matrisi için uygulamıştır. Kibria (2006) yaptığı uygulamada gelecekteki regresyon matrisinin dağılımının hataların dağılımı matris değişkenli normal ve matris değişkenli t olduğu durumda değişmediğini göstermiştir. Iranmanesh vd. (2010) genelleştirilmiş matris değişkenli t dağılımını tanımlamışlardır ve bu dağılımın özel olarak Dickey (1967) tarafından tanımlanan matris değişkenli t dağılımını özel hali olarak içerdini göstermişlerdir.

Gupta ve Varga (1994), matris değişkenli eliptik dağılımların yeni bir sınıfını tanımlamışlar ve bu sınıfın bazı özelliklerini incelemişlerdir. Gupta ve Varga (1995), diğer bir çalışmalarında matris değişkenli eliptik dağılımların, matris değişkenli normal dağılımın karması olarak elde edilebileceğini göstermişlerdir.

Gupta ve Nagar (2000b) matris değişkenli Beta tip *III* dağılımını önermişlerdir. Ayrıca önerdikleri dağılımın bazı özelliklerini incelemişler ve matris değişkenli Beta tip *I* ve tip *II* dağılımları ile olan ilişkileri üzerine çalışmışlardır.

Gupta vd. (2001), Ng ve Kotz (1995) tarafından önerilen çok değişkenli Kummer-Beta ve çok değişkenli Kummer-Gamma dağılım ailelerini matris değişkenli duruma genelleştirmişlerdir.

Sanchez-Manzano vd. (2002) çalışmalarında güç üstel dağılım ailesini matris değişkenli duruma genellemiş ve bazı özelliklerini çalışmışlardır.

Bandekar ve Nagar (2003) matris değişkenli Cauchy dağılımını önermişler ve özelliklerini incelemişlerdir. Sarr ve Gupta (2011) matris değişkenli Cauchy dağılımın ölçek karması olarak yeni bir dağılım tanımlamışlardır. Ayrıca tanımladıkları dağılımın Cauchy dağılımının aksine sonlu momente sahip olduğunu göstermişlerdir.

Sanchez ve Nagar (2003) merkezi olmayan matris değişkenli Dirichlet dağılımını önermişlerdir. Önerilen dağılım matris değişkenli Beta dağılımının genelleştirilmiş halidir ve çok değişkenli istatistiksel analizdeki bir çok test problemi için kullanışlı bir dağılımdır. Örneğin, çok değişkenli normal dağılımların homojenliğinin testi için kullanılan olabilirlik oran test istatistiği Dirichlet matrislerinin bir fonksiyonudur.

Thabane ve Haq (2004) matris değişkenli genelleştirilmiş hiperbolik dağılımı tanımlamışlar ve Bayes analizinde uygulamasını vermişlerdir. Önerilen bu dağılım Dickey (1967) tarafından önerilen matris değişkenli t dağılımını özel hali olarak içermektedir.

1.2 Amaç

Tez çalışmasının amacı, literatürde var olan matris değişkenli normal dağılıma alternatif daha kalın kuyruklu dağılımlar tanımlamaktır. Tezin ilerleyen bölümleri aşağıda açıklandığı gibi düzenlenmiştir.

İkinci bölümde, matris değişkenli normal dağılım ve bu dağılımın bazı özellikleri incelenmiştir. Matris değişkenli normal dağılıma sahip rassal matrislerin fonksiyonlarının beklenen değerleri ele alınmıştır. Ayrıca matris değişkenli normal dağılımın parametre matrislerinin tahmini açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde, ölçek karması gösteriminden faydalanılarak matris değişkenli normal dağılıma alternatif olarak matris değişkenli slash dağılım tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Bölüm 2'deki sonuçlardan yararlanılarak matris değişkenli slash dağılıma sahip rassal matrislerin fonksiyonlarının beklenen değerleri incelenmiştir. Ayrıca, matris değişkenli

slash dağılımının parametrelerinin tahmini için EM algoritması yardımıyla parametre tahmin edicileri önerilmiştir.

Dördüncü bölümde, normal dağılımın bir diğer kalın kuyruklu alternatifi olan t dağılımı matris değişkenli durumda ele alınmıştır. Gupta vd. (2013) tarafından normal dağılımın ölçek karması olarak tanımlanan matris değişkenli t dağılımının bazı özellikleri incelenmiş ve daha önce elde edilmeyen bazı özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca matris değişkenli t dağılımının parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik yöntemi ve EM algoritması kullanılmıştır. Sonuç olarak iki yöntemin de birbirine denk olduğu gösterilmiştir.

Beşinci bölümde ise, ikinci ve üçüncü bölümde tanımlanan matris değişkenli slash ve matris değişkenli t dağılımlarının parametre tahmin edicilerinin iddia edildiği gibi çalıştığını göstermek için Monte Carlo simulasyon çalışması yapılmıştır.

Altıncı bölümde ise, literatürden alınmış matris değişkenli bir veri setinin parametreleri sapan gözlem olmaması ve olması durumunda matris değişkenli normal, slash ve t dağılımı ile tahmin edilmiştir.

Yedinci ve son bölümde ise sonuç ve öneriler ile tez çalışması tamamlanmıştır.

2. MATRİS DEĞİŞKENLİ NORMAL DAĞILIM

Çok değişkenli normal dağılım çok değişkenli istatistiksel analiz teorisinde çok önemli bir rol oynamaktadır. Bağımsız çok değişkenli gözlemler genellikle matrisler yardımıyla ifade edilmektedir ve bu matrisler genellikle örnek gözlem matrisi olarak bilinmektedir (Roy, 1957). Bu tip matrislerde, örneklem bağımsız çok değişkenli normal dağılımdan geldiklerinde matrisin kolonları ortak ortalama vektörleri ve kovaryans matrisleri ile bağımsız çok değişkenli normal dağılıma sahiptirler. Fakat bazı durumlarda çok değişkenli gözlemlerin bağımsızlığı koşulu sağlanmaz. Örneğin, çok değişkenli zaman serilerinde ve çok değişkenli tekrarlı ölçümlerde bu koşul sağlanmaz. Bu gibi durumlarda kolonların bağımsız olarak çok değişkenli dağılıma sahip olduğunu söyleyemeyiz. Artık kolonların ayrı ayrı dağılımlarına bakmak yerine matrisin dağılımı ile ilgilenmeliyiz (Gupta, 2000a). Bu gibi durumlarda kullanılmak üzere son zamanlarda matris değişkenli dağılımlar çalışılmaya başlanmıştır. Çok değişkenli analizde olduğu gibi matris değişkenli durumlarda da normal dağılım önemli bir rol oynamaktadır. Bu yüzden bu bölümde matris değişkenli normal dağılım incelenecektir.

Matris değişkenli normal dağılım örneklem çok değişkenli ana kitleden geldiği zaman ortaya çıkmaktadır. $x_1, \dots, x_n$, $N_p(\mu, \Sigma)$ dağılımından gelen n birimlik rassal örneklem olsun. Gözlemler matrisi

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{*'} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_p^{*'} \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edildiğinde $X' \sim N_{n,p}(\mathbf{e}\mu', I_n \otimes \Sigma)$ olur. Burada $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)'$ şeklindedir. Bu durumda gözlemlerin matrisi matris değişkenli normal dağılıma sahip olur. Matris değişkenli normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu Teorem 2.2'de verilmiştir.

Tanım 2.1 Eğer $\text{vec}(X') \sim N_{pn}(\text{vec}(M'), \Sigma \otimes \Psi)$ ise $p \times n$ boyutlu X rassal matrisi, $p \times n$ boyutlu M ortalama matrisi ve $\Sigma \otimes \Psi$ kovaryans matrisi ile matris değişkenli normal dağılıma sahiptir. Burada $\Sigma(p \times p) > 0$, $\Psi(n \times n) > 0$ dır. Matris değişkenli normal dağılım için bundan sonra $X \sim N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$ gösterimi kullanılacaktır. Burada M , ortalama matrisini, Σ , sütunlar arası varyans-kovaryans matrisini ve Ψ satırlar arası varyans-kovaryans matrisini ifade etmektedir.

Teorem 2.2 $X \sim N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$ ise X rassal matrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(X) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}np} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}n} |\Psi|^{-\frac{1}{2}p} \text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} \Sigma^{-1} (X - M) \Psi^{-1} (X - M)' \right\}, X \in R^{p \times n}, M \in R^{p \times n} \quad (2.1)$$

şeklindedir.

İspat: $\mathbf{x} = \text{vec}(X')$ ve $\mathbf{m} = \text{vec}(M')$ olsun. $\mathbf{x} \sim N_{pn}(\mathbf{m}, \Sigma \otimes \Psi)$ olduğundan olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}np} |\Sigma \otimes \Psi|^{-\frac{1}{2}} \text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} (\Sigma \otimes \Psi)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) (\mathbf{x} - \mathbf{m})' \right\}$$

şeklindedir. Kronocker çarpımına ilişkin özellikten

$$|\Sigma \otimes \Psi|^{-\frac{1}{2}} = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}n} |\Psi|^{-\frac{1}{2}p} \quad (2.2)$$

olur. Ayrıca trace fonksiyonunun özelliğinden

$$\begin{aligned} \text{tr} \left\{ -\frac{1}{2} (\Sigma \otimes \Psi)^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) (\mathbf{x} - \mathbf{m})' \right\} &= \text{tr} \left\{ -\frac{1}{2} (\Sigma^{-1} \otimes \Psi^{-1}) (\mathbf{x} - \mathbf{m}) (\mathbf{x} - \mathbf{m})' \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ -\frac{1}{2} \Sigma^{-1} (X - M) \Psi^{-1} (X - M)' \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

olur. Eşitlik 2.2 ve 2.3 kullanılırsa olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}np} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}n} |\Psi|^{-\frac{1}{2}p} \text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} \Sigma^{-1} (X - M) \Psi^{-1} (X - M)' \right\}$$

şeklinde elde edilir. $\square$

2.1 Matris Değişkenli Normal Dağılımın Özellikleri

Teorem 2.3 $X \sim N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$ ise $X' \sim N_{n,p}(M', \Psi, \Sigma)$ olur.

İspat: İspat için $\text{vec}(X)$ ile $\text{vec}(X')$ değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonlarında üstel ifadelerin eşit olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Yardımcı Teorem 2.4 kullanılarak bu eşitlik kolayca gösterilebilir. $\square$

Yardımcı Teorem 2.4 $A(p \times m), B(n \times q), C(q \times m), D(q \times n), E(m \times m)$ ve $X(m \times n)$ matrisleri için aşağıda verilen ifadeler doğrudur.

$$(i) \text{vec}(AXB) = (B' \otimes A) \text{vec}(X)$$

$$(ii) \text{tr}(CXB) = (\text{vec}(C'))' (I_q \otimes X) \text{vec}(B)$$

$$(iii) \text{tr}(DX'EXB) = (\text{vec}(X))' (D'B' \otimes E) \text{vec}(X) \\ = (\text{vec}(X))' (BD \otimes E') \text{vec}(X)$$

Matris değişkenli normal dağılımın karakteristik fonksiyonu Teorem 2.5 de verildiği gibidir.

Teorem 2.5 $X \sim N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$ ise X rassal matrisinin karakteristik fonksiyonu

$$\phi_X(Z) = \text{etr} \left(iZ'M - \frac{1}{2}Z'\Sigma Z\Psi \right) \quad (2.4)$$

şeklindedir.

İspat: $\phi_X(Z) = E[\text{etr}(iXZ')]$, $i = \sqrt{-1}$ Yardımcı Teorem 2.4 kullanılırsa $E[\exp\{i(\text{vec}(X'))' \text{vec}(Z')\}]$ elde edilir. Bu durumda $\text{vec}(X')$ rassal vektörünün karakteristik fonksiyonu ile ilgileniriz. $\text{vec}(X') \sim N_{pn}(\text{vec}(M'), \Sigma \otimes \Psi)$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\text{vec}(X')$ rassal vektörünün karakteristik fonksiyonu

$$\phi_X(Z) = \exp \left\{ i \text{vec}(M')' \text{vec}(Z') - \frac{1}{2} \text{vec}(Z')' (\Sigma \otimes \Psi) \text{vec}(Z') \right\}$$

olduğundan Yardımcı Teorem 2.4 yardımıyla X rassal matrisinin karakteristik fonksiyonu Eşitlik 2.4'de ifade edildiği gibi elde edilir. $\square$

X rassal matrisinin dağılımı matris değişkenli normal dağılım olmak üzere X matrisinin elemanlarının çarpımının beklenen değerleri Teorem 2.6'da verilmiştir.

Teorem 2.6 $X \sim N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$ ve $M = (m_{ij})$, $\Sigma = (\sigma_{ti})$ ve $\Psi = (\psi_{jk})$ olsun. Bu durumda,

$$(i) E(x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_2}) = \sigma_{i_1 i_2} \psi_{j_1 j_2} + m_{i_1 j_1} m_{i_2 j_2}$$

$$(ii) E(x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_2} x_{i_3 j_3}) = m_{i_1 j_1} \sigma_{i_2 i_3} \psi_{j_2 j_3} + m_{i_2 j_2} \sigma_{i_1 i_3} \psi_{j_1 j_3} \\ + m_{i_3 j_3} \sigma_{i_1 i_2} \psi_{j_1 j_2} + m_{i_1 j_1} m_{i_2 j_2} m_{i_3 j_3}$$

$$(iii) E(x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_2} x_{i_3 j_3} x_{i_4 j_4}) = \sigma_{i_1 i_4} \psi_{j_1 j_4} \sigma_{i_2 i_3} \psi_{j_2 j_3} + \sigma_{i_1 i_2} \psi_{j_1 j_2} \sigma_{i_4 i_3} \psi_{j_4 j_3} \\ + \sigma_{i_1 i_3} \psi_{j_1 j_3} \sigma_{i_4 i_2} \psi_{j_4 j_2} + m_{i_1 j_1} m_{i_2 j_2} \sigma_{i_4 i_3} \psi_{j_4 j_3} \\ + m_{i_1 j_1} m_{i_3 j_3} \sigma_{i_4 i_2} \psi_{j_4 j_2} + m_{i_2 j_2} m_{i_3 j_3} \sigma_{i_1 i_4} \psi_{j_1 j_4} \\ + m_{i_1 j_1} m_{i_4 j_4} \sigma_{i_2 i_3} \psi_{j_2 j_3} + m_{i_4 j_4} m_{i_2 j_2} \sigma_{i_1 i_3} \psi_{j_1 j_3} \\ + m_{i_4 j_4} m_{i_3 j_3} \sigma_{i_1 i_2} \psi_{j_1 j_2} + m_{i_1 j_1} m_{i_2 j_2} m_{i_3 j_3} m_{i_4 j_4}$$

İspat: Teorem 2.5'den X rassal matrisinin karakteristik fonksiyonu

$$\phi_X(Z) = \exp\{h(Z)\} \quad (2.5)$$

olarak elde edilmiştir. Burada

$$h(Z) = i \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n m_{ij} z_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{t=1}^p \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n z_{ij} \psi_{jk} z_{tk} \sigma_{ti} \quad (2.6)$$

ve $Z = (z_{ij})$ dir. Eşitlik 2.5'in $z_{i_1 j_1}$ değerine göre türevini alırsak

$$\frac{\partial}{\partial z_{i_1 j_1}} \phi_X(Z) = \exp\{h(Z)\} \frac{\partial}{\partial z_{i_1 j_1}} h(Z) \quad (2.7)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_{i_1 j_1}} h(Z) &= \frac{\partial}{\partial z_{i_1 j_1}} \left[i \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n m_{ij} z_{ij} - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n z_{ij}^2 \psi_{jj} \sigma_{ii} + \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n z_{ij} \psi_{jk} z_{ik} \sigma_{ii} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^p \sum_{t=1}^p \sum_{j=1}^n z_{ij} \psi_{jj} z_{tj} \sigma_{ti} + \sum_{i=1}^p \sum_{t=1}^p \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n z_{ij} \psi_{jk} z_{tk} \sigma_{ti} \right\} \right] \\ &= i m_{i_1 j_1} - \left[z_{i_1 j_1} \psi_{j_1 j_1} \sigma_{i_1 i_1} + \sum_{\substack{k=1 \\ \neq j_1}}^n \psi_{j_1 k} z_{i_1 k} \sigma_{i_1 i_1} + \sum_{\substack{t=1 \\ \neq i_1}}^p \psi_{j_1 j_1} z_{t j_1} \sigma_{t i_1} + \sum_{\substack{t=1 \\ \neq i_1}}^p \sum_{\substack{k=1 \\ \neq j_1}}^n \psi_{j_1 k} z_{t k} \sigma_{t i_1} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Eşitlik 2.8, Eşitlik 2.7'de yerine yazılırsa

$$E(x_{i_1 j_1}) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial z_{i_1 j_1}} \phi_X(Z) \Big|_{Z=0} = m_{i_1 j_1}$$

elde edilir. Şimdi Eşitlik 2.7'nin $z_{i_2 j_2}$ değişkenine göre türevini alırsak

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{i_1 j_1} \partial z_{i_2 j_2}} \phi_X(Z) = \exp\{h(Z)\} \left[\frac{\partial}{\partial z_{i_1 j_1}} h(Z) \frac{\partial}{\partial z_{i_2 j_2}} h(Z) + \frac{\partial^2}{\partial z_{i_1 j_1} \partial z_{i_2 j_2}} h(Z) \right] \quad (2.9)$$

elde edilir. Burada $\frac{\partial}{\partial z_{i_2 j_2}} h(Z)$, Eşitlik 2.8'de i_1 yerine i_2 ve j_1 yerine j_2 alınarak bulunur. Ayrıca Eşitlik 2.8'in $z_{i_2 j_2}$ değişkenine göre türevi alınır

$$\frac{\partial^2}{\partial z_{i_1 j_1} \partial z_{i_2 j_2}} h(Z) = -\sigma_{i_1 i_2} \psi_{j_1 j_2} \quad (2.10)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$E(x_{i_1 j_1} x_{i_2 j_2}) = \frac{1}{i^2} \frac{\partial^2}{\partial z_{i_1 j_1} \partial z_{i_2 j_2}} \phi_X(Z) \Big|_{Z=0} = \sigma_{i_1 i_2} \psi_{j_1 j_2} + m_{i_1 j_1} m_{i_2 j_2}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda (i) ispatlanmış olur. (ii)'nin ispatı için Eşitlik 2.9'un $z_{i_3j_3}$ değişkenine göre türevini alırsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial z_{i_1j_1} \partial z_{i_2j_2} \partial z_{i_3j_3}} \phi_X(Z) &= \exp\{h(Z)\} \left[\frac{\partial}{\partial z_{i_1j_1}} h(Z) \frac{\partial}{\partial z_{i_2j_2}} h(Z) \frac{\partial}{\partial z_{i_3j_3}} h(Z) \right. \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial z_{i_1j_1} \partial z_{i_2j_2}} h(Z) + \frac{\partial^2}{\partial z_{i_1j_1} \partial z_{i_3j_3}} h(Z) \frac{\partial}{\partial z_{i_2j_2}} h(Z) \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial z_{i_2j_2} \partial z_{i_3j_3}} h(Z) \frac{\partial}{\partial z_{i_1j_1}} h(Z) + \frac{\partial^3}{\partial z_{i_1j_1} \partial z_{i_2j_2} \partial z_{i_3j_3}} h(Z) \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

elde edilir. Eşitlik 2.10'dan

$$\frac{\partial^3}{\partial z_{i_1j_1} \partial z_{i_2j_2} \partial z_{i_3j_3}} h(Z) = 0$$

olduğu görülür. Eşitlik 2.11'de, Eşitlik 2.8 ve 2.10 yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} E(x_{i_1j_1} x_{i_2j_2} x_{i_3j_3}) &= \frac{1}{i^3} \frac{\partial^3}{\partial z_{i_1j_1} \partial z_{i_2j_2} \partial z_{i_3j_3}} \phi_X(Z) \Big|_{Z=0} \\ &= m_{i_1j_1} \sigma_{i_2i_3} \psi_{j_2j_3} + m_{i_2j_2} \sigma_{i_1i_3} \psi_{j_1j_3} + m_{i_3j_3} \sigma_{i_1i_2} \psi_{j_1j_2} + m_{i_1j_1} m_{i_2j_2} m_{i_3j_3} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda (ii) ispatlanmış olur. Aynı adımlar uygulanarak benzer şekilde (iii) ispatlanabilir. $\square$

Sonuç 2.7 $X \sim N_{p,n}(0, \Sigma, \Psi)$ olsun. Bu durumda,

$$(i) E(x_{i_1j_1} x_{i_2j_2}) = \sigma_{i_1i_2} \psi_{j_1j_2}$$

$$(ii) E(x_{i_1j_1} x_{i_2j_2} x_{i_3j_3}) = 0$$

$$\begin{aligned} (iii) E(x_{i_1j_1} x_{i_2j_2} x_{i_3j_3} x_{i_4j_4}) &= \sigma_{i_1i_4} \psi_{j_1j_4} \sigma_{i_2i_3} \psi_{j_2j_3} + \sigma_{i_1i_2} \psi_{j_1j_2} \sigma_{i_4i_3} \psi_{j_4j_3} \\ &\quad + \sigma_{i_1i_3} \psi_{j_1j_3} \sigma_{i_4i_2} \psi_{j_4j_2} \end{aligned}$$

olur.

İspat: Teorem 2.6'da $M = 0$ alırsak istenilen sonuç ispatlanmış olur. $\square$

2.2 Matris Değişkenli Normal Dağılıma Sahip Rassal Matrislerin Fonksiyonlarının Beklenen Değerleri

Matris değişkenli normal dağılıma sahip X rassal matrisinin elemanlarının beklenen değerlerinin dışında X rassal matrisinin bazı fonksiyonlarında beklenen değerleri elde edilmeye çalışılmıştır. van der Merwe (1980) yaptığı çalışmasında X rassal matrisinin iz(trace)

fonksiyonuna ilişkin bazı beklenen değerleri hesaplamıştır. van der Merve tarafından elde edilen sonuçlar Teorem 2.8’de verilmiştir. Nel (1977) ise yaptığı çalışmasında bazı matris değişkenli fonksiyonlarının beklenen değerlerini hesaplamıştır. Nel (1977) tarafından elde edilen sonuçlar Teorem 2.9, 2.10, 2.11, 2.12 ve 2.13’de verilmiştir.

Teorem 2.8 $X \sim N_{p,n}(0, \Sigma, \Psi)$, $\Sigma = (\sigma_{ij})$ ve $\Psi = (\psi_{ij})$ olsun. Bu durumda herhangi bir sabit $A(p \times n)$ matrisi ve $a = 0, 1, 2, \dots$ için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$(i) E(tr(XX')) = tr(\Sigma)tr(\Psi)$$

$$(ii) E(trXX'(AA')^a) = tr(\Sigma(AA')^a)tr(\Psi)$$

$$(iii) E(tr^2(XA')) = tr(\Sigma A \Psi A')$$

$$(iv) E(tr(XA')^2) = tr(\Sigma A \Psi A')$$

$$(v) E(tr(XA')tr(XA'(AA')^a)) = tr(\Sigma A \Psi A'(AA')^a)$$

İspat: (i) $E(tr(XX')) = E\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n x_{ij}x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n E(x_{ij}x_{ij}) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \sigma_{ii}\psi_{jj} = tr(\Sigma)tr(\Psi)$

(ii) İspata başlamadan önce $Y = X'A^\alpha$ dönüşümü yapalım. Bu durumda $Y = X'A^\alpha \sim N_{n,n}(0, \Psi, A'^\alpha \Sigma A^\alpha)$ olur. Ayrıca $A'^\alpha \Sigma A^\alpha = (\sigma_{jj}^*)$ olsun.

$$\begin{aligned} E(tr(XX'(AA')^\alpha)) &= E(tr((X'A^\alpha)(X'A^\alpha)')) = E(tr(YY')) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ij}y_{ij}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(y_{ij}y_{ij}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_{ii}\sigma_{jj}^* \\ &= tr(\Psi)tr(A'^\alpha \Sigma A^\alpha) = tr(\Psi)tr(\Sigma(AA')^\alpha) \end{aligned}$$

(iii) İspata başlamadan önce $Y = XA'$ dönüşümü yapalım. Bu durumda $Y \sim N_{p,p}(0, \Sigma, A\Psi A')$ olur. Ayrıca $A\Psi A' = (\psi_{ij}^*)$ olsun.

$$E(tr^2(XA')) = E\left(\sum_{i=1}^p y_{ii}\right)^2 = E\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p y_{ii}y_{jj}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p E(y_{ii}y_{jj}) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sigma_{ij}\psi_{ij}^* = \text{tr}(\Sigma A \Psi A')$$

$$\begin{aligned} \text{(iv)} \quad E\left(\text{tr}(XA')^2\right) &= E\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ij}x_{ij}x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ij}E(x_{ij}x_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ij}\left(\sigma_{ii}\psi_{jj}\right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \sigma_{ii}a_{ij}\psi_{jj}a_{ij} = \text{tr}(\Sigma A \Psi A') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(v)} \quad E\left(\text{tr}(XA')\text{tr}(XA'(AA')^\alpha)\right) &= E\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n x_{ij}a_{ij}x_{ij}a_{ij}a_{ij}^\alpha a_{ij}^\alpha\right) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ij}a_{ij}^\alpha a_{ij}^\alpha E(x_{ij}x_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{ij}a_{ij}^\alpha a_{ij}^\alpha \left(\sigma_{ii}\psi_{jj}\right) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \sigma_{ii}a_{ij}\psi_{jj}a_{ij}a_{ij}^\alpha a_{ij}^\alpha \\ &= \text{tr}(\Sigma A \Psi A' (AA')^\alpha) \quad \square \end{aligned}$$

Teorem 2.9 $X \sim N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$ olsun. Bu durumda,

$$\text{(i)} \quad E(X'AX) = \text{tr}(\Sigma A')\Psi + M'AM, \quad A(p \times p)$$

$$\text{(ii)} \quad E(XAX') = \text{tr}(A'\Psi)\Sigma + MAM', \quad A(n \times n)$$

$$\text{(iii)} \quad E(XAX) = \Sigma A'\Psi + MAM, \quad A(n \times p)$$

$$\text{(iv)} \quad E(\text{tr}(AX)X) = \Sigma A'\Psi + \text{tr}(AM)M, \quad A(n \times p)$$

$$\text{(v)} \quad E(\text{tr}(AX)X') = \Psi A\Sigma + \text{tr}(AM)M', \quad A(n \times p)$$

$$\text{(vi)} \quad E(\text{tr}(AX')X) = \Sigma A\Psi + \text{tr}(AM')M, \quad A(p \times n)$$

$$\text{(vii)} \quad E(\text{tr}(AX')X') = \Psi A'\Sigma + \text{tr}(AM')M', \quad A(p \times n)$$

İspat: (i) $X = (x_{ij})$ ve $A = (a_{ij})$ olsun. Bu durumda $X'AX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p x_{li} a_{lk} x_{kj}$ olur. Teorem 2.6 yardımıyla,

$$\begin{aligned}
 E(X'AX) &= E\left(\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p x_{li} a_{lk} x_{kj}\right) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_{lk} E(x_{li} x_{kj}) \\
 &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_{lk} (\sigma_{lk} \Psi_{ij} + m_{li} m_{kj}) \\
 &= \Psi_{ij} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_{lk} \sigma_{lk} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_{lk} m_{li} m_{kj} \\
 &= tr(A' \Sigma) \Psi + M' A M
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Teorem 2.3'den $X' \sim N_{n,p}(M', \Psi, \Sigma)$ olur. $X = (x_{ij})$ ve $A = (a_{ij})$ olsun.

Bu durumda XAX' matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{jl}$ olur. Teorem 2.6 yardımıyla

$$\begin{aligned}
 E(XAX') &= E\left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{jl}\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} E(x_{ik} x_{jl}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} (\sigma_{ij} \Psi_{kl} + m_{ik} m_{jl}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sigma_{ij} a_{kl} \Psi_{kl} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_{ik} a_{kl} m_{jl} \\
 &= tr(A \Psi) \Sigma + M A M'
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) XAX matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{lj}$ olur. Teorem 2.6 yardımıyla

$$\begin{aligned}
 E(XAX) &= E\left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{lj}\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} E(x_{ik} x_{lj}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} (\sigma_{il} \Psi_{kj} + m_{ik} m_{lj}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sigma_{il} a_{kl} \Psi_{kj} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lj} \\
 &= \Sigma A' \Psi + M A M
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $tr(AX)X$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $x_{ij} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl}x_{lk}$ olur. Teorem 2.6 yardımıyla

$$\begin{aligned}
 E(tr(AX)X) &= E\left(x_{ij} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl}x_{lk}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} E(x_{ij}x_{lk}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} (\sigma_{il}\psi_{jk} + m_{ij}m_{lk}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sigma_{il}a_{kl}\psi_{jk} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{ij}a_{kl}m_{lk} \\
 &= \Sigma A' \Psi + tr(AM)M
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(v) $tr(AX)X'$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $x_{ji} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl}x_{lk}$ olur. Teorem 2.6 yardımıyla

$$\begin{aligned}
 E(tr(AX)X') &= E\left(x_{ji} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl}x_{lk}\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} E(x_{ji}x_{lk}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} (\sigma_{jl}\psi_{ik} + m_{ji}m_{lk}) \\
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \psi_{ik}a_{kl}\sigma_{jl} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{ji}a_{kl}m_{lk} \\
 &= \Psi A \Sigma + tr(AM)M'
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(vi) $tr(AX')X$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $x_{ij} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{kl}x_{kl}$ olur. Teorem 2.6 yardımıyla

$$\begin{aligned}
 E(tr(AX')X) &= E\left(x_{ij} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{kl}x_{kl}\right) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{kl} E(x_{ij}x_{kl}) \\
 &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{kl} (\sigma_{ik}\psi_{jl} + m_{ij}m_{kl}) \\
 &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sigma_{ik}a_{kl}\psi_{jl} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n m_{ij}a_{kl}m_{kl} \\
 &= \Sigma A \Psi + tr(AM')M
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(vii) $tr(A'X')X'$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $x_{ij} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{kl}x_{kl}$ olur. Teorem 2.6 yardımıyla

$$\begin{aligned}
 E(tr(A'X')X) &= E\left(x_{ji} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{kl}x_{kl}\right) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{kl}E(x_{ji}x_{kl}) \\
 &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{kl}(\sigma_{jk}\psi_{il} + m_{ji}m_{kl}) \\
 &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \psi_{il}a_{kl}\sigma_{jk} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n m_{ji}a_{kl}m_{kl} \\
 &= \Psi A' \Sigma + tr(AM')M'
 \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 2.10 $X \sim N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$ olsun. Bu durumda,

- (i) $E(XAXBX) = MA\Sigma B'\Psi + \Sigma B'M'A'\Psi + \Sigma A'\Psi BM + MAMB M, A(n \times p), B(n \times p)$
- (ii) $E(X'AXBX) = M'A\Sigma B'\Psi + tr(\Sigma B'M'A')\Psi + tr(A\Sigma)\Psi BM + M'AMB M, A(p \times p), B(n \times p)$
- (iii) $E(X'AX'BX) = tr(\Sigma B')M'A\Psi + tr(AM'B\Sigma)\Psi + \Psi A'\Sigma BM + M'AM'BM, A(p \times n), B(p \times p)$
- (iv) $E(X'AXBX') = tr(B\Psi)M'A\Sigma + \Psi B'M'A'\Sigma + tr(A\Sigma)\Psi BM' + M'AMB M', A(p \times p), B(n \times n)$
- (v) $E(XAX'BX') = MA\Psi B'\Sigma + tr(AM'B\Psi)\Sigma + tr(A\Psi)\Sigma BM' + MAM'BM', A(n \times n), B(p \times n)$
- (vi) $E(X'AX'BX') = M'A\Psi B'\Sigma + \Psi B'MA'\Sigma + \Psi A'\Sigma BM' + M'AM'BM', A(p \times n), B(p \times n)$
- (vii) $E(XAX'BX) = tr(B\Sigma)MA\Psi + \Sigma B'MA'\Psi + tr(A\Psi)\Sigma BM + MAM'BM, A(n \times n), B(p \times p)$

İspat: (i) $XAXBX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{oj}$ olur. Teorem 2.6 yardımıyla

$$\begin{aligned}
E(XAXBX) &= E \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{oj} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p E(x_{ik} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{oj}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E(x_{ik} x_{lm} x_{oj}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left(m_{ik} \sigma_{lo} \Psi_{mj} + m_{lm} \sigma_{io} \Psi_{kj} + m_{oj} \sigma_{il} \Psi_{km} + m_{ik} m_{lm} m_{oj} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{ik} a_{kl} \sigma_{lo} b_{mo} \Psi_{mj} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sigma_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \Psi_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{km} b_{mo} m_{oj} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{oj} \\
&= M \Lambda \Sigma B' \Psi + \Sigma B' M' A' \Psi + \Sigma A' \Psi B M + M A M B M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $X'AXBX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{oj}$ olur. Teorem 2.6 yardımıyla

$$\begin{aligned}
E(X'AXBX) &= E \left(\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{oj} \right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E(x_{ki} x_{lm} x_{oj}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left(m_{ki} \sigma_{lo} \Psi_{mj} + m_{lm} \sigma_{ko} \Psi_{ij} + m_{oj} \sigma_{kl} \Psi_{im} + m_{ki} m_{lm} m_{oj} \right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{ki} a_{kl} \sigma_{lo} b_{mo} \Psi_{mj} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sigma_{ko} b_{mo} m_{lm} a_{kl} \Psi_{ij} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \Psi_{im} b_{mo} m_{oj} a_{kl} \sigma_{kl} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{oj} \\
&= M' A \Sigma B' \Psi + \text{tr}(\Sigma B' M' A') \Psi + \text{tr}(A \Sigma) \Psi B M + M' A M B M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $X'AX'BX$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{oj}$ olur. Teorem 2.6 yardımıyla

$$\begin{aligned}
E(X'AX'BX) &= E\left(\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{oj}\right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E(x_{ki} x_{ml} x_{oj}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left(m_{ki} \sigma_{mo} \psi_{lj} + m_{ml} \sigma_{ko} \psi_{ij} + m_{oj} \sigma_{km} \psi_{il} + m_{ki} m_{ml} m_{oj}\right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{ki} a_{kl} \psi_{lj} \sigma_{mo} b_{mo} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \psi_{ij} a_{kl} m_{ml} b_{mo} \sigma_{ko} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \psi_{il} a_{kl} \sigma_{km} b_{mo} m_{oj} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{oj} \\
&= \text{tr}(\Sigma B') M' A \Psi + \text{tr}(A M' B \Sigma) \Psi + \Psi A' \Sigma B M + M' A M' B M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $X'AXBX'$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n x_{ki} a_{kt} x_{tm} b_{mo} x_{jo}$ olur. Teorem 2.6 yardımıyla

$$\begin{aligned}
E(X'AXBX') &= E\left(\sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n x_{ki} a_{kt} x_{tm} b_{mo} x_{jo}\right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n a_{kt} b_{mo} E(x_{ki} x_{tm} x_{jo}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n a_{kt} b_{mo} \left(m_{ki} \sigma_{lj} \psi_{mo} + m_{lm} \sigma_{kj} \psi_{io} + m_{jo} \sigma_{kl} \psi_{im} + m_{ki} m_{lm} m_{jo}\right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n m_{ki} a_{kt} \sigma_{lj} b_{mo} \psi_{mo} + \sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \psi_{io} b_{mo} m_{lm} a_{kt} \sigma_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \psi_{im} b_{mo} m_{jo} a_{kt} \sigma_{kl} + \sum_{k=1}^p \sum_{t=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n m_{ki} a_{kt} m_{lm} b_{mo} m_{jo} \\
&= \text{tr}(B \Psi) M' A \Sigma + \Psi B' M' A' \Sigma + \text{tr}(A' \Sigma) \Psi B M' + M' A M B M'
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) $XAX'BX'$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{jo}$ olur. Teorem 2.6 yardımıyla

$$\begin{aligned}
E(XAX'BX') &= E\left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{jo}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E(x_{ik} x_{ml} x_{jo}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} (m_{ik} \sigma_{mj} \psi_{lo} + m_{ml} \sigma_{ij} \psi_{ko} + m_{jo} \sigma_{im} \psi_{kl} + m_{ik} m_{ml} m_{jo}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{ik} a_{kl} \psi_{lo} b_{mo} \sigma_{mj} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sigma_{ij} a_{kl} m_{ml} b_{mo} \psi_{ko} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sigma_{im} b_{mo} m_{jo} a_{kl} \psi_{kl} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{jo} \\
&= MA\Psi B'\Sigma + tr(AM'B\Psi)\Sigma + tr(A\Psi)\Sigma BM' + MAM'BM'
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vi) $X'AX'BX'$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{jo}$ olur. Teorem 2.6 yardımıyla

$$\begin{aligned}
E(X'AX'BX') &= E\left(\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{jo}\right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} b_{mo} E(x_{ki} x_{ml} x_{jo}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} b_{mo} (m_{ki} \sigma_{mj} \psi_{lo} + m_{ml} \sigma_{kj} \psi_{io} + m_{jo} \sigma_{km} \psi_{il} + m_{ik} m_{ml} m_{jo}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ki} a_{kl} \psi_{lo} b_{mo} \sigma_{mj} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \psi_{io} b_{mo} m_{ml} a_{kl} \sigma_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \psi_{il} a_{kl} \sigma_{km} b_{mo} m_{jo} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ik} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{jo} \\
&= M'A\Psi B'\Sigma + \Psi B'MA'\Sigma + \Psi A'\Sigma BM' + M'AM'BM'
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vii) $XAX'BX$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{oj}$ olur. Teorem 2.6 yardımıyla

$$\begin{aligned}
E(XAX'BX) &= E\left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{oj}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E(x_{ik} x_{ml} x_{oj}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left(m_{ik} \sigma_{mo} \psi_{lj} + m_{ml} \sigma_{io} \psi_{kj} + m_{oj} \sigma_{im} \psi_{kl} + m_{ik} m_{ml} m_{oj}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{ik} a_{kl} \psi_{lj} b_{mo} \sigma_{mo} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sigma_{io} b_{mo} m_{ml} a_{kl} \psi_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sigma_{im} b_{mo} m_{oj} a_{kl} \psi_{kl} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{oj} \\
&= tr(B\Sigma)MA\Psi + \Sigma B'MA'\Psi + tr(A\Psi)\Sigma BM + MAM'BM
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 2.11 $X \sim N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
(i) \quad E(tr(X'AXB)X) &= tr(A'\Sigma)tr(B'\Psi)M + \Sigma A'MB'\Psi + \Sigma AMB\Psi \\
&\quad + tr(M'AMB)M, A(p \times p), B(n \times n) \\
(ii) \quad E(tr(AX)XBX) &= MB\Sigma A'\Psi + \Sigma A'\Psi BM + tr(AM)\Sigma B'\Psi \\
&\quad + tr(AM)MBM, A(n \times p), B(n \times p) \\
(iii) \quad E(tr(AX)X'BX) &= M'B\Sigma A'\Psi + \Psi A\Sigma BM + tr(AM)tr(B\Sigma)\Psi \\
&\quad + tr(AM)M'BM, A(n \times p), B(p \times p)
\end{aligned}$$

İspat: (i) $tr(X'AXB)X$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{lk} a_{lm} x_{mo} b_{ok} x_{ij}$ olur.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(tr(X'AXB)X) &= E\left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{lk} a_{lm} x_{mo} b_{ok} x_{ij}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n E(x_{lk} a_{lm} x_{mo} b_{ok} x_{ij}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{lm} b_{ok} E(x_{ij} x_{lk} x_{mo}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{lm} b_{ok} \left(m_{ij} \sigma_{lm} \Psi_{ko} + m_{lk} \sigma_{im} \Psi_{jo} + m_{mo} \sigma_{il} \Psi_{jk} + m_{ij} m_{lk} m_{mo}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ij} a_{ml} \sigma_{lm} b_{ok} \Psi_{os} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \sigma_{im} a_{lm} m_{lk} b_{ok} \Psi_{jo} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \sigma_{il} a_{lm} m_{mo} b_{ok} \Psi_{jk} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ij} m_{lk} a_{lm} m_{mo} b_{ok} \\
&= tr(A'\Sigma) tr(B'\Psi) M + \Sigma A' M B' \Psi + \Sigma A M B \Psi + tr(M' A M B) M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $tr(AX)XBX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ik} b_{kl} x_{lj} a_{mo} x_{om}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)XBX) &= E\left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ik} b_{kl} x_{lj} a_{mo} x_{om}\right) \\
&= E\left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{mo} b_{kl} x_{ik} x_{lj} x_{om}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p E(a_{mo} b_{kl} x_{ik} x_{lj} x_{om}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{mo} b_{kl} E(x_{ik} x_{lj} x_{om}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{mo} b_{kl} \left(m_{ik} \sigma_{lo} \Psi_{jm} + m_{lj} \sigma_{io} \Psi_{km} + m_{om} \sigma_{il} \Psi_{kj} + m_{ik} m_{lj} m_{om}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{ik} b_{kl} \sigma_{lo} a_{mo} \Psi_{jm} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sigma_{io} a_{mo} \Psi_{km} b_{kl} m_{lj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sigma_{il} b_{kl} \Psi_{kj} a_{mo} m_{om} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{ik} b_{kl} m_{lj} a_{mo} m_{om} \\
&= MB \Sigma A' \Psi + \Sigma A' \Psi B M + tr(AM) \Sigma B' \Psi + tr(AM) M B M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $tr(AX)X'BX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{lj} a_{mo} x_{om}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 E(tr(AX)X'BX) &= E\left(\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{lj} a_{mo} x_{om}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p b_{kl} a_{mo} E(x_{ki} x_{lj} x_{om}) \\
 &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p b_{kl} a_{mo} \left(m_{ki} \sigma_{lo} \Psi_{jm} + m_{lj} \sigma_{ko} \Psi_{im} + m_{om} \sigma_{kl} \Psi_{ij} + m_{ki} m_{lj} m_{om}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{ki} b_{kl} \sigma_{lo} a_{mo} \Psi_{jm} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \Psi_{im} a_{mo} \sigma_{ko} b_{kl} m_{lj} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \Psi_{ij} b_{kl} \sigma_{kl} a_{mo} m_{om} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{ki} b_{kl} m_{lj} a_{mo} m_{om} \\
 &= M' B \Sigma A' \Psi + \Psi A \Sigma B M + tr(AM) tr(B \Sigma) \Psi + tr(AM) M' B M
 \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 2.12 $X \sim N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$ olsun. Bu durumda,

$$(i) E(XAXBXCX) = \Sigma C' \Psi B A' \Psi + \Sigma A' \Psi B \Sigma C' \Psi + tr(A \Sigma C' \Psi) \Sigma B' \Psi \\ + M A M B \Sigma C' \Psi + M A \Sigma C' M' B' \Psi + \Sigma C' M' B' M' A' \Psi \\ + M A \Sigma B' \Psi C M + \Sigma B' M' A' \Psi C M + \Sigma A' \Psi B M C M \\ + M A M B M C M, A(n \times p), B(n \times p), C(n \times p)$$

$$(ii) E(X'AXBXCX) = tr(\Sigma C' \Psi B \Sigma A') \Psi + tr(A \Sigma) \Psi B \Sigma C' \Psi + \Psi C \Sigma A' \Sigma B' \Psi \\ + M' A M B \Sigma C' \Psi + M' A \Sigma C' M' B' \Psi + tr(A M B M C \Sigma) \Psi \\ + M' A \Sigma B' \Psi C M + tr(A M B \Sigma) \Psi C M + tr(A \Sigma) \Psi B M C M \\ + M' A M B M C M, A(p \times p), B(n \times p), C(n \times p)$$

$$(iii) E(XAX'BXCX) = tr(B \Sigma) \Sigma C' \Psi A' \Psi + tr(A \Psi) \Sigma B \Sigma C' \Psi + \Sigma B' \Sigma C' \Psi A \Psi \\ + M A M' B \Sigma C' \Psi + tr(M C \Sigma B) M A \Psi + \Sigma C' M' B' M A' \Psi \\ + tr(\Sigma B) M A \Psi C M + \Sigma B' M A' \Psi C M + tr(A \Psi) \Sigma B M C M \\ + M A M' B M C M, A(n \times n), B(p \times p), C(n \times p)$$

$$(iv) E(X'AX'BXCX) = tr(\Sigma C' \Psi A') tr(B \Sigma) \Psi + \Psi A' \Sigma B \Sigma C' \Psi + \Psi C \Sigma B \Sigma A \Psi \\ + M' A M' B \Sigma C' \Psi + tr(M C \Sigma B) M' A \Psi + tr(A M' B M C \Sigma) \Psi \\ + tr(B \Sigma) M' A \Psi C M + tr(A M' B \Sigma) \Psi C M + \Psi A' \Sigma B M C M \\ + M' A M' B M C M, A(p \times n), B(p \times p), C(n \times p)$$

$$(v) E(X'AXBX'CX) = tr(\Sigma C' \Sigma A') tr(B \Psi) \Psi + tr(A \Sigma) tr(C \Sigma) \Psi B \Psi \\ + tr(A \Sigma C' \Sigma) \Psi B' \Psi + tr(\Sigma C) M' A M B \Psi \\ + M' A \Sigma C' M B' \Psi + tr(A M B M' C \Sigma) \Psi \\ + tr(B \Psi) M' A \Sigma C M + \Psi B' M' A' \Sigma C M \\ + tr(A \Sigma) \Psi B M' C M + M' A M B M' C M, \\ A(p \times p), B(n \times n), C(p \times p)$$

$$(vi) E(X'AXBXCX') = \Psi C' \Psi B \Sigma A' \Sigma + tr(A \Sigma) tr(C \Psi) \Psi B \Sigma + \Psi C \Psi B \Sigma A \Sigma \\ + tr(\Psi C) M' A M B \Sigma + tr(B M C \Psi) M' A \Sigma + \Psi C' M' B' M' A' \Sigma \\ + M' A \Sigma B' \Psi C M' + tr(\Sigma A M B) \Psi C M' + tr(A \Sigma) \Psi B M C M' \\ + M' A M B M C M', A(p \times p), B(n \times p), C(n \times n)$$

İspat: (i) $XAXBXCX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(XAXBXCX) &= E \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} E(x_{ik} x_{lm} x_{os} x_{tj}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} \left(\sigma_{it} \psi_{kj} \sigma_{lo} \psi_{ms} + \sigma_{il} \psi_{km} \sigma_{to} \psi_{js} \right. \\
&\quad + \sigma_{io} \psi_{ks} \sigma_{tl} \psi_{jm} + m_{ik} m_{lm} \sigma_{to} \psi_{js} + m_{ik} m_{os} \sigma_{tl} \psi_{jm} + m_{lm} m_{os} \sigma_{it} \psi_{kj} \\
&\quad + m_{ik} m_{tj} \sigma_{lo} \psi_{ms} + m_{tj} m_{lm} \sigma_{io} \psi_{ks} + m_{tj} m_{os} \sigma_{il} \psi_{km} + m_{ik} m_{lm} m_{os} m_{tj} \left. \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \sigma_{it} c_{ts} \psi_{sm} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \psi_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \sigma_{il} a_{lk} \psi_{km} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \sigma_{io} b_{om} \psi_{mj} a_{kl} \sigma_{lt} c_{ts} \psi_{sk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik} a_{kl} \sigma_{lt} c_{ts} m_{so} b_{om} \psi_{mj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \sigma_{it} c_{ts} m_{so} b_{om} m_{ml} a_{lk} \psi_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} \psi_{ms} c_{st} m_{tj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \sigma_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \psi_{ks} c_{st} m_{tj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \sigma_{il} a_{lk} \psi_{km} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \\
&= \Sigma C' \Psi B \Sigma A' \Psi + \Sigma A' \Psi B \Sigma C' \Psi + tr(A \Sigma C' \Psi) \Sigma B' \Psi \\
&\quad + M A M B \Sigma C' \Psi + M A \Sigma C' M' B' \Psi + \Sigma C' M' B' M' A' \Psi \\
&\quad + M A \Sigma B' \Psi C M + \Sigma B' M' A' \Psi C M + M A M B M C M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $X'AXBXCX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(X'AXBXCX) &= E\left(\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj}\right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} E(x_{ki} x_{lm} x_{os} x_{tj}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} \left(\sigma_{kt} \psi_{ij} \sigma_{lo} \psi_{ms} + \sigma_{kl} \psi_{im} \sigma_{to} \psi_{js} \right. \\
&\quad + \sigma_{ko} \psi_{is} \sigma_{tl} \psi_{jm} + m_{ki} m_{lm} \sigma_{to} \psi_{js} + m_{ki} m_{os} \sigma_{tl} \psi_{jm} + m_{lm} m_{os} \sigma_{kt} \psi_{ij} \\
&\quad \left. + m_{ki} m_{tj} \sigma_{lo} \psi_{ms} + m_{tj} m_{lm} \sigma_{ko} \psi_{is} + m_{tj} m_{os} \sigma_{kl} \psi_{im} + m_{ki} m_{lm} m_{os} m_{tj} \right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{ij} \sigma_{kt} c_{ts} \psi_{sm} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{im} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{oj} a_{kl} \sigma_{lk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{is} c_{st} \sigma_{tl} a_{lk} \sigma_{ko} b_{om} \psi_{mj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} a_{kl} \sigma_{lt} c_{ts} m_{so} b_{om} \psi_{mj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{ij} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} \sigma_{tk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} \psi_{ms} c_{st} m_{tj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{is} c_{st} m_{tj} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ok} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{im} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} a_{kl} \sigma_{lk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \\
&= tr(\Sigma C' \Psi B \Sigma A') \Psi + tr(A \Sigma) \Psi B \Sigma C' \Psi + \Psi C \Sigma A' \Sigma B' \Psi \\
&\quad + M' A M B \Sigma C' \Psi + M' A \Sigma C' M' B' \Psi + tr(A M B M C \Sigma) \Psi \\
&\quad + M' A \Sigma B' \Psi C M + tr(A M B \Sigma) \Psi C M + tr(A \Sigma) \Psi B M C M \\
&\quad + M' A M B M C M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $XAX'BXCX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(XAX'BXCX) &= E\left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} E(x_{ik} x_{ml} x_{os} x_{tj}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} \left(\sigma_{it} \psi_{kj} \sigma_{mo} \psi_{ls} + \sigma_{im} \psi_{kl} \sigma_{to} \psi_{js} \right. \\
&\quad + \sigma_{io} \psi_{ks} \sigma_{tm} \psi_{jl} + m_{ik} m_{ml} \sigma_{to} \psi_{js} + m_{ik} m_{os} \sigma_{tm} \psi_{jl} + m_{ml} m_{os} \sigma_{it} \psi_{kj} \\
&\quad + m_{ik} m_{tj} \sigma_{mo} \psi_{ls} + m_{tj} m_{ml} \sigma_{io} \psi_{ks} + m_{tj} m_{os} \sigma_{im} \psi_{kl} + m_{ik} m_{ml} m_{os} m_{tj} \left. \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \sigma_{it} c_{ts} \psi_{sl} a_{lk} \psi_{kj} b_{mo} \sigma_{om} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \sigma_{im} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} a_{kl} \psi_{lk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \sigma_{io} b_{om} \sigma_{mt} c_{ts} \psi_{sk} a_{kl} \psi_{lj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik} a_{kl} \psi_{lj} m_{os} c_{st} \sigma_{tm} b_{mo} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \sigma_{it} c_{ts} m_{so} b_{om} m_{ml} a_{lk} \psi_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik} a_{kl} \psi_{ls} c_{st} m_{tj} b_{mo} \sigma_{om} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \sigma_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \psi_{ks} c_{st} m_{tj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \sigma_{im} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} a_{kl} \psi_{lk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \\
&= tr(B\Sigma) \Sigma C' \Psi A' \Psi + tr(A\Psi) \Sigma B \Sigma C' \Psi + \Sigma B' \Sigma C' \Psi A \Psi \\
&\quad + M A M' B \Sigma C' \Psi + tr(M C \Sigma B) M A \Psi + \Sigma C' M' B' M A' \Psi \\
&\quad + tr(\Sigma B') M A \Psi C M + \Sigma B' M A' \Psi C M + tr(A \Psi) \Sigma B M C M \\
&\quad + M A M' B M C M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $X'AX'BXCX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(X'AX'BXCX) &= E\left(\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj}\right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} E(x_{ki} x_{ml} x_{os} x_{tj}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} \left(\sigma_{kt} \psi_{ij} \sigma_{mo} \psi_{ls} + \sigma_{km} \psi_{il} \sigma_{to} \psi_{js} \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{ko} \psi_{is} \sigma_{tm} \psi_{jl} + m_{ki} m_{ml} \sigma_{to} \psi_{js} + m_{ki} m_{os} \sigma_{tm} \psi_{jl} + m_{ml} m_{os} \sigma_{kt} \psi_{ij} \right. \\
&\quad \left. + m_{ki} m_{tj} \sigma_{mo} \psi_{ls} + m_{tj} m_{ml} \sigma_{ko} \psi_{is} + m_{tj} m_{os} \sigma_{km} \psi_{il} + m_{ki} m_{ml} m_{os} m_{tj} \right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{ij} \sigma_{kt} c_{ts} \psi_{sl} a_{lk} b_{mo} \sigma_{om} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{is} c_{st} \sigma_{tm} b_{mo} \sigma_{ok} a_{kl} \psi_{lj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} a_{kl} \psi_{lj} m_{os} c_{st} \sigma_{tm} b_{mo} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{ij} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} \sigma_{tk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} a_{kl} \psi_{ls} c_{st} m_{tj} b_{mo} \sigma_{om} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{is} c_{st} m_{tj} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ok} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \\
&= tr(\Sigma C' \Psi A') tr(B \Sigma) \Psi + \Psi A' \Sigma B \Sigma C' \Psi + \Psi C \Sigma B \Sigma A \Psi \\
&\quad + tr(B \Sigma) M' A \Psi C M + tr(M C \Sigma B) M' A \Psi + tr(A M' B M C \Sigma) \Psi \\
&\quad + tr(B \Sigma) M' A \Psi C M + tr(A M' B \Sigma) \Psi C M + \Psi A' \Sigma B M C M \\
&\quad + M' A M' B M C M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) $X'AXBX'CX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{so} c_{st} x_{tj}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(X'AXBX'CX) &= E\left(\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{so} c_{st} x_{tj}\right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} E(x_{ki} x_{lm} x_{so} x_{tj}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} \left(\sigma_{kt} \psi_{ij} \sigma_{ls} \psi_{mo} + \sigma_{kl} \psi_{im} \sigma_{ts} \psi_{jo} \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{ks} \psi_{io} \sigma_{tl} \psi_{jm} + m_{ki} m_{lm} \sigma_{ts} \psi_{jo} + m_{ki} m_{so} \sigma_{tl} \psi_{jm} + m_{lm} m_{so} \sigma_{kt} \psi_{ij} \right. \\
&\quad \left. + m_{ki} m_{tj} \sigma_{ls} \psi_{mo} + m_{tj} m_{lm} \sigma_{ks} \psi_{io} + m_{tj} m_{so} \sigma_{kl} \psi_{im} + m_{ki} m_{lm} m_{so} m_{tj} \right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{ij} \sigma_{kt} c_{ts} \sigma_{sl} a_{lk} b_{mo} \psi_{om} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{im} b_{mon} \psi_{oj} a_{kl} \sigma_{lk} c_{st} \sigma_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{io} b_{om} \psi_{mj} a_{kl} \sigma_{lt} c_{ts} \sigma_{sk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \psi_{oj} \sigma_{ts} c_{st} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ki} a_{kl} \sigma_{lt} c_{ts} m_{so} b_{om} \psi_{mj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{ij} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} \sigma_{tk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ki} a_{kl} \sigma_{ls} c_{st} m_{tj} b_{mo} \psi_{om} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \sigma_{ks} c_{st} m_{tj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{im} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} a_{kl} \sigma_{lk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{so} c_{st} m_{tj} \\
&= tr(\Sigma C' \Sigma A') tr(B \Psi) \Psi + tr(A \Sigma) tr(C \Sigma) \Psi B \Psi + tr(A \Sigma C' \Sigma) \Psi B' \Psi \\
&\quad + tr(\Sigma C) M' A M B \Psi + tr(\Sigma C) M' A M B \Psi + M' A \Sigma C' M B' \Psi \\
&\quad + tr(A M B M' C \Sigma) \Psi + tr(B \Psi) M' A \Sigma C M + \Psi B' M' A' \Sigma C M \\
&\quad + tr(A \Sigma) \Psi B M' C M + M' A M B M' C M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vi) $X'AXBXCX'$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{jt}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(X'AXBXCX') &= E\left(\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{jt}\right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kl} b_{mo} c_{st} E(x_{ki} x_{lm} x_{os} x_{jt}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kl} b_{mo} c_{st} (\sigma_{kj} \psi_{it} \sigma_{lo} \psi_{ms} + \sigma_{kl} \psi_{im} \sigma_{jo} \psi_{ts} \\
&\quad + \sigma_{ko} \psi_{is} \sigma_{jl} \psi_{tm} + m_{ki} m_{lm} \sigma_{jo} \psi_{ts} + m_{ki} m_{os} \sigma_{jl} \psi_{tm} + m_{lm} m_{os} \sigma_{kj} \psi_{it} \\
&\quad + m_{ki} m_{jt} \sigma_{lo} \psi_{ms} + m_{jt} m_{lm} \sigma_{ko} \psi_{is} + m_{jt} m_{os} \sigma_{kl} \psi_{im} + m_{ki} m_{lm} m_{os} m_{jt}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \psi_{it} c_{ts} \psi_{sm} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \sigma_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \psi_{im} b_{mo} \sigma_{oj} a_{kl} \sigma_{lk} c_{st} \psi_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \psi_{is} c_{st} \psi_{tm} b_{mo} \sigma_{ok} a_{kl} \sigma_{lj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{oj} \psi_{ts} c_{st} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ki} a_{kl} \sigma_{lj} b_{mo} m_{os} c_{st} \psi_{tm} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \psi_{it} c_{ts} m_{so} b_{om} m_{ml} a_{lk} \sigma_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ki} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} \psi_{ms} c_{st} m_{jt} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \psi_{is} c_{st} m_{jt} \sigma_{ok} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \psi_{im} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{jt} a_{kl} \sigma_{lk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{jt} \\
&= \Psi C' \Psi B \Sigma A' \Sigma + tr(A \Sigma) tr(C \Psi) \Psi B \Sigma + \Psi C \Psi B \Sigma A \Sigma \\
&\quad + tr(\Psi C) M' A M B \Sigma + tr(B M C \Psi) M' A \Sigma + \Psi C' M' B' M' A' \Sigma \\
&\quad + M' A \Sigma B' \Psi C M' + tr(\Sigma A M B) \Psi C M' + tr(A \Sigma) \Psi B M C M' \\
&\quad + M' A M B M C M'
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 2.13 $X \sim N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$ olsun. Bu durumda,

$$(i) E(tr(XBXCX')XA) = \Sigma^2 B' \Psi C \Psi A + tr(C \Psi) \Sigma^2 B' \Psi A + tr(\Sigma) \Sigma B' \Psi C' \Psi A \\ + tr(MB \Sigma) tr(C \Psi) MA + tr(MC \Psi B) tr(\Sigma) MA + \Sigma MBMC \Psi A \\ + tr(MC' \Psi B \Sigma) MA + \Sigma B' M' MC' \Psi A + \Sigma MC' M' B' \Psi A \\ + tr(MBMC M') MA, A(n \times n), B(n \times p), C(n \times n)$$

$$(ii) E(tr(BXCX')XAX) = \Sigma B \Sigma A' \Psi C' \Psi + tr(B \Sigma) tr(C \Psi) \Sigma A' \Psi + \Sigma B' \Sigma A' \Psi C \Psi \\ + tr(B \Sigma) tr(C \Psi) MAM + MA \Sigma BMC \Psi + \Sigma BMC \Psi AM \\ + MA \Sigma B' MC' \Psi + \Sigma B' MC' \Psi AM + tr(MC' MB') \Sigma A' \Psi \\ + tr(BMCM') MAM, A(n \times p), B(n \times p), C(n \times n)$$

$$(iii) E(tr(BXCX')X'AX) = tr(\Sigma B \Sigma A') \Psi C' \Psi + tr(A \Sigma) tr(B \Sigma) tr(C \Psi) \Psi + tr(\Sigma B' \Sigma A') \Psi C \Psi \\ + tr(B \Sigma) tr(C \Psi) M' AM + M' A \Sigma BMC \Psi + \Psi C' M' B' \Sigma AM \\ + M' A \Sigma B' MC' \Psi + \Psi CM' B \Sigma AM + tr(A \Sigma) tr(MCM' B) \Psi \\ + tr(BMCM') M' AM, A(p \times p), B(p \times p), C(n \times n)$$

$$(iv) E(tr(AX)XBXCX) = \Sigma B' \Psi C \Sigma A' \Psi + \Sigma A' \Psi B \Sigma C' \Psi + \Sigma C' \Psi A \Sigma B' \Psi \\ + tr(AM) MB \Sigma C' \Psi + tr(AM) \Sigma C' M' B' \Psi + MBMC \Sigma A' \Psi \\ + tr(MA) \Sigma B' \Psi CM + MB \Sigma A' \Psi CM + \Sigma A' \Psi BM \Psi M \\ + tr(AM) MBMCM, A(p \times p), B(n \times p), C(n \times p)$$

$$(v) E(tr(AX)X'BXCX) = tr(B \Sigma) \Psi C \Sigma A' \Psi + \Psi A \Sigma B \Sigma C' \Psi + tr(\Sigma B' \Sigma C' \Psi A) \Psi \\ + tr(MA) M' B \Sigma C' \Psi + tr(MA) tr(MC \Sigma B) \Psi + M' BMC \Psi A' \Psi \\ + tr(B \Sigma) tr(MA) \Psi CM + M' B \Sigma A' \Psi CM + \Psi A \Sigma BMC M \\ + tr(MA) M' BMC M, A(p \times p), B(p \times p), C(n \times p)$$

$$(vi) E(tr(AX)X'BX'CX) = \Psi B' \Sigma C \Sigma A' \Psi + tr(\Sigma C) \Psi A \Sigma B \Psi + tr(\Sigma C \Sigma B \Psi A) \Psi \\ + tr(MA) tr(\Sigma C) M' B \Psi + tr(MA) tr(MB' \Sigma C') \Psi \\ + M' BM' C \Sigma A' \Psi + tr(MA) \Psi B' \Sigma CM + M' B \Psi A \Sigma CM \\ + \Psi A \Sigma BMC M + tr(AM) M' BM' CM \\ A(p \times p), B(p \times p), C(p \times p)$$

$$(vii) E(tr(AX)X'BXCX') = tr(\Psi C) \Psi A \Sigma B \Sigma + tr(B \Sigma) \Psi C \Psi A \Sigma + \Psi C' \Psi A \Sigma B' \Sigma \\ + M' BMC \Psi A \Sigma + M' B \Sigma A \Psi CM' + \Psi A \Sigma BMC M' \\ + tr(\Psi C) tr(AM) M' B \Sigma + tr(AM) \Psi C' M' B' \Sigma \\ + tr(AM) tr(B \Sigma) \Psi CM' + tr(AM) M' BMC M' \\ A(n \times p), B(p \times p), C(n \times n)$$

İspat: (i) $tr(XBXCX')XA$ matrisinin (i, j) — inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ik} a_{kj} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{lt}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(tr(XBXCX')XA) &= E\left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ik} a_{kj} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{lt}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kj} b_{mo} c_{st} E(x_{ik} x_{lm} x_{os} x_{lt}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kj} b_{mo} c_{st} (\sigma_{il} \psi_{kt} \sigma_{lo} \psi_{ms} + \sigma_{il} \psi_{km} \sigma_{lo} \psi_{ts} \\
&\quad + \sigma_{io} \psi_{ks} \sigma_{ll} \psi_{tm} + m_{ik} m_{lm} \sigma_{lo} \psi_{ts} + m_{ik} m_{os} \sigma_{ll} \psi_{tm} + m_{lm} m_{os} \sigma_{il} \psi_{kt} \\
&\quad + m_{ik} m_{lt} \sigma_{lo} \psi_{ms} + m_{lt} m_{lm} \sigma_{io} \psi_{ks} + m_{lt} m_{os} \sigma_{il} \psi_{km} + m_{ik} m_{lm} m_{os} m_{lt}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sigma_{il} \sigma_{lo} b_{om} \psi_{ms} c_{st} \psi_{tk} a_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sigma_{il} \sigma_{lo} b_{om} \psi_{mk} a_{kj} c_{st} \psi_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sigma_{io} b_{om} \psi_{mt} c_{ts} \psi_{sk} a_{kj} \sigma_{ll} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ik} a_{kj} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ol} c_{st} \psi_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ik} a_{kj} m_{os} c_{st} \psi_{tm} b_{mo} \sigma_{ll} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sigma_{il} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} \psi_{tk} a_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ik} a_{kj} m_{lt} c_{ts} \psi_{sm} b_{mo} \sigma_{ol} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sigma_{io} b_{om} m_{ml} m_{lt} c_{ts} \psi_{sk} a_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sigma_{il} m_{lt} c_{ts} m_{so} b_{om} \psi_{mk} a_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ik} a_{kj} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tl} \\
&= \Sigma^2 B' \Psi C \Psi A + tr(C \Psi) \Sigma^2 B' \Psi A + tr(\Sigma) \Sigma B' \Psi C' \Psi A \\
&\quad + tr(MB \Sigma) tr(C \Psi) MA + tr(MC \Psi B) tr(\Sigma) MA + \Sigma MBMC \Psi A \\
&\quad + tr(MC' \Psi B \Sigma) MA + \Sigma B' M' MC' \Psi A + \Sigma MC' M' B' \Psi A + tr(MBMC M') MA
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $tr(BXCX')XAX$ matrisinin (i, j) — inci elemanı
 $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{lj} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{mt}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(tr(BXCX')XAX) &= E\left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{lj} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{mt}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kl} b_{mo} c_{st} E(x_{ik} x_{lj} x_{os} x_{mt}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kl} b_{mo} c_{st} \left(\sigma_{im} \Psi_{kt} \sigma_{lo} \Psi_{js} + \sigma_{il} \Psi_{kj} \sigma_{mo} \Psi_{ts} \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{io} \Psi_{ks} \sigma_{ml} \Psi_{tj} + m_{ik} m_{lj} \sigma_{mo} \Psi_{ts} + m_{ik} m_{os} \sigma_{ml} \Psi_{tj} + m_{lj} m_{os} \sigma_{im} \Psi_{kt} \right. \\
&\quad \left. + m_{ik} m_{mt} \sigma_{lo} \Psi_{js} + m_{mt} m_{lj} \sigma_{io} \Psi_{ks} + m_{mt} m_{os} \sigma_{il} \Psi_{kj} + m_{ik} m_{lj} m_{os} m_{mt} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sigma_{im} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \Psi_{kt} c_{ts} \Psi_{sj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{kj} b_{mo} \sigma_{om} c_{st} \Psi_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sigma_{io} b_{om} \sigma_{ml} a_{lk} \Psi_{ks} c_{st} \Psi_{tj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ik} a_{kl} m_{lj} b_{mo} \sigma_{om} c_{st} \Psi_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ik} a_{kl} \sigma_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} \Psi_{tj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sigma_{im} b_{mo} m_{os} c_{st} \Psi_{tk} a_{kl} m_{lj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ik} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} m_{mt} c_{ts} \Psi_{sj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sigma_{io} b_{om} m_{mt} c_{ts} \Psi_{sk} a_{kl} m_{lj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{kj} m_{mt} c_{ts} m_{so} b_{om} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ik} a_{kl} m_{lj} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tm} \\
&= \Sigma B \Sigma A' \Psi C' \Psi + tr(B \Sigma) tr(C \Psi) \Sigma A' \Psi + \Sigma B' \Sigma A' \Psi C \Psi \\
&\quad + tr(B \Sigma) tr(C \Psi) M A M + M A \Sigma B M C \Psi + \Sigma B M C \Psi A M \\
&\quad + M A \Sigma B' M C' \Psi + \Sigma B' M C' \Psi A M + tr(M C' M' B') \Sigma A' \Psi + M A M B M C M'
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $tr(BXCX')X'AX$ matrisinin (i, j) — inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{lj} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{mt}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(tr(BXCX')X'AX) &= E\left(\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{lj} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{mt}\right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kl} b_{mo} c_{st} E(x_{ki} x_{lj} x_{os} x_{mt}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kl} b_{mo} c_{st} \left(\sigma_{km} \Psi_{it} \sigma_{lo} \Psi_{js} + \sigma_{kl} \Psi_{ij} \sigma_{mo} \Psi_{ts} \right. \\
&\quad \left. + \sigma_{ko} \Psi_{is} \sigma_{ml} \Psi_{tj} + m_{ki} m_{lj} \sigma_{mo} \Psi_{ts} + m_{ki} m_{os} \sigma_{ml} \Psi_{tj} + m_{lj} m_{os} \sigma_{km} \Psi_{it} \right. \\
&\quad \left. + m_{ki} m_{mt} \sigma_{lo} \Psi_{js} + m_{mt} m_{lj} \sigma_{ko} \Psi_{is} + m_{mt} m_{os} \sigma_{kl} \Psi_{ij} + m_{ki} m_{lj} m_{os} m_{mt} \right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \Psi_{it} c_{ts} \Psi_{sj} \sigma_{km} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \Psi_{ij} a_{kl} \sigma_{lk} b_{mo} \sigma_{om} c_{st} \Psi_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \Psi_{is} c_{st} \Psi_{tj} \sigma_{ko} b_{om} \sigma_{ml} a_{lk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ki} a_{kl} m_{lj} b_{mo} \sigma_{om} c_{st} \Psi_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ki} a_{kl} \sigma_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} \Psi_{tj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \Psi_{it} c_{ts} m_{so} b_{om} \sigma_{mk} a_{kl} m_{lj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ki} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} m_{mt} c_{ts} \Psi_{sj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \Psi_{is} c_{st} m_{tm} b_{mo} \sigma_{ok} a_{kl} m_{lj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \Psi_{ij} a_{kl} \sigma_{lk} m_{os} c_{st} m_{tm} b_{mo} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ki} a_{kl} m_{lj} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tm} \\
&= tr(\Sigma B \Sigma A') \Psi C' \Psi + tr(A \Sigma) tr(B \Sigma) tr(C \Psi) \Psi + tr(\Sigma B' \Sigma A') \Psi C \Psi \\
&\quad + tr(B \Sigma) tr(C \Psi) M' A M + M' A \Sigma B M C \Psi + \Psi C' M' B' \Sigma A M + M' A \Sigma B' M C' \Psi \\
&\quad + \Psi C M' B \Sigma A M + tr(A \Sigma) tr(M C M' B) \Psi + tr(B M C M') M' A M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $tr(AX)XBXCX$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p x_{ik} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)XBXCX) &= E\left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p x_{ik} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts}\right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} E(x_{ik} x_{lm} x_{oj} x_{ts}) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} \left(\sigma_{it} \psi_{ks} \sigma_{lo} \psi_{mj} + \sigma_{il} \psi_{km} \sigma_{to} \psi_{sj} \right. \\
&\quad + \sigma_{io} \psi_{kj} \sigma_{tl} \psi_{sm} + m_{ik} m_{lm} \sigma_{to} \psi_{sj} + m_{ik} m_{oj} \sigma_{tl} \psi_{sm} + m_{lm} m_{oj} \sigma_{it} \psi_{ks} \\
&\quad + m_{ik} m_{ts} \sigma_{lo} \psi_{mj} + m_{ts} m_{lm} \sigma_{io} \psi_{kj} + m_{ts} m_{oj} \sigma_{il} \psi_{km} + m_{ik} m_{lm} m_{oj} m_{ts} \left. \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \sigma_{it} a_{ts} \psi_{sk} b_{kl} \sigma_{lo} c_{om} \psi_{mj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \sigma_{il} b_{lk} \psi_{km} c_{mo} \sigma_{ot} a_{ts} \psi_{sj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \sigma_{io} c_{om} \psi_{ms} a_{st} \sigma_{tl} b_{lk} \psi_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ik} b_{kl} m_{lm} c_{mo} \sigma_{ot} a_{ts} \psi_{sj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ik} b_{kl} \sigma_{lt} a_{ts} \psi_{sm} c_{mo} m_{oj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \sigma_{it} a_{ts} \psi_{sk} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{oj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ik} b_{kl} \sigma_{lo} c_{om} \psi_{mj} a_{st} m_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \sigma_{io} c_{om} m_{ml} b_{lk} \psi_{kj} a_{st} m_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \sigma_{il} b_{lk} \psi_{km} c_{mo} m_{oj} a_{st} m_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ik} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{oj} a_{st} m_{ts} \\
&= \Sigma A' \Psi B \Sigma C' \Psi + \Sigma B' \Psi C \Sigma A' \Psi + \Sigma C C' \Psi A \Sigma B' \Psi + M B M C \Sigma A' \Psi \\
&\quad + M B \Sigma A' \Psi C M + \Sigma A' \Psi B M C M + tr(AM) M B \Sigma C' \Psi \\
&\quad + + tr(AM) \Sigma C' M' B' \Psi + tr(AM) \Sigma B' \Psi C M + tr(AM) M B M C M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) $tr(AX)X'BXCX$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)X'BXCX) &= E\left(\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts}\right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} E(x_{ki} x_{lm} x_{oj} x_{ts}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} \left(\sigma_{kt} \psi_{is} \sigma_{lo} \psi_{mj} + \sigma_{kl} \psi_{im} \sigma_{to} \psi_{sj} \right. \\
&\quad + \sigma_{ko} \psi_{ij} \sigma_{tl} \psi_{sm} + m_{ki} m_{lm} \sigma_{to} \psi_{sj} + m_{ki} m_{oj} \sigma_{tl} \psi_{sm} + m_{lm} m_{oj} \sigma_{kt} \psi_{is} \\
&\quad \left. + m_{ki} m_{ts} \sigma_{lo} \psi_{mj} + m_{ts} m_{lm} \sigma_{ko} \psi_{ij} + m_{ts} m_{oj} \sigma_{kl} \psi_{im} + m_{ki} m_{lm} m_{oj} m_{ts} \right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{is} a_{st} \sigma_{tk} b_{kl} \sigma_{lo} c_{om} \psi_{mj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{im} c_{mo} \sigma_{ot} a_{ts} \psi_{sj} b_{kl} \sigma_{lk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{ij} \sigma_{tl} b_{lk} \sigma_{ko} c_{om} \psi_{ms} a_{st} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} m_{lm} c_{mo} \sigma_{ot} a_{ts} \psi_{sj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} \sigma_{lt} a_{ts} \psi_{sm} c_{mo} m_{oj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{is} a_{st} \sigma_{tk} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{oj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} \sigma_{lo} c_{om} \psi_{mj} a_{st} m_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{ij} m_{ts} a_{st} m_{lm} c_{mo} \sigma_{ok} b_{kl} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{im} c_{mo} m_{oj} a_{st} m_{ts} b_{kl} \sigma_{lk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{oj} m_{ts} a_{st} \\
&= \Psi A \Sigma B \Sigma C' \Psi + tr(B \Sigma) \Psi C \Sigma A' \Psi + tr(\Sigma B' \Sigma C' \Psi A) \Psi + M' B M C \Sigma A' \Psi \\
&\quad + M' B \Sigma A' \Psi C M + \Psi A \Sigma B M C M + tr(A M) M' B \Sigma C' \Psi \\
&\quad + tr(M A) tr(M C \Sigma B) \Psi + tr(B \Sigma) tr(A M) \Psi C M + tr(M A) M' B M C M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vi) $tr(AX)X'BX'CX$ matrisinin (i, j) — inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{ml} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)X'BX'CX) &= E\left(\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{ml} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts}\right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} E(x_{ki} x_{ml} x_{oj} x_{ts}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} \left(\sigma_{kt} \psi_{is} \sigma_{mo} \psi_{lj} + \sigma_{km} \psi_{il} \sigma_{to} \psi_{sj} \right. \\
&\quad + \sigma_{ko} \psi_{ij} \sigma_{tm} \psi_{sl} + m_{ki} m_{ml} \sigma_{to} \psi_{sj} + m_{ki} m_{oj} \sigma_{tm} \psi_{sl} + m_{ml} m_{oj} \sigma_{kt} \psi_{is} \\
&\quad + m_{ki} m_{ts} \sigma_{mo} \psi_{lj} + m_{ts} m_{ml} \sigma_{ko} \psi_{ij} + m_{ts} m_{oj} \sigma_{km} \psi_{il} + m_{ki} m_{ml} m_{oj} m_{ts} \left. \right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{is} a_{st} \sigma_{tk} b_{kl} \psi_{lj} c_{mo} \sigma_{om} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{il} b_{lk} \sigma_{km} c_{mo} \sigma_{ot} a_{ts} \psi_{sj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{ij} \sigma_{tm} c_{mo} \sigma_{ok} b_{kl} \psi_{ls} a_{st} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} m_{lm} c_{mo} \sigma_{ot} a_{ts} \psi_{sj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} \psi_{ls} a_{st} \sigma_{tm} c_{mo} m_{oj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{is} a_{st} \sigma_{tk} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{oj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} \psi_{lj} m_{ts} a_{st} c_{mo} \sigma_{om} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{ij} m_{ts} a_{st} m_{ml} b_{lk} \sigma_{ko} c_{om} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \psi_{il} b_{lk} \sigma_{km} c_{mo} m_{oj} a_{st} m_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{oj} a_{st} m_{ts} \\
&= tr(C\Sigma) \Psi A \Sigma B \Psi + \Psi B' \Sigma C \Sigma A' \Psi + tr(\Sigma C \Sigma B \Psi A) \Psi + M' B M' C \Sigma A' \Psi \\
&\quad + M' B \Psi A \Sigma C M + \Psi A \Sigma B M' C M + tr(MA) tr(C\Sigma) M' B \Psi \\
&\quad + tr(MA) tr(MB' \Sigma C') \Psi + tr(AM) \Psi B' \Sigma C M + tr(AM) M' B M' C M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vii) $tr(AX)X'BXCX'$ matrisinin (i, j) — inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{jo} a_{st} x_{ts}$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)X'BXCX') &= E\left(\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{jo} a_{st} x_{ts}\right) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} E(x_{ki} x_{lm} x_{jo} x_{ts}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} (\sigma_{kt} \psi_{is} \sigma_{lj} \psi_{mo} + \sigma_{kl} \psi_{im} \sigma_{tj} \psi_{so} \\
&\quad + \sigma_{kj} \psi_{io} \sigma_{tl} \psi_{sm} + m_{ki} m_{lm} \sigma_{tj} \psi_{so} + m_{ki} m_{jo} \sigma_{tl} \psi_{sm} + m_{lm} m_{jo} \sigma_{kt} \psi_{is} \\
&\quad + m_{ki} m_{ts} \sigma_{lj} \psi_{mo} + m_{ts} m_{lm} \sigma_{kj} \psi_{io} + m_{ts} m_{jo} \sigma_{kl} \psi_{im} + m_{ki} m_{lm} m_{jo} m_{ts}) \\
&= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{is} a_{st} \sigma_{tk} b_{kl} \sigma_{lj} c_{mo} \psi_{om} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{im} c_{mo} \psi_{os} a_{st} \sigma_{tj} b_{kl} \sigma_{lk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{io} c_{om} \psi_{ms} a_{st} \sigma_{tl} b_{lk} \sigma_{kj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} m_{lm} c_{mo} \psi_{os} a_{st} \sigma_{tj} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} \sigma_{lt} a_{ts} \psi_{sm} c_{mo} m_{jo} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{is} a_{st} \sigma_{tk} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{jo} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} \sigma_{lj} c_{mo} \psi_{om} a_{st} m_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{io} c_{om} m_{ml} b_{lk} \sigma_{kj} a_{st} m_{ts} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p \psi_{im} c_{mo} m_{jo} a_{st} m_{ts} b_{kl} \sigma_{lk} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{jo} a_{st} m_{ts} \\
&= tr(C\Psi) \Psi A \Sigma B \Sigma + tr(B \Sigma) \Psi C \Psi A \Sigma + \Psi C' \Psi A \Sigma B' \Sigma + M' B M C \Psi A \Sigma \\
&\quad + M' B \Sigma A' \Psi C M' + \Psi A \Sigma B M C M' + tr(C \Psi) tr(A M) M' B \Sigma \\
&\quad + tr(A M) \Psi C' M' B' \Sigma + tr(A M) tr(B \Sigma) \Psi C M' + tr(A M) M' B M C M'
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

van der Merwe (1980) ve Nel (1977) dışında Neudecker ve Wansbeek (1987), von Rosen (1988) ve Hudak ve Richter (1996) matris değişkenli fonksiyonların beklenen değerlerine ilişkin çalışmalar yapmışlardır.

2.3 Matris Değişkenli Normal Dağılımın Karakterizasyonu

Son yıllarda, çok değişkenli normal dağılımın koşullu olasılık dağılımları yardımıyla karakterizasyonu üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Brucker (1979), Ahsanullah (1985), Fraser ve Streit (1980) yaptıkları çalışmalarında iki değişkenli normal dağılıma ilişkin bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Castillo ve Galambos (1989), Brucker (1979) ve Ahsanullah (1985) tarafından yapılan çalışmalardan faydalanarak iki değişkenli normal dağılım için karakterizasyonun birleştirilmiş bir genelleştirmesini yapmıştır. Fakat, Hamedani (1988), daha sonra, Arnold ve Pourahmadi (1988) bu varsayıma karşı örnekler vermişlerdir ve çok değişkenli normal dağılım için koşullu normalliğe dayanan farklı bir karakterizasyon önermişlerdir. Khatri (1976) regresyon sayesinde çok değişkenli normal dağılımın karakterizasyonunu önermiştir.

Gupta ve Varga (1992) ise çalışmalarında çok değişkenli normal dağılım ile ilgili olan bu sonuçları matris değişkenli normal dağılıma genellemişlerdir. Ayrıca Gupta ve Varga (1992), iki matrisin birbirlerine göre koşullu olasılıkları yardımıyla ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun matris değişkenli normal dağılıma sahip olduğunu göstermişlerdir. Bunu gösterebilmek için aşağıda verilen yardımcı teoreme ihtiyaç duymuşlardır.

Yardımcı Teorem 2.14 $X \in R^{p \times n}$ ve $Y \in R^{q \times m}$ ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları $f(X, Y)$ olan iki rassal matris olsun. $g_1(X)$ ve $g_2(Y)$ marjinal fonksiyonları, $h_1(X|Y)$ ve $h_2(Y|X)$ koşullu olasılık fonksiyonları olsun. Ayrıca her $X \in R^{p \times n}$ ve $Y \in R^{q \times m}$ değeri için $f(X, Y), g_1(X), g_2(Y), h_1(X|Y)$ ve $h_2(Y|X)$ fonksiyonlarının tanımlandığını varsayalım. Öyle bir $Y_0 \in R^{q \times m}$ değeri vardır ki her $X \in R^{p \times n}$ değeri için $h_2(Y_0|X) \neq 0$ olur. Bu durumda

$$f(X, Y) = k \frac{h_2(Y|X) h_1(X|Y_0)}{h_2(Y_0|X)} \quad (2.12)$$

olur. Burada, k sabit bir sayıdır.

İspat: $k = g_2(Y_0)$ olsun. Bu durumda

$$k \frac{h_2(Y|X) h_1(X|Y_0)}{h_2(Y_0|X)} = g_2(Y_0) \frac{(f(X, Y) / g_1(X)) (f(X, Y_0) / g_2(Y_0))}{(f(X, Y_0) / g_1(X))} = f(X, Y)$$

olduğu gösterilir. $\square$

Teorem 2.15 $X, p \times n$ tipinde ve $Y, q \times n$ tipinde rassal matrisler olsun. $Y|X \sim N_{q,n}(C + DX, \Sigma_2, \Phi)$ ve $X|Y = Y_0 \sim N_{p,n}(M, \Sigma_1, \Phi)$ olduğunu varsayalım, burada, $C; q \times n$, $D; q \times p$, $\Sigma_2; q \times q$, $\Phi, n \times n$, $M; p \times n$, $\Sigma_1; p \times p$, $\Sigma_1 > 0, \Sigma_2 > 0, \Phi > 0$ ve $Y_0; n \times q$ tipinde sabit bir matristir. $B = \Sigma_1 D' \Sigma_2^{-1}$ ve $A = M - \Sigma_1 D' \Sigma_2^{-1} Y_0$ olarak tanımlayalım. Bu durumda,

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_{p+q,n} \left(\begin{pmatrix} (I_p - BD)^{-1} (A + BC) \\ (I_q - DB)^{-1} (C + DA) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (I_p - BD)^{-1} \Sigma_1 (I_p - BD)^{-1} B \Sigma_2 \\ D (I_p - BD)^{-1} \Sigma_1 (I_q - DB)^{-1} \Sigma_2 \end{pmatrix} \otimes \Phi \right) \quad (2.13)$$

olur.

İspat: $f(X, Y)$, X ve Y rassal matrislerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $g_1(X)$, X rassal matrisinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu, $g_2(Y)$, Y rassal matrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu, $h_1(X|Y_0)$ ve $h_2(Y|X)$ koşulu olasılık yoğunluk fonksiyonları olsun. İspat süresince k sayısı sabit bir sayı olarak düşünülecektir. Yukarıda verilen Yardımcı Teorem 2.14 kullanılarak

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= k \frac{\left(\text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} (Y - (C + DX))' \Sigma_2^{-1} (Y - (C + DX)) \Phi^{-1} \right\} \right) \times \text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} (X - M)' \Sigma_1^{-1} (X - M) \Phi^{-1} \right\}}{\text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} (Y_0 - (C + DX))' \Sigma_2^{-1} (Y_0 - (C + DX)) \Phi^{-1} \right\}} \\ &= \text{ketr} \left\{ -\frac{1}{2} \left(X' \Sigma_1^{-1} X - 2X' \Sigma_1^{-1} Y + Y' \Sigma_2^{-1} Y - 2Y' \Sigma_2^{-1} C - 2X' D' \Sigma_2^{-1} Y \right) \Phi^{-1} \right\} \\ &= \text{ketr} \left\{ -\frac{1}{2} (Z' \Omega Z + Z' R) \Phi^{-1} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Sigma_1^{-1} & -D' \Sigma_2^{-1} \\ -\Sigma_2^{-1} D & \Sigma_2^{-1} \end{pmatrix} \text{ ve } R = \begin{pmatrix} -2\Sigma_1^{-1} A \\ -2\Sigma_2^{-1} C \end{pmatrix}$$

olur. $f(X, Y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu olduğundan simetrik Ω matrisi pozitif tanımlı olmalı yani singüler olmayan bir matris olmalıdır. Bu yüzden

$$f(Z) = \text{ketr} \left\{ -\frac{1}{2} \left(Z - \left(-\frac{1}{2} \Omega^{-1} R \right) \right)' \Omega \left(Z - \left(-\frac{1}{2} \Omega^{-1} R \right) \right) \Phi \right\}$$

olacaktır. $D(I_p - BD)^{-1} = (I_q - DB)^{-1}D$ ve $B(I_q - DB)^{-1} = (I_p - BD)^{-1}B$ olduğunu biliyoruz, bunu kullanarak kolayca gösterilebilir ki

$$\Omega^{-1} = \begin{pmatrix} (I_p - BD)^{-1}\Sigma_1 & (I_p - BD)^{-1}B\Sigma_2 \\ D(I_p - BD)^{-1}\Sigma_1 & (I_q - DB)^{-1}\Sigma_2 \end{pmatrix}$$

olur. Dolayısıyla

$$-\frac{1}{2}\Omega^{-1}R = \begin{pmatrix} (I_p - BD)^{-1}(A + BC) \\ (I_q - DB)^{-1}(C + DA) \end{pmatrix}$$

olur. Bu durumda ispat tamamlanmış olur. $\square$

Sonuç 2.16 $X, p \times n$ tipinde, $Y, q \times n$ tipinde rassal matrisler olsun.

$$X|Y \sim N_{p,n}(A + BY, \Sigma_1, \Phi) \quad (2.14)$$

$$Y|X \sim N_{q,n}(C + DX, \Sigma_2, \Phi) \quad (2.15)$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\Sigma_2 B' = D\Sigma_1 \quad (2.16)$$

ve

$$\begin{aligned} Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &\sim N_{p+q,n} \left(\begin{pmatrix} (I_p - BD)^{-1}(A + BC) \\ (I_q - DB)^{-1}(C + DA) \end{pmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} (I_p - BD)^{-1}\Sigma_1 & (I_p - BD)^{-1}B\Sigma_2 \\ D(I_p - BD)^{-1}\Sigma_1 & (I_q - DB)^{-1}\Sigma_2 \end{pmatrix} \otimes \Phi \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

olur.

İspat: $Y_0 = 0$ alalım. O zaman, $X|Y = Y_0 \sim N_{p,n}(A, \Sigma_1, \Phi)$ olur. Teorem 2.15 kullanılarak Z rassal değişkeninin dağılımının 2.13 eşitliğinde verildiği gibi olduğu görülür. Eğer 2.13 eşitliğindeki B yerine $B^* = \Sigma_1 D' \Sigma_2^{-1}$ alırsak, Eşitlik 2.13 kullanılarak

$$E(X|Y) = B^*Y + A$$

elde edilir. Bu sonuç Eşitlik 2.14 ile kıyaslandığında, $B^* = B$ sonucuna varılır, dolayısıyla Eşitlik 2.17 ispatlanmış olur. $\square$

Yukarıda gösterilen karakterizasyon dışında Gupta ve Varga (1992) Teorem 2.17'de verildiği gibi karakteristik fonksiyonu kullanarak karakterizasyon yapmışlardır.

Teorem 2.17 $X, p \times n$ tipinde ve $Y, q \times n$ tipinde rassal matrisler olsun. $Y|X \sim N_{q,n}(C + DX, \Sigma_2, \Phi)$ ve $X \sim N_{p,n}(F, \Sigma_1, \Phi)$ olduğunu varsayalım. Burada, $C; q \times n, D; q \times p, \Sigma_2; q \times q, \Phi; n \times n, F; p \times n, \Sigma_1; p \times p$ tipinde matrislerdir. Ayrıca, $\Sigma_1 > 0, \Sigma_2 > 0$ ve $\Phi > 0$ 'dır. Bu durumda,

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_{p+q,n} \left(\begin{pmatrix} F \\ DF + C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_1 D' \\ D \Sigma_1 & \Sigma_2 + D \Sigma_1 D' \end{pmatrix} \otimes \Phi \right) \quad (2.18)$$

olur.

İspat: ϕ, X ve Y rassal değişkenlerinin ortak karakteristik fonksiyonu olsun. $S; p \times n$ ve $T; q \times n$ matrisleri için

$$\begin{aligned} \phi(S, T) &= E \left(\text{etr} (iS'X + iT'Y) \right) = E \left(\text{etr} (iS'X) E_{Y|X} \left(\text{etr} (iT'Y) \right) \right) \\ &= E \left(\text{etr} (i(S' + T'D)X) \right) \text{etr} \left(iCT' - \frac{1}{2} \Sigma_2 T \Phi T' \right) \\ &= \text{etr} \left\{ i(S'F + T'(C + DF)) - \frac{1}{2} ((T'(\Sigma_2 + D \Sigma_1 D')T + S' \Sigma_1 S + 2S' \Sigma_1 D' T) \Phi) \right\} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, Z rassal matrisinin dağılımı Eşitlik 2.18 de verildiği gibidir. $\square$

Gupta ve Varga (1992) çalışmalarında matris değişkenli normal dağılımın karakterizasyonunun dışında Khatri (1976) tarafından çok değişkenli normal dağılım için verilen sonuçları matris değişkenli normal dağılım için genellemişlerdir.

Nguyen (1997) çalışmasında, Ahsanullah (1985) tarafından önerilen sonuca benzer başka çok değişkenli sonuçlar önermiştir. Ayrıca bu sonuçları aynı dağılımlı satır vektörlerin oluşturduğu matris değişkenli normal dağılımın karakterizasyonu için kullanmıştır. Nguyen (1997), Ahsanullah'ın (1985) iki değişkenli durum için önerdiğine benzer bir teknik kullanmıştır ve bu tekniği matrislerle ilgili bazı sonuçlar ve reel Öklid uzayı R^n üzerindeki lineer dönüşümlerle birleştirmiştir.

Nguyen (1997) tarafından verilen karakterizasyon Teorem 2.18 ile ifade edilmiştir. Teoreme geçmeden önce teoremde kullanılacak bazı ifadelere ilişkin kısa bilgiler verelim.

$M, p \times n$ tipinde rassal bir matris olsun. M matrisinin satır vektörleri $X'_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$, $i = 1, \dots, p$ şeklinde ifade edilmiştir. $\text{vec}(M') = (X'_1, \dots, X'_p)'$ gösterimi ise $pn \times 1$ tipinde rassal bir matrisi ifade etmektedir. Eğer $\text{vec}(M')$ vektörü $\mu = (\mu'_1, \dots, \mu'_p)'$ ortalama vektörü ve $p^2 n \times$

n tipinde $(\Sigma_{i,j})$ parçalanmış matrislerden oluşan kovaryans matrisi ile pn değişkenli normal dağılıma sahip ise $p \times n$ tipindeki M matrisi, matris değişkenli normal dağılıma sahiptir.

Teorem 2.18 M , $p \times n$ tipinde rassal bir matris olsun. $X'_1, \dots, X'_p$ matrisin satır vektörleri ve $M^{(1)}$, $1 \times n$ tipinde ilk satırı içeren alt matris ve $M^{(2)}$, geri kalan $p - 1$ satırı içeren $(p - 1) \times n$ tipindeki diğer alt matris olsun. $X_1, \dots, X_p$ aynı dağılımlı olsunlar. Eğer $\text{vec}(M^{(2)'}) | \text{vec}(M^{(1)'}) = \mathbf{x}_1$, ortalama vektörü $A'\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}$ ve $\Sigma_0 = (\Sigma_{ij}^0)$ sabit pozitif tanımlı kovaryans matrisi ile $(p - 1)n$ değişkenli normal dağılıma sahip, burada, A' ; $(p - 1)n \times n$ boyutlu sabitler matrisi ve $\mathbf{b} = (b'_2, \dots, b'_p)'$; $(p - 1)n \times 1$ boyutlu sabitler vektörü, ise

- (a) $\max \{p(A_i), i = 2, \dots, p\} < 1$, $A'_2, \dots, A'_p$ sırasıyla A' matrisinin birinci n satırından, ikinci n satırından ,..., sonuncu n satırından oluşan A matrisinin alt matrisleri olsun.
- (b) $\mu = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{p-1} (A_i^j)' \mathbf{b}_i$ her $i = 2, \dots, p$ değeri için eşittir ve
- $$\Sigma_{11} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{p-1} (A_i^j)' \Sigma_{ii}^0 A_i^j, \text{ her } i = 2, \dots, p \text{ değeri için eşittir. Ayrıca her bir } X_i, i = 1, \dots, p$$
- vektörünün dağılımı ortalama vektörü μ ve kovaryans matrisi Σ_{11} ile n -değişkenli normal dağılıma sahiptir.
- (c) M rassal matrisi $(\mu', \dots, \mu')'$ ortalama ve $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{(1)} & \Sigma_{(1,2)} \\ \Sigma_{(2,1)} & \Sigma_{(2)} \end{pmatrix}$ kovaryans matrisi ile $p \times n$ boyutlu normal dağılıma sahiptir. Burada, $\Sigma_{(1)} = \Sigma_{11}$, $\Sigma_{(2)} = A'\Sigma_{11}A + \Sigma_0$ dır.
- (d) $\text{cov}(X_1, X_i) = A'_i \Sigma_{11}$, $\text{cov}(X_i, X_j) = A'_i \Sigma_{11} A_j + \Sigma_{ij}$, $i, j = 2, \dots, n$

İspat: Bakınız (Nguyen, 1997). $\square$

2.4 Matris Değişkenli Normal Dağılımın Parametre Tahmini

Tek değişkenli ve çok değişkenli dağılımların parametrelerinin tahmininde bir çok yöntem önerilmiştir. Bu yöntemler arasında en çok kullanılanlar momentler yöntemi ve en çok olabirlik (EÇO) yöntemidir. Matris değişkenli normal dağılımın parametrelerinin tahmini için Dutilleul (1999) en çok olabirlik yöntemini önermiştir.

$X \sim N_{p,n}(M, \Sigma, \Psi)$ ise X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik 2.1’de verildiği gibidir. Bu ifadenin log-olabilirlik fonksiyonu

$$l = -\frac{npr}{2} \log(2\pi) - \frac{nr}{2} \log(|\Sigma|) - \frac{pr}{2} \log(|\Psi|) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r tr \{ \Sigma^{-1} (X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)' \} \quad (2.19)$$

olarak elde edilir. Bu fonksiyonun parametrelere göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse tahmin ediciler Eşitlik (2.20)-(2.22) de verildiği gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial M} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \{ -\Sigma^{-1} X_i \Psi^{-1} - -\Sigma^{-1} X_i \Psi^{-1} + 2\Sigma^{-1} M \Psi^{-1} \} = 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^r \{ \Sigma^{-1} X_i \Psi^{-1} - \Sigma^{-1} M \Psi^{-1} \} &= 0 \\ \Rightarrow \hat{M} &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r X_i = \bar{X} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \Sigma^{-1}} &= \frac{nr}{2} \{ 2\Sigma - diag(\Sigma) \} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \{ 2(X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)' \\ &\quad - diag((X_i - M) \Sigma^{-1} (X_i - M)') \} \\ &= 0 \\ \Rightarrow nr\Sigma - \sum_{i=1}^r (X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)' \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ nr diag(\Sigma) - diag((X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)') \} \\ &= 0 \\ \Rightarrow \hat{\Sigma} &= \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^r (X_i - M) \hat{\Psi}^{-1} (X_i - M)' \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \Psi^{-1}} &= \frac{pr}{2} \{ 2\Psi - diag(\Psi) \} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \{ 2(X_i - M) \Sigma^{-1} (X_i - M)' \\ &\quad - diag((X_i - M) \Sigma^{-1} (X_i - M)') \} \\ &= 0 \\ \Rightarrow pr\Sigma - \sum_{i=1}^r (X_i - M) \Sigma^{-1} (X_i - M)' \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ pr diag(\Psi) - diag((X_i - M) \Sigma^{-1} (X_i - M)') \} \\ &= 0 \\ \Rightarrow \hat{\Psi} &= \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^r (X_i - M) \hat{\Sigma}^{-1} (X_i - M)' \end{aligned} \quad (2.22)$$

3. MATRİS DEĞİŞKENLİ SLASH DAĞILIM

İstatistik teorisinde normal dağılıma alternatif olarak bir çok dağılım önerilmiştir. Bu dağılımları önermedeki amaç normal dağılıma göre daha esnek olmaları ve veri yapılarını daha iyi modelleyebilmeleridir. Ayrıca robust istatistiksel analizlerde sapan değerleri daha iyi modelleyebilmek için normal dağılıma alternatif dağılımlar kullanılmaktadır. Robust istatistiksel analizde normal dağılıma alternatif olarak normal dağılımın sonlu karmaları ve ölçek karmaları kullanılmıştır. Sonlu karma dağılımların üyeleri her zaman sabit varyansa sahiptirler. Bu yüzden, ölçek karması dağılımlar daha esnek dağılım aileleri türetmektedir.

Bu bölümde, normal dağılıma alternatif ölçek karması olarak önerilen slash dağılım matris değişkenli durumda tanımlanacak, bazı özellikleri incelenecek ve parametrelerinin tahmini için EM algoritması yardımıyla tahmin denklemleri elde edilecektir. Slash dağılım normal dağılımın ölçek karması olduğundan normal dağılıma göre daha kalın bir kuyruğa sahiptir. Slash dağılım ilk olarak Roger ve Tukey (1972) tarafından önerilmiştir. Mosteller ve Tukey (1977) dağılımın özelliklerini incelemiştir. Daha sonra Kafadar (1982) dağılımın en çok olabilirlik tahmin edicilerini önermiştir. Wang ve Genton (2006), slash dağılımı çok değişkenli durum için tanımlamışlardır. Ayrıca çalışmalarında slash dağılımın çarpık halini çok değişkenli durum için tanımlamışlardır. Sonraki çalışmalarda tek değişkenli ve çok değişkenli durumlarda slash dağılımın bir çok genelleştirmesi yapılmıştır. Genç (2007), slash dağılımı tanımlarken normal dağılımı kullanmak yerine normal dağılımın genel hali olan üstel güç dağılımını kullanarak slash dağılımı genelleştirmiştir. Gomez vd. (2007) ise normal dağılımı kullanmak yerine eliptik dağılım ailesini kullanarak tek değişkenli ve çok değişkenli durumlarda bir genelleştirme yapmışlardır. Arslan (2008) ise çok değişkenli durumda Wang ve Genton (2006) tarafından tanımlanan çarpık slash dağılıma alternatif yeni bir çarpık slash dağılım tanımlamıştır. Ayrıca, Arslan (2009) önerdiği çarpık slash dağılım için EM algoritmasını kullanarak parametre tahmini yapmıştır. Arslan ve Genç (2009) çok değişkenli normal dağılım yerine Kotz tip dağılımı kullanarak slash dağılımı genelleştirmişlerdir. Punathumparambath (2011, 2012, 2013), Azza-lini tip çarpık normal dağılım yardımıyla tek değişkenli çarpık slash dağılım ailesini, asimetrik laplace dağılımını kullanarak çok değişkenli asimetrik slash laplace dağılımını ve Cauchy dağılımının çekirdek fonksiyonunu kullanarak çarpık slash dağılım ailesini tanımlamıştır. Olivares-Pacheco vd. (2012), Gomez vd. (2007) tarafından önerilen dağılımın asimetrik halini

önermiş ve özelliklerini incelemişlerdir. Olmos vd. (2012) normal dağılım yerine yarı normal dağılımı kullanarak slash yarı normal dağılımı tanımlamış ve özelliklerini araştırmışlardır. Reyes vd. (2013), uyarlanmış slash dağılımı tanımlamak için düzgün dağılım yerine üstel dağılımı kullanmış ve bu dağılımın karakteristiklerini elde etmişlerdir. Gui vd. (2013), Olmos vd. (2012) tarafından tanımlanan slash yarı normal dağılımı genelleştirmiş ve katlanmış slash normal dağılım olarak tanımladıkları dağılımın özelliklerini ortaya koymuşlardır. Farnoosh vd. (2013) çarpık eliptik dağılımlar yardımıyla çarpık slash dağılım ailesini tanımlamışlardır. Gui vd. (2013), normal dağılım yerine epsilon yarı normal dağılımı kullanarak, epsilon yarı normal slash dağılımı elde etmişlerdir. Genç (2013), beta normal dağılımı kullanarak çarpık slash dağılımı tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir. Gui (2014) ise alfa çarpık normal dağılım yardımıyla farklı bir çarpık slash dağılım tanımlamıştır. Ayrıca Bulut ve Arslan (2015) çalışmalarında bu bölümde elde edilen sonuçları kullanmışlardır.

Tanım 3.1 $Z \sim N_{p,n}(0, I_p, I_n)$ ve $U \sim U(0, 1)$ birbirinden bağımsız rassal matris ve rassal değişken olmak üzere $X = M + \Sigma^{\frac{1}{2}} Z U^{-\frac{1}{q}} \Psi^{\frac{1}{2}}$ şeklinde tanımlanan rassal matris, matris değişkenli slash dağılıma sahiptir ($X \sim MVSl_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$).

Teorem 3.2 $X \sim MVSl_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$ ise X rassal matrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(X) = \frac{q 2^{\frac{np+q}{2}-1} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}} \gamma\left(\frac{np+q}{2}, \frac{tr\{\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)'\}}{2}\right)}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} [tr\{\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)'\}]^{\frac{np+q}{2}}} \quad (3.1)$$

şeklindedir.

İspat: Z ve U rassal değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{Z,U}(Z, u) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}np} \text{etr}\left\{-\frac{1}{2}ZZ'\right\}$$

şeklindedir. $X = M + \Sigma^{\frac{1}{2}} Z U^{-\frac{1}{q}} \Psi^{\frac{1}{2}}$ dönüşümünü kullanırsak X ve U değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X,U}(X, u) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}np} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}} u^{\frac{np}{q}} \exp\left\{-\frac{u^{\frac{2}{q}}}{2} tr[\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)']\right\}$$

olarak elde edilir. Burada dönüşüm yapılırken jakobyen

$$J(Z \rightarrow X) = u^{\frac{np}{q}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}}$$

şeklindedir. X rassal matrisinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(X) = \frac{q2^{\frac{np+q}{2}-1} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}} \gamma\left(\frac{np+q}{2}, \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} (X-M) \Psi^{-1} (X-M)']\right)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}np} \left\{ \text{tr} [\Sigma^{-1} (X-M) \Psi^{-1} (X-M)'] \right\}^{\frac{np+q}{2}}}$$

olarak elde edilir. $n = 1$ ve $\Psi = I_n$ alınırsa Wang ve Genton (2006) tarafından tanımlanan çok değişkenli slash dağılım elde edilir. $\square$

3.1 Matris Değişkenli Slash Dağılımın Özellikleri

Bu bölümde yeni tanımladığımız matris değişkenli slash dağılımın bazı özellikleri incelenecektir.

Önerme 3.3 $X \sim MVSl_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$ ise $X | U \sim N_{p,n}\left(M, u^{-\frac{2}{q}}\Sigma, \Psi\right)$ olur.

İspat: $Z \sim N_{p,n}(0, I_p, I_n)$ olduğundan Z matrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_Z(Z) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}np} \text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} ZZ' \right\}$$

olur. U sabit bir sayı olmak üzere $X = M + \Sigma^{\frac{1}{2}} Z U^{-\frac{1}{q}} \Psi^{\frac{1}{2}}$ dönüşümü yapıldığında dönüşüme ait jakobyen

$$J(Z \rightarrow X) = \left| u^{-\frac{2}{q}} \Sigma \right|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}}$$

olarak elde edilir. Burada U verildiğinde X rassal matrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X|U}(X | u) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}np} \left| u^{-\frac{2}{q}} \Sigma \right|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}} \text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} \left(u^{-\frac{2}{q}} \Sigma \right)^{-1} (X-M) \Psi^{-1} (X-M)' \right\}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $X | U \sim N_{p,n}\left(M, u^{-\frac{2}{q}}\Sigma, \Psi\right)$ olur. $\square$

Teorem 3.4 $X \sim MVSl_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$ ise

$$E(X) = M \tag{3.2}$$

olur.

İspat: X rassal matrisi Z ve U bağımsız rassal değişkenlerinin ölçek karması olarak yazıldığından

$$E(X) = E_U(E_Z(X | U)) = E_U(M) = M$$

olarak elde edilir. Burada Önerme 3.3'den yararlanılmıştır. $\square$

Teorem 3.5 $X \sim MVSl_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$ ise

$$Cov(X) = \frac{q}{q-2} \Sigma \otimes \Psi, \quad q > 2 \quad (3.3)$$

olur.

İspat: Teorem 3.4'e benzer olarak

$$Cov(X) = \frac{q}{q-2} \Sigma \otimes \Psi, \quad q > 2$$

şeklinde elde edilir. $\square$

Teorem 3.6 $X \sim MVSl_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$ ise X rassal matrisinin karakteristik fonksiyonu

$$\phi_X(T) = etr(iT'M) \varphi(tr(T'\Sigma T\Psi)) \quad (3.4)$$

şeklindedir.

İspat: Karakteristik fonksiyonun tanımı ve Önerme 3.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} \phi_X(T) &= E \{ etr(iXT') \} = E_U [E [etr(iXT' | U)]] \\ &= E_U \left[etr \left\{ iT'M - \frac{u^{-\frac{2}{q}}}{2} T'\Sigma T\Psi \right\} \right] \\ &= E_U \left[e^{etr(iT'M)} e^{tr \left(-\frac{u^{-\frac{2}{q}}}{2} T'\Sigma T\Psi \right)} \right] \\ &= etr(iT'M) E_U \left[e^{-\frac{u^{-\frac{2}{q}}}{2} tr(T'\Sigma T\Psi)} \right] \\ &= etr(iT'M) \int_0^1 e^{-\frac{u^{-\frac{2}{q}}}{2} tr(T'\Sigma T\Psi)} du \\ &= etr(iT'M) \varphi(tr(T'\Sigma T\Psi)) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada $\varphi(v) = \int_0^1 e^{-\frac{u^{-\frac{2}{q}}}{2} v} du$ olarak tanımlanmıştır. $\square$

Teorem 3.7 $X \sim MVSl_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$ olsun. A ; $p \times n$ tipinde, B ; $p \times p$ tipinde, C ; $n \times n$ tipinde sabit matrisler olmak üzere $Y = A + BXC$ şeklinde tanımlanan rassal matrisin dağılımı, ortalaması $A + BMC$, varyans-kovaryans matrisleri sırasıyla $B\Sigma B'$ ve $C'\Psi C$ olan matris değişkenli slash dağılımdır ($Y \sim MVSl_{p,n}(A + BMC, B\Sigma B', C'\Psi C, q)$).

İspat: X rassal matrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(X) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}np} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}} \int_0^1 u^{\frac{np}{q}} \exp \left\{ -\frac{u^{\frac{2}{q}}}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} (X - M) \Psi^{-1} (X - M)'] \right\} du$$

olup $Y = A + BXC$ dönüşümü yaparsak jakobyen değeri

$$J(X \rightarrow Y) = |B|^{-n} |C|^{-p}$$

olarak elde edilir. Bu durumda Y rassal matrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_Y(Y) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}np} |B\Sigma B'|^{-\frac{n}{2}} |C'\Psi C|^{-\frac{p}{2}} \\ &\quad \times \int_0^1 u^{\frac{np}{q}} \exp \left\{ -\frac{u^{\frac{2}{q}}}{2} \text{tr} \left[(B\Sigma B')^{-1} (Y - (A + BMC)) (C'\Psi C)^{-1} (Y - (A + BMC))' \right] \right\} du \\ &= \frac{q 2^{\frac{np+q}{2}-1} |B\Sigma B'|^{-\frac{n}{2}} |C'\Psi C|^{-\frac{p}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}np}} \\ &\quad \times \frac{\gamma \left(\frac{np+q}{2}, \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ (B\Sigma B')^{-1} (Y - (A + BMC)) (C'\Psi C)^{-1} (Y - (A + BMC))' \right\} \right)}{\left[\text{tr} \left\{ (B\Sigma B')^{-1} (Y - (A + BMC)) (C'\Psi C)^{-1} (Y - (A + BMC))' \right\} \right]^{\frac{np+q}{2}}} \end{aligned}$$

şeklinde dir. Dolayısıyla $Y \sim MVSl_{p,n}(A + BMC, B\Sigma B', C'\Psi C, q)$ olur. $\square$

3.2 Matris Değişkenli Slash Dağılıma Sahip Rassal Matrislerin Fonksiyonlarının Beklenen Değerleri

Bu bölümde matris değişkenli slash dağılıma sahip rassal matrislerin bazı fonksiyonlarının beklenen değerleri incelenmiştir.

Teorem 3.8 $X \sim MVSl_{p,n}(0, \Sigma, \Psi, q)$ olsun. Bu durumda $q > 2$ için

$$(i) E(\text{tr}(XX')) = \frac{q}{q-2} \text{tr}(\Sigma) \text{tr}(\Psi)$$

$$(ii) E(\text{tr}(XX' (AA')^\alpha)) = \frac{q}{q-2} \text{tr}(\Psi) \text{tr}(\Sigma (AA')^\alpha), A(p \times n)$$

$$(iii) E(\text{tr}^2(XA')) = \frac{q}{q-2} \text{tr}(\Sigma A \Psi A'), A(p \times n)$$

$$(iv) E(\text{tr}(XA')^2) = \frac{q}{q-2} \text{tr}(\Sigma A \Psi A'), A(p \times n)$$

$$(v) E \left(tr(XA') tr(XA' (AA')^\alpha) \right) = \frac{q}{q-2} tr(\Sigma A \Psi A' (AA')^\alpha), A(p \times n)$$

İspat: (i) $E(tr(XX')) = E_U [E_{X|U} [tr\{(XX') | U\}]]$

$$\begin{aligned} &= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n x_{ij} x_{ij} \right] \right] \\ &= E_U \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n E_{X|U} (x_{ij} x_{ij}) \right] \\ &= E_U \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ii} \Psi_{jj} \right] \\ &= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \sigma_{ii} \Psi_{jj} \right] \\ &= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} tr(\Sigma) tr(\Psi) \right] \\ &= E_U \left(u^{-\frac{2}{q}} \right) tr(\Sigma) tr(\Psi) \\ &= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) tr(\Sigma) tr(\Psi) \\ &= \frac{q}{q-2} tr(\Sigma) tr(\Psi) \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) İspata başlamadan önce $Y = X'A^\alpha$ dönüşümü yapalım. $X \sim MVSl_{p,n}(0, \Sigma, \Psi, q)$ olduğundan $Y = X'A^\alpha \sim MVSl_{n,n}(0, \Psi, A'^\alpha \Sigma A^\alpha, q)$ olur. Ayrıca $Y | U \sim N_{n,n}(0, \Psi, u^{-\frac{2}{q}} A'^\alpha \Sigma A^\alpha, q)$ olur. $u^{-\frac{2}{q}} A'^\alpha \Sigma A^\alpha = \Sigma^*$ olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} E(tr(XX' (AA')^\alpha)) &= E_U [E_{X|U} [tr(XX' (AA')^\alpha) | U]] \\ &= E_U [E_{Y|U} [tr(YY')]] \\ &= E_U \left[E_{Y|U} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ij} y_{ij} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_U \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_{Y|U} [y_{ij} y_{ij}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Psi_{ii} \sigma_{jj}^* \right] \\
&= E_U \left[\text{tr}(\Psi) \text{tr} \left(u^{-\frac{2}{q}} A'^{\alpha} \Sigma A^{\alpha} \right) \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \text{tr}(\Psi) \text{tr}(A'^{\alpha} \Sigma A^{\alpha}) \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) \text{tr}(\Psi) \text{tr}(\Sigma (AA')^{\alpha}) \\
&= \frac{q}{q-2} \text{tr}(\Psi) \text{tr}(\Sigma (AA')^{\alpha})
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) İspata başlamadan önce $Y = XA'$ dönüşümü yapalım. Bu durumda $Y \sim MVS l_{p,p}(0, \Sigma, A\Psi A', q)$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(\text{tr}^2(XA')) &= E(\text{tr}^2 Y) = E_U [E_{Y|U} [\text{tr}^2 Y]] \\
&= E_U \left[E_{Y|U} \left[\left(\sum_{i=1}^p y_{ii} \right)^2 \right] \right] \\
&= E_U \left[E_{Y|U} \left[\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p y_{ii} y_{jj} \right) \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p E_{Y|U} (y_{ii} y_{jj}) \right] \\
&= E_U \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ii} \Psi_{jj}^* \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sigma_{ii} \Psi_{ij}^* \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \text{tr}(\Sigma \Psi^*) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) \text{tr}(\Sigma A \Psi A') \\
&= \frac{q}{q-2} \text{tr}(\Sigma A \Psi A')
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\text{(iv)} \quad E \left(\text{tr}(XA')^2 \right) &= E_U \left[E_{X|U} \left[\text{tr}(XA')^2 \right] \right] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ij} x_{ij} x_{ij} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ij} E_{X|U} (x_{ij} x_{ij}) \right] \\
&= E_U \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ij} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ii} \Psi_{jj} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ii} a_{ij} \Psi_{jj} a_{ij} \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \text{tr}(\Sigma A \Psi A') \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) \text{tr}(\Sigma A \Psi A') \\
&= \frac{q}{q-2} \text{tr}(\Sigma A \Psi A')
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\text{(v)} \quad E \left(\text{tr}(XA') \text{tr}(XA' (AA')^\alpha) \right) &= E_U \left[E_{X|U} \left[\text{tr}(XA') \text{tr}(XA' (AA')^\alpha) \right] \right] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n x_{ij} a_{ij} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{kl} a_{lo} a_{om}^\alpha a_{mk}^\alpha \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{ij} a_{lo} a_{om}^\alpha a_{mk}^\alpha E_{X|U} (x_{ij} x_{kl}) \right] \\
&= E_U \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{ij} a_{lo} a_{om}^\alpha a_{mk}^\alpha \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ik} \Psi_{jl} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sigma_{ik} a_{ij} \psi_{jl} a_{ol} a_{om}^\alpha a_{km}^\alpha \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) tr(\Sigma A \Psi A' (A A')^\alpha) \\
&= \frac{q}{q-2} tr(\Sigma A \Psi A' (A A')^\alpha)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.9 $X \sim MVS l_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$ olsun. Bu durumda $q > 2$ için

- (i) $E(X'AX) = \frac{q}{q-2} tr(\Sigma A') \Psi + M'AM, A(p \times p)$
- (ii) $E(XAX') = \frac{q}{q-2} tr(\Psi A') \Sigma + MAM', A(n \times n)$
- (iii) $E(XAX) = \frac{q}{q-2} \Sigma A' \Psi + MAM, A(n \times p)$
- (iv) $E(tr(AX)X) = \frac{q}{q-2} \Sigma A' \Psi + tr(MA)M, A(n \times p)$
- (v) $E(tr(AX)X') = \frac{q}{q-2} \Sigma A \Psi + tr(AM)M', A(n \times p)$
- (vi) $E(tr(AX')X) = \frac{q}{q-2} \Sigma A \Psi + tr(AM')M, A(p \times n)$
- (vii) $E(tr(AX')X') = \frac{q}{q-2} \Psi A' \Sigma + tr(AM')M', A(p \times n)$

İspat: (i) $X'AX$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{lj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X'AX) &= E_U [E_{X|U} [X'AX]] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{lj} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{kl} E_{X|U} [x_{ki} x_{lj}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{kl} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kl} \psi_{ij} + m_{ki} m_{lj} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_U \left[\sum_{k=1}^P \sum_{l=1}^P \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \Psi_{ij} \sigma_{kl} a_{lk} + m_{ki} a_{kl} m_{lj} \right\} \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^P \sum_{l=1}^P \Psi_{ij} \sigma_{kl} a_{lk} + \sum_{k=1}^P \sum_{l=1}^P m_{ki} a_{kl} m_{lj} \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) tr(\Sigma A') \Psi + M' A M \\
&= \frac{q}{q-2} tr(\Sigma A') \Psi + M' A M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) XAX' matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{jl}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(XAX') &= E_U [E_{X|U} [XAX']] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{jl} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} E_{X|U} [x_{ik} x_{jl}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ij} \Psi_{kl} + m_{ik} m_{jl} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ij} a_{kl} \Psi_{lk} + m_{ik} a_{kl} m_{jl} \right\} \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sigma_{ij} a_{kl} \Psi_{lk} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_{ik} a_{kl} m_{jl} \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) tr(\Psi A') \Sigma + M A M' \\
&= \frac{q}{q-2} tr(\Psi A') \Sigma + M A M'
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) XAX matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{lj}$ olur. Bu durumda

$$E(XAX) = E_U [E_{X|U} [XAX]]$$

$$\begin{aligned}
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{lj} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} E_{X|U} [x_{ik} x_{lj}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} \Psi_{kj} + m_{ik} m_{lj} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{kj} + m_{ik} a_{kl} m_{lj} \right\} \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{kj} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lj} \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) \Sigma A' \Psi + M A M \\
&= \frac{q}{q-2} \Sigma A' \Psi + M A M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $tr(AX)X$ matrisinin (i, j) -inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_{ij} a_{kl} x_{lk}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)X) &= E_U [E_{X|U} [tr(AX)X]] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_{ij} a_{kl} x_{lk} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} E_{X|U} [x_{ij} x_{lk}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} \Psi_{jk} + m_{ij} m_{lk} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{jk} + m_{ij} m_{lk} a_{kl} \right\} \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{jk} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{ij} m_{lk} a_{kl} \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) \Sigma A' \Psi + tr(MA)M
\end{aligned}$$

$$= \frac{q}{q-2} \Sigma A' \Psi + tr(MA) M$$

elde edilir.

(v) $tr(AX)X'$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_{ji} a_{kl} x_{lk}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} E(tr(AX)X') &= E_U [E_{X|U} [tr(AX)X']] \\ &= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_{ji} a_{kl} x_{lk} \right] \right] \\ &= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} E_{X|U} [x_{ji} x_{lk}] \right] \\ &= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{jl} \psi_{ik} + m_{ji} m_{lk} \right\} \right] \\ &= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \psi_{ik} a_{kl} \sigma_{lj} + m_{ji} a_{kl} m_{lk} \right\} \right] \\ &= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \psi_{ik} a_{kl} \sigma_{lj} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{ji} a_{kl} m_{lk} \right] \\ &= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) \Psi A \Sigma + tr(AM) M' \\ &= \frac{q}{q-2} \Psi A \Sigma + tr(AM) M' \end{aligned}$$

elde edilir.

(vi) $tr(AX')X$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n x_{ij} a_{kl} x_{kl}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} E(tr(AX')X) &= E_U [E_{X|U} [tr(AX')X]] \\ &= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n x_{ij} a_{kl} x_{kl} \right] \right] \\ &= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{kl} E_{X|U} [x_{ij} x_{kl}] \right] \\ &= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n a_{kl} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ik} \psi_{jl} + m_{ij} m_{kl} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ik} a_{kl} \psi_{lj} + m_{ij} a_{kl} m_{kl} \right\} \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \psi_{ik} a_{kl} \sigma_{lj} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{ji} a_{kl} m_{lk} \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) \Sigma A \Psi + tr(AM') M \\
&= \frac{q}{q-2} \Sigma A \Psi + tr(AM') M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vii) $tr(AX')X'$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n x_{ji} a_{kl} x_{kl}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX')X') &= E_U [E_{X|U} [tr(AX')X']] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n x_{ji} a_{kl} x_{kl} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} E_{X|U} [x_{ji} x_{kl}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{jk} \psi_{il} + m_{ji} m_{kl} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \psi_{il} a_{kl} \sigma_{jk} + m_{ji} a_{kl} m_{kl} \right\} \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \psi_{il} a_{kl} \sigma_{jk} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{ji} a_{kl} m_{kl} \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) \Psi A' \Sigma + tr(AM') M' \\
&= \frac{q}{q-2} \Psi A' \Sigma + tr(AM') M'
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.10 $X \sim MVSl_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$ olsun. Bu durumda $q > 2$ için

- (i) $E(XAXBX) = \frac{q}{q-2} (MA\Sigma B'\Psi + \Sigma B'M'A'\Psi + \Sigma A'\Psi BM) + MAMB M, A(n \times p), B(n \times p)$
- (ii) $E(X'AXBX) = \frac{q}{q-2} (M'A\Sigma B'\Psi + tr(\Sigma B'M'A')\Psi + tr(A\Sigma)\Psi BM) + M'AMB M, A(p \times p), B(n \times p)$
- (iii) $E(XAX'BX) = \frac{q}{q-2} (tr(B\Sigma)MA\Psi + \Sigma B'MA'\Psi + tr(A\Psi)\Sigma BM) + MAM'BM, A(n \times n), B(p \times p)$
- (iv) $E(X'AXBX') = \frac{q}{q-2} (tr(B\Psi)M'A\Sigma + \Psi B'M'A'\Sigma + tr(A\Sigma)\Psi BM') + M'AMB M', A(p \times p), B(n \times n)$
- (v) $E(XAX'BX') = \frac{q}{q-2} (MA\Psi B'\Sigma + tr(AM'B\Psi)\Sigma + tr(A\Psi)\Sigma BM') + MAM'BM', A(n \times n), B(p \times n)$
- (vi) $E(X'AX'BX) = \frac{q}{q-2} (tr(\Sigma B')M'A\Psi + tr(AM'B\Sigma)\Psi + \Psi A'\Sigma BM) + M'AM'BM, A(p \times n), B(p \times p)$
- (vii) $E(X'AX'BX') = \frac{q}{q-2} (M'A\Psi B'\Sigma + \Psi B'MA'\Sigma + \Psi A'\Sigma BM') + M'AM'BM', A(p \times n), B(p \times n)$

İspat: (i) $XAXBX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{oj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 E(XAXBX) &= E_U [E_{X|U} [XAXBX]] \\
 &= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{oj} \right] \right] \\
 &= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E_{X|U} [x_{ik} x_{lm} x_{oj}] \right] \\
 &= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{ik} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \Psi_{mj} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + m_{lm} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} \Psi_{kj} + m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} \Psi_{km} + m_{ik} m_{lm} m_{oj} \right\} \right] \\
 &= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \left\{ u^{-\frac{2}{q}} m_{ik} a_{kl} \sigma_{lo} b_{mo} \Psi_{mj} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} b_{mo} m_{lm} a_{kl} \Psi_{kj} \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} a_{kl} \Psi_{km} b_{mo} m_{oj} + m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{oj} \Big\} \Big] \\
& = E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{ik} a_{kl} \sigma_{lo} b_{mo} \Psi_{mj} + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sigma_{io} b_{mo} m_{lm} a_{kl} \Psi_{kj} \right. \\
& \quad \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sigma_{il} a_{kl} \Psi_{km} b_{mo} m_{oj} + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{oj} \right] \\
& = \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) (MA \Sigma B' \Psi + \Sigma B' M' A' \Psi + \Sigma A' \Psi B M) + M A M B M \\
& = \frac{q}{q-2} (MA \Sigma B' \Psi + \Sigma B' M' A' \Psi + \Sigma A' \Psi B M) + M A M B M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $X' A X B X$ matrisinin (i, j) -inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{oj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X' A X B X) & = E_U [E_{X|U} [X' A X B X]] \\
& = E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{oj} \right] \right] \\
& = E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E_{X|U} [x_{ki} x_{lm} x_{oj}] \right] \\
& = E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{ki} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \Psi_{mj} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + m_{ml} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ko} \Psi_{ij} + m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lk} \Psi_{im} + m_{ki} m_{lm} m_{oj} \right\} \right] \\
& = E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \left\{ u^{-\frac{2}{q}} m_{ki} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} \Psi_{mj} + u^{-\frac{2}{q}} \Psi_{ij} \sigma_{ko} b_{om} m_{ml} a_{lk} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + u^{-\frac{2}{q}} \Psi_{im} b_{mo} m_{oj} a_{kl} \sigma_{lk} + m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{oj} \right\} \right] \\
& = E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{ki} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} \Psi_{mj} + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \Psi_{ij} \sigma_{ko} b_{om} m_{ml} a_{lk} \right. \\
& \quad \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \Psi_{im} b_{mo} m_{oj} a_{kl} \sigma_{lk} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{oj} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) (M' A \Sigma B' \Psi + tr(\Sigma B' M' A') \Psi + tr(A \Sigma) \Psi B M) + M' A M B M \\
&= \frac{q}{q-2} (M' A \Sigma B' \Psi + tr(\Sigma B' M' A') \Psi + tr(A \Sigma) \Psi B M) + M' A M B M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $XAX'BX$ matrisinin (i, j) -inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{oj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(XAX'BX) &= E_U [E_{X|U} [XAX'BX]] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{oj} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E_{X|U} [x_{ik} x_{ml} x_{oj}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{ik} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mo} \psi_{lj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{ml} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} \psi_{kj} + m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{im} \psi_{kl} + m_{ik} m_{ml} m_{oj} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \left\{ u^{-\frac{2}{q}} m_{ik} a_{kl} \psi_{lj} b_{mo} \sigma_{om} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \psi_{kj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{im} b_{mo} m_{oj} a_{kl} \psi_{lk} + m_{ik} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{oj} \right\} \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{ik} a_{kl} \psi_{lj} b_{mo} \sigma_{om} + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sigma_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \psi_{kj} \right. \\
&\quad \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sigma_{im} b_{mo} m_{oj} a_{kl} \psi_{lk} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{oj} \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) (tr(B \Sigma) M A \Psi + \Sigma B' M A' \Psi + tr(A \Psi) \Sigma B M) + M A M' B M \\
&= \frac{q}{q-2} (tr(B \Sigma) M A \Psi + \Sigma B' M A' \Psi + tr(A \Psi) \Sigma B M) + M A M' B M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $X'AX'BX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{oj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X'AX'BX) &= E_U [E_{X|U} [X'AX'BX]] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{oj} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E_{X|U} [x_{ki} x_{ml} x_{oj}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{ki} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mo} \psi_{lj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{ml} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ko} \psi_{ij} + m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{km} \psi_{il} + m_{ki} m_{ml} m_{oj} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \left\{ u^{-\frac{2}{q}} m_{ki} a_{kl} \psi_{lj} \sigma_{om} b_{mo} + u^{-\frac{2}{q}} \psi_{ij} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ok} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u^{-\frac{2}{q}} \psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} m_{oj} + m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{oj} \right\} \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{ki} a_{kl} \psi_{lj} \sigma_{om} b_{mo} + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \psi_{ij} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ok} \right. \\
&\quad \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} m_{oj} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{oj} \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) (tr(\Sigma B') M' A \Psi + tr(AM' B \Sigma) \Psi + \Psi A' \Sigma B M) + M' A M' B M \\
&= \frac{q}{q-2} (tr(\Sigma B') M' A \Psi + tr(AM' B \Sigma) \Psi + \Psi A' \Sigma B M) + M' A M' B M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) $XAX'BX'$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{jo}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(XAX'BX') &= E_U [E_{X|U} [XAX'BX']] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{jo} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} b_{mo} E_{X|U} [x_{ik} x_{ml} x_{jo}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{iki} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mjo} \Psi_{lo} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{ml} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ij} \Psi_{ko} + m_{jo} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{im} \Psi_{kl} + m_{ik} m_{ml} m_{jo} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \left\{ u^{-\frac{2}{q}} m_{ik} a_{kl} \Psi_{lo} b_{om} \sigma_{mj} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ij} a_{kl} m_{ml} b_{mo} \Psi_{ok} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{im} b_{mo} m_{jo} a_{kl} \Psi_{lk} + m_{ik} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{jo} \right\} \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ik} a_{kl} \Psi_{lo} b_{om} \sigma_{mj} + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \sigma_{ij} a_{kl} m_{ml} b_{mo} \Psi_{ok} \right. \\
&\quad \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \sigma_{im} b_{mo} m_{jo} a_{kl} \Psi_{lk} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ik} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{jo} \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) (MA\Psi B'\Sigma + tr(AM'B\Psi)\Sigma + tr(A\Psi)\Sigma BM') + MAM'BM' \\
&= \frac{q}{q-2} (MA\Psi B'\Sigma + tr(AM'B\Psi)\Sigma + tr(A\Psi)\Sigma BM') + MAM'BM'
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vi) $XAX'BX'$ matrisinin (i, j) - inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{jo}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(XAX'BX') &= E_U [E_{X|U} [XAX'BX']] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{jo} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} b_{mo} E_{X|U} [x_{ik} x_{ml} x_{jo}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{ik} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mj} \Psi_{lo} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{ml} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ij} \Psi_{ko} + m_{jo} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{im} \Psi_{kl} + m_{ik} m_{ml} m_{jo} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \left\{ u^{-\frac{2}{q}} m_{ik} a_{kl} \Psi_{lo} b_{om} \sigma_{mj} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ij} a_{kl} m_{ml} b_{mo} \Psi_{ok} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{im} b_{mo} m_{jo} a_{kl} \Psi_{lk} + m_{ik} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{jo} \right\} \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ik} a_{kl} \Psi_{lo} b_{om} \sigma_{mj} + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \sigma_{ij} a_{kl} m_{ml} b_{mo} \Psi_{ok} \right. \\
&\quad \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \sigma_{im} b_{mo} m_{jo} a_{kl} \Psi_{lk} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ik} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{jo} \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) (MA\Psi B'\Sigma + tr(AM'B\Psi)\Sigma + tr(A\Psi)\Sigma BM') + MAM'BM' \\
&= \frac{q}{q-2} (MA\Psi B'\Sigma + tr(AM'B\Psi)\Sigma + tr(A\Psi)\Sigma BM') + MAM'BM'
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vii) $X'AX'BX'$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{jo}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X'AX'BX') &= E_U [E_{X|U} [X'AX'BX']] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{jo} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} b_{mo} E_{X|U} [x_{ki} x_{ml} x_{jo}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{ki} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mj} \Psi_{lo} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{ml} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kj} \Psi_{io} + m_{jo} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{km} \Psi_{il} + m_{ki} m_{ml} m_{jo} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \left\{ u^{-\frac{2}{q}} m_{ki} a_{kl} \Psi_{lo} b_{om} \sigma_{mj} + u^{-\frac{2}{q}} \Psi_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \sigma_{kj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u^{-\frac{2}{q}} \Psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} m_{jo} + m_{ki} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{jo} \right\} \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ki} a_{kl} \Psi_{lo} b_{om} \sigma_{mj} + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \Psi_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \sigma_{kj} \right. \\
&\quad \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \Psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} m_{jo} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ki} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{jo} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \Psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} m_{jo} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ki} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{jo} \Big] \\
& = \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) (M' A \Psi B' \Sigma + \Psi B' M A' \Sigma + \Psi A' \Sigma B M') + M' A M' B M' \\
& = \frac{q}{q-2} (M' A \Psi B' \Sigma + \Psi B' M A' \Sigma + \Psi A' \Sigma B M') + M' A M' B M'
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.11 $X \sim MVS_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$ olsun. Bu durumda $q > 2$ için

$$\begin{aligned}
(i) \quad E(tr(X' A X B) X) &= \frac{q}{q-2} (\Sigma A' M B' \Psi + \Sigma A M B \Psi + tr(\Psi B) tr(A \Sigma) M) \\
&\quad + tr(M' A M B) M, \quad A(p \times p), \quad B(n \times n) \\
(ii) \quad E(tr(A X) X B X) &= \frac{q}{q-2} (tr(A M) \Sigma B' \Psi + M B \Sigma A' \Psi + \Sigma A' \Psi B M) \\
&\quad + tr(A M) M B M, \quad A(n \times p), \quad B(n \times p) \\
(iii) \quad E(tr(A X) X' B X) &= \frac{q}{q-2} (tr(A M) tr(B \Sigma) \Psi + M' B \Sigma A' \Psi + \Psi A \Sigma B M) \\
&\quad + tr(A M) M' B M, \quad A(n \times p), \quad B(p \times p)
\end{aligned}$$

İspat: (i) $tr(X' A X B) X$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{lk} a_{lm} x_{mo} b_{ok} x_{ij}$ olur.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(X' A X B) X) &= E_U [E_{X|U} [tr(X' A X B) X]] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{lk} a_{lm} x_{mo} b_{ok} x_{ij} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{lm} b_{ok} E_{X|U} [x_{lk} x_{mo} x_{ij}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{lm} b_{ok} \left\{ m_{lk} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mi} \Psi_{oj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{mo} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{li} \Psi_{kj} + m_{ij} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lm} \Psi_{ko} + m_{lk} m_{mo} m_{ij} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{im} a_{ml} m_{lk} b_{ko} \Psi_{oj} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} a_{lm} m_{mo} b_{ok} \Psi_{kj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u^{-\frac{2}{q}} m_{ij} \Psi_{ko} b_{ok} a_{lm} \sigma_{ml} + m_{ij} m_{lk} a_{lm} m_{mo} b_{ok} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \sigma_{im} a_{ml} m_{lk} b_{ko} \Psi_{oj} + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \sigma_{il} a_{lm} m_{mo} b_{ok} \Psi_{kj} \right. \\
&\quad \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ij} \Psi_{ko} b_{ok} a_{lm} \sigma_{ml} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ij} m_{lk} a_{lm} m_{mo} b_{ok} \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) (\Sigma A' M B' \Psi + \Sigma A M B \Psi + tr(\Psi B) tr(A \Sigma) M) + tr(M' A M B) M \\
&= \frac{q}{q-2} (\Sigma A' M B' \Psi + \Sigma A M B \Psi + tr(\Psi B) tr(A \Sigma) M) + tr(M' A M B) M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $tr(AX)XBX$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} x_{lk} x_{im} b_{mo} x_{oj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)XBX) &= E_U [E_{X|U} [tr(AX)XBX]] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} x_{lk} x_{im} b_{mo} x_{oj} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} b_{mo} E_{X|U} [x_{lk} x_{im} x_{oj}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{lk} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} \Psi_{mj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{im} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \Psi_{kj} + m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{li} \Psi_{km} + m_{lk} m_{im} m_{oj} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} b_{om} \Psi_{mj} a_{kl} m_{lk} + u^{-\frac{2}{q}} m_{im} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \Psi_{kj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{km} b_{mo} m_{oj} + m_{im} b_{mo} m_{oj} a_{kl} m_{lk} \right\} \right] \\
&= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \sigma_{io} b_{om} \Psi_{mj} a_{kl} m_{lk} + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{im} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \Psi_{kj} \right. \\
&\quad \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{km} b_{mo} m_{oj} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{im} b_{mo} m_{oj} a_{kl} m_{lk} \right] \\
&= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) (\Sigma A' M B' \Psi + \Sigma A M B \Psi + tr(\Psi B) tr(A \Sigma) M) + tr(M' A M B) M
\end{aligned}$$

$$= \frac{q}{q-2} (tr(AM) \Sigma B' \Psi + MB \Sigma A' \Psi + \Sigma A' \Psi BM) + tr(AM) MBM$$

elde edilir.

(iii) $tr(AX)X'BX$ matrisinin (i, j) -inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} x_{lk} x_{mi} b_{mo} x_{oj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} E(tr(AX)X'BX) &= E_U [E_{X|U} [tr(AX)X'BX]] \\ &= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} x_{lk} x_{mi} b_{mo} x_{oj} \right] \right] \\ &= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E_{X|U} [x_{lk} x_{mi} x_{oj}] \right] \\ &= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{lk} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mo} \Psi_{ij} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_{mi} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \Psi_{kj} + m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lt} \Psi_{ki} + m_{lk} m_{mi} m_{oj} \right\} \right] \\ &= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \Psi_{ij} a_{kl} m_{lk} b_{mo} \sigma_{om} + u^{-\frac{2}{q}} m_{mi} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \Psi_{kj} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + u^{-\frac{2}{q}} \Psi_{ik} a_{kl} \sigma_{lm} b_{mo} m_{oj} + m_{mi} b_{mo} m_{oj} a_{kl} m_{lk} \right\} \right] \\ &= E_U \left[u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \Psi_{ij} a_{kl} m_{lk} b_{mo} \sigma_{om} + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{mi} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \Psi_{kj} \right. \\ &\quad \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \Psi_{ik} a_{kl} \sigma_{lm} b_{mo} m_{oj} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{mi} b_{mo} m_{oj} a_{kl} m_{lk} \right] \\ &= \left(\int_0^1 u^{-\frac{2}{q}} du \right) (tr(AM) tr(B \Sigma) \Psi + M' B \Sigma A' \Psi + \Psi A \Sigma B M) + tr(AM) M' B M \\ &= \frac{q}{q-2} (tr(AM) tr(B \Sigma) \Psi + M' B \Sigma A' \Psi + \Psi A \Sigma B M) + tr(AM) M' B M \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.12 $X \sim MVSl_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$ olsun. Bu durumda $q > 4$ için

$$\begin{aligned}
(i) \ E(XAXBXCX) &= \frac{q}{q-4} (\Sigma C' \Psi B \Sigma A' \Psi + \Sigma A' \Psi B \Sigma C' \Psi + tr(A \Sigma C' \Psi) \Sigma B' \Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (M A M B \Sigma C' \Psi + M A \Sigma C' M' B' \Psi + \Sigma C' M' B' M' A' \Psi \\
&\quad + M A \Sigma B' \Psi C M + \Sigma B' M' A' \Psi C M + \Sigma A' \Psi B M C M) \\
&\quad + M A M B M C M, \ A(n \times p), \ B(n \times p), \ C(n \times p) \\
(ii) \ E(X' A X B X C X) &= \frac{q}{q-4} (tr(A \Sigma B' \Psi C \Sigma) \Psi + tr(A \Sigma) \Psi B \Sigma C' \Psi + \Psi C \Sigma A' \Sigma B' \Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (M' A M B \Sigma C' \Psi + M' A \Sigma C' M' B' \Psi + tr(A M B M C \Sigma) \Psi \\
&\quad + M' A \Sigma B' \Psi C M + tr(A M B \Sigma) \Psi C M + tr(A \Sigma) \Psi B M C M) \\
&\quad + M' A M B M C M, \ A(p \times p), \ B(n \times p), \ C(n \times p) \\
(iii) \ E(X A X' B X C X) &= \frac{q}{q-4} (tr(B \Sigma) \Sigma C' \Psi A' \Psi + tr(A \Psi) \Sigma B \Sigma C' \Psi + \Sigma B' \Sigma C' \Psi A \Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (M A M' B \Sigma C' \Psi + tr(B M C \Sigma) M A \Psi + \Sigma C' M' B' M A' \Psi \\
&\quad + tr(B \Sigma) M A \Psi C M + \Sigma B' M A' \Psi C M + tr(A \Psi) \Sigma B M C M) \\
&\quad + M A M' B M C M, \ A(n \times n), \ B(p \times p), \ C(n \times p) \\
(iv) \ E(X' A X' B X C X) &= \frac{q}{q-4} (tr(A \Psi C \Sigma) tr(B \Sigma) \Psi + \Psi A' \Sigma B \Sigma C' \Psi + \Psi C \Sigma B \Sigma A \Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (M' A M' B \Sigma C' \Psi + tr(B M C \Sigma) M' A \Psi + tr(A M' B M C \Sigma) \Psi \\
&\quad + tr(B \Sigma) M' A \Psi C M + tr(A M' B \Sigma) \Psi C M + \Psi A' \Sigma B M C M) \\
&\quad + M' A M' B M C M, \ A(p \times n), \ B(p \times p), \ C(n \times p) \\
(v) \ E(X' A X B X' C X) &= \frac{q}{q-4} (tr(A \Sigma C \Sigma) tr(B \Psi) \Psi + tr(A \Sigma) tr(C \Sigma) \Psi B \Psi + tr(A \Sigma C' \Sigma) \Psi B' \Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (tr(C \Sigma) M' A M B \Psi + M' A \Sigma C' M B' \Psi + tr(A M B M' C \Sigma) \Psi \\
&\quad + tr(B \Psi) M' A \Sigma C M + \Psi B' M' A' \Sigma C M + tr(A \Sigma) \Psi B M' C M) \\
&\quad + M' A M B M' C M, \ A(p \times p), \ B(n \times n), \ C(p \times p) \\
(vi) \ E(X' A X B X C X') &= \frac{q}{q-4} (\Psi C' \Psi B \Sigma A' \Sigma + tr(A \Sigma) tr(C \Psi) \Psi B \Sigma + \Psi C \Psi B \Sigma A \Sigma) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (tr(C \Psi) M' A M B \Sigma + tr(B M C \Psi) M' A \Sigma + \Psi C' M' B' M' A' \Sigma \\
&\quad + M' A \Sigma B \Psi C M' + tr(A M B \Sigma) \Psi C M' + tr(A \Sigma) \Psi B M C M') \\
&\quad + M' A M B M C M', \ A(p \times p), \ B(n \times p), \ C(n \times n)
\end{aligned}$$

İspat: (i) $X A X B X C X$ matrisinin (i, j) – inci elemanı
 $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(XAXBXCX) &= E_U [E_{X|U} [XAXBXCX]] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} E_{X|U} [x_{ik} x_{lm} x_{os} x_{tj}] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{it} \psi_{kj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \psi_{ms} \right. \right. \\
&\quad + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} \psi_{km} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{to} \psi_{js} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} \psi_{ks} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tl} \psi_{jm} + m_{ik} m_{lm} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{to} \psi_{js} \\
&\quad + m_{ik} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tl} \psi_{jm} + m_{lm} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{it} \psi_{kj} + m_{ik} m_{tj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \psi_{ms} \\
&\quad \left. \left. + m_{tj} m_{lm} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} \psi_{ks} + m_{tj} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} \psi_{km} + m_{ik} m_{lm} m_{os} m_{tj} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{4}{q}} \left\{ \sigma_{it} c_{ts} \psi_{sm} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \psi_{kj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma_{il} a_{lk} \psi_{km} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} + \sigma_{io} b_{om} \psi_{mj} a_{kl} \sigma_{lt} c_{ts} \psi_{sk} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{2}{q}} \left\{ m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{ik} a_{kl} \sigma_{lt} c_{ts} m_{so} b_{om} \psi_{mj} + \sigma_{it} c_{ts} m_{so} b_{om} m_{ml} a_{lk} \psi_{kj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{ik} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} \psi_{ms} c_{st} m_{tj} + \sigma_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \psi_{ks} c_{st} m_{tj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma_{il} a_{lk} \psi_{km} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \right] \\
&= \frac{q}{q-4} (\Sigma C' \Psi B \Sigma A' \Psi + \Sigma A' \Psi B \Sigma C' \Psi + tr(A \Sigma C' \Psi) \Sigma B' \Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (M A M B \Sigma C' \Psi + M A \Sigma C' M' B' \Psi + \Sigma C' M' B' M' A' \Psi \\
&\quad + M A \Sigma B' \Psi C M + \Sigma B' M' A' \Psi C M + \Sigma A' \Psi B M C M) + M A M B M C M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $X' A X B X C X$ matrisinin (i, j) - inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X' A X B X C X) &= E_U [E_{X|U} [X' A X B X C X]] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} E_{X|U} [x_{ki} x_{lm} x_{os} x_{tj}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kt} \psi_{ij} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \psi_{ms} \right. \right. \\
&\quad + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kl} \psi_{im} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{to} \psi_{js} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ko} \psi_{is} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tl} \psi_{jm} + m_{ki} m_{lm} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{to} \psi_{js} \\
&\quad + m_{ki} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tl} \psi_{jm} + m_{lm} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kt} \psi_{ij} + m_{ki} m_{tj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \psi_{ms} \\
&\quad \left. \left. + m_{tj} m_{lm} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ko} \psi_{is} + m_{tj} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kl} \psi_{im} + m_{ki} m_{lm} m_{os} m_{tj} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{4}{q}} \left\{ \psi_{ij} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} \psi_{ms} c_{st} \sigma_{tk} \right. \right. \\
&\quad + \psi_{im} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} a_{kl} \sigma_{lk} + \psi_{is} c_{st} \sigma_{tl} a_{lk} \sigma_{ko} b_{om} \psi_{mj} \left. \right\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{2}{q}} \left\{ m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} \right. \\
&\quad + m_{ki} a_{kl} \sigma_{lt} c_{ts} m_{so} b_{om} \psi_{mj} + \psi_{ij} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} \sigma_{tk} \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} \psi_{ms} c_{st} m_{tj} + \psi_{is} c_{st} m_{tj} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ok} \\
&\quad \left. \left. + \psi_{im} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} a_{kl} \sigma_{lk} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \right] \\
&= \frac{q}{q-4} (tr(A\Sigma B' \Psi C \Sigma) \Psi + tr(A \Sigma) \Psi B \Sigma C' \Psi + \Psi C \Sigma A' \Sigma B' \Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (M' A M B \Sigma C' \Psi + M' A \Sigma C' M' B' \Psi + tr(AMB M C \Sigma) \Psi \\
&\quad + M' A \Sigma B' \Psi C M + tr(AMB \Sigma) \Psi C M + tr(A \Sigma) \Psi B M C M) \\
&\quad + M' A M B M C M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $XAX'BXCX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(XAX'BXCX) &= E_U [E_{X|U} [XAX'BXCX]] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} E_{X|U} [x_{ik} x_{ml} x_{os} x_{tj}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{it} \psi_{kj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mo} \psi_{ls} \right. \right. \\
&\quad + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{im} \psi_{kl} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{to} \psi_{js} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} \psi_{ks} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tm} \psi_{jl} + m_{ik} m_{ml} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{to} \psi_{js} \\
&\quad + m_{ik} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tm} \psi_{jl} + m_{ml} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{it} \psi_{kj} + m_{ik} m_{tj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mo} \psi_{ls} \\
&\quad \left. \left. + m_{tj} m_{ml} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} \psi_{ks} + m_{tj} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{im} \psi_{kl} + m_{ik} m_{ml} m_{os} m_{tj} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{4}{q}} \left\{ \sigma_{it} c_{ts} \psi_{sl} a_{lk} \psi_{kj} b_{mo} \sigma_{om} \right. \right. \\
&\quad + \sigma_{im} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} a_{kl} \psi_{lk} + \sigma_{io} b_{om} \sigma_{mt} c_{ts} \psi_{sk} a_{kl} \psi_{lj} \left. \right\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{2}{q}} \left\{ m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} \right. \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \psi_{lj} b_{mo} m_{os} c_{st} \sigma_{tm} + \sigma_{it} c_{ts} m_{so} b_{om} m_{ml} a_{lk} \psi_{kj} \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \psi_{ls} c_{st} m_{tj} b_{mo} \sigma_{om} + \sigma_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \psi_{ks} c_{st} m_{tj} \\
&\quad \left. \left. + \sigma_{im} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} a_{kl} \psi_{lk} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \right] \\
&= \frac{q}{q-4} (tr(B\Sigma) \Sigma C' \Psi A' \Psi + tr(A\Psi) \Sigma B \Sigma C' \Psi + \Sigma B' \Sigma C' \Psi A \Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (M A M' B \Sigma C' \Psi + tr(B M C \Sigma) M A \Psi + \Sigma C' M' B' M A' \Psi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +tr(B\Sigma)MA\Psi CM + \Sigma B'MA'\Psi CM + tr(A\Psi)\Sigma BMCM \\
& +MAM'BMCM
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $X'AX'BXCX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X'AX'BXCX) &= E_U [E_{X|U} [X'AX'BXCX]] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} E_{X|U} [x_{ki} x_{ml} x_{os} x_{tj}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kt} \Psi_{ij} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mo} \Psi_{ls} \right. \right. \\
&\quad + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{km} \Psi_{il} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{to} \Psi_{js} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ko} \Psi_{is} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tm} \Psi_{jl} + m_{ki} m_{ml} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{to} \Psi_{js} \\
&\quad + m_{ki} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tm} \Psi_{jl} + m_{ml} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kt} \Psi_{ij} + m_{ki} m_{tj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mo} \Psi_{ls} \\
&\quad \left. \left. + m_{tj} m_{ml} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ko} \Psi_{is} + m_{tj} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{km} \Psi_{il} + m_{ki} m_{ml} m_{os} m_{tj} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{4}{q}} \left\{ \Psi_{ij} a_{kl} \Psi_{ls} c_{st} \sigma_{tk} b_{mo} \sigma_{om} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \Psi_{sj} + \Psi_{is} c_{st} \sigma_{tm} b_{mo} \sigma_{ok} a_{kl} \Psi_{lj} \right\} \right. \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{2}{q}} \left\{ m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \Psi_{sj} \right. \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \Psi_{lj} b_{mo} m_{os} c_{st} \sigma_{tm} + \Psi_{ij} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} \sigma_{tk} \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \Psi_{ls} c_{st} m_{tj} b_{mo} \sigma_{om} + \Psi_{is} c_{st} m_{tj} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ok} \\
&\quad \left. \left. + \Psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \Big] \\
& = \frac{q}{q-4} (tr(A\Psi C\Sigma) tr(B\Sigma) \Psi + \Psi A' \Sigma B \Sigma C' \Psi + \Psi C \Sigma B \Sigma A \Psi) \\
& \quad + \frac{q}{q-2} (M' A M' B \Sigma C' \Psi + tr(B M C \Sigma) M' A \Psi + tr(A M' B M C \Sigma) \Psi \\
& \quad + tr(B \Sigma) M' A \Psi C M + tr(A M' B \Sigma) \Psi C M + \Psi A' \Sigma B M C M) \\
& \quad + M' A M' B M C M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) $X' A X' B X C X$ matrisinin (i, j) - inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{so} c_{st} x_{tj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X' A X B X' C X) & = E_U [E_{X|U} [X' A X B X' C X]] \\
& = E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{so} c_{st} x_{tj} \right] \right] \\
& = E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} E_{X|U} [x_{ki} x_{lm} x_{so} x_{tj}] \right] \\
& = E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kt} \Psi_{ij} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ls} \Psi_{mo} \right. \right. \\
& \quad + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kl} \Psi_{im} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ts} \Psi_{jo} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ks} \Psi_{io} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tl} \Psi_{jm} + m_{ki} m_{lm} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ts} \Psi_{jo} \\
& \quad + m_{ki} m_{so} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tl} \Psi_{jm} + m_{lm} m_{so} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kt} \Psi_{ij} + m_{ki} m_{tj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ls} \Psi_{mo} \\
& \quad \left. \left. + m_{tj} m_{lm} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ks} \Psi_{io} + m_{tj} m_{so} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kl} \Psi_{im} + m_{ki} m_{lm} m_{so} m_{tj} \right\} \right] \\
& = E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{4}{q}} \left\{ \Psi_{ij} a_{kl} \Psi_{ls} c_{st} \sigma_{tk} b_{mo} \sigma_{om} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \Psi_{im} b_{mo} \Psi_{oj} a_{kl} \sigma_{lk} c_{st} \sigma_{ts} + \Psi_{io} b_{om} \Psi_{jm} a_{kl} \sigma_{lt} c_{ts} \sigma_{sk} \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{2}{q}} \left\{ m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \Psi_{oj} c_{st} \sigma_{ts} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m_{ik}a_{kl}\sigma_{lt}c_{ts}m_{so}b_{om}\Psi_{mj} + \Psi_{ij}a_{kl}m_{lm}b_{mo}m_{os}c_{st}\sigma_{tk} \\
& +m_{ik}a_{kl}\sigma_{ls}c_{st}m_{tj}b_{mo}\Psi_{om} + \Psi_{io}b_{om}m_{ml}a_{lk}\sigma_{ks}c_{st}m_{tj} \\
& +\Psi_{im}b_{mo}m_{os}c_{st}m_{tj}a_{kl}\sigma_{lk}\} \\
& +\sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^p m_{ik}a_{kl}m_{lm}b_{mo}m_{os}c_{st}m_{tj}\Big] \\
& =\frac{q}{q-4}(tr(A\Sigma C\Sigma)tr(B\Psi)\Psi + tr(A\Sigma)tr(C\Sigma)\Psi B\Psi + tr(A\Sigma C'\Sigma)\Psi B'\Psi) \\
& +\frac{q}{q-2}(tr(C\Sigma)M'AMB\Psi + M'A\Sigma C'MB'\Psi + tr(AMBM'C\Sigma)\Psi \\
& +tr(B\Psi)M'A\Sigma CM + \Psi B'M'A'\Sigma CM + tr(A\Sigma)\Psi BM'CM) \\
& +M'AMBM'CM
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vi) $X'AXBXCX'$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^p x_{ki}a_{kl}x_{lm}b_{mo}x_{os}c_{st}x_{jt}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X'AXBXCX) & = E_U[E_{X|U}[X'AXBXCX]] \\
& = E_U\left[E_{X|U}\left[\sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^p x_{ki}a_{kl}x_{lm}b_{mo}x_{os}c_{st}x_{jt}\right]\right] \\
& = E_U\left[\sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^p a_{kl}b_{mo}c_{st}E_{X|U}[x_{ki}x_{lm}x_{os}x_{jt}]\right] \\
& = E_U\left[\sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^p a_{kl}b_{mo}c_{st}\left\{u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{kj}\Psi_{it}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{lo}\Psi_{ms}\right. \right. \\
& \quad +u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{kl}\Psi_{im}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{jo}\Psi_{ts} + u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{ko}\Psi_{is}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{jl}\Psi_{tm} + m_{ki}m_{lm}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{jo}\Psi_{ts} \\
& \quad +m_{ki}m_{os}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{jl}\Psi_{tm} + m_{lm}m_{os}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{kj}\Psi_{it} + m_{ki}m_{jt}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{lo}\Psi_{ms} \\
& \quad \left. +m_{jt}m_{lm}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{ko}\Psi_{is} + m_{jt}m_{os}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{kl}\Psi_{im} + m_{ki}m_{lm}m_{os}m_{jt}\right\}\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n u^{-\frac{4}{q}} \left\{ \Psi_{it} C_{ts} \Psi_{sm} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \sigma_{kj} \right. \right. \\
&\quad + \Psi_{im} b_{mo} \sigma_{oj} a_{kl} \sigma_{lk} C_{st} \Psi_{ts} + \Psi_{is} C_{st} \Psi_{tm} b_{mo} \sigma_{ok} a_{kl} \sigma_{lj} \left. \right\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n u^{-\frac{2}{q}} \left\{ m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{oj} C_{st} \Psi_{ts} \right. \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \sigma_{lj} b_{mo} m_{os} C_{st} \Psi_{tm} + \Psi_{it} C_{ts} m_{so} b_{om} m_{ml} a_{lk} \sigma_{kj} \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} \Psi_{ms} C_{st} m_{tj} + \Psi_{is} C_{st} m_{tj} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ok} \\
&\quad + \left. \Psi_{im} b_{mo} m_{os} C_{st} m_{tj} a_{kl} \sigma_{lk} \right\} \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} C_{st} m_{jt} \right] \\
&= \frac{q}{q-4} (\Psi C' \Psi B \Sigma A' \Sigma + tr(A \Sigma) tr(C \Psi) \Psi B \Sigma + \Psi C \Psi B \Sigma A \Sigma) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (tr(C \Psi) M' A M B \Sigma + tr(B M C \Psi) M' A \Sigma + \Psi C' M' B' M' A' \Sigma \\
&\quad + M' A \Sigma B \Psi C M' + tr(A M B \Sigma) \Psi C M' + tr(A \Sigma) \Psi B M C M') \\
&\quad + M' A M B M C M'
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.13 $X \sim MVSl_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$ olsun. Bu durumda $q > 4$ için

$$\begin{aligned}
(i) \ E(tr(X B X C X') X A) &= \frac{q}{q-4} (\Sigma^2 B' \Psi C \Psi A + tr(C \Psi) \Sigma^2 B' \Psi A + tr(\Sigma) \Sigma B' \Psi C' \Psi A) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (tr(B \Sigma M) tr(C \Psi) M A + tr(B M C \Psi) tr(\Sigma) M A \\
&\quad + \Sigma M B M C \Psi A + tr(B \Sigma M C' \Psi) M A + \Sigma B' M' M C' \Psi A \\
&\quad + \Sigma M C' M' B' \Psi A) + tr(M B M C M') M A \\
&\quad A(n \times n), B(n \times p), C(n \times n) \\
(ii) \ E(tr(B X C X') X A X) &= \frac{q}{q-4} (\Sigma B \Sigma A' \Psi C' \Psi + tr(B \Sigma) tr(C \Psi) \Sigma A' \Psi + \Sigma B' \Sigma A' \Psi C \Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (tr(B \Sigma) tr(C \Psi) M A M + M A \Sigma B M C \Psi + \Sigma B M C \Psi A M \\
&\quad + M A \Sigma B' M C' \Psi + \Sigma B' M C' \Psi A M + tr(B M C M') \Sigma A' \Psi \\
&\quad + tr(B M C M') M A M, A(n \times p), B(p \times p), C(n \times n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iii) \ E(tr(BXCX')X'AX) &= \frac{q}{q-4} (tr(A\Sigma B'\Sigma)\Psi C'\Psi + tr(A\Sigma)tr(B\Sigma)tr(C\Psi)\Psi \\
&\quad + tr(A\Sigma B\Sigma)\Psi C\Psi) + \frac{q}{q-2} (tr(B\Sigma)tr(C\Psi)M'AM \\
&\quad + M'A\Sigma BMC\Psi + \Psi C'M'B'\Sigma AM + M'A\Sigma B'MC'\Psi \\
&\quad + \Psi CM'B\Sigma AM + tr(A\Sigma)tr(BMCM')\Psi) \\
&\quad + tr(BMCM')M'AM, A(p \times p), B(p \times p), C(n \times n) \\
\\
(iv) \ E(tr(AX)XBXCX) &= \frac{q}{q-4} (\Sigma A'\Psi B\Sigma C'\Psi + \Sigma B'\Psi C\Sigma A'\Psi + \Sigma C'\Psi A\Sigma B'\Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (MBMC\Sigma A'\Psi + MB\Sigma A'\Psi CM + \Sigma A'\Psi BMCM \\
&\quad + tr(AM)MB\Sigma C'\Psi + tr(AM)\Sigma C'M'B'\Psi + tr(AM)\Sigma B'\Psi CM) \\
&\quad + tr((AM)MBMC\Sigma), A(n \times p), B(n \times p), C(n \times p) \\
\\
(v) \ E(tr(AX)X'BXCX) &= \frac{q}{q-4} (\Psi A\Sigma B\Sigma C'\Psi + tr(B\Sigma)\Psi C\Sigma A'\Psi + tr(B\Sigma A'\Psi C\Sigma)\Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (M'BM C\Sigma A'\Psi + M'B\Sigma A'\Psi CM + \Psi A\Sigma BMCM \\
&\quad + tr(AM)M'B\Sigma C'\Psi + tr(BMC\Sigma)tr(AM)\Psi \\
&\quad + tr(BM)tr(AM)\Psi CM) + tr(AM)M'BMCM \\
&\quad A(n \times p), B(p \times p), C(n \times p) \\
\\
(vi) \ E(tr(AX)X'BX'CX) &= \frac{q}{q-4} (tr(C\Sigma)\Psi A\Sigma B\Psi + \Psi B'\Sigma C\Sigma A'\Psi + tr(B\Psi A\Sigma C\Sigma)\Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (M'BM'C\Sigma A'\Psi + M'B\Psi A\Sigma CM + \Psi A\Sigma BM'CM \\
&\quad + tr(C\Sigma)tr(AM)M'B\Psi + tr(BM'C\Sigma)tr(AM)\Psi \\
&\quad + \Psi B'\Sigma CMAM) + tr(AM)M'BM'CM \\
&\quad A(n \times p), B(p \times n), C(p \times p) \\
\\
(vii) \ E(tr(AX)X'BXCX') &= \frac{q}{q-4} (tr(C\Psi)\Psi A\Sigma B\Sigma + tr(B\Sigma)\Psi C\Psi A\Sigma + \Psi C'\Psi A\Sigma B'\Sigma) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (M'BM C\Psi A\Sigma + M'B\Sigma A'\Psi CM' + \Psi A\Sigma BMCM' \\
&\quad + tr(C\Psi)tr(AM)M'B\Sigma + tr(AM)\Psi C'M'B'\Sigma \\
&\quad + tr(B\Sigma)tr(AM)\Psi CM') + tr(AM)M'BMCM' \\
&\quad A(n \times p), B(p \times p), C(n \times n)
\end{aligned}$$

İspat: (i) $tr(XBXCX')XA$ matrisinin (i, j) - inci elemanı
 $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ik} a_{kj} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{lt}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(XBXCX')XA) &= E_U [E_{X|U} [tr(XBXCX')XA]] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ik} a_{kj} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{lt} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kj} b_{mo} c_{st} E_{X|U} [x_{ik} x_{lm} x_{os} x_{lt}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kj} b_{mo} c_{st} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} \psi_{kt} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \psi_{ms} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} \psi_{km} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \psi_{ts} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} \psi_{ks} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ll} \psi_{tm} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m_{ik}m_{lm}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{lo}\Psi_{ts}+m_{ik}m_{os}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{il}\Psi_{tm} \\
& +m_{lm}m_{os}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{il}\Psi_{kt}+m_{ik}m_{lt}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{lo}\Psi_{ms} \\
& +m_{lt}m_{lm}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{io}\Psi_{ks}+m_{lt}m_{os}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{il}\Psi_{km} \\
& +m_{ik}m_{lm}m_{os}m_{lt}\} \\
& =E_U\left[\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^n\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n u^{-\frac{4}{q}}\left\{\sigma_{il}\sigma_{lo}b_{om}\Psi_{ms}c_{st}\Psi_{tk}a_{kj}\right. \right. \\
& \quad +\sigma_{il}\sigma_{lo}b_{om}\Psi_{mk}a_{kj}c_{st}\Psi_{ts}+\sigma_{io}b_{om}\Psi_{mt}c_{ts}\Psi_{sk}a_{kj}\sigma_{il}\} \\
& \quad +\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^n\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n u^{-\frac{2}{q}}\left\{m_{ik}a_{kj}b_{mo}\sigma_{ol}m_{lm}c_{st}\Psi_{ts}\right. \\
& \quad +m_{ik}a_{kj}b_{mo}m_{os}c_{st}\Psi_{tm}\sigma_{il}+\sigma_{il}m_{lm}b_{mo}m_{os}c_{st}\Psi_{tk}a_{kj} \\
& \quad +m_{ik}a_{kj}b_{mo}\sigma_{ol}m_{lt}c_{ts}\Psi_{sm}+\sigma_{io}b_{om}m_{ml}m_{lt}c_{ts}\Psi_{sk}a_{kj} \\
& \quad \left. +\sigma_{il}m_{lt}c_{ts}m_{so}b_{om}\Psi_{mk}a_{kj}\right\} \\
& \quad \left. +\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^n\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n m_{ik}a_{kj}m_{lm}b_{mo}m_{os}c_{st}m_{tl}\right] \\
& =\frac{q}{q-4}\left(\Sigma^2B'\Psi C\Psi A+tr(C\Psi)\Sigma^2B'\Psi A+tr(\Sigma)\Sigma B'\Psi C'\Psi A\right) \\
& \quad +\frac{q}{q-2}\left(tr(B\Sigma M)tr(C\Psi)MA+tr(BMC\Psi)tr(\Sigma)MA\right. \\
& \quad +\Sigma MBMC\Psi A+tr(B\Sigma MC'\Psi)MA+\Sigma B'M'MC'\Psi A \\
& \quad \left. +\Sigma MC'M'B'\Psi A)+tr(MBMC'M')MA\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $tr(BXCX')XAX$ matrisinin (i, j) — inci elemanı $\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n x_{ik}a_{kl}x_{lj}b_{mo}x_{os}c_{st}x_{mt}$ olur. Bu durumda

$$E(tr(BXCX')XAX)=E_U\left[E_{X|U}\left[tr(BXCX')XAX\right]\right]$$

$$\begin{aligned}
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{lj} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{mt} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kl} b_{mo} c_{st} E_{X|U} [x_{ik} x_{lj} x_{os} x_{mt}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kl} b_{mo} c_{st} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{im} \Psi_{kt} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \Psi_{js} \right. \right. \\
&\quad + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} \Psi_{kj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mo} \Psi_{ts} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} \Psi_{ks} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ml} \Psi_{tj} \\
&\quad + m_{ik} m_{lj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mo} \Psi_{ts} + m_{ik} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ml} \Psi_{tj} \\
&\quad + m_{lj} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{im} \Psi_{kt} + m_{ik} m_{mt} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \Psi_{js} \\
&\quad + m_{mt} m_{lj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} \Psi_{ks} + m_{mt} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} \Psi_{kj} \\
&\quad \left. \left. + m_{ik} m_{lj} m_{os} m_{mt} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n u^{-\frac{4}{q}} \left\{ \sigma_{im} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \Psi_{kt} c_{ts} \Psi_{sj} \right. \right. \\
&\quad + \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{kj} b_{mo} \sigma_{om} c_{st} \Psi_{ts} + \sigma_{io} b_{om} \sigma_{ml} a_{lk} \Psi_{ks} c_{st} \Psi_{tj} \left. \right\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n u^{-\frac{2}{q}} \left\{ m_{ik} a_{kl} m_{lj} b_{mo} \sigma_{om} c_{st} \Psi_{ts} \right. \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \sigma_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} \Psi_{tj} + \sigma_{im} b_{mo} m_{os} c_{st} \Psi_{tk} a_{kl} m_{lj} \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} m_{mt} c_{ts} \Psi_{sj} + \sigma_{io} b_{om} m_{mt} c_{ts} \Psi_{sk} a_{kl} m_{lj} \\
&\quad \left. \left. + \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{kj} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tm} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ik} a_{kl} m_{lj} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tm} \right] \\
&= \frac{q}{q-4} (\Sigma B \Sigma A' \Psi C' \Psi + \text{tr}(B \Sigma) \text{tr}(C \Psi) \Sigma A' \Psi + \Sigma B' \Sigma A' \Psi C \Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (\text{tr}(B \Sigma) \text{tr}(C \Psi) M A M + M A \Sigma B M C \Psi \\
&\quad + \Sigma B M C \Psi A M + M A \Sigma B' M C' \Psi + \Sigma B' M C' \Psi A M)
\end{aligned}$$

$$+tr(BMCM')\Sigma A'\Psi) + tr(BMCM')MAM$$

elde edilir.

(iii) $tr(BXCX')X'AX$ matrisinin (i, j) — inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{lj} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{mt}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} E(tr(BXCX')X'AX) &= E_U [E_{X|U} [tr(BXCX')X'AX]] \\ &= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{lj} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{mt} \right] \right] \\ &= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kl} b_{mo} c_{st} E_{X|U} [x_{ki} x_{lj} x_{os} x_{mt}] \right] \\ &= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kl} b_{mo} c_{st} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{km} \Psi_{it} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \Psi_{js} \right. \right. \\ &\quad + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kl} \Psi_{ij} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mo} \Psi_{ts} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ko} \Psi_{is} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ml} \Psi_{tj} \\ &\quad + m_{ki} m_{lj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mo} \Psi_{ts} + m_{ki} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ml} \Psi_{tj} \\ &\quad + m_{lj} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{km} \Psi_{it} + m_{ki} m_{mt} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \Psi_{js} \\ &\quad + m_{mt} m_{lj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ko} \Psi_{is} + m_{mt} m_{os} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kl} \Psi_{ij} \\ &\quad \left. \left. + m_{ki} m_{lj} m_{os} m_{mt} \right\} \right] \\ &= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n u^{-\frac{4}{q}} \left\{ \Psi_{it} c_{ts} \Psi_{sj} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} \sigma_{mk} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Psi_{ij} a_{kl} \sigma_{lk} b_{mo} \sigma_{om} c_{st} \Psi_{ts} + \Psi_{is} c_{st} \Psi_{tj} a_{kl} \sigma_{lm} b_{mo} \sigma_{ok} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n u^{-\frac{2}{q}} \left\{ m_{ki} a_{kl} m_{lj} b_{mo} \sigma_{om} c_{st} \Psi_{ts} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_{ki} a_{kl} \sigma_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} \Psi_{tj} + \Psi_{it} c_{ts} m_{so} b_{om} \sigma_{mk} a_{kl} m_{lj} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_{ki} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} m_{mt} c_{ts} \Psi_{sj} + \Psi_{is} c_{st} m_{mt} b_{mo} \sigma_{ok} a_{kl} m_{lj} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Psi_{ij} a_{kl} \sigma_{lk} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{mt} \Big\} \\
& + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ki} a_{kl} m_{lj} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{mt} \Big] \\
& = \frac{q}{q-4} (tr(A\Sigma B'\Sigma) \Psi C' \Psi + tr(A\Sigma) tr(B\Sigma) tr(C\Psi) \Psi + tr(A\Sigma B\Sigma) \Psi C \Psi) \\
& + \frac{q}{q-2} (tr(B\Sigma) tr(C\Psi) M'AM + M'A\Sigma BMC\Psi + \Psi C' M' B' \Sigma AM \\
& + M'A\Sigma B' MC' \Psi + \Psi CM' B \Sigma AM + tr(A\Sigma) tr(BMCM') \Psi) \\
& + tr(BMCM') MAM
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $tr(AX)XBXCX$ matrisinin (i, j) -inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)XBXCX) &= E_U [E_{X|U} [tr(AX)XBXCX]] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} E_{X|U} [x_{ik} x_{lm} x_{oj} x_{ts}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{it} \Psi_{ks} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \Psi_{mj} \right. \right. \\
&\quad + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} \Psi_{km} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{to} \Psi_{sj} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} \Psi_{kj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tl} \Psi_{sm} \\
&\quad + m_{ik} m_{lm} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{to} \Psi_{sj} + m_{ik} m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tl} \Psi_{sm} \\
&\quad + m_{lm} m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{it} \Psi_{ks} + m_{ik} m_{ts} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \Psi_{mj} \\
&\quad + m_{ts} m_{lm} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{io} \Psi_{kj} + m_{ts} m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{il} \Psi_{km} \\
&\quad \left. \left. + m_{ik} m_{lm} m_{oj} m_{ts} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_U \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{4}{q}} \left\{ \sigma_{it} a_{ts} \Psi_{sk} b_{kl} \sigma_{lo} c_{om} \Psi_{mj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma_{il} b_{lk} \Psi_{km} c_{mo} \sigma_{ot} a_{ts} \Psi_{sj} + \sigma_{io} c_{om} \Psi_{ms} a_{st} \sigma_{tl} b_{lk} \Psi_{kj} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{2}{q}} \left\{ m_{ik} b_{kl} m_{lm} c_{mo} \sigma_{ot} a_{ts} \Psi_{sj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{ik} b_{kl} \sigma_{lt} a_{ts} \Psi_{sm} c_{mo} m_{oj} + \sigma_{it} a_{ts} \Psi_{sk} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{oj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{ik} b_{kl} \sigma_{lo} c_{om} \Psi_{mj} a_{st} m_{ts} + \sigma_{io} c_{om} m_{ml} b_{lk} \Psi_{kj} a_{st} m_{ts} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma_{il} b_{lk} \Psi_{km} c_{mo} m_{oj} a_{st} m_{ts} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{oj} a_{st} m_{ts} \right] \\
&= \frac{q}{q-4} (\Sigma A' \Psi B \Sigma C' \Psi + \Sigma B' \Psi C \Sigma A' \Psi + \Sigma C' \Psi A \Sigma B' \Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (M B M C \Sigma A' \Psi + M B \Sigma A' \Psi C M + \Sigma A' \Psi B M C M \\
&\quad + tr(AM) M B \Sigma C' \Psi + tr(AM) \Sigma C' M' B' \Psi + tr(AM) \Sigma B' \Psi C M) \\
&\quad + tr(AM) M B M C M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) $tr(AX)X'BXCX$ matrisinin (i, j) — inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)X'BXCX) &= E_U [E_{X|U} [tr(AX)X'BXCX]] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} E_{X|U} [x_{ki} x_{lm} x_{oj} x_{ts}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kt} \Psi_{is} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \Psi_{mj} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{kl}\Psi_{im}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{to}\Psi_{sj}+u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{ko}\Psi_{ij}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{tl}\Psi_{sm} \\
& +m_{ki}m_{lm}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{to}\Psi_{sj}+m_{ki}m_{oj}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{tl}\Psi_{sm} \\
& +m_{lm}m_{oj}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{kt}\Psi_{is}+m_{ki}m_{ts}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{lo}\Psi_{mj} \\
& +m_{ts}m_{lm}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{ko}\Psi_{ij}+m_{ts}m_{oj}u^{-\frac{2}{q}}\sigma_{kl}\Psi_{im} \\
& +m_{ki}m_{lm}m_{oj}m_{ts}\} \\
& =E_U\left[\sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^n\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^p u^{-\frac{4}{q}}\left\{\Psi_{is}a_{st}\sigma_{tk}b_{kl}\sigma_{lo}c_{om}\Psi_{mj}\right.\right. \\
& \left.\left.+\Psi_{im}c_{mo}\sigma_{ot}a_{ts}\Psi_{sj}b_{kl}\sigma_{lk}+\Psi_{ij}b_{kl}\sigma_{lt}a_{ts}\Psi_{sm}c_{mo}\sigma_{ok}\right\}\right. \\
& \left.+\sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^n\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^p u^{-\frac{2}{q}}\left\{m_{ki}b_{kl}m_{lm}c_{mo}\sigma_{ot}a_{ts}\Psi_{sj}\right.\right. \\
& \left.+m_{ki}b_{kl}\sigma_{lt}a_{ts}\Psi_{sm}c_{mo}m_{oj}+\Psi_{is}a_{st}\sigma_{tk}b_{kl}m_{lm}c_{mo}m_{oj}\right. \\
& \left.+m_{ki}b_{kl}\sigma_{lo}c_{om}\Psi_{mj}a_{st}m_{ts}+\Psi_{ij}b_{kl}m_{lm}c_{mo}\sigma_{ok}a_{st}m_{ts}\right. \\
& \left.+\Psi_{im}c_{mo}m_{oj}b_{kl}\sigma_{lk}a_{st}m_{ts}\right\} \\
& \left.+\sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^n\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^p m_{ki}b_{kl}m_{lm}c_{mo}m_{oj}a_{st}m_{ts}\right] \\
& =\frac{q}{q-4}(\Psi A\Sigma B\Sigma C'\Psi+tr(B\Sigma)\Psi C\Sigma A'\Psi+tr(B\Sigma A'\Psi C\Sigma)\Psi) \\
& +\frac{q}{q-2}(M'BM C\Sigma A'\Psi+M'B\Sigma A'\Psi CM+\Psi A\Sigma BM CM \\
& +tr(AM)M'B\Sigma C'\Psi+tr(BM C\Sigma)tr(AM)\Psi+tr(B\Sigma)tr(AM)\Psi CM) \\
& +tr(AM)M'BM CM
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vi) $tr(AX)X'BX'CX$ matrisinin (i, j) - inci elemanı $\sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^n\sum_{s=1}^p\sum_{t=1}^p x_{ki}b_{kl}x_{ml}c_{mo}x_{oj}a_{st}x_{ts}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E (tr (AX) X' BX' CX) &= E_U [E_{X|U} [tr (AX) X' BX' CX]] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{ml} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} E_{X|U} [x_{ki} x_{ml} x_{oj} x_{ts}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kt} \Psi_{is} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mo} \Psi_{lj} \right. \right. \\
&\quad + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{km} \Psi_{il} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{to} \Psi_{sj} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ko} \Psi_{ij} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tm} \Psi_{sl} \\
&\quad + m_{ki} m_{ml} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{to} \Psi_{sj} + m_{ki} m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tm} \Psi_{sl} \\
&\quad + m_{ml} m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kt} \Psi_{is} + m_{ki} m_{ts} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{mo} \Psi_{lj} \\
&\quad + m_{ts} m_{ml} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ko} \Psi_{ij} + m_{ts} m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{km} \Psi_{il} \\
&\quad \left. \left. + m_{ki} m_{ml} m_{oj} m_{ts} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{4}{q}} \left\{ \Psi_{is} a_{st} \sigma_{tk} b_{kl} \Psi_{lj} c_{mo} \sigma_{om} \right. \right. \\
&\quad + \Psi_{il} b_{lk} \sigma_{km} c_{mo} \sigma_{ot} a_{ts} \Psi_{sj} + \Psi_{ij} b_{kl} \Psi_{ls} a_{st} \sigma_{tm} c_{mo} \sigma_{ok} \left. \right\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{2}{q}} \left\{ m_{ki} b_{kl} m_{ml} c_{mo} \sigma_{ot} a_{ts} \Psi_{sj} \right. \\
&\quad + m_{ki} b_{kl} \Psi_{ls} a_{st} \sigma_{tm} c_{mo} m_{oj} + \Psi_{is} a_{st} \sigma_{tk} b_{kl} m_{ml} c_{mo} m_{oj} \\
&\quad + m_{ki} b_{kl} \Psi_{lj} c_{mo} \sigma_{om} a_{st} m_{ts} + \Psi_{ij} b_{kl} m_{ml} c_{mo} \sigma_{ok} a_{st} m_{ts} \\
&\quad \left. \left. + \Psi_{il} b_{lk} \sigma_{km} c_{mo} m_{oj} a_{st} m_{ts} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} m_{ml} c_{mo} m_{oj} a_{st} m_{ts} \right] \\
&= \frac{q}{q-4} (tr (C\Sigma) \Psi A \Sigma B \Psi + \Psi B' \Sigma C \Sigma A' \Psi + tr (B \Psi A \Sigma C \Sigma) \Psi) \\
&\quad + \frac{q}{q-2} (M' B M' C \Sigma A' \Psi + M' B \Psi A \Sigma C M + \Psi A \Sigma B M' C M)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +tr(C\Sigma)tr(AM)M'B\Psi + tr(BM'C\Sigma)tr(AM)\Psi + \Psi B'\Sigma CMAM) \\
& +tr(AM)M'BM'CM
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vii) $tr(AX)X'BXCX'$ matrisinin (i, j) — inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{jo} a_{st} x_{ts}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)X'BXCX') &= E_U [E_{X|U} [tr(AX)X'BXCX']] \\
&= E_U \left[E_{X|U} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{jo} a_{st} x_{ts} \right] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} E_{X|U} [x_{ki} x_{lm} x_{jo} x_{ts}] \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kt} \Psi_{is} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lj} \Psi_{mo} \right. \right. \\
&\quad + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kl} \Psi_{im} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tj} \Psi_{so} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kj} \Psi_{io} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tl} \Psi_{sm} \\
&\quad + m_{ki} m_{lm} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tj} \Psi_{so} + m_{ki} m_{jo} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tl} \Psi_{sm} \\
&\quad + m_{lm} m_{jo} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kt} \Psi_{is} + m_{ki} m_{ts} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lj} \Psi_{mo} \\
&\quad + m_{ts} m_{lm} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kj} \Psi_{io} + m_{ts} m_{jo} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kl} \Psi_{im} \\
&\quad \left. \left. + m_{ki} m_{lm} m_{jo} m_{ts} \right\} \right] \\
&= E_U \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{4}{q}} \left\{ \Psi_{is} a_{st} \sigma_{tk} b_{kl} \sigma_{lj} c_{mo} \Psi_{om} \right. \right. \\
&\quad + \Psi_{im} c_{mo} \Psi_{os} a_{st} \sigma_{tj} b_{kl} \sigma_{lk} + \Psi_{io} c_{om} \Psi_{ms} a_{st} \sigma_{tl} b_{lk} \sigma_{kj} \left. \right\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{2}{q}} \left\{ m_{ki} b_{kl} m_{lm} c_{mo} \Psi_{os} a_{st} \sigma_{tj} \right. \\
&\quad + m_{ki} b_{kl} \sigma_{lt} a_{ts} \Psi_{sm} c_{mo} m_{jo} + \Psi_{is} a_{st} \sigma_{tk} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{jo} \\
&\quad \left. \left. + m_{ki} b_{kl} \sigma_{lj} c_{mo} \Psi_{om} a_{st} m_{ts} + \Psi_{io} c_{om} m_{ml} b_{lk} \sigma_{kj} a_{st} m_{ts} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Psi_{im} c_{mo} m_{jo} b_{kl} \sigma_{lk} a_{st} m_{ts} \} \\
& + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{jo} a_{st} m_{ts} \Big] \\
& = \frac{q}{q-4} (tr(C\Psi) \Psi A \Sigma B \Sigma + tr(B\Sigma) \Psi C \Psi A \Sigma + \Psi C' \Psi A \Sigma B' \Sigma) \\
& + \frac{q}{q-2} (M' B M C \Psi A \Sigma + M' B \Sigma A' \Psi C M' + \Psi A \Sigma B M C M' \\
& + tr(C\Psi) tr(AM) M' B \Sigma + tr(AM) \Psi C' M' B' \Sigma + tr(B\Sigma) tr(AM) \Psi C M') \\
& + tr(AM) M' B M C M'
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

3.3 Matris Değişkenli Slash Dağılımın Parametre Tahmini

Bu bölümde matris değişkenli slash dağılımın parametre tahminleri incelenecektir. Parametrelerin tahmini için en uygun yol en çok olabilirlik tahmin edicisidir. Fakat slash dağılımın likelihood fonksiyonunun karmaşık olmasından dolayı parametrelerin tahmini için EM algoritması kullanılacaktır. Slash dağılım ölçek karması olarak tanımlandığından bu tanımlama EM algoritmasının kullanılmasında kolaylık sağlayacaktır. EM algoritması veride kayıp gözlem olması durumunda en çok olabilirlik tahminlerinin elde edilmesi için kullanılan güçlü bir algoritmadır. Slash dağılımı tanımlarken kullanılan karma değişkeni kayıp gözlem olarak düşünülürse dağılımın parametrelerinin tahmini EM algoritması yardımıyla kolayca yapılabilir. Eşitlik 3.1'de verilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun log-likelihood fonksiyonu aşağıda verildiği gibidir.

$$\begin{aligned}
l(M, \Sigma, \Psi) &= -\frac{np}{2} \ln(2\pi) - \frac{nl}{2} \ln |\Sigma| - \frac{pl}{2} \ln |\Psi| \\
&+ \sum_{i=1}^l \ln \left\{ \int_0^1 u^{\frac{pm}{q}} \exp \left\{ -\frac{u^{\frac{2}{q}}}{2} tr [\Sigma^{-1} (X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)'] \right\} du \right\}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Eşitlik'de verilen log-likelihood fonksiyonunun maksimizasyonu kolay değildir. Bu yüzden parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicileri kolayca elde edilemez. Slash dağılımın ölçek

karması gösteriminin avantajından dolayı dağılımın en çok olabilirlik tahmin edicilerinin bulunması için EM algoritması uygulanabilir.

Tanım 3.1’de verilen ölçek karması gösteriminde $i = 1, 2, \dots, l$ için (X_i, U_i) tam veri olarak tanımlansın, burada X_i ve U_i ’ler sırasıyla gözlemlenen ve kayıp veri olarak tanımlanıyor. X ve U değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(X, u) = (2\pi)^{-\frac{np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}} u^{\frac{pn}{q}} \exp \left\{ -\frac{u^{\frac{2}{q}}}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} (X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)'] \right\} \quad (3.6)$$

şeklindedir. Tam veri için log-likelihood fonksiyonu Eşitlik 3.7’de verilmiştir.

$$\begin{aligned} L(M, \Sigma, \Psi) &= -\frac{1}{2} npl \ln(2\pi) - \frac{1}{2} nl \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} pl \ln |\Psi| + \frac{pn}{q} \sum_{i=1}^l \ln(U_i) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l U_i^{\frac{2}{q}} \text{tr} [\Sigma^{-1} (X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)'] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Eşitlik 3.7’de dördüncü terim herhangi bir parametre içermediğinden bu terimi ihmal edebiliriz. $L(M, \Sigma, \Psi)$ fonksiyonunu maksimize ederek elde edeceğimiz tahmin ediciler U değişkenine bağlıdır. Fakat U değişkeni kayıp gözlem olduğundan gözlemleyemiyoruz. Bu problemle başa çıkmak için gözlemlenen X_i değerleri ve $\hat{M}$, $\hat{\Sigma}$ ve $\hat{\Psi}$ parametrelerinin şu anki değerleri verildiğinde $L(M, \Sigma, \Psi)$ fonksiyonunun koşullu beklenen değerini hesaplayacağız. Dördüncü terimi ihmal edip $L(M, \Sigma, \Psi)$ fonksiyonunun koşullu beklenen değerini alırsak Eşitlik 3.8’ de verilen amaç fonksiyonu elde edilir.

$$\begin{aligned} Q(M, \Sigma, \Psi) &= E \left[L(M, \Sigma, \Psi) | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right] \\ &= -\frac{1}{2} npl \ln(2\pi) - \frac{1}{2} nl \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} pl \ln |\Psi| \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l E \left[U_i^{\frac{2}{q}} | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right] \text{tr} [\Sigma^{-1} (X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)'] \end{aligned} \quad (3.8)$$

burada $E \left[U_i^{\frac{2}{q}} | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right]$ gözlemlenen X_i değerleri ve parametrelerinin şu anki değerleri verildiğinde $U_i^{\frac{2}{q}}$ değişkeninin koşullu beklenen değeridir. Bu koşullu beklenen değerin hesaplanması için X verildiğinde U ’nun koşullu dağılımını hesaplamalıyız. Bu koşullu beklenen

değer Eşitlik 3.9'da verildiği gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
 f_{U|X}(u|X) &= \frac{f(X, u)}{f(X)} \\
 &= \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}np} |\Sigma|^{-\frac{p}{2}} |\Psi|^{-\frac{n}{2}} u^{\frac{pn}{q}} \exp \left\{ -\frac{u^{\frac{2}{q}}}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} (X - M) \Psi^{-1} (X - M)'] \right\}}{q 2^{\frac{pn+q}{2}-1} |\Sigma|^{-\frac{p}{2}} |\Psi|^{-\frac{n}{2}} \gamma \left(\frac{pn+q}{2}, \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} (X - M) \Psi^{-1} (X - M)'] \right)} \\
 &= \frac{u^{\frac{pn}{q}} \left\{ \text{tr} [\Sigma^{-1} (X - M) \Psi^{-1} (X - M)'] \right\}^{\frac{pn+q}{2}}}{q 2^{\frac{pn+q}{2}-1} \gamma \left(\frac{pn+q}{2}, \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} (X - M) \Psi^{-1} (X - M)'] \right)} \\
 &\quad \times \exp \left\{ -\frac{u^{\frac{2}{q}}}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} (X - M) \Psi^{-1} (X - M)'] \right\}
 \end{aligned}$$

burada $s = \text{tr} [\Sigma^{-1} (X - M) \Psi^{-1} (X - M)']$ olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$f_{U|X}(u|X) = \frac{u^{\frac{pn}{q}} s^{\frac{pn+q}{2}}}{q 2^{\frac{pn+q}{2}-1} \gamma \left(\frac{pn+q}{2}, \frac{1}{2} s \right)} \exp \left\{ -\frac{u^{\frac{2}{q}}}{2} s \right\} \quad (3.9)$$

olur. Burada γ tamamlanmamış gamma fonksiyonudur. Elde edilen koşullu dağılımı kullanarak koşullu beklenen değer aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
 E \left[U_i^{\frac{2}{q}} | X, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right] &= \int_0^1 u_i^{\frac{2}{q}} f(u_i|X) du_i \\
 &= \int_0^1 u_i^{\frac{2}{q}} \frac{u_i^{\frac{pn}{q}} s^{\frac{pn+q}{2}}}{q 2^{\frac{pn+q}{2}-1} \gamma \left(\frac{pn+q}{2}, \frac{1}{2} s \right)} \exp \left\{ -\frac{u_i^{\frac{2}{q}}}{2} s \right\} du_i \\
 &= \frac{s^{\frac{pn+q}{2}}}{q 2^{\frac{pn+q}{2}-1} \gamma \left(\frac{pn+q}{2}, \frac{1}{2} s \right)} \int_0^1 u_i^{\frac{pn+2}{q}} \exp \left\{ -\frac{u_i^{\frac{2}{q}}}{2} s \right\} du_i \\
 &= \frac{2}{\text{tr} [\Sigma^{-1} (X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)']} \\
 &\quad \times \frac{\gamma \left(\frac{pn+q}{2} + 1, \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} (X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)'] \right)}{\gamma \left(\frac{pn+q}{2}, \frac{1}{2} \text{tr} [\Sigma^{-1} (X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)'] \right)}
 \end{aligned}$$

$w_i = E \left[U_i^{\frac{2}{q}} | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right]$ olarak tanımlayıp bu ifadeyi Eşitlik 3.8'de yerine yazarsak amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q(M, \Sigma, \Psi) = -\frac{1}{2} n p l \ln(2\pi) - \frac{1}{2} n l \ln |\Sigma| - \frac{1}{2} p l \ln |\Psi| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l w_i \text{tr} [\Sigma^{-1} (X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)'] \quad (3.10)$$

Eşitlik 3.10'da verilen amaç fonksiyonunun ilgili parametrelere göre türevini alıp sıfıra eşitlersek Eşitlik 3.11-3.13'de verilen tahmin edicileri elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(M, \Sigma, \Psi)}{\partial M} &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l w_i \{2\Sigma^{-1} X_i \Psi^{-1} - 2\Sigma^{-1} M \Psi^{-1}\} = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^l \{w_i \Sigma^{-1} X_i \Psi^{-1} - w_i \Sigma^{-1} M \Psi^{-1}\} = 0 \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^l w_i X_i - M \sum_{i=1}^l w_i = 0 \\
&\Rightarrow \hat{M} = \frac{\sum_{i=1}^l w_i X_i}{\sum_{i=1}^l w_i}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(M, \Sigma, \Psi)}{\partial \Sigma^{-1}} &= \frac{nl}{2} \{2\Sigma - \text{diag}(\Sigma)\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l w_i \{2(X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)' - \text{diag}((X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)')\} \\
&= 0 \\
&\Rightarrow \hat{\Sigma} = \frac{1}{nl} \sum_{i=1}^l w_i (X_i - M) \Psi^{-1} (X_i - M)'
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(M, \Sigma, \Psi)}{\partial \Psi^{-1}} &= \frac{pl}{2} \{2\Psi - \text{diag}(\Psi)\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l w_i \{2(X_i - M)' \Sigma^{-1} (X_i - M) - \text{diag}((X_i - M)' \Sigma^{-1} (X_i - M))\} \\
&= 0 \\
&\Rightarrow \hat{\Psi} = \frac{1}{pl} \sum_{i=1}^l w_i (X_i - M)' \Sigma^{-1} (X_i - M)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Eğer $w_i = 1$ alırsak Dutilleul (1999) tarafından önerilen matris değişkenli normal dağılımın parametre tahmincileri elde edilir. Parametre tahmin denklemleri elde edildikten sonra EM algoritmasının adımları aşağıdaki gibi tanımlanır.

- E-adımı: Gözlenen X_i değerleri ve şu anki parametre tahminleri verildiğinde Eşitlik 3.7'de verilen log-likelihood fonksiyonunun koşullu beklenen değeri hesaplanır. Bu $w_i = E \left[U_i^g | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right]$ koşullu beklenen değerinin hesaplanmasına denktir.

- M-adımı: Yeni tahminleri elde etmek için M , Σ ve Ψ parametrelerine göre $Q(M, \Sigma, \Psi)$ fonksiyonunu maksimize edilir. Bu adım E-adımında hesaplanan koşullu beklenen değerleri kullanarak parametre değerlerinin ve Eşitlik 3.11-3.13’de verilen denklemlerin güncellenmesine denktir.

EM algoritmasının adımlarını kullanarak parametrelerin EÇO tahminlerini hesaplamak için aşağıdaki basit iteratif yeniden ağırlıklandırılmış algoritmayı yazabiliriz. Algoritma makul bir yakınsama kriterine ulaşınca kadar çalışır. Bu algoritma bir EM algoritması olduğundan kolayca uygulanabilir ve yakınsama garanti edilir.

3.3.1 İteratif yeniden ağırlıklandırılmış algoritma

1. İterasyon sayısını $k = 1$ al ve parametreler için başlangıç değerlerini seç.
2. $k = 1, 2, \dots$ için şu anki parametreler $M^{(k)}$, $\Sigma^{(k)}$ ve $\Psi^{(k)}$ ’yi kullan, $i = 1, 2, \dots, l$ için $w_i^{(k)}$ ağırlıklarını hesapla ve $\sum_{i=1}^l w_i X_i$, $\sum_{i=1}^l w_i$ değerlerini hesapla.
3. Yeni tahminler $M^{(k+1)}$, $\Sigma^{(k+1)}$ ve $\Psi^{(k+1)}$ ’i hesaplamak için aşağıdaki güncelleme eşitliklerini kullan.

$$M^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^l w_i^{(k)} X_i}{\sum_{i=1}^l w_i^{(k)}}$$

$$\Sigma^{(k+1)} = \frac{1}{nl} \sum_{i=1}^l w_i^{(k)} \left(X_i - M^{(k+1)} \right) \left(\Psi^{(k+1)} \right)^{-1} \left(X_i - M^{(k+1)} \right)'$$

$$\Psi^{(k+1)} = \frac{1}{pl} \sum_{i=1}^l w_i^{(k)} \left(X_i - M^{(k+1)} \right)' \left(\Sigma^{(k+1)} \right)^{-1} \left(X_i - M^{(k+1)} \right)$$

4. Yakınsama sağlanıncaya kadar bu adımları tekrar et.

4. MATRİS DEĞİŞKENLİ t DAĞILIMI

Normal dağılıma göre daha kalın bir kuyruğa sahip olmasından dolayı t dağılımı robust istatistiksel analizlerde önemli bir rol oynamaktadır. Tek değişkenli ve çok değişkenli durumda t dağılımına ilişkin bir çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir. Fakat, t dağılımı hakkında ayrıntılı bilgi için Kotz ve Nadarajah (2004) önerilmektedir.

McDonald ve Newey (1988) tek değişkenli genelleştirilmiş dağılımlar ailesi önermişlerdir. McDonald ve Newey (1988) tarafından önerilen dağılım ailesi normal dağılımı, güç üstel dağılımı ve t dağılımını özel hali olarak yada limit dağılımında içermektedir. Butler vd. (1990) önerilen bu dağılımın güç üstel dağılım ile ters genelleştirilmiş gamma dağılımının ölçek karması olarak tanımlanabileceğini göstermiştir. Siddiqui (1967) tek değişkenli t dağılımını iki değişkenli t dağılımına genelleştirmiştir.

Çok değişkenli t dağılımı tek değişkenli t dağılımının genelleştirmesi olarak düşünülebilir. Çok değişkenli t dağılımı birbirinden bağımsız olarak ilk defa Cornish (1954) ve Dunnett ve Sobel (1954) tarafından tanımlanmıştır. Çok değişkenli t dağılımı ilk olarak bilinmeyen varyansa sahip birçok normal kitlenin kitle ortalamalarının seçilmesi ve sıralanması ile ilgili olarak çoklu karar verme problemlerinde ortaya çıkmıştır (Bechhofer, Dunnett ve Sobel, 1954). Çok değişkenli t dağılımı klasik ve Bayes istatistiksel modellemede artan bir öneme sahiptir. Bu dağılımın bir çok farklı elde etme yöntemi vardır ve her birisi ayrı ayrı özel karakteristiklere sahiptir ve uygulamalarda sıklıkla kullanılmaktadır (Nadarajah ve Kotz, 2005). Ayrıca, çok değişkenli t dağılımı Bayes çok değişkenli varyans analizi ve regresyonda da kullanılmaktadır. Arellano-Valle ve Bolfarine (1995) ise çok değişkenli genelleştirilmiş t dağılımını tanımlamışlardır. Liu ve Rubin (1995) EM algoritmasını ve farklı versiyonlarını kullanarak çok değişkenli t dağılımının en çok olabilirlik tahminlerini önermişlerdir. Ayrıca, Nadarajah ve Kotz (2008), çok değişkenli t dağılımı için farklı tahmin yöntemlerini incelemişlerdir. Arslan (2004), çok değişkenli güç üstel dağılım ile ters genelleştirilmiş gamma dağılımının ölçek karması olarak çok değişkenli genelleştirilmiş t dağılımlar ailesini tanımlamıştır.

Fraser (1976, 1979) parametre tahmini için hataların t dağılımına sahip olduğu tek örneklem ve genel lineer modelleri incelemiştir. Relles ve Rogers (1977) tek örneklem problemi ile il-

gili bir yaklaşım için t dağılımını kullanarak Bayes analizinden iyi sonuçlar elde etmişlerdir. West (1984) bu yaklaşımı regresyon problemine genelleştirmiştir. Maronna (1976) hataların t dağılımına sahip olduğu durumda ortalama ve kovaryans matrisinin en çok olabilirlik tahminlerini tartışmıştır. Sutradhar ve Ali (1986) hataların çok değişkenli t dağılımına sahip olduğu regresyon probleminde en çok olabilirlik tahmin edicilerini düşünmüşlerdir. Little (1988) bu yaklaşımı tamamlanmamış veri durumuna genellemiştir. Pendergast ve Broffitt (1985) büyüme-eğri modellerinde M tahminleri ile ilgili olarak çok değişkenli t dağılımından bahsetmişlerdir. Masreliez ve Martin (1977) zaman serilerinde Kalman filtreleri için t dağılımını uygulamışlardır.

Dickey (1967) çok değişkenli t dağılımını matris değişkenli t dağılımına genellemiştir. Javier ve Gupta (1985) önerilen bu dağılımın bazı özelliklerini incelemiştir. Gupta vd. (2013), matris değişkenli Pearson tip *VII* dağılımını tanımlamışlar ve bu dağılımın özel hali olarak matris değişkenli t dağılımının farklı bir versiyonunun tanımlanabileceğini göstermişlerdir.

Bu bölümde Gupta vd. (2013) tarafından önerilen matris değişkenli t dağılımının bazı özellikleri incelenecek ve parametrelerinin tahmini için likelihood fonksiyonunun direkt maksimizasyonu ile en çok olabilirlik tahmin edicileri elde edilecektir. Ayrıca, EM algoritması kullanılarak parametrelerin tahmini yapılacaktır.

Tanım 4.1 $Z \sim N_{p,n}(0, I_p, I_n)$ ve $Y \sim Gamma(\frac{v}{2}, \frac{v}{2})$ birbirinden bağımsız rassal matris ve rassal değişken olmak üzere $X = M + \Sigma^{\frac{1}{2}} Z \Psi^{\frac{1}{2}} Y^{-\frac{1}{2}}$ şeklinde tanımlanan rassal matris, matris değişkenli t dağılımına sahiptir ($X \sim MVt_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, v)$).

Teorem 4.2 $X \sim MVt_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, v)$ ise X rassal matrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(X) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{np+v}{2}\right)}{(\pi v)^{\frac{pn}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left[1 + \frac{tr\{\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)'\}}{v} \right]^{-\frac{np+v}{2}} \quad (4.1)$$

şeklindedir.

İspat: Z ve Y rassal değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{Z,Y}(Z, y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}np} \exp\left\{-\frac{1}{2}ZZ'\right\} \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} y^{\frac{v}{2}-1} \exp\left\{-\frac{v}{2}y\right\}$$

şeklindedir. $X = M + \Sigma^{\frac{1}{2}} Z \Psi^{\frac{1}{2}} Y^{-\frac{1}{2}}$ dönüşümünü kullanırsak X ve Y değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X,Y}(X,y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}np} \text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} \left[y^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (X - M) \Psi^{-\frac{1}{2}} \right] \left[y^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-\frac{1}{2}} (X - M) \Psi^{-\frac{1}{2}} \right]' \right\} \\ \times \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} y^{\frac{v}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{v}{2} y \right\} y^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}}$$

olarak elde edilir. Burada dönüşüm yapılırken Jakobyen

$$J(Z \rightarrow X) = y^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}}$$

şeklindedir. X rassal matrisinin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(X) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{np+v}{2}\right)}{(\pi v)^{\frac{pn}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left[1 + \frac{\text{tr} \left\{ \Sigma^{-1} (X - M) \Psi^{-1} (X - M)' \right\}}{v} \right]^{-\frac{np+v}{2}}$$

olarak elde edilir. Gupta vd. (Gupta, 2013) tarafından tanımlanan matris değişkenli Pearson tip VII dağılımında $q = \frac{np+v}{2}$ alınırsa yukarıda tanımlanan matris değişkenli t dağılımı elde edilir. Ayrıca $p = 1$ ve $\Psi = I$ alınırsa çok değişkenli t dağılımı elde edilir. $\square$

4.1 Matris Değişkenli t Dağılımının Özellikleri

Bu bölümde matris değişkenli t dağılımının bazı özellikleri incelenecektir.

Önerme 4.3 $X = M + \Sigma^{\frac{1}{2}} Z \Psi^{\frac{1}{2}} Y^{-\frac{1}{2}}$ ise $X|Y \sim N_{p,n}(M, y^{-1}\Sigma, \Psi)$ olur.

İspat: $Z \sim N_{p,n}(0, I_p, I_n)$ olduğundan Z matrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_Z(Z) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}np} \text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} Z Z' \right\}$$

olur. Y sabit bir sayı olmak üzere $X = M + \Sigma^{\frac{1}{2}} Z \Psi^{\frac{1}{2}} Y^{-\frac{1}{2}}$ dönüşümü yapıldığında dönüşüme ait Jakobyen

$$J(Z \rightarrow X) = |y^{-1}\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}}$$

olarak elde edilir. Burada Y verildiğinde X rassal matrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{X|Y}(X|y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}np} |y^{-1}\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}} \text{etr} \left\{ -\frac{1}{2} (y^{-1}\Sigma)^{-1} (X - M) \Psi^{-1} (X - M)' \right\}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, $X|Y \sim N_{p,n}(M, y^{-1}\Sigma, \Psi)$ olur. $\square$

Teorem 4.4 $X \sim MVt_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, \nu)$ ise

$$E(X) = M \quad (4.2)$$

olur.

İspat: X rassal matrisi Z ve Y rassal değişkenlerinin ölçek karması olarak yazıldığından

$$E(X) = E_Y(E_Z(X|Y)) = E_Y(M) = M$$

olarak elde edilir. İspat yapılırken Önerme 4.3'den yararlanılmıştır. $\square$

Teorem 4.5 $X \sim MVt_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, \nu)$ ise

$$Cov(X) = \frac{\nu}{\nu-2} (\Sigma \otimes \Psi), \nu > 2 \quad (4.3)$$

olur.

İspat: Teorem 4.4'e benzer olarak

$$Cov(X) = \frac{\nu}{\nu-2} (\Sigma \otimes \Psi), \nu > 2$$

şeklinde elde edilir. $\square$

Teorem 4.6 $X \sim MVt_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, \nu)$ ise X rassal matrisinin karakteristik fonksiyonu

$$\phi_X(T) = \frac{2\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \text{etr}(iT'M) \left(\frac{\text{tr}(T'\Sigma T\Psi)}{\nu}\right)^{\frac{\nu-2}{4}} K_{\frac{\nu}{2}}\left(\sqrt{\nu \text{tr}(T'\Sigma T\Psi)}\right) \quad (4.4)$$

şeklindedir. Burada $K_\lambda(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}s(u+u^{-1})\right\} du$, $s > 0$ üçüncü tip uyarlanmış Bessel fonksiyonudur (MacDonald fonksiyonu).

İspat: Önerme 4.3’de verilen koşullu beklenen değer ve matris değişkenli normal dağılımın karakteristik fonksiyonu kullanılarak karakteristik fonksiyon aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\phi_X(T) &= E[etr(iXT')] = E_Y[E_{X|Y}[etr(iXT')]] \\
&= E_Y\left[etr\left(iT'M - \frac{1}{2}y^{-1}T'\Sigma T\Psi\right)\right] \\
&= E_Y\left[etr(iT'M)etr\left(-\frac{1}{2}y^{-1}T'\Sigma T\Psi\right)\right] \\
&= etr(iT'M)E_Y\left[etr\left(-\frac{1}{2}y^{-1}T'\Sigma T\Psi\right)\right] \\
&= etr(iT'M)\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{y^{-1}}{2}tr(T'\Sigma T\Psi)\right\}\frac{\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}y^{\frac{v}{2}-1}\exp\left\{-\frac{v}{2}y\right\}dy \\
&= \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}etr(iT'M)\int_0^\infty y^{\frac{v}{2}-1}\exp\left\{-\frac{y^{-1}}{2}tr(T'\Sigma T\Psi) - \frac{v}{2}y\right\}dy \\
&= \frac{2\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}etr(iT'M)\left(\frac{tr(T'\Sigma T\Psi)}{v}\right)^{\frac{v-2}{4}}K_{\frac{v}{2}}\left(\sqrt{vtr(T'\Sigma T\Psi)}\right)
\end{aligned}$$

□

Teorem 4.7 $X \sim MVt_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, v)$ olsun. A ; $p \times n$ tipinde, B ; $p \times p$ tipinde, C ; $n \times n$ tipinde sabit matrisler olmak üzere $V = A + BXC$ şeklinde tanımlanan rassal matrisin dağılımı, ortalaması $A + BMC$, varyans-kovaryans matrisleri sırasıyla $B\Sigma B'$ ve $C'\Psi C$ olan matris değişkenli t dağılımıdır ($V \sim MVt_{p,n}(A + BMC, B\Sigma B', C'\Psi C, v)$).

İspat: Teorem 4.6’da verilen karakteristik fonksiyon yardımıyla ispat kolayca yapılır.

$$\begin{aligned}
\phi_V(T) &= E[etr(iVT')] \\
&= E[etr(i(A + BXC)T')] \\
&= etr(iAT')E[etr(XCT'B)] \\
&= etr(iAT')E[etr(XT_1')] \\
&= etr(iAT')etr(iT_1'M)\frac{2\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(\frac{tr(T_1'\Sigma T_1\Psi)}{v}\right)^{\frac{v-2}{4}}K_{\frac{v}{2}}\left(\sqrt{vtr(T_1'\Sigma T_1\Psi)}\right) \\
&= etr(iT'A)etr(iCT'BM)\frac{2\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(\frac{tr(T_1'\Sigma T_1\Psi)}{v}\right)^{\frac{v-2}{4}}K_{\frac{v}{2}}\left(\sqrt{vtr(T_1'\Sigma T_1\Psi)}\right) \\
&= etr(iT'(A + BMC))\frac{2\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(\frac{tr(T'(B\Sigma B')T(C'\Psi C))}{v}\right)^{\frac{v-2}{4}} \\
&\quad \times K_{\frac{v}{2}}\left(\sqrt{vtr(T'(B\Sigma B')T(C'\Psi C))}\right)
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $V \sim MVt_{p,n}(A + BMC, B\Sigma B', C'\Psi C, \mathbf{v})$ olur. $\square$

Teorem 4.8 $X \sim MVt_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, \mathbf{v})$ olsun ve X , M , Σ ve Ψ matrislerinin aşağıdaki şekilde parçalandığını varsayalım.

$$X = \begin{pmatrix} X_{1r} \\ X_{2r} \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} M_{1r} \\ M_{2r} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \text{ ve } \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix}$$

burada X_{1r} ve M_{1r} $s \times n$ tipinde, Σ_{11} ise $s \times s$ tipinde matrislerdir.

(i) $X_{1r} \sim MVt_{s,n}(M_{1r}, \Sigma_{11}, \Psi, \mathbf{v})$

(ii) $X_{2r}|X_{1r} \sim MVt_{p-s,n}(M_{2|1}, \Sigma_{2|1}, \Psi, \mathbf{v})$ burada

$$M_{2|1} = M_{2r} + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(X_{1r} - M_{1r})$$

$$\Delta_1^2 = tr \left\{ \Sigma_{11}^{-1}(X_{1r} - M_{1r})\Psi^{-1}(X_{1r} - M_{1r})' \right\}$$

$$\Sigma_{22.1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$$

$$\Sigma_{2|1} = \frac{\mathbf{v} + \Delta_1^2}{ns + \mathbf{v}} \Sigma_{22.1}$$

olarak tanımlanmıştır.

İspat: (i) Teorem 4.7'de $A = 0_{p \times n}$, $B = (I_s \quad 0)$ ve $C' = (I_n \quad 0)$ olarak alırsak X_{1r} rassal matrisinin dağılımı ortalaması M_{1r} , varyans kovaryans matrisleri Σ_{11} ve Ψ olan matris değişkenli t dağılımı olarak elde edilir.

(ii) Roth (2013) çok değişkenli t dağılımına sahip vektörlerin parçalanışlarından elde edilen koşullu dağılımın da yine çok değişkenli t dağılımı olduğunu göstermiştir. Roth (2013)'ün kullandığı yöntemi kullanarak matris değişkenli t dağılımına sahip matrislerin parçalanışlarından elde edilen koşullu dağılımında matris değişkenli t dağılımı olduğunu gösterebiliriz. İspatı yapabilmemiz için öncelikle $(X - M)'\Sigma^{-1}(X - M)$ matrisinin parçalanışını elde etmeliyiz. Burada $\Sigma^{11} = \Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}$, $\Sigma^{12} = -\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$, $\Sigma^{21} = -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}$ ve $\Sigma^{22} = \Sigma_{22}^{-1} + \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$ olarak tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
(X - M)' \Sigma^{-1} (X - M) &= \begin{pmatrix} (X_{1r} - M_{1r})' & (X_{2r} - M_{2r})' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma^{11} & \Sigma^{12} \\ \Sigma^{21} & \Sigma^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (X_{1r} - M_{1r}) \\ (X_{2r} - M_{2r}) \end{pmatrix} \\
&= \left((X_{1r} - M_{1r})' \Sigma^{11} + (X_{2r} - M_{2r})' \Sigma^{21} \right) (X_{1r} - M_{1r}) + \left((X_{1r} - M_{1r})' \Sigma^{12} + (X_{2r} - M_{2r})' \Sigma^{22} \right) (X_{2r} - M_{2r}) \\
&= \begin{pmatrix} (X_{1r} - M_{1r})' \\ (X_{2r} - M_{2r})' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma^{11} & \Sigma^{12} \\ \Sigma^{21} & \Sigma^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (X_{1r} - M_{1r}) \\ (X_{2r} - M_{2r}) \end{pmatrix} \\
&= \left\{ (X_{1r} - M_{1r})' \Sigma^{11} + (X_{2r} - M_{2r})' \Sigma^{21} \right\} (X_{1r} - M_{1r}) \\
&\quad + \left\{ (X_{1r} - M_{1r})' \Sigma^{12} + (X_{2r} - M_{2r})' \Sigma^{22} \right\} (X_{2r} - M_{2r}) \\
&= (X_{1r} - M_{1r})' \Sigma^{11} (X_{1r} - M_{1r}) + (X_{2r} - M_{2r})' \Sigma^{21} (X_{1r} - M_{1r}) \\
&\quad + (X_{1r} - M_{1r})' \Sigma^{12} (X_{2r} - M_{2r}) + (X_{2r} - M_{2r})' \Sigma^{22} (X_{2r} - M_{2r}) \\
&= (X_{1r} - M_{1r})' \left(\Sigma_{11}^{-1} + \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma^{22} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \right) (X_{1r} - M_{1r}) \\
&\quad + (X_{2r} - M_{2r})' \Sigma^{21} (X_{1r} - M_{1r}) + (X_{1r} - M_{1r})' \Sigma^{12} (X_{2r} - M_{2r}) \\
&\quad + (X_{2r} - M_{2r})' \Sigma^{22} (X_{2r} - M_{2r}) \\
&= (X_{1r} - M_{1r})' \Sigma_{11}^{-1} (X_{1r} - M_{1r}) \\
&\quad - (X_{1r} - M_{1r})' \Sigma^{12} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (X_{1r} - M_{1r}) \\
&\quad + (X_{2r} - M_{2r})' \Sigma^{21} (X_{1r} - M_{1r}) \\
&\quad + (X_{1r} - M_{1r})' \Sigma^{12} (X_{2r} - M_{2r}) \\
&\quad + (X_{2r} - M_{2r})' \Sigma^{22} (X_{2r} - M_{2r}) \\
&= (X_{1r} - M_{1r})' \Sigma_{11}^{-1} (X_{1r} - M_{1r}) \\
&\quad + \left((X_{2r} - M_{2r})' - (X_{1r} - M_{1r})' \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \right) \\
&\quad \times \Sigma_{22.1}^{-1} \left((X_{2r} - M_{2r}) - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (X_{1r} - M_{1r}) \right) \\
&= (X_{1r} - M_{1r})' \Sigma_{11}^{-1} (X_{1r} - M_{1r}) \\
&\quad + \left((X_{2r} - M_{2r}) - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (X_{1r} - M_{1r}) \right)' \\
&\quad \times \Sigma_{22.1}^{-1} \left((X_{2r} - M_{2r}) - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (X_{1r} - M_{1r}) \right) \\
&= (X_{1r} - M_{1r})' \Sigma_{11}^{-1} (X_{1r} - M_{1r}) \\
&\quad + \left(X_{2r} - M_{2r} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (X_{1r} - M_{1r}) \right)' \\
&\quad \times \Sigma_{22.1}^{-1} \left(X_{2r} - M_{2r} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} (X_{1r} - M_{1r}) \right)
\end{aligned}$$

Bu parçalanış kullanılırsa $X_{2r}|X_{1r}$ rassal matrisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$\begin{aligned}
f_{X_{2r}|X_{1r}}(x_{2r}|x_{1r}) &= \frac{f(x_{1r}, x_{2r})}{f(x_{1r})} \\
&= \frac{\frac{|\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{np+v}{2}\right)}{(\pi v)^{\frac{np}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left[1 + \frac{tr\{\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)'\}}{v}\right]^{-\frac{np+v}{2}}}{\frac{|\Sigma_{11}|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{ns+v}{2}\right)}{(\pi v)^{\frac{ns}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left[1 + \frac{tr\{\Sigma_{11}^{-1}(X_{1r}-M_{1r})\Psi^{-1}(X_{1r}-M_{1r})'\}}{v}\right]^{-\frac{ns+v}{2}}} \\
&= \frac{|\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{np+v}{2}\right) (\pi v)^{\frac{ns}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{(\pi v)^{\frac{np}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) |\Sigma_{11}|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{ns+v}{2}\right)} \\
&\quad \times \left[1 + \frac{tr\{\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)'\}}{v}\right]^{-\frac{np+v}{2}} \\
&\quad \times \left[1 + \frac{tr\{\Sigma_{11}^{-1}(X_{1r}-M_{1r})\Psi^{-1}(X_{1r}-M_{1r})'\}}{v}\right]^{-\frac{ns+v}{2}} \\
&= \frac{|\Sigma_{11}|^{-\frac{n}{2}} |\Sigma_{22.1}|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{s}{2}} |\Psi|^{-\frac{p-s}{2}} (\pi v)^{\frac{ns}{2}} \Gamma\left(\frac{n(p-s)+ns+v}{2}\right)}{|\Sigma_{11}|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{s}{2}} (\pi v)^{\frac{ns}{2}} (\pi v)^{\frac{n(p-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{ns+v}{2}\right)} \\
&\quad \times \left[1 + \frac{\Delta_1^2}{v}\right]^{\frac{ns+v}{2}} \left[1 + \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}{v}\right]^{-\frac{np+v}{2}} \\
&= \frac{|\Sigma_{22.1}|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p-s}{2}} \Gamma\left(\frac{n(p-s)+\alpha}{2}\right)}{(\pi v)^{\frac{n(p-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left[1 + \frac{\Delta_1^2}{v}\right]^{\frac{ns+v}{2}} \left[1 + \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}{v}\right]^{-\frac{np+v}{2}} \\
&= \frac{|\Sigma_{22.1}|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p-s}{2}} \Gamma\left(\frac{n(p-s)+\alpha}{2}\right)}{(\pi v)^{\frac{n(p-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left[1 + \frac{\Delta_1^2}{v}\right]^{-\frac{n(p-s)}{2}} \left[1 + \frac{\Delta_2^2}{v + \Delta_1^2}\right]^{-\frac{np+v}{2}} \\
&= \frac{|\Sigma_{22.1}|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p-s}{2}} \Gamma\left(\frac{n(p-s)+\alpha}{2}\right)}{(\pi(v + \Delta_1^2))^{\frac{n(p-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left[1 + \frac{\Delta_2^2}{v + \Delta_1^2}\right]^{-\frac{n(p-s)+\alpha}{2}} \\
&= \frac{|\Sigma_{21}|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{p-s}{2}} \Gamma\left(\frac{n(p-s)+\alpha}{2}\right)}{(\pi\alpha)^{\frac{n(p-s)}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\
&\quad \times \left[1 + \frac{tr\{\Sigma_{21}^{-1}(X_{2r}-M_{2|1})\Psi^{-1}(X_{2r}-M_{2|1})'\}}{\alpha}\right]^{-\frac{n(p-s)+\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $X_{2r}|X_{1r} \sim MVt_{p-s,n}(M_{2|1}, \Sigma_{2|1}, \Psi, v)$ olur. $\square$

4.2 Matris Değişkenli t Dağılımına Sahip Rassal Matrislerin Fonksiyonlarının Beklenen Değerleri

Bu bölümde matris değişkenli t dağılımına sahip rassal matrislerin fonksiyonlarının beklenen değerleri incelenmiştir.

Teorem 4.9 $X \sim MV_{t_{p,n}}(0, \Sigma, \Psi, \nu)$ olsun. Bu durumda $\nu > 2$ için

$$(i) E(tr(XX')) = \frac{\nu}{\nu-2} tr(\Sigma) tr(\Psi)$$

$$(ii) E(tr(XX'(AA')^\alpha)) = \frac{\nu}{\nu-2} tr(\Psi) tr(\Sigma(AA')^\alpha), A(p \times n)$$

$$(iii) E(tr^2(XA')) = \frac{\nu}{\nu-2} tr(\Sigma A \Psi A'), A(p \times n)$$

$$(iv) E(tr(XA')^2) = \frac{\nu}{\nu-2} tr(\Sigma A \Psi A'), A(p \times n)$$

$$(v) E(tr(XA') tr(XA'(AA')^\alpha)) = \frac{\nu}{\nu-2} tr(\Sigma A \Psi A' (AA')^\alpha), A(p \times n)$$

İspat: (i) $E(tr(XX')) = E_Y [E_{X|Y} [tr\{(XX') | Y\}]]$

$$= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n x_{ij} x_{ij} \right] \right]$$

$$= E_Y \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n E_{X|Y} (x_{ij} x_{ij}) \right]$$

$$= E_Y \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n y^{-1} \sigma_{ii} \Psi_{jj} \right]$$

$$= E_Y \left[y^{-1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \sigma_{ii} \Psi_{jj} \right]$$

$$= E_Y (y^{-1}) tr(\Sigma) tr(\Psi)$$

$$= \frac{\nu}{\nu-2} tr(\Sigma) tr(\Psi)$$

elde edilir.

(ii) İspata başlamadan önce $V = X'A^\alpha$ dönüşümü yapalım. $X \sim MVt_{p,n}(0, \Sigma, \Psi, \mathbf{v})$ olduğundan $V = X'A^\alpha \sim MVt_{n,n}(0, \Psi, A'^\alpha \Sigma A^\alpha, \mathbf{v})$ olur. Ayrıca $V | Y \sim N_{n,n}(0, \Psi, y^{-1} A'^\alpha \Sigma A^\alpha, \mathbf{v})$ olur. $y^{-1} A'^\alpha \Sigma A^\alpha = \Sigma^*$ olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E \left(\text{tr} (XX' (AA')^\alpha) \right) &= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\text{tr} (XX' (AA')^\alpha) \mid Y \right] \right] \\
&= E_Y \left[E_{V|Y} \left[\text{tr} (VV') \right] \right] \\
&= E_Y \left[E_{V|Y} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_{ij} v_{ij} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E_{V|Y} \left[v_{ij} v_{ij} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Psi_{ii} \sigma_{jj}^* \right] \\
&= E_Y \left[\text{tr} (\Psi) \text{tr} (y^{-1} A'^\alpha \Sigma A^\alpha) \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \text{tr} (\Psi) \text{tr} (A'^\alpha \Sigma A^\alpha) \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \right] \text{tr} (\Psi) \text{tr} (A'^\alpha \Sigma A^\alpha) \\
&= \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{v}-2} \text{tr} (\Psi) \text{tr} (\Sigma (AA')^\alpha)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) İspata başlamadan önce $V = XA'$ dönüşümü yapalım. Bu durumda $V \sim MVS l_{p,p}(0, \Sigma, A \Psi A', \mathbf{v})$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E \left(\text{tr}^2 (XA') \right) &= E \left(\text{tr}^2 V \right) = E_Y \left[E_{V|Y} \left[\text{tr}^2 V \right] \right] \\
&= E_Y \left[E_{V|Y} \left[\left(\sum_{i=1}^p v_{ii} \right)^2 \right] \right] \\
&= E_Y \left[E_{V|Y} \left[\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p v_{ii} v_{jj} \right) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_Y \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p E_{V|Y} (v_{ii} v_{jj}) \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p y^{-1} \sigma_{ii} \psi_{jj}^* \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sigma_{ii} \psi_{ij}^* \right] \\
&= E_Y [y^{-1} \text{tr}(\Sigma \Psi^*)] \\
&= E_Y [y^{-1}] \text{tr}(\Sigma A \Psi A') \\
&= \frac{v}{v-2} \text{tr}(\Sigma A \Psi A')
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\text{(iv) } E \left(\text{tr}(X A')^2 \right) &= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\text{tr}(X A')^2 \right] \right] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ij} x_{ij} x_{ij} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ij} E_{X|U} (x_{ij} x_{ij}) \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ij} \left\{ y^{-1} \sigma_{ii} \psi_{jj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n y^{-1} \sigma_{ii} a_{ij} \psi_{jj} a_{ij} \right] \\
&= E_Y [y^{-1} \text{tr}(\Sigma A \Psi A')] \\
&= E_Y [y^{-1}] \text{tr}(\Sigma A \Psi A') \\
&= \frac{v}{v-2} \text{tr}(\Sigma A \Psi A')
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
(v) E \left(tr(XA') tr(XA' (AA')^\alpha) \right) &= E_Y \left[E_{X|Y} \left[tr(XA') tr(XA' (AA')^\alpha) \right] \right] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n x_{ij} a_{ij} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{kl} a_{lo} a_{om}^\alpha a_{mk}^\alpha \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{ij} a_{lo} a_{om}^\alpha a_{mk}^\alpha E_{X|Y} (x_{ij} x_{kl}) \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{ij} a_{lo} a_{om}^\alpha a_{mk}^\alpha \left\{ y^{-1} \sigma_{ik} \psi_{jl} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sigma_{ik} a_{ij} \psi_{jl} a_{ol} a_{om}^\alpha a_{km}^\alpha \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} tr(\Sigma A \Psi A' (AA')^\alpha) \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \right] tr(\Sigma A \Psi A' (AA')^\alpha) \\
&= \frac{v}{v-2} tr(\Sigma A \Psi A' (AA')^\alpha)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 4.10 $X \sim MVt_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, v)$ olsun. Bu durumda $v > 2$ için

$$(i) E(X'AX) = \frac{v}{v-2} tr(\Sigma A') \Psi + M'AM, A(p \times p)$$

$$(ii) E(XAX') = \frac{v}{v-2} tr(\Psi A') \Sigma + MAM', A(n \times n)$$

$$(iii) E(XAX) = \frac{v}{v-2} \Sigma A' \Psi + MAM, A(n \times p)$$

$$(iv) E(tr(AX)X) = \frac{v}{v-2} \Sigma A' \Psi + tr(MA)M, A(n \times p)$$

$$(v) E(tr(AX)X') = \frac{v}{v-2} \Sigma A \Psi + tr(AM)M', A(n \times p)$$

$$(vi) E(tr(AX')X) = \frac{v}{v-2} \Sigma A \Psi + tr(AM')M, A(p \times n)$$

$$(vii) E(tr(AX')X') = \frac{v}{v-2} \Psi A' \Sigma + tr(AM')M', A(p \times n)$$

İspat: (i) $X'AX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X'AX) &= E_Y [E_{X|Y} [X'AX]] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lj} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_{kl} E_{X|Y} [x_{ki} x_{lj}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p a_{kl} \left\{ y^{-1} \sigma_{kl} \psi_{ij} + m_{ki} m_{lj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \left\{ y^{-1} \psi_{ij} \sigma_{kl} a_{lk} + m_{ki} a_{kl} m_{lj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \psi_{ij} \sigma_{kl} a_{lk} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{lj} \right] \\
&= E_Y [y^{-1}] tr(\Sigma A') \Psi + M' A M \\
&= \frac{y}{y-2} tr(\Sigma A') \Psi + M' A M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) XAX' matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{jl}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(XAX') &= E_Y [E_{X|Y} [XAX']] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{jl} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} E_{X|Y} [x_{ik} x_{jl}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \left\{ y^{-1} \sigma_{ij} \psi_{kl} + m_{ik} m_{jl} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left\{ y^{-1} \sigma_{ij} a_{kl} \psi_{lk} + m_{ik} a_{kl} m_{jl} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sigma_{ij} a_{kl} \Psi_{lk} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_{ik} a_{kl} m_{jl} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \right] tr(\Psi A') \Sigma + M A M' \\
&= \frac{v}{v-2} tr(\Psi A') \Sigma + M A M'
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) XAX matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{lj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(XAX) &= E_Y \left[E_{X|Y} [XAX] \right] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{lj} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} E_{X|Y} [x_{ik} x_{lj}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} \left\{ y^{-1} \sigma_{il} \Psi_{kj} + m_{ik} m_{lj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \left\{ y^{-1} \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{kj} + m_{ik} a_{kl} m_{lj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{kj} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lj} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \right] \Sigma A' \Psi + M A M \\
&= \frac{v}{v-2} \Sigma A' \Psi + M A M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $tr(AX)X$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_{ij} a_{kl} x_{lk}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)X) &= E_Y \left[E_{X|Y} [tr(AX)X] \right] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_{ij} a_{kl} x_{lk} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} E_{X|Y} [x_{ij} x_{lk}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} \left\{ y^{-1} \sigma_{il} \Psi_{jk} + m_{ij} m_{lk} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \left\{ y^{-1} \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{kj} + m_{ij} m_{lk} a_{kl} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{kj} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{ij} m_{lk} a_{kl} \right] \\
&= E_Y [y^{-1}] \Sigma A' \Psi + tr(MA) M \\
&= \frac{v}{v-2} \Sigma A' \Psi + tr(MA) M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) $tr(AX)X'$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_{ji} a_{kl} x_{lk}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)X') &= E_Y [E_{X|Y} [tr(AX)X']] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p x_{ji} a_{kl} x_{lk} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} E_{X|Y} [x_{ji} x_{lk}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} \left\{ y^{-1} \sigma_{jl} \Psi_{ik} + m_{ji} m_{lk} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \left\{ y^{-1} \Psi_{ik} a_{kl} \sigma_{lj} + m_{ji} a_{kl} m_{lk} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \Psi_{ik} a_{kl} \sigma_{lj} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{ji} a_{kl} m_{lk} \right] \\
&= E_Y [y^{-1}] \Psi A \Sigma + tr(AM) M' \\
&= \frac{v}{v-2} \Psi A \Sigma + tr(AM) M'
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vi) $tr(AX')X$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n x_{ij} a_{kl} x_{kl}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX')X) &= E_U [E_{X|U} [tr(AX')X]] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n x_{ij} a_{kl} x_{kl} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} E_{X|Y} [x_{ij} x_{kl}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} \left\{ y^{-1} \sigma_{ik} \psi_{jl} + m_{ij} m_{kl} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \left\{ y^{-1} \sigma_{ik} a_{kl} \psi_{lj} + m_{ij} a_{kl} m_{kl} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \psi_{ik} a_{kl} \sigma_{lj} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{ji} a_{kl} m_{lk} \right] \\
&= E_Y [y^{-1}] \Sigma A \Psi + tr(AM') M \\
&= \frac{y}{y-2} \Sigma A \Psi + tr(AM') M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vii) $tr(AX')X'$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n x_{ji} a_{kl} x_{kl}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX')X') &= E_Y [E_{X|Y} [tr(AX')X']] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n x_{ji} a_{kl} x_{kl} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} E_{X|Y} [x_{ji} x_{kl}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p a_{kl} \left\{ y^{-1} \sigma_{jk} \psi_{il} + m_{ji} m_{kl} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \left\{ y^{-1} \psi_{il} a_{kl} \sigma_{jk} + m_{ji} a_{kl} m_{kl} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \Psi_{il} a_{kl} \sigma_{jk} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{ji} a_{kl} m_{kl} \right] \\
&= E_Y [y^{-1}] \Psi A' \Sigma + tr(AM') M' \\
&= \frac{q}{q-2} \Psi A' \Sigma + tr(AM') M'
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 4.11 $X \sim MVt_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, \nu)$ olsun. Bu durumda $\nu > 2$ için

$$\begin{aligned}
(i) \quad E(XAXBX) &= \frac{\nu}{\nu-2} (MA\Sigma B'\Psi + \Sigma B'M'A'\Psi + \Sigma A'\Psi BM) \\
&\quad + MAMB M, A(n \times p), B(n \times p) \\
(ii) \quad E(X'AXBX) &= \frac{\nu}{\nu-2} (M'A\Sigma B'\Psi + tr(\Sigma B'M'A')\Psi + tr(A\Sigma)\Psi BM) \\
&\quad + M'AMB M, A(p \times p), B(n \times p) \\
(iii) \quad E(XAX'BX) &= \frac{\nu}{\nu-2} (tr(B\Sigma)MA\Psi + \Sigma B'MA'\Psi + tr(A\Psi)\Sigma BM) \\
&\quad + MAM'BM, A(n \times n), B(p \times p) \\
(iv) \quad E(X'AXBX') &= \frac{\nu}{\nu-2} (tr(B\Psi)M'A\Sigma + \Psi B'M'A'\Sigma + tr(A\Sigma)\Psi BM') \\
&\quad + M'AMB M', A(p \times p), B(n \times n) \\
(v) \quad E(XAX'BX') &= \frac{\nu}{\nu-2} (MA\Psi B'\Sigma + tr(AM'B\Psi)\Sigma + tr(A\Psi)\Sigma BM') \\
&\quad + MAM'BM', A(n \times n), B(p \times n) \\
(vi) \quad E(X'AXBX) &= \frac{\nu}{\nu-2} (tr(\Sigma B')M'A\Psi + tr(AM'B\Sigma)\Psi + \Psi A'\Sigma BM) \\
&\quad + M'AM'BM, A(p \times n), B(p \times p) \\
(vii) \quad E(X'AX'BX') &= \frac{\nu}{\nu-2} (M'A\Psi B'\Sigma + \Psi B'MA'\Sigma + \Psi A'\Sigma BM') \\
&\quad + M'AM'BM', A(p \times n), B(p \times n)
\end{aligned}$$

İspat: (i) $XAXBX$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{oj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(XAXBX) &= E_Y [E_{X|Y} [XAXBX]] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{oj} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E_{X|Y} [x_{ik} x_{lm} x_{oj}] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{ik} y^{-1} \sigma_{lo} \Psi_{mj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{lm} y^{-1} \sigma_{io} \Psi_{kj} + m_{oj} y^{-1} \sigma_{il} \Psi_{km} + m_{ik} m_{lm} m_{oj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \left\{ y^{-1} m_{ik} a_{kl} \sigma_{lo} b_{mo} \Psi_{mj} + y^{-1} \sigma_{io} b_{mo} m_{lm} a_{kl} \Psi_{kj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + y^{-1} \sigma_{il} a_{kl} \Psi_{km} b_{mo} m_{oj} + m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{oj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \left\{ m_{ik} a_{kl} \sigma_{lo} b_{mo} \Psi_{mj} + \sigma_{io} b_{mo} m_{lm} a_{kl} \Psi_{kj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma_{il} a_{kl} \Psi_{km} b_{mo} m_{oj} \right\} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{oj} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \right] (MA \Sigma B' \Psi + \Sigma B' M' A' \Psi + \Sigma A' \Psi B M) + M A M B M \\
&= \frac{y}{y-2} (MA \Sigma B' \Psi + \Sigma B' M' A' \Psi + \Sigma A' \Psi B M) + M A M B M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $X' A X B X$ matrisinin (i, j) -inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{oj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X' A X B X) &= E_Y \left[E_{X|Y} [X' A X B X] \right] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{oj} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E_{X|Y} [x_{ki} x_{lm} x_{oj}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{ki} y^{-1} \sigma_{lo} \Psi_{mj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{ml} y^{-1} \sigma_{ko} \Psi_{ij} + m_{oj} y^{-1} \sigma_{lk} \Psi_{im} + m_{ki} m_{lm} m_{oj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \left\{ y^{-1} m_{ki} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} \Psi_{mj} + y^{-1} \Psi_{ij} \sigma_{ko} b_{om} m_{ml} a_{lk} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + y^{-1} \Psi_{im} b_{mo} m_{oj} a_{kl} \sigma_{lk} + m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{oj} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \left\{ m_{ki} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} \psi_{mj} + \psi_{ij} \sigma_{ko} b_{om} m_{ml} a_{lk} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \psi_{im} b_{mo} m_{oj} a_{kl} \sigma_{lk} \right\} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{oj} \right] \\
&= E_Y [y^{-1}] (M' A \Sigma B' \Psi + tr(\Sigma B' M' A') \Psi + tr(A \Sigma) \Psi B M) + M' A M B M \\
&= \frac{\nu}{\nu-2} (M' A \Sigma B' \Psi + tr(\Sigma B' M' A') \Psi + tr(A \Sigma) \Psi B M) + M' A M B M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $XAX'BX$ matrisinin (i, j) -inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{oj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(XAX'BX) &= E_Y [E_{X|Y} [XAX'BX]] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{oj} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E_{X|Y} [x_{ik} x_{ml} x_{oj}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{ik} y^{-1} \sigma_{mo} \psi_{lj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{ml} y^{-1} \sigma_{io} \psi_{kj} + m_{oj} y^{-1} \sigma_{im} \psi_{kl} + m_{ik} m_{ml} m_{oj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \left\{ m_{ik} a_{kl} \psi_{lj} b_{mo} \sigma_{om} + \sigma_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \psi_{kj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma_{im} b_{mo} m_{oj} a_{kl} \psi_{lk} \right\} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{oj} \right] \\
&= E_Y [y^{-1}] (tr(B \Sigma) M A \Psi + \Sigma B' M A' \Psi + tr(A \Psi) \Sigma B M) + M A M' B M \\
&= \frac{\nu}{\nu-2} (tr(B \Sigma) M A \Psi + \Sigma B' M A' \Psi + tr(A \Psi) \Sigma B M) + M A M' B M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $X'AX'BX$ matrisinin (i, j) -inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{oj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X'AX'BX) &= E_Y \left[E_{X|Y} [X'AX'BX] \right] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{oj} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E_{X|Y} [x_{ki} x_{ml} x_{oj}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{ki} y^{-1} \sigma_{mo} \psi_{lj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{ml} y^{-1} \sigma_{ko} \psi_{ij} + m_{oj} y^{-1} \sigma_{km} \psi_{il} + m_{ki} m_{ml} m_{oj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \left\{ y^{-1} m_{ki} a_{kl} \psi_{lj} \sigma_{om} b_{mo} + y^{-1} \psi_{ij} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ok} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + y^{-1} \psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} m_{oj} + m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{oj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \left\{ m_{ki} a_{kl} \psi_{lj} \sigma_{om} b_{mo} + \psi_{ij} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ok} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} m_{oj} \right\} + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{oj} \right] \\
&= E_Y [y^{-1}] (tr(\Sigma B') M' A \Psi + tr(AM' B \Sigma) \Psi + \Psi A' \Sigma B M) + M' A M' B M \\
&= \frac{\gamma}{\gamma-2} (tr(\Sigma B') M' A \Psi + tr(AM' B \Sigma) \Psi + \Psi A' \Sigma B M) + M' A M' B M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) $XAX'BX'$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{jo}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(XAX'BX') &= E_U \left[E_{X|U} [XAX'BX'] \right] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{jo} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} b_{mo} E_{X|Y} [x_{ik} x_{ml} x_{jo}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{iki} y^{-1} \sigma_{mjo} \psi_{lo} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m_{ml}y^{-1}\sigma_{ij}\psi_{ko}+m_{jo}y^{-1}\sigma_{im}\psi_{kl}+m_{ik}m_{ml}m_{jo}\} \\
& =E_Y\left[\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^n\left\{y^{-1}m_{ik}a_{kl}\psi_{lo}b_{om}\sigma_{mj}+y^{-1}\sigma_{ij}a_{kl}m_{ml}b_{mo}\psi_{ok}\right.\right. \\
& \quad \left.\left.+y^{-1}\sigma_{im}b_{mo}m_{jo}a_{kl}\psi_{lk}+m_{ik}a_{kl}m_{ml}b_{mo}m_{jo}\right\}\right] \\
& =E_Y\left[y^{-1}\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^n\left\{m_{ik}a_{kl}\psi_{lo}b_{om}\sigma_{mj}+\sigma_{ij}a_{kl}m_{ml}b_{mo}\psi_{ok}\right.\right. \\
& \quad \left.\left.+\sigma_{im}b_{mo}m_{jo}a_{kl}\psi_{lk}\right\}+\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^nm_{ik}a_{kl}m_{ml}b_{mo}m_{jo}\right] \\
& =E_Y\left[y^{-1}\right](MA\Psi B'\Sigma+tr(AM'B\Psi)\Sigma+tr(A\Psi)\Sigma BM')+MAM'BM' \\
& =\frac{v}{v-2}(MA\Psi B'\Sigma+tr(AM'B\Psi)\Sigma+tr(A\Psi)\Sigma BM')+MAM'BM'
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vi) $XAX'BX'$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^nx_{ik}a_{kl}x_{ml}b_{mo}x_{jo}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(XAX'BX') & =E_Y\left[E_{X|Y}[XAX'BX']\right] \\
& =E_Y\left[E_{X|Y}\left[\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^nx_{ik}a_{kl}x_{ml}b_{mo}x_{jo}\right]\right] \\
& =E_Y\left[\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^na_{kl}b_{mo}E_{X|Y}[x_{ik}x_{ml}x_{jo}]\right] \\
& =E_Y\left[\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^na_{kl}b_{mo}\left\{m_{ik}y^{-1}\sigma_{mj}\psi_{lo}\right.\right. \\
& \quad \left.\left.+m_{ml}y^{-1}\sigma_{ij}\psi_{ko}+m_{jo}y^{-1}\sigma_{im}\psi_{kl}+m_{ik}m_{ml}m_{jo}\right\}\right] \\
& =E_Y\left[\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^n\left\{y^{-1}m_{ik}a_{kl}\psi_{lo}b_{om}\sigma_{mj}+y^{-1}\sigma_{ij}a_{kl}m_{ml}b_{mo}\psi_{ok}\right.\right. \\
& \quad \left.\left.+y^{-1}\sigma_{im}b_{mo}m_{jo}a_{kl}\psi_{lk}+m_{ik}a_{kl}m_{ml}b_{mo}m_{jo}\right\}\right] \\
& =E_Y\left[u^{-\frac{2}{q}}\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^n\left\{m_{ik}a_{kl}\psi_{lo}b_{om}\sigma_{mj}+\sigma_{ij}a_{kl}m_{ml}b_{mo}\psi_{ok}\right.\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{im} b_{mo} m_{jo} a_{kl} \psi_{lk} \} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ik} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{jo} \Big] \\
& = E_Y \left[y^{-1} \right] (MA\Psi B'\Sigma + tr(AM'B\Psi)\Sigma + tr(A\Psi)\Sigma BM') + MAM'BM' \\
& = \frac{v}{v-2} (MA\Psi B'\Sigma + tr(AM'B\Psi)\Sigma + tr(A\Psi)\Sigma BM') + MAM'BM'
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vii) $X'AX'BX'$ matrisinin (i, j) -inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{jo}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X'AX'BX') &= E_Y \left[E_{X|Y} [X'AX'BX'] \right] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{jo} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} b_{mo} E_{X|Y} [x_{ki} x_{ml} x_{jo}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} b_{mo} \{ m_{ki} y^{-1} \sigma_{mj} \psi_{lo} \right. \\
&\quad \left. + m_{ml} y^{-1} \sigma_{kj} \psi_{io} + m_{jo} y^{-1} \sigma_{km} \psi_{il} + m_{ki} m_{ml} m_{jo} \} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \{ y^{-1} m_{ki} a_{kl} \psi_{lo} b_{om} \sigma_{mj} + y^{-1} \psi_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \sigma_{kj} \right. \\
&\quad \left. + y^{-1} \psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} m_{jo} + m_{ki} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{jo} \} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \{ m_{ki} a_{kl} \psi_{lo} b_{om} \sigma_{mj} + \psi_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \sigma_{kj} \right. \\
&\quad \left. + \psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} m_{jo} \} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ki} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{jo} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \right] (M'A\Psi B'\Sigma + \Psi B'MA'\Sigma + \Psi A'\Sigma BM') + M'AM'BM' \\
&= \frac{v}{v-2} (M'A\Psi B'\Sigma + \Psi B'MA'\Sigma + \Psi A'\Sigma BM') + M'AM'BM'
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 4.12 $X \sim MVt_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$ olsun. Bu durumda $v > 2$ için

$$(i) E(tr(X'AXB)X) = \frac{v}{v-2} (\Sigma A' M B' \Psi + \Sigma A M B \Psi + tr(\Psi B) tr(A \Sigma) M) \\ + tr(M' A M B) M, A(p \times p), B(n \times n)$$

$$(ii) E(tr(AX)XBX) = \frac{v}{v-2} (tr(AM) \Sigma B' \Psi + M B \Sigma A' \Psi + \Sigma A' \Psi B M) \\ + tr(AM) M B M, A(n \times p), B(n \times p)$$

$$(iii) E(tr(AX)X'BX) = \frac{v}{v-2} (tr(AM) tr(B \Sigma) \Psi + M' B \Sigma A' \Psi + \Psi A \Sigma B M) \\ + tr(AM) M' B M, A(n \times p), B(p \times p)$$

İspat: (i) $tr(X'AXB)X$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{lk} a_{lm} x_{mo} b_{ok} x_{ij}$ olur.

Bu durumda

$$\begin{aligned} E(tr(X'AXB)X) &= E_Y [E_{X|Y} [tr(X'AXB)X]] \\ &= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n x_{lk} a_{lm} x_{mo} b_{ok} x_{ij} \right] \right] \\ &= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{lm} b_{ok} E_{X|Y} [x_{lk} x_{mo} x_{ij}] \right] \\ &= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{lm} b_{ok} \left\{ m_{lk} y^{-1} \sigma_{mi} \Psi_{oj} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_{mo} y^{-1} \sigma_{li} \Psi_{kj} + m_{ij} y^{-1} \sigma_{lm} \Psi_{ko} + m_{lk} m_{mo} m_{ij} \right\} \right] \\ &= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n \left\{ \sigma_{im} a_{ml} m_{lk} b_{ko} \Psi_{oj} + \sigma_{il} a_{lm} m_{mo} b_{ok} \Psi_{kj} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. m_{ij} \Psi_{ko} b_{ok} a_{lm} \sigma_{ml} \right\} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n m_{ij} m_{lk} a_{lm} m_{mo} b_{ok} \right] \\ &= E_Y [y^{-1}] (\Sigma A' M B' \Psi + \Sigma A M B \Psi + tr(\Psi B) tr(A \Sigma) M) + tr(M' A M B) M \\ &= \frac{v}{v-2} (\Sigma A' M B' \Psi + \Sigma A M B \Psi + tr(\Psi B) tr(A \Sigma) M) + tr(M' A M B) M \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $tr(AX)XBX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^n a_{kl} x_{lk} x_{im} b_{mo} x_{oj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)XBX) &= E_Y [E_{X|Y} [tr(AX)XBX]] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} x_{lk} x_{im} b_{mo} x_{oj} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E_{X|Y} [x_{lk} x_{im} x_{oj}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{lk} y^{-1} \sigma_{io} \Psi_{mj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{im} y^{-1} \sigma_{lo} \Psi_{kj} + m_{oj} y^{-1} \sigma_{li} \Psi_{km} + m_{lk} m_{im} m_{oj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \left\{ y^{-1} \sigma_{io} b_{om} \Psi_{mj} a_{kl} m_{lk} + y^{-1} m_{im} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \Psi_{kj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + y^{-1} \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{km} b_{mo} m_{oj} + m_{im} b_{mo} m_{oj} a_{kl} m_{lk} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \left\{ \sigma_{io} b_{om} \Psi_{mj} a_{kl} m_{lk} + m_{im} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \Psi_{kj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sigma_{il} a_{lk} \Psi_{km} b_{mo} m_{oj} \right\} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p m_{im} b_{mo} m_{oj} a_{kl} m_{lk} \right] \\
&= E_Y [y^{-1}] (\Sigma A' M B' \Psi + \Sigma A M B \Psi + tr(\Psi B) tr(A \Sigma) M) + tr(M' A M B) M \\
&= \frac{\gamma}{\gamma-2} (tr(AM) \Sigma B' \Psi + M B \Sigma A' \Psi + \Sigma A' \Psi B M) + tr(AM) M B M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $tr(AX)X'BX$ matrisinin (i, j) -inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p a_{kl} x_{lk} x_{mi} b_{mo} x_{oj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)X'BX) &= E_Y [E_{X|Y} [tr(AX)X'BX]] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} x_{lk} x_{mi} b_{mo} x_{oj} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} E_{X|Y} [x_{lk} x_{mi} x_{oj}] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p a_{kl} b_{mo} \left\{ m_{lk} y^{-1} \sigma_{mo} \Psi_{ij} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{mi} y^{-1} \sigma_{lo} \Psi_{kj} + m_{oj} y^{-1} \sigma_{lt} \Psi_{ki} + m_{lk} m_{mi} m_{oj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \left\{ y^{-1} \Psi_{ij} a_{kl} m_{lk} b_{mo} \sigma_{om} + y^{-1} m_{mi} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \Psi_{kj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + y^{-1} \Psi_{ik} a_{kl} \sigma_{lm} b_{mo} m_{oj} + m_{mi} b_{mo} m_{oj} a_{kl} m_{lk} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \left\{ \Psi_{ij} a_{kl} m_{lk} b_{mo} \sigma_{om} + m_{mi} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \Psi_{kj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Psi_{ik} a_{kl} \sigma_{lm} b_{mo} m_{oj} \right\} + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p m_{mi} b_{mo} m_{oj} a_{kl} m_{lk} \right] \\
&= E_Y \left[y^{-1} \right] (tr(AM) tr(B\Sigma) \Psi + M' B \Sigma A' \Psi + \Psi A \Sigma B M) + tr(AM) M' B M \\
&= \frac{v}{v-2} (tr(AM) tr(B\Sigma) \Psi + M' B \Sigma A' \Psi + \Psi A \Sigma B M) + tr(AM) M' B M
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 4.13 $X \sim MVt_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$ olsun. Bu durumda $v > 4$ için

$$\begin{aligned}
(i) \ E(XAXBXCX) &= \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (\Sigma C' \Psi B \Sigma A' \Psi + \Sigma A' \Psi B \Sigma C' \Psi + tr(A \Sigma C' \Psi) \Sigma B' \Psi) \\
&\quad + \frac{v}{v-2} (M A M B \Sigma C' \Psi + M A \Sigma C' M' B' \Psi + \Sigma C' M' B' M' A' \Psi \\
&\quad + M A \Sigma B' \Psi C M + \Sigma B' M' A' \Psi C M + \Sigma A' \Psi B M C M) \\
&\quad + M A M B M C M, \ A(n \times p), \ B(n \times p), \ C(n \times p) \\
(ii) \ E(X' A X B X C X) &= \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (tr(A \Sigma B' \Psi C \Sigma) \Psi + tr(A \Sigma) \Psi B \Sigma C' \Psi + \Psi C \Sigma A' \Sigma B' \Psi) \\
&\quad + \frac{v}{v-2} (M' A M B \Sigma C' \Psi + M' A \Sigma C' M' B' \Psi + tr(A M B M C \Sigma) \Psi \\
&\quad + M' A \Sigma B' \Psi C M + tr(A M B \Sigma) \Psi C M + tr(A \Sigma) \Psi B M C M) \\
&\quad + M' A M B M C M, \ A(p \times p), \ B(n \times p), \ C(n \times p) \\
(iii) \ E(X A X' B X C X) &= \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (tr(B \Sigma) \Sigma C' \Psi A' \Psi + tr(A \Psi) \Sigma B \Sigma C' \Psi + \Sigma B' \Sigma C' \Psi A \Psi) \\
&\quad + \frac{v}{v-2} (M A M' B \Sigma C' \Psi + tr(B M C \Sigma) M A \Psi + \Sigma C' M' B' M A' \Psi \\
&\quad + tr(B \Sigma) M A \Psi C M + \Sigma B' M A' \Psi C M + tr(A \Psi) \Sigma B M C M) \\
&\quad + M A M' B M C M, \ A(n \times n), \ B(p \times p), \ C(n \times p)
\end{aligned}$$

$$(iv) E(X'AX'BXCX) = \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (tr(A\Psi C\Sigma)tr(B\Sigma)\Psi + \Psi A'\Sigma B\Sigma C'\Psi + \Psi C\Sigma B\Sigma A\Psi) \\ + \frac{q}{q-2} (M'AM'B\Sigma C'\Psi + tr(BMC\Sigma)M'A\Psi + tr(AM'BM C\Sigma)\Psi \\ + tr(B\Sigma)M'A\Psi CM + tr(AM'B\Sigma)\Psi CM + \Psi A'\Sigma BMCM) \\ + M'AM'BMCM, A(p \times n), B(p \times p), C(n \times p)$$

$$(v) E(X'AXBX'CX) = \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (tr(A\Sigma C\Sigma)tr(B\Psi)\Psi + tr(A\Sigma)tr(C\Sigma)\Psi B\Psi \\ + tr(A\Sigma C'\Sigma)\Psi B'\Psi) + \frac{v}{v-2} (tr(C\Sigma)M'AMB\Psi + M'A\Sigma C'MB'\Psi \\ + tr(AMBM'C\Sigma)\Psi + tr(B\Psi)M'A\Sigma CM + \Psi B'M'A'\Sigma CM \\ + tr(A\Sigma)\Psi BM'CM) + M'AMBM'CM, A(p \times p), B(n \times n), C(p \times p)$$

$$(vi) E(X'AXBXCX') = \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (\Psi C'\Psi B\Sigma A'\Sigma + tr(A\Sigma)tr(C\Psi)\Psi B\Sigma + \Psi C\Psi B\Sigma A\Sigma) \\ + \frac{v}{v-2} (tr(C\Psi)M'AMB\Sigma + tr(BMC\Psi)M'A\Sigma + \Psi C'M'B'M'A'\Sigma \\ + M'A\Sigma B\Psi CM' + tr(AMB\Sigma)\Psi CM' + tr(A\Sigma)\Psi BMCM') \\ + M'AMBMCM', A(p \times p), B(n \times p), C(n \times n)$$

İspat: (i) $XAXBXCX$ matrisinin (i, j) — inci elemanı
 $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj}$ olur. Bu durumda

$$E(XAXBXCX) = E_Y [E_{X|Y} [XAXBXCX]]$$

$$= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj} \right] \right]$$

$$= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} E_{X|Y} [x_{ik} x_{lm} x_{os} x_{tj}] \right]$$

$$= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} \left\{ y^{-1} \sigma_{it} \psi_{kj} y^{-1} \sigma_{lo} \psi_{ms} \right. \right.$$

$$+ y^{-1} \sigma_{il} \psi_{km} y^{-1} \sigma_{to} \psi_{js} + y^{-1} \sigma_{io} \psi_{ks} y^{-1} \sigma_{tl} \psi_{jm} + m_{ik} m_{lm} y^{-1} \sigma_{to} \psi_{js}$$

$$+ m_{ik} m_{os} y^{-1} \sigma_{tl} \psi_{jm} + m_{lm} m_{os} y^{-1} \sigma_{it} \psi_{kj} + m_{ik} m_{tj} y^{-1} \sigma_{lo} \psi_{ms}$$

$$\left. + m_{tj} m_{lm} y^{-1} \sigma_{io} \psi_{ks} + m_{tj} m_{os} y^{-1} \sigma_{il} \psi_{km} + m_{ik} m_{lm} m_{os} m_{tj} \right\} \Big]$$

$$= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-2} \left\{ \sigma_{it} c_{ts} \psi_{sm} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \psi_{kj} \right. \right.$$

$$+ \sigma_{il} a_{lk} \psi_{km} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} + \sigma_{io} b_{om} \psi_{mj} a_{kl} \sigma_{lt} c_{ts} \psi_{sk} \Big\}$$

$$+ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-1} \left\{ m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} \right.$$

$$\begin{aligned}
& +m_{ik}a_{kl}\sigma_{lt}c_{ts}m_{so}b_{om}\Psi_{mj} + \sigma_{it}c_{ts}m_{so}b_{om}m_{ml}a_{lk}\Psi_{kj} \\
& +m_{ik}a_{kl}\sigma_{lo}b_{om}\Psi_{ms}c_{st}m_{tj} + \sigma_{io}b_{om}m_{ml}a_{lk}\Psi_{ks}c_{st}m_{tj} \\
& +\sigma_{il}a_{lk}\Psi_{km}b_{mo}m_{os}c_{st}m_{tj}\} \\
& +\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^n\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^p m_{ik}a_{kl}m_{lm}b_{mo}m_{os}c_{st}m_{tj}\Big] \\
= & E_Y[y^{-2}](\Sigma C'\Psi B\Sigma A'\Psi + \Sigma A'\Psi B\Sigma C'\Psi + tr(A\Sigma C'\Psi)\Sigma B'\Psi) \\
& +E_Y[y^{-1}](MAMB\Sigma C'\Psi + MA\Sigma C'M'B'\Psi + \Sigma C'M'B'M'A'\Psi \\
& +MA\Sigma B'\Psi CM + \Sigma B'M'A'\Psi CM + \Sigma A'\Psi BMCM) + MAMBMC \\
= & \frac{v^2}{(v-2)(v-4)}(\Sigma C'\Psi B\Sigma A'\Psi + \Sigma A'\Psi B\Sigma C'\Psi + tr(A\Sigma C'\Psi)\Sigma B'\Psi) \\
& +\frac{v}{v-2}(MAMB\Sigma C'\Psi + MA\Sigma C'M'B'\Psi + \Sigma C'M'B'M'A'\Psi \\
& +MA\Sigma B'\Psi CM + \Sigma B'M'A'\Psi CM + \Sigma A'\Psi BMCM) + MAMBMC
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $X'AXBXCX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^n\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^p x_{ki}a_{kl}x_{lm}b_{mo}x_{os}c_{st}x_{tj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X'AXBXCX) &= E_Y[E_{X|Y}[X'AXBXCX]] \\
&= E_Y\left[E_{X|Y}\left[\sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^n\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^p x_{ki}a_{kl}x_{lm}b_{mo}x_{os}c_{st}x_{tj}\right]\right] \\
&= E_Y\left[\sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^n\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^p a_{kl}b_{mo}c_{st}E_{X|Y}[x_{ki}x_{lm}x_{os}x_{tj}]\right] \\
&= E_Y\left[\sum_{k=1}^p\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^n\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^p a_{kl}b_{mo}c_{st}\left\{y^{-1}\sigma_{kt}\Psi_{ij}y^{-1}\sigma_{lo}\Psi_{ms}\right.\right. \\
& \quad \left.+y^{-1}\sigma_{kl}\Psi_{im}y^{-1}\sigma_{to}\Psi_{js} + y^{-1}\sigma_{ko}\Psi_{is}y^{-1}\sigma_{tl}\Psi_{jm} + m_{ki}m_{lm}y^{-1}\sigma_{to}\Psi_{js}\right. \\
& \quad \left.+m_{ki}m_{os}y^{-1}\sigma_{tl}\Psi_{jm} + m_{lm}m_{os}y^{-1}\sigma_{kt}\Psi_{ij} + m_{ki}m_{tj}y^{-1}\sigma_{lo}\Psi_{ms}\right\} \\
& \quad \left.+m_{ki}m_{os}y^{-1}\sigma_{tl}\Psi_{jm} + m_{lm}m_{os}y^{-1}\sigma_{kt}\Psi_{ij} + m_{ki}m_{tj}y^{-1}\sigma_{lo}\Psi_{ms}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m_{tj}m_{lm}y^{-1}\sigma_{ko}\Psi_{is} + m_{tj}m_{os}y^{-1}\sigma_{kl}\Psi_{im} + m_{ki}m_{lm}m_{os}m_{tj}\} \\
& = E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-2} \left\{ \Psi_{ij}a_{kl}\sigma_{lo}b_{om}\Psi_{ms}c_{st}\sigma_{tk} \right. \right. \\
& \quad + \Psi_{im}b_{mo}\sigma_{ot}c_{ts}\Psi_{sj}a_{kl}\sigma_{lk} + \Psi_{is}c_{st}\sigma_{tl}a_{lk}\sigma_{ko}b_{om}\Psi_{mj} \left. \right\} \\
& \quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-1} \left\{ m_{ki}a_{kl}m_{lm}b_{mo}\sigma_{ot}c_{ts}\Psi_{sj} \right. \\
& \quad + m_{ki}a_{kl}\sigma_{lt}c_{ts}m_{so}b_{om}\Psi_{mj} + \Psi_{ij}a_{kl}m_{lm}b_{mo}m_{os}c_{st}\sigma_{tk} \\
& \quad + m_{ik}a_{kl}\sigma_{lo}b_{om}\Psi_{ms}c_{st}m_{tj} + \Psi_{is}c_{st}m_{tj}a_{kl}m_{lm}b_{mo}\sigma_{ok} \\
& \quad + \Psi_{im}b_{mo}m_{os}c_{st}m_{tj}a_{kl}\sigma_{lk} \left. \right\} \\
& \quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik}a_{kl}m_{lm}b_{mo}m_{os}c_{st}m_{tj} \left. \right] \\
& = E_Y [y^{-2}] (tr(A\Sigma B'\Psi C\Sigma)\Psi + tr(A\Sigma)\Psi B\Sigma C'\Psi + \Psi C\Sigma A'\Sigma B'\Psi) \\
& \quad + E_Y [y^{-1}] (M'AMB\Sigma C'\Psi + M'A\Sigma C'M'B'\Psi + tr(AMBMC\Sigma)\Psi \\
& \quad + M'A\Sigma B'\Psi CM + tr(AMB\Sigma)\Psi CM + tr(A\Sigma)\Psi BMCM) \\
& \quad + M'AMBMC M \\
& = \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (tr(A\Sigma B'\Psi C\Sigma)\Psi + tr(A\Sigma)\Psi B\Sigma C'\Psi + \Psi C\Sigma A'\Sigma B'\Psi) \\
& \quad + \frac{v}{v-2} (M'AMB\Sigma C'\Psi + M'A\Sigma C'M'B'\Psi + tr(AMBMC\Sigma)\Psi \\
& \quad + M'A\Sigma B'\Psi CM + tr(AMB\Sigma)\Psi CM + tr(A\Sigma)\Psi BMCM) \\
& \quad + M'AMBMC M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $XAX'BXCX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik}a_{kl}x_{ml}b_{mo}x_{os}c_{st}x_{tj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(XAX'BXCX) &= E_Y \left[E_{X|Y} [XAX'BXCX] \right] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} E_{X|Y} [x_{ik} x_{ml} x_{os} x_{tj}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} \left\{ y^{-1} \sigma_{it} \psi_{kj} y^{-1} \sigma_{mo} \psi_{ls} \right. \right. \\
&\quad + y^{-1} \sigma_{im} \psi_{kl} y^{-1} \sigma_{to} \psi_{js} + y^{-1} \sigma_{io} \psi_{ks} y^{-1} \sigma_{tm} \psi_{jl} + m_{ik} m_{ml} y^{-1} \sigma_{to} \psi_{js} \\
&\quad + m_{ik} m_{os} y^{-1} \sigma_{tm} \psi_{jl} + m_{ml} m_{os} y^{-1} \sigma_{it} \psi_{kj} + m_{ik} m_{tj} y^{-1} \sigma_{mo} \psi_{ls} \\
&\quad \left. + m_{tj} m_{ml} y^{-1} \sigma_{io} \psi_{ks} + m_{tj} m_{os} y^{-1} \sigma_{im} \psi_{kl} + m_{ik} m_{ml} m_{os} m_{tj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-2} \left\{ \sigma_{it} c_{ts} \psi_{sl} a_{lk} \psi_{kj} b_{mo} \sigma_{om} \right. \right. \\
&\quad + \sigma_{im} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} a_{kl} \psi_{lk} + \sigma_{io} b_{om} \sigma_{mt} c_{ts} \psi_{sk} a_{kl} \psi_{lj} \left. \right\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-1} \left\{ m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} \right. \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \psi_{lj} b_{mo} m_{os} c_{st} \sigma_{tm} + \sigma_{it} c_{ts} m_{so} b_{om} m_{ml} a_{lk} \psi_{kj} \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \psi_{ls} c_{st} m_{tj} b_{mo} \sigma_{om} + \sigma_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \psi_{ks} c_{st} m_{tj} \\
&\quad \left. + \sigma_{im} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} a_{kl} \psi_{lk} \right\} \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \right] \\
&= E_Y [y^{-2}] (tr(B\Sigma) \Sigma C' \Psi A' \Psi + tr(A\Psi) \Sigma B \Sigma C' \Psi + \Sigma B' \Sigma C' \Psi A \Psi) \\
&\quad + E_Y [y^{-1}] (M A M' B \Sigma C' \Psi + tr(B M C \Sigma) M A \Psi + \Sigma C' M' B' M A' \Psi \\
&\quad + tr(B \Sigma) M A \Psi C M + \Sigma B' M A' \Psi C M + tr(A \Psi) \Sigma B M C M) + M A M' B M C M \\
&= \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (tr(B\Sigma) \Sigma C' \Psi A' \Psi + tr(A\Psi) \Sigma B \Sigma C' \Psi + \Sigma B' \Sigma C' \Psi A \Psi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{v}{v-2} (MAM'B\Sigma C'\Psi + tr(BMC\Sigma)MA\Psi + \Sigma C'M'B'MA'\Psi \\
& + tr(B\Sigma)MA\Psi CM + \Sigma B'MA'\Psi CM + tr(A\Psi)\Sigma BMCM) \\
& + MAM'BMCM
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $X'AX'BXCX$ matrisinin (i, j) - inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X'AX'BXCX) &= E_Y [E_{X|Y} [X'AX'BXCX]] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{ml} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{tj} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} E_{X|Y} [x_{ki} x_{ml} x_{os} x_{tj}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} \left\{ y^{-1} \sigma_{kt} \psi_{ij} y^{-1} \sigma_{mo} \psi_{ls} \right. \right. \\
&\quad + y^{-1} \sigma_{km} \psi_{il} y^{-1} \sigma_{to} \psi_{js} + y^{-1} \sigma_{ko} \psi_{is} y^{-1} \sigma_{tm} \psi_{jl} + m_{ki} m_{ml} y^{-1} \sigma_{to} \psi_{js} \\
&\quad + m_{ki} m_{os} y^{-1} \sigma_{tm} \psi_{jl} + m_{ml} m_{os} y^{-1} \sigma_{kt} \psi_{ij} + m_{ki} m_{tj} y^{-1} \sigma_{mo} \psi_{ls} \\
&\quad \left. + m_{tj} m_{ml} y^{-1} \sigma_{ko} \psi_{is} + m_{tj} m_{os} y^{-1} \sigma_{km} \psi_{il} + m_{ki} m_{ml} m_{os} m_{tj} \right\} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-2} \left\{ \psi_{ij} a_{kl} \psi_{ls} c_{st} \sigma_{tk} b_{mo} \sigma_{om} \right. \right. \\
&\quad + \psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} + \psi_{is} c_{st} \sigma_{tm} b_{mo} \sigma_{ok} a_{kl} \psi_{lj} \left. \right\} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-1} \left\{ m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ot} c_{ts} \psi_{sj} \right. \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \psi_{lj} b_{mo} m_{os} c_{st} \sigma_{tm} + \psi_{ij} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} \sigma_{tk} \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \psi_{ls} c_{st} m_{tj} b_{mo} \sigma_{om} + \psi_{is} c_{st} m_{tj} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ok} \\
&\quad \left. + \psi_{il} a_{lk} \sigma_{km} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} a_{kl} m_{ml} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \Big] \\
& = E_Y [y^{-2}] (tr(A\Psi C\Sigma) tr(B\Sigma) \Psi + \Psi A' \Sigma B \Sigma C' \Psi + \Psi C \Sigma B \Sigma A \Psi) \\
& \quad + E_Y [y^{-1}] (M' A M' B \Sigma C' \Psi + tr(B M C \Sigma) M' A \Psi + tr(A M' B M C \Sigma) \Psi \\
& \quad + tr(B \Sigma) M' A \Psi C M + tr(A M' B \Sigma) \Psi C M + \Psi A' \Sigma B M C M) \\
& \quad + M' A M' B M C M \\
& = \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (tr(A\Psi C\Sigma) tr(B\Sigma) \Psi + \Psi A' \Sigma B \Sigma C' \Psi + \Psi C \Sigma B \Sigma A \Psi) \\
& \quad + \frac{v}{v-2} (M' A M' B \Sigma C' \Psi + tr(B M C \Sigma) M' A \Psi + tr(A M' B M C \Sigma) \Psi \\
& \quad + tr(B \Sigma) M' A \Psi C M + tr(A M' B \Sigma) \Psi C M + \Psi A' \Sigma B M C M) \\
& \quad + M' A M' B M C M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(v) $X'AX'BXCX$ matrisinin (i, j) – inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{so} c_{st} x_{tj}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(X'AX'BXCX) & = E_Y [E_{X|Y} [X'AX'BXCX]] \\
& = E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{so} c_{st} x_{tj} \right] \right] \\
& = E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} E_{X|Y} [x_{ki} x_{lm} x_{so} x_{tj}] \right] \\
& = E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p a_{kl} b_{mo} c_{st} \left\{ y^{-1} \sigma_{kt} \Psi_{ij} y^{-1} \sigma_{ts} \Psi_{mo} \right. \right. \\
& \quad + y^{-1} \sigma_{kl} \Psi_{im} y^{-1} \sigma_{ts} \Psi_{jo} + y^{-1} \sigma_{ks} \Psi_{io} y^{-1} \sigma_{tl} \Psi_{jm} + m_{ki} m_{lm} y^{-1} \sigma_{ts} \Psi_{jo} \\
& \quad + m_{ki} m_{so} y^{-1} \sigma_{tl} \Psi_{jm} + m_{lm} m_{so} y^{-1} \sigma_{kt} \Psi_{ij} + m_{ki} m_{tj} y^{-1} \sigma_{ls} \Psi_{mo} \\
& \quad \left. \left. + m_{tj} m_{lm} y^{-1} \sigma_{ks} \Psi_{io} + m_{tj} m_{so} y^{-1} \sigma_{kl} \Psi_{im} + m_{ki} m_{lm} m_{so} m_{tj} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-2} \left\{ \Psi_{ij} a_{kl} \Psi_{ls} c_{st} \sigma_{tk} b_{mo} \sigma_{om} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Psi_{im} b_{mo} \Psi_{oj} a_{kl} \sigma_{lk} c_{st} \sigma_{ts} + \Psi_{io} b_{om} \Psi_{jm} a_{kl} \sigma_{lt} c_{ts} \sigma_{sk} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-1} \left\{ m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \Psi_{oj} c_{st} \sigma_{ts} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{ik} a_{kl} \sigma_{lt} c_{ts} m_{so} b_{om} \Psi_{mj} + \Psi_{ij} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} \sigma_{tk} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{ik} a_{kl} \sigma_{ls} c_{st} m_{tj} b_{mo} \Psi_{om} + \Psi_{io} b_{om} m_{ml} a_{lk} \sigma_{ks} c_{st} m_{tj} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Psi_{im} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} a_{kl} \sigma_{lk} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} \right] \\
&= E_Y [y^{-2}] (tr(A\Sigma C\Sigma) tr(B\Psi) \Psi + tr(A\Sigma) tr(C\Sigma) \Psi B\Psi + tr(A\Sigma C'\Sigma) \Psi B'\Psi) \\
&\quad + E_Y [y^{-1}] (tr(C\Sigma) M'AMB\Psi + M'A\Sigma C'MB'\Psi + tr(AMBM'C\Sigma) \Psi \\
&\quad + tr(B\Psi) M'A\Sigma CM + \Psi B'M'A'\Sigma CM + tr(A\Sigma) \Psi BM'CM) \\
&\quad + M'AMBM'CM \\
&= \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (tr(A\Sigma C\Sigma) tr(B\Psi) \Psi + tr(A\Sigma) tr(C\Sigma) \Psi B\Psi + tr(A\Sigma C'\Sigma) \Psi B'\Psi) \\
&\quad + \frac{v}{v-2} (tr(C\Sigma) M'AMB\Psi + M'A\Sigma C'MB'\Psi + tr(AMBM'C\Sigma) \Psi \\
&\quad + tr(B\Psi) M'A\Sigma CM + \Psi B'M'A'\Sigma CM + tr(A\Sigma) \Psi BM'CM) \\
&\quad + M'AMBM'CM
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vi) $X'AXBXCX'$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{jt}$ olur. Bu durumda

$$E(X'AXBXCX) = E_Y [E_{X|Y} [X'AXBXCX]]$$

$$\begin{aligned}
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{jt} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kl} b_{mo} c_{st} E_{X|Y} [x_{ki} x_{lm} x_{os} x_{jt}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kl} b_{mo} c_{st} \{ y^{-1} \sigma_{kj} \psi_{it} y^{-1} \sigma_{lo} \psi_{ms} \right. \\
&\quad + y^{-1} \sigma_{kl} \psi_{im} y^{-1} \sigma_{jo} \psi_{ts} + y^{-1} \sigma_{ko} \psi_{is} y^{-1} \sigma_{jl} \psi_{tm} + m_{ki} m_{lm} y^{-1} \sigma_{jo} \psi_{ts} \\
&\quad + m_{ki} m_{os} y^{-1} \sigma_{jl} \psi_{tm} + m_{lm} m_{os} y^{-1} \sigma_{kj} \psi_{it} + m_{ki} m_{jt} y^{-1} \sigma_{lo} \psi_{ms} \\
&\quad \left. + m_{jt} m_{lm} y^{-1} \sigma_{ko} \psi_{is} + m_{jt} m_{os} y^{-1} \sigma_{kl} \psi_{im} + m_{ki} m_{lm} m_{os} m_{jt} \} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n y^{-2} \{ \psi_{it} c_{ts} \psi_{sm} b_{mo} \sigma_{ol} a_{lk} \sigma_{kj} \right. \\
&\quad + \psi_{im} b_{mo} \sigma_{oj} a_{kl} \sigma_{lk} c_{st} \psi_{ts} + \psi_{is} c_{st} \psi_{tm} b_{mo} \sigma_{ok} a_{kl} \sigma_{lj} \} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n y^{-1} \{ m_{ik} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{oj} c_{st} \psi_{ts} \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \sigma_{lj} b_{mo} m_{os} c_{st} \psi_{tm} + \psi_{it} c_{ts} m_{so} b_{om} m_{ml} a_{lk} \sigma_{kj} \\
&\quad + m_{ik} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} \psi_{ms} c_{st} m_{tj} + \psi_{is} c_{st} m_{tj} a_{kl} m_{lm} b_{mo} \sigma_{ok} \\
&\quad \left. + \psi_{im} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{tj} a_{kl} \sigma_{lk} \} \right] \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ki} a_{kl} m_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{jt} \Big] \\
&= E_Y [y^{-2}] (\Psi C' \Psi B \Sigma A' \Sigma + tr(A \Sigma) tr(C \Psi) \Psi B \Sigma + \Psi C \Psi B \Sigma A \Sigma) \\
&\quad + E_Y [y^{-1}] (tr(C \Psi) M' A M B \Sigma + tr(B M C \Psi) M' A \Sigma + \Psi C' M' B' M' A' \Sigma \\
&\quad + M' A \Sigma B \Psi C M' + tr(A M B \Sigma) \Psi C M' + tr(A \Sigma) \Psi B M C M') \\
&\quad + M' A M B M C M' \\
&= \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (\Psi C' \Psi B \Sigma A' \Sigma + tr(A \Sigma) tr(C \Psi) \Psi B \Sigma + \Psi C \Psi B \Sigma A \Sigma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{v}{v-2} (tr(C\Psi) M'AMB\Sigma + tr(BMC\Psi) M'A\Sigma + \Psi C' M' B' M' A' \Sigma \\
& + M' A \Sigma B \Psi C M' + tr(AMB\Sigma) \Psi C M' + tr(A\Sigma) \Psi B M C M') \\
& + M' A M B M C M'
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 4.14 $X \sim MVSl_{p,n}(M, \Sigma, \Psi, q)$ olsun. Bu durumda $q > 4$ için

$$\begin{aligned}
(i) \ E(tr(XBXCX')XA) &= \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (\Sigma^2 B' \Psi C \Psi A + tr(C\Psi) \Sigma^2 B' \Psi A + tr(\Sigma) \Sigma B' \Psi C' \Psi A) \\
&+ \frac{v}{v-2} (tr(B\Sigma M) tr(C\Psi) MA + tr(BMC\Psi) tr(\Sigma) MA \\
&+ \Sigma MBMC\Psi A + tr(B\Sigma MC' \Psi) MA + \Sigma B' M' MC' \Psi A \\
&+ \Sigma MC' M' B' \Psi A) + tr(MBMCM') MA \\
&A(n \times n), B(n \times p), C(n \times n) \\
(ii) \ E(tr(BXCX')XAX) &= \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (\Sigma B \Sigma A' \Psi C' \Psi + tr(B\Sigma) tr(C\Psi) \Sigma A' \Psi + \Sigma B' \Sigma A' \Psi C \Psi) \\
&+ \frac{v}{v-2} (tr(B\Sigma) tr(C\Psi) MAM + MA \Sigma BMC \Psi + \Sigma BMC \Psi AM \\
&+ MA \Sigma B' MC' \Psi + \Sigma B' MC' \Psi AM + tr(BMCM') \Sigma A' \Psi) \\
&+ tr(BMCM') MAM, A(n \times p), B(p \times p), C(n \times n) \\
(iii) \ E(tr(BXCX')X'AX) &= \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (tr(A\Sigma B' \Sigma) \Psi C' \Psi + tr(A\Sigma) tr(B\Sigma) tr(C\Psi) \Psi \\
&+ tr(A\Sigma B \Sigma) \Psi C \Psi) + \frac{v}{v-2} (tr(B\Sigma) tr(C\Psi) M'AM \\
&+ M' A \Sigma BMC \Psi + \Psi C' M' B' \Sigma AM + M' A \Sigma B' MC' \Psi \\
&+ \Psi C M' B \Sigma AM + tr(A\Sigma) tr(BMCM') \Psi) \\
&+ tr(BMCM') M'AM, A(p \times p), B(p \times p), C(n \times n) \\
(iv) \ E(tr(AX)XBXCX) &= \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (\Sigma A' \Psi B \Sigma C' \Psi + \Sigma B' \Psi C \Sigma A' \Psi + \Sigma C' \Psi A \Sigma B' \Psi) \\
&+ \frac{v}{v-2} (MBMC \Sigma A' \Psi + MB \Sigma A' \Psi CM + \Sigma A' \Psi BMCM \\
&+ tr(AM) MB \Sigma C' \Psi + tr(AM) \Sigma C' M' B' \Psi + tr(AM) \Sigma B' \Psi CM) \\
&+ tr((AM) MBMCM), A(n \times p), B(n \times p), C(n \times p) \\
(v) \ E(tr(AX)X'BXCX) &= \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (\Psi A \Sigma B \Sigma C' \Psi + tr(B\Sigma) \Psi C \Sigma A' \Psi \\
&+ tr(B \Sigma A' \Psi C \Sigma) \Psi) + \frac{v}{v-2} (M' BMC \Sigma A' \Psi + M' B \Sigma A' \Psi CM \\
&+ \Psi A \Sigma BMC M + tr(AM) M' B \Sigma C' \Psi + tr(BMC \Sigma) tr(AM) \Psi \\
&+ tr(BM) tr(AM) \Psi CM) + tr(AM) M' BMC M \\
&A(n \times p), B(p \times p), C(n \times p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(vi) \ E(tr(AX)X'BX'CX) &= \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (tr(C\Sigma)\Psi A\Sigma B\Psi + \Psi B'\Sigma C\Sigma A'\Psi + tr(B\Psi A\Sigma C\Sigma)\Psi) \\
&+ \frac{v}{v-2} (M'BM'C\Sigma A'\Psi + M'B\Psi A\Sigma CM + \Psi A\Sigma BM'CM \\
&+ tr(C\Sigma)tr(AM)M'B\Psi + tr(BM'C\Sigma)tr(AM)\Psi \\
&+ \Psi B'\Sigma CMAM) + tr(AM)M'BM'CM \\
&A(n \times p), B(p \times n), C(p \times p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(vii) \ E(tr(AX)X'BX'CX') &= \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (tr(C\Psi)\Psi A\Sigma B\Sigma + tr(B\Sigma)\Psi C\Psi A\Sigma + \Psi C'\Psi A\Sigma B'\Sigma) \\
&+ \frac{v}{v-2} (M'BM C\Psi A\Sigma + M'B\Sigma A'\Psi CM' + \Psi A\Sigma BM CM' \\
&+ tr(C\Psi)tr(AM)M'B\Sigma + tr(AM)\Psi C'M'B'\Sigma \\
&+ tr(B\Sigma)tr(AM)\Psi CM') + tr(AM)M'BM CM' \\
&A(n \times p), B(p \times p), C(n \times n)
\end{aligned}$$

İspat: (i) $tr(XBX'CX')XA$ matrisinin (i, j) - inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ik} a_{kj} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{lt}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(XBX'CX')XA) &= E_Y [E_{X|Y} [tr(XBX'CX')XA]] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ik} a_{kj} x_{lm} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{lt} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kj} b_{mo} c_{st} E_{X|Y} [x_{ik} x_{lm} x_{os} x_{lt}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kj} b_{mo} c_{st} \{ y^{-1} \sigma_{il} \Psi_{kt} y^{-1} \sigma_{lo} \Psi_{ms} \right. \\
&\quad + y^{-1} \sigma_{il} \Psi_{km} y^{-1} \sigma_{lo} \Psi_{ts} + y^{-1} \sigma_{io} \Psi_{ks} y^{-1} \sigma_{ll} \Psi_{tm} \\
&\quad + m_{ik} m_{lm} y^{-1} \sigma_{lo} \Psi_{ts} + m_{ik} m_{os} y^{-1} \sigma_{ll} \Psi_{tm} \\
&\quad + m_{lm} m_{os} y^{-1} \sigma_{il} \Psi_{kt} + m_{ik} m_{lt} y^{-1} \sigma_{lo} \Psi_{ms} \\
&\quad + m_{lt} m_{lm} y^{-1} \sigma_{io} \Psi_{ks} + m_{lt} m_{os} y^{-1} \sigma_{il} \Psi_{km} \\
&\quad \left. + m_{ik} m_{lm} m_{os} m_{lt} \} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n y^{-2} \{ \sigma_{il} \sigma_{lo} b_{om} \Psi_{ms} c_{st} \Psi_{tk} a_{kj} \right. \\
&\quad + \sigma_{il} \sigma_{lo} b_{om} \Psi_{mk} a_{kj} c_{st} \Psi_{ts} + \sigma_{io} b_{om} \Psi_{mt} c_{ts} \Psi_{sk} a_{kj} \sigma_{ll} \} \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n y^{-1} \{ m_{ik} a_{kj} b_{mo} \sigma_{ol} m_{lm} c_{st} \Psi_{ts} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m_{ik}a_{kj}b_{mo}m_{os}c_{st}\Psi_{tm}\sigma_{ll} + \sigma_{il}m_{lm}b_{mo}m_{os}c_{st}\Psi_{tk}a_{kj} \\
& +m_{ik}a_{kj}b_{mo}\sigma_{ol}m_{lt}c_{ts}\Psi_{sm} + \sigma_{io}b_{om}m_{ml}m_{lt}c_{ts}\Psi_{sk}a_{kj} \\
& +\sigma_{il}m_{lt}c_{ts}m_{so}b_{om}\Psi_{mk}a_{kj}\} \\
& +\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n m_{ik}a_{kj}m_{lm}b_{mo}m_{os}c_{st}m_{tl}\Big] \\
& = E[y^{-2}]\left(\Sigma^2B'\Psi C\Psi A + tr(C\Psi)\Sigma^2B'\Psi A + tr(\Sigma)\Sigma B'\Psi C'\Psi A\right) \\
& +E[y^{-1}]\left(tr(B\Sigma M)tr(C\Psi)MA + tr(BMC\Psi)tr(\Sigma)MA\right. \\
& +\Sigma MBMC\Psi A + tr(B\Sigma MC'\Psi)MA + \Sigma B'M'MC'\Psi A \\
& +\Sigma MC'M'B'\Psi A) + tr(MBMCM')MA \\
& = \frac{v^2}{(v-2)(v-4)}\left(\Sigma^2B'\Psi C\Psi A + tr(C\Psi)\Sigma^2B'\Psi A + tr(\Sigma)\Sigma B'\Psi C'\Psi A\right) \\
& +\frac{v}{v-2}\left(tr(B\Sigma M)tr(C\Psi)MA + tr(BMC\Psi)tr(\Sigma)MA\right. \\
& +\Sigma MBMC\Psi A + tr(B\Sigma MC'\Psi)MA + \Sigma B'M'MC'\Psi A \\
& +\Sigma MC'M'B'\Psi A) + tr(MBMCM')MA
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $tr(BXCX')XAX$ matrisinin (i, j) - inci elemanı $\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n x_{ik}a_{kl}x_{lj}b_{mo}x_{os}c_{st}x_{mt}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(BXCX')XAX) & = E_Y[E_{X|Y}[tr(BXCX')XAX]] \\
& = E_Y\left[E_{X|Y}\left[\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n x_{ik}a_{kl}x_{lj}b_{mo}x_{os}c_{st}x_{mt}\right]\right] \\
& = E_Y\left[\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n a_{kl}b_{mo}c_{st}E_{X|Y}[x_{ik}x_{lj}x_{os}x_{mt}]\right] \\
& = E_Y\left[\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^p\sum_{m=1}^p\sum_{o=1}^p\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n a_{kl}b_{mo}c_{st}\left\{y^{-1}\sigma_{im}\Psi_{kt}y^{-1}\sigma_{lo}\Psi_{js}\right\}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +y^{-1}\sigma_{il}\Psi_{kj}y^{-1}\sigma_{mo}\Psi_{ts} + y^{-1}\sigma_{io}\Psi_{ks}y^{-1}\sigma_{ml}\Psi_{tj} \\
& +m_{ik}m_{lj}y^{-1}\sigma_{mo}\Psi_{ts} + m_{ik}m_{os}y^{-1}\sigma_{ml}\Psi_{tj} \\
& +m_{lj}m_{os}y^{-1}\sigma_{im}\Psi_{kt} + m_{ik}m_{mt}y^{-1}\sigma_{lo}\Psi_{js} \\
& +m_{mt}m_{lj}y^{-1}\sigma_{io}\Psi_{ks} + m_{mt}m_{os}y^{-1}\sigma_{il}\Psi_{kj} \\
& +m_{ik}m_{lj}m_{os}m_{mt}\} \Big] \\
& = E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n y^{-2} \left\{ \sigma_{im}b_{mo}\sigma_{ol}a_{lk}\Psi_{kt}c_{ts}\Psi_{sj} \right. \right. \\
& \quad + \sigma_{il}a_{lk}\Psi_{kj}b_{mo}\sigma_{om}c_{st}\Psi_{ts} + \sigma_{io}b_{om}\sigma_{ml}a_{lk}\Psi_{ks}c_{st}\Psi_{tj} \Big\} \\
& \quad + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n y^{-1} \left\{ m_{ik}a_{kl}m_{lj}b_{mo}\sigma_{om}c_{st}\Psi_{ts} \right. \\
& \quad + m_{ik}a_{kl}\sigma_{lm}b_{mo}m_{os}c_{st}\Psi_{tj} + \sigma_{im}b_{mo}m_{os}c_{st}\Psi_{tk}a_{kl}m_{lj} \\
& \quad + m_{ik}a_{kl}\sigma_{lo}b_{om}m_{mt}c_{ts}\Psi_{sj} + \sigma_{io}b_{om}m_{mt}c_{ts}\Psi_{sk}a_{kl}m_{lj} \\
& \quad \left. + \sigma_{il}a_{lk}\Psi_{kj}b_{mo}m_{os}c_{st}m_{tm} \right\} \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ik}a_{kl}m_{lj}b_{mo}m_{os}c_{st}m_{tm} \right] \\
& = E \left[y^{-2} \right] (\Sigma B \Sigma A' \Psi C' \Psi + tr(B \Sigma) tr(C \Psi) \Sigma A' \Psi + \Sigma B' \Sigma A' \Psi C \Psi) \\
& \quad + E \left[y^{-1} \right] (tr(B \Sigma) tr(C \Psi) M A M + M A \Sigma B M C \Psi \\
& \quad + \Sigma B M C \Psi A M + M A \Sigma B' M C' \Psi + \Sigma B' M C' \Psi A M \\
& \quad + tr(B M C M') \Sigma A' \Psi) + tr(B M C M') M A M \\
& = \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (\Sigma B \Sigma A' \Psi C' \Psi + tr(B \Sigma) tr(C \Psi) \Sigma A' \Psi + \Sigma B' \Sigma A' \Psi C \Psi) \\
& \quad + \frac{v}{v-2} (tr(B \Sigma) tr(C \Psi) M A M + M A \Sigma B M C \Psi \\
& \quad + \Sigma B M C \Psi A M + M A \Sigma B' M C' \Psi + \Sigma B' M C' \Psi A M
\end{aligned}$$

$$+tr(BMCM')\Sigma A'\Psi) + tr(BMCM')MAM$$

elde edilir.

(iii) $tr(BXCX')X'AX$ matrisinin (i, j) — inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{lj} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{mt}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} E(tr(BXCX')X'AX) &= E_Y [E_{X|Y} [tr(BXCX')X'AX]] \\ &= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n x_{ki} a_{kl} x_{lj} b_{mo} x_{os} c_{st} x_{mt} \right] \right] \\ &= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kl} b_{mo} c_{st} E_{X|Y} [x_{ki} x_{lj} x_{os} x_{mt}] \right] \\ &= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{kl} b_{mo} c_{st} \left\{ y^{-1} \sigma_{km} \Psi_{it} y^{-1} \sigma_{lo} \Psi_{js} \right. \right. \\ &\quad + y^{-1} \sigma_{kl} \Psi_{ij} y^{-1} \sigma_{mo} \Psi_{ts} + y^{-1} \sigma_{ko} \Psi_{is} y^{-1} \sigma_{ml} \Psi_{tj} \\ &\quad + m_{ki} m_{lj} y^{-1} \sigma_{mo} \Psi_{ts} + m_{ki} m_{os} y^{-1} \sigma_{ml} \Psi_{tj} \\ &\quad + m_{lj} m_{os} y^{-1} \sigma_{km} \Psi_{it} + m_{ki} m_{mt} y^{-1} \sigma_{lo} \Psi_{js} \\ &\quad + m_{mt} m_{lj} y^{-1} \sigma_{ko} \Psi_{is} + m_{mt} m_{os} y^{-1} \sigma_{kl} \Psi_{ij} \\ &\quad \left. \left. + m_{ki} m_{lj} m_{os} m_{mt} \right\} \right] \\ &= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n y^{-2} \left\{ \Psi_{it} c_{ts} \Psi_{sj} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} \sigma_{mk} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Psi_{ij} a_{kl} \sigma_{lk} b_{mo} \sigma_{om} c_{st} \Psi_{ts} + \Psi_{is} c_{st} \Psi_{tj} a_{kl} \sigma_{lm} b_{mo} \sigma_{ok} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n y^{-1} \left\{ m_{ki} a_{kl} m_{lj} b_{mo} \sigma_{om} c_{st} \Psi_{ts} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_{ki} a_{kl} \sigma_{lm} b_{mo} m_{os} c_{st} \Psi_{tj} + \Psi_{it} c_{ts} m_{so} b_{om} \sigma_{mk} a_{kl} m_{lj} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_{ki} a_{kl} \sigma_{lo} b_{om} m_{mt} c_{ts} \Psi_{sj} + \Psi_{is} c_{st} m_{mt} b_{mo} \sigma_{ok} a_{kl} m_{lj} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Psi_{ij} a_{kl} \sigma_{lk} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{mt} \Big\} \\
& + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n m_{ki} a_{kl} m_{lj} b_{mo} m_{os} c_{st} m_{mt} \Big] \\
& = E \left[y^{-2} \right] (tr(A \Sigma B' \Sigma) \Psi C' \Psi + tr(A \Sigma) tr(B \Sigma) tr(C \Psi) \Psi \\
& \quad + tr(A \Sigma B \Sigma) \Psi C \Psi) + E \left[y^{-1} \right] (tr(B \Sigma) tr(C \Psi) M' A M \\
& \quad + M' A \Sigma B M C \Psi + \Psi C' M' B' \Sigma A M + M' A \Sigma B' M C' \Psi \\
& \quad + \Psi C M' B \Sigma A M + tr(A \Sigma) tr(B M C M') \Psi) \\
& \quad + tr(B M C M') M A M \\
& = \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (tr(A \Sigma B' \Sigma) \Psi C' \Psi + tr(A \Sigma) tr(B \Sigma) tr(C \Psi) \Psi \\
& \quad + tr(A \Sigma B \Sigma) \Psi C \Psi) + \frac{v}{v-2} (tr(B \Sigma) tr(C \Psi) M' A M \\
& \quad + M' A \Sigma B M C \Psi + \Psi C' M' B' \Sigma A M + M' A \Sigma B' M C' \Psi \\
& \quad + \Psi C M' B \Sigma A M + tr(A \Sigma) tr(B M C M') \Psi) \\
& \quad + tr(B M C M') M A M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $tr(AX)XBXCX$ matrisinin (i, j) –inci elemanı $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)XBXCX) & = E_Y \left[E_{X|Y} \left[tr(AX)XBXCX \right] \right] \\
& = E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ik} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts} \right] \right] \\
& = E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} E_{X|Y} \left[x_{ik} x_{lm} x_{oj} x_{ts} \right] \right] \\
& = E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} \left\{ y^{-1} \sigma_{it} \Psi_{ks} y^{-1} \sigma_{lo} \Psi_{mj} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +y^{-1}\sigma_{il}\Psi_{km}y^{-1}\sigma_{to}\Psi_{sj}+y^{-1}\sigma_{io}\Psi_{kj}y^{-1}\sigma_{tl}\Psi_{sm} \\
& +m_{ik}m_{lm}y^{-1}\sigma_{to}\Psi_{sj}+m_{ik}m_{oj}y^{-1}\sigma_{tl}\Psi_{sm} \\
& +m_{lm}m_{oj}y^{-1}\sigma_{it}\Psi_{ks}+m_{ik}m_{ts}y^{-1}\sigma_{lo}\Psi_{mj} \\
& +m_{ts}m_{lm}y^{-1}\sigma_{io}\Psi_{kj}+m_{ts}m_{oj}y^{-1}\sigma_{il}\Psi_{km} \\
& +m_{ik}m_{lm}m_{oj}m_{ts}\} \Big] \\
& = E_Y \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-2} \left\{ \sigma_{it}a_{ts}\Psi_{sk}b_{kl}\sigma_{lo}c_{om}\Psi_{mj} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +\sigma_{il}b_{lk}\Psi_{km}c_{mo}\sigma_{ot}a_{ts}\Psi_{sj}+\sigma_{io}c_{om}\Psi_{ms}a_{st}\sigma_{tl}b_{lk}\Psi_{kj} \right\} \right. \\
& \quad \left. +\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-1} \left\{ m_{ik}b_{kl}m_{lm}c_{mo}\sigma_{ot}a_{ts}\Psi_{sj} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +m_{ik}b_{kl}\sigma_{lt}a_{ts}\Psi_{sm}c_{mo}m_{oj}+\sigma_{it}a_{ts}\Psi_{sk}b_{kl}m_{lm}c_{mo}m_{oj} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +m_{ik}b_{kl}\sigma_{lo}c_{om}\Psi_{mj}a_{st}m_{ts}+\sigma_{io}c_{om}m_{ml}b_{lk}\Psi_{kj}a_{st}m_{ts} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +\sigma_{il}b_{lk}\Psi_{km}c_{mo}m_{oj}a_{st}m_{ts} \right\} \right. \\
& \quad \left. +\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ik}b_{kl}m_{lm}c_{mo}m_{oj}a_{st}m_{ts} \right] \\
& = E \left[y^{-2} \right] (\Sigma A' \Psi B \Sigma C' \Psi + \Sigma B' \Psi C \Sigma A' \Psi + \Sigma C' \Psi A \Sigma B' \Psi) \\
& \quad + E \left[y^{-1} \right] (M B M C \Sigma A' \Psi + M B \Sigma A' \Psi C M + \Sigma A' \Psi B M C M \\
& \quad + tr(AM) M B \Sigma C' \Psi + tr(AM) \Sigma C' M' B' \Psi \\
& \quad + tr(AM) \Sigma B' \Psi C M) + tr(AM) M B M C M \\
& = \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (\Sigma A' \Psi B \Sigma C' \Psi + \Sigma B' \Psi C \Sigma A' \Psi + \Sigma C' \Psi A \Sigma B' \Psi) \\
& \quad + \frac{v}{v-2} (M B M C \Sigma A' \Psi + M B \Sigma A' \Psi C M + \Sigma A' \Psi B M C M \\
& \quad + tr(AM) M B \Sigma C' \Psi + tr(AM) \Sigma C' M' B' \Psi
\end{aligned}$$

$$+tr(AM)\Sigma B'\Psi CM) + tr(AM)MBMCM$$

elde edilir.

(v) $tr(AX)X'BXCX$ matrisinin (i, j) -inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} E(tr(AX)X'BXCX) &= E_Y [E_{X|Y} [tr(AX)X'BXCX]] \\ &= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts} \right] \right] \\ &= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} E_{X|Y} [x_{ki} x_{lm} x_{oj} x_{ts}] \right] \\ &= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} \left\{ u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kt} \Psi_{is} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \Psi_{mj} \right. \right. \\ &\quad + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kl} \Psi_{im} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{to} \Psi_{sj} + u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ko} \Psi_{ij} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tl} \Psi_{sm} \\ &\quad + m_{ki} m_{lm} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{to} \Psi_{sj} + m_{ki} m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{tl} \Psi_{sm} \\ &\quad + m_{lm} m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kt} \Psi_{is} + m_{ki} m_{ts} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{lo} \Psi_{mj} \\ &\quad + m_{ts} m_{lm} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{ko} \Psi_{ij} + m_{ts} m_{oj} u^{-\frac{2}{q}} \sigma_{kl} \Psi_{im} \\ &\quad \left. \left. + m_{ki} m_{lm} m_{oj} m_{ts} \right\} \right] \\ &= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{4}{q}} \left\{ \Psi_{is} a_{st} \sigma_{tk} b_{kl} \sigma_{lo} c_{om} \Psi_{mj} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Psi_{im} c_{mo} \sigma_{ot} a_{ts} \Psi_{sj} b_{kl} \sigma_{lk} + \Psi_{ij} b_{kl} \sigma_{lt} a_{ts} \Psi_{sm} c_{mo} \sigma_{ok} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p u^{-\frac{2}{q}} \left\{ m_{ki} b_{kl} m_{lm} c_{mo} \sigma_{ot} a_{ts} \Psi_{sj} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_{ki} b_{kl} \sigma_{lt} a_{ts} \Psi_{sm} c_{mo} m_{oj} + \Psi_{is} a_{st} \sigma_{tk} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{oj} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_{ki} b_{kl} \sigma_{lo} c_{om} \Psi_{mj} a_{st} m_{ts} + \Psi_{ij} b_{kl} m_{lm} c_{mo} \sigma_{ok} a_{st} m_{ts} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Psi_{im} c_{mo} m_{oj} b_{kl} \sigma_{lk} a_{st} m_{ts} \} \\
& + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{oj} a_{st} m_{ts} \Big] \\
& = E [y^{-2}] (\Psi A \Sigma B \Sigma C' \Psi + tr(B \Sigma) \Psi C \Sigma A' \Psi + tr(B \Sigma A' \Psi C \Sigma) \Psi) \\
& + E [y^{-1}] (M' B M C \Sigma A' \Psi + M' B \Sigma A' \Psi C M + \Psi A \Sigma B M C M \\
& + tr(AM) M' B \Sigma C' \Psi + tr(B M C \Sigma) tr(AM) \Psi \\
& + tr(B \Sigma) tr(AM) \Psi C M) + tr(AM) M' B M C M \\
& = \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (\Psi A \Sigma B \Sigma C' \Psi + tr(B \Sigma) \Psi C \Sigma A' \Psi + tr(B \Sigma A' \Psi C \Sigma) \Psi) \\
& + \frac{v}{v-2} (M' B M C \Sigma A' \Psi + M' B \Sigma A' \Psi C M + \Psi A \Sigma B M C M \\
& + tr(AM) M' B \Sigma C' \Psi + tr(B M C \Sigma) tr(AM) \Psi \\
& + tr(B \Sigma) tr(AM) \Psi C M) + tr(AM) M' B M C M
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vi) $tr(AX) X' B X' C X$ matrisinin (i, j) — inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{ml} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX) X' B X' C X) & = E_Y [E_{X|Y} [tr(AX) X' B X' C X]] \\
& = E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{ml} c_{mo} x_{oj} a_{st} x_{ts} \right] \right] \\
& = E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} E_{X|Y} [x_{ki} x_{ml} x_{oj} x_{ts}] \right] \\
& = E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} \left\{ y^{-1} \sigma_{kt} \Psi_{is} y^{-1} \sigma_{mo} \Psi_{lj} \right. \right. \\
& \quad + y^{-1} \sigma_{km} \Psi_{il} y^{-1} \sigma_{to} \Psi_{sj} + y^{-1} \sigma_{ko} \Psi_{ij} y^{-1} \sigma_{tm} \Psi_{sl} \\
& \quad \left. + m_{ki} m_{ml} y^{-1} \sigma_{to} \Psi_{sj} + m_{ki} m_{oj} y^{-1} \sigma_{tm} \Psi_{sl} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m_{ml}m_{oj}y^{-1}\sigma_{kt}\psi_{is}+m_{ki}m_{ts}y^{-1}\sigma_{mo}\psi_{lj} \\
& +m_{ts}m_{ml}y^{-1}\sigma_{ko}\psi_{ij}+m_{ts}m_{oj}y^{-1}\sigma_{km}\psi_{il} \\
& +m_{ki}m_{ml}m_{oj}m_{ts}\} \Big] \\
& = E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-2} \left\{ \psi_{is}a_{st}\sigma_{tk}b_{kl}\psi_{lj}c_{mo}\sigma_{om} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +\psi_{il}b_{lk}\sigma_{km}c_{mo}\sigma_{ot}a_{ts}\psi_{sj}+\psi_{ij}b_{kl}\psi_{ls}a_{st}\sigma_{tm}c_{mo}\sigma_{ok} \right\} \right. \\
& \quad \left. +\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-1} \left\{ m_{ki}b_{kl}m_{ml}c_{mo}\sigma_{ot}a_{ts}\psi_{sj} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +m_{ki}b_{kl}\psi_{ls}a_{st}\sigma_{tm}c_{mo}m_{oj}+\psi_{is}a_{st}\sigma_{tk}b_{kl}m_{ml}c_{mo}m_{oj} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +m_{ki}b_{kl}\psi_{lj}c_{mo}\sigma_{om}a_{st}m_{ts}+\psi_{ij}b_{kl}m_{ml}c_{mo}\sigma_{ok}a_{st}m_{ts} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. +\psi_{il}b_{lk}\sigma_{km}c_{mo}m_{oj}a_{st}m_{ts} \right\} \right. \\
& \quad \left. +\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^p \sum_{o=1}^p \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki}b_{kl}m_{ml}c_{mo}m_{oj}a_{st}m_{ts} \right] \\
& = E \left[y^{-2} \right] (tr(C\Sigma)\Psi A\Sigma B\Psi + \Psi B'\Sigma C\Sigma A'\Psi + tr(B\Psi A\Sigma C\Sigma)\Psi) \\
& \quad +E \left[y^{-1} \right] (M'BM'C\Sigma A'\Psi + M'B\Psi A\Sigma CM + \Psi A\Sigma BM'CM \\
& \quad +tr(C\Sigma)tr(AM)M'B\Psi + tr(BM'C\Sigma)tr(AM)\Psi \\
& \quad +\Psi B'\Sigma CMAM) + tr(AM)M'BM'CM \\
& = \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (tr(C\Sigma)\Psi A\Sigma B\Psi + \Psi B'\Sigma C\Sigma A'\Psi + tr(B\Psi A\Sigma C\Sigma)\Psi) \\
& \quad +\frac{v}{v-2} (M'BM'C\Sigma A'\Psi + M'B\Psi A\Sigma CM + \Psi A\Sigma BM'CM \\
& \quad +tr(C\Sigma)tr(AM)M'B\Psi + tr(BM'C\Sigma)tr(AM)\Psi \\
& \quad +\Psi B'\Sigma CMAM) + tr(AM)M'BM'CM
\end{aligned}$$

elde edilir.

(vii) $tr(AX)X'BXCX'$ matrisinin (i, j) — inci elemanı $\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{jo} a_{st} x_{ts}$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(tr(AX)X'BXCX') &= E_Y [E_{X|Y} [tr(AX)X'BXCX']] \\
&= E_Y \left[E_{X|Y} \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p x_{ki} b_{kl} x_{lm} c_{mo} x_{jo} a_{st} x_{ts} \right] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} E_{X|Y} [x_{ki} x_{lm} x_{jo} x_{ts}] \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p b_{kl} c_{mo} a_{st} \{ y^{-1} \sigma_{kt} \psi_{is} y^{-1} \sigma_{lj} \psi_{mo} \right. \\
&\quad + y^{-1} \sigma_{kl} \psi_{im} y^{-1} \sigma_{tj} \psi_{so} + y^{-1} \sigma_{kj} \psi_{io} y^{-1} \sigma_{tl} \psi_{sm} \\
&\quad + m_{ki} m_{lm} y^{-1} \sigma_{tj} \psi_{so} + m_{ki} m_{jo} y^{-1} \sigma_{tl} \psi_{sm} \\
&\quad + m_{lm} m_{jo} y^{-1} \sigma_{kt} \psi_{is} + m_{ki} m_{ts} y^{-1} \sigma_{lj} \psi_{mo} \\
&\quad + m_{ts} m_{lm} y^{-1} \sigma_{kj} \psi_{io} + m_{ts} m_{jo} y^{-1} \sigma_{kl} \psi_{im} \\
&\quad \left. + m_{ki} m_{lm} m_{jo} m_{ts} \} \right] \\
&= E_Y \left[\sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-2} \{ \psi_{is} a_{st} \sigma_{tk} b_{kl} \sigma_{lj} c_{mo} \psi_{om} \right. \\
&\quad + \psi_{im} c_{mo} \psi_{os} a_{st} \sigma_{tj} b_{kl} \sigma_{lk} + \psi_{io} c_{om} \psi_{ms} a_{st} \sigma_{tl} b_{lk} \sigma_{kj} \} \\
&\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p y^{-1} \{ m_{ki} b_{kl} m_{lm} c_{mo} \psi_{os} a_{st} \sigma_{tj} \\
&\quad + m_{ki} b_{kl} \sigma_{lt} a_{ts} \psi_{sm} c_{mo} m_{jo} + \psi_{is} a_{st} \sigma_{tk} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{jo} \\
&\quad + m_{ki} b_{kl} \sigma_{lj} c_{mo} \psi_{om} a_{st} m_{ts} + \psi_{io} c_{om} m_{ml} b_{lk} \sigma_{kj} a_{st} m_{ts} \\
&\quad + \psi_{im} c_{mo} m_{jo} b_{kl} \sigma_{lk} a_{st} m_{ts} \} \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^n \sum_{o=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^p m_{ki} b_{kl} m_{lm} c_{mo} m_{jo} a_{st} m_{ts} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[y^{-2}] (tr(C\Psi)\Psi A\Sigma B\Sigma + tr(B\Sigma)\Psi C\Psi A\Sigma + \Psi C'\Psi A\Sigma B'\Sigma) \\
&\quad + E[y^{-1}] (M'BM C\Psi A\Sigma + M'B\Sigma A'\Psi C M' + \Psi A\Sigma B M C M' \\
&\quad + tr(C\Psi)tr(AM)M'B\Sigma + tr(AM)\Psi C'M'B'\Sigma \\
&\quad + tr(B\Sigma)tr(AM)\Psi C M') + tr(AM)M'BM C M' \\
&= \frac{v^2}{(v-2)(v-4)} (tr(C\Psi)\Psi A\Sigma B\Sigma + tr(B\Sigma)\Psi C\Psi A\Sigma + \Psi C'\Psi A\Sigma B'\Sigma) \\
&\quad + \frac{v}{v-2} (M'BM C\Psi A\Sigma + M'B\Sigma A'\Psi C M' + \Psi A\Sigma B M C M' \\
&\quad + tr(C\Psi)tr(AM)M'B\Sigma + tr(AM)\Psi C'M'B'\Sigma \\
&\quad + tr(B\Sigma)tr(AM)\Psi C M') + tr(AM)M'BM C M'
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

4.3 Matris Değişkenli t Dağılımının Parametre Tahmini

Bu bölümde matris değişkenli t dağılımının parametrelerinin tahmini yapılacaktır. İlk olarak en çok olabilirlik yöntemi ile, daha sonra EM algoritması kullanılarak parametre tahminleri yapılacaktır. Elde edilen sonuçlara bakıldığında EM algoritması kullanılarak elde edilen sonuçların en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilen sonuçlar ile aynı oldukları görülmektedir.

4.3.1 En çok olabilirlik yöntemi

Bu bölümde en çok olabilirlik yöntemi ile matris değişkenli t dağılımının parametreleri tahmin edilecektir.

$X_1, X_2, \dots, X_l$ b.b.a.d. rassal matrisler olsun. Bu veri matrislerini M, Σ, Ψ parametrelili

matris değişkenli t dağılımı ile modellemek istiyoruz. Bu durumda log-likelihood fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 l(M, \Sigma, \Psi; X) = & \frac{nl}{2} \ln |\Sigma^{-1}| + \frac{pl}{2} \ln |\Psi^{-1}| + l \ln \left\{ \Gamma \left(\frac{np+v}{2} \right) \right\} \\
 & - \frac{npl}{2} \ln(\pi v) - l \ln \left\{ \Gamma \left(\frac{v}{2} \right) \right\} \\
 & - \frac{np+v}{2} \sum_{i=1}^l \ln \left\{ 1 + \frac{tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)')}{v} \right\}
 \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklindedir. Log-likelihood fonksiyonun ilgili parametrelere göre türevini alıp sıfıra eşitlersek aşağıdaki tahmin denklemlerini elde ederiz.

$$\hat{M} = \frac{\sum_{i=1}^l w_i X_i}{\sum_{i=1}^l w_i} \quad (4.6)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{nl} \sum_{i=1}^l w_i (X_i - \hat{M}) \hat{\Psi}^{-1} (X_i - \hat{M})' \quad (4.7)$$

$$\hat{\Psi} = \frac{1}{pl} \sum_{i=1}^l w_i (X_i - \hat{M})' \hat{\Sigma}^{-1} (X_i - \hat{M}) \quad (4.8)$$

Burada w_i ağırlık fonksiyonu Eşitlik 4.9'da verildiği gibidir.

$$w_i = \frac{np+v}{v + tr \left(\hat{\Sigma}^{-1} (X - \hat{M}) \hat{\Psi}^{-1} (X - \hat{M})' \right)} \quad (4.9)$$

Eşitlik 4.7-4.8'e bakıldığında tahmin edicilerin kapalı formda olmadığı görülür. Bu durumda sayısal yöntem kullanmak zorundayız. Ayrıca serbestlik derecesini tahmin etmek istersek Eşitlik 4.10'da verilen denklemi yukarıda verilen denklemler ile birlikte çözmeliyiz.

$$\begin{aligned}
 & \frac{l}{2} \Upsilon \left(\frac{np+v}{2} \right) - \frac{npl}{2v} - \frac{l}{2} \Upsilon \left(\frac{v}{2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \ln \left\{ 1 + \frac{tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)')}{v} \right\} \\
 & + \frac{np+v}{2v} \sum_{i=1}^l \frac{tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)')}{v + tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)')} = 0
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Eşitlik 4.10 düzenlenirse serbestlik derecesinin tahmini için Eşitlik 4.11'de verilen tahmin edici elde edilir.

$$\hat{v} = \frac{np \left(l - \sum_{i=1}^l \frac{tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)')}{\hat{v} + tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)')} \right)}{l \Upsilon \left(\frac{np+\hat{v}}{2} \right) - l \Upsilon \left(\frac{\hat{v}}{2} \right) - \sum_{i=1}^l \ln \left(1 + \frac{tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)')}{\hat{v}} \right) + \sum_{i=1}^l \frac{tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)')}{\hat{v} + tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)')}} \quad (4.11)$$

Burada Υ Digamma fonksiyonudur. Bu çalışmada robustluk için serbestlik derecesi sabit olarak alınacaktır. Bunun sebebi ise, $tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)') \rightarrow \infty$ olduğunda Eşitlik 4.10 sonuza gitmektedir. Bunun anlamı ise büyük Mahalonobis uzaklığına sahip gözlemler serbestlik derecesinin tahminini bozmaktadır. Yani, serbestlik derecesini diğer parametrelerle birlikte tahmin ettiğimiz zaman etki fonksiyonu sınırsız olacaktır. Bu robust çalışmalarda istenmeyen bir durumdur. Bu yüzden bu çalışmada serbestlik derecesi sabit olarak varsayılacaktır ve robust ayar sabiti olarak kullanılacaktır. Ayrıca serbestlik derecesi büyüdükçe matris değişkenli t dağılımı, matris değişkenli normal dağılıma yaklaşmaktadır. Bu yüzden robustluğu sürdürmek için serbestlik derecesinin küçük değerleri tercih edilecektir.

4.3.2 EM algoritması ile parametre tahmini

Bu bölümde matris değişkenli t dağılımının parametrelerinin tahmini için EM algoritması kullanılacaktır. EM algoritmasını kullanmak için, Tanım 4.1'de verilen ölçek karması gösterimini kullanacağız. Burada Y 'ler kayıp veri, X 'ler gözlenen veri olarak (X, Y) ise tam veri olarak tanımlanacaktır. $i = 1, 2, \dots, l$ için tam verinin log-likelihood fonksiyonu Eşitlik 4.12'de verildiği gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
 L(M, \Sigma, \Psi) = & -\frac{np}{2} \ln(2\pi) - \frac{pl}{2} \ln|\Sigma| - \frac{nl}{2} \ln|\Psi| + \frac{vl}{2} \ln(v) - \frac{vl}{2} \ln(2) \\
 & -l \ln \left\{ \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \right\} + \left(\frac{np+v}{2} - 1 \right) \sum_{i=1}^l \ln y_i \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l y_i \left(v + tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)') \right)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Tam verinin log-likelihood fonksiyonu kolayca maksimize edilebilir fakat Y 'ler kayıp veri olduğundan gözlemleyemiyoruz. Fonksiyonun maksimizasyonu Y değişkenlerine bağlıdır. Bu problemle başa çıkabilmek için tam verinin X_i gözlem değerleri ve şu anki parametre değerleri verildiğinde log-likelihood fonksiyonunun koşullu beklenen değerini alacağız. Koşullu beklenen değer alındığında Eşitlik 4.13 elde edilir.

$$\begin{aligned}
Q(M, \Sigma, \Psi) &= E \left(L(M, \Sigma, \Psi) | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right) \\
&= -\frac{np}{2} \ln(2\pi) - \frac{pl}{2} \ln|\Sigma| - \frac{nl}{2} \ln|\Psi| + \frac{vl}{2} \ln(v) - \frac{vl}{2} \ln(2) \\
&\quad - l \ln \left\{ \Gamma \left(\frac{v}{2} \right) \right\} + \left(\frac{np+v}{2} - 1 \right) \sum_{i=1}^l E \left(\ln Y_i | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l E \left(Y_i | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right) (v + tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)'))
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Burada $E \left(\ln Y_i | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right)$ ve $E \left(Y_i | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right)$, X_i gözlem değerleri ve şu anki parametre değerleri verildiğinde $\ln Y_i$ ve Y_i değişkenlerinin koşullu beklenen değerleridir. Bu koşullu beklenen değerleri hesaplayabilmemiz için X verildiğinde Y 'nin koşullu dağılımını bulmalıyız.

$$\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|X) &= \frac{f(X, y)}{f(X)} \\
&= \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}np} |\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{l}{2}} v^{\frac{v}{2}} y^{\frac{np+v}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{y}{2} (v + tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)')) \right\}}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma(\frac{v}{2})} \\
&\quad \frac{|\Sigma|^{-\frac{n}{2}} |\Psi|^{-\frac{l}{2}} \Gamma(\frac{np+v}{2})}{(\pi v)^{\frac{np}{2}} \Gamma(\frac{v}{2})} \left[1 + \frac{tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)')}{v} \right]^{-\frac{np+v}{2}} \\
&= \frac{\left(\frac{v + tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)')}{2} \right)^{\frac{np+v}{2}}}{\Gamma(\frac{np+v}{2})} \\
&\quad \times y^{\frac{np+v}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{y}{2} (v + tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)')) \right\}.
\end{aligned}$$

Koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonuna bakıldığında $Y|X$ rassal değişkeni $\frac{np+v}{2}$, $\frac{1}{2} (v + tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)'))$ parametreleri ile Gamma dağılımına sahiptir. Bu koşullu dağılımı kullanarak $E \left(\ln Y_i | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right)$ ve $E \left(Y_i | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right)$ koşullu beklenen değerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\eta_i = E \left(\ln Y_i | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right) = \int_0^{\infty} \ln y_i f(y_i | X_i) dy_i \tag{4.14}$$

$$w_i = E \left(Y_i | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right) = \frac{np+v}{v + tr(\Sigma^{-1}(X-M)\Psi^{-1}(X-M)')} \tag{4.15}$$

Eşitlik 4.13'de verilen amaç fonksiyonunda $E \left(\ln Y_i | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right)$ ve $E \left(Y_i | X_i, \hat{M}, \hat{\Sigma}, \hat{\Psi} \right)$ ifadeleri η_i ve w_i değerleri ile değiştirilir ve parametreden bağımsız sabitler C olarak ifade

edilirse amaç fonksiyonumuz Eşitlik 4.16'da verildiği gibi elde edilir.

$$Q(M, \Sigma, \Psi) = C - \frac{nl}{2} \ln |\Sigma| - \frac{pl}{2} \ln |\Psi| + \left(\frac{np+v}{2} - 1 \right) \sum_{i=1}^l \eta_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l w_i (v + tr(\Sigma^{-1}(X - M)\Psi^{-1}(X - M)')) \quad (4.16)$$

Eşitlik 4.16'da verilen amaç fonksiyonunun ilgili parametrelere göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse aşağıdaki tahmin ediciler elde edilir.

$$\hat{M} = \frac{\sum_{i=1}^l w_i X_i}{\sum_{i=1}^l w_i} \quad (4.17)$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{nl} \sum_{i=1}^l w_i (X_i - \hat{M}) \hat{\Psi}^{-1} (X_i - \hat{M})' \quad (4.18)$$

$$\hat{\Psi} = \frac{1}{pl} \sum_{i=1}^l w_i (X_i - \hat{M})' \hat{\Sigma}^{-1} (X_i - \hat{M}) \quad (4.19)$$

Daha önce de belirttiğimiz gibi tahmin ediciler kapalı formda olmadığı için sayısal yöntem kullanmalıyız. Bu yüzden tahmin edicilerin elde edilmesi için iteratif yeniden ağırlıklandırılmış algoritma aşağıda verilmiştir.

4.3.2.1 İteratif yeniden ağırlıklandırılmış algoritma

1. İterasyon sayısını $k = 1$ al ve parametreler için başlangıç değerlerini seç.
2. $k = 1, 2, \dots$ için şu anki parametreler $M^{(k)}$, $\Sigma^{(k)}$ ve $\Psi^{(k)}$ 'yi kullan, $i = 1, 2, \dots, l$ için $w_i^{(k)}$ ağırlıklarını hesapla ve $\sum_{i=1}^l w_i X_i$, $\sum_{i=1}^l w_i$ değerlerini hesapla.
3. Yeni tahminler $M^{(k+1)}$, $\Sigma^{(k+1)}$ ve $\Psi^{(k+1)}$ 'i hesaplamak için aşağıdaki güncelleme eşitliklerini kullan.

$$M^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^l w_i^{(k)} X_i}{\sum_{i=1}^l w_i^{(k)}}$$

$$\Sigma^{(k+1)} = \frac{1}{nl} \sum_{i=1}^l w_i^{(k)} (X_i - M^{(k+1)}) (\Psi^{(k+1)})^{-1} (X_i - M^{(k+1)})'$$

$$\Psi^{(k+1)} = \frac{1}{pl} \sum_{i=1}^l w_i^{(k)} \left(X_i - M^{(k+1)} \right)' \left(\Sigma^{(k+1)} \right)^{-1} \left(X_i - M^{(k+1)} \right)$$

4. Yakınsama sağlanıncaya kadar bu adımları tekrar et.

5. MONTE CARLO SİMULASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde matris değişkenli slash dağılım ve matris değişkenli t dağılımının parametrelerinin tahmini için önerilen algoritmaların performanslarını göstermek için simülasyon çalışması yapılacaktır.

5.1 Matris Değişkenli Slash Dağılım

Bu bölümde matris değişkenli slash dağılım için önerilen algoritma yardımıyla parametre tahminleri yapılacaktır. Simülasyon çalışmasında elde edilen tahminlerin gerçek değerlerine yakın olup olmadığı ortalama Öklid uzaklığı kullanılarak belirlenecektir. Simülasyon çalışmasında kullanılacak veriler Tanım 3.1’de verilen ölçek karması gösterimi kullanılarak türetilmiştir. Varyans-kovaryans matrisleri ise pozitif tanımlı olacak şekilde rassal olarak türetilmiştir. Dutilleul (1999) ortalama matrisini $M = (m_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, p$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için $m_{ij} = i + j - 1$ olacak şekilde türetmiştir. Bu çalışmada ortalama matrisi aynı şekilde türetilcektir. Burada m_{ij} , M ortalama matrisinin i -inci satır, j -inci sütununu ifade etmektedir. Ayrıca Tanım 3.1’de verilen ölçek karmasındaki matris değişkenli normal dağılıma sahip $Z = (z_{ij})$ matrisi her bir z_{ij} elemanı tek değişkenli standart normal dağılıma sahip olacak şekilde türetilmiştir. U rassal değişkeni ise $(0, 1)$ aralığında tekdüze dağılıma sahip olacak şekilde türetilmiş ve $\frac{1}{q}$ -uncu kuvveti alınmıştır. Tahmin edicilerin performanslarını gösteren Öklid uzaklığı ise aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} \|\hat{M} - M\| &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (\hat{m}_{ij} - m_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|\hat{\Sigma} - \Sigma\| &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\hat{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|\hat{\Psi} - \Psi\| &= \left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (\hat{\psi}_{ij} - \psi_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Örneklem hacmi $l = 10, 20, 50, 100$, boyutlar $p = 2, 3, 4$ ve $n = 2, 4$ olarak alınmıştır. Yakınsama kriteri olarak 10^{-10} seçilmiştir ve her bir simülasyon 200 kere çalıştırılmıştır. $q = 5$ ve 10 olarak alınmıştır.

Ayrıca simulasyon çalışmasında ortalama iterasyon sayısı da hesaplanmıştır ve standart hataları parantez içerisinde verilmiştir.

Çizelge 5.1: $q = 5$ için 2×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)

l	M için uzaklık	Σ için uzaklık	Ψ için uzaklık	Ortalama iterasyon sayısı
10	0.0208	0.1152	0.1121	30.9650(0.5042)
20	0.0157	0.1064	0.1050	24.1900(0.3065)
50	0.0097	0.1039	0.0990	18.9650(0.1290)
100	0.0068	0.1016	0.0975	17.4250(0.0986)

Çizelge 5.2: $q = 5$ için 3×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)

l	M için uzaklık	Σ için uzaklık	Ψ için uzaklık	Ortalama iterasyon sayısı
10	0.0323	0.0401	1.1129	39.8450(0.6080)
20	0.0234	0.0365	1.0884	28.4100(0.2677)
50	0.0149	0.0344	1.0250	22.2150(0.1410)
100	0.0107	0.0317	1.0177	19.4300(0.1038)

Çizelge 5.3: $q = 5$ için 4×4 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)

l	M için uzaklık	Σ için uzaklık	Ψ için uzaklık	Ortalama iterasyon sayısı
10	0.0621	0.2443	0.2642	43.9200(0.2927)
20	0.0449	0.2284	0.2399	38.2100(0.0996)
50	0.0276	0.2237	0.2374	37.4650(0.0841)
100	0.0194	0.2163	0.2294	37.1450(0.0834)

Çizelge 5.4: $q = 10$ için 2×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)

l	M için uzaklık	Σ için uzaklık	Ψ için uzaklık	Ortalama iterasyon sayısı
10	0.0185	0.1606	0.1432	30.0400(0.7237)
20	0.0124	0.1541	0.1281	23.0100(0.2341)
50	0.0081	0.1504	0.1210	20.3650(0.0803)
100	0.0060	0.1480	0.1157	19.9800(0.0672)

Çizelge 5.5: $q = 10$ için 3×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)

l	M için uzaklık	Σ için uzaklık	Ψ için uzaklık	Ortalama iterasyon sayısı
10	0.0256	0.0367	1.8708	37.4450(0.6470)
20	0.0189	0.0338	1.6671	27.0550(0.2666)
50	0.0115	0.0331	1.5672	20.5200(0.1446)
100	0.0085	0.0302	1.5607	18.2800(0.0951)

Çizelge 5.6: $q = 10$ için 4×4 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\pm$ standart hata)

l	M için uzaklık	Σ için uzaklık	Ψ için uzaklık	Ortalama iterasyon sayısı
10	0.0604	0.3559	0.3529	40.0100(0.3654)
20	0.0439	0.3227	0.3298	26.6500(0.1585)
50	0.0266	0.3075	0.3267	19.4250(0.0703)
100	0.0187	0.3073	0.3204	17.4850(0.0419)

Simulasyon çalışmasına ilişkin sonuçlar Çizelge 5.1-5.6’de verilmiştir. Çizelgeler incelendiğinde bütün parametreler için örneklem hacmi arttıkça ortalama Öklid uzaklıkları azalmaktadır. Bu durum tahmin edicilerin tutarlı olduğunu göstermektedir. Ortalama iterasyon sayıları da örneklem hacminden etkilenmektedir. Örneklem hacmi arttıkça ortalama iterasyon sayısı düşmektedir.

5.2 Matris Değişkenli t Dağılımı

Bu bölümde de matris değişkenli t dağılımının parametrelerinin tahmini için simulasyon çalışması yapılmıştır. Simulasyon çalışmasında kullanılacak veriler Tanım 4.1’de verilen ölçek karması gösterimi kullanılarak türetilmiştir. Varyans-kovaryans matrisleri ve ortalama matrisi, örneklem hacmi ve boyutlar matris değişkenli slash dağılımda kullanıldığı gibidir. Ayrıca serbestlik dereceleri $v = 3, 5$ olarak alınmıştır. Çizelgeler yine matris değişkenli slash dağılımdaki gibi hazırlanmıştır.

Çizelge 5.7: $v = 3$ serbestlik dereceli 2×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\pm$ standart hata)

l	M için uzaklık	Σ için uzaklık	Ψ için uzaklık	Ortalama iterasyon sayısı
10	1.6362	2.5124	1.9586	40.5350(0.6524)
20	1.1956	2.3987	1.7413	29.9300(0.2750)
50	0.7354	2.2091	1.6562	24.4400(0.1474)
100	0.5094	2.0806	1.4907	22.0250(0.1090)

Çizelge 5.8: $v = 3$ serbestlik dereceli 3×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\pm$ standart hata)

l	M için uzaklık	Σ için uzaklık	Ψ için uzaklık	Ortalama iterasyon sayısı
10	2.0046	4.0011	1.6104	45.6550(0.5964)
20	1.5725	3.6667	1.5741	33.3150(0.2463)
50	0.9076	3.5431	1.5539	28.8050(0.1440)
100	0.6637	3.4142	1.4757	28.2550(0.1282)

Çizelge 5.9: $v = 3$ serbestlik dereceli 4×4 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)

l	M için uzaklık	Σ için uzaklık	Ψ için uzaklık	Ortalama iterasyon sayısı
10	5.0299	4.7208	4.9340	78.8850(0.4490)
20	3.4619	3.9122	4.3035	74.5300(0.2052)
50	2.0755	3.4613	3.7444	73.2900(0.1890)
100	1.3118	3.0481	3.4019	72.7100(0.1583)

Çizelge 5.10: $v = 5$ serbestlik dereceli 2×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)

l	M için uzaklık	Σ için uzaklık	Ψ için uzaklık	Ortalama iterasyon sayısı
10	0.8345	1.7232	3.2227	33.5950(0.6588)
20	0.5230	1.6498	3.1471	25.4000(0.2832)
50	0.3837	1.5512	3.0747	20.5950(0.1479)
100	0.2365	1.5318	3.0584	18.4950(0.0959)

Çizelge 5.11: $v = 5$ serbestlik dereceli 3×2 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)

l	M için uzaklık	Σ için uzaklık	Ψ için uzaklık	Ortalama iterasyon sayısı
10	1.2106	4.3678	1.9981	39.2400(0.5744)
20	0.8360	4.2305	1.9162	28.3200(0.2733))
50	0.5094	4.1583	1.8608	21.6900(0.1255)
100	0.3855	4.0439	1.7641	19.2200(0.0857)

Çizelge 5.12: $v = 5$ serbestlik dereceli 4×4 matris için ortalama Öklid uzaklıkları ve ortalama iterasyon sayısı($\mp$ standart hata)

l	M için uzaklık	Σ için uzaklık	Ψ için uzaklık	Ortalama iterasyon sayısı
10	2.6908	5.1842	5.2470	51.4600(0.2606)
20	1.7799	4.8987	4.9245	45.0350(0.0710)
50	1.2060	4.6363	4.6955	44.3800(0.0533)
100	0.9054	4.3860	4.4260	44.2900(0.0543)

Çizelge 5.7-5.12 incelendiğinde bütün durumlar için matris değişkenli slash dağılıma benzer sonuçlar bulunmaktadır. Çizelgeleri genel olarak yorumlayacak olursak serbestlik dereceleri $v = 3, 5$ olması durumlarında benzer sonuçlar elde edilmektedir. Yani her iki durumda da örneklem hacmi arttıkça ortalama Öklid uzaklığı ve ortalama iterasyon sayısı düşmektedir.

6. UYGULAMA

Bu bölümde parametre tahmin prosedürünün iddia edildiği gibi çalıştığını göstermek için gerçek veri örneği verilmiştir. Gerçek veri seti daha önce Dryden ve Mardia (1998) ve Sanchez vd. (2014) tarafından kullanılan el yazısı veri setidir. Veri seti 30 farklı birey tarafından yazılan 3 rakamından oluşmaktadır. Her bir birey tarafından yazılan üç rakamından rassal olarak seçilen 13 noktanın (x, y) koordinatları işaretlenerek 13×2 boyutunda matris oluşturulmuştur. Bu durumda veri setinde 30 adet 13×2 tipinde matris bulunmaktadır. Matris değişkenli normal, matris değişkenli slash ve matris değişkenli t dağılımı kullanılarak veri setinin ortalama ve varyans-kovaryans matrisleri tahmin edilmiştir. Elde edilen tahminler yardımıyla veri seti için log-likelihood değerleri hesaplanmıştır. Daha sonra veri setindeki iki verinin konumu değiştirilerek potansiyel sapan değer olarak ele alınmış ve veri seti tekrar modellenmiştir. Modellere ilişkin log-likelihood değerleri Çizelge 6.1’de verilmiştir. Ayrıca sapan gözlem olmaması ve olması durumunda her iki dağılım için ortalama matrisleri ve veriler Şekil 6.1’de verilmiştir.

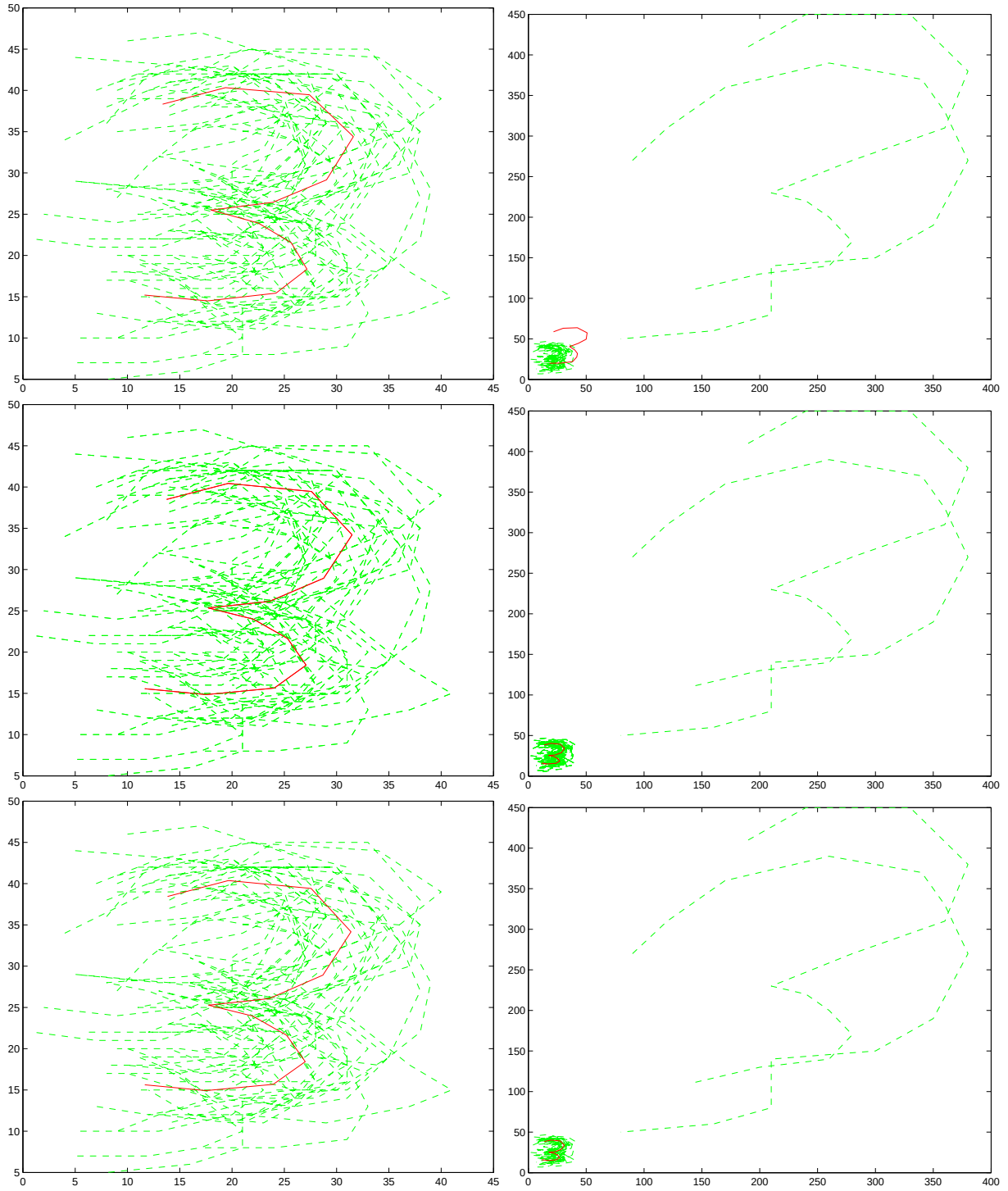
Çizelge 6.1: Gerçek veri için log-likelihood değerleri

Model	Sapan gözlem olmaması durumu	Sapan gözlem olması durumu
<i>Normal</i>	-1128.66	-1667.11
<i>Slash</i> (9)	-1431.50	-1631.76
<i>Slash</i> (10)	-1349.30	-1554.41
<i>t</i> (3)	-1470.31	-1642.61
<i>t</i> (5)	-1465.32	-1648.01

Çizelge 6.1 incelendiğinde sapan gözlem olmaması durumunda veri seti için en iyi model matris değişkenli normal dağılım olmaktadır. Fakat veri setinde sapan gözlem olması durumunda $q = 10$ parametrelili matris değişkenli slash dağılımın veri setini daha iyi modellediği görülmektedir. Tek değişkenli ve çok değişkenli durumlarda veri setinde sapan gözlem olması durumunda slash dağılımın normal dağılıma göre daha iyi olduğunu biliyoruz. Yapılan uygulama sonunda matris değişkenli dağılım durumunda da sonucun tek değişkenli ve çok değişkenli durumda olduğu gibi sonuçlar vermiş olduğunu görmekteyiz.

Şekil 6.1 incelendiğinde ilk sütununda veri setinde sapan gözlem olmaması durumunda matris değişkenli normal dağılım, matris değişkenli slash dağılım ($q = 10$) ve matris değişkenli t dağılımı ($v = 3$) ile elde edilen ortalama matrislerinin birbirine benzer olduğu görülmektedir.

Fakat veri setinde sapan gözlem olması durumunda ortalama matrislerinin farklı olduğu görülmektedir. Şekil 6.1'in ikinci sütununda sırasıyla matris değişkenli normal, matris değişkenli slash ve matris değişkenli t dağılımı ile elde edilen ortalama matrisleri verilmektedir. Şekil 6.1'in ikinci sütunu incelendiğinde matris değişkenli normal dağılım ile tahmin edilen ortalama matrisinin sapan gözlemlerden etkilendiği görülmektedir. Fakat matris değişkenli slash ve matris değişkenli t dağılımı ile tahmin edilen ortalama matrisinin sapan gözlemlerden etkilenmediği görülmektedir. Bu durumda matris değişkenli durumda da slash ve t dağılımlarının normal dağılıma göre daha robust olduğu söylenebilir.



Şekil 6.1: Veriler ve tahmin edilen ortalama matrisleri

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tek değişkenli ve çok değişkenli durumlarda normal dağılıma alternatif olarak daha kalın kuyruklu dağılımlar önerilmiştir. Normal dağılıma alternatif olarak önerilen bu dağılımların amacı, veri setinde sapan gözlem olması durumunda normal dağılıma göre daha robust tahminler vermesidir. Literatürde normal dağılıma alternatif olarak t dağılımı kullanılmaktadır. Ayrıca Rogers ve Tukey (1972) normal dağılıma alternatif olarak tek değişkenli slash dağılımı önermişlerdir. Daha sonra Wang ve Genton (2006), Rogers ve Tukey (1972) tarafından önerilen slash dağılımı çok değişkenli duruma genelleştirilmiştir.

Bu tez çalışmasında tek değişkenli ve çok değişkenli olarak tanımlanan slash ve t dağılımları matris değişkenli duruma genellenmiştir. Burada amacımız matris değişkenli veri setlerinde sapan gözlem olması durumunda matris değişkenli normal dağılıma alternatif dağılımlar önermektir.

Matris değişkenli slash dağılımı, Wang ve Genton (2006) tarafından önerilen çok değişkenli slash dağılımının genellemesi olarak elde edilmiştir. Ayrıca önerilen matris değişkenli slash dağılımının bazı özellikleri incelenmiş ve parametre matrislerinin tahmini için EM algoritması geliştirilmiştir. Ayrıca çok değişkenli t dağılımı matris değişkenli duruma genelleştirilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir. Matris değişkenli t dağılımının parametrelerinin tahmini için en çok olabilirlik yöntemi ve EM algoritması kullanılmıştır. Her iki durumda da elde edilen tahmin edicilerin birbirine denk olduğu gösterilmiştir.

Bölüm 5’de verilen Monte Carlo simülasyon çalışmasında ise matris değişkenli slash ve matris değişkenli t dağılımına sahip veri setleri için önerilen parametre tahmin edicilerin iddia edildiği gibi çalıştığı ve iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

Bölüm 6’da ise literatürden alınmış matris değişkenli gerçek bir veri seti için sapan gözlem olmaması durumunda matris değişkenli normal dağılım ile matris değişkenli t ve matris değişkenli slash dağılımlarının benzer sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Fakat veri setinde sapan gözlem olması durumunda matris değişkenli normal dağılımın sapan gözlemlerden etkilendiği, matris değişkenli t ve matris değişkenli slash dağılımlarının ise etkilenmediği gösterilmiştir. Sonuç olarak matris değişkenli veri setlerinde sapan gözlem olması duru-

munda matris değişkenli normal dağılım yerine matris değişkenli t ve matris değişkenli slash dağılımlarını kullanmanın daha faydalı olduğu söylenebilir.

Gelecekteki çalışmalarda tezin devamı olarak aşağıdaki çalışmaların yapılması planlanmaktadır.

Matris değişkenli slash ve matris değişkenli t dağılımlarının çarpık halleri tanımlanacaktır.

Ayrıca matris değişkenli regresyon analizinde hata matrislerinin matris değişkenli t dağılımına sahip olduğu durum incelenecektir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Ahsanullah, M., 1985. *Some Characterizations of the Bivariate Normal Distribution*, Metrika, 32, 215-218.
- Arellano-Valle, R. B., Bolfarine, H., 1995. *On some characterizations of the t-distribution*, Statistics and Probability Letters, 25, 79-85.
- Arnold, B. C., Pourahmadi, M., 1988. *Conditional Characterizations of Multivariate Distributions*, Metrika, 35, 99-108.
- Arslan, O., 2004. *Family of multivariate generalized t distributions*, Journal of Multivariate Analysis, 89, 329-337.
- Arslan, O., 2008. *An Alternative Multivariate Skew-Slash Distribution*, Statistics and Probability Letters, 78, 2756-2761.
- Arslan, O., 2009. *Maximum Likelihood Parameter Estimation for the Multivariate Skew-Slash Distribution*, Statistics and Probability Letters, 79, 2158-2165.
- Arslan, O., Genç, A. İ., 2009. *A Generalization of the Multivariate Slash Distribution*, Journal of Statistical Planning and Inference, 139, 1164-1170.
- Bandekar, R. R., Nagar, D. K., 2003. *Matrix variate Cauchy distribution*, Statistics, 37(6), 537-550.
- Bechhofer, R. E., Dunnett, C. W., Sobel, M., 1954. *A two-sample multiple decision procedure for ranking means of normal populations with a common unknown variance*, Biometrika, 41, 170-176.
- Brucker, J., 1979. *A Note on the Bivariate Normal Distribution*, Communications in Statistics - Theory and Methods A, 8(2), 175-177.
- Bulut, Y. M., Arslan, O., 2015. *Matrix variate slash distribution*, Journal of Multivariate Analysis, 137, 173-178.
- Butler, R. J., McDonald, J. B., Nelson, R. D., White, S. B., 1990. *Robust and partially adaptive estimation of regression models*, The Review of Economics and Statistics, 72, 321-327.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Castillo, E., Galambos, J., 1989. *Conditional Distributions and the Bivariate Normal Distribution*, *Metrika*, 36, 209-214.
- Cornish, E. A., 1954. *The multivariate t -distribution associated with a set of norml sample deviates*, *Australian Journal of Physics*, 7, 531-542.
- Dickey, J. M., 1967. *Matricvariate generalizations of the multivariate t distribution and the inverted multivariate t distribution* *The Annals of Mathematical Statistics*, 38, 511-518.
- Dinh, K. T., Nguyen, T. T., 1994. *A characterization of matrix variate normal distribution*, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 17(2), 341-346.
- Dryden, I. L., Mardia, K. V., 1998. *Statistical Shape Analysis*, Wiley, Chichester, UK.
- Dunnett, C. W., Sobel, M., 1954. *A bivariate generalization of Student t -distribution with table of certain special cases*, *Biometrika*, 41, 153-169.
- Dutilleul, P., 1999. *The MLE Algorithm for the Matrix Normal Distribution*, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 64, 105-123.
- Fang, B., 1998. *Marginal consistency of L_1 -norm symmetric matrix variate distributions*, *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 14, 359-365.
- Farnoosh, R., Nematollahi, N., Rahnamaei, Z., Hajrajab, A., 2013. *A Family of Skew-Slash Distributions and Estimation of its Parameters via an EM Algorithm*, *Journal of Iranian Statistical Society*, 12(2), 271-291.
- Fraser, D. A. S., 1976. *Neccessary analysis and adaptive inference*, *Journal of the American Statistical Association*, 71, 99-113.
- Fraser, D. A. S., 1979. *Inference and linear models*, New York: McGraw-Hill.
- Fraser, D. A. S., Streit, F., 1980. *A Further Note on the Bivariate Normal Distribution*, *Communications in Statistics - Theory and Methods A*, 9(10), 1097-1099.
- Genç, A. İ., 2007. *A Generalization of the Univariate Slash by a Scale-Mixtured Exponential Power Distribution*, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 36, 937-947.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Genç, A. İ., 2013. *A Skew Extension of the Slash Distribution via Beta-Normal Distribution*, Stat Papers, 54, 427-442.
- Gomez, H. W., Quintana, F. A., Torres, F. J., 2007. *A New Family of Slash-Distributions with Elliptical Contours*, Statistics and Probability Letters, 77, 717-725.
- Gui, W., Chen, P., Wu, H., 2013. *A Folded Normal Slash Distribution and its Applications to Non-Negative Measurements*, Journal of Data Science, 11, 231-247.
- Gui, W., Chen, P., Wu, H., 2013. *An Epsilon Half Normal Slash Distribution and its Applications to Nonnegative Measurements*, Open Journal of Optimization, 2, 18.
- Gui, W., 2014. *A Generalization of the Slashed Distribution via Alpha Skew Normal Distribution*, Statistical Methods and Applications, 23(4), 547-563.
- Gupta, A. K., Cardeño, L., Nagar, D. K., 2001. *Matrix variate Kummer-Dirichlet distributions*, Journal of Applied Mathematics, 1(3), 117-139.
- Gupta, A. K., Varga, T., 1992. *Characterization of Matrix Variate Normal Distribution*, Journal of Multivariate Analysis, 41, 80-88.
- Gupta, A. K., Varga, T., 1994. *A new class of matrix variate elliptically contoured distributions*, Journal of the Italian Statistical Society, 3(2), 255-270.
- Gupta, A. K., Varga, T., 1995. *Normal mixture representations of matrix variate elliptically contoured distributions*, Sankhyā : The Indian Journal of Statistics, 57, 68-78.
- Gupta, A. K., Nagar, D. K., 2000a. *Matrix Variate Distributions*, Chapman & Hall/CRC.
- Gupta, A. K., Nagar, D. K., 2000b. *Matrix-variate beta distribution*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 24(7), 449-459.
- Gupta, A. K., Varga, T., Bodnar, T., 2013. *Elliptically Contoured Models in Statistics and Portfolio Theory*, Springer, New York.
- Hamedani, G. G., 1988. *On Two Recent Characterizations of Multivariate Normal Distribution*, Metrika, 35, 41-47.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Hudak, D., Richter, G., 1996. *Moments of Special Normally Distributed Matrices*, Statistics, 27, 363-378.
- Iranmanesh, A., Arashi, M., Tabatabaey, S.M. M., 2010. *On conditional applications of matrix variate normal distribution*, Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, 5(2), 33-43.
- Jamshidian, M., 2001. *A note on parameter and standard error estimation in adaptive robust regression*, Journal of Statistical Computation and Simulation 71, 11-27.
- Javier, W. R., Gupta, A. K., 1985. *On matrix variate t distribution*, Communicaitons in Statistics-Theory and Methods, 14(6), 1413-1425.
- Kafadar, K., 1982. *A Biweight Approach to the One-Sample Problem*, Journal of American Statistical Association, 77(378), 416-424.
- Kafadar, K., 2001. *Slash Distribution*, Encyclopedia.
- Kashid, D.N., Kulkarni, S.R., 2003. *Subset selection in multiple linear regression with heavy tailed error distribution*, Journal of Statistical Computation and Simulation, 73, 791-805.
- Khatri, C. G., 1976. *Characterizations of Multivariate Normality. 1. Through Independence os Some Statistics*, Journal of Multivaraite Analysis, 6, 81-94.
- Kibria, B. M. G., 2006. *The matrix- t distribution and its applications in predictive inference*, Journal of Multivaraite Analysis, 97, 785-795.
- Kotz, S., Nadarajah, S., 2004. *Multivariate distribution and their applications*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Lange, K.L., Little, R.J.A., Taylor, J.M.G., 1989. *Robust statistical modeling using t distribution*, Journal of American Statistical Association, 84, 881-896.
- Little, R. J. A., 1988. *Robust estimation of the mean and covariance matrix from data with missing values*, Applied Statistics, 37, 2-39.
- Liu, C., Rubin, D. B., 1995. *ML estimation of the t distribution using EM and its extensions, ECM and ECME*, Statistica Sinica, 5, 19-39.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Maronna, R. A., 1976. *Robust M-estimators of the multivariate location and scatter*, The Annals of Statistics, 4, 51-67.
- Masreliez, C. J., Martin, R. D., 1977. *Robust bayesian estimation for the linear model and robustifying the kalman filter*, IEEE Transactions on Automatic Control, 22, 361-371.
- Mathew, T., Sharma, M., Nordstrsm, K., 1998. *Tolerance regions and multiple-use confidence regions in multivariate calibration*, The Annals of Statistics, 26, 1989-2013.
- McDonald, J. B., Newey, W. K., 1988. *Partially adaptive estimation of regression models via the generalized t distribution*, Econometric Theory, 4, 428-457.
- Morgenthaler, S., 1986. *Robust confidence intervals for a location parameter: the configural approach*, Journal of the American Statistical Association, 81, 518-525.
- Mosteler, F., Tukey, J. W., 1977. *Data Analysis and Regression*, Cambridge, MA: Addison-Wesley.
- Nadarajah, S., Kotz, S., 2005. *Mathematical properties of the multivariate t distribution*, Acta Applicandae Mathematicae, 89, 53-84.
- Nadarajah, S., Kotz, S., 2008. *Estimation methods for the multivariate t distribution*, Acta Appl,candae Mathematicae, 102, 99-108.
- Nel, H. M., 1977. *On Distributions and Moments associated with Matrix Normal Distributions*, Department of Mathematical Statistics, University of the Orange Free State, Technical Report No.24.
- Neudecker, H., Wansbeek, T., 1987. *Fourth Order Properties of Normally Distributed Random Matrices*, Linear Algebra Applications, 97, 13-21.
- Ng, K. W., Kotz, S., 1995. *Kummer-Gamma and Kummer-Beta univariate and multivariate distributions*, Research report, Department of Statistics, The University of Hong Kong, Hong Kong.
- Nguyen, T. T., 1997. *A Note on Matrix Variate Normal Distribution*, Journal of Multivaraiter Analysis, 60, 148-153.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Olivares-Pacheco, J. F., Salas, E., Gomez, H. W., Bolfarine, H., 2012. *An Asymmetric Extension for the Family of Elliptical Slash Distributions*, Communications in Statistics-Theory and Methods, 41, 1000-1012.
- Olmos, N. M., Varela, H., Gomez, H. W., Bolfarine, H., 2012. *An Extension of Half-Normal Distribution*, Stat Papers, 53, 875-886.
- Pendergast, J. F., Borfitt, J. D., 1985. *Robust estimation in growth curve models*, Communications in Statistics-Theory and Methods, 14, 1919-1939.
- Punathumparambath, B., 2011. *A New Family of Skewed Slash Distributions Generated by the Normal Kernel*, Statistica, 71(3), 345-353.
- Punathumparambath, B., 2012. *The Multivariate Asymmetric Slash Laplace Distribution and its Applications*, Statistica, 72(2), 235-249.
- Punathumparambath, B., 2013, *A New Family of Skewed Slash Distributions Generated by the Cauchy Kernel*, Communications in Statistics-Theory and Methods, 42, 2351-2361.
- Relles, D. A., Rogers, W. H., 1977. *Statisticians are fairly robust estimators of location*, Journal of the American Statistical Association, 72, 107-111.
- Reyes, J., Gomez, H. W., Bolfarine, H., 2013. *Modified Slash Distribution*, Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics, 47(5), 929-941.
- Roger, W. H., Tukey, J. W., 1972. *Understanding some long-tailed symmetrical distributions*, Statistica Neerlandica, 26(3), 211-226.
- Roth, M., 2013. *On the multivariate t distribution*, Linköpings universitet, Technical Report.
- Roy, S. N., 1957. *Some Aspects of Multivariate Analysis*, John Wiley & Sons, New York.
- Sanchez-Manzano, E. G., Gomez-Villegas, M. A., Marin-Diazaraque, J. M., 2002. *A matrix variate generalization of the power exponential family of distributions*, Communications in Statistics-Theory and Methods, 31(12), 2167-2182.
- Sanches, L., Leiva, V., Caro-Lopera, F. J., Cysneiros, F. J. A., 2014. *On matrix-variate Birnbaum-Saunders distributions and their estimation and application*, Brazilian Journal of Probability and Statistics (Submitted).

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

- Sanchez, L. E., Nagar, D. K., 2003. *Non-central matrix-variate Dirichlet distributions*, Taiwanese Journal of Mathematics, 7(3), 477-491.
- Sarr, A., Gupta, A. K., 2011. *Exponential scale mixture of matrix variate Cauchy distribution*, Proceedings of the American Mathematical Society, 139(4), 1483-1494.
- Siddiqui, M. M., 1967. *A bivariate t distribution*, The Annals of Mathematical Statistics, 38, 162-166.
- Sutradhar, B. C., Ali, M. M., 1986. *Estimation of parameters of a regression model with a multivariate t error variable*, Communications in Statistics-Theory and Methods, 15, 429-450.
- Thabane, L., Haq, S., 2004. *On the matrix-variate generalized hyperbolic distribution and its Bayesian applications*, Statistics, 38(6), 511-526.
- van der Merwe, C. A., 1980. *Expectations of the Traces of Functions of a Multivariate Normal Variable*, Department of Mathematical Statistics, University of the Orange Free State, RSA, Technical Report No.56.
- von Rosen, D., 1988. *Moments of Matrix Normal Variables*, Statistics, 19, 575-583.
- Wang, J., Genton, M. G., 2006. *The Multivariate Skew-Slash Distribution*, Journal of Statistical Planning and Inference, 136, 209-220.
- Wang, D. Q., Lawoko, R. O., 1994. *Estimation of parameters for normally distributed random matrices*, Linear Algebra and its Applications, 210, 199-208.
- West, M., 1984. *Outlier models and prior distributions in bayesian linear regression*, Journal of the Royal Statistical Society Series B, 46, 431-439.

ÖZGEÇMİŞ

11.04.1987 tarihinde Antakya’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana’da tamamladı. 2004 yılında başladığı Çukurova Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü’nden 2008 yılında mezun oldu. Aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalında 2009 yılında yüksek lisans öğrenimine başladı. 01.12.2010 tarihinde Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atanmasıyla, bu tarihten itibaren yüksek lisans eğitimini Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim dalında devam ettirdi. 2011 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı ve 2012 yılında aynı üniversitede doktora eğitimine başladı. Halen Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü’nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya devam etmektedir.

Yakup Murat BULUT

Eskişehir Osmangazi
Üniversitesi Fen-Edebiyat
Fakültesi İstatistik Bölümü
ESKİŞEHİR