

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ PROGRAMI**



**6. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN DİNAMİK MATEMATİK
YAZILIMI DESTEKLİ ORTAMDA ÇEMBER VE DAİRE
KAVRAMLARINI APOS TEORİK ÇERÇEVESİNDE
OLUŞTURMA SÜREÇLERİ**

Yüksek Lisans Tezi

Yüksel Emre HARMANBAŞI

Danışman

Doç. Dr. Rezan YILMAZ

SAMSUN
2025

TEZ KABUL VE ONAYI

Yüksel Emre HARMANBAŞI tarafından, **Doç. Dr. Rezan YILMAZ** danışmanlığında hazırlanan “**6. Sınıf Öğrencilerinin Dinamik Matematik Yazılımı Destekli Ortamda Çember ve Daire Kavramlarını APOS Teorik Çerçevesinde Oluşturma Süreçleri**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 2.7.2025 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim Dalı	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. Burçak BOZ YAMAN Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı	☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Rezan YILMAZ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı	☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Emine ŞENDURUR Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Bilimleri Ana Bilim Dalı	☒ Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

Prof. Dr. Faik Ahmet SESLİ
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi?

Evet ☒

Hayır ☐

07 / 08 / 2025

Yüksel Emre HARMANBAŞI

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı: 6. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN DİNAMİK MATEMATİK YAZILIMI DESTEKLİ ORTAMDA ÇEMBER VE DAİRE KAVRAMLARINI APOS TEORİK ÇERÇEVESİNDE OLUŞTURMA SÜREÇLERİ

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 07.08.2025 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 5

Tek kaynak oranı : % 2 çıkmıştır.

07 / 08 / 2025

Doç. Dr. Rezan YILMAZ

ÖZET

6. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN DİNAMİK MATEMATİK YAZILIMI DESTEKLİ ORTAMDA ÇEMBER VE DAİRE KAVRAMLARINI APOS TEORİK ÇERÇEVESİNDE OLUŞTURMA SÜREÇLERİ

Yüksel Emre HARMANBAŞI
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı
Matematik Eğitimi Programı
Yüksek Lisans, Temmuz/2025
Danışman: Doç. Dr. Rezan YILMAZ

Bu araştırmanın amacı, altıncı sınıf öğrencilerinin dinamik matematik yazılımı (GeoGebra) destekli öğretim ortamında çember ve temel elemanları, daire, çemberin çevre uzunluğu formülü ile dairenin alanı formülüne ilişkin kavram oluşum süreçlerini APOS teorisi çerçevesinde incelemektir. Nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması ile desenlenen bu çalışma, Karadeniz bölgesindeki bir devlet ortaokulunda öğrenim gören 27 altıncı sınıf öğrencisinin yer aldığı bir sınıfta gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin ilgili kavramlara yönelik ön bilgilerini belirlemek amacıyla hazırlanmış test hazırlanmış ve bu test sonuçları, araştırmacı gözlemleri ve öğretmen görüşlerine göre farklı düzeyde beş katılımcı belirlenmiştir. Öğretim süreci sonunda katılımcıların her biriyle üçer kez olmak üzere toplam 15 bireysel görüşme yapılmıştır. Öğretim ortamı ve bireysel görüşmeler sırasında elde edilen kamera ve ses kayıtlarının transkriptleri, bireysel ve grup çalışma kâğıtları ile araştırmacı gözlemlerinden oluşan veriler APOS teorisi çerçevesine göre içerik analizi yöntemiyle değerlendirilmiştir.

Araştırma sonuçları, dinamik matematik yazılımının APOS teorisi bağlamında yapılar arası geçişleri hızlandığını, özellikle kavramsal genellemeleri destekleyerek öğrencilerin eylemden sürece geçişlerini kolaylaştırdığını ortaya koymuştur. Ayrıca, öğrencilerin eylem düzeyinde ve kapsülleme mekanizmasında farklı bilişsel stratejiler geliştirmelerine olanak tanıdığı düşünülmektedir. Katılımcıların tamamı çember kavramında nesne düzeyinde ulaşırken, düşük düzeydeki katılımcının daire nesnesine ulaşamadığı gözlemlenmiştir. Benzer şekilde, çemberin çevre uzunluğu formülüne ilişkin olarak da düşük düzeydeki öğrencinin nesne aşamasına erişemediği belirlenmiştir. Buna karşın, dairenin alanı formülüne ilişkin tüm öğrencilerin nesne düzeyine ulaştıkları tespit edilmiştir. Süreçler arası koordinasyonlar incelendiğinde, çember nesnesi için nokta süreciyle doğru parçası ve uzaklık süreçleri arasında, daire nesnesi için ise çember süreci ile bölge ve küme süreçleri arasında koordinasyonlar gerçekleşmiştir. Çemberin çevre uzunluğu formülünün oluşumunda, çember süreciyle çap, π , ters işlem ve oran süreçleriyle koordinasyonlar gerçekleşmiştir. Dairenin alan formülünün oluşumunda ise daire süreciyle üçgenin alan bağıntısı ve yarıçap süreçleri arasında koordinasyonlar gerçekleşmiştir.

Anahtar Sözcükler: Çember, Daire, Çevre, Alan, Dinamik Matematik Yazılımı, GeoGebra, Soyutlama, Kavram oluşumu, APOS Teorisi



ABSTRACT

6th GRADE STUDENTS' CONSTRUCTION PROCESSES OF CIRCLE AND ITS AREA IN DYNAMIC MATHEMATICS SOFTWARE ENVIRONMENT WITHIN THE APOS THEORETICAL FRAMEWORK

Yüksel Emre HARMANBAŞI

Ondokuz Mayıs University

Institute of Graduate Studies

Department of Mathematics and Science Education

Mathematics Education Programme

Master, July/2025

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Rezan YILMAZ

This research investigates sixth-grade students' construction processes of the circle and its components, and the formulas for circumference and area in a dynamic mathematics software-supported environment within the APOS theory framework. Designed as a qualitative case study, the research was conducted in a sixth-grade classroom of 27 students in the Black Sea region. A readiness test, teacher input, and researcher observations led to the selection of five students with varying proficiency levels. Each participant took part in three individual interviews, totalling 15 sessions. Data were collected through interview transcripts, classroom recordings, worksheets, and observations and analyzed via content analysis grounded in APOS theory.

Results indicate that dynamic mathematics software facilitated cognitive transitions between APOS mental structures, particularly aiding the shift from action to process and supporting conceptual generalizations. Students developed various cognitive strategies at the action stage and through encapsulation mechanism. While all participants constructed the circle concept as an object, the lowest-level participant struggled to conceptualize the disc and the circumference formula as objects. However, all students reached the object stage concerning the area formula. While the coordination among the processes was analyzed, it emerged among the point, line segment, and distance processes for the circle and formed among the circle, region, and set process for the disc. Regarding the circumference formula, coordination occurred among circle, diameter, π , inverse operation, and ratio processes and for the area formula, coordination involved disc, triangle area, and radius processes.

Keywords: Circle, Disc, Circumference, Area, Dynamic Mathematics Software, GeoGebra, Abstraction, Concept Formation, APOS Theory

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Her türlü zorlukta yardım eden çok kıymetli danışmanım Doç. Dr. Rezan Yılmaz'a çok çok teşekkür ederim.

Yüksel Emre Harmanbaşı



İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI	i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	ii
TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
TABLOLAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Araştırmanın Amacı	4
1.2. Araştırmanın Problemi	4
1.3. Araştırmanın Önemi	5
1.4. Araştırmanın Varsayımları	8
1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları	9
1.6. Araştırmanın Tanımları	9
2. KURAMSAL ÇERÇEVE	11
2.1. Teknoloji Destekli Matematik Öğretimi (TDMÖ) ve Dinamik Matematik Yazılımları (DMY)	11
2.1.1. GeoGebra (GGB)	15
2.2. Kavram Tanımı ve Kavram İmajı	16
2.3. Soyutlama	19
2.3.1. Yansıtıcı Soyutlama ve APOS Teorisinin Gelişimi	20
2.3.2. APOS Teorisi	22
2.3.3. Genetik Çözümleme	28
2.4. Çevre ve Alan Ölçme	30
2.4.1. Çevre Uzunluğu	31
2.4.2. Alan	32
2.5. İlgili Araştırmalar	34
3. YÖNTEM	38
3.1. Araştırmanın Türü ve Deseni	38
3.2. Araştırma Tasarımı ve Yürütülmesi	38
3.3. Pilot Çalışma	39
3.4. Katılımcılar	40
3.5. Veri Toplama Araçları	44
3.6. Öğretim Ortamı	48
3.7. Verilerin Analizi	54
3.8. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği	61

4. BULGULAR.....	66
4.1. Çember, Temel Elemanları ve Daire Kavramlarının Oluşumuna Ait Bulgular	66
4.1.1. Çember ile Temel Elemanların Oluşumuna Ait Bulgular	66
4.1.2. Daire Kavramının Oluşumuna Ait Bulgular.....	95
4.2. Çemberin Çevre Uzunluğu Formülünün Oluşumuna Ait Bulgular.....	101
4.2.1. Eylem Aşaması	101
4.2.2. Süreç Aşaması	109
4.2.3. Nesne Aşaması.....	115
4.3. Dairenin Alanı Formülünün Oluşumuna Ait Bulgular.....	126
4.3.1. Eylem Aşaması	127
4.3.2. Süreç Aşaması	133
4.3.3. Nesne Aşaması.....	140
5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	156
5.1. Sonuç ve Tartışma	156
5.1.1. Çember, Temel Elemanlar ve Daire Kavramlarının Oluşumuna Ait Sonuçlar	158
5.1.2. Çemberin Çevre Uzunluğu Formülünün Oluşumuna Ait Sonuçlar.....	161
5.1.3. Dairenin Alan Formülünün Oluşumuna Ait Sonuçlar	163
5.2. Öneriler.....	165
KAYNAKÇA	168
EKLER.....	177
ÖZ GEÇMİŞ.....	206

SİMGELER VE KISALTMALAR

APOS	: Action (Eylem), Process (Süreç), Object (Nesne), Schema (Şema)
DMY	: Dinamik Matematik Yazılımı
GGB	: GeoGebra
MEB	: Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	: National Council of Teachers of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi)
TDMÖ	: Teknoloji Destekli Matematik Öğretimi



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2. 1. Kavram Oluşumunun Uzun Süreli Etkileşimi (Vinner, 1983).	18
Şekil 2. 2. Kavramın İmajı ve Tanımı Arasındaki Tek Yönlü Etkileşim (Vinner, 1983).	18
Şekil 2. 3. APOS Teorisi ve Bileşenleri (Arnon vd, 2014).....	23
Şekil 3. 1. GGB Ortamındaki Etkinlik 2 Görseli a.	51
Şekil 3. 2.GGB Ortamındaki Etkinlik 2 Görseli b.	51
Şekil 3. 3. GGB Ortamındaki Etkinlik 3 Görseli.	52
Şekil 3. 4. GGB Ortamındaki Etkinlik 4 Görseli.	52
Şekil 3. 5. GGB Ortamında Etkinlik 6 Görseli.	53
Şekil 3. 6. GGB Ortamındaki Etkinlik 7 Görseli.	54
Şekil 3. 7. GGB Ortamındaki Etkinlik 8 Görseli.	54
Şekil 3. 8. Genetik Çözümleme 1.....	58
Şekil 3. 9. Genetik Çözümleme 2.....	60
Şekil 3. 10. Genetik Çözümleme 3.....	61
Şekil 4. 1. Aleyna'nın Temsillediği Çemberin Merkezini Belirlemesi.....	74
Şekil 4. 2. Aleyna'nın Görüşmede Oluşturduğu Yarıçap ve Çap Temsilleri.....	76
Şekil 4. 3. Ahmet'in Temsillediği Çemberin Merkezini Belirlemesi.	77
Şekil 4. 4. Ahmet'in Görüşmede Oluşturduğu Yarıçap ve Çap Temsilleri.	78
Şekil 4. 5. Berna'nın Görüşmede Temsillediği Çemberin Merkezini Belirlemesi. ...	79
Şekil 4. 6. Berna'nın Görüşmede Oluşturduğu Merkez Nokta, Yarıçap ve Çap Temsili.	81
Şekil 4. 7. Mert'in Görüşmede Temsillediği Çemberin Merkezini Belirlemesi.	82
Şekil 4. 8. Mert'in Görüşmede Oluşturduğu Yarıçap ve Çap Temsilleri	84
Şekil 4. 9. Bilge'nin Görüşmede Temsillediği Çemberin Merkezini Belirlemesi.	84
Şekil 4. 10. Bilge'nin Görüşmede Çizdiği Çap Temsilleri.	86
Şekil 4. 11. Bilge'nin Görüşmede Oluşturduğu Yarıçap ve Çap Temsilleri.....	88
Şekil 4. 12. Nida'nın 'Konu Değerlendirme Soruları 1' Altıncı Soruyu Sınıf İçinde Tahtada Çözerken Uyguladığı Adımlar.	89
Şekil 4. 13. Nida'nın 'Gerçek Yaşam Problemi 3'ü Çözerken Uyguladığı Adımlar.	90
Şekil 4. 14. Öğrencilerin Oluşturdukları Çemberi Kesme Görselleri.	102
Şekil 4. 15. Öğrencilerin Oluşturdukları Çembersel Bölge (Daire) Somut Model Görselleri.....	102
Şekil 4. 16. Öğrencilerin Oluşturdukları Çemberlerinin Çevre Uzunluklarının Çap Uzunluğuna Oranları.....	104

Şekil 4. 17. Etkinlik 6’de Yarıçapı 2 Birim Olan Çemberin Çevre Uzunluğunu Çap Uzunluğuna Oranlama.	104
Şekil 4. 18. Sınıfta Gerçekleştirilen GGB Destekli Etkinlik 6’da Yarıçapı 2 Birim Olan Bir Çemberin Çevre Uzunluğunun Çap Uzunluğuna Oranlanması. .	111
Şekil 4. 19. Ahmet’in Görüşmede Çizdiği Çemberler ve Çevre Uzunlukları.....	113
Şekil 4. 20. Berna’nın Sınıf İçi Tahtada Problem Çözümündeki Görsel.	117
Şekil 4. 21. Aleyna’nın ‘Konu Değerlendirme Soruları 2’ Beşinci Soru Çözüm Görseli.....	118
Şekil 4. 22. Aleyna’nın ‘Konu Değerlendirme Soruları 2’ Altıncı Soru Çözüm Görseli.....	118
Şekil 4. 23. Merve’nin ‘Konu Değerlendirme Soruları 2’ Altıncı Soruyu Sınıf İçi Tahtada Çözüm Görseli.	119
Şekil 4. 24. Aleyna’nın Görüşmede Çemberin Çevresini Hesaplama Görseli	120
Şekil 4. 25. Ahmet’in Görüşmede Çevre Uzunluğu Formülünü Oluşturma Görseli.....	121
Şekil 4. 26. Ahmet’in Çap 20 Santimetre Olan Çemberin Çevresini Hesaplama Görseli.....	122
Şekil 4. 27. Berna’nın Çevre Uzunluğu Formülünü İşlemde Açıklama Görseli.	123
Şekil 4. 28. Berna’nın Görüşmede Çemberin Çevre Uzunluğunu Formülünü Açıklama Görseli	124
Şekil 4. 29. Berna’nın Görüşmede Çapı 20 cm Olan Çemberin Çevresini Hesapla Görseli.....	124
Şekil 4. 30. Mert’in Görüşmede Çemberin Çevre Uzunluğu Formülünü Oluşturma Görseli.....	125
Şekil 4. 31. Mert’in Görüşmede Çapı 20 cm Olan Çemberin Çevresini Hesaplama Görseli.....	126
Şekil 4. 32. Ders Sürecinde Çembersel Bölgeyi Karesel Bölgeler ile Hesaplanmasını İçeren Etkinlik 7 Görseli.	128
Şekil 4. 33. Ahmet’in Çembersel Bölgeyi Karesel Bölgeler ile Hesaplamaya Çalışma Görseli.....	131
Şekil 4. 34. Berna’nın ‘Konu Değerlendirme Soruları 3’ Altıncı Sorusunun Sınıf İçinde Çözüm Görseli.	141
Şekil 4. 35. Elif’in ‘Konu Değerlendirme Soruları 3’ Altıncı Sorusunun Çalışma Kâğıdında Çözüm Görseli.....	141
Şekil 4. 36. Elif’in ‘Konu Değerlendirme Soruları 3’ Beşinci Sorusunun Çalışma Kâğıdında Çözüm Görseli.....	142
Şekil 4. 37. Elif’in ‘Konu Değerlendirme Soruları 3’ Dördüncü Sorusunun Çalışma Kâğıdında Çözüm Görseli.....	142
Şekil 4. 38. Elif’in ‘Gerçek Yaşam Problemi 6’ Problemini Çözerken Uyguladığı Adımlar	143

Şekil 4. 39. Beste'nin 'Konu Değerlendirme Soruları 3' Birinci ve İkinci Sorularının Çözüm Görseli	143
Şekil 4. 40. Beste'nin 'Konu Değerlendirme Soruları 3' Dördüncü Sorunun Çözüm Görseli.....	143
Şekil 4. 41. Aleyna'nın 'Gerçek Yaşam Problemi 6' Problemini Çözüm Görseli ..	144
Şekil 4. 42. Aleyna'nın Çalışma Kağıdında Dairenin Alan Formülü Görseli	145
Şekil 4. 43. Aleyna'nın Görüşmede Dairenin Alan Hesabını İçeren Sorunun Çözüm Görseli.....	146
Şekil 4. 44. Ahmet'in Çalışma Kağıdında Dairenin Alan Formülü Görseli.	147
Şekil 4. 45. Ahmet'in Matematiksel Olarak Dairenin Alan Formülü Görseli.	148
Şekil 4. 46. Ahmet'in Görüşmede Dairenin Alan Hesabını İçeren Sorunun Çözüm Görseli.....	148
Şekil 4. 47. Berna'nın Matematiksel Olarak Dairenin Alan Formülü Görseli.....	149
Şekil 4. 48. Berna'nın Görüşmede Dairenin Alan Hesabını İçeren Sorunun Çözüm Görseli.....	150
Şekil 4. 49. Mert'in Matematiksel Olarak Dairenin Alan Formülü Görseli.	151
Şekil 4. 50. Mert'in Görüşmede Dairenin Alan Hesabını İçeren Sorunun Çözüm Görseli.....	152
Şekil 4. 51. Bilge'nin Görüşmede Dairenin Alan Hesabını İçeren Sorunun Çözüm Görseli.....	154

TABLÖLER DİZİNİ

Tablo 3. 1. Çalışma Takvimi.....	39
Tablo 3. 2. Katılımcıların hazırbulunuşluk testinden aldıkları sonuçlar.	42
Tablo 3. 3. Asıl Uygulamanın Öğretim Planı.	50
Tablo 3. 4. Creswell ve Poth'un (2018) nitel araştırmaların geçerlik ve güvenirliği sağlamak amacıyla önerdiği stratejiler ve gerçekleştirilme durumu.....	63



1. GİRİŞ

Çember, düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesinin oluşturduğu geometrik şekil ve daire ise çemberin çevrelediği iki boyutlu alandır. Bu kavram tarihten günümüze kadar birçok medeniyetin ve düşünürün dikkatini çekmiştir. Euclid'in yaklaşık M.Ö. 300 yıllarında yazdığı matematik ve geometri alanında yazılmış en önemli eserlerinden olan “Elements” adlı eserinde “herhangi bir merkez ve herhangi bir yarıçap ile bir çember tanımlamak mümkündür” şeklinde üçüncü postülatı yer almakta ve tüm geometri bunun beraberindeki beş postülat üzerine inşa edilmiştir (Fitzpatrick, 2008).

Çember kavramının en ilginç özelliklerinden biri çevresinin çapına oranının sabit ve irrasyonel bir sayı olmasıdır. Bu oran, π (pi) olarak adlandırılmakta olup ondalık sistemde yaklaşık 3.14 değerine karşılık gelmektedir. Tarihsel süreçte π sayısının değeri çeşitli medeniyetler tarafından farklı şekillerde hesaplanmıştır. M.Ö. 2000-1600 yılları arasında Babilliler, bir çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğunun üç katı olarak kabul etmişler, yani π 'yi 3'e eşit olarak belirlemişlerdir (Greenberg, 1993). Benzer şekilde, M.Ö. 1800 yıllarına tarihlenen Rhind papirüsüne göre antik Mısırlılar π 'yi yaklaşık olarak $(16/9)^2$ yani 3.1604 şeklinde ifade etmişlerdir (Gillings, 1972). M.Ö. 287-212 arasında yaşamış olan Archimedes (Arşimet), Eudoxus tarafından geliştirilen “method of exhaustion” yöntemi adı altında, π sayısı için alt ve üst sınırlar belirlemiştir (Hosch, 2011). Türkçe karşılığı “tüketme yöntemi” olan bu yöntem ile Archimedes, çapı hipotenüs olarak alan ve bir açısı $\pi/6$ olan üçgenlerden yola çıkarak, çemberin hem içini hem de dışını saran düzgün çokgenler çizmiştir. Ardından, açığı 4 kez ikiye bölerek çemberin içinde ve dışında olmak üzere iki farklı 96 kenarlı düzgün çokgen elde etmiştir. Son olarak da bu çokgenlerin çevrelerini hesaplayarak, π 'nin değerinin $3\frac{1}{7}$ ile $3\frac{71}{100}$ ($3.1408 < \pi < 3.1429$) arasında olduğunu ileri sürmüştür (Heath, 1897). Benzer şekilde, Çinli matematikçi Zu Chongzhi, M.S. 429-500 yılları arasında aynı yöntemi kullanarak π sayısını $3.1415926 < \pi < 3.1415927$ sınırları arasında hesaplamıştır (Arndt ve Haenel, 2013). İranlı astronom El-Kaşi ise 1424 yılında π 'nin virgülden sonra 16 basamağını doğru şekilde hesaplamayı başarmıştır (Berggren, 1986). Daha sonraki yüzyıllarda Ludolph van Ceulen, π 'nin virgülden sonra 35 basamağını hesaplamıştır (Berggren vd., 2000). Günümüzde ise π 'nin trilyonlarca basamağını hesaplayacak bilgisayarlar geliştirilmiştir.

Tarihsel süreçte yalnızca çemberin çevresi değil, iç bölgesi olan dairenin alanı da hesaplanmaya çalışılmış ve bu doğrultuda çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Antik Mısırlılar, daire alanını belirlemeye yönelik dikkate değer yaklaşımlar ortaya koymuşlardır. Rhind papirüsünde yer alan bilgilere göre, dairenin alanını bulmak için çapın dokuzda biri çıkarılıp elde edilen değerin karesi alınmış ve bu hesaplama sonucunda yaklaşık olarak $\frac{256}{81}r^2$ formülüne ulaşılmıştır (Gillings, 1972; Rossi, 2003). Bu yaklaşım, π 'nin yaklaşık 3.16 olarak kabul edildiğini göstermektedir. Ayrıca, M.Ö. 300'lü yıllara tarihlenen bir Demotik papirüste, bir dairenin çapının, alanının üçte birinin kareköküne eşit olduğu ifade edilmiştir (Robins ve Shute, 1987). Bu yöntemler, Antik dönemlerde daire ve alan kavramına dair dikkate değer matematiksel anlayışlar geliştirdiklerini ortaya koymaktadır. Benzer şekilde, Antik Yunan matematiği de dairenin alanına ilişkin teorik katkılar sunmuştur. Euclid "Elements" adlı eserinin XII. Kitap 2. Önermesinde "daireler, çapları üzerindeki karelerin oranına eşittir" ifadesine yer vererek (Fitzpatrick, 2008) dairenin alanının çapın karesiyle orantılı olduğunu belirtmiş ve bu yolla π sabitinin varlığına dolaylı yoldan işaret etmiştir. Bu yaklaşımların ötesinde Arichimedes'e göre herhangi bir dairenin alanı, dik kenarlarından biri dairenin yarıçapına, diğeri ise çevresine eşit olan bir dik üçgenin alanına eşittir. Bu önermesini ispatlamak için, dairenin içine ve dışına yerleştirdiği düzgün çokgenlerin alanlarını karşılaştırmış ve mantıksal bir çelişki yöntemi olan olmayana ergi (reductio ad absurdum) yöntemini kullanmıştır. Eğer dairenin alanı söz konusu üçgenden küçük olsaydı, dıştaki çokgenin alanı da bu üçgenden küçük olmalıydı. Ancak, bu durum geometrik olarak mümkün değildir. Benzer şekilde, dairenin alanı üçgenden büyük olsaydı, içteki çokgenin alanı da ondan büyük olmalıydı. Bu da çelişkili bir durumdur. Dolayısıyla, dairenin alanı söz konusu üçgenin alanına eşittir. Bu yaklaşım, dairenin alanının πr^2 formülüyle ifade edilebileceğini göstermektedir (Heath, 1897).

Tarihte çember kavramı yalnızca matematik ve geometri alanlarında değil, aynı zamanda coğrafya ve astronomi gibi bilim dallarında da önemli bir yere sahip olmuştur. Örneğin, eski Yunanda Eratosthenes, M.Ö. 200 yıllarında Mısırda yaptığı bir deneyde farklı bölgelerdeki gölge açısını hesaplayarak merkez açı ve yay uzunluğunu bulmuş, sonrasında dünyanın çevre uzunluğunu yaklaşık olarak hesaplamıştır (Hosch, 2011). Benzer şekilde, 11. yüzyılda yaşamış olan El-Biruni, Dünya'nın yarıçapını ve çevresini ölçmek için farklı bir yöntem kullanmıştır. Bir dağın

yüksekliğini trigonometrik yöntemlerle belirleyen El-Biruni, dağın zirvesinden ufuk çizgisine olan eğim açısını ölçüp, bu açıyı ve dağ yüksekliğini kullanarak Dünya'nın yarıçapını hesaplamıştır (Brummelen, 2013). Öte yandan, Aristarkus M.Ö. 300 yıllarında hem ay hem de güneş tutulmalarını gözlemleyerek gök cisimlerinin büyüklükleri ve uzaklıkları hakkında tahminlerde bulunmuştur. Güneş tutulması sırasında Ay'ın gölgesinin Dünya üzerindeki etkisini analiz ederek Ay'ın çapını belirlemeye çalışmıştır. Ay tutulmasında ise Dünya'nın gölgesini Ay'ın çapı cinsinden değerlendirerek Dünya'nın çapını hesaplamaya çalışmıştır (Heath, 2004). Bu çalışmalar, çember ve çevre kavramlarının antik çağdan itibaren yalnızca soyut matematiksel nesneler değil, aynı zamanda doğayı anlamaya yönelik bilimsel araçlar olarak da kullanıldığını göstermektedir.

Kısacası çember ve daire kavramları tarihten günümüze kadar geometrinin ve ilişkili birçok bilimin temel yapı taşı olmuştur. Dolayısıyla bu kavramlar matematik öğretim programlarında ilkokuldan üniversite seviyesine kadar yer almaktadır. Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics-NCTM) standartlarına göre, altıncı ile sekizinci sınıf arasındaki öğrenciler çemberin çevresini ve üçgen, paralelkenar, yamuk ve dairenin alanını belirlemek için formüller geliştirir ve uygularlar. Ayrıca, daha karmaşık şekillerin alanını bulmak için de stratejiler geliştirirler (NCTM, 2000). Aynı şekilde geometri öğrenme düzeyleri dikkate alındığında çember ve dairenin matematiksel olarak anlamlı şekilde oluşturulması eski ve yeni matematik öğretim programlarında yer almaktadır (MEB, 2024a; 2018).

Günümüzde etkili bir öğretimin gerçekleşmesi için öğrencilerin matematiksel kavramlara ilişkin anlayışlarının araştırılarak değerlendirilmesi önemlidir. Bu bağlamda, kavramların soyutlama sürecinin nasıl gerçekleştirdiğini açıklayan teoriler bulunmaktadır. Bunlardan biri yapılandırmacı bir model olan APOS teorisidir (Dubinsky, 1984). Bu model kapsamında, matematiksel kavramların oluşum süreçlerinin analiz edilmesiyle bu kavramların öğretim ortamının nasıl tasarlanacağı ile ilgili yapılacak planlamalara yön verilmektedir (Asiala vd., 1996; Arnon vd., 2014). Bunun beraberinde öğrencilerin soyut matematiksel kavramlarla etkileşim kurlmaları ve bu kavramları oluşturmaları teknoloji aracılığıyla desteklenebilir (NCTM, 2000).

Bu bağlamda dinamik matematik yazılımı (DMY) gibi teknolojik araçlar, öğrencilerin çeşitli geometrik şekilleri modellemelerine ve bunlarla etkileşimli bir

deneyim yaşamalarına olanak tanır (NCTM, 2000). Bu etkileşim, matematiksel bilgilerin daha bütüncül bir yapı içinde kavranmasını desteklemektedir. Ayrıca, öğrencilerin sadece işlemsel bilgiyle sınırlı kalmayıp, kavramsal düzeyde daha derinlemesine öğrenmeler gerçekleştirmelerine katkı sağlamaktadır. Bu doğrultuda, DMY destekli öğretim ortamlarının tasarlanması, matematik öğretiminde önemli bir potansiyel taşımaktadır. Nitekim, 2024 yılı güncel Matematik Dersi Öğretim Programı'nda öğrencilerin “Geometrik Şekiller”, “Geometrik Nicelikler” ve “Dönüşüm” temaları kapsamında, matematiksel muhakeme ile birlikte matematiksel araçları ve teknolojiyi etkin biçimde kullanmaları hedeflenmiştir (MEB, 2024a).

1.1. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı, altıncı sınıf öğrencilerinin DMY destekli öğretim ortamında çember ve temel elemanları, çemberin çevre uzunluğu formülü ve dairenin alanı formülünün APOS teorisi çerçevesinde kavram oluşum süreçlerini incelemektir. Geometri ve matematiğin temel yapıtaşları olan bu kavramların inşa süreçlerinde olası kavram yanlışlarını engelleme açısından sağlam ve doğru öğretim ortamlarının tasarlanması oldukça önemlidir. Kavram oluşum sürecinde yaşanan zorluklar ve yanlışlar göz önüne alındığında çember, merkez nokta, yarıçap, çap, daire, çemberin çevre uzunluğu ve dairenin alan formülü kavramlarının anlamlı bir şekilde oluşturulması oldukça önemlidir. Bu bağlamda, bu kavramların nasıl oluşturulduğu incelenerek öğrencilerin zorlandıkları aşamaların tespit edilmesi amaçlanmıştır. Ayrıca, kavramların zihinde oluşum süreçlerine hizmet edilmesi amacıyla DMY destekli öğretim ortamı hazırlanarak, etkili ve kalıcı öğretim ortamlarına imkân sağlanacağı düşünülmüştür.

1.2. Araştırmanın Problemi

Bu araştırmanın araştırma problemi “6. sınıf öğrencileri DMY destekli ortamda çember ve daire kavramlarını nasıl oluştururlar?” şeklindedir. Araştırmanın alt problemleri ise şunlardır:

1. 6. sınıf öğrencileri DMY destekli ortamda çember, temel elemanları ve daire kavramlarını nasıl oluştururlar?
2. 6. sınıf öğrencileri DMY destekli ortamda çemberin çevre formülünü nasıl oluştururlar?

3. 6. sınıf öğrencileri DMY destekli ortamda dairenin alan formülünü nasıl oluştururlar?

1.3. Araştırmanın Önemi

Matematiğin temel kavramlarından biri olan çember, ilkokuldan üniversiteye kadar farklı düzeylerde öğretilen önemli bir geometrik kavramdır. Literatür incelendiğinde, çember ve daire kavramlarına yönelik birçok çalışmanın yapıldığı görülmektedir. Bu çalışmaların çoğunun nicel araştırma yöntemiyle gerçekleştirildiği ve özellikle DMY'ların çember, çember parçasının uzunluğu, daire ve daire diliminin alanı gibi konular üzerindeki etkilerini incelediği görülmektedir. Söz konusu yazılımların, öğrencilerin akademik başarıları, tutumları, geometri öz-yeterlikleri ve öğrenmenin kalıcılığı üzerindeki etkileri araştırılmıştır (örneğin, Acar, 2017; Bayrambeğ, 2022; Topuz ve Birgin, 2020; Şeker ve Erdoğan, 2017; Uzun, 2014). Bununla birlikte, öğrencilerin çember ve daire konularını öğrenirken çeşitli bilişsel zorluklar yaşadığı da tespit edilmiştir. Yapılan araştırmalar, öğrencilerin bu kavramlarla ilgili epistemolojik engellerle karşılaştığını (Diana vd., 2020), kavramlar arasında bağlantı kurmakta zorlandıklarını (Cantimer ve Şengül, 2017), bu kavramları diğer geometrik şekillerle ilişkilendiremediklerini (Özsoy ve Kemankaşlı, 2004), kavramları tanımlayamadıkları (Kristianti vd., 2022; Özerbaş ve Kaygusuz, 2012) ve çeşitli kavram yanılgılarına sahip olduklarını (Özerbaş ve Kaygusuz, 2012) ortaya koymuştur.

Bu bağlamda, çevre ve alan kavramları öğrencilerin çember ve daire ile ilgili kavramsal gelişimlerinin merkezinde yer almaktadır. Çemberin çevresi, bir uzunluk kavramı olarak doğrudan çevre hesaplamasıyla ilişkilidir. Benzer şekilde dairenin alanı da iki boyutlu bir yüzey büyüklüğünü ifade eden alan kavramıyla bütünleşmektedir. Ancak, ilköğretim düzeyindeki öğrencilerin alan ve çevre kavramlarını hem kavramsal düzeyde anlamada hem de işlemsel uygulamalarda önemli güçlükler yaşadıkları (Şişman ve Aksu, 2009), özellikle çevre hesabı ile alan hesabını birbirine karıştırdıkları görülmüştür (Dağlı ve Peker, 2011). Öğrencilerin alan kavramını ve buna ilişkin formülleri sağlam temellerle zihinlerinde inşa etmeleri hem geometrik şekilleri tanıma hem de bu şekillerin alanlarını doğru bir şekilde hesaplama ve olası hataları fark ederek düzeltme becerilerini geliştirmelerine katkı sağlamaktadır (Huang ve Witz, 2013). 6-8. sınıf düzeyindeki öğrencilerin çemberin çevresi ile üçgen, paralelkenar, yamuk ve daire gibi temel şekillerin alanını belirlemek amacıyla

formüller geliştirmeleri ve bu formüllerini kullanmaları beklenmektedir (NCTM, 2000). Ayrıca, daha karmaşık şekillerin alanlarını hesaplamaya yönelik stratejiler geliştirmeleri de bu sürecin önemli bir parçasıdır. Bu bağlamda, çemberin çevre uzunluğu formülü ile dairenin alan formülünün kavramsal olarak doğru ve sağlam bir biçimde inşa edilmesi, öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerinin gelişimi açısından kritik öneme sahiptir. Bahsedilen tüm bu zorluk ve kavram yanlışları dikkate alındığında, çember ve daire kavramlarının öğrenciler tarafından anlamlı bir şekilde yapılandırılmasının ne denli önemli olduğu görölmektedir.

Bu zorlukların aşılabilmesi için, öğrencilerin çember ve daire kavramlarını anlamlı bir şekilde yapılandırmaları gerekmektedir. Bu yapılandırma süreci ise doğrudan soyutlama becerisi ile ilişkilidir. Matematik eğitiminde soyutlama, öğrenmenin merkezinde yer alan temel bir zihinsel süreçtir. Piaget, soyutlamayı farklı bir perspektiften bakarak deneysel soyutlama (empirical abstraction) ve yansıtıcı soyutlama (reflective abstraction) olmak üzere ikiye ayırmıştır. Deneysel soyutlama, bireyin fiziksel nesnelerle etkileşime girerek onların algılanabilir özelliklerini (örneğin uzunluk, şekil, renk) ayırt etmesiyle oluşur. Öte yandan yansıtıcı soyutlama, düşüncenin gelişiminde temel zihinsel yapıların oluştuğu mekanizma olarak tanımlanmış ve tüm mantıksal-matematiksel yapıların bu mekanizma aracılığıyla zihinde yapılandırıldığı ileri sürölmüştür (Piaget 1975; Arnon vd., 2014). Piaget'in bu yaklaşımdan etkilenen Dubinsky, yansıtıcı soyutlamayı geliştirerek APOS Teorisi adı verilen modeli ortaya koymuştur (Dubinsky, 1984). Bu teori temel olarak, bir bireyin matematiksel bir kavramı öğrenmeye çalışırken zihninde neler olup bittiğine dair modellere odaklanır ve bu modelleri öğretim materyalleri tasarlamak ve matematiksel problem durumlarıyla başa çıkmada öğrenci başarılarını ve başarısızlıklarını değerlendirmek için kullanır (Arnon vd., 2014). Bu bağlamda, APOS teorisi çerçevesinde farklı kavramlar (örneğin; çember, daire, çemberin çevre uzunluğu, dairenin alanı) için öğretim ortamları tasarlanabilir ve bu tasarlanan öğretim ortamları kavramla ilgili zihinsel yapılanmalara ve yansıtıcı soyutlamalara hizmet edebilir (Yılmaz, 2023).

Bu noktada, bilgi ve iletişim teknolojilerinin eğitimde artan rolü, soyut kavramların daha somut ve anlaşılır hâle getirilmesini destekleyen öğretim yaklaşımlarını da beraberinde getirmiştir. Matematik öğretim programlarında teknoloji kullanımının önemini belirtilmekte (MEB, 2018) ve öğrencilerin

öğrenmelerini kolaylaştırdığı ifade edilmektedir (NCTM, 2000). Dijital çağın gerekleri ve teknolojik gelişmeler doğrultusunda hazırlanan Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli kapsamında (MEB, 2024a), beş temel beceriden biri matematiksel araç ve teknoloji ile çalışma becerisidir. Bu beceri, matematiksel araç ve teknolojiden yararlanma ile değerlendirme olmak üzere iki ana bileşen ve bunlara bağlı süreç becerilerinden oluşmaktadır. Süreç bileşenleri arasında, pergel, cetvel ve çizgeç (ölçüsüz cetvel) gibi araçları kullanarak çizim ve inşa yapabilme becerisi, matematik öğrenme sürecinde uygun teknolojik araçların özelliklerini tanıma, bu araçları etkili biçimde kullanabilme ve farklı araçları karşılaştırarak değerlendirme gibi çeşitli alt becerilere yer verilmektedir. Özellikle DMY aracılığıyla öğrenciler, şekillerin özelliklerini araştırabilirler ve büyük veri kümelerini düzenleyerek analiz edebilirler. Ek olarak, grafikleri tersine çevirebilir, uzatabilir veya yakınlaştırabilir. Ayrıca, matematiksel fikirlere birden fazla perspektiften bakmanın bir yolunu sağlayarak araştırmaların kapsamını ve kalitesini zenginleştirirler (NCTM, 2000). Dolayısıyla APOS teorisine dayalı olarak yapılandırılmış DMY destekli öğretim ortamlarının, öğrencilerin kavram oluşum süreçlerini geliştirmede etkin bir araç olarak kullanılabileceği söylenebilir.

Öğrencilerin kavramları hangi düzeyde yapılandırdıklarını sistematik biçimde değerlendirmek için APOS teorisinin en güçlü bileşenlerinden biri olan genetik çözümleme devreye girmektedir. Bu bağlamda genetik çözümleme yaklaşımı, teorisinin hem temel dayanaklarından biri hem de araştırmalarda uygulamaya dökülen en kritik araçlardan biridir. Genetik çözümleme, araştırmacıya öğrencilerin kavram oluşum sürecinde oluşabilecek olası zihinsel yapıları sunar ve öğretim, uygulama, değerlendirme gibi süreçlerinin planlanmasında yardımcı olabilir (Asiala vd, 1996; Dubinsky ve McDonald, 2001). “Öğrenciler genetik çözümlemenin gerektirdiği zihinsel yapıları yaptılar mı?”, “Öğrenciler matematiksel içeriği ne kadar iyi öğrendiler?” gibi sorulara verilecek yanıtlar, genetik çözümlemedeki yapıların gözden geçirilmesine yol açabilir (Arnon vd., 2014). Bu çerçevede, genetik çözümlemenin araştırmacılar ve eğitimciler için güçlü bir tanılayıcı ve öngörücü araç olduğunu ifade edebiliriz. Özellikle önceden yapılandırılmış ve doğrulanmış bir genetik çözümlemenin oluşturulması, matematiksel kavramların zihinsel olarak doğru ve sağlam biçimde inşa edilmesini ve buna uygun öğretim ortamlarının tasarlanmasını sağlar. Ayrıca, öğrencilerin APOS teorisinin hangi bilişsel yapısında zorlandıklarını

belirlemek, performanslarındaki farklılıkları anlamlandırmak ve bir kavramın zihinsel gelişim sürecini analiz etmek açısından da genetik çözümleme oldukça kritik bir işlev görmektedir (Arnon vd., 2014). Bu bağlamda; çember ve temel elemanları, daire, çemberin çevre uzunluğu formülü ve dairenin alan formülü kavramlarına ilişkin hazırlanan genetik çözümlemelerin, öğrencilerin bu kavramları nasıl anlamlandırdıklarına dair derinlemesine bilgiler sunarak literatüre katkı sağlayacağı ve öğretim süreçlerine yönelik önemli çıktılar üreteceği düşünülmektedir.

Ancak, literatürde öğrencilerin çember ve daire kavramlarına ilişkin soyutlama süreçlerini doğrudan inceleyen çalışmaların oldukça sınırlı olduğu görülmektedir. Yıldız ve Ezentaş'ın (2024) yaptıkları çalışmada öğrencilerin lise düzeyinde çember kavramının da dahil olduğu geometrik kavramların oluşum süreçlerinin APOS teorisi çerçevesinde genetik çözümleme hazırlamadan incelemişlerdir. Martínez-Planell ve Moore-Russo (2016), lise öğrencilerinin birim çember üzerinde trigonometrik fonksiyonları anlamlandırma süreçlerini hazırladıkları genetik çözümlemeler doğrultusunda APOS teorisi kapsamında ele almışlardır. Bağ ve Karamık (2024) ise genetik çözümleme hazırlamadan APOS teorisindeki bileşenleri farklı boyutlarda rubrik halinde düzenleyerek lise düzeyinde birim çember konusunu ele almıştır. Bununla birlikte Gür ve Döldül (2024), özel yetenekli öğrencilerin çember ve daire konularına ilişkin soyutlama süreçlerini RBC+C modeli doğrultusunda analiz etmişlerdir. Ancak, çember ve daire kavramlarını doğrudan konu alan APOS teorisi bağlamındaki mevcut çalışmalarda sistematik bir genetik çözümleme sunulmadığı dikkat çekmektedir. Bu bağlamda, araştırmada çember ve temel elemanları, daire, çemberin çevre uzunluğu formülü ve dairenin alan formülü kavramlarına yönelik olarak geliştirilen genetik çözümlemelerin, literatürdeki önemli bir boşluğu doldurarak alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca, bu genetik çözümlemelere uygun hazırlanan DMY destekli etkinliklerin APOS çerçevesinde kavram oluşum süreçlerine ve bu süreçlerde ortaya çıkan bilişsel yapılara etkisinin incelenmesi, literatüre özgün ve değerli katkılar sunacağı öngörülmektedir.

1.4. Araştırmanın Varsayımları

Bu araştırmada, hazırlanan hazırbulunuşluk testinin öğrencilerin ön bilgilerini ortaya çıkarmada yeterli olduğu varsayılmaktadır. Öğrencilerin etkinlikleri uygulama sürecinde istekli, gayretli ve samimi davrandıkları, hazırlanan etkinliklerin ve öğrenme ortamının DMY destekli öğretime uygun biçimde tasarlandığı ve bu ortamın,

öğrencilerin ele alınan kavramı nasıl oluşturduklarını ortaya koyabilecek süreçleri açığa çıkarmaya elverişli olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca, katılımcıların öğrenme mekanizmalarını derinlemesine anlamaya yönelik sorular yöneltildiği kabul edilmektedir. Ek olarak, araştırmacının veri toplama ve analiz süreçlerinde yansız davrandığı ve katılımcıları etkilemekten kaçındığı varsayılmaktadır.

1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları

- Bu araştırma bir devlet ortaokulunun 2023-2024 eğitim öğretim yılındaki 27 kişilik bir altıncı sınıfı ve görüşmelere alınan 5 katılımcı ile sınırlıdır.
- Yapılan araştırmada oluşturulması hedeflenen kavramlar çember, merkez nokta, yarıçap, çap, daire, çemberin çevre uzunluğu formülü ve dairenin alanı formülü kavramlarıyla sınırlıdır.
- Araştırma; tasarlanan öğrenme ortamı, uygulanan etkinlikler ve çözülen problemler ile sınırlıdır.
- Sınıf ve görüşme ortamlarındaki etkileşimler katılımcıların performansını etkileyebilir. Bu nedenle araştırma bu ortamlarla sınırlıdır.

1.6. Araştırmanın Tanımları

Soyutlama: Bir kavramın belirli temel niteliklerinin diğer niteliklerinden ayrılarak bağımsız bir şekilde ele alınmasıdır (Tall, 1988).

APOS Teorisi: Bireylerin matematiksel kavramları nasıl yapılandırdıklarını açıklamaya yönelik bilişsel temelde bir öğrenme kuramıdır. Teori, bireylerin matematiksel durumlarla karşılaştıklarında bu durumlara anlam verebilmek ve problemleri çözebilmek için zihinsel *eylemler* (Actions), *süreçler* (Processes), *nesneler* (Objects) ve *şemalar* (Schemas) geliştirdiğine odaklanır (Asiala vd., 1996).

Dinamik Matematik Yazılımı (DMY): Öğrencilerin çeşitli iki veya üç boyutlu şekilleri modellemelerine ve bunlarla etkileşimli bir deneyim yaşamalarına olanak tanıyan teknolojik bir araç olarak tanımlanabilir (NCTM, 2000).

GeoGebra (GGB): Cebir, geometri, analiz ve olasılık-istatistik gibi farklı matematik alanlarını dinamik bir yapıda bütünleştiren etkileşimli ve açık kaynaklı bir DMY'dir. Matematiksel nesnelerin görsel olarak temsil edilmesini ve kullanıcı etkileşimiyle bu nesnelerin davranışlarının gözlemlenmesini sağlar (Hohenwarter ve Fuchs, 2004).

Çember ve temel elemanları: Düzlemde verilen bir $M = (a, b)$ noktasından eşit uzaklıktaki noktalar kümesine, M merkezli bir çember denir. Bu tanıma göre, bir çember;

$(a, b) \in R^2$ ve $r \in R^+ \cup \{0\}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$D = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$$

- Uç noktaları çember üzerinde bulunan ve M noktasından (merkez) geçen doğru parçasına çemberin bir çapı,
- P çemberin üzerinde bir nokta olmak üzere $[MP]$ doğru parçasına çemberin bir yarıçapı denir (Argün vd., 2014).

Ortaokul düzeyinde çember, “bir noktaya eşit uzaklıktaki tüm noktaların oluşturduğu şekil” olarak tanımlanmaktadır (MEB, 2024a).

Matematik ders kitabında ise, “Bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan ve aynı düzlemde olan tüm noktaların birleştirilmesiyle çember elde edilir” şeklinde tanımlanır (MEB, 2024b).

Daire: $(a, b) \in R^2$ ve $r \geq 0$ bir reel sayı olsun.

$$D = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}$$

kümesine (a, b) merkezli ve r yarıçap uzunluklu bir daire denir (Argün vd., 2014).

Ortaokul düzeyinde ise, bir çember ve çemberin iç bölgesinin birleşimine daire denir. (MEB, 2024b).

Çemberin çevre formülü: Yarıçapı r olan bir çemberin çevresi (yani uzunluğu) $2\pi r$ şeklinde hesaplanır (MEB, 2024b).

Dairenin alan formülü: Yarıçapı r olan bir dairenin alanı πr^2 şeklinde hesaplanır (MEB, 2024c).

2. KURAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Teknoloji Destekli Matematik Öğretimi (TDMÖ) ve Dinamik Matematik Yazılımları (DMY)

Teknoloji, matematik öğretimi ve öğreniminde vazgeçilmez bir unsur haline gelmiştir. Bu doğrultuda teknoloji hem öğretilen matematiğin ortamını değiştirmekte hem de öğrencilerin öğrenme süreçlerini desteklemekte ve geliştirmektedir (NCTM, 2000). Bu değişimlerin en önemlilerinden biri, öğrenme sürecindeki kontrol odağının öğretmenden öğrenciye kaymasıdır. Teknolojik araçların kullanıldığı ortamlarda, öğrencilerin karar verme noktalarında daha aktif rol almalarına teşvik edebilmektedir (Heid, 2005). Teknolojik araçlar, öğrencilere sadece doğru yanıt bulma sürecinde yardımcı olmakla kalmaz, aynı zamanda çözüm önerilerinin doğruluğunu sorgulamalarına, geçerliliğini test etmelerine ve kendi hipotezlerini oluşturarak bunları eleştirel biçimde değerlendirmelerine olanak tanır. Örneğin, hesap makineleri ve bilgisayarlar aracılığıyla öğrenciler, elle gerçekleştirilmesi zor olan çok sayıda örneği veya temsili biçimi inceleyebilir, bu sayede çeşitli çıkarımlar yaparak bu çıkarımları keşfetme fırsatı bulabilmektedirler (NTCM, 2000). Bu süreçte öğrenciler, daha önce öngörülme-yen ya da alışılmadık çözüm yollarıyla karşılaşabilir. Bu da onların problem çözme süreçlerinde yeni sorular üretmelerini ve daha derinlemesine matematiksel düşünme becerileri geliştirmelerini teşvik eder (Makar ve Confrey, 2006; Akt. Olive, vd., 2010). Ayrıca eğitimde teknolojinin kullanımı, öğretmen ve öğrencilerin matematiksel etkinliklere katılımını sağlayarak öğrenme yollarını ve seçeneklerini artırmaktadır (Sacristan vd., 2010).

Jonassen ve arkadaşları (1998) geleneksel olarak öğretim teknolojilerini , öğretimi aktaran birer araç, yani bilgiyi taşıyan ve öğrencilere sunan ortamlar olduğunu ifade etmiştir. Bu kullanım biçiminde, bilgi teknoloji içinde “depolanmış” kabul edilir. Öğretim süreci sırasında, öğrenciler teknolojiyle bir etkileşim yaşar. Ancak bu etkileşim çoğu zaman yalnızca bir tuşa basarak sunumun devam etmesini sağlamak ya da önceden programlanmış sorulara yanıt vermekle sınırlıdır. Program, öğrencinin verdiği yanıtı değerlendirir ve genellikle bu yanıtın doğruluğu hakkında geri bildirimde bulunur. Jonnassen ise teknolojinin bu şekilde kullanılmaması gerektiğini belirtir. Aksine, öğrencilerin kendilerinin bilgi inşa etmesine imkân tanıyan araçlar olarak kullanılması gerektiğini savunmaktadır. Heid (1997), TDMÖ’nin temel varsayımlarını ve değerlerini dört ana ilke etrafında toplamıştır:

Bunlardan birincisi, öğrenci merkezli eğitimin değerli olduğu ve teknolojinin bu yaklaşımı güçlendirme potansiyeline sahip olduğu görüşüdür. Günümüzde eğitimde öğrenci merkezli yaklaşımlar, bireysel öğrenme ihtiyaçlarına duyarlılığı ve öğrencinin öğrenme sürecindeki aktif rolünü merkeze alması nedeniyle giderek daha fazla önem kazanmaktadır. Bu bağlamda, teknolojinin eğitimi daha öğrenci odaklı hâle getirme konusunda güçlü ve dönüştürücü bir araç sunduğu kabul görmektedir.

İkinci ilke, öğrencilere matematikçi gibi düşünme ve teknoloji ile çalışmanın değerli bir deneyim olduğunu vurgular. Bu bağlamda teknoloji, bu tür deneyimlerin sağlanmasında önemli fırsatlar sunmaktadır.

Üçüncü ilke, öğrenmenin derinleşmesinde önemli bir rol oynadığını ve teknolojinin bu süreci destekleyebileceğini savunur. Bu bağlamda, teknolojinin sunduğu etkileşimli geri bildirim mekanizmaları, öğrencilerin düşüncelerini yapılandırmalarına ve sorgulamalarına yardımcı olur.

Dördüncü ilke, teknoloji yoğun öğrenme ortamlarında bilgiye dair otoritenin yeniden tanımlandığını ve bunun istenen bir gelişme olduğunu savunur. Bu ortamlarda epistemolojik otorite sadece öğretmen veya ders kitabı ile sınırlı kalmaz, öğrenciler de öğrenme süreçlerinde daha fazla sorumluluk alır.

Bu dört ilke bir arada düşünüldüğünde, TDMÖ ortamlarının öğrenci merkezli eğitimin gelişimine katkı sağladığı, öğrencilerin öğrenme süreçlerine daha aktif bir şekilde dâhil olmalarını, matematiksel düşünme becerilerini geliştirmelerini ve düşünme süreçlerini derinleştirmelerini sağlamada önemli bir rol oynadığı ifade edilmektedir. Ayrıca, teknolojinin otoriteyi yeniden yapılandırması ve öğrencilere daha fazla sorumluluk vermesi öğrenme süreçlerini öğrenci açısından daha anlamlı hale getirdiği görülmektedir. Sonuç olarak, bu ilkelerin birbiriyle uyumlu bir şekilde çalışması öğrencilere daha etkili, derinlemesine ve sürdürülebilir bir öğrenme deneyimi sunmaktadır.

Teknolojik araçlar arasında en önemli ve etkili olanlardan biri şüphesiz bilgisayarlardır. Bilgisayarlar; aritmetik ve mantıksal işlemleri otomatik olarak gerçekleştirebilen, karmaşık problemleri çözebilen ve bu işlemleri yüksek hızda yapabilen programlanabilir teknolojik araçlar olarak tanımlanabilir. Bilgisayar, diğer teknolojik araçlarda bulunmayan etkileşimli geri bildirim sağlayabilme özelliğiyle, öğrenenin dikkatini belirli fikirler ve kavramlar üzerinde yoğunlaştırma potansiyeline

sahiptir (Noss, 1988). Söz konusu etkileşimli yapı, öğrenme sürecini daha etkin ve odaklanmış hâle getirerek bilişsel katılımı artırma potansiyeline sahiptir. Ayrıca, bilgisayarlar matematiksel düşünmenin gelişimi ve yeniden yapılandırılması süreçlerinde de önemli bir rol üstlenebilir (Drijvers vd., 2010). Jonassen ve arkadaşları (1998), bilgisayarlara çok daha farklı bir bakış açısıyla yaklaşarak, öğrencilerin öğrenme sürecinde birer tasarımcı gibi işlev görmesi gerektiğini savunur. Bu bağlamda bilgisayarların, öğrencilerin bilgiyi tasarlamasına ve yorumlandırıp yapılandırmalarına yardımcı olan Zihin Araçları (Mindtools) işlevi görmesi gerektiğini savunmaktadır. Bilgisayar birer Zihin aracı olarak kullanıldığında, teknolojiyi kullanıcıların düşünme süreçlerini destekleyen, yönlendiren ve genişleten bilgi inşa araçları olarak kullanılmış olur. Yani bu araçlar, öğrencilerin görev performansının bir kısmını üstlenerek ya da görevin doğasını ve zorluk düzeyini ayarlayarak süreci yeniden biçimlendirir. Bilgisayarların zihin aracı olarak kullanılması, öğrencilerin normalde düşünemeyecekleri biçimlerde düşüncelerine olanak tanır.

Zihin araçlarıyla bilgi temsili oluşturmak, öğrencileri zorunlu olarak eleştirel, yaratıcı ve karmaşık düşünme süreçlerine dahil eder. Bu süreçler; değerlendirme, analiz etme, ilişkilendirme, detaylandırma, sentez yapma, hayal etme, tasarlama, problem çözme ve karar verme gibi becerileri içerir (Jonassen, 1996). Bilgisayarlar zihin aracı olarak kullanıldığında, öğrenciler ne bildiklerini yansıtarak üzerine düşünür ve bu yansıtma süreci üzerinden bilgi temelli yapılar inşa ederler. Bu anlamda, öğrenciler bilgisayara bir şeyler öğretmektedir (Jonassen, 1996; Jonassen ve Carr, 2000). Bu bakış açısının günümüzde kullanılan yapay zeka uygulamalarına benzediği söylenebilir.

Jonassen ve Reeves'e (1996) göre bilgisayarların zihin araçları olarak kullanılmasını gerektiren ilkeler vardır. Bu bağlamda, bilgisayarların zihin araçları olarak kullanılması ancak yapılandırmacı epistemoloji kapsamında mümkün olarak ifade edilmiş ve bu araçların, öğrencilerin bilgiyi pasif bir biçimde almaları yerine kendi bilgi temsillerini tasarlamalarını sağladığını ve anlamlı öğrenme için gerekli olan derin ve yansıtıcı düşünmeyi desteklediğini belirtmişlerdir.. Ayrıca, bu araçların uygulandığı görevleri öğrencilerin gerçekleştirmesi, öğretmenlerin yalnızca rehber rolünde bulunması gerektiğini de vurgulamaktadırlar. Ek olarak, bu görevler gerçek yaşam bağamlarına yerleştirilmeli ve öğrenci için kişisel anlam taşımalıdır.

Bu bağlamda, bilgisayar tabanlı matematik yazılımları geliştirilerek, bu

yazılımlar matematik öğretiminde etkili bir şekilde kullanılabilir. Heid (2005), bilgisayar cebir sistemleri ve DMY'ların, öğrencilerin matematiksel kavramları daha derinlemesine anlamalarına önemli katkılar sağladığını belirtmektedir. Bu tür araçlar, soyut ilişkileri görselleştirerek öğrencilerin düşünme süreçlerini destekler ve kavramsal bağlamların inşasını kolaylaştırır.

DMY'lar, bireylerin özellikle Euclid geometrisindeki temel öğeleri (nokta, doğru parçası ve çember vb.) oluşturmaya ve bu öğeler arasındaki geometrik ilişkileri kurmaya olanak tanır. Bu yazılımlar hem bilgisayarlarda hem de dokunmatik ekranlı cihazlarda kullanılabilir. Bilgisayarlar üzerinde fare ile, dokunmatik ekranlarda ise yüzeylere dokunarak öğelerin doğrudan hareket ettirilmesi sağlanır. Oluşturulan nesnelerin bileşenlerinden herhangi biri sürüklenerek, nesne farklı durumlara dönüştürülebilir. DMY'lar, geometrik nesnelerin bileşenlerini birleştirerek oluşturulmasını sağlar. Örneğin, bir doğru parçası iki noktayı birleştirerek oluşturulabilir. Ancak bu doğru parçası, kâğıda çizilen sabit ve statik bir doğru parçası değil, olası tüm doğru parçalarının bir prototipidir. Bu doğru parçasının bir ucunu tutup hareket ettirdiğinizde, doğru parçasının uzunluğu ve yönü sürekli olarak değişecektir. Yılmaz'ın (2011) çalışmasında; doğru parçası ve çember gibi farklı geometrik cisimlerin DMY ile hareket ettirilmesi, bireylerin kavramlarla ilgili zihinsel süreçlerini dinamik olarak desteklemiş ve bu kavramların diğer kavramlarla ilişkilendirilmesi adına faydalı olmuştur. Yani kısacası DMY'lar, öğrencilere matematiksel ilişkileri görselleştirme ve keşfetme fırsatı sunarak, daha etkileşimli ve öğrencilerin katılımını artıran bir öğrenme ortamı sağlayabilir. Ayrıca, bu yazılımların öğrencilerin problem çözme becerilerini geliştirme ve matematiksel kavramları somutlaştırma noktasında önemli bir rol oynadığı söylenebilir (Oldknow, 1997).

Geometri öğrenme ve öğretiminin farklı boyutlarını incelemek ve bu süreci daha etkili kılmak amacıyla Hawgent, Cabri, The Geometer's Sketchpad, Cinderella ve GeoGebra gibi çeşitli dinamik matematik yazılımları kullanılmaktadır. Bu tür yazılımlar, öğrencilerin özellikle geometrik ilişkileri keşfetmelerine, hipotezler geliştirmelerine ve kavramsal anlayışlarını görsel ve etkileşimli yollarla derinleştirmelerine olanak tanımaktadır. Etkileşimli özellikleri sayesinde öğrenme sürecini daha aktif ve anlamlı hâle getiren bu araçlar, özellikle soyut geometrik kavramların somutlaştırılmasında önemli bir rol oynamaktadır (Hohenwarter ve Fuchs, 2004).

2.1.1. GeoGebra (GGB)

GeoGebra (GGB), çoklu platformlarda çalışabilen, açık kaynaklı bir DMY'dir (Hohenwarter ve Preiner, 2007; Hohenwarter vd., 2008) ve DMY'ların kullanım kolaylığını, bilgisayar cebir sistemlerinin çok yönlülüğü ile birleştirmeyi amaçlamaktadır (Hohenwarter vd., 2008). GGB; cebir, geometri, kalkülüs ve istatistik gibi matematiksel alanları bütünleşik bir biçimde sunarak, kullanıcıların hem görsel hem de sembolik temsiller aracılığıyla matematiksel kavramları keşfetmelerini ve anlamlandırmalarını destekler. Bu yazılım, kullanıcıların etkileşimli geometrik çizimler yapmasına, fonksiyonlar tanımlamasına, grafikler oluşturmaya ve cebirsel hesaplamalar gerçekleştirmesine olanak tanır. Bu çok yönlü yapısı sayesinde GGB, hem öğretmenler hem de öğrenciler tarafından matematik öğretiminde yaygın olarak tercih edilmektedir. Ayrıca açık kaynaklı olması ve farklı dijital platformlarda erişilebilirliği, yazılımın eğitim ortamlarında esnek ve erişilebilir bir araç olarak benimsenmesini kolaylaştırmaktadır (Hohenwarter ve Fuchs, 2004).

GGB, ortaokul matematik eğitiminde de çok yönlü bir araçtır ve çeşitli şekillerde kullanılabilir. Öncelikle, gösterim ve görselleştirme aracı olarak etkili olup, farklı matematiksel temsiller sunar. Ayrıca, bilgisayar destekli çizim aracı olarak geleneksel yöntemlerle entegre edilerek yapıcı geometri öğretiminde önemli bir rol oynar. Ayrıca GGB yazılımı, öğrencilerin matematiği keşfetmelerini destekleyerek bilgiyi kendi başlarına organize etmelerine olanak sağlar. Son olarak, öğretmenlerin öğretim materyali hazırlamasını teşvik eden güçlü bir eğitim aracıdır (Hohenwarter ve Fuchs, 2004).

Alan yazın incelendiğinde, teknolojinin matematik eğitiminde etkili kullanımının, görevlerin pedagojik olarak uygun biçimde tasarlanması ve öğretim süreçlerinin dikkatle organize edilmesiyle birlikte, öğrencilerin kavram oluşturma süreçlerini olumlu yönde etkilediği görülmektedir. Teknolojik araçlar, öğrencilere matematiksel ilişkileri kurabilecekleri uygun öğrenme ortamları sunmakta (Olive vd., 2010); özellikle DMY, kavramların görselleştirilmesini kolaylaştırarak öğrenme sürecini desteklemektedir (Presmeg, 2006; Tabaghi vd., 2009). Ayrıca, bu araçlar formal ve informal matematik arasında köprü kurmakta (Mariotti, 2006) ve öğrencilerin informal anlamlandırmaları ile formal matematiksel anlamlar arasında arabulucu bir rol üstlenmektedir (Balacheff ve Kaput, 1996). Ek olarak, DMY ve etkileşimli tahta kullanımı öğrencilerin öğrenmeye yönelik ilgisini artırdığını

göstermektedir (Lavicza ve Papp-Varga, 2010; Wall vd., 2005) Son olarak, GGB'nin etkileşimli yapısı sayesinde deneme-yanılma imkânı sunması, onu pergel ve çizgeç ile yapılan inşalara kıyasla daha uygulanabilir kılmaktadır (Öçal ve Şimşek, 2016).

Bir DMY olan GGB'nın kullanımının, öğrencilerin akıl yürütme ve görselleştirme becerilerini geliştirdiği ve akademik başarıları üzerinde olumlu bir etkisi olduğu görülmektedir (örneğin; Ağaçdiken, 2021; Bhagat ve Chang, 2015; Çetin, 2018; Dikovic, 2009; Frank vd., 2022; Hutkemri ve Zakaria 2014; Keskin, 2019; Reisa, 2010; Thambi ve Eu, 2013; Zengin, 2019). GGB yazılımının etkileşimli yapısı sayesinde, öğrencilerin soyut matematik kavramlarını somutlaştırmaları ve öğrenme sürecine aktif katılım göstermeleri sağlanabilmektedir (Boo ve Leong, 2016). Ayrıca, GGB ile öğrenim gören öğrencilerin, matematiği geleneksel yöntemlerle öğrenenlere kıyasla daha yüksek düzeyde kavramsal ve kalıcı bilgiye sahip oldukları görülmektedir (Zulnaidi ve Zamri, 2017). Yazılımın etkileşimli yapısı sayesinde öğrencilerin modelleme süreçlerinde de aktif rol aldığı çalışmalar mevcuttur (Latifi vd., 2022; Sekulić ve Takaçi, 2013). Özellikle karmaşık sayılar ve fonksiyonlar gibi kavramların görselleştirilmesini destekleyerek, öğrencilere ilgi çekici bir öğrenme deneyimi sunmakta ve bu sayede daha derinlemesine bir anlayış kazandırmaktadır (Navetta, 2016).

GGB'nın etkileşimli yapısı, uzaktan eğitim ortamlarında da etkili bir biçimde kullanılabilmektedir (Ağaçdiken, 2021; Hamady vd., 2024). Ek olarak, GGB yazılımının öğrencilerin matematiksel yaratıcı düşünme becerilerini geliştirdiği (Ayyubi vd., 2024; Septian vd., 2020) ve matematiksel düşünmeyi artırdığı da belirtilmektedir (Khali vd., 2019). Ayrıca, GGB'nın yapay zekâ ile kullanımı üzerine çalışmalar yapılmakta (Funes vd., 2024) ve yazılımın coğrafya gibi farklı disiplinlerde de kullanıldığı görülmektedir (Soare ve Antohe, 2010).

Son olarak, ortaokul düzeyinde çember ve daire konularının öğretiminde de GGB kullanımının öğrencilerin akademik başarılarını artırdığını gösteren çalışmalar da mevcuttur (örneğin; Acar, 2017; Bayrambeğ, 2022; Günhan ve Açı, 2016; Şeker ve Erdoğan, 2017; Tan, vd., 2020; Topuz ve Birgin, 2020; Uzun, 2014).

2.2. Kavram Tanımı ve Kavram İmajı

Kavram tanımı, bir kavramı döngüsel olmayan, açık ve doğru bir biçimde açıklayan sözlü ifade olarak belirtilebilir. Türk Dil Kurumuna göre kavram, bir nesnenin veya düşüncenin zihindeki soyut ve genel tanımıdır (TDK, 2024). Bir

kavram, görüldüğünde ya da işitildiğinde belleğimiz için bir uyarıcı işlevi görür. Bu kavram adı, belleğimizde bir şeyleri harekete geçirir. Genellikle, kavramın bir tanımı olsa bile, hatırlanan şey bu tanım değildir. Hatırlanan şey, Tall ve Vinner'ın (1981) ortaya attığı “kavram imajı” olarak adlandırdığı yapıdır. Kavram imajı, zihninizde kavram adıyla ilişkilendirilen sözel olmayan bir oluşumdur. Kavramın görsel temsilleri varsa, bu bir görsel temsil olabilir. Aynı zamanda bir dizi izlenim ya da deneyim de olabilir. Kavram adıyla ilişkilendirilen bu görsel temsiller, zihinsel imajlar, izlenimler ve deneyimler sözel biçimlere dönüştürülebilir. Ancak burada önemli olan, belleğimizde ilk uyarılan şeyin bu sözel biçimler olmadığıdır. Bu sözel ifadeler daha sonraki bir aşamada ortaya çıkmaktadır (Vinner, 1991). Örnek vermek gerekirse, “çember” kelimesini duyduğunuzda, zihninizde bir daire şekli canlanabilir ya da bir bisiklet tekerleğini ya da saatin yuvarlak kadranını hayal edebilirsiniz. Belki de ortaokulda öğrendiğiniz “bir noktaya eşit uzaklıktaki noktalar kümesi” tanımı aklınıza gelebilir. Çemberin çevresi, merkezi, çapı ya da π sayısı ile ilişkisi gibi unsurlar da çağrışım yapabilir. Ancak, bu çağrışımların her biri, kavram tanımından çok kavram imajının bir parçası olarak bellekte yer alır. Kısacası, bir kavram imajından yalnızca belirli bir bireyle ilişkili olarak söz edilebilir. Ayrıca, aynı birey farklı durumlarda belirli bir terime (kavram adına) farklı tepkiler verebilir (Vinner, 1991).

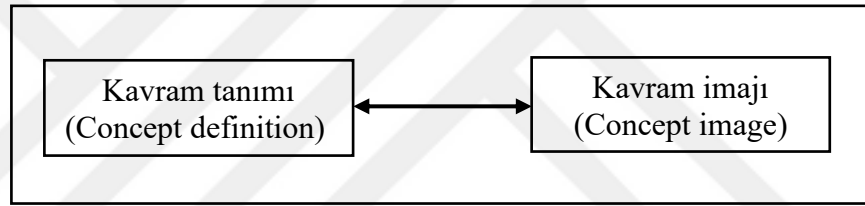
Vinner (1983), her bir kavram için bireyin zihninde iki farklı hücre bulunduğunu öne sürmektedir. Bu hücrelerden biri kavram tanımı, diğeri ise kavram imajı ile ilgilidir. Bu hücrelerden biri ya da her ikisi boş olabilir. Ayrıca, bu iki hücre arasında etkileşim söz konusu olabilir. Ancak her biri birbirinden bağımsız olarak da gelişebilir. Vinner (1983), bu durumu koordinat sistemi örneğiyle açıklamaktadır. Örneğin, bir çocuk çeşitli durumlarda birçok grafik (dik koordinat sistemindeki grafikler) görmesi sonucunda, koordinat sistemine dair bir kavram imajı geliştirmiş olabilir. Bu imaja göre, koordinat sisteminin iki eksenini mutlaka birbirine diktir. Daha sonra, çocuğun matematik öğretmeni koordinat sistemini “herhangi iki kesişen doğru” olarak tanımlayabilir. Bu durumda üç farklı senaryo ortaya çıkabilir:

1. Kavram imajı değişir ve artık eksenleri dik açı yapmayan koordinat sistemlerini de kapsar.
2. Kavram imajı sabit kalır, öğretmenin sunduğu tanım kavram tanımı hücresinde bir süre yer alır; ancak zamanla unutulur ya da bozulur. Sonuç olarak, çocuk

bir koordinat sistemini tanımlaması istendiğinde, hâlâ eksenlerin dik olduğunu söyler.

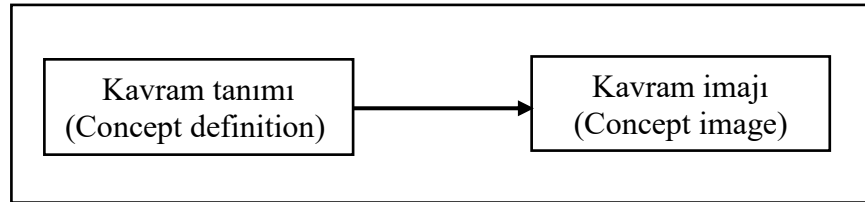
3. Her iki hücre bağımsız olarak varlığını sürdürür. Çocuk, bir tanım istendiğinde öğretmenin tanımını tekrarlar; ancak diğer tüm durumlarda koordinat sistemini eksenleri dik olan bir yapı olarak düşünmeye devam eder.

Bu senaryolar, bireyin matematiksel kavramları nasıl algıladığı ve kullandığını anlamada kavram tanımı ile kavram imajı arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır. Bir kavram, ilk kez tanım yoluyla öğrenildiğinde de benzer bir bilişsel süreç ortaya çıkabilir. Bu durumda, başlangıçta kavram imajı hücresi boştur. Ancak, kavramla ilgili çeşitli örnekler ve açıklamalar sunuldukça, bu hücre zamanla içerik kazanmaya başlar. Bu gelişim süreci, her zaman kavram tanımının tüm yönlerini tam ve doğru şekilde yansıtmayabilir (Vinner, 1983). Şekil 2.1, kavram oluşumunun uzun vadeli süreçlerine atıfta bulunmaktadır.



Şekil 2. 1. Kavram Oluşumunun Uzun Süreli Etkileşimi (Vinner, 1983).

Vinner'e (1983) göre, ortaöğretim ve üniversite düzeyindeki birçok öğretmen, kavram oluşum sürecinde Şekil 2.2'de gösterildiği gibi tek yönlü bir süreç olduğunu varsaymaktadır. Bu doğrultuda, kavram imajının kavram tanımı aracılığıyla oluşacağını ve tamamen onun kontrolü altında şekilleneceğini beklemektedirler.



Şekil 2. 2. Kavramın İmajı ve Tanımı Arasındaki Tek Yönlü Etkileşim (Vinner, 1983).

Burada kastedilen tek yönlü süreç, öğretmenlerin kavram öğretiminde sadece kavram tanımını vermenin, öğrencinin zihin yapısında otomatik olarak bir kavram imajı oluşturacağını varsaymalarıdır. Örneğin, öğretmen çember tanımı verdiğinde öğrencinin doğrudan bu tanımı zihninde doğru bir imaja dönüştüreceği düşünülür.

Ancak Vinner, bu yaklaşımı reddetmektedir. Çünkü öğrencilerin sahip oldukları kavram imajları; onların deneyimlerine, görsel algılarına ve önceki öğrenmelerine dayanmakta ve tanımla her zaman uyuşmayabilir. Bu bağlamda Vinner (1983), şu iki temel savı öne sürmektedir;

1. Bir kavramı kullanabilmek için kavram imajına ihtiyaç vardır, kavram tanımına değil.
2. Bir kavram sözlü tanım yoluyla öğrenilmiş olsa dahi, bu tanım çoğu zaman zihinsel süreçlerde etkinleşmez ya da zamanla unutulabilir.

Bu kapsamda, kavram tanımı ve öğrencilerin kavramla ilgili imajları kavram oluşumu açısından bu kavramların öğretimi ve öğreniminde oldukça kritik öneme sahiptir. Öğrencilerin yalnızca kavramların tanımlarını ezberlemeleri değil, aynı zamanda bu kavramlara ilişkin zihinsel temsiller, yani kavram imajları oluşturmaları gerektiği vurgulanmaktadır. Nitekim, bireylerin düşünme süreçlerinde etkin olan unsurun çoğunlukla kavram tanımı değil, kavram imajı olduğu dikkate alındığında, kavram öğretiminde somutlaştırma, deneyimleme ve yapılandırmacı öğrenme yaklaşımlarının önemi bir kez daha ortaya çıkmaktadır.

2.3. Soyutlama

Soyutlama, bir kavramın belirli temel niteliklerinin diğerlerinden ayrılarak bağımsız biçimde ele alınması sürecidir. Soyutlama genellikle genelleme ile birlikte anılsa da bu iki kavram kesinlikle eşanlamlı değildir. Örneğin, iki bilinmeyenli lineer denklemlerin çözüm süreci, üç bilinmeyenli lineer denklemlerin çözüm sürecine bir genelleme olarak görülebilir. Her ne kadar bu süreçte örtük bir soyutlama bulunduğu ileri sürülebilse de bu durumda daha genel olan süreç, mutlaka daha soyut bir süreç anlamına gelmemektedir (Tall, 1988).

Piaget soyutlamayı, deneysel soyutlama (empirical abstraction) ve yansıtıcı (reflective abstraction) soyutlama olmak üzere iki temel türde ele almıştır. Deneysel soyutlama, bireyin fiziksel nesnelerle etkileşimi sırasında, bu nesnelerin doğrudan gözlemlenebilir özelliklerine odaklanarak bilgi edinmesiyle gerçekleşmektedir. Bu tür soyutlamada bilgi, nesnelerin duyuşal özelliklerinden yola çıkarak yapılandırılır. Örneğin, çocukların nesnelerin ağırlığı, şekli veya boyutu gibi fiziksel özelliklerini fark etmeleri bu tür bir soyutlamaya örnek olarak verilebilir (Piaget, 1975).

Yansıtıcı soyutlama ise, Piaget tarafından bireyin bilişsel gelişimi sürecinde mantıksal-matematiksel yapıları inşa etme sürecini tanımlamak amacıyla ortaya konmuş bir kavramdır. Piaget'in bu soyutlama türüne ilişkin iki önemli gözlemi bulunmaktadır. Birincisi, yansıtıcı soyutlamanın mutlak bir başlangıcının olmadığı ve en erken yaşlarda, duyuşal-motor yapıların koordinasyonu sürecinde bile bu mekanizmanın devrede olduğudur (Beth ve Piaget, 1974; Dubinsky ve McDonald, 2001). İkincisi ise, yansıtıcı soyutlamanın yalnızca çocuklukla sınırlı kalmadığı, aksine yüksek düzey matematik çalışmalarında da sürdüğü ve öyle ki, matematiğin antik çağdan günümüze kadar olan gelişim sürecinin tamamının, bu yansıtıcı soyutlama sürecinin bir örneği olarak değerlendirilebileceğidir (Piaget, 1975; Dubinsky ve McDonald, 2001).

2.3.1. Yansıtıcı Soyutlama ve APOS Teorisinin Gelişimi

Piaget, yansıtıcı soyutlamayı düşüncenin gelişiminde rol oynayan zihinsel yapıların temel işleyiş mekanizması olarak tanımlamaktadır. Ona göre birey, tüm mantıksal-matematiksel yapılarını bu zihinsel mekanizma aracılığıyla geliştirir (Piaget, 1971). Yansıtıcı soyutlamayı, “mantıksal-matematiksel yapının muazzam yapısını destekleyen ve canlandıran” bir unsur olarak tanımlayan Piaget (1980), söz konusu yapının doğuştan gelmediğini, aksine mantıksal-matematiksel deneyime ve yansıtıcı soyutlamaya bağlı olarak geliştiğini vurgular (Kohler, 2014). Piaget birçok çalışmasında, soyutlamanın temelinde bireyin nesneler üzerinde gerçekleştirdiği *eylemlerin* (actions) yer aldığını ve soyutlamanın bu *eylemler*den yola çıkarak zihinsel düzeyde gerçekleştiğini vurgulamıştır. Örnek vermek gerekirse:

Grup kavramı ya da özelliği, bu tür bir soyutlamayla (deneysel soyutlama yoluyla) elde edilmez; bunun yerine, modern matematik ve mantığa özgü bir düşünme biçimi olan 'yansıtıcı soyutlama' yoluyla elde edilir. Bu soyutlama, özellikleri nesnelerden değil, nesneler üzerinde nasıl eylemler gerçekleştirdiğimizden, onlara uyguladığımız işlemlerden türetilir (Piaget, 1970, s. 19).

Piaget burada, matematiksel kavramların gelişiminde soyutlamanın rolünü vurgulamaktadır. Buradaki temel nokta, “grup” kavramı gibi kavramların anlamlandırılmasının *nesneler* arasındaki ortak özellikleri belirlemekten farklı bir süreç olduğudur. Bunu anlamlandırmak, yalnızca *nesneleri* gözlemlemek veya ortak özelliklerini çıkarmakla ilgili değildir. Bireyler *nesnelerle* etkileşime girerek, bu etkileşimlerin zihinsel işlem haline gelmesini sağlarlar. Yani, *nesneler* üzerindeki *eylemler* (actions) sonunda *içselleştirilmiş işlemlere* (interiorized operations) ve kavramlara dönüşür. Bu süreç, soyut düşüncenin temellerini atar (Arnon vd., 2014).

Her şeyden önce, yansıtıcı soyutlama bir keşif değildir. Çünkü, ortaya çıkan yapı ya da ‘yansıtılan’ öge, türetildiği şeyle aynı değildir. Beth ve Piaget (1974), bir çocuğun yansıtıcı soyutlama sürecini şu şekilde anlatmıştır:

Çocuk bir eylemin sonucunu deneyimle veya yaşayarak öğrendiğinde; örneğin, toplama işleminin sonucunun sayıları hangi sırayla topladığına bağlı olmadığını fark ettiğinde, fiziksel eylemleri düşünceye dönüştürerek, bu eylemlerin kurallarını içinde barındıran içselleştirilmiş işlemler sistemine çevirme süreci olduğunu yansıtıcı soyutlama ile ortaya koyar (Beth ve Piaget, 1974, s. 206)

Piaget’in burada anlatmak istediğine bir örnek vermek gerekirse, bir çocuk elinde 2 kırmızı, 1 sarı ve 1 mavi kalemle resim yaparken bunları bir araya getirir ve toplamda 4 kalem olduğunu fark eder. Sonra aynı işlemi ters sırayla yapar: önce 1 mavi, sonra 1 sarı, sonra 2 kırmızı kalem. Yine aynı sonuca ulaşır. Başlangıçta, çocuk kalemleri birleştirerek sadece fiziksel bir *eylem* yapmaktadır. Ancak, bu *eylemi* tekrar tekrar yaparak “toplama işleminde, kalemlerin sırası değişse bile sonuç değişmez.” sonucu elde eder. Burada yansıtıcı soyutlama devreye girerek, çocuğun yaptığı fiziksel *eylemi* zihinsel bir yapıya dönüşerek *içselleştirilmiş işlem* halini almaktadır. Piaget’in burada söylediği şey; *nesnelerin (objects)* özelliklerinin *nesnelerin* kendisinde değil, bu *nesneler* üzerinde gerçekleştirilen *eylemlerde* bulunduğudır. Bu durumda bilgi *nesnelerden* değil, *eylemlerden* elde edilir (Piaget, 1971).

Piaget’in verdiği örnekte bahsedilen *nesneler* sayılar, bu *nesnelere* uygulanan *eylem* ise (sayıların değil işlem özelliği olarak) toplamadır. Dubinsky tarafından geliştirilen APOS teorisinde, Piaget’in *içselleştirilmiş işlemleri*, *süreç* (process) kavramına dönüşmüştür. Bu sayede fiziksel bir *eylem*, bireyin zihninde bir *süreç* (*içselleştirilmiş işlem*) haline gelmek üzere yeniden inşa edilmiştir. Bu dönüşüm, APOS’un zihinsel mekanizmalarından biri olan *içselleştirme* yoluyla gerçekleşir. Dubinsky, Piaget’in tüm bu sisteminin *şema (schema)* olduğunu ifade etmiştir (Arnon vd., 2014). Piaget’nin yansıtıcı soyutlama kavramı, APOS Teorisi’nde *sürecin* (*içselleştirilmiş işlem*) bir *nesneye* dönüşmesini açıklayan *kapsülleme (encapsulation)* mekanizmasının temelini oluşturur. Bu bağlamda, bireyin dışsal (fiziksel) bir *eylemi* zihninde yapılandırarak içselleştirmesiyle *süreç (process)* oluşur. Bu *süreç* daha sonra kapsüllenenek zihinsel bir *nesneye (object)* dönüşür (Dubinsky, 1991).

APOS Teorisi, Piaget’in yansıtıcı soyutlama çalışmalarının bir tezahürü olarak, özellikle şemaların koordinasyonuna odaklanmaktadır (Arnon vd., 2014). Yukarıda verilen toplama işleminin değişme özelliği örneğinden yola çıkıldığında, Piaget (1965)

bu kavramın yaklaşık 7 yaş civarında tamamlanan uzun bir gelişim sürecine sahip olduğunu belirtmiştir. Bu gelişim süreci, çeşitli şemaların inşasını içermektedir. Bu şemalar, Piaget'nin “sıralama” ve “sınıflama” olarak adlandırdığı yapılardır. Örneğin çocuk, iki kümenin aynı sayıda birim içerip içermediğini belirlemek için bire bir eşleme şemasını kullanır ya da bir kümenin diğerinden daha fazla ya da daha az öge içerip içermediğini anlamak için yine daha önce ya da eşzamanlı olarak geliştirilen küme kapsama şemasına başvurur. Bu iki anlayış, çocuğun sıralama şemasını geliştirmesi için temel oluşturur ve bu şema sayesinde kümelerden oluşan bir diziyi zihninde canlandırabilir (Arnon vd., 2014).

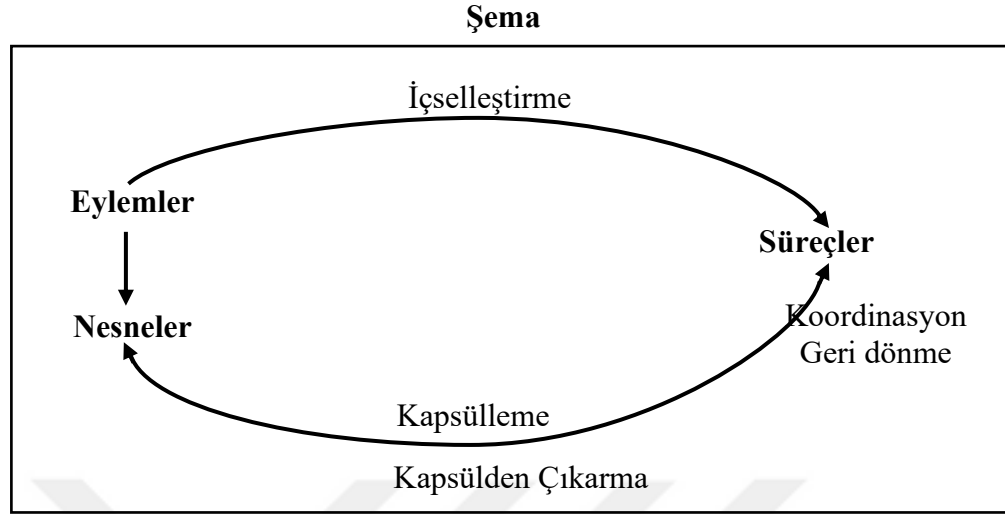
Bu yapılar ile çocuk, bu kümeleri bir, iki, üç, dört vb. ($\{1\}$, $\{1+1\}$, $\{1+1+1\}$, $\{1+1+1+1\}$...) şeklinde adlandırabilir ve aynı zamanda sıralamadaki konumlarını da birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü şeklinde ifade edebilir. Son aşamada, sınıflandırma ve sıralama olmak üzere iki *şema* temalaştırılır ve daha sonra yeni bir *şema* oluşturmak için *koordine* edilir. *Koordinasyondaki* kilit adım, çocuğun örneğin dört elemanlı kümenin aynı zamanda dizideki dördüncü küme olduğunu fark etmesiyle gerçekleşir. Ortaya çıkan *şema*, pozitif tamsayı kavramıdır. Piaget, tüm bu yapıları yansıtıcı soyutlama örnekleri olarak görmüştür (Arnon vd., 2014).

Dubinsky tüm bunları, bilişsel gelişimin bir betimlemesi olarak yorumlamıştır. Bu gelişim, *eylemlerle* başlar, ardından bu *eylemler* içselleştirilerek *süreçlere* dönüşür ve daha sonra *nesnelere* kapsülленerek yeni *eylemlerin* uygulanabileceği *nesnelere* dönüşür (Asiala vd., 1996). Bu gelişim süreci, Piaget'nin yansıtıcı soyutlamasına dayanan ve *eylemden sürece*, *süreçten nesneye* ve *nesneden şemaya* uzanan gelişimi ortaya koyan APOS gelişim modelidir (Arnon vd., 2014).

2.3.2. APOS Teorisi

APOS Teorisi temel olarak matematiksel kavramların nasıl öğrenilebileceğini açıklayan ve matematiksel kavramlara ilişkin anlayışlarını zihinsel olarak nasıl inşa açıklayan bir modeldir. Bireyler, APOS Teorisi'nde matematiksel kavramların öğrenilmesinde aşamalar olarak kabul edilen belirli zihinsel yapıyı (veya yapıları) inşa ederek matematiksel kavramları anlamlandırır (Arnon vd., 2014; Piaget ve Garcia, 1989). Dubinsky (1991), aşamalar olarak ifade edilen zihinsel yapıları *eylem* (action), *süreç* (process), *nesne* (object) ve *şema* (shema) olarak adlandırmış ve bu yapıları harekete geçiren *içselleştirme* (interiorization), *koordinasyon* (coordination), *tersine çevirme* (reversal), *kapsülleme* (encapsulation) ve *kapsülden çıkarma* (de-

encapsulation) ve *temalaştırma* olan zihinsel mekanizmalardan bahsetmiştir (Şekil 2.3.).



Şekil 2. 3. APOS Teorisi ve Bileşenleri (Arnon vd, 2014)

Matematiksel bir kavramı anlamamanın, *eylemler* oluşturmak için önceden oluşturulmuş zihinsel veya fiziksel *nesneleri* manipüle etmekle başladığı düşünülmektedir. *Eylemler* daha sonra *süreçleri* oluşturmak için içselleştirilir ve daha sonra *nesneleri* oluşturmak için kapsülленir. *Nesneler*, oluşturuldukları işlemlere geri kapsüllenebilir. Son olarak *eylemler*, *süreçler* ve *nesneler* *şemalar* halinde düzenlenebilir (Asiala vd., 1996). Dubinsky (1991), bu kavramsal unsurlar arasındaki etkileşimi, her bir bileşenin diğerini etkilediği ve bu etkileşimlerin sürekli olarak birbirini beslediği “döngüsel bir geri bildirim sistemi” olarak betimlemektedir.

2.3.2.1. Eylem

Her ne kadar en ilkel yapı olarak kabul edilse ve genellikle geleneksel öğretimde yalnızca bu yapıya odaklanılsa da *eylem*, APOS Teorisi açısından temel ve vazgeçilmez bir yapı olarak görülmektedir. *Eylem*, bir *nesnenin* dışarıdan yönlendirilmiş bir dönüşümü olarak düşünülür. *Eylem* dışsal bir süreçtir, çünkü dönüşümün her bir adımı açık bir şekilde gerçekleştirilmek zorundadır ve dışsal yönergelerle yönlendirilir (Dubinsky ve McDonald; 2001). Ayrıca, *eylemin* adımları henüz hayal edilemez ve hiçbiri atlanamaz. *Eylem* anlayışıyla sınırlı olan bir birey, kavramı yalnızca dışsal ipuçlarıyla işler ve bu nedenle kavramsal yapı henüz dinamik değildir, aksine statik bir biçimde kalır. APOS Teorisi'nde *eylem*, diğer yapıların gelişimi için temel ve gereklidir. *Süreçler* içselleştirilmiş *eylemler* olup, *nesneler*

*eylem*lerin uygulanmasıyla ortaya çıkar. Yeni *eylem*ler ise daha üst düzey yapıların gelişimine katkı sağlar (Arnon vd., 2014).

Eylem yapısına ilişkin örnek olarak Ağaçdiken'in (2021)  alışmasında alan kavramına yönelik verilen teyit edilmiş bir durum ele alınabilir: Farklı geometrik şekillerle (kare, üçgen, dörtgen vb.) bir  okgeni kaplama *eylem*ini bireyin sistematik olmayan ve rastgele biçimde gerçekleştirmesi, *eylem* düzeyinde kalındı ını göstermektedir. Burada önemli olan nokta, bireyin kaplama *eylem*ini bilinçli bir planlama ya da düzenleme olmaksızın rastgele yapmasıdır.

2.3.2.2.   selleştirme ve Süreç

Birey, bir *eylem*i tekrar ettikçe ve bu *eylem*  zerine düşündükçe, söz konusu *eylem*i zihinsel düzeyde yapılandırarak bir *süreç* haline getirebilir. Başka bir deyişle,   selleştirilmiş *eylem* bir *süreç*dir. *Süreç*, *eylem*le aynı dönüşümü gerçekleştiren ancak fiziksel değil, tamamen bireyin zihninde gerçekleşen bir yapıdır. Bu yapıda birey, işlemi her bir adımı açıkça uygulamak zorunda kalmadan zihinsel olarak canlandırabilir ve yönetebilir (Arnon vd., 2014; Dubinsky ve McDonald; 2001; Dubinsky vd., 2005).   selleştirme, bireyin bir *eylem*in farkına varmasını, o *eylem*  zerine düşünmesini ve onu diğer *eylem*lerle birleştirmesini mümkün kılar (Dubinsky, 1991). Böylece bir *eylem sürece* d n şt   nde, birey bu *süreci* yeni *süreç*ler elde etmek için kullanabilir veya tersine çevirebilir (Breidenbach vd., 1992).

Eylem düzeyinde verilen örneğe atıfla, bireyin kaplama özelliği olan bir nesneyi (yapı olmayan) birim olarak kullanarak, herhangi bir  okgeni bu eş birimlerle sistematik ve boşluksuz bir biçimde kaplaması, artık o *eylem*in   selleştirildi ini ve *süreç* düzeyine ulaşıldığını gösterir (A a diken, 2021). Bu noktada birey, kaplama işlemini rastgele değil, planlı ve eş birimlerle gerçekleştirir. Böylece, *süreç* düzeyinde kavramsal bir kavrayış sergilemektedir.

2.3.2.3. Kapsülleme ve Nesne

Kapsülleme, bireyin *sürece* bir *eylem* uyguladı ında, yani dinamik bir yapıyı (*süreç*) *eylem*lerin uygulanabileceği statik bir yapı olarak gördüğünde gerçekleşir. Eğer birey *süreci* bir bütün olarak ele alır ve dönüşümlerin bu bütünün üzerinde uygulayabileceği ve bu tür dönüşümleri gerçekten inşa edebileceğini hayalinde canlandırıp fark ederse, o zaman birey *süreci* bilişsel bir *nesneye kaps lledi i* söylenebilir (Dubinsky vd., 2005). APOS'a göre *süreç*leri inşa etmenin farklı yolları

olsa da matematiksel bir kavramı *nesneleştirmenin* tek yolu sürecin *kapsüllenmesidir* (Breidenbach vd., 1992). *Nesneler*, bir kez inşa edildikten sonra, daha üst düzey *eylemler* ve ardından *süreçlerde* kullanılabilmek için dönüştürülebilir (Dubinsky, 1997).

Bu duruma somut bir örnek olarak, öğrencilerin dikdörtgenin alan formülünü (uzunluk $\times$ genişlik) ezbere kullanmalarına rağmen, bu formülün ardında yatan boyut ilişkisini ve geometrik anlamı tam olarak kavrayamamaları gösterilebilir. Ağaçdiken'in (2021) çalışmasında da vurgulandığı gibi, bazı öğrenciler dikdörtgenin alanını hesaplarken yalnızca işlemsel bir yaklaşım benimsemekte, ancak neden uzunluk ve genişliğin çarpımıyla sonuç alındığını açıklayamamaktadır. Bu durum, öğrencilerin süreci zihinsel olarak bir *nesneye* dönüştüremediklerini, yani *kapsüllememediklerini* göstermektedir. *Kapsülleme* gerçekleşmediğinde, kavramsal anlayış eksik kalmakta ve öğrenciler öğrendiklerini yeni durumlara esnek bir biçimde uygulamakta güçlük çekmektedir. Nitekim çalışmada, alan kavramını *nesneleştiremeyen* öğrencilerin dikdörtgensel bölgenin alanına ilişkin formülü de anlamlı bir *nesne* olarak kavrayamadıkları gözlemlenmiştir. Buna karşın, boyut ilişkisini kurabilen öğrencilerin, alan kavramını bir bütün olarak ele aldıkları ve bu sayede dikdörtgenin alan formülünü *nesne* düzeyinde yapılandırabildikleri görülmüştür.

2.3.2.4. Kapsülden Çıkarma, Koordinasyon ve Tersine Çevirme

Süreç zihinsel bir *nesneye* kapsüllendikten sonra, ihtiyaç duyulduğunda bu *süreç* tekrardan *kapsülden çıkarılarak* tekrardan kullanılabilir. Ayrıca iki farklı *nesne*, kapsülden çıkartılarak *sürece* indirgenebilir ve *süreçler koordine edilip* kapsüllenebilir (Asiala vd., 1996; Dubinsky, 1991; Dubinsky vd., 2005; Oktaç ve Çetin, 2016; Yılmaz, 2023). Bir *sürecin* içselleştirilmesi, bireyin onu *tersine çevirerek* yeni *süreçler* üretmesine de olanak tanır (Arnon vd., 2014; Asiala vd., 1996; Dubinsky ve McDonald; 2001). Bu bağlamda, Ağaçdiken ve Yılmaz'ın (2023) çalışmalarından yola çıkarak, *kapsülden çıkarma* ve *koordinasyon* mekanizmalarına ilişkin şu örnek verilebilir;

Dikdörtgenin alanı inşasında, herhangi bir dikdörtgensel bölge için birim olarak bir dizi kare alınır ve bu birim karelerle sistemli bir şekilde dikdörtgen boşluk kalmadan tamamen kaplanır. Böylece *eylem*, bir *süreç* olarak *içselleştirilir*. Dikdörtgensel bölgenin alanı ne olduğu ve bunun nasıl gerçekleştiği satır sayısı (bir

sıradaki birim kare sayısı) değiştirildiğinde tekrardan incelenir. Burada, boş yerleri doldurarak sayma, bir sıradaki birimkare sayısı ile sıra sayısından faydalanarak sayma veya bir sıradaki birimkare sayısı ile diğer kenar uzunluğundan faydalanarak sayma gibi süreçlerle *koordine edilebilir*. Karenin alanında ise, dikdörtgenin alan formülünün *kapsülden çıkarılır* ve karenin en boy uzunluğunun eşit olması ile bir sayının kendisinin çarpımının bu sayının karesi olması süreciyle *koordine edilerek* karenin alanı *nesnesine* ulaşılabilir (Ağacdiken ve Yılmaz, 2023).

Dubinsky'nin (1991) integrasyon (integral alma) adı altında *tersine çevirme* mekanizmasıyla ilgili yeni bir sürecin üretilmesi hakkında sunduğu bir örnek şu şekildedir:

Eylemleri içselleştirmek, süreçler inşa etmenin bir yoludur. Mevcut süreçlerle çalışarak yeni süreçler oluşturmak da başka bir yoldur. Örneğin, süreci tersine çevirme yoluyla yapılabilir. Bir öğrenci fonksiyonun türevinin alınması *eylemini* içselleştirmiş olabilir ve bunu matematik derslerinde öğretilen çeşitli teknikleri kullanarak çok sayıda örnekle başarılı bir şekilde yapabilir. Eğer bu *süreç* içselleştirilmişse, öğrenci onu tersine çevirebilir ve türevi verilen bir fonksiyon için, türevi bu fonksiyon olan bir başka fonksiyon bulma problemini çözebilir. Bu işleme anti türev veya integrasyon denir ve bu da önce bir eylem olarak başlar, ardından içselleştirilerek bir sürece dönüştürülür (Dubinsky, 1991, s. 107).

Dubinsky'nin burada anlatmak istediği, öğrencilerin türev kavramını *içselleştirebilecekleri* ve bu süreci *tersine çevirerek* integral alma işleminin de *içselleştirebilir* olduğudur. Dubinsky'nin söylediğine örnek vermek gerekirse, $f(x) = x^3$ fonksiyonun türevi alınarak $f'(x) = 3x^2$ fonksiyonu elde edilebilir. Daha ileri düzeyde; öğrenci bir türev fonksiyonunu verildiğinde, bunun hangi fonksiyona ait olduğunu bulmaya çalışabilir ($f'(x) = 3x^2$ ise $f(x)=?$). Bu şekilde *tersine çevirme* mekanizmasıyla ile yeni bir sürecin üretilmesi mümkün olabilir.

2.3.2.5. Temalaştırma ve Şemalar

APOS teorisinin temel yapıları olan *eylem*, *süreç* ve *nesneyi* ilişkilendirerek *şema* yapısını zihinsel olarak düzenleriz. Dubinsky'ye (1991) göre *şema*, dinamizmi ve belirli matematiksel durumlarda konunun matematiksel aktivitesi tarafından belirlenen sürekli yeniden inşasıyla karakterize edilir. Bir *şemanın* tutarlılığı, bireyin belirli bir matematiksel durumla başa çıkmak için kullanılıp kullanılamayacağını belirleyebilme becerisiyle değerlendirilir. Bir *şema*, tutarlı yapılar (*eylemler*, *süreçler*, *nesneler* ve diğer *şemalar*) ve bu yapılar arasında kurulan bağlantılar topluluğu olarak oluşturulduktan sonra statik bir yapıya (*nesne*) dönüştürülebilir veya diğer ilgili *nesneleri* veya *şemaları* özümsemiği (assimilated) dinamik bir yapı olarak

kullanılabilir (Arnon vd., 2014). Dolayısıyla *şemalar*, bir bireyin matematiksel bir kavramla ilgili olarak inşa ettiği zihinsel yapıların tanımlarını, organizasyonunu ve örneklerini içeren yapılardır. Dubinsky (1991), *şemaların* zihindeki değişimini şu şekilde açıklamaktadır:

Matematiksel bilginin bir dizi şemadan oluştuğunu söyleyebilirsek de bu bilginin bir kişinin içinde nasıl var olduğuna dair söyleyebileceğimiz pek bir şey yoktur. Bu bilgi ne bellekte depolanan bir içerik olarak görünmektedir, ne de fizyolojik bir yapı içinde yer almaktadır. Tek söyleyebileceğimiz şey bir bireyin belirli türdeki problemlere karşı görece tutarlı (ama tamamen değil) bir şekilde tepki verme eğiliminde olduğudur. Biz bu eğilimi *şemalar* yoluyla açıklamaya çalışırız. Eğer birey başarılı olursa, problemin ilgili şema tarafından özümse edildiğini (assimilated) söyleriz. Eğer birey başarılı olamazsa, uygun koşullar altında, mevcut *şemaları* yeni olguyu ele alacak şekilde uyarlanabilir (accomidation) (Dubinsky, 1991, s. 103).

Kısacası öğrenme sürecinde; bilgi geliştikçe, birey sürekli değişen ve gelişim aşamalarında olan bir arada var olan *şemalar* inşa edebilir. Her *şemanın* kendisi *eylemlerden*, *süreçlerden*, *nesnelerden* ve bu yapılar arasındaki ilişkilerden oluşur. Birey bir problem çözme durumu ile karşılaştığında, farklı *şemaları* bir arada koordine etmesi gerekebilir. Ayrıca *şema*, *eylemlerin* ve *süreçlerin* uygulanabileceği başka bir tür bilişsel *nesne* haline gelmek için *temalaştırılabilir* ve *şemayı* bilinçli olarak *kapsülden çıkararak*, onu oluşturan özgün *süreçler*, *nesneler* ve diğer *şemaları* yeniden elde etmesi mümkündür (Arnon vd., 2014).

Bu noktada, kavram imajı ile *şema* kavramları birbirine yakın görünse de özellikle bilişsel yapılanma açısından aralarında önemli farklar bulunmaktadır. Kavram imajı, esas olarak belirli bir matematiksel kavramla ilişkili olan zihinsel temsilleri, görsel imajları, deneyimleri ve çağrışımları ifade ederken (Vinner, 1983; 1991), *şema* ise bu matematiği anlayan veya anlamaya çalışan bireyin zihninde yapılandırılmış olan zihinsel organizasyonları ve ilişkili bilişsel yapıları tanımlar (Arnon vd., 2014). Ayrıca, bir *şema* bireyin zihinsel süreçlerinde bir *nesne* olarak temalaştırılabilir, yani üzerinde bilişsel *eylemlerin* gerçekleştirilebileceği ve diğer *şemaların* alt bileşeni olabilecek yapılar hâlinde dönüşebilir. Buna karşın, kavram imajı literatüründe bu türden bir *nesneleştirme* ya da yapısal bütünlük yaklaşımı yer almamaktadır (Arnon vd., 2014). Bu bağlamda, kavram imajı daha çok bireyin bir kavramla ilgili sahip olduğu bireysel ve genellikle sezgisel nitelikteki çağrışımları tanımlarken, *şema* ise bu çağrışımlardan daha sistematik ve işlemeye hazır zihinsel yapılara işaret etmektedir.

2.3.3. Genetik Çözümleme

APOS teorisinde *genetik çözümleme*, matematiksel bir kavramı öğrenmek için inşa edebileceğimiz zihinsel yapıları ve mekanizmaları tanımlayan ve bu yapıların birbirleri ile nasıl ilişkili olduğunu gösteren modeldir. Bu modeller, deneysel olarak test edilebilecek çalışma hipotezleri için temel teşkil ederler. Yeni bir matematiksel kavram sıklıkla mevcut bir kavramın dönüşümü olarak ortaya çıkar. Bu nedenle bir *genetik çözümleme*de, bireyin mevcut zihinsel *nesneler* üzerinde gerçekleştirmesi gereken *eylemlerin* tanımından, bu *eylemlerin süreçlere* nasıl içselleştirildiğine ve hangi *süreçler* ile koordinasyon kurup *nesneye* ulaşmasına kadar açıklamalar içerebilir (Arnon vd., 2014).

Genetik çözümleme, bir kavramın zihinsel olarak nasıl inşa edilebileceğini açıklamanın yanı sıra, bireyin daha önce inşa etmesi gereken önkoşul yapıların tanımını içerebilir. Ayrıca, öğrencilerin gelişimindeki farklılıkları ve bu farklılıkların matematiksel başarılarındaki çeşitlilikleri nasıl açıklayabileceğini de gösterebilir. Bu nedenle, *genetik çözümleme* matematiksel bir kavramın epistemolojisi ve bilişinin bir modelidir (Roa-Fuentes ve Oktac, 2010). Örneğin, belirli bir görevde bir öğrenci görevi doğru bir şekilde yerine getirirken, başka bir öğrenci zorlanabilir veya bir diğeri tamamen başarısız olabilir. Başarılı öğrenci, *genetik çözümlemenin* gerektirdiği zihinsel yapılardan bir veya daha fazlasını başarıyla oluşturduğuna dair kanıt sunabilir. Sınırlı ilerleme gösteren öğrenci, bu yapıları oluşturmaya başladığına dair işaretler gösterebilir. Başarısız olan öğrenci ise ya bu yapıları hiç oluşturmamış olabilir ya da gerekli yapıları oluşturmaya çalışmış ancak başarılı olamamış olabilir. Eğer öğrenciler arasındaki performans farkları hazırlanan genetik çözümleme ile açıklanamıyorsa, bu durumda *genetik çözümlemenin* tekrardan gözden geçirilmesi gerekebilir. Dolayısıyla, bir yandan *genetik çözümleme* analiz sürecini yönlendirirken, diğer yandan bireyin zihninde kavramın nasıl geliştiğine dair araştırmacıların anlayışındaki eksiklikleri de ortaya çıkarır (Arnon vd., 2014).

Genetik çözümlemeler, APOS tabanlı araştırmalarda merkezi bir rol oynar. Çünkü, araştırmacılar öğrencilerden veri elde etmek ve analiz etmek için teoriye dayalı araçların tasarımına temel teşkil edecek hipotezler sağlayabilir (Dubinsky ve McDonald; 2001). Ayrıca, teorik bir modelin kullanılması, analizin güvenilirliğini de artırır ve öğrenci düşüncesini tanımlamak için bir araç görevi görür (Arnon vd., 2014).

Araştırma için teorik bir model olmasının yanı sıra, bir kavram için *genetik çözümleme* öğretime rehberlik eder. *Genetik çözümleme*, bir öğrencinin matematiksel bir kavramı öğrenmek için yapması gereken yapıları tanımladığından, öğrencilerin önerilen yapıları yapmalarına yardımcı olacak etkinlikler tasarlamak için kullanılabilir. *Genetik çözümleme*den yola çıkarak öğretim etkinliklerinin tasarımına geçmek her zaman doğrudan olmasa da teori ile pedagojik kullanımı arasında bir köprüyü temsil ettiği için önemlidir (Trigueros ve Oktac, 2005).

Asiala ve arkadaşları (1996), modelin geçerliliğini test etmek amacıyla *genetik çözümlemenin* deneysel olarak test edilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Eğer öğrencilerin inşa süreçleri modelle açıklanamıyorsa, bu durum *genetik çözümlemenin* gözden geçirilmesi gerektiğini gösterir. Yani bu yapı sadece öğrenci verisini açıklamakla kalmaz, aynı zamanda araştırmacıların kendi anlayışlarını da test eder.

Kavramın inşa süreci tanımlamasına rağmen, APOS Teorisi farklı öğrencilerin *genetik çözümleme*de tarif edilenden farklı yollar izleyebileceğini kabul eder. Bir kavramın inşa sürecini tanımlamak için farklı araştırmacılar tarafından veya hatta aynı araştırmacı grubu tarafından birkaç *genetik çözümleme* tasarlanabilir. Nitekim, bir *genetik çözümleme*de matematiksel bir kavramın birkaç farklı *eylem, süreç* ve *nesneden* oluşması mümkündür (Arnon vd., 2014).

APOS teorisi çerçevesinde yapılan çalışmalar incelendiğinde; teorinin gelişimi ile ilgili (örneğin: Asiala vd., 1996; Clark vd., 1997; Dubinsky ve McDonald 2001; Weller vd., 2003) çalışmalar yapılmıştır.

Ortaokul düzeyinde; hacim (Dündar, 2019), karekök (Ocakbaşı, 2019), eğitim (Deniz ve Kabaal, 2017) ve oran (Gürbüz, 2018) ile ilgili çalışmalar yapılmıştır.

Lise düzeyinde; birim çember (Bağ ve Karamık, 2024), parçalı fonksiyon (Bayazit, 2010) ve türev kavramı (Borji vd., 2018) ile ilgili çalışmalar da yapılmıştır.

Üniversite düzeyinde; permütasyon ve simetrileri (Asiala vd., 1998), eğitim (Nagle vd., 2019; Tabaghi vd., 2009), iki değişkenli fonksiyon (Martínez-Planell ve Trigueros 2012), diferansiyel denklemler (Trigueros, 2004), dönüşüm (Baker vd., 2001; Lage ve Gaisman, 2006; Yilmaz, 2011), limit (Çetin, 2009), doğrusal fonksiyon (Hsieh vd., 2013), açı (Yiğit, 2014), rasyonel sayılar ve sonsuzluk (Dubinsky vd., 2013; Weller vd., 2009; Weller vd., 2011) kavramları ile ilgili çalışmalar yapılmıştır.

2.4. Çevre ve Alan Ölçme

Ölçme, hayatımızın ve günlük faaliyetlerimizin neredeyse her alanına yayılmıştır. Günlük hayatta çok çeşitli şeyleri ölçeriz (örneğin; ağırlık, sıcaklık, yemek pişirmede kullanılacak malzemeler, zaman, mesafe). Farklı meslek grubundaki insanlar (örneğin; doktorlar, öğretmenler, denetçiler, üniversite kabul memurları, psikologlar) tarafından farklı konularda (örneğin; kan basıncı, başarı, üretkenlik, yetenekler, tutumlar, kaygı) farklı ölçümler yaparız. Kısacası; yaptığımız şeylerin, aldığımız kararların ve hakkımızda alınan kararların çoğu, şu veya bu tür ölçümleri içerir (Pedhazur ve Schmelkin, 1991).

Ölçme, matematiğin gerçek dünya ile en doğrudan ilişkili temel uygulama alanlarından biridir. Sayma işlemi, ayırık (kesikli) nicelikleri belirlemeye yönelik bir ölçme biçimi olarak değerlendirilebilir. Öte yandan sürekli niceliklerin ölçülmesi; uzunluk, alan ve kütle gibi özelliklere sayısal değerler atanmasını gerektirir. Sayma ve ölçme kavramları, nicel akıl yürütmenin yapıtaşlarını oluşturur. Bu bağlamda ölçme, sayı ve geometri disiplinleri arasında kavramsal bir köprü işlevi görerek (NCTM, 2000), her iki alanın karşılıklı olarak birbirini beslemesine olanak tanır (Clements, 2004).

Ölçme süreci iki temel bileşeni içerir: Bunlar, bir ölçü biriminin belirlenmesi ve nesnenin bu birimlerle hem zihinsel hem fiziksel olarak alt birimlere ayrılması. Yani ölçme, bu birimlerin nesne boyunca art arda yerleştirilmesidir (Clements ve Stephan, 2004). Eğer nesne, tam sayı birimlerle tamamen kaplanamadığı durumlarda, birimin sistematik olarak alt birimlere ayrılması gereklidir (Nunes, vd., 1993). Alt birimlere ayırma ve birim tekrarının gerçekleştirilmesi, geleneksel ölçme müfredatlarında ve öğretim uygulamalarında sıklıkla göz ardı edilen karmaşık bilişsel süreçlerdir. Bu nedenle, pek çok araştırmacı, ölçme eyleminin yalnızca fiziksel yönüyle yetinmeyip, öğrencilerin örneğin alanı kaplama ve bu kaplamayı sayısallaştırma bağlamındaki ölçme anlayışlarını da incelemeye yönelmektedir (Clements ve Stephan, 2004).

Ölçülebilir bir özellik, bir nesnenin nicel olarak ifade edilebilen bir karakteristiğidir. Doğru parçalarının uzunluğu, bölgelerin alanı ve fiziksel nesnelerin kütlesi gibi özellikler bu kapsama girer (NCTM, 2000). Ölçme becerisi, basit bir yetenek olarak öğretilmemelidir. Aksine, yıllar içinde yavaşça gelişen, kavramlar ve becerilerin karmaşık bir birleşimidir (Clements ve Stephan, 2004). Öğrenciler, okul öncesi dönemden lise düzeyine kadar olan eğitim sürecinde ilerledikçe, ölçebilecekleri

özelliklerin çeşitliliği ve kapsamı da genişlemelidir. Ölçme becerilerinin gelişiminde ilk adım, nesnelerin ölçülebilir özelliklere sahip olduğunun fark edilmesidir (NCTM, 2000). Bu süreçte öğrencilerin, problem durumuna uygun biçimde birim ve ölçek seçimi yapmayı öğrenmeleri, ölçmenin anlaşılması açısından kritik öneme sahiptir. Örneğin, bir futbol sahasının uzunluğu cm ile ölçülebilse de bu ölçümün pratikte anlamlandırılması ve yorumlanması oldukça güç olabilir. Bu nedenle, öğrencilerin özellikle ilkökul yıllarının sonuna kadar, ölçü birimlerinin rolüne ilişkin makul bir kavrayış geliştirmeleri beklenir (NCTM, 2000). Bu bağlamda öğrencilerin, çeşitli şekillerin uzunluklarına ilişkin tahminlerde bulunarak ölçümler gerçekleştirmeleri ve bu süreçte elde edilen veriler aracılığıyla birimlerin seçimi ve birimler arası dönüşümler üzerine düşünmeleri sağlanmalıdır (MEB, 2024a).

2.4.1. Çevre Uzunluğu

Ölçme öğrenme alanının temel bileşenlerinden biri olan uzunluk ölçme, ilkökul matematik öğretim programında kademeli olarak yapılandırılmış bir biçimde ele alınmaktadır. Bu kapsamda, uzunluk ölçme kavramı birinci sınıftan son sınıfa kadar karmaşık kavram ve becerilerle derinleştirilerek öğretimi sürdürülmektedir (MEB, 2018; MEB, 2024a; NCTM, 2000). Öğrenciler öncelikle kısa kenar uzun kenar gibi temel karşılaştırma terimlerini öğrenmekte, ardından standart ölçme birimlerini kullanarak uzunluk ölçme becerilerini geliştirmektedirler. Bu süreçte, öğrencilerin uzunluğu birimlerle ölçme, ölçüm sonuçlarını karşılaştırma ve uygun ölçme araçlarını seçme gibi becerileri edinmeleri hedeflenmektedir.

En temel tanımıyla uzunluk, bir nesnenin uç noktaları arasındaki mesafenin nicel olarak ifade edilmesidir. Mesafe ise, iki nokta arasındaki boşluğu ifade eder. Ancak, uzunluk ve mesafe ölçümü ile uzunluk ölçümünü öğrenme süreci, bu tanımların ötesinde bilişsel açıdan oldukça karmaşık bir yapı barındırmaktadır (Clements ve Stephan, 2004). Çocukların uzunluk ölçümüne ilişkin öğrenmeleri, birtakım temel kavramlara dayanmaktadır. Bu kavramlar, öğrencilerin fiziksel olarak ölçme etkinliklerini gerçekleştirirken mekânsal düşünme biçimlerini anlamak açısından önemli bir çerçeve sunar. Ölçme sürecini yapılandıran bu kavramlar şunlardır: Bir bütünün eş parçalara ayrılması anlamına gelen bölme (partitioning), bir ölçü biriminin tekrar edilerek kullanılması süreci olan birim tekrarı (unit iteration), uzunluk karşılaştırmaların yapılmasını sağlayan geçişlilik (transitivity) ilkesi, bir nesne hareket ettirildiğinde uzunluğunun değişmediğinin ifade eden korunum (conservation)

kavramı, ölçüm sırasında birimlerin tekrarlanarak yerleştirilmesiyle her sayının o ana kadar kat edilen toplam mesafe birikimi (accumulation of distance) ve ölçme ile sayısal kavramlar arasında ilişki kurma (relation to number) becerisidir. Bu kavramsal çerçeve, öğrencilerin ölçmeye ilişkin anlam yapılarını daha derinlemesine analiz etmede yol gösterici olmaktadır (Clements ve Stephan, 2004).

Çevre, bir bölgenin etrafındaki mesafenin uzunluk ölçüsüdür ve bu özellik gereği toplama işlemiyle hesaplanabilir. Öğrencilerin, kenar uzunlukları verildiğinde çevreyi hesaplayabilmeleri ve eksik kenar uzunluklarını belirleyebilmeleri beklenmektedir (Van de Walle vd., 2015). Çevre kavramı 2018 Matematik Öğretim Programı ve 2024 Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli Matematik Öğretim Programı'nda 3. sınıftan itibaren ele alınmakta ve 8. sınıfa kadar kademeli olarak geliştirilmektedir. Her iki programda da öğrenciler, 3. sınıfta çevre ölçme araçlarını kullanarak uzunluk ve temel geometrik şekillerin çevresini belirlemeye başlarlar. 4. sınıfta ise kare ve dikdörtgenin çevre uzunluğunu formülünü öğrenirler. 2024 müfredatı bu süreçte işlem becerilerinin beraberinde, çevre kavramının günlük yaşamla ilişkilendirilmesini ve problem çözme becerilerinin gelişimini de ön planda tutmaktadır. 5. ve 6. sınıflarda üçgen, yamuk gibi karmaşık şekillerin çevre uzunluğu hesaplanırken, 2024 programı çok adımlı problemler, modelleme ve strateji geliştirme gibi etkinlikleriyle öğrencilerin kavramsal anlayışını derinleştirmeyi hedefler. Her iki programda da 6. sınıflarda çemberin çevre uzunluğu ölçülür, pi sayısının anlamı ve çemberin çevresi ile ilişkisi ön planda tutulur. 8. sınıfta ise silindir gibi 3 boyutlu şekillerin açılımlarını yaparak dikdörtgen üzerinden yükseklik hesaplamaları yapılır. Bu bağlamda, 2018 programı daha çok temel işlem ve ölçme becerilerine odaklanırken, 2024 programı çevre öğretiminde problem çözmeye dayalı bir yaklaşım benimsemektedir (MEB, 2018; 2024a).

2.4.2. Alan

Alan, iki boyutlu bir yüzeyde (düzlemde) sınırlandırılmış bir bölgenin ölçümü olarak tanımlanabilir (Hosch, 2011). Diğer matematiksel kavramlarda olduğu gibi, öğrencilerin ölçme etkinliğinden önce alanın doğasını ve ölçülebilirliğini kavramsal olarak anlamaları gerekmektedir (Van de Walle, vd., 2015). Bir bölgenin alanı, genellikle kare şeklinde tanımlanmış bir birim bölgeyle karşılaştırılarak ve bu karşılaştırma sonucunda sayısal bir değer atanarak belirlenir (Reynolds ve Wheatley, 1996). Nasıl ki bir doğru parçasının uzunluğu, bir birim doğru parçası ile

karşılaştırılarak ölçülebiliyorsa; benzer şekilde, bir çokgenin ya da diğer düzlem şekillerinin alanı da bir birim kare ile karşılaştırılarak ölçülebilir (Hosch, 2011). Alan ölçümü, dört temel varsayıma dayanır: Uygun bir iki boyutlu bölgenin ölçü birimi olarak seçilmesi, eş bölgelerin eşit alana sahip olması, ölçülen bölgelerin birbirleriyle örtüşmemesi ve iki bölgenin birleşiminden oluşan alanın, bu bölgelerin alanlarının toplamına eşit olması (Reynolds ve Wheatley, 1996). Bu doğrultuda, bir bölgenin alanını belirlemek; söz konusu bölgeyi, iki boyutlu ölçü birimleriyle döşemek ya da eş parçalara ayırmak olarak düşünülebilir. Ancak bu türden kavramsal anlayışlar oldukça karmaşıktır ve öğrenciler bu anlayışları zamana yayılan bir süreçte geliştirirler (Clements ve Stephan, 2004).

Alan ölçmeyi öğrenme süreci, öğrencilerin geliştirmesi gereken beş temel kavramsal bileşeni içerir: bölme, birim tekrar etme, koruma, yapılandırılmış dizi oluşturma ve lineer ölçüm (Clements ve Stephan, 2004). Bölme, bir yüzeyin eşit ve örtüşmeyen iki boyutlu birimlere ayrılması sürecidir. Birimlerin tekrarı, öğrencilerin bu birimleri yüzey üzerinde düzenli ve eksiksiz biçimde yerleştirerek alanı anlamlandırmalarını sağlar. Koruma, bir şekil yeniden düzenlense bile alanın değişmediğini kavramayı ifade eder. Yapılandırılmış dizi, birimlerin satır ve sütunlar hâlinde düzenlenmesini ve bu yapıdan alanın belirlenmesini içerir. Lineer ölçüm ise, alanın iki doğrusal boyuttan (örneğin uzunluk ve genişlik) hareketle hesaplanmasını ifade eder. Bu kavramlar, öğrencilerin alanı yalnızca formüllerle değil anlamlı ve yapılandırılmış biçimde öğrenmeleri açısından kritik öneme sahiptir.

Alan ölçülerini karşılaştırmak, uzunluk ölçülerini karşılaştırmaktan daha karmaşık bir kavramsal süreçtir, çünkü alanlar çeşitli şekillerde olabilir (Van de Walle, vd., 2015). Örneğin, uzun ve ince bir dikdörtgen, daha kısa kenarlara sahip bir üçgenden daha küçük bir alana sahip olabilir. Birçok öğrenci, bir şeklin farklı biçimlere dönüştürülmesinin, o şeklin alan miktarını değiştirmedikçe kavramakta güçlük çekmektedir (Van de Walle, vd., 2015). Ayrıca, alan hesaplamalarında kullanılan iki doğrusal ölçümün (örneğin taban ile yüksekliğin) çarpılması yoluyla elde edilen prosedür, kavramsal olarak alan fikrinden oldukça uzaktır (Baturu ve Nason, 1996).

Geometrik bir özelliğin sayısal bir nicelikle ilişkilendirilmesini içeren alan ölçümü, okul matematiğinde kritik öneme sahiptir (Clements ve Stephan, 2004). Ortaokul düzeyinde öğrencilerin ölçme deneyimleri daha da derinleştirilmelidir.

Çünkü, her ne kadar öğrenciler alan ve hacim kavramlarıyla önceden tanışmış olsalar da bu düzeyde birçok öğrencinin, iki boyutlu şekillerin alanı ile üç boyutlu cisimlerin yüzey alanı ve hacmi konularında kavramsal anlamlandırma açısından ek deneyimlere ihtiyaç duyduğu görülmektedir (NCTM, 2000). Özellikle ölçülen şekiller kare, ya da ölçülen nesneler küp biçiminde olmadığında, birçok öğrenci neden alan ölçümünde kare birimlerin, hacim ölçümünde ise kübik birimlerin kullanıldığını kavramakta güçlük çekmektedir. Bu kavramsal temeli yeterince oluşturmada doğrudan formül kullanımına geçmeleri durumunda, öğrencilerin ölçme ile anlamlı ve derinlemesine bir ilişki kurmaları zorlaşabilir (NCTM, 2000).

Alan kavramı, çevre kavramı gibi 2018 ve 2024 Matematik Öğretim Programlarında 3. sınıftan 8. sınıfa kadar kademeli biçimde derinleştirilerek ele alınmaktadır. Her iki programda da öğrenciler, 3. sınıf düzeyinde alanı önce standart olmayan ölçme birimleriyle bölgeyi kaplayarak ölçmeye çalışırlar, ardından 4 sınıf düzeyinde ise kare ve dikdörtgensel bölgelerin alanını standart ölçü birimlerini kullanarak sistematik bir şekilde ölçmeye başlarlar. 5. ve 6. sınıflarda üçgen, paralelkenar ve yamuk gibi daha karmaşık şekillerin alanı hesaplanırken, 7. sınıfta dairenin alanı hesaplanır. Son olarak 8. sınıfta ise prizmaların yüzey alanı gibi karmaşık alan hesaplamaları yapılır. Yukarıda bahsedildiği gibi her iki programda benzer içerikler yer alsa da 2024 öğretim programının π sayısının anlamı, çevre-alan ilişkisi ve gerçek yaşam bağlamlarına daha fazla vurgu yaptığı görülmektedir (MEB, 2018; 2024a).

Literatürde, ilköğretim düzeyindeki öğrencilerin alan kavramında çeşitli kavram yanılgıları yaşadıkları (Gürefe, 2018), alan ve çevre kavramlarının hem kavramsal hem de işlemsel uygulamalarında önemli güçlükler yaşadıkları (Şişman ve Aksu, 2009) ve öğrencilerin çevre hesabı ile alan hesabını sıklıkla karıştırdıkları görülmüştür (Dağlı ve Peker, 2011; Gürefe, 2018). Bunun yanında, alan ölçümü sürecinde öğrencilerin kullandıkları stratejileri inceleyen çeşitli çalışmalar da literatürde yer almaktadır (Huang ve Witz, 2013; Gürefe, 2018).

2.5. İlgili Araştırmalar

Alan yazından yapılan DMY ve APOS ile ilgili çalışmalar incelendiğinde; Ağaçdiken'in (2021) yaptığı nitel araştırmada, 5. sınıf öğrencilerinin alan kavramını ve dikdörtgenin alan formülünü oluşturma süreçleri DMY (GGB) destekli öğretim ortamında incelemiştir. Yapılan araştırmada, öğrencilerin alanı anlamlandırma,

hesaplama ve kavramsal ilişkilendirme süreçleri analiz edilmiştir. Araştırmanın sonucunda, DMY'nin öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini geliştirmedeki rolü vurgulanmaktadır. Ayrıca, hazırlanan genetik çözümleme doğrultusunda bazı öğrencilerin alan kavramını nesne düzeyinde kavramsallaştıramadığı ve kapsülleme sürecinde zorlandıkları görülmüştür. Ek olarak, alan kavramının anlamlandırılmasında birim kavramı ve alan korunumu kavramlarının kavranmasının kritik öneme sahip olduğunu vurgulamaktadır.

Frank ve arkadaşlarının (2022) öğretmen adayları ile yaptığı nicel araştırmada, GGB destekli öğretimin öğrencilerin matematik başarısını ve geometrik düşünme becerilerini artırdığını, özellikle doğrusal programlama konusunu öğrenmeye yönelik motivasyonlarını yükselttiğini göstermektedir. APOS teorisiyle yapılandırılan bu süreçte, öğretmen adayları daha derinlemesine düşünebilmiş ve eleştirel düşünme becerileri gelişmiştir. Araştırma, GGB'nin özellikle öğretmen adayları için etkili bir araç olduğunu ve kaliteli matematiksel öğrenme için güçlü bir temel sunduğunu vurgulamaktadır.

Hsieh ve arkadaşları (2013) tarafından yapılan araştırmada, Geometer's Sketchpad yazılımı kullanılarak üniversite düzeyinde bir öğrencinin doğrusal fonksiyonları öğrenme süreci APOS teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Öğrencinin temel işlemleri gerçekleştirme yeterliliğine sahip olması nedeniyle öğretim süreci, süreç düzeyinden başlatılmıştır. Bu süreçte öğrenci, noktaları koordinat düzlemine yerleştirerek doğrular oluşturabilmiş, eğimin sabitliğini kavrayarak bu kavramı doğrusal denklem oluşturma sürecinde etkili bir şekilde kullanabilmiştir. Sürecin sonunda ise öğrenci, fonksiyonları bağımsız nesneler olarak kavramaya (nesne düzeyi) başlamıştır. Son olarak, doğrusal ilişkileri farklı bağlamlarla ilişkilendirebilmiş ve yeni problem durumları tasarlayarak şemalaştırmıştır. Araştırma, DMY desteğiyle yürütülen öğretim süreçlerinin öğrencilerin doğrusal fonksiyon kavramını anlamalarını ve kavramsal bilgilerini derinleştirmelerini önemli ölçüde desteklediğini ortaya koymaktadır.

Tabaghi ve arkadaşlarının (2009) yaptıkları araştırmada, biri DMY kullanılarak, diğeri ise geleneksel yöntemlerle öğretim gören iki öğrenci grubunun eğimi kavramsallaştırma süreçlerini APOS teorisi çerçevesinde incelemişlerdir. DMY kullanan öğrencilerin, geleneksel eğitim alan öğrencilere nazaran eğitim kavramına ilişkin güçlü kavramsal anlayış geliştirdiklerini ortaya koymuştur. Bu anlayış, eğimi

yalnızca bir işlem (süreç) olarak değil, aynı zamanda kavramsal bir nesne olarak görmelerini ve bu doğrultuda problemleri etkili biçimde çözmelerini mümkün kılmıştır.

DMY ve çember/daire ile ilgili çalışmalar incelendiğinde, Tatar ve arkadaşları (2014)'nın, DMY kullanılarak yapılan geometri öğretiminin ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının çemberin analitik incelenmesi konusundaki başarılarına etkisini inceleyen ve öğretmen adaylarının bu öğretim sürecine ilişkin görüşlerini ortaya koyan araştırmasında dinamik ortamda yapılan öğretimin, çemberin analitik incelenmesi konusunda öğretmen adaylarının başarılarına olumlu yönde katkı sağladığını gösterilmiştir. Ayrıca, öğretmen adayları dinamik ortamda geometri öğretiminin düşünme becerilerini geliştirme, görsellik, kalıcı öğrenme, kısa sürede öğrenme, somutlaştırma ve öğrencinin dikkatini toplama gibi olumlu etkiler sağladığını belirtmişlerdir.

Topuz ve Birgin (2020) tarafından gerçekleştirilen nicel çalışmada, yedinci sınıf çember ve daire konusunun öğretimine yönelik geliştirilen GGB destekli öğretim materyali ve öğrenme ortamına ilişkin öğrenci görüşleri incelenmiştir. Araştırmanın sonuçları, GGB destekli öğretim materyalinin öğrencilerin öğrenmesini kolaylaştırdığını, görsel olarak zihinsel canlandırmayı güçlendirdiğini, günlük yaşamla ilişkilendirme becerilerini desteklediğini ve daha kolay çizimler yapma ile keşfetme fırsatı sunduğunu ortaya koymuştur. Bu bağlamda, DMY'lerin ortaokul düzeyindeki matematik öğretiminde etkili bir araç olduğunu göstermektedir.

Keskin (2019) tarafından yapılan çalışmada, teknoloji destekli öğretim etkinliklerinin 5E öğrenme modeli çerçevesinde matematik öğretimine entegrasyonu değerlendirilmiştir. Araştırmada özellikle çember ve daire konusuna odaklanılmış ve bu konuya yönelik geliştirilen teknoloji destekli etkinliklerin, lise düzeyindeki öğrencilerin kavramsal anlamalarını nasıl etkilediği araştırılmıştır. DMY'leri ile desteklenen süreçte, öğrencilerin konuyu daha derinlemesine kavradıkları ve daha kalıcı öğrenmeler gerçekleştirdikleri sonucuna ulaşılmıştır.

Tan ve arkadaşlarının (2020) ortaokul öğrencileri ile yaptığı çalışmada, DMY'lerinin (Hawgent yazılımı) özelliklerinden faydalanılarak dairenin alan formülü etkileşimli bir şekilde görselleştirilmiş, böylece öğrencilerin dairenin alanı ile ilgili kavramları daha iyi anlamaları sağlanmıştır. Dairenin alanının ispatı için geometrik bir yaklaşım benimsenmiş ve daire dilimlerine ayrılarak bir dikdörtgen şeklinde

düzenlenmesi ile alan formülüne nasıl ulaşıldığı etkileşimli bir şekilde gösterilmiştir. Hawgent yazılımının bu tür matematiksel kavramların öğretiminde güçlü bir araç olabileceği vurgulanmış, bu yöntemlerin öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini geliştirmede etkili olduğu belirtilmiştir.



3. YÖNTEM

Bu bölümde, araştırmanın türü ve deseni, araştırmanın tasarımı ve yürütülmesi, pilot çalışma, katılımcılar, veri toplama araçları, öğretim ortamı, verilerin analizi ve araştırmanın geçerlilik ve güvenilirliği hakkında bilgi verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Türü ve Deseni

Bu araştırma, 6. sınıf öğrencilerinin çember ve temel elemanları (çember, merkez nokta, yarıçap, çap ve daire), çemberin çevre uzunluğu formülü ve dairenin alan formülünü nasıl oluşturduklarını incelemeyi amaçlayan nitel bir araştırmadır. Araştırmada, öğrencilerin kavram oluşum süreçleri çoklu veri kaynakları (gözlemler, görüşmeler ve öğrenci çalışma kağıtları) aracılığıyla derinlemesine incelenerek, elde edilen veriler nitel olarak analiz edilmiştir. Bu yönüyle çalışma, belirli bir grup ya da olgunun kendi bağlamı içerisinde ayrıntılı biçimde incelenmesine olanak sağlayan ve nitel araştırma desenlerinden biri olan *durum çalışması* (case study) niteliğindedir. Araştırma soruları, mevcut bir olgunun işleyişini açıklamaya yönelikse (örneğin, belirli bir toplumsal olgunun “nasıl” ya da “neden” meydana geldiğini anlamaya çalışıyorsa), durum çalışması yöntemi bu tür sorular için uygun bir araştırma yaklaşımı sunar. Bununla birlikte, araştırma sorularının belirli bir olguyu kapsamlı ve derinlemesine betimlemeyi gerektirdiği durumlarda da durum çalışması yöntemi yerinde bir tercih olacaktır (Yin, 2014). Araştırmada incelenen kavram ve formüller 6. sınıf düzeyinde ele alınmış ve öğretim ortamı GGB destekli tasarlanmıştır. Kavram oluşum süreçleri APOS teorik çerçevesinde derinlemesine incelendiğinden araştırmada APOS teorik çerçevesi durum olarak ele alınmıştır.

3.2. Araştırma Tasarımı ve Yürütülmesi

Bu araştırmada ilk olarak, araştırmanın yürütüleceği sınıf düzeyi belirlenmiştir. Ardından, APOS teorisi çerçevesinde uygun genetik çözümlemeler hazırlanmış ve bu genetik çözümlemelere dayalı olarak öğretim sürecini oluşturan ders planları, etkinlikler ve problemler geliştirilmiştir. Öğrencilerin söz konusu kavramları oluşturabilmeleri için sahip olmaları gereken ön bilgi düzeylerini belirlemek amacıyla bir hazırbulunuşluk testi geliştirilmiştir. Öğretim süreci ve hazırbulunuşluk testi tasarlandıktan sonra, araştırmanın geçerliğini ve uygulanabilirliğini değerlendirmek üzere pilot bir çalışma gerçekleştirilmiştir. Pilot uygulamadan elde edilen bulgular doğrultusunda, asıl uygulama süreci yeniden gözden geçirilerek planlanmıştır. Çalışma takvimi Tablo 3.1’de ayrıntılı bir şekilde sunulmaktadır.

Tablo 3. 1. Çalışma Takvimi.

Dönem	Tarih	Yapılan Çalışmalar
2024-2025 Güz Dönemi	Haziran 2023-Nisan 2024	Ders ortamının, veri toplama araçlarının, genetik çözümlemelerin, görüşme sorularının hazırlanması ve uzman görüşlerinin alınması.
		Pilot çalışmanın ve araştırmanın yapılacağı okulun belirlenmesi
2024-2025 Bahar Dönemi	18/04/2024-29/04/2024	Pilot çalışmanın yapılması
	29/04/2024-06/05/2024	Veri toplama araçlarının revize edilmesi
	06/05/2024-15/05/2024	Asıl uygulamanın yapılması

3.3. Pilot Çalışma

Asıl çalışmaya başlamadan önce, araştırmacının veri toplama becerisini geliştirmesi, olası aksaklıkların önüne geçilmesi ve çalışmanın geçerlik ve güvenilirliğinin artırılması amacıyla bir pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu pilot çalışmayla birlikte, APOS teorisinin uygulama sürecindeki etkinliği, teorisinin sunduğu avantajlar ve karşılaşılabilecek sınırlılıklar değerlendirilmiş, varsa eksiklikler belirlenerek giderilmesine katkı sağlanabileceği düşünülmüştür.

Pilot çalışma, asıl çalışmanın yürütüleceği okuldan farklı bir ortaokulun 6. sınıf şubesinde yürütülmüştür. Çalışmaya başlanmadan önce, 24 öğrenciden oluşan sınıf için velilerden veli onam formu aracılığıyla izin alınmıştır. Öğrencilerin çember ve temel elemanları (çember, merkez, yarıçap, çap), daire, çemberin çevre uzunluğu formülü ve dairenin alan formülü kavramlarının oluşturabilmeleri için sahip olmaları gereken ön bilgi düzeyini belirlemek amacıyla, veri toplama araçlarında belirtilen ve Ek 2’de son hâli verilen hazırbulunuşluk testi uygulanmıştır. Pilot çalışma sürecinde bu testin eksiklikleri belirlenmiş ve düzenlemeler yapılarak testin nihai hali oluşturulmuştur.

Hazırbulunuşluk testi sonuçları ve ilgili sınıfta görev yapan matematik öğretmenin görüşleri doğrultusunda, farklı hazırbulunuşluk düzeylerine sahip üç öğrenci bireysel görüşmelere alınmıştır. Bu doğrultuda, görüşmeye seçilen katılımcılar amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örnekleme ile belirlenmiştir.

Böylece maksimum çeşitlilik örnekleme ile çeşitlilik sağlanarak evrene genelleme yapmak değil, çeşitlilik gösteren durumlar arasında ne tür ortaklıkların veya benzerliklerin var olduğunu bulmak amaçlanmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Bu çeşitlilik, öğrencilerin sahip olduğu farklı hazırbulunuşluk düzeylerine dayalı olarak sağlanmıştır.

Pilot çalışma sonuçları dikkate alındığında, başlangıçta 7 ders saati olarak planlanan öğretim süreci 9 saate çıkarılmış ve bu kapsamda öğretim sürecine Etkinlik 4 eklenmiştir. Ek iki ders saatinin gerekçesi, gerçek yaşam bağlamında problem durumları ve değerlendirme soruları için bir ders saatinin yetersiz kalacağının ve etkinliklerin uygulanırken olası aksaklıkların olabileceğinin pilot uygulamada görülmesidir. Ayrıca, Etkinlik 4'ün eklenme nedeni, Etkinlik 3'ün daire kavramının yapılandırılmasına yeterince olanak tanımayabileceği öngörüsüdür. Buna ek olarak, bazı GGB etkinliklerinde tespit edilen teknik aksaklıklar giderilmiş ve etkinliklerde küçük düzenlemeler yapılmıştır. Pilot çalışma sürecinde yapılan bireysel görüşmeler ışığında hem genetik çözümlemelerde hem de bu çözümlemelere uygun şekilde hazırlanan görüşme sorularında çeşitli revizyonlara gidilmiştir. Yapılan düzenlemeler doğrultusunda, daire kavramı için yeni bir genetik çözümleme oluşturmak yerine, çember nesnesinin kapsülden çıkarılarak farklı koordinasyonlarla daire nesnesine ulaşmasını içeren düzenlemeye gidilmiştir. Bireysel görüşme (1) kapsamında, öğrenciden derste çizilen çemberi tekrar çizmesi istenmiş, bu sürece çap ve yarıçap çizimlerinin de dâhil edilmiştir. Ayrıca, ilgili kavramların tüm genel durumlara genellenmesini hedefleyen yeni sorular da görüşme formlarına eklenmiştir.

Araştırmacı, pilot çalışma sayesinde sınıf içi uygulamalarda ve bireysel görüşmelerde öğrencilerle daha etkili iletişimi nasıl kurulabileceği, öğrencilerin kavram oluşturma süreçlerinin nasıl açığa çıkarılabileceği konusunda önemli deneyimler kazanmıştır. Son olarak, çalışmada yer alan etkinliklerin, problemlerin ve konu değerlendirme testlerinin amaca uygunluğu da pilot uygulama sürecinde test edilerek değerlendirilmiş ve bu doğrultuda asıl uygulamada kullanılmalarına karar verilmiştir.

3.4. Katılımcılar

Araştırma, Karadeniz Bölgesi'nde yer alan büyük bir ilde, Millî Eğitim Bakanlığı'na bağlı bir devlet okulunda öğrenim gören 6. sınıf öğrencileriyle yürütülmüştür. Okul ve sınıf seçimi, amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt

örnekleme yoluyla gerçekleştirilmiştir. Ölçüt örnekleme, araştırmacı tarafından önceden belirlenen bir dizi ölçütü karşılayan tüm durumların incelenmesine dayanan bir amaçlı örnekleme yöntemidir. Bu durumda kullanılacak ölçüt ya da ölçütler, araştırmacının kendisi tarafından belirlenebileceği gibi, önceden var olan bir ölçüt listesinden de yararlanılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Bu bağlamda, çalışmanın DMY destekli bir öğretim süreci içermesi nedeniyle, okulun akıllı tahta donanımına sahip olması ve internet erişiminin bulunması öncelikli ölçütler arasında yer almıştır. Sınıf düzeyinde ise, öğrencilerin akademik başarı açısından heterojen bir dağılıma sahip olmaları, sınıf içi etkileşimlerinin yüksek düzeyde olması ve öğrencilerin kendilerini sözlü olarak ifade edebilme yeterliliklerinin bulunması sınıf seçimi için belirlenen diğer önemli ölçütlerdir.

Araştırmanın katılımcıları, amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örnekleme ile belirlenmiştir. Bu örnekleme yöntemi, araştırma konusu olan kavramsal gelişim sürecini farklı hazırbulunuşluk düzeylerine sahip bireyler üzerinden çok yönlü olarak inceleme olanağı sağladığı için tercih edilmiştir. Böylece, öğretim sürecinin farklı yeterlilik düzeylerindeki öğrenciler üzerindeki etkileri karşılaştırmalı olarak değerlendirilebilmiştir. Farklı bilişsel düzeylerdeki öğrencilerin deneyimlerini incelemek, araştırmanın kapsamını genişletmiş ve sonuçların geçerliliğini artırmıştır. Bu bağlamda, 27 kişilik sınıfa uygulanan hazırbulunuşluk testi sonuçları, sınıf öğretmenlerinin görüşleri ve araştırmacının süreç boyunca gerçekleştirdiği sınıf içi gözlemlerle birlikte değerlendirilmiş; bu veriler doğrultusunda iyi, orta üstü, orta, orta altı ve düşük düzeylerde beş katılımcı seçilmiştir. Bu katılımcılarla bireysel görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

Aleyna, Ahmet, Berna, Mert ve Bilge rumuzları verilen katılımcılar, yalnızca hazırbulunuşluk düzeylerine göre değil, aynı zamanda güçlü iletişim becerilerine sahip olmaları ve öğretmen ile araştırmacı gözlemlerinde öne çıkmaları temelinde seçilmiştir. Ayrıca, öğrencilerin hazırbulunuşluk testinden aldıkları puanlara ek olarak, testte yer alan açık uçlu sorulara verdikleri yanıtların özgünlüğü, açıklayıcılığı ve dikkat çekiciliği de seçim sürecinde dikkate alınmıştır. Böylece, yalnızca nicel başarı değil, kavramsal düşünme düzeyi ve ifade yetisi de örnekleme sürecinde önemli rol oynamıştır. Öğrencilerin hazırbulunuşluk testi sonuçlarına ilişkin bilgiler Tablo 3.2’de sunulmuştur.

Tablo 3. 2. Katılımcıların hazırbulunuşluk testinden aldıkları sonuçlar.

Katılımcılar	Cinsiyet	Doğru / Eksik / Yanlış cevap sayısı	Düzyey
Aleyna	Kız	15 / 3 / 0	İyi
Ahmet	Erkek	13 / 1 / 4	Orta üstü
Berna	Kız	12 / 1 / 5	Orta
Mert	Erkek	11 / 1 / 6	Orta altı
Bilge	Kız	8 / 1 / 9	Düşük

Aleyna'nın hazırbulunuşluk testinde yer alan 18 sorunun tamamına yakını doğru çözebildiği gözlemlenmiştir. 8. soruyu çözerken, iki farklı üçgenin alanını doğrudan hesaplamak yerine, üçgenleri bir karesel bölgeye yerleştirip dışta kalan bölgelerin alanlarını çıkararak sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Ancak bu yöntem sırasında bazı hesaplama hataları yaparak doğru sonuca ulaşamamıştır. Bununla birlikte, söz konusu soruya bu denli yaklaşabilen başka bir katılımcı olmamıştır. 9. soruda ise bir kenarı gözden kaçırdığından ötürü sonuca ulaşamamıştır. 17. soruda dikdörtgenin çevresini doğru şekilde belirlemesine rağmen, gerekli olan oranlama işlemini gerçekleştirmemiştir. Bu durumun dikkatsizlikten kaynaklandığı düşünülmektedir. Sınıf içi gözlemler Aleyna'nın derse aktif katılım sağladığını ve düşüncelerini ifade etmekten çekinmeyen bir profil sergilediğini göstermektedir. Tüm bunlar ışığında, Aleyna'nın düzeyi "iyi" olarak değerlendirilmiştir.

Ahmet, hazırbulunuşluk testinden 13 doğru, 1 eksik ve 4 yanlış şeklinde cevaplayarak "orta üstü" düzeyde bir başarı sergilemiştir. 7. soruda, alan hesaplaması yapması gerekirken çevreyi hesaplamaya çalıştığı için doğru sonuca ulaşamamıştır. 8. soruda ise, Aleyna'nın benimsediği stratejiye benzer şekilde karesel bölgelere ayırma yöntemiyle çözüm üretmeye çalışmış, ancak bu bölgeleri net bir biçimde ayırt edemediği için soruyu tamamlayamamıştır. Karmaşık çevre hesaplama içeren 9. soruyu da yanlış çözmüştür. Bunun yanı sıra, alan korunumunu ve uzunluk ölçülerinin dönüşümünü içeren 11. ve 13. soruları ise yanıtsız bırakmıştır. Sınıf içi gözlemler doğrultusunda Ahmet'in derse yeterli düzeyde katılım sağladığını ve kendini ifade etmede herhangi bir zorluk yaşamadığını belirlenmiştir. Nitekim, bireysel görüşmelerde verdiği yanıtları ayrıntılı biçimde açıklamış ve kendini en iyi ifade eden katılımcılardan biri olmuştur.

Berna, hazırbulunuşluk testinden 12 doğru, 1 eksik ve 5 yanlış yanıt vererek “orta” düzeyde bir başarı göstermiştir. 3. soruda, çevresi 40 cm olan bir dikdörtgeni doğru bir şekilde çizmiş, ancak alanı toplama yoluyla hesaplamaya çalışarak 40 sonucuna ulaşmış ve bu nedenle yanlış bir çözüm üretmiştir. Taban uzunlukları aynı olan iki farklı üçgenin alanlarını hesaplamaya yönelik 8. soruyu, karmaşık çevre hesaplaması içeren 9. soruyu ve uzunluk ölçülerinin dönüşümüne ilişkin 13. soruyu yanlış yanıtlamıştır. 16. soruda, 5’in karesini doğru hesaplamış olmasına rağmen, 3’ün karesini 2 ile çarparak yanlış bir sonuç elde etmiştir. 17. soruda ise oranlama işlemi yerine toplama yaparak hatalı bir çözüme ulaşmıştır. Sınıf içi gözlemler doğrultusunda, Berna’nın derse en aktif katılım sağlayan öğrencilerden biri olduğu ve düşüncelerini açıkça ifade etmekte tereddüt etmediği belirlenmiştir. Her ne kadar genel başarı düzeyi Ahmet ile benzer görünse de Berna’nın özellikle karmaşık problem çözme süreçlerinde Ahmet kadar başarılı akıl yürütmeler gerçekleştiremediği göz önünde bulundurularak düzeyi “orta” olarak değerlendirilmiştir.

Mert, hazırbulunuşluk testindeki sorularda 11 doğru, 1 eksik ve 6 yanlış yapmıştır. Özellikle üçgenin alan bağıntısına ilişkin 4., 5., 6. ve 8. sorularda hatalı yanıtlar vermiştir. 8. soru dışında, üçgenin alanını hesaplarken “taban $\times$ yükseklik” formülünü sistematik bir şekilde uygulayarak hatalı sonuca ulaştığı gözlemlenmiştir. Karmaşık çevre hesaplaması gerektiren 9. soruda ise dikkatsizlik nedeniyle bir kenarı hesaba katmamış ve bu nedenle doğru sonuca ulaşamamıştır. 10. soruda sonuca yaklaşamamış, alan korunumunu ölçmeye yönelik 11. soruyu da yanlış yanıtlamıştır. Sınıf içi gözlemlerde, Mert’in genellikle sessiz ve kendi halinde bir profil sergilediği, ancak yönlendirmeler doğrultusunda verilen komutları yerine getirdiği ve gerektiğinde sorulara yanıt vermeye çalıştığı belirlenmiştir. Ancak, dairenin alan formülünün temeli olan üçgensel bölgenin alanını hesaplama ve alan korunumuna ilişkin temel kavramlarda belirgin eksiklikler göstermesi nedeniyle, Berna’nın gerisinde kalarak “orta altı” düzeyde değerlendirilmiştir.

Bilge, hazırbulunuşluk testinden 8 doğru, 1 eksik ve 9 yanlış yanıt vererek “düşük” düzeyde bir başarı sergilemiştir. 3. soruda çevresi verilen bir dikdörtgeni hatalı şekilde oluşturmuştur. 4. soruda birim karelerden oluşan üçgensel bölgenin alanını hesaplayamamış, ancak 5. sorudaki üçgensel bölgenin alanını doğru şekilde belirlemiştir. Daha karmaşık yapıya sahip üçgensel bölgelerin alanını hesaplamaya yönelik 6. ve 8. soruları doğru yanıtlayamamıştır. Benzer şekilde, 7. sorudaki birim

karelere dayalı alan hesaplamasını da gerçekleştirememiştir. Karmaşık çevre hesaplaması gerektiren 9. soru ile akıl yürütme becerisi gerektiren 10. soruyu da yapamamıştır. Alan korunumunu içeren 11. soruyu ve uzunluk ölçülerinin dönüşümüne ilişkin 13. soruyu da yanlış yanıtlamıştır. Bunun yanı sıra, Aleyna’da da gözlemlenen benzer bir durum olarak, 17. soruda dikdörtgenin çevresini doğru belirlemiş ancak oranlama işlemini gerçekleştirmediği için doğru cevaba ulaşamamıştır. Bu da dikkatsizlikten kaynaklandığı düşünülmektedir. Sınıf içi gözlemler Bilge’nin başarı düzeyinin düşük olduğunu göstermektedir. Ancak bazı durumlarda araştırmacının yönlendirmesiyle ders sürecine dâhil olabildiği gözlemlenmiştir. Ayrıca, bireysel görüşmeler sırasında sahip olduğu bilgileri, doğru olmasa dahi, ifade etmekten çekinmeyen bir tutum sergilemiştir. Tüm bu bulgular doğrultusunda, Bilge “düşük” düzeyde değerlendirilmiştir.

3.5. Veri Toplama Araçları

Bu araştırmada kullanılan veri toplama araçları; hazırbulunuşluk testi, sınıf içi gözlemler, ders sürecinde çözülen konu değerlendirme testleri, gerçek yaşam problem durumlarını içeren çalışma kâğıtları, bireysel görüşmeler sırasında kullanılan bireysel çalışma kâğıtlarıyla bu görüşmelerden elde edilen sesli ve yazılı verilerden oluşmaktadır.

Hazırbulunuşluk testi: Bu test, öğrencilerin *çember, merkez nokta, yarıçap, daire kavramları ile çemberin çevre uzunluğu formülü ve dairenin alan formülünü* öğrenmeleri için gerekli olan ön bilgileri ne ölçüde edindiklerini belirlemek amacıyla öğretim sürecine başlamadan önce hazırlanmıştır. Hazırbulunuşluk testi, toplam 18 sorudan oluşmaktadır. Bu soruların 14’ü açık uçlu, 2’si boşluk doldurma, 2’si çoktan seçmeli türündedir (Ek 2.). Testin kapsamı, öğrencilerin aşağıdaki temel matematiksel kavram ve işlemlere yönelik ön bilgi düzeylerini ölçmeyi hedeflemektedir:

- Geometrik şekilleri kenar ve köşe sayılarına göre sınıflandırma,
- Temel şekillerin (kare, dikdörtgen, üçgen) çevre uzunluklarını hesaplama,
- Şekillerin alanlarını birim kareler üzerinden belirleme,
- Kare ve dikdörtgenin çevre uzunlukları ile kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi kurma,
- Üslü ifadeler (bir doğal sayının karesi ve küpü) oluşturma ve hesaplama,
- Doğru ve doğru parçasını tanıma ve açıklama,
- Uzunluk ölçme birimlerini tanıma ve birimler arası dönüşüm yapabilme,

- Oran kavramı ve aynı ya da farklı birimlerdeki çoklukları karşılaştırma,
- Üçgenin alan bağıntısını oluşturma,
- Alan ölçme birimlerini tanıma ve kullanmadır (Ek 1).

Testin kapsam geçerliliğini sağlamak amacıyla, üç alan uzmanı (matematik öğretmeni) ve bir matematik eğitimcisi öğretim üyesi test maddelerini incelemiş ve içerik doğruluğu, ölçme yeterliliği ve anlaşılabilirlik bakımından geribildirimde bulunmuşlardır. Uzman görüşleri doğrultusunda düzenlemeler yapılmıştır. Revize edilen bu soruların yer aldığı test, öğretim sürecinden önce pilot çalışmada uygulanmıştır. Pilot çalışma sonucunda elde edilen bulgular ışığında bazı soruların öğrenciler tarafından daha açık ve doğru anlaşılabilmesi amacıyla gerekli düzenlemeler yapılmış ve testin nihai versiyonu oluşturulmuştur.

Gözlemler: Araştırma sürecinde incelenen durumun objektif biçimde gözlemlenip kaydedilmesi, elde edilen bulguların güvenilirliği açısından büyük önem taşımaktadır. Gözlemsel veriler, araştırma konusuna ilişkin ek ve tamamlayıcı bilgiler sağlaması bakımından önemli bir kaynak niteliğindedir. Örneğin, bir durum çalışmasının odağında yeni bir teknoloji ya da okul müfredatı yer alıyorsa, söz konusu teknoloji ya da müfredatın uygulama sürecine ilişkin gerçekleştirilen gözlemler, bu uygulamaların gerçek bağlamdaki işleyiş biçimlerini ve karşılaşılan olası sorunları derinlemesine anlamada son derece kıymetli veriler sunmaktadır (Yin, 2014). Bu doğrultuda, araştırmacı sınıf içi öğretim süreçlerinde doğrudan öğretmen rolünü üstlenmiş, aynı zamanda verilerin kayıt altına alınmasını sağlamak amacıyla iki farklı kamera sistemi kullanmıştır. Biri sabit açılı bir profesyonel kamera, diğeri ise hareketli çekim yapılabilen bir mobil cihaz (telefon) aracılığıyla kayıt yapılmıştır. Elde edilen video ve ses kayıtları, araştırmacı tarafından sonradan gözlemci rolüyle defalarca izlenmiş ve bu süreçte öğrencilerin sınıf içi etkinliklere, öğretmen yönlendirmelerine ve birbirlerine verdikleri tepkiler sistematik olarak analiz edilmiştir. Özellikle öğrenciler arası etkileşimler, kavramsal açıklamalar, anlık yorumlar ve tartışmalar, sınıf içi öğrenme ortamının dinamiklerini yansıtacak şekilde ayrıntılı biçimde değerlendirilmiştir. Bu çok yönlü gözlem süreci, yalnızca öğretim anındaki davranışları anlamakla sınırlı kalmayıp, aynı zamanda katılımcıların seçimi ve görüşme sürecine hazırlık açısından da önemli katkılar sunmuştur. Öğrencilerin öğretim süreci boyunca sergiledikleri düşünme yolları, kavramsal tepkileri ve katılımları göz önünde bulundurularak görüşme katılımcıları belirlenmiş ve bu

öğrencilerle yapılan bireysel görüşmelerde elde edilen veriler, önceki gözlemlerle ilişkilendirilerek daha derinlemesine ve bütüncül analizler yapılmasına olanak sağlanmıştır.

Bireysel Görüşmeler ve Öğrencilerin Görüşmelerdeki Çalışma Kağıtları: Durum çalışmasının verilerinin en önemli kaynaklarından biri görüşmedir (Yin, 2014). Bu çalışmada, araştırılan konuya ilişkin farklı boyutları ortaya çıkarabilmek, katılımcıların düşünme süreçlerini derinlemesine inceleyebilmek ve daha nitelikli veriler elde edebilmek amacıyla yarı yapılandırılmış görüşme tekniği kullanılmıştır. Bu teknik, araştırmacının önceden belirlenmiş sorularla birlikte gerektiğinde sürece müdahale edebilmesini ve katılımcıdan daha detaylı bilgi alabilmesini sağlaması bakımından nitel araştırmalarda sıkça tercih edilmektedir. Görüşmeci, önceden hazırlanan soru formuna bağlı kalarak temel soruları yöneltmekle birlikte, katılımcının yanıtlarını derinleştirmek amacıyla duruma uygun ek sorular da sorabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Görüşme sürecinde yöneltilecek açık uçlu sorular, katılımcının düşüncelerini serbestçe ifade edebilmesine olanak tanımıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmelerin bir diğer avantajı da yalnızca sözel ifadelerle değil, katılımcıların sözel olmayan davranışlarının da (jest, mimik, işaret etme vb.) kayıt altına alınabilmesi ve bu sayede daha zengin bir veri seti oluşturulabilmesidir. Bu bağlamda, görüşme sürecinde elde edilen veriler, sadece konuşma içerikleriyle sınırlı kalmayıp, katılımcıların etkileşimleri ve davranışlarıyla birlikte çok boyutlu olarak değerlendirilmiştir. Formların kapsam geçerliliğini sağlamak amacıyla, üç matematik öğretmeni ve matematik eğitimcisi öğretim üyesi ile uzman görüşmeleri yapılmış ve alınan geribildirimler doğrultusunda düzenlemeler gerçekleştirilmiştir.

Araştırmada, beş katılımcıyla her biri için üçer görüşme olmak üzere toplam 15 bireysel görüşme yapılmıştır. Görüşmeler, öğrencilerin dikkatinin dağılmaması ve kendilerini rahatça ifade edebilmeleri amacıyla okulun kütüphane veya boş sınıf gibi sessiz ve uygun ortamlarda gerçekleştirilmiştir. Görüşmeler öncesinde, ilgili kurumdan (Ek 23 ve Ek 24) ve öğrenci velilerinden gerekli izinler alınmıştır (Ek 22). Ayrıca görüşme öncesinde öğrencilere, görüşmelerin bir sınav niteliği taşımadığı, karne notlarını etkilemeyeceği ve elde edilen verilerin gizli tutulacağı açıkça ifade edilmiştir. Böylece katılımcıların sürece güvenle katılmaları ve kendilerini özgürce ifade edebilmeleri amaçlanmıştır.

Ses kayıtları, görüşme içeriklerini yalnızca not almaya kıyasla çok daha doğru biçimde yansıtmaya avantajı sunmaktadır (Yin, 2014). Bu nedenle, görüşme sürecinde veri kaybını en aza indirmek amacıyla iki farklı yöntemle kayıt alınmıştır. Bunlardan ilki mobil bir cihaz (telefon) ile video kaydı yapılması, diğeri ise süreci daha ayrıntılı kayıt alabilen bir profesyonel kamera ile yapılan kayıttır. Görüşmeler sırasında öğrencilere, sorulara yazılı olarak da yanıt verebilmeleri amacıyla bireysel çalışma kâğıtları verilmiş ve bu kâğıtlar görüşme sonunda toplanarak dokümantasyon sağlanmıştır. Katılımcıların bu kâğıtlar üzerinde yaptıkları çizimler, işaretlemeler veya parmakla gösterdikleri ifadeler de kameralar aracılığıyla ayrıntılı biçimde kaydedilmiştir. Böylece öğrencilerin sözel, yazılı ve görsel ifadeleri bir arada değerlendirilerek çok yönlü ve derinlemesine veri elde edilmesi hedeflenmiştir. Araştırma kapsamında gerçekleştirilen bireysel görüşmeler, öğretim sürecinde yapılandırılan genetik çözümlemeler doğrultusunda planlanmış ve her biri belirli kavram gruplarının öğrenciler tarafından nasıl yapılandırıldığını ortaya koymayı amaçlamıştır.

Birinci bireysel görüşme (Ek 16), Etkinlik 1 ve Etkinlik 2 kapsamında geliştirilen ön genetik çözümleme doğrultusunda gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmede, katılımcıların çember ve temel elemanları ile daire kavramlarını nasıl yapılandırdıkları derinlemesine incelenmiştir. Öğrencilerin öğretim süreci boyunca gerçekleştirdikleri eylemler, oluşturdukları yapılar ve kavramsallaştırma süreçleri detaylı olarak analiz edilmiştir. Aynı görüşmede, Etkinlik 3 ve Etkinlik 4 bağlamında yine ön genetik çözümleme temel alınarak katılımcıların daire kavramına ilişkin oluşum süreçleri değerlendirilmiştir. Bu doğrultuda, çember ve daire kavramlarının birbirleriyle ilişkili olarak nasıl yapılandırıldığı incelenmiştir.

İkinci bireysel görüşme (Ek 17), Etkinlik 5 ve Etkinlik 6 kapsamında geliştirilen ön genetik çözümleme temel alınarak gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmede, öğrencilerin çemberin çevre uzunluğu formülünü nasıl yapılandırdıkları ve bu formüle ulaşırken gerçekleştirdikleri bilişsel süreçler ayrıntılı biçimde analiz edilmiştir. Özellikle, öğrencilerin sabit oran kavramına nasıl ulaştıkları ve bu oranı çevre hesaplaması bağlamında nasıl yorumladıkları değerlendirilmiştir.

Üçüncü bireysel görüşme ise (Ek 18), Etkinlik 7 ve Etkinlik 8 kapsamında geliştirilen ön genetik çözümleme temel alınarak gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmede, öğrencilerin dairenin alan formülünü nasıl yapılandırdıkları ve bu formüle ulaşırken

gerçekleştirdikleri bilişsel süreçler analiz edilmiştir. Özellikle, öğrencilerin birim karelerle yaklaşık alan hesaplamaya çalışmaları ve ardından daireyi üçgensel bir yapıya dönüştürerek alan hesaplamaları süreci değerlendirilmiştir. Bu dönüşümde, çemberin çevresinin üçgenin tabanı, yarıçapın ise yüksekliği olarak kullanılması yoluyla öğrencilerin alan formülüne ($A = \pi r^2$) nasıl ulaştıkları incelenmiştir. Dolayısıyla bu görüşmede, öğrencilerin çemberin çevresi ile dairenin alanı arasındaki ilişkiyi kurabilme, bu ilişki üzerinden formül geliştirme ve bunu nasıl ifade ettikleri değerlendirilmiştir.

3.6. Öğretim Ortamı

Bu araştırmada öğretim süreci, DMY'ların sunduğu olanaklar dikkate alınarak planlanmış ve uygulanmıştır. Süreçte, bilgisayar ortamı öğretici bir araç olarak kullanılmış ve öğrencilerin kavramsal öğrenmelerini desteklemek amacıyla GGB yazılımı temel alınmıştır. GGB ortamında hazırlanan etkinlikler, öğrencilere sınıf içi öğretim sürecinde inceleyebilecekleri şekilde sunulmuştur. Bu etkinlikler aracılığıyla öğrenciler, yazılım üzerinde gözlemler yaparak ve yönlendirmelere dayalı komutları yerine getirerek ilgili kavramları yapılandırmaya yönelik süreçlerde bulunmuşlardır.

Öğrenilecek kavramların daha kolay anlaşılmasını sağlamak amacıyla, toplam 8 farklı etkinlik hazırlanmıştır. Bunların 6 tanesi GGB destekli dinamik etkinliklerden oluşmaktadır. Kavram oluşumu incelenen ilgili kavramlar, Milli Eğitim Bakanlığı'nın (MEB, 2018) matematik öğretim programında yer alan 4 kazanım içerisinde yer almaktadır.

Bu kapsamda, öğrencilerin çemberin temel elemanlarını tanımlarına yönelik olarak M.6.3.3.1 kazanımında, çember çizimiyle birlikte merkez, yarıçap ve çap kavramlarının öğretimi hedeflenmektedir. Çemberin uzunluğu ile çapı arasındaki ilişkinin fark edilmesine yönelik ölçüm temelli uygulamalar M.6.3.3.2 kazanımında yer almaktadır. Çapı veya yarıçapı verilen bir çemberin çevresini hesaplamaya yönelik problem çözme becerisi ise M.6.3.3.3 kazanımı doğrultusunda geliştirilmektedir. Dairenin alanına ilişkin kavramsal yapı ise 7. sınıf düzeyinde yer almakta olup, araştırmanın kapsamı gereği yalnızca dairenin alanı dikkate alınmıştır. Bu doğrultuda, M.7.3.3.3 kazanımı kapsamında öğrencilerin dairenin ve daire diliminin alanını hesaplamaları beklenmekte, merkez açı ile daire dilimi arasındaki ilişki ise oran kavramı bağlamında ele alınmaktadır.

İncelenen kavramların öğretimi, 2024 Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli kapsamında güncellenen Matematik Öğretim Programı'nda da yer almaktadır (MEB, 2024a). Buna göre, 5. sınıfta çemberin tanımı ile yarıçap ve çap kavramlarının tanımı MAT.5.3.1 öğrenme çıktısı kapsamında sunulmaktadır. Çap ile çember arasındaki ilişki 6. sınıfta MAT.6.4.4 öğrenme çıktısında yer almakta, çemberin çevre uzunluğunun öğretimi ise 6. sınıfta MAT.6.4.5 öğrenme çıktısında ele alınmaktadır. Ayrıca, dikdörtgenin alan bağıntısının dairenin alan bağıntısına yansıtılmasına yönelik öğretim süreci 7. sınıfta MAT.7.4.7 öğrenme çıktısıyla ilişkilendirilmiş olup, dairenin alan formülüne öğretimi ise 7. sınıfta MAT.7.4.8 öğrenme çıktısında yer almaktadır.

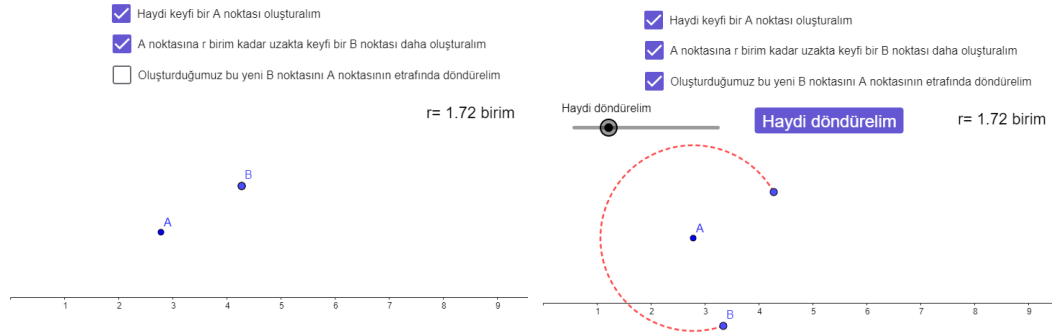
GGB ile hazırlanan etkinlikler, sınıf ortamında etkileşimli tahta üzerinden sunulmuş ve öğrencilerle birlikte tartışılmıştır. Sınıf içi uygulamalar sırasında etkinlikler üzerine öğrenci katılımını teşvik eden yönlendirmeler yapılmış, öğrencilerin düşüncelerini paylaşabilecekleri ortamlar sağlanmıştır. Öğretim sürecinin pekiştirilmesi amacıyla, öğrencilerden GGB aracılığıyla evde yapabilecekleri ödevler de istenmiştir. Kapsanan öğretim süreci toplamda 9 ders saatinden oluşmaktadır (Tablo 3.3).

Tablo 3. 3. Asıl Uygulamanın Öğretim Planı.

Kavramlar	İlgili MEB Kazanımı	Ders Saati	Etkinlikler
Çember ve Temel Elemanları	M.6.3.3.1	3 saat	Etkinlik 1: Pergel ile Çember Çizme
			Etkinlik 2: GGB ile Çember Çizme
			Etkinlik 3: GGB ile Çemberin İç Bölgesi ve Dış Bölgesi
Daire			Etkinlik 4: GGB ile Çember ve Daire Arasındaki Fark
Çemberin Çevre Uzunluğu Formülü	M.6.3.3.2 ve M.6.3.3.3	3 Saat	Etkinlik 5: Somut Model ile Çemberin Çevre Uzunluğunu Çap Uzunluğuna Oranlama
			Etkinlik 6: GGB ile Çemberin Çevre Uzunluğunu Çap Uzunluğuna Oranlama
Dairenin Alan Formülü	M.7.3.3.3	3 Saat	Etkinlik 7: GGB ile Çembersel Bölge (Daire)nin Alanını Karesel Bölgelerle Hesaplama
			Etkinlik 8: GGB ile Dairenin Alan Formülü

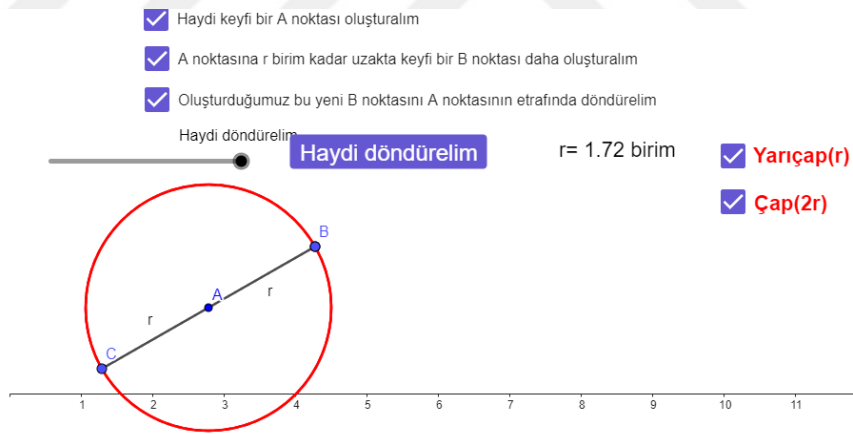
Hazırlanan etkinliklerde, öğrencilerin öncelikle belirli bir noktadan hareket etmeleri istenmiştir. Bu doğrultuda, öğrencilere sabit bir noktaya eşit uzaklıkta olan noktaları çizmeleri yönünde bir yönerge verilmiştir. Öğrencilerin, bu sabit noktayı çemberin “merkez noktası” olarak kabul etmeleri ve buna göre işlem yapmaları beklenmiştir. Bu hedef doğrultusunda, iki temel etkinlik sunulmuştur. Bunlar, somut materyallerle yürütülen Etkinlik 1 ve GGB destekli öğretim ortamında gerçekleştirilen Etkinlik 2’dir. Etkinlik 1 kapsamında, öğrencilere pergel ve cetvel kullanarak çember çizmeleri yönünde bir görev verilmiştir. Bu etkinlik, öğrencilerin çemberi oluşturan noktaların merkeze olan uzaklıklarının eşit olduğunu fark etmelerini sağlamayı amaçlamıştır. Etkinlik 2’de ise GGB yazılımı aracılığıyla, rastgele bir noktanın sabit bir nokta etrafında döndürülmesiyle dinamik bir yapı oluşturulmuştur. Her iki etkinlikte de öğrencilerin sabit noktayı çemberin “merkez noktası” olarak belirlemeleri

ve çember üzerindeki tüm noktaların bu merkeze eşit uzaklıkta olduğunu kavramaları amaçlanmıştır (Şekil 3.1).



Şekil 3. 1. GGB Ortamındaki Etkinlik 2 Görseli a.

Ayrıca öğrencilerin merkezden çember üzerindeki noktalara çizilen doğru parçalarının eşit uzunlukta olduğunu ve bu doğru parçalarının “yarıçap” olarak adlandırıldığını kavramaları beklenmiştir. Bu kavrayışın ardından, aynı doğrultuda iki yarıçapın birleşimiyle oluşan doğru parçasının ise “çap” kavramını temsil ettiğini fark etmeleri beklenmiştir (Şekil 3.2).

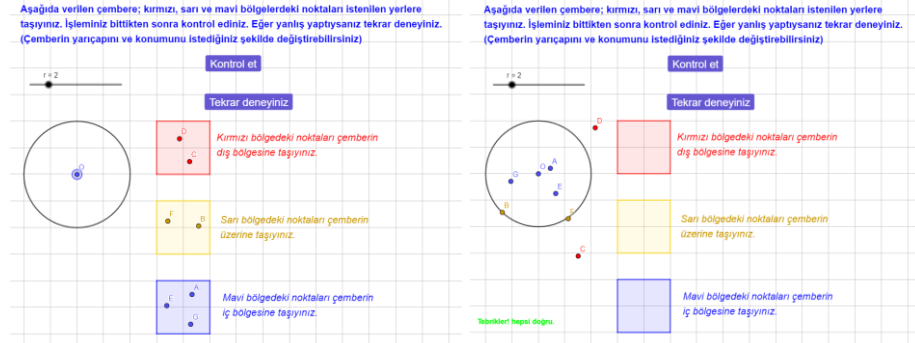


Şekil 3. 2.GGB Ortamındaki Etkinlik 2 Görseli b.

Öğrencilerin “çember” kavramından yola çıkarak, çemberin iç bölgesindeki tüm noktaları da kapsayan yeni bir yapı oluşturmaları ve bu yapının “daire” olarak adlandırıldığını fark etmeleri amaçlanmıştır. Bu hedef doğrultusunda, GGB ortamında Etkinlik 3 ve Etkinlik 4 hazırlanmıştır.

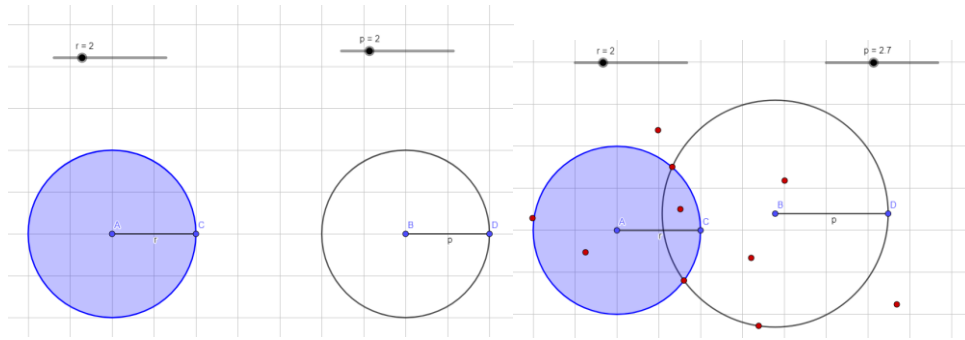
Etkinlik 3’te, öğrencilere belirli noktaların çemberin iç bölgesine, dış bölgesine ya da çemberin üzerine taşınmasına yönelik bir görev verilmiştir. Bu yapılan eylemle, çemberin yalnızca bir çizgi olmadığı, aynı zamanda iç ve dış olmak üzere farklı

konumları belirleyen bir geometrik yapı olduğu konusunda farkındalık kazandırılması hedeflenmiştir (Şekil 3.3). Böylece öğrencilerin, çemberin geometrik yapısının bölgelere göre nasıl sınıflandırıldığını anlamaları sağlanmaya çalışılmıştır.



Şekil 3. 3. GGB Ortamındaki Etkinlik 3 Görseli.

Etkinlik 4'te ise, çember ile daire arasındaki fark ve ilişki GGB ortamında etkileşimli işlemler yoluyla incelenmiştir. Öğrenciler, çemberin yalnızca sınırlayıcı bir çizgi olduğunu, buna karşılık dairenin bu çemberin iç bölgesiyle birlikte bir alan ifade ettiğini fark etmeleri beklenmiştir (Şekil 3.4). Bu etkinlik, öğrencilerin “çember” kavramından yola çıkarak “daire” kavramını tanımlarına katkı sağlamayı amaçlamaktadır.

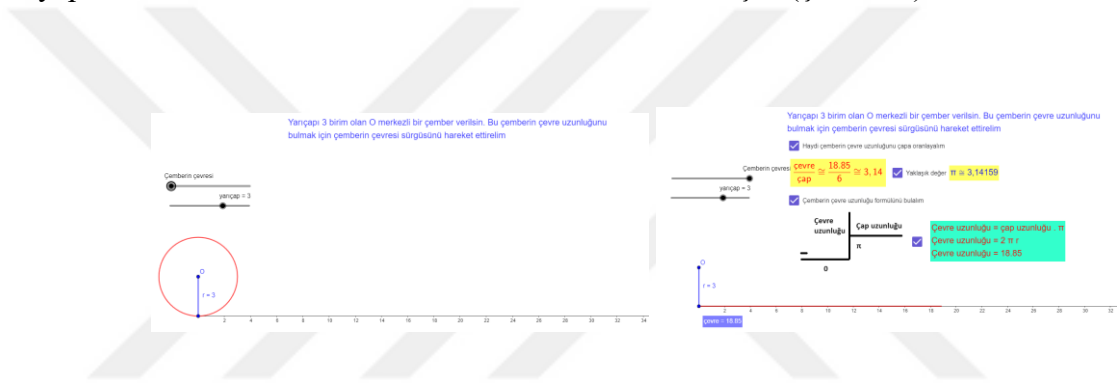


Şekil 3. 4. GGB Ortamındaki Etkinlik 4 Görseli.

Çemberin çevre uzunluğu formülüne ilişkin hazırlanan etkinliklerde, öğrenciler başlangıçta yarıçap/çap uzunluğu bilinen bir çemberi ele almışlardır. Öğrencilerden, bu çemberin çevresini hesaplamaları ve bu değeri çemberin çapına oranlamaları istenmiştir. Öğrencinin, farklı yarıçap uzunluklarına sahip çemberlerin çevre uzunluklarını çaplarına oranlayarak her seferinde yaklaşık olarak aynı değeri elde etmesi ve bu değerın sabit olduğunu fark ederek π (pi) sayısını farketmeleri beklenmektedir.

Bu amaç doğrultusunda, GGB destekli iki etkinlik hazırlanmıştır. Etkinlik 5'te, öğrencilerin pergel kullanarak farklı yarıçap uzunluklarına sahip çemberler çizmeleri ve mukavva kâğıt üzerinde bu çemberlerin çevre uzunluklarını fiziksel ölçüm yoluyla belirlemeleri sağlanmıştır. Ardından, öğrencilerden ölçtükleri çevre uzunluklarını, ilgili çap uzunluklarına bölerek oranı hesaplamaları istenmiştir. Bu deneyim, öğrencilerin çevre ile çap arasındaki ilişkiyi gözlemlemelerine ve bu ilişkiyi sayısal olarak yorumlamalarına olanak tanımıştır.

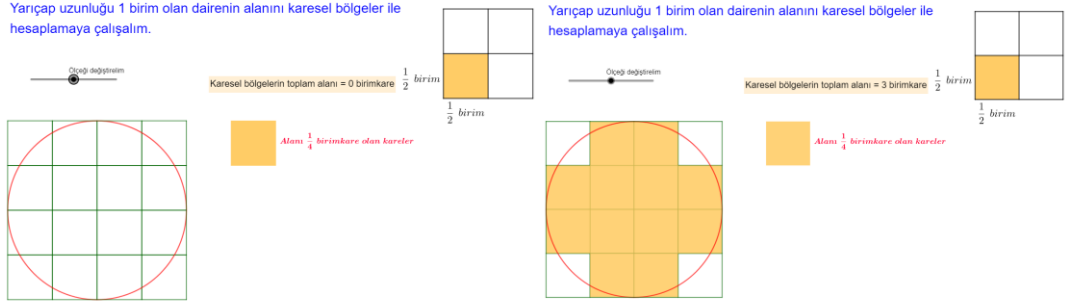
Etkinlik 6 ise GGB ortamında uygulanmış, çemberin çevresi ile çapı arasındaki oran öğrenciler tarafından dinamik bir biçimde görselleştirilmiştir. Bu etkinlik kapsamında öğrencilerin, çevre formülünü bu oran üzerinden genelleterek yapılandırmaları ve π kavramını tanımaları hedeflenmiştir (Şekil 3.5).



Şekil 3. 5. GGB Ortamında Etkinlik 6 Görseli.

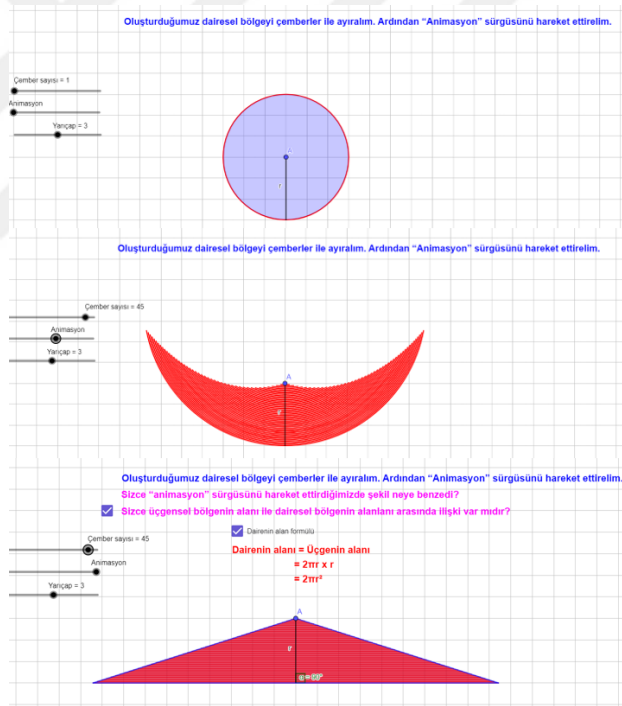
Dairenin alan formülüne yönelik hazırlanan etkinliklerde, başlangıç noktası olarak yarıçap uzunluğu bilinen bir daire ele alınmıştır. Bu kapsamda, dairenin üçgensel bir şekle dönüştürülmesi sağlanmıştır. Öğrencilerin, elde edilen bu üçgensel bölgenin uzun kenarının dairenin çevresine, yüksekliğinin ise yarıçap uzunluğuna eşit olduğunu fark etmeleri beklenmiştir. Bu ilişki aracılığıyla, öğrencilerin dairenin alanına yönelik genel bir matematiksel ifadeye ulaşmaları hedeflenmiştir. Bu hedefler doğrultusunda, GGB ortamında Etkinlik 7 ve Etkinlik 8 hazırlanmıştır.

İlk olarak, Etkinlik 7'de öğrencilerden çembersel bir bölgenin alanını, alanı bilinen karesel bölgeler yardımıyla yaklaşık olarak hesaplamaya çalışmalarını içeren bir etkinlik uygulanmıştır (Şekil 3.6). Bu süreçte öğrenciler, dairenin alanını doğrudan ölçmenin zorluklarını deneyimlemiş ve bu ölçümün kesinlikten uzak olduğunu fark etmeleri beklenmektedir.



Şekil 3. 6. GGB Ortamındaki Etkinlik 7 Görseli.

Ardından gerçekleştirilen Etkinlik 8'de, yarıçap uzunluğu bilinen bir dairenin, uzun kenarı dairenin çevresine ($2\pi r$), bu kenara ait yüksekliği ise yarıçap uzunluğuna (r) eşit olan bir ikizkenar üçgene dönüştürülmesi sağlanmıştır (Şekil 3.7). Bu dönüşüm yoluyla öğrencilerin daireyi bir üçgensel bölge olarak düşünmeleri ve bu bölgenin alanı üzerinden dairenin alanını hesaplamaları sağlanmıştır.



Şekil 3. 7. GGB Ortamındaki Etkinlik 8 Görseli.

3.7. Verilerin Analizi

Nitel olarak desenlenen bu araştırmada, veri toplama sürecinden elde edilen veriler içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Yıldırım ve Şimşek'e (2021) göre içerik analizinde temel yapılan işlem, birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar etrafında bir araya getirerek okuyucunun daha iyi anlayabilmesini sağlamaktır.

Bu analiz yöntemi dört aşamadan oluşur ve sırasıyla şu şekildedir; (a) analiz için bir çerçeve oluşturma, (b) verilerin kodlanması, (c) bulguların tanımlanması ve (d) bulguların yorumlanmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Araştırmanın kuramsal temelini oluşturan APOS teorisi doğrultusunda, öğrencilerin ilgili matematiksel kavramları (çember ve temel elemanları, daire, çemberin çevre uzunluğu formülü, dairenin alan formülü) nasıl yapılandırdıkları incelenmiş ve veriler bu çerçevede kodlanmıştır.

Araştırma süreci, ön genetik çözümleme ile başlamıştır. Pilot çalışmadan önce hazırlanan bu ön genetik çözümlemeler, araştırmacıya öğrencilerin kavramları yapılandırma süreçleri hakkında öngörü sağlamış, öğretim süreci ve etkinliklerin planlanmasına rehberlik etmiştir. Pilot çalışmanın ardından, elde edilen gözlem ve bireysel görüşme verileri doğrultusunda genetik çözümlemeler gözden geçirilmiş, varsa eksiklikler giderilerek yeniden düzenlenmiştir. Asıl uygulama süreci tamamlandıktan sonra, öğretim ortamında kaydedilen görüntü ve ses verileri araştırmacı tarafından ayrıntılı şekilde transkript edilmiştir. Transkript edilen bu veriler, pilot çalışma sonrasında revize edilen genetik çözümlemelere dayalı olarak analiz edilmiştir. Kodlama sürecinde, öğrencilerin kavramlara ilişkin düşünme biçimlerini yansıtan yeni kod ve kategoriler geliştirilmiş ve bu doğrultuda, her bir kavrama ait genetik çözümlemeler son hâlini almıştır.

Elde edilen veriler, çember ile temel elemanları, daire, çemberin çevre uzunluğu formülü ve dairenin alan formülü kavramlarına yönelik olarak APOS'un yapı ve mekanizmaları temel alınarak kodlanmış, ilgili kod-kategori-tema yapısı oluşturulmuş ve tablolştırılmıştır (Ek 19, Ek 20, Ek 21). Analiz sürecinde elde edilen temaların bütüncül bir anlam sunup sunmadığı mayematik eğitimcisi olan alan uzmanı ile birlikte değerlendirilmiş ve mutabakat sağlanarak yorumlanmıştır. Böylece araştırmada ele alınan kavramlar, APOS teorisi çerçevesinde çok yönlü olarak irdelenmiş ve elde edilen bulguların doğrudan, şeffaf ve anlamlı bir biçimde sunulmasına özen gösterilmiştir. Bu kapsamda, çalışmada ele alınan çember ve temel elemanları, daire, çemberin çevre uzunluğu formülü ve dairenin alanı formülü kavramlarına ilişkin geliştirilen üç ayrı genetik çözümleme, sırasıyla Şekil 3.8, Şekil 3.9 ve Şekil 3.10'de sunulmuştur.

Genetik çözümleme 1

Hazırlanan Genetik Çözümleme 1 kapsamında öğrenciler, başlangıç noktası olarak ‘nokta’ nesnesini ele almışlardır. Bu, kavramsal gelişimin ilk basamağını oluşturur ve çember kavramının inşası için temeldir. Öğrenciler, sabit bir noktaya olan eşit uzaklık fikrini anlamlandırmaya bu nesneyle başlarlar.

Eylem aşamasında; Öğrenciler sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaları çizer ya da sabit bir noktadan çıkan ve sabit uzunlukta olan doğru parçalarının uç noktalarını belirleyerek çemberin iz düşümünü oluştururlar. Bu *eylem*, biri pergel ve cetvel kullanarak çember çizimleri ile yürütülen Etkinlik 1, diğeri ise GGB ortamında rastgele bir noktanın sabit bir nokta etrafında döndürülmesi yoluyla dinamik olarak çember oluşturmaya dayalı Etkinlik 2 kapsamında gerçekleştirilmiştir. Bu aşamada yapılan işlem, yönergeye bağlı ve fiziksel eyleme dayalıdır (Arnon vd., 2014; Dubinsky ve McDonald, 2001). Öğrenci henüz çember kavramı zihinsel olarak düşünmez, sadece yapar.

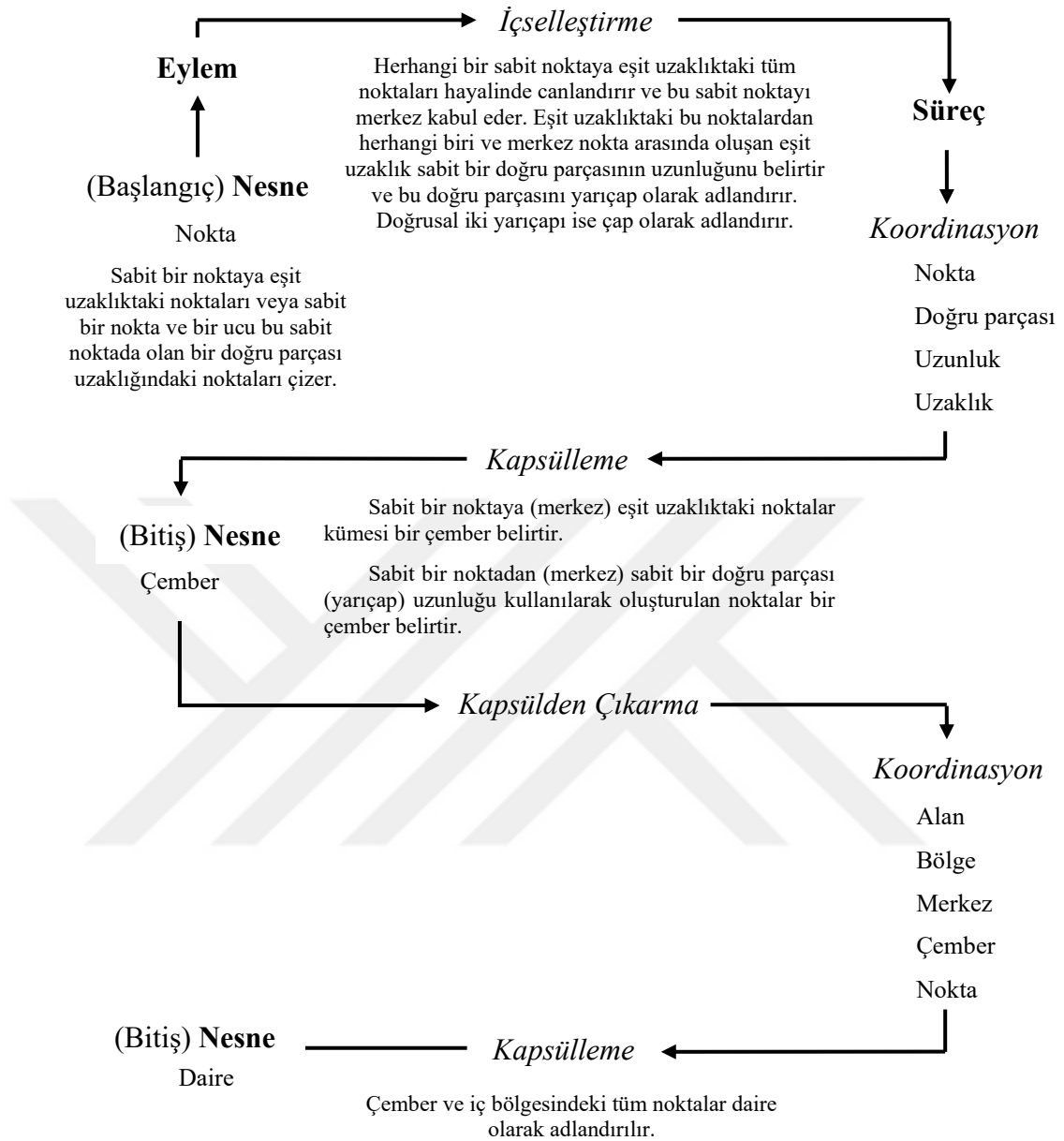
İçselleştirme ve süreç aşamasında; Öğrenci artık çemberi fiziksel olarak çizmeye gerek duymadan, zihninde kurgulayabilir. Sabit bir merkezi hayalinde canlandırır ve bu merkezden eşit uzaklıktaki noktaları zihinsel olarak yerleştirebilir. Bu noktalarla merkez arasındaki sabit uzaklığı bir doğru parçası olarak tanımlar ve bunu ‘yarıçap’ olarak adlandırır. Eğer öğrenci, iki doğrusal yarıçapın oluşturduğu doğru parçasını ‘çap’ olarak tanımlayabiliyorsa, bu durum *eylemin* içselleştirildiğini ve *süreçe* geçildiğini gösterir. Bu aşamada öğrenci, kavramları yalnızca uygulamakla kalmaz, kavramları düşünmeye ve yorumlamaya başlar (Dubinsky, 1991; Dubinsky ve McDonald; 2001). Eylemin içselleştirilmesini GGB ortamında desteklemek amacıyla rastgele bir noktanın sabit bir nokta etrafında döndürülmesi yoluyla dinamik bir yapı inşa etmeye yönelik olan Etkinlik 2 uygulanmıştır. Böylece öğrencilerin süreci daha derinlemesine kavramalarını ve önceki eylemlerini genelleyerek içselleştirmelerini amaçlanmaktadır. Özellikle, öğrencilerin sabit noktayı ‘merkez’ olarak belirlemeleri ve çember üzerindeki tüm noktaların bu merkeze eşit uzaklıkta olduğunu fark etmeleri hedeflenmiştir.

Kapsülleme ve nesne aşamasında; Öğrenci, ‘nokta’, ‘doğru parçası’, ‘uzaklık’, ‘uzunluk’ süreçleriyle ‘çember’ süreci arasında koordinasyon kurabilir. Bu koordinasyonlar sonucu öğrenci, ‘sabit bir noktaya (merkez) eşit uzaklıktaki noktalar kümesi bir çember belirtir’ veya ‘sabit bir noktadan (merkez) sabit bir doğru parçası

(yarıçap) uzunluğu kullanılarak oluşturulan noktalar bir çember belirtir' şeklinde kapsülleme yapabilir. Eğer ğrenci, süreci bir bütün olarak ele alır ve dönüşümlerin bu bütünün üzerinde uygulayabileceği bir bütün olarak dşnebilirse, süreci bilişsel nesneye kapsüllemiş olur (Arnon vd., 2014; Dubinsky, 1991; Dubinsky ve McDonald; 2001).

Kapsülden ıkarma ve ikinci nesne aşamasında; ğrenci, çember nesnesini kapsülden çıkarıp süreç aşamasına indirgeyebilir ve süreçler koordine edilip tekrardan kapsüllenebilir (Asiala vd., 1996; Dubinsky, 1991; Dubinsky vd., 2005; Yılmaz, 2023). Bu aşamada ğrenci, çemberin yalnızca bir sınır çizgisi olmadığını, aynı zamanda bu sınırın i bölgesiyle birlikte bir alan tanımladığını fark edebilir. Bu farkındalıkla birlikte 'çember' süreci ile 'merkez', 'nokta', 'alan' ve 'bölge' gibi süreçleri koordine ederek 'çember ve i bölgesindeki tüm noktalar daire olarak adlandırılır' şeklinde tekrar kapsülleme yaparak daire nesnesine aşamasına ulaşır. Bu süreci GGB ortamında desteklemek için, öğrencilerin çemberin yalnızca bir sınır çizgisi değil, aynı zamanda i ve dış bölgelere sahip farklı alt kavramlar barındıran bir yapı olduğunu fark etmeleri amaçlanan Etkinlik 3 ve çember ile daire arasındaki fark ve ilişkiyi etkileşimli işlemler yoluyla inceleyerek dairenin bu çemberin i bölgesiyle birlikte bir alan ifade ettiğini kavramaları amaçlanan Etkinlik 4 uygulanmıştır.

Genetik Çözümleme 1, Şekil 3.8’de verilmiştir.



Şekil 3. 8. Genetik Çözümleme 1

Genetik çözümleme 2

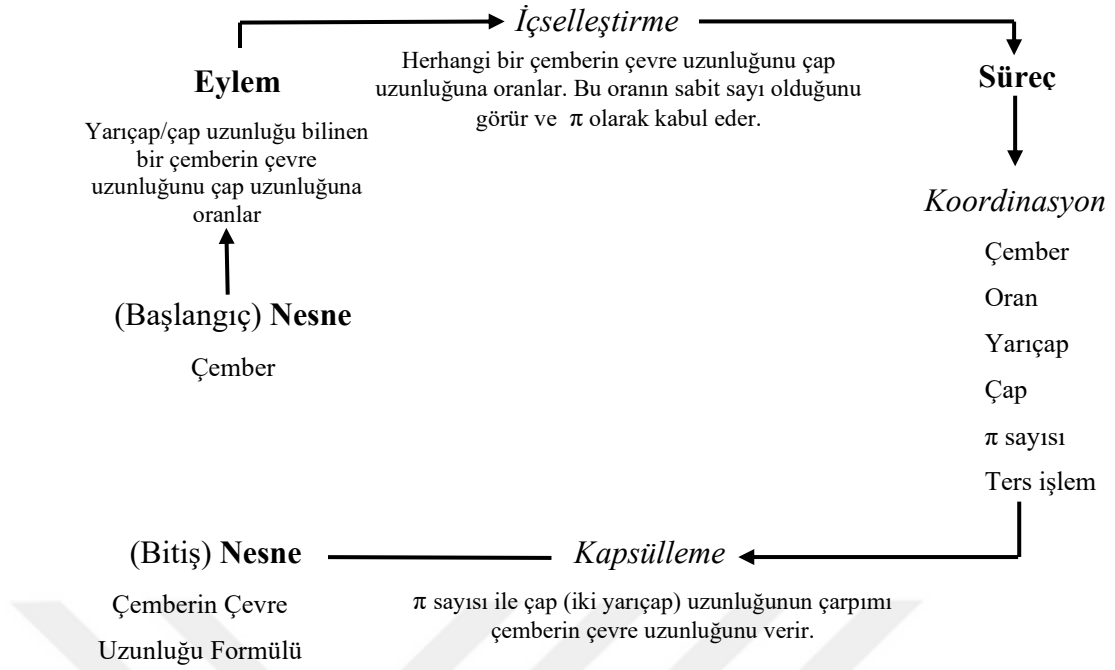
Hazırlanan Genetik Çözümleme 2 kapsamında, öğrencilerin kavramsal gelişim sürecinde başlangıç noktası olarak ‘çember’ nesnesini ele almışlardır. Bu nesne, öğrencilerin çemberin çevre uzunluğu formülüne ve π (pi) sayısına ilişkin anlayışlarını yapılandırabilmeleri için temel bir referans nesnesidir. Öğrenciler, çemberin yapısını zihinsel olarak temsil etmeye başladıkları bu aşamada, çevre uzunluğu formülünü anlamlandırma sürecine de ilk adımı atmış olurlar.

Eylem aşamasında; Öğrenci, yarıçapı ya da çapı bilinen bir çemberin çevresini ölçerek bu değeri, aynı çembere ait çap uzunluğuna oranlar. Bu oranlama işlemi, öğrencilerin pergel kullanarak farklı yarıçap uzunluklarında çemberler çizmeleri ve bu çemberlerin çevre uzunluklarını mukavva kâğıt üzerinde fiziksel ölçüm yoluyla belirlemeye çalışmaları sürecini kapsayan Etkinlik 5 ve öğrencilerden elde ettikleri çember çevresi değerlerini, ilgili çap uzunluklarına bölerek oranı hesaplamaları istenen GGB ortamında hazırlanmış Etkinlik 6 ile desteklenmiştir. Öğrencinin bu aşamada yaptığı işlem, yönergeye bağlı bir uygulamadır. Kavramsal genelleme yapılmaksızın, sadece çemberin çevresi ve çapı arasında sayısal bir ilişki kurulmaya çalışılır.

İçselleştirme ve süreç aşamasında; Öğrenci farklı yarıçap ve çap uzunluklarına sahip çemberlerde gerçekleştirdiği ölçümler sonucunda, çevre/çap oranının her durumda yaklaşık olarak aynı değere karşılık geldiğini gözlemleyebilir. Bu değer çemberin yapısal bir özelliği olduğunu fark ederek, sabit oranı π (pi) olarak adlandırır ve tanımlar. Bu farkındalık, öğrencinin yalnızca işlem yapan bir birey olmaktan çıkıp, somut ölçümlerden zihinsel genellemeye geçtiğini göstermektedir (Dubinsky, 1991; Dubinsky ve McDonald; 2001). Öğrencinin, π 'nin sadece bir sayı değil, tüm çemberlerin ortak özelliğini ifade eden sabit bir oran olduğunu kavraması, eylemi içselleştirilerek süreç aşamasına geçtiğinin göstergesidir. Bu bağlamda, GGB ortamında tasarlanan Etkinlik 6 ile öğrencilerin farklı çemberlerin çevresi ile çapı arasındaki sabit oranı ve π kavramını dinamik bir ortamda görselleştirerek genelleme yapmaları, böylece eylemi içselleştirip süreç aşamasına ulaşmaları hedeflenmiştir.

Kapsülleme ve nesne aşamasında; Öğrenci artık 'oran', 'yarıçap', 'çap' ve ' π ' gibi süreçlerle 'çember' süreci arasında koordinasyon kurabilir. Bu koordinasyonlar sonucunda, 'çemberin çevresi, π sayısı ile çap uzunluğunun çarpımıdır' şeklinde kapsülleme yapabilir. Bu ifadeyi matematiksel olarak $\Ç = \pi \cdot R$ ya da $\Ç = 2\pi r$ şeklinde de formüleştirebilir. Öğrenci, çevre hesaplamasına ilişkin bu süreci bir bütün olarak ele alıp, π sayısının çemberin yapısal bir özelliği olduğunu ve bu sürecin daima aynı biçimde çalıştığını kavratsa, artık bu yapıyı bir bilişsel nesneye dönüştürmüş olur. Başka bir deyişle, formül yalnızca bir işlem aracı olmaktan çıkar, öğrenci için anlamlı ve yeniden kullanılabilir bir matematiksel yapı hâline gelir.

Genetik Çözümleme 2, Şekil 3.9'da verilmiştir.



Şekil 3. 9. Genetik Çözümleme 2

Genetik çözümleme 3

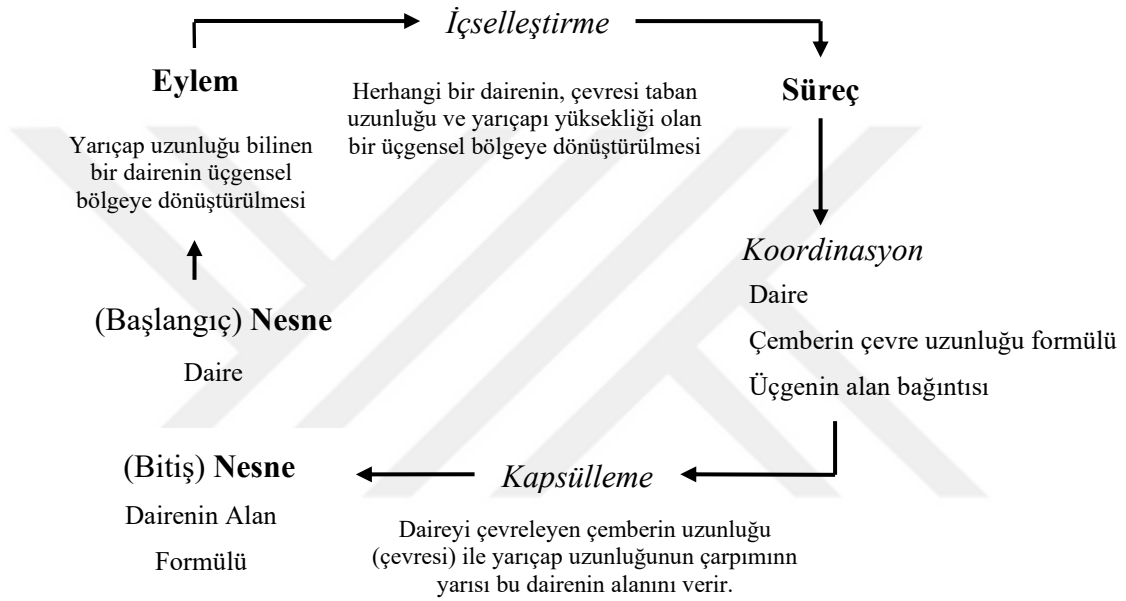
Hazırlanan Genetik Çözümleme 3 kapsamında, öğrencilerin kavramsal gelişim sürecinde ilk olarak yarıçap uzunluğu bilinen bir daire ele alınmıştır. Bu başlangıç nesnesi, öğrencilerin dairenin alan formülünü yapılandırmaları açısından temel bir referans niteliği taşımaktadır. Öğrenciler, dairenin geometrik özelliklerini zihinsel olarak temsil etmeye başladıkları bu aşamada, alan kavramını anlamlandırma sürecine ilk adımı atmış olurlar.

Eylem aşamasında; Öğrenci bir daireyi, üçgensel bir bölgeye dönüştürür. Bu işlem, GGB ortamında tasarlanan Etkinlik 8 aracılığıyla görsel olarak desteklenmiş ve etkileşimli bir şekilde gerçekleştirilmiştir. Etkinlik kapsamında, yarıçap uzunluğu bilinen bir dairenin, uzun kenarı dairenin çevresine ($2\pi r$), uzun kenara ait yüksekliği ise yarıçap uzunluğuna (r) eşit olan bir üçgene dönüştürülmesi sağlanmıştır. Bu aşamada öğrenci, yalnızca görsel yönergeler doğrultusunda dönüşümleri uygular ve ayrıca dönüştürülen şeklin alanıyla ilgili derinlemesine düşünmez.

İçselleştirme ve süreç aşamasında; Öğrenci, dairenin üçgensel bir yapıya dönüştürülmesi sürecinin altında yatan yapıyı anlamlandırmaya başlar. Bu dönüşümde, çemberin çevresi üçgenin tabanı, yarıçap uzunluğu ise o tabana ait

yüksekliği olarak algılandığında ve alan bakımından bir eşdeğerlik olduğunu fark ederse eylem içselleştirilerek süreç aşaması haline alır.

Kapsülleme ve nesne aşamasında; Öğrenci artık ‘çemberin çevresi’ ve ‘üçgenin alan formülü’ süreçleri ile ‘daire’ süreci arasında koordinasyon kurabilir. Bu koordinasyonlar sonucunda, ‘daireyi çevreleyen çemberin uzunluğu (çevresi) ile yarıçap uzunluğunun çarpımının yarısı bu dairenin alanını verir’ şeklinde kapsülleme yaparak nesne aşamasına ulaşabilir. Bu ifadeyi matematiksel olarak $A = (\Ç \times r) / 2$ ya da $A = \pi r^2$ biçiminde formülleştirebilir.



Şekil 3. 10. Genetik Çözümleme 3

3.8. Araştırmanın Geçerliliği ve Güvenirliği

Tüm araştırma türlerinde en temel kalite kontrol unsurlarından biri, çalışmanın ve ulaşılan bulguların ve sonuçların geçerliliğidir. Geçerli bir çalışma, verilerini uygun yöntemlerle toplamış, doğru biçimde analiz etmiş ve bu süreçler sonucunda ortaya koyduğu bulgular, incelenen gerçekliği doğru bir şekilde yansıtmakta ve temsil etmektedir (Yin, 2011). Creswell ve Poth (2018), nitel araştırmalarda geçerlilik (validation) kavramını, araştırmacı, katılımcılar ve okuyucular tarafından bulguların ve sonuçların ‘doğruluğunu’ (geçerliliğini) değerlendirme süreci olarak tanımlamaktadır. Bu yaklaşım, her araştırma raporunun aynı zamanda yazar tarafından inşa edilen bir gerçeklik temsili olduğunu kabul eder. Araştırmacının alanda uzun süre geçirmesi, yoğun ve ayrıntılı betimlemeler sunması ve katılımcılarla kurduğu yakın

ilişki aracılığıyla elde edilen anlatımın, çalışmanın doğruluğu ve güvenilirliği açısından nitel araştırmalara özgü bir güç ve değer kattığı düşünülmektedir.

Creswell ve Poth (2018), nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenilirliği sağlamak amacıyla araştırmacıların kullanabileceği dokuz temel strateji önermektedir. Araştırmacıların bu stratejilerden en az ikisini her nitel çalışmada mutlaka uygulaması gerektiği vurgulanmakta, söz konusu stratejiler üç temel perspektife göre sınıflandırılmaktadır. Bunlar; araştırmacı, katılımcı ve okuyucu/hakem bakış açılarıdır.

Araştırmacı perspektifinden değerlendirilen stratejiler arasında öncelikle, birden fazla veri kaynağından elde edilen bulguların karşılaştırılması ve doğrulanmasını sağlayan çeşitleme (triangulation) yöntemi yer almaktadır. Ayrıca, negatif durum analizi (negative case analysis) stratejisinde, araştırmacı elde edilen temalarla çelişen ya da aykırı örnekleri analiz ederek çalışmanın geçerliliğini artırmayı amaçlar. Bunun yanı sıra, araştırmacının kendi önyargılarını, varsayımlarını ve araştırma sürecine olası etkilerini fark ederek sürece dair şeffaflık sağlaması öz yansıma (clarifying researcher bias or engaging in reflexivity) stratejisi kapsamında değerlendirilir.

Katılımcı perspektifinden bakıldığında, elde edilen bulguların doğruluğunu katılımcı geri bildirimleri aracılığıyla teyit etme süreci olan katılımcı teyidi (member checking) önemli bir stratejidir. Ayrıca, araştırmacının sahada uzun süreli gözlem yapması ve katılımcılarla sürdürülebilir ilişki kurması anlamına gelen uzun süreli katılım ve kalıcılık (prolonged engagement and persistent observation in the field) stratejisi ile araştırma sürecine katılımcıların aktif katılımını teşvik eden iş birliğine dayalı araştırma (collaborating with participants) da bu grup altında yer alır.

Okuyucu/hakem perspektifinden ele alınan stratejiler, araştırma sürecinin güvenilirliğini artırmayı amaçlayan dış değerlendirme yaklaşımlarını içerir. Bu bağlamda, teyit incelemesi (enabling external audits) stratejisi, araştırma sürecinin ve bulguların başka bir araştırmacı tarafından incelenerek benzer sonuçlara ulaşıp ulaşılamayacağını test edilmesini içerir. Bu strateji, araştırmanın izlenebilirliğini ve teyit edilebilirliğini güçlendirir. Ayrıntılı (zengin ve yoğun) betimleme (generating a rich, thick description) yöntemiyle; bağlam, katılımcılar ve olaylar ayrıntılı biçimde sunularak okuyucunun bulguların başka durumlara aktarılabilirliğini değerlendirmesi sağlanır. Ayrıca, uzman incelemesi (having a peer review) stratejisi kapsamında, araştırma süreci aynı alanda uzman bir kişi ya da meslektaş tarafından

değerlendirilerek yöntem, yorumlar ve bulgular açısından eleştirel bir bakışla gözden geçirilir ve araştırmacıya yapıcı geri bildirim sunulur.

Tablo 3. 4. Creswell ve Poth'un (2018) nitel araştırmaların geçerlik ve güvenilirliği sağlamak amacıyla önerdiği stratejiler ve gerçekleştirilme durumu

Perspektif	Kullanılan Yöntem	Araştırmada Gerçekleştirilme durumu
Araştırmacı bakış açısı	Çeşitleme	✓
	Negatif durum analizi	✗
	Araştırmacının öz yansıması	✗
Katılımcı bakış açıları	Katılımcı teyidi	✗
	Uzun süreli etkileşim ve alanda sürekli gözlem	✓
	Katılımcılarla iş birliği yapmak	✗
Okuyucu/hakem bakış açıları	Teyit incelemesi	✓
	Ayrıntılı bir şekilde betimleme	✓
	Uzman incelemesi	✓

Creswell ve Poth (2018), nitel bir çalışmada yukarıda belirtilen dokuz stratejilerinden en az ikisinin kriterin sağlanmasını ifade etmiştir. Gerçekleştirilen araştırmada, tabloda gösterilen yöntemlerden çeşitleme, uzun süreli etkileşim ve alanda sürekli gözlem, uzman incelemesi, ayrıntılı bir şekilde betimleme ve teyit incelemesi yöntemleri başarıyla uygulanmıştır. Bu araştırmada bu yöntemlerinin nasıl sağlandığı aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

Çeşitleme (triangulation): Veri toplama sürecinde çeşitleme, yalnızca üç farklı kaynaktan doğrulama sağlamakla kalmayıp, bu kaynakların farklı türlerde olmasını da hedefler. Örneğin, bir olayı doğrudan gözlemlemeniz, aynı olayın orada bulunan başka bir kişi tarafından sözlü olarak size aktarılması ve daha sonra farklı bir kişi tarafından yazılı bir raporla benzer şekilde anlatılması durumunda, bu olaya ilişkin raporlamada yüksek bir güvenilirlik elde etmiş olursunuz (Yin, 2011).

Bu araştırmada veri çeşitlemesi yaklaşımı benimsenerek üç farklı veri toplama yöntemi kullanılmıştır: Bireysel görüşmeler, GGB ortamındaki ders süreçlerine ilişkin gözlemler ve çalışma kağıdı analizi. Bu kapsamda elde edilen veriler; öğrencilerin bireysel çalışma kâğıtları, ders içi etkinliklere ait çalışma kâğıtları, gözlem notları,

bireysel görüşmelere ilişkin video ve ses kayıtları ile bu kayıtların transkriptlerinden oluşmaktadır. Farklı veri kaynaklarının birlikte kullanılmasıyla elde edilen bulguların tutarlılığı test edilerek çalışmanın geçerlik ve güvenirliği artırılmaya çalışılmıştır.

Uzun süreli etkileşim ve alanda sürekli gözlem: Araştırmacı, çalışmanın amacına uygun olarak neyin önemli, neyin çalışmaya değer ve neyin odaklanması gereken bir unsur olduğunu sahaya dayalı kararlarla belirler. Bu doğrultuda, katılımcılarla güven ilişkisi kurar, araştırma yapılan ortamın kültürünü ve bağlamını öğrenir. Ayrıca hem kendi bakış açısının hem de katılımcıların aktarımlarının neden olabileceği bilgi çarpıtmalarını kontrol eder. Bu geçerlik stratejisi kapsamında, veri toplamaya başlamadan önce araştırma alanı ve katılımcılarla önceden tanışılarak, çalışmanın yürütüldüğü süre boyunca sahada mümkün olduğunca fazla zaman geçirilmesine özen gösterilir (Creswell ve Poth, 2018).

Bu bağlamda, araştırmadaki katılımcılar seçilirken matematik öğretmeninden öğrencilerin matematiksel durumları ve sosyal iletişim becerileri hakkında ayrıntılı bilgi alınmıştır. Ön görüşmeler yoluyla sınıf ortamında öğrencilerle tanışılmış ve etkileşim kurulmuştur. Ardından, ders ortamlarında öğrenciler yeterince gözlemlenmiş, kendilerini ifade edebilme becerileri ve hazırbulunuşluk düzeyleri dikkate alınarak uygun katılımcıların seçimi yapılmıştır. Görüşmelere katılacak öğrenciler süreç hakkında bilgilendirilmiş ve görüşmelerin gerçekleştirileceği tarih belirlenmiştir. Uzun süreli etkileşimler aracılığıyla, güvene dayalı bir araştırma ortamı oluşturulması sağlanmıştır.

Teyit incelemesi; Dışarıdan bir uzmanın, araştırmada ulaşılan yargıların, yorumların ve önerilerin ham verilere geri dönüldüğünde doğrulanabilir olup olmadığını değerlendirmesi beklenir. Bu bağlamda, araştırmacının tüm veri toplama araçlarını, ham verileri, analiz sürecinde gerçekleştirdiği kodlamaları, aldığı notları ve yaptığı çıkarımları saklaması; gerektiğinde bu belgeleri uzman incelemesine sunabilecek şekilde düzenlemesi gerekir (Yıldırım ve Şimşek, 2021). Bu doğrultuda, araştırmada elde edilen tüm veriler (video ve ses kayıtları, yazılı transkriptler, öğrencilerin çalışma kâğıtları, gözlem notları vb.), analiz sürecinde yapılan kodlamalar ve rapora temel oluşturan araştırmacı notlarıyla birlikte, farklı bakış açılarıyla yeniden değerlendirilebilecek biçimde sistemli olarak arşivlenmiştir.

Ayrıntılı bir şekilde betimleme; Başarılı bir şekilde gerçekleştirildiğinde, yorumlar araştırmacı merkezli bakış açısından uzaklaşarak, olayları, kişileri ve eylemleri kendi

yerel bağlamları içinde anlamlı bir şekilde ortaya koyar. Betimleme ayrıntılı olsun ya da olmasın, nitel araştırmaların temel özelliklerinden biri, incelenen olguları mevcut araştırma literatürüyle ilişkilendirerek daha geniş bir sosyal temayı temsil etmeye çalışmasıdır (Yin, 2011).

Bu bağlamda araştırmada, katılımcıların belirlenme süreci ve ayırt edici özellikleri, çalışmanın gerçekleştirileceği ortamın seçimi, veri toplama araçlarının oluşturulması ve geliştirilmesi, çalışma ortamında kullanılan araç-gereçler ile veri toplama süreci ayrıntılı biçimde açıklanmıştır. Ayrıca, elde edilen bulgulara ilişkin doğrudan katılımcı alıntıları ile öğrencilerin çalışma kâğıtlarına kapsamlı bir şekilde yer verilmiştir. Bu uygulamalar sayesinde, çalışmanın aktarılabilirliğini artırmak hedeflenmiştir.

Uzman incelemesi: Uzman inceleme süreci boyunca, özgüveninizi korumanız ve gelen geribildirimlere karşı duyarlı olmanız önemlidir. Bir uzmandan veya uzman grubundan alınan yorumlara göre çalışmanızı revize etmek veya yeniden düşünmek, araştırmanın niteliğini kaçınılmaz olarak güçlendirecektir (Yin, 2011).

Bu doğrultuda, araştırma süreci boyunca alan uzmanı bir eğitimci ile; veri toplama araçlarının belirlenmesi, verilerin toplanması, analiz süreci (kodlama, kategorilerin ve temaların oluşturulması) gibi aşamalarda düzenli değerlendirme toplantıları gerçekleştirilmiştir. Gerekğinde ilgili düzenlemeler yapılmış ve bu sayede geçerlik ile güvenirliğin sağlanmasına yönelik süreçler titizlikle yürütülmüştür.

4. BULGULAR

Bu bölümde araştırmadan elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Araştırmanın üç alt problemine dayalı elde edilen veriler kapsamlı bir şekilde betimlenerek ayrı ayrı değerlendirilmiştir. Bulgular ilk araştırma problemi için çember ve temel elemanları (merkez nokta, yarıçap ve çap) ile daire kavramlarının oluşumu, ikincisi için çemberin çevre uzunluğu formülünün oluşumu, üçüncüsü için ise dairenin alan formülünün oluşumuna dair ele alınmıştır. Bahsedilen kavramların oluşumu, APOS teorisine dayalı olarak hazırlanan genetik çözümlemeye göre incelenmiştir. Bulgular, sınıf ortamında gerçekleştirilen etkinlikler ve beraberinde yapılan gözlem raporları, etkinlikler sonrasında gerçekleştirilen bireysel görüşmeler ile öğrencilerin sınıf içi ve görüşmelerdeki çalışma kağıtlarından elde edilmiştir. Dolayısı ile bulgular araştırma problemine dayalı olarak üç ana başlık şeklinde verilmiş ve alt başlıklar ise genetik çözümlemeye dayalı olarak bilişsel yapıları içermektedir. Her bir yapı ise yine alt başlıklar halinde sınıf içi gözlemler ve görüşmelerle açıklanmıştır. Görüşmelerde araştırmacı “A”, katılımcılar ise “Aleyna, Ahmet, Berna, Mert ve Bilge” rumuzları ile temsil edilmiştir.

4.1. Çember, Temel Elemanları ve Daire Kavramlarının Oluşumuna Ait Bulgular

Bu bölümde merkez nokta, çember, yarıçap, çap ve daire kavramlarının oluşum süreçlerine ait elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

4.1.1. Çember ile Temel Elemanların Oluşumuna Ait Bulgular

Çember ile temel elemanlarının oluşumu için sınıf içi ortamda pergel ve cetvel ile çember çizimine dayalı olarak *eylem* aşamasına hizmet eden Etkinlik 1 ile DMY’larından GGB ortamında rastgele bir noktayı farklı bir noktanın etrafında döndürülmesini içeren ve *eylem* aşamasını güçlendirip ve *eylemi* içselleştirmelerini destekleyerek *süreç* aşamasına hizmet eden Etkinlik 2 gerçekleştirilmiştir. Hazırlanan genetik çözümleme doğrultusunda, çember kavramının oluşumu için başlangıç *nesnesi* olarak bir nokta ele alınmıştır. Öğrencilerin, bu ‘sabit noktaya eşit uzaklıktaki noktaları çizmeleri’ *eylem* aşaması olarak değerlendirilmiş, başlangıç *nesnesi* olan noktayı merkez olarak düşünmeleri ve kabul etmeleri beklenilmiştir. Devamında öğrencilerin merkez nokta, çember, yarıçap ve çap kavramlarını fark etmeleri ve merkez nokta ile çember üzerindeki noktaların uzaklıklarının eşit olduğunu ifade etmeleri beklenmiştir. Ayrıca, merkez noktadan çembere çizilen doğru parçalarının hepsinin aynı uzunlukta

olduğunu belirlemeleri ve bu doğru parçalarını yarıçap olarak adlandırmaları hedeflenmektedir. Sonrasında bahsedilen kavramlar üzerine statik açıklamalar dışında genel ve dinamik olarak içselleştirmeleri ve iki doğrusal yarıçapın çap olduğunu fark etmeleri ile süreç aşamasında ilerledikleri düşünülmektedir. Sonrasında, öğrencilerin farklı süreçlerle koordinasyonlar kurup ‘sabit bir noktaya (merkez) eşit uzaklıktaki noktalar kümesi bir çember belirtir’ ya da ‘sabit bir noktadan (merkez) sabit bir doğru parçası (yarıçap) kullanılarak oluşturulan noktalar ile bir çember çizilir’ bilgisini kapsülleyip çember *nesnesine* ulaşmaları beklenmiştir. Öğrencilerin *nesne* aşamasına geçip geçmediklerini test etmek amacıyla çember kavramı ile ilgili problem yöneltilmiştir.

4.1.1.1. Eylem Aşaması

Gözlemlerde Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 1 kapsamında öğrencilerin çoğu çemberi kolayca çizmiştir. Araştırmacı, öğrencilerden herhangi bir nokta belirlemelerini ardından pergelin iğnesini o noktaya yerleştirerek tam bir tur çevirmelerini istemiştir. Çember çizmekte zorlanan öğrencilerin pergeli kullanmakta zorluk yaşadığı ve bu nedenle araştırmacıdan ve arkadaşlarından yardım aldığı gözlenmiştir. Sürecin devamında, GGB ortamında Etkinlik 2 kapsamında çember şu şekilde tekrar çizilmiştir:

A: İlk önce ne yapmıştık biz çember çizmek için çocuklar? Hatırlıyor musunuz?

Öğrenciler: Nokta belirlemiştik.

A: Bir tane nokta oluşturmuştuk. Ondan sonra ne yaptık? Pergeli belli bir mesafede açmıştık.

Öğrenciler: Evet.

A: İlk önce A noktası oluşturduk (etkinlikteki çemberin merkez noktası), ondan sonra ekstrasından bir nokta (B noktası) daha oluşturduk. Bu iki nokta arasında pergelin bir ucuna A noktasına iğneli ucunu, diğer ucunu B noktasına getirdik değil mi? Arada belli bir mesafe var değil mi? Sonra ne yaptık peki?

Bilge: Döndürdük.

A: Döndürdük değil mi? Sonradan oluşturduğumuz B noktasını A noktasının etrafında döndürelim tamam mı şimdi? Haydi döndürelim butonu var tıklıyorum. Peki bu görüntüye baktığımızda size ne çağırıştırıyor çocuklar?

Öğrenciler: Çember.

Böylece Etkinlik 2’de, Etkinlik 1’e benzer bir şekilde bir (merkez) nokta oluşturulmuş, sonrasında farklı bir nokta daha belirlenerek bu nokta, ilk (merkez) nokta etrafında döndürülerek bir çember çizilmiştir. Bu süreçte, Etkinlik 1 kapsamında statik olarak çizilen çember, Etkinlik’de dinamik ortamında tekrar oluşturulmuştur. Yapılan gözlemlerin ışığında, öğrencilerin dışsal uyaranlara bağlı olarak pergeli ve

cetvel kullanımıyla fiziksel olarak ve GGB ortamında sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaları çizmeleri, onların çember kavramına ilişkin *eylem* aşamasında olduklarını göstermektedir.

Görüşmelerde Elde Edilen Bulgular

Katılımcılardan Aleyna'ya görüşmede Etkinlik 1'de ne yapıldığı sorulduğunda çember çizdiğini söylemiştir. Bu yanıtın ardından, çemberi nasıl çizdiği sorusu yöneltilmiş ve Aleyna, bu süreci Etkinlik 2 kapsamında şu şekilde açıklamıştır:

Aleyna: Orta noktasını belirledik.

A: Orta noktasını belirledik... orta nokta değil de daha doğru tanımlayabilir misin?

Aleyna: Merkez noktası.

A: Merkez noktası değil mi? Bir tane merkez noktası belirledik... ondan sonrasında ne yaptık?

Aleyna: Ondan sonra başka bi[r] yani eee... Merkez noktası oluşturduğumuz için başka bir nokta daha oluşturduk... Onun etrafında çevirdik.

A: Peki bu noktayı ne yaptık? Sonradan oluşturduğumuz noktayı.

Aleyna: A noktasının (merkez nokta) etrafında B noktasını (sonradan oluşturulan nokta) çevirdik.

A: Döndürdük değil mi? B noktasını A noktası etrafında mı döndürdük?

Aleyna: Evet.

Aleyna, çemberi çizmeden önce “*merkez noktası*” belirlediğini ve ardından merkez noktası olan “*A noktasının etrafında B noktasını çevirdik*” diyerek farklı bir noktayı bu merkez nokta etrafında döndürdüğünü ifade etmiştir. Bu bulguya dayanarak, Aleyna'nın ‘Sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaları çizer’ *eylem*ini gerçekleştirdiğini göstermektedir.

Görüşmede Ahmet, Etkinlik 1'de çemberi nasıl çizdiğini “*iğne kısmını batıyorduk pergelin kalem kısmıyla da buna uygun bir şekil çiziyorduk*” ifadesiyle açıklamıştır. Görüşmenin devamında, Etkinlik 2 kapsamında merkez noktasından sonra oluşturulan noktanın nasıl kullanıldığı sorulduğunda ise süreci şu şekilde açıklamıştır:

A: Hatırlıyor musun? B noktası oluşturmuştuk. Biz bu B noktasını ne yaptık?

Ahmet: B noktasını şey... A noktasıyla birleştirdik.

A: Nasıl birleştirdik?

Ahmet: Bir... Bir yarıçap çizerek?

A: Peki birleştirdik biz... B noktasıyla nasıl yararlanmıştık?

Ahmet: Çember yaparken kullanmıştık.

A: Nasıl kullanmıştık?

Ahmet: Hocam işte onu bir yarıçap çizip onu döndürmüştük.

A: *Peki neyin etrafında döndürmüştük?*

Ahmet: *A'nın*

A: *A noktası neydi?*

Ahmet: *Merkez.*

Ahmet, A merkez noktasından sonra B noktasını oluşturulduğunu söylemiş ve ardından “*B noktasını şey... A noktasıyla birleştirdik*” diyerek bir doğru parçası oluşturduğunu ifade etmiştir. Bu doğru parçasını “*yarıçap*” olarak adlandırmış ve merkez nokta olan A noktası etrafında döndürerek çember oluşturduğunu söylemiştir. Ancak öğrencinin oluşturduğu bu döndürme işlemi, aslında çember değil, daireyi temsil eden bir bölge oluşturmaktadır. Görüşmenin devamında ise “*A ile B arasında çizdiğimiz yarıçap B'yi döndürüyor. B'nin dönüşüne göre B'yi takip ediyor*” şeklindeki açıklamasıyla, B noktasının A noktası etrafında dönerek bir çember oluşturduğunu ifade etmiştir. Bu bulgular, Ahmet'in ‘sabit bir nokta ve bir ucu bu sabit noktada olan bir doğru parçası uzaklığındaki noktaları çizer’ eylemini gerçekleştirdiğini göstermektedir.

Katılımcılardan Berna, Etkinlik 1’de “*pergel ile çember çizdik*” şeklinde bir ifade kullanarak çember çizdiğini belirtmiş. Görüşmenin devamında sınıf içinde gerçekleştirilen Etkinlik 2’ye ilişkin olarak, merkez noktası ve sonrasında oluşturulan noktayla ilgili süreci şu şekilde açıklamıştır:

A: *Bir tane nokta (A merkez noktası). Peki bu noktayı ne kabul etmiştik biz?*

Berna: *Bizim eee. Ayy. Neydi... Çemberin merkezi noktası.*

A: *Peki sonra ne yapmıştık?*

Berna: *Sonra hocam. Eh şur[a]da bir şey var şuna basmıştık (bilgisayar üzerinden etkinlikteki kutucuğu parmağı ile göstererek).*

A: *Buna basınca ne oluyordu?*

Berna: *Çember çizilmişti... yok yok çemberin B noktası.*

A: *Bu B noktasını ne yaptık biz?*

Berna: *Hocam o (çember)... o'da çemberin şeyini çizdik.*

A: *Peki nasıl çizdik?*

Berna: *Böyle (Parmağı ile döndürerek).*

Berna, çemberi çizmeden önce oluşturduğu ilk noktayı çemberin “merkez noktası” olarak belirlediğini, ardından oluşturulan B noktasının bu merkez nokta etrafında döndürülmesiyle çemberin çizildiğini ifade etmiştir. Böylece, Berna'nın başlangıç nesnesi merkez noktası olan ‘sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaları çizer’ eylemini gerçekleştirdiği söylenebilir.

Katılımcı Mert'e görüşmede Etkinlik 1'de ne yaptığımız sorulmuş ve şu şekilde açıklamıştır:

A: *Ne düşünüyorsun bu etkinlikte? Ne yapmıştık bu etkinlikte?*

Mert: *Çember çizmiştik.*

A: *Çember çizmiştik peki. Çember çizmek için ne yapmıştık?*

Mert: *Pergelin iğnesini sabitlemiştik, sonra pergeli döndürüp bir çember çizmiştik.*

Mert, çember çizme sürecini “*pergelin iğnesini sabitlemiştik, sonra pergeli döndürüp bir çember çizmiştik*” şeklinde ifade etmiştir. Bu açıklamasından, sabit bir noktaya pergelin iğnesini yerleştirerek o noktaya eşit uzaklıktaki noktaları çizdiği ve böylece ‘sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaları çizer’ *eylemi*ni gerçekleştirdiği anlaşılmaktadır. Etkinlik 2’de çemberi nasıl çizdiği sorulduğunda ise, benzer bir şekilde bir nokta oluşturduğunu ve sonrasında farklı bir noktayı oluşturduğu nokta etrafında döndürerek çember çizdiğini söylemiştir.

Katılımcılardan Bilge, Etkinlik 1 sürecinde defterine bir nokta belirlediğini ve ardından pergel yardımıyla çember çizdiğini ifade etmiştir. Görüşmenin devamında, Etkinlik 2 kapsamında ne yaptığı sorulduğunda ise süreci şu şekilde açıklamıştır:

A: *Akıllı tahtada size bir etkinlik gösterdim.*

Bilge: *Merkezi konumumuz.*

A: *Merkezi konumumuz?*

Bilge: *Merkezi noktası.*

A: *A noktasını oluşturduk biz bunu ne kabul ettik merkez kabul ettik. Sonra bi[r] nokta daha oluşturduk bu noktayı ne yaptık biz?*

Bilge: *Çap.*

A: *Çap yani biraz daha açıklayabilir misin? A noktası oluşturduk sonrasında bir tane B noktası oluşturduk.*

Bilge: *Çap yaptık. Yani çapın tanımını mı yapayım?*

A: *Çapın tanımı yapma şimdilik. İlk başta bi[r] şey çizmiştik biz hatırlıyo[r]n mu[sun]? Çember çizmiştik biz.*

Bilge: *Hı hı. Evet.*

A: *A noktasını merkez kabul etmiştik, sonra B noktasını oluşturduk. Sonra da çember çizmiştik.*

Bilge: *B noktasının üzerinden geçerek.*

A: *B noktasından geçerek derken yani? Biraz daha açıklayabilir misin?*

Bilge: *Çap yaptık hocam böyle çizdik (yarıçapı göstererek).*

A: *Çember çizerken çaptan mı yararlandık?*

Bilge: *Üstünden geçerek çizdik (parmağını döndürerek).*

A: *Böyle bir hareket yaptın (parmağını döndürerek) bu neydi?*

Bilge: *Çember.*

A: Çemberdi değil mi? Böyle döndürdük (parmağı ile tekrardan döndürerek). Peki neyi neyin etrafında döndürdük?

Bilge: Merkezi noktanın etrafında döndürdük.

Bilge, çemberi çizmeden önce “*keyfi bir A noktası oluşturmuştuk*” demiş ve bu noktayı çemberin “*merkezi noktası*” olarak kabul etmiştir. Daha sonra bir doğru parçası oluşturup bu doğru parçasını “*merkezi noktanın etrafında döndürdük*” diye açıklamıştır. Ayrıca, “*B noktasının üzerinden geçerek*” ifadesiyle, A merkez noktası etrafında AB doğru parçasının döndürülmesiyle B noktasının taradığı bölgeyi kullanarak çemberi oluşturduğunu belirtmiştir. Ancak Bilge’nin, yarıçap olarak adlandırılan doğru parçasını çap olarak ifade ettiği görülmüştür. Görüşmenin ilerleyen bölümlerinde, “*çap yani tanımını yapamam ama yani mesela, A ile B noktasının çapı*” şeklinde ifadesiyle, A merkez noktasından başlayıp çemberin üzerinde biten doğru parçasını yanlış biçimde çap olarak tanımladığı görülmüştür. Buna rağmen Bilge, ‘sabit bir nokta ve bir ucu bu sabit noktada olan bir doğru parçası uzaklığındaki noktaları çizer’ eylemini gerçekleştirdiği söylenebilir.

4.1.1.2. Süreç Aşaması

Gözlemlerde Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 1’in devamında, öğrencilere çizdikleri çemberlerle ilgili sorular yöneltilerek şekillerin merkezlerini tespit etmeleri istenilmiştir:

A: Herkes çizdi mi? Çizdiğiniz şekil bu şekle benziyor. Görüyorsunuz değil mi tahtada? Peki bu şekil size neyi anımsatıyor?

Öğrenciler: Çember (Hep bir ağızdan).

A: Bu şekle merkez seçmek istersek hangi noktayı seçerdiniz?

Berna: Ortası.

Mert: En ortası.

A: Ortası peki. Bunu nasıl belirlediniz?

Ertem: Cetvelle.

Berna: Pergelin iğnesi.

A: Pergelin iğnesi.

Öğrencilerin çizdikleri şekli “*çember*” olarak adlandırdıkları ve bu çemberin merkezini belirlemede zorlanmadıkları gözlemlenmiştir. Katılımcı Mert, çemberin merkez noktasını “*en ortası*” olduğunu ifade ederken, katılımcı Berna ise “*pergelin iğnesi*”nin batırıldığı yer olduğunu dile getirmiştir. Sonrasında, çemberin merkez noktası ile çember arasında herhangi bir ilişkinin olup olmadığı sorulmuştur:

A: Herkes merkez noktayı belirledi mi?

Öğrenciler: *Evet.*

A: *Merkez nokta ile çemberin arasında ilişki var mıdır sizce?*

Nida: *Pergeli eşit.*

A: *Pergeli eşit derken?*

Nida: *Yani aralıkları.*

Merve: *Aralıkları (merkez nokta ile çemberin arasındaki mesafe).*

A: *Evet doğru. Başka fikri olan var mı peki? Çemberin merkez noktasıyla kendisinin arasında bir ilişki var mıdır sizce?*

Ertem: *Kare say[a]ca[ğı]z. Kareleri eşit, ortalıyor, Eşit... (kareli kâğıdın üzerine çizdiği çemberin merkez nokta ile kendisi arasındaki mesafeleri göstererek).*

A: *Evet çocuklar. Merkez noktasıyla çemberin arasında bir uzaklık var değil mi?*

Öğrenciler: *Evet.*

A: *Peki bu uzaklık değişiyor mu?*

Öğrenciler: *Hayır.*

A: *Neden Hayır?*

Ertem: *Her yeri eşit.*

Bazı öğrenciler merkez noktanın konumunu belirlemeyi başarmış ancak bu noktanın çemberle olan ilişkisini tespit edememişlerdir. Çember ile merkez nokta arasındaki ilişkisi bağlamında, öğrencilerden Nida ve Merve “*aralıkları*” eşit olduğunu ifade ederken, Ertem ise defterinde kareleri sayarak “*kareleri eşit*” olduğunu dile getirmiştir. Dersin devamında araştırmacı, tahtaya temsili bir çember çizip, o çemberin merkez noktasından çembere kadar 2 farklı doğru parçası çizerek, bu doğru parçaları arasındaki ilişkiyi öğrencilerine sormuştur:

A: *Şöyle bir doğru parçası çizsem (iki farklı doğru parçası çizerek). Peki bu doğru parçası ile bu doğru parçası arasında bir ilişki var mıdır?*

Ahmet: *Açısı var. Orta noktası.*

Berna: *Doksan derece.*

A: *Doksan derece... Peki... Bu iki doğru parçası arasında bir ilişki var mı?*

Mert: *Var hocam doksan derece.*

Berna: *He anladım hocam. İkisinde ortasında nokta var.*

A: *İkisi de merkez noktada ortak değil mi? Başka peki?*

Merve: *İkisi de böyle... bitince çembere değiyor (Parmaklarıyla göstererek).*

A: *Başka?*

Berna: *İkisi de dümdüz.*

Aleyna: *İkisin de uzunlukları aynı.*

Doğru parçaların merkez noktada kesiştiğini katılımcı Berna, “*ikisinde ortasında nokta var*” şeklinde açıklamış, öğrencilerden Merve “*ikisi de böyle... bitince çembere değiyor*” diyerek doğru parçaların uzunluğunun çembere kadar olduğunu ifade etmiştir. Katılımcı Aleyna ise “*ikisin de uzunlukları aynı*” diyerek bu doğru parçaların

eşit uzunlukta olduğunu belirtmiştir. Devamında araştırmacı, öğrencilere çemberde kaç tane yarıçap vardır sorusunu yöneltmiştir:

A: Sizce çemberin kaç tane yarıçapı vardır?

Mert: 360.

Sabri: 4 olabilir hocam.

Berna: 2 tane de olabilir... çünkü yarısı.

Nida: 180.

Aleyna: 1 tane mi?

A: Bir tane mi? Bakın çocuklar bir ucu merkez bir ucu çember...

Ahmet: Hocam sonsuz olur.

A: Evet çocuklar sonsuz tane olur. Bakın çocuklar bu bi[r] yarıçaptır, bu da bi[r] yarıçaptır, bu da yarıçaptır (GGB’de ‘Haydi döndürelim’ sürgüsünü hareket ettirerek). Bakın süregelen bir dönüş var görüyorsunuz mu çocuklar? 360 tane ya da 180 tane, 4 tane, 5 tane falan değildir sayısı.

Öğrencilerden Nida ile katılımcı Berna ve Aleyna, bir çemberde yarıçap sayısının sınırlı sayıda olduğunu dile getirmiş, katılımcı Ahmet ise “sonsuz” tane olduğunu ifade etmiştir. Sonrasında, öğrencilere çap kavramı tanımlanmış ve yarıçap ile arasındaki ilişki sorulmuştur:

A: Sizce çap ile yarıçap arasında bir ilişki var mıdır?

Berna: Çapı yarıya bölünce yarıçap.

A: Peki başka fikri olan var mı? Doğru dediğin. Ekstradan ekleyecek olan var mı?

Ahmet: Hocam başlangıç noktalar aynı ve ikisi de çemberin farklı bir noktasında bitiyor.

A: Başlangıç noktaların aynıdan kasıt? Onu biraz daha açıklayabilir misin?

Ahmet: İkisi de çemberin merkez noktadan geçiyor.

Katılımcı Berna, çapın yarıçapın iki katı uzunlukta olduğunu, “çapı yarıya bölünce yarıçap” ifadesiyle belirtmiştir. Devamında, araştırmacı tahtaya temsili olarak doğrusal olmayan ve arasındaki açı 180 dereceye yakın iki yarıçap çizip, bu yarıçapların çap olup olmadığı sorulmuştur:

A: Peki size doğru parçaları çizsem... Sizce bu çap olur mu?

Nida: Bence çap.

Aleyna: Hayır hocam değildir.

Merve: Değildir.

Ertem: Açıya benziyor hocam.

A: Tamam söyle (Aleyna’ya dönerek).

Aleyna: Ee hocam şimdi çemberin tam ortasından geçmesi lazım, bi[r] de hocam ikincisi biraz yamuk gidiyor.

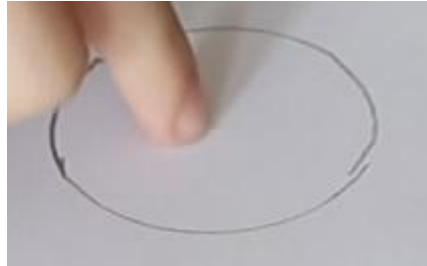
Berna: 180 derece olması gerekiyor.

A: Doğrusal olması lazım tamam mı? Evet arasında teknik olarak 180 derece olması lazım.

Katılımcı Aleyna, çapın doğrusal olması gerektiğini “*hocam ikincisi biraz yamuk gidiyor*” ifadesiyle belirtirken, katılımcı Berna ise “*180 derece olması gerekiyor*” diyerek çapın tanımına yönelik daha kavramsal bir açıklama yapmıştır. Bu bulgular ışığında; Nida, Ertem ve Merve’nin çemberin merkez noktası ile üzerindeki herhangi bir nokta arasındaki uzaklığın eşit olduğunu fark ettiği, katılımcı Berna ve Aleyna’nın da çemberin yarıçapların uzunlukların eşit olduğunu ve çapın iki doğrusal yarıçaptan oluştuğunu fark ettiklerinden dolayı *eylemi* içselleştirdikleri ve *sürece* ilerledikleri düşünülmektedir.

Görüşmelerde Elde Edilen Bulgular

Katılımcı Aleyna’ya görüşme sırasında derste pergeli yardımıyla çizilen çember gibi bir çember çizmesi istenmiş ve merkez noktasını doğru bir şekilde belirlediği gözlemlenmiştir. Bunun üzerine kendisine, “*Çizdiğin şeklin merkezini oluşturmak istesek hangi noktayı seçeriz?*” diye sorulduğunda “*Pergeli şu kısmını koyduğumuz yer (pergelin iğneli ucu), en orta nokta (parmağıyla merkez noktasını göstererek)*” demiştir. Aleyna burada çemberi pergeli yardımı ile çizmiş ve çemberin merkez noktasını, pergelin iğnesi ile kâğıdın üstündeki belirttiği nokta olarak ifade etmiştir (Şekil 4.1).



Şekil 4. 1. Aleyna’nın Temsillediği Çemberin Merkezini Belirlemesi.

Aleyna’ya, Etkinlik 2’de oluşturulan çember ile merkez nokta arasında bir ilişki olup olmadığı sorulmuştur:

A: *Peki bu A noktası dediğimiz merkez nokta yani. Merkez noktası ile çemberin üzerindeki noktalar arasında bir ilişki var mı?*

Aleyna: *Eee var.*

A: *Nasıl bir ilişki var?*

Aleyna: *Hepsi aynı hız... boyutta.*

A: *Aynı boyda değil mi? Biz bunları nasıl adlandırıyorduk peki?*

Aleyna: *Yarıçap.*

Aleyna çemberin merkez noktası ile çemberin üzerindeki noktalar arasındaki

ilişkiyi “*hepsi aynı... boyutta*” şeklinde ifade ederek bu uzaklıkların eşit olduğunu dile getirmiş ve bu doğrultuda söz konusu doğru parçalarını “*yarıçap*” olarak adlandırmıştır. Görüşmenin devamında ise daha da açıklayıcı olması için yarıçapı tanımlaması istenilmiş ve çap kavramıyla ilişkisi sorulmuştur:

A: *Yarıçapın bana tanımını yapabilir misin?*

Aleyna: *Yarıçap eee... Çemberin bi[r] noktadan... rastgele bir noktadan A noktasına kadar gelen merkez noktasına gelen şey işte.*

A: *Yani doğru parçası di mi? Onu demek istiyorsun di mi?*

Aleyna: *Evet.*

A: *Peki çap kavramıyla nasıl bir ilişkisi vardır?*

Aleyna: *Yarıçap çapın yarısıdır. Eee... yani tam ortadan ikiye böler çemberi. bi de eee.... yani 180 derecedir.*

A: *Sana bir tane çember çizsem... öylesine bir çember çizdik. Bu çap mıdır (doğrusal olmayan iki farkı yarıçap çizdikten sonra)?*

Aleyna: *Hayır.*

A: *Neden?*

Aleyna: *Çünkü 180 derece değildir bir de iki doğru karşılıklı değildir.*

A: *Çapın tanımını yapabilir misin tekrardan?*

Aleyna: *Çap yarıçapın iki katıdır. Yani eee daireyi... çemberi ikiye böler tam ortadan geçer.*

Aleyna çapın merkez noktadan geçmesi gerektiğini ifade etmeye çalışmıştır.

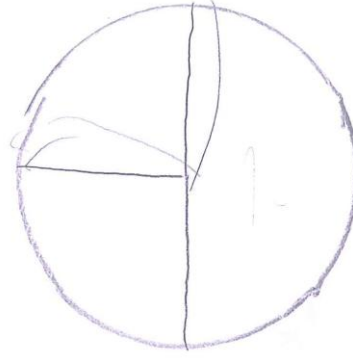
Sonrasında “*tam ortadan geçer*” ifadesini açması istediğinde ise;

Aleyna: *İki tane nokta... Yani bir tane noktadan başlayıp eee merkez noktadan geçerek karşı noktaya kadar.*

A: *O noktalar ne peki? O noktalar nerede bulunuyor?*

Aleyna: *Çember.*

Aleyna'nın, yarıçap kavramını çemberin üzerindeki “*rastgele bir nokta*” ile merkezde yer alan “*A noktasına kadar gelen*” doğru parçası olarak tanımladığı ve bu doğru parçasının uzunluğunun çember için sabit olduğunu belirttiği görülmektedir. Ayrıca Aleyna, çap kavramının “*yarıçapın iki katı*” olduğunu, yarıçapların arasındaki açının “*180 derece*” olduğunu, “*çemberi ikiye böler*” ifadesiyle çemberi “*tam ortadan*” ayırdığını ve “*merkez noktadan*” geçtiğini belirtmiştir (Şekil 4.2).



Şekil 4. 2. Aleyna'nın Görüşmede Oluşturduğu Yarıçap ve Çap Temsilleri.

Aleyna'nın, çemberin merkez noktası ile çember arasındaki uzaklığı eşit olduğu, bunları birleştiren doğru parçasını yarıçap olarak adlandırdığı ve iki doğrusal yarıçapı çap olduğunu ifade ettiğinden dolayı *eylemi* içselleştirip *süreç* aşamasına ulaştığı söylenebilir.

Görüşmede, katılımcı Ahmet'e derste çizilen çemberi tekrardan çizmesi istenilmiş ve çizdiği çemberin merkez noktasının nerede olduğu sorulmuştur:

A: *Bana pergelinle çember çizebilir misin?*

Ahmet: *Deniyim hocam.*

A: *Ne yapıyorduk önce?*

Ahmet: *İlk önce şey yapıyorduk pergeli alıyoduk hocam kalemle kendimize bi tane nokta oluşturunuyorduk.*

A: *Tamam sonrasında?*

Ahmet: *Bu noktaya pergelin iğne kısmını batıyorduk pergelin kalem kısmıyla da buna uygun bir şekil çiziyorduk (çemberi çizerken).*

A: *Tamam. Bu çizdiğin geometrik şeklin merkezini belirlemek istersen nereyi seçerdin?*

Ahmet: *Hangi noktayı seçerdik. Mesela hocam ben şöyle göstereyim buralarda noktalar olsun şöyle.*

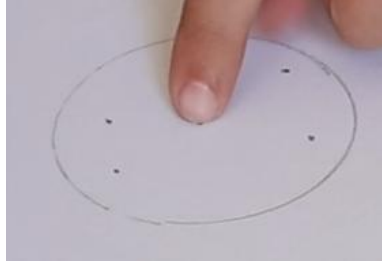
A: *Tamam. Hangi noktayı seçerdik?*

Ahmet: *Hocam pergeli koyduğumuzda... hocam o zaman en ortadaki noktayı seçebilirdik.*

A: *Pergelin iğnesi ile batırdığımız nokta değil mi?*

Ahmet: *Evet.*

Ahmet, çemberi çizmeden önce “*bi tane nokta*” belirlemiş, ardından pergelin iğnesini bu noktaya yerleştirerek çemberi oluşturmuştur. Ahmet, çemberin merkezini “*pergeli koyduğumuz*” yer olarak söylemiş (Şekil 4.3) ve bu noktayı da çemberin “*en ortadaki*” nokta olduğu için seçtiğini ifade etmiştir.



Şekil 4. 3. Ahmet'in Temsillediği Çemberin Merkezini Belirlemesi.

Daha sonra çember ile merkez nokta arasındaki uzaklığın ne ifade ettiği sorulmuştur:

A: Merkez nokta ile çember arasında bir mesafe var değil mi? Bu mesafe hakkında ne diyebiliriz?

Ahmet: Evet o yarıçap oluyor.

A: Peki bu mesafe değişken midir?

Ahmet: Çemberin boyutu değişmediği sürece hayır.

A: Yarıçap kavramını biraz daha açıklayıcı şekilde tanımlayabilir misin?

Ahmet: Yarıçap, A ile B'nin arasında olup B'nin dönüşüyle çemberi oluşturan çizgi.

A: Yarıçapın uç noktaları neresi?

Ahmet: A'dan B'ye.

A: A noktası ile B noktası nerede?

Ahmet: A merkezde hiç değişmez. B değişebilir çemberin etrafındaki her noktada

Ahmet'e çember ile merkez noktası arasındaki ilişki sorulduğunda, yarıçap uzunluğunun çember için sabit olduğunu “çemberin boyutu değişmediği sürece hayır” şeklindeki ifadesiyle belirtmiştir. Ardından, yarıçap kavramını ‘çember üzerindeki herhangi bir nokta ile çemberin merkez noktası bir doğru parçası oluşturur ve bu uzunluk çember için sabittir’ şeklinde tanımlayarak, kavrama ilişkin yapılandırılmış bir açıklama sunmuştur. Bu alıntının hemen öncesinde çember ile merkez nokta arasındaki ilişki sorulmuştur:

A: Çemberin merkezi ile üzerindeki noktalar arasında nasıl bir ilişki vardır?

Ahmet: Mesela çemberin noktaları genişlerse çemberin alanı da genişlemek zorundadır... çapı, yarıçapı da genişlemek zorundadır.

A: Peki çemberin merkezi ile üzerindeki noktayı birleştiren doğru parçasına biz ne diyorduk?

Ahmet: Yarıçap.

A: Yarıçap diyorduk. Peki çemberde kaç tane yarıçap vardır?

Ahmet: Sonsuz.

Ahmet, yarıçap ve çap kavramlarının çemberin genişliği ile ilişkisini, “çemberin noktaları genişlerse çemberin alanı da genişlemek zorundadır... çapı, yarıçapı da

genişlemek zorundadır” şeklinde açıklamıştır. Ayrıca, çemberin “sonsuz” sayıda yarıçap içerdiğini de belirtmiştir. Çap kavramını ise şu şekilde açıklamıştır:

A: Peki çapın tanımını yapabilir misin bana?

Ahmet: Çap... Hocam mesela şöyle diy[ey]im, A'dan B'ye kadar olan bu yola çap... yarıçap diyoruz. Ama hocam bunun iki katına çap diyoruz. Çap o zaman şey oluyor hocam...

A: Ne oluyor?

Ahmet: Yarıçap çarpı iki eşittir çap oluyor hocam.

A: Evet peki bu çapın uçları hangi noktalardan oluşuyor... bu doğru parçasının?

Ahmet: Hocam ikisi de A'dan geçiyor iki parça... iki yarıçaptan oluştuğu için o iki yarıçaptan oluştuğu şeyden dolayı... İki yarıçaptan oluştuğu için A'dan geçerek tamamlıyor çapı.

A: A'dan geçerek tamamlıyor?

Ahmet: Hocam yani bunlar farklı noktalardan oluşmuş olsun. Bu C olsun bu D olsun hocam D'den başlıyor C'ye kadar gidiyor orta da A'dan geçiyor (çemberin üzerine C ve D noktalar çizerek).

A: Peki D ve C noktalar nerede olacak?

Ahmet: Hocam buraya mesela bi[r] C noktası çizdim (çalışma kağıdında farklı bir yere çizerek).

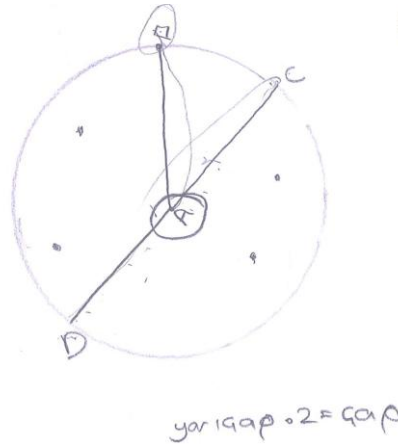
A: Bu C noktası nerede?

Ahmet: C noktası hocam , buraya da D noktası çizelim hocam. Mesela bir çap oluşturaca[ğ]ı diyelim küçük bir çember için. Hocam bu çap dümdüz gitmesi gerekiyor.

A: Peki çapı nasıl çizdik?

Ahmet: Çapı hocam çemberi oluşturan noktalardan birinden diğerine gidiyo[r]du. A'nın (merkez) da üzerinden geçiyordu.

Ahmet, çap kavramını “yarıçap çarpı iki eşittir çap” diyerek yarıçapın iki katı olduğunu belirtmiştir. Ayrıca, “çemberi oluşturan noktalardan birinden diğerine gidiyo[r]du A'nın (merkez) da üzerinden geçiyordu” diyerek çapın merkez noktadan geçtiğini vurgulamıştır. “dümdüz gitmesi” ifadesiyle de çapın bir doğru parçası olduğunu ifade etmiştir (Şekil 4.4).



Şekil 4. 4. Ahmet'in Görüşmede Oluşturduğu Yarıçap ve Çap Temsilleri.

Ahmet'in çembere ait yarıçapların sabit olduğunu, çember genişledikçe yarıçap

ile çap uzunluklarının arttığını, doğrusal iki yarıçapın çapı oluşturduğunu ve çemberde sonsuz sayıda yarıçap bulunduğunu fark etmesi, onun *eylemi* içselleştirip *süreç* aşamasına ulaştığını göstermektedir.

Görüşmede, katılımcı Berna’dan derste pergel ile çizilen çemberi tekrar çizmesi istenmiş ve çizdiği çemberin merkez noktasının hangi nokta olduğu sorulmuştur:

A: *Peki bana bir tane çember çizebilir misin pergelle?*

Berna: *şylee. şu iğne emberimizin orta, merkez noktası.*

A: *Bu pergel ile çizdiğimiz şekil sana neyi anımsatıyor?*

Berna: *ember. Çünkü içinde bir merkez noktası var. Delikli (pergel ile deldiği noktayı göstererek).*

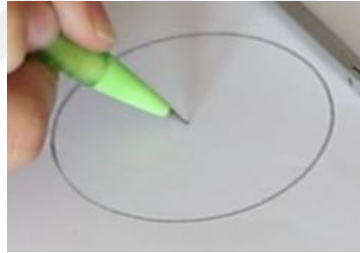
A: *Peki çizdiğin çemberin merkezini gösterir misin bana kalemle?*

Berna: *şu delik açtığımız yer.*

A: *Yani iğnenin ucu değil mi*

Berna: *Evet.*

Berna, emberi çizerken araştırmacıdan yardım almış ve çizdiği çemberin merkez noktasını “*şu delik açtığımız yer*” ifadesiyle, pergelin iğnesini batırdığı nokta olarak belirtmiştir (şekil 4.5).



şekil 4. 5. Berna’nın Görüşmede Temsillediği emberin Merkezini Belirlemesi.

Sonrasında Berna’ya, Etkinlik 2’deki ‘haydi döndürelim’ butonuna tıkladığımızda görüntüye ne olduğu sorulmuştur:

A: *‘Haydi döndürelim’ butonu vardı hatırlıyor musun? Buna tıkladığımızda ne olmuştu?*

Berna: *Nokta... nokta oluyor (kesikli çizgileri göstererek).*

A: *Peki bu kesikli çizgiler sana bir şey ifade ediyor mu?*

Berna: *Hocam onlar nokta... Noktalar sonsuz gidebiliyor.*

Berna, çemberin sonsuz sayıda noktadan oluştuğunu dile getirmiştir. Görüşmenin ilerleyen bölümlerinde kendisinden, çember ile merkez nokta arasındaki ilişkiyi açıklaması istenilmiştir:

A: *emberin merkezi ve üzerindeki noktalar arasında bir ilişki var mıdır sence?*

Berna: *Yani hocam şu noktalardan bir sürü çizgi çizersek A noktasında birleşiyor bütün çizgiler (temsili çemberin üzerinde göstererek).*

A: Peki bu A noktasının bir özelliği var mı? Bu çizgilerin ortak bir özelliği var mı? Bir ilişki var mı?

Berna: $N[e]$ $[y]$ apmıştık... Çizgi çizmiştik.

A: Evet çizgi çizmiştik. Bu çizgilerin ne özelliği vardı? ortak özelliği var mı?

Berna: Yarıçap.

A: Yarıçap demiştik değil mi? Bu yarıçaplar ne...

Berna: Evet. Küçük r ile göstermiştik.

A: r ile gösteriliyor peki. Bu yarıçapların ortak özelliği var mı?

Berna: Hocam dümdüzler. $Bi[r]$ de çemberin ortasında çemberin çizgisine kadar birleştiriyorduk ve sonsuz tane vardır.

A: Bu yarıçapların ortak noktaları var mıdır? Bu yarıçapların?

Berna: Hocam yarıçapların hepsi dümdüz olur. Hepsi iki noktanın arasında olur.

Berna, yarıçapı merkez nokta ile çember üzerindeki herhangi bir noktayı birleştiren doğru parçası olduğunu “*şu noktalardan bir sürü çizgi çizersek A noktasında birleşiyor bütün çizgiler*” şeklinde ifade etmiştir. Başlangıçta yarıçapların eşit uzunlukta olduğunu söylememiş, ancak araştırmacının yönlendirmesi ile görüşmenin devamında bu durumu şu şekilde açıklamıştır:

A: Başka ortak özelliği var mı?

Berna: Hepsi bunun üzerinde (merkez noktasını göstererek).

A: Yarıçapların uzunlukları farklı mıdır sence?

Berna: Aynıdır hocam. Çünkü...ortasında ya ortasında buraya kadar derece (uzunluk) de aynı.

Berna yarıçap kavramını, çember üzerindeki herhangi bir nokta ile çemberin merkez noktası arasında oluşan doğru parçası olarak tanımlamış ve bu doğru parçasının uzunluğunun çember için sabit olduğunu belirtmiştir. Ardından kendisinden yarıçap kavramını daha ayrıntılı açıklaması ve çap ile olan ilişkisini ifade etmesi istenmiştir:

A: Bana bunun tanımı yapabilir misin?

Berna: Hocam şimdi dümdüz.

A: Tamam dümdüz.

Berna: Bütün şeyler neydi bunun ismi... yarıçap... yarıçaplar eee eşit seviyedeler. Merkez noktasından çember noktasına kadarlar.

A: Yani şunu diyebilir miyiz çemberin yarıçapı için? Çemberin merkezinden başlayan ve çemberin üzerinden noktaya kadar olan doğru parçası.

Berna: Evet. Hocam örneğin $şur[a]$ da $bi[r]$ tane B noktası diyelim, burası da A noktası dersek, A 'dan B 'ye kadar olan düz ve eşit çizgi diğerlerine göre.

A: Yarıçap ile çap arasında bir ilişki var mıdır?

Berna: İki de r .

A: İki de r mi?

Berna: Ama birisi büyük R biri küçük r .

A: İlişkisi ne bana söyleyebilir misin?

Berna: İkisi de düz. Eşit boyda... ay eşit değil bu bi[r] r ise diğeri 2r.

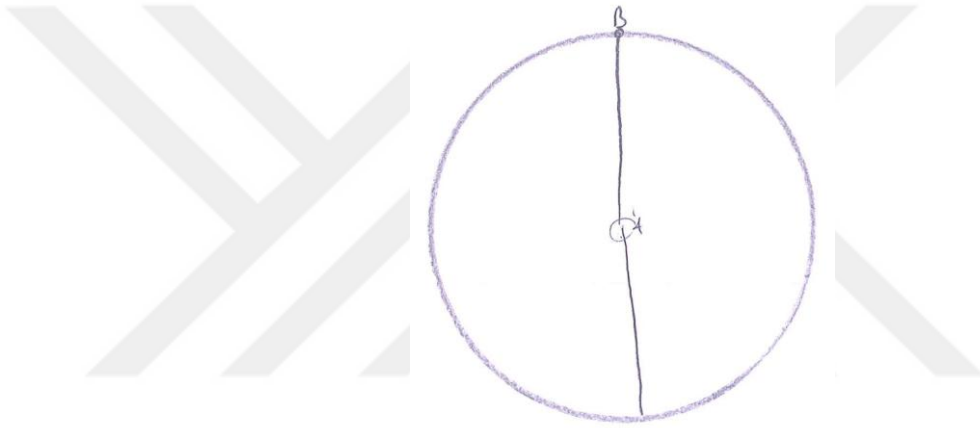
A: Diğeri 2r dediğin hangisiydi?

Berna: Çap.

A: Bana bir tane çap çizebilir misin?

Berna: Bunun hemen karşısına çizmeliyiz (önceden çizdiği AB yarıçapını çapa tamamlayarak çizer).

Berna, çap uzunluğunun yarıçap uzunluğunun iki katı olduğunu “*bu bi r ise diğeri 2r*” şeklinde açıklayarak belirtmiştir. Yarıçap gibi çapın da doğrusal olduğunu “*ikisi de düz*” ifadesiyle vurgulamıştır. Yarıçapı “*A’dan B’ye kadar olan düz ve eşit çizgi*” olarak tanımlarken, çapı ise “*bunun hemen karşısına çizmeliyiz*” diyerek, yarıçaptan başlayıp çap kavramına ulaşmıştır (Şekil 4.6).



Şekil 4. 6. Berna’nın Görüşmede Oluşturduğu Merkez Nokta, Yarıçap ve Çap Temsili.

Berna, çemberin merkezini doğru şekilde ifade etmiştir. Çemberin sonsuz noktadan oluştuğunu ve çembere ait yarıçapların uzunluklarının eşit ve sonsuz sayıda olduğunu açıklamıştır. Ayrıca, doğrusal iki yarıçapın çapı oluşturduğunu da ifade etmiştir. Tüm bu bulgular ışığında Berna’nın *eylemenin* bilincinde olduğu, *eylemenin* üzerinde düşündüğü ve böylece *eylemi* içselleştirerek *süreç* aşamasına ulaştığı söylenebilir.

Katılımcılardan Mert’e görüşmede Etkinlik 2’deki ‘haydi döndürelim’ butonuna tıkladığımızda görüntüye ne olduğu sorulmuştur:

A: Bu butona tıkladığımızda ne oluyordu?

Mert: Dönüyordu.

A: Bu şekil sana ne ifade ediyor?

Mert: Çember.

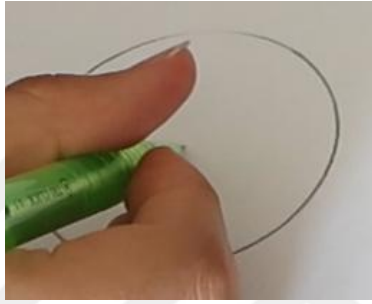
A: Bu görüntüdeki çemberin merkezini belirlemek istersek hangi noktayı seçerdik?

Mert: *A.*

A: *Neden?*

Mert: *Merkezde duruyor, orta noktası.*

Mert, merkez noktasını “*merkezde duruyor, orta noktası*” olarak belirterek, A noktasını merkez nokta olarak kabul ettiği görülmektedir. Görüşme sırasında kendisinden bir çember çizmesi istenilmiş istenmiş ve ardından çizdiği çemberin merkez noktası sorulmuştur. Mert, bu noktayı “*şu orta noktası... iğneyi batırdığımız yer*” şeklinde ifade ederek (Şekil 4.7), çemberin merkezini pergelin iğnesini yerleştirdiği nokta olarak tanımlamıştır.



Şekil 4. 7. Mert’in Görüşmede Temsillediği Çemberin Merkezini Belirlemesi.

Sonrasında merkez nokta ile çemberin üzerindeki noktalar arasındaki ilişki sorulmuştur:

A: *Çemberin merkezi ile üzerindeki noktalar arasında bir ilişki var mıdır?*

Mert: *Ortasındadır.*

A: *Çemberin üzerindeki noktalar ve çemberin merkezi arasındaki uzunluklar eşit midir sence?*

Mert: *Evet eşitlerdir.*

A: *Neden eşitlerdir?*

Mert: *Çünkü tam ortada yani bölünce hepsinin eşit olması lazım.*

A: *Peki biz bunları nasıl adlandırıyorduk? Çemberin merkezinden başlayan çemberin üzerinde biten doğru parçasına biz ne diyorduk?*

Mert: *İşte o şey... yarıçap.*

Mert, çemberin merkez noktası ile çember üzerindeki noktalar arasındaki uzaklığın eşit olduğunu ifade etmiş ve merkez noktası ile çemberin üzerindeki bir nokta arasında oluşan doğru parçasını “*yarıçap*” olarak adlandırmıştır. Görüşmenin devamında, kendisinden yarıçap kavramını daha ayrıntılı şekilde açıklaması istenmiştir:

A: *Yarıçapı tekrardan tanımlayabilir misin?*

Mert: *Yarıçap eee iki noktayı birleştirdiğimiz bi[r] doğru parçası.*

A: *Bu noktalar herhangi nokta mı? Bu noktaların özelliği var mı?*

Mert: Özelliği etrafında dönmesi değil mi?

A: Nasıl dönmesi? ... Peki bu noktalar neydi?

Mert: Biri A biri B.

A: A ne?

Mert: Merkez.

A: B'ye ne demiştik?

Mert: Yani birleştir... Birleştiriyoruz bunları.

A: B nereye ait?

Mert: Çembere.

Mert yarıçapın “iki noktayı birleştirdiğimiz bi[r] doğru parçası” olarak tanımlamış ve bu noktalardan birinin merkezde (A), diğerinin çemberin üzerinde olduğunu belirtmiştir. Ardından kendisine çap kavramının ne olduğu sorulmuştur:

A: Bana çap kavramını anlatabilir misin?

Mert: Çap yani genişliği değil mi?

A: Biraz daha açıklayabilir misin?

Mert: Yarıçapın 2 katı.

A: Evet. Peki çapın ne özelliği var?

Mert: Merkezle iki çemberin birleşmesi.

A: İki çemberin birleşmesi... İki çember?

Mert: Ya iki çember değil de bir çember.

A: Yani?

Mert: Çemberin üstünde olması.

A: Çapı tekrar tanımlayabilir misin?

Mert: Merkez ve iki noktanın birleşimi.

A: Bu noktalar nerede oluyordu?

Mert: Çember.

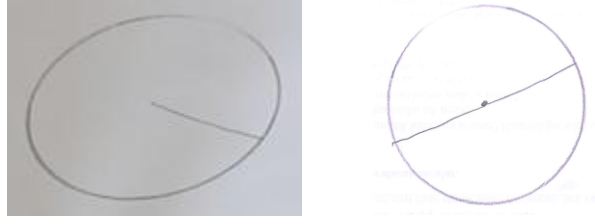
A: Bir tane çember çizsem sana. İki tane yarıçap çizsem. (iki farklı doğrusal olamayan yarıçap çizilerek) Şuraya r şuraya da r desek bu çap mıdır?

Mert: Değildir. Çapın doğrusal olması gerekmiyor mu?

A: Peki. Çap çemberde kaç tane vardır?

Mert: Sonsuz.

Mert, çap kavramını çemberin “genişliği”ni temsil eden ve “merkez ve iki noktanın birleşimi” şeklinde tanımlamıştır. Ayrıca, çapın “yarıçapın 2 katı” uzunluğunda olduğunu ve çemberde “sonsuz” tane çap bulunduğunu ifade etmiştir. Görüşmenin ilerleyen kısmında, iki farklı doğrusal olmayan yarıçapın çizilmesi üzerine, “çapın doğrusal olması gerekmiyor mu” şeklinde bir açıklama yaparak çapın doğrusal bir doğru parçası olması gerektiğini belirtmiştir (Şekil 4.8).



Şekil 4. 8. Mert'in Görüşmede Oluşturduğu Yarıçap ve Çap Temsilleri

Bu bulgulara dayanarak, Mert'in çemberin merkezini doğru şekilde belirlediği, merkez nokta ile çemberin üzerindeki noktalar arasındaki uzaklığın eşit olduğunu fark ettiği ve iki doğrusal yarıçapın çapı oluşturduğunu ifade ettiğinden dolayı *eylemi* içselleştirip *süreç* aşamasına ulaştığı söylenebilir.

Görüşmede katılımcılardan Bilge'ye temsili bir çember çizmesi istenilmiş ve çizdiği çemberin merkezinin nerede bulunduğunu sorulmuştur:

A: *Bana bir tane çember çizebilir misin?*

A: *Çizdiğimiz şekil ne şimdi (Çizdikten sonra)?*

Bilge: *Daire... ayy pardon çember.*

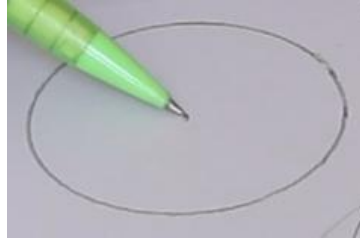
A: *Peki bu çemberin merkezini belirtmek istersek hangi noktayı belirlerdik?*

Bilge: *Bu noktayı (kalemin ucuyla pergeli batırdığı noktayı göstererek).*

A: *Neden?*

Bilge: *Çünkü dairenin... çemberin en ortası.*

Bilge, çemberin merkezini “*çemberin en ortası*” diyerek pergeli batırdığı yer olduğunu belirtmiştir (Şekil 4.9).



Şekil 4. 9. Bilge'nin Görüşmede Temsilledığı Çemberin Merkezini Belirlemesi.

Devamında merkez nokta ile çember üzerindeki noktalar arasındaki ilişki sorulmuştur:

A: *Evet bir çember çizdik. Peki çemberin üzerindeki noktalar ile çemberin merkez noktası arasında bir ilişki var mıdır sence?*

Bilge: *Merkezi nokta olması.*

A: *A noktası merkez nokta mı?*

Bilge: *Hı hı.*

A: Peki çemberin üzerindeki noktalar ile A noktası arasında bir ilişki vardı?

Bilge: Eşit olması.

A: Evet neyi eşit peki?

Bilge: A noktası (merkez nokta) ile B noktasının (çemberin üzerindeki nokta) arası.

A: Arası?

Bilge: Mesafeleri.

Bilge, merkez noktası ile çember üzerindeki noktalar arasında “mesafeleri”n eşit olduğunu söylemiştir. Sonrasında görüşme şu şekilde devam etmiştir:

A: Biz bunları ne adlandırıyorduk hatırlıyor musun?

Bilge: Çap.

A: Çap mı diyorduk? Çap neydi?

Bilge: Çap yani tanımını yapamam ama yani mesela, A (merkez nokta) ile B (çemberin üzerindeki bir nokta) noktasının çapı, mesela şur[a]da burada bir C (çemberin üzerindeki nokta) noktası olursa C ile A 'nın çapı.

A: Buna çap mı diyorduk? Yoksa başka bir şey mi diyorduk?

Bilge: Yarıçap?

A: Yarıçap diyorduk. Yarıçap neydi?

Bilge: Merkez ile yuvarlağın üstünde duran noktanın birleşimi.

Bilge, ilk olarak yarıçap kavramını “ A ile B noktasının çapı” şeklinde ifade etmiş olsa da bu açıklamasında aslında çapı kastettiği anlaşılmaktadır. Araştırmacının yönlendirmesiyle, “merkez ile yuvarlağın üstünde duran noktanın birleşimi”nden oluşan doğru parçasının “yarıçap” olduğunu ifade etmiştir. Görüşmenin devamında, kendisinden çap kavramını tanımlaması istenmiştir:

A: Çapı tanımlayabilir misin?

Bilge: Şur[a]daki çizginin şur[a]daki çizgiye çap diyoruz.

A: Biraz daha açıklayıcı olabilir misin bana? Çap bir tane doğru parçası değil mi?

Bilge: Evet.

A: Biz ne diyorduk, nasıl bir doğru parçası? Ne özelliği var?

Bilge: Yani nasıl göstersem?

A: İstersen çizebilirsin bana.

Bilge: Mesela şuraya çap diyoruz (çapı doğru bir şekilde çizdikten sonra).

A: Çap peki nereden geçiyor?

Bilge: Merkezi noktadan geçiyor.

Bilge, çap kavramını sözlü olarak tanımlamadan önce, bir çember üzerinde çapı doğru bir şekilde temsil eden bir doğru parçası çizmiştir. Bunun ardından, araştırmacı tarafından merkez noktadan geçen ancak çemberle herhangi bir ortak noktası bulunmayan bir doğru parçası (mavi renkli kalemle) örnek olarak çizilmiş (Şekil 4.10) ve bu doğru parçasının çap olup olmadığı Bilge'ye sorulmuştur:

A: Şöyle bir tane doğru parçası çizsem sana. Burada merkezden geçen burada bitse bu çap mıdır sence?

Bilge: Çaptır.

A: Neden çaptır?

Bilge: Doğru parçası.

A: Buradan başlıyor şurada bitiyor.

Bilge: Sadece buradan mı bitiyor?

A: Evet.

Bilge: O zaman çap değildir.

A: Neden değildir?

Bilge: Çünkü B noktasına değmesi lazım. Çemberin kendisinin üzerinde bulunması lazım.

A: Peki çemberin üzerinde durması gereken noktalar hangileri?

Bilge: Yani buralar (çember yayında rastgele noktalar çizerek). Böyle mesela böyle olabilir (Birkaç çap çizerek)

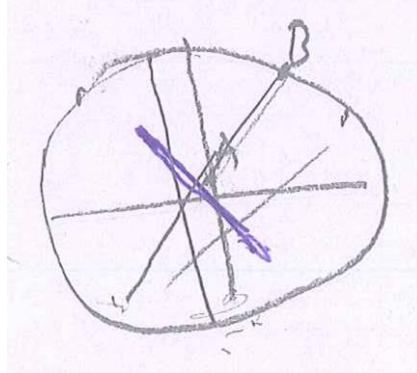
A: Bu çapın uç noktaları nerede bulunuyor?

Bilge: Çapın uç noktası şurası (çemberin kendisini göstererek)

A: Nerelerde bulunuyor onlar? Neyin üzerindeler?

Bilge: Çemberin üzerinde.

Bilge, araştırmacı tarafından çizilen doğru parçasının çap olmadığını belirterek, bir doğru parçasının çap olabilmesi için uç noktalarının “çemberin kendisinin üzerinde bulunması lazım” olduğunu ifade etmiştir. Devamında ise çapı, “merkezi noktadan” geçen ve “çemberin üzerinde” bulunan bir doğru parçası şeklinde tanımlamıştır.



Şekil 4. 10. Bilge'nin Görüşmede Çizdiği Çap Temsilleri.

Katılımcıya sonrasında yarıçap ile çap kavramlarının arasındaki ilişki sorulmuştur:

A: Çap ile yarıçap arasında bir ilişki var mıdır?

Bilge: Vardır.

A: Nasıl bir ilişki vardır?

Bilge: Eşit olması.

A: Eşit miydi çap? Neyi eşitti?

Bilge: Kendisi...

A: Bana bir tane yarıçap çizebilir misin?

Bilge: Yarıçap?

A: Evet, tamam bir tane de çap çizebilir misin? Bu iki doğru parçasında bir ilişki var mı sence (Doğru bir şekilde yarıçap ve çap çizdikten sonra)?

Bilge: Yok.

A: Niye?

Bilge: Bu buradan başlıyor... hee merkezi noktadan geçmeleri.

A: Uzunlukları arasında bir ilişki var mı sence?

Bilge: Yok.

A: Niye?

Bilge: Bu uzun (çizdiği çapı göstererek).

Bilge, yarıçap ile çap arasındaki ilişkinin sadece “merkezi noktadan geçmeleri” olduğunu dile getirmiştir. Fakat başlangıçta bu iki doğru parçasının uzunlukları arasındaki ilişkiyi fark edememiştir. Devamında, uzunlukları arasındaki ilişkiyi şu şekilde hatırlamıştır.

A: Biz çap ve yarıçapa ne diyorduk?

Bilge: Büyük R ya da $2r$ diyorduk.

A: 2 ile neyi çarpıyo[ru]z biz?

Bilge: Çapları.

A: Küçük r neydi?

Bilge: Yarıçap.

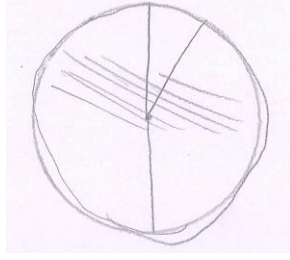
A: 2 ile neyi çarpıyorduk?

Bilge: 2 ile yarıçapı.

A: Yarıçapı çarpıyorduk değil mi? Uzunluğu ne oluyor yani çapın?

Bilge: 2 kat oluyor.

Bilge, araştırmacının yönlendirmesiyle çapın, “2 ile yarıçapı çarparak” bulunabileceğini ifade etmiştir. Ayrıca, görüşme sırasında doğrusal olmayan iki farklı yarıçap çizilerek bu doğru parçalarının oluşturduğu şeklin çap olup olmadığı sorulduğunda, “çünkü doğru olması lazımdır” şeklindeki ifadesiyle bu şeklin çap olmadığını belirtmiştir (Şekil 4.11).



Şekil 4. 11. Bilge'nin Görüşmede Oluşturduğu Yarıçap ve Çap Temsilleri.

Bu bulgulara dayanarak, Bilge'nin çemberin merkezini belirlediği, merkez nokta ile çemberin üzerindeki noktalar arasındaki uzaklığın diğer ifade ile yarıçap uzunluklarının eşit olduğu fark ettiği, iki doğrusal yarıçapın çapı oluşturduğunu ifade ettiği ve çapı çemberin genişliği ile ilişkilendirdiğinden dolayı *eylemi* içselleştirip *süreç* aşamasına ulaştığı söylenebilir.

4.1.1.3. Nesne Aşaması

Gözlemlerde Elde Edilen Bulgular

Öğrencilere derste çember kavramı sorulmuş ve öğrenciler şu şekilde açıklamışlardır:

A: Çocuklar çember neydi?

Merve: Çember çemberdir hocam.

Sabri: Sabit noktaya hocam...

A: Evet (Aleyna'ya dönerek)?

Aleyna: Çember bir nokta... eee bir nokta etrafında dönen eee...

A: Evet (Nida'ya dönerek)?

Nida: Hocam eee nasıl desem... düzlem üzerinde noktaya eşit arasında... aralıktaki noktalar kümesi.

Katılımcı Aleyna, çember kavramını tanımlarken zorlansa da öğrencilerden Nida, “düzlem üzerinde noktaya eşit arasında... aralıktaki noktalar kümesi” ifadesiyle çemberi tanımlayarak, çemberin sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesi olduğunu belirtmiştir. Bu bulgu doğrultusunda, Nida'nın, “nokta” süreciyle “uzaklık” süreci arasında koordinasyon kurarak ‘sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktalar kümesi bir çember belirtir’ şeklinde kapsüllediği düşünülmektedir. Öğrencilerin ders ortamında çember kavramı ile ilişkili problemleri çözme durumları değerlendirilerek *nesne* aşamasına ulaşip ulaşmadığı tespit edilmeye çalışılmıştır. ‘Konu Değerlendirme Soruları 1’ birinci sorunun dördüncü bölümündeki boşluk doldurma sorusu sınıf ortamında şu şekilde çözümlenmiştir:

Bilge: Bir çemberin kendisi ve iç bölgesinden oluşan şekle daire deriz.

A: Peki çemberin merkez noktası çembere ait midir?

Öğrenciler: Hayır

A: Merkez neden dahil değildir?

Nida: Çünkü ilk noktayı koyuyoruz sonra diğer noktayı çevirip döndürüyorduk. Döndürdüğümüz yer çember.

Öğrenciler merkez noktasının çemberin kendisine dahil olmadığından bahsetmişlerdir. Merkez noktanın, yalnızca çemberin çizilmesinde bir araç olarak kullanıldığını belirtmişler ve bu nedenle çember kümesine dahil edilmediğini ifade etmişlerdir. Ayrıca öğrencilerden Nida ‘Konu Değerlendirme Soruları 1’ kapsamında yer alan altıncı soruyu sınıf ortamında şu şekilde çözmüştür:

Nida: Bu 2 santim.... Çap, yarıçapın iki katı olduğu için. Bunun çapını çizdiğimizde burası da 2 santimetre... Demek ki yani burası 4. Burada sadece bir tane olduğu için... Şimdi hepsi 2 santim olduğu için 2, 4, 6, 8, 10, e demek buranın alanı 10.

Öğrencilerin birkaçı: Alanı değil.

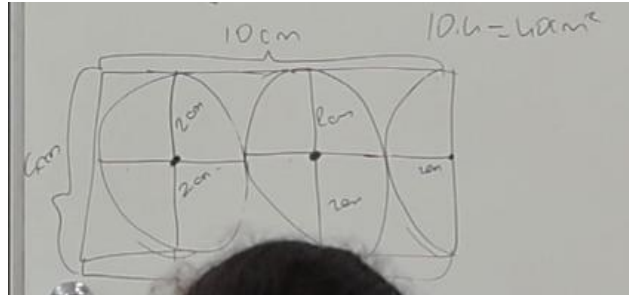
A: Uzunluğu.

Nida: burasında 10.

A: Evet. Peki kısa kenar?

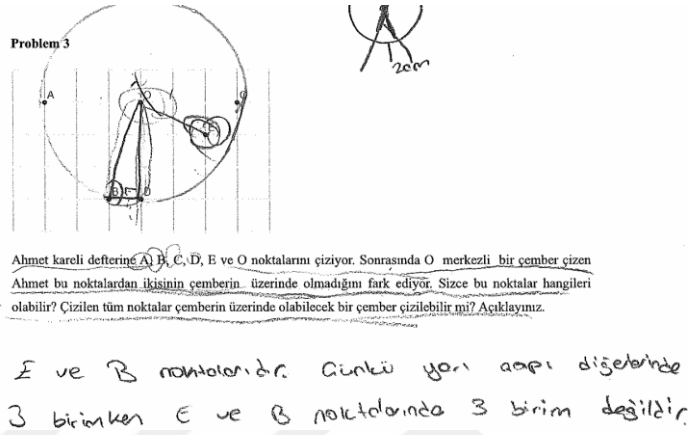
Nida: Kısa kenarı ise bunların ikisi 4 olduğu için 4 santimetre. Dikdörtgenin alanı kısa kenar çarpı uzun olduğu için 10 çarpı 4'ten 40.

Nida, ‘Konu Değerlendirme Soruları 1’ kapsamında yer alan altıncı soruyu çözerken, tahtaya temsili bir dikdörtgen çizmiştir. Sonrasında, bu dikdörtgenin kenarlarına bir noktada değecek şekilde iki tam ve bir yarım çember yerleştirmiştir. Devamında, çemberin yarıçapının değerini yazmış ve “çap, yarıçapın iki katı olduğu için” 2 ile çarparak çapın değerini bulmuştur. Hemen sonrasında, uzun kenar uzunluğunu ve kısa kenar uzunluğu elde etmiştir. Ancak, süreç içerisinde bu uzunlukları ifade ederken “alan” ifadesini kullanarak kavramsal bir hata yapmış, arkadaşlarının uyarısıyla bu hatayı fark ederek düzeltmiş ve son aşamada doğru sonuca ulaşmıştır (Şekil 4.12).



Şekil 4. 12. Nida'nın ‘Konu Değerlendirme Soruları 1’ Altıncı Soruyu Sınıf İçinde Tahtada Çözerken Uyguladığı Adımlar.

Ayrıca, Nida sınıf ortamında grup çalışması ile çözülen *Gerçek Yaşam Problemi* 3 kapsamında, çember üzerindeki tüm noktaların merkez noktasına olan uzaklıklarının eşit olduğunu kabul etmiş ve bu uzaklığı yarıçap kavramı ile ilişkilendirmiştir. Ayrıca Pisagor bağıntısı ile ilişkilendirerek, dik açının gösterdiği kenarın uzunluğu ile yarıçap olan kenarın uzunluğunun farklı olduğunu tespit etmiştir (Şekil 4.13). Tüm bu bulgulardan dolayı, öğrencilerden Nida'nın *nesne* aşamasına ulaştığı düşünülmektedir.



Şekil 4. 13. Nida'nın 'Gerçek Yaşam Problemi 3'ü Çözerken Uyguladığı Adımlar.

Araştırmacı, 'Konu Değerlendirme Soruları 1' içeriğinde yer alan üçüncü soru aracılığıyla *nesne* inşa süreçlerini incelenmeye çalışılmıştır. Küme kavramıyla ilişkili ve kesişen iki çember ile verilen noktaların hangi çemberlere ait olduğunu bulmaya dayanan soru, sınıf ortamında şu şekilde tartışılmıştır:

A: B noktası hangi çembere ait çocuklar?

Öğrenciler: Sol.

A: Peki A noktası hangi çembere ait?

Ahmet: Sağ ve sol.

A: D noktası hangi çembere aittir?

Öğrenciler: (Bilge hariç öğrenciler) sağ.

A: Soldaki çembere ait midir?

Öğrenciler: Hayır.

A: Evet diyen kim? Orada evet diyen vardı kimdi o? Neden evet?

Bilge: Ben hocam.

A: Neden?

Bilge: Hocam çünkü onun (çemberin) içinde.

A: Çocuklar çemberin içindeki nokta çembere ait miydi?

Öğrenciler: Değildi.

A: Dikkatli olmalısın. Peki G noktasını kim söyleyebilir?

Aleyna: İki çemberin ortasında bulunur ve ikisinin de üzerinde bulunmadığı için ikisine de ait değildir.

A: Peki şimdi tekrardan yapalım A noktası iki çembere de ait midir?

Öğrenciler: Evet.

A: E noktası iki çembere ait midir?

Öğrenciler: Hayır.

A: Peki B noktası.

Öğrenciler: Hayır.

Öğrencilerin çoğu, B noktasının soldaki çembere ait olduğunu söylemiş, A noktası sorulduğunda ise katılımcı Ahmet “sağ ve sol” diyerek bu noktanın her iki çembere de ait olduğunu ifade etmiştir. D noktası sorulduğunda öğrencilerin çoğu sağdaki çembere ait derken, katılımcı Bilge ise soldaki çembere de ait olduğunu söylemiştir. Katılımcı Bilge’nin çemberi, ‘çemberin kendisi ve iç bölgesinden oluşan bölge’ olarak hatalı kavramsallaştığı söylenebilir. Öğrencilere G noktası sorulduğunda, katılımcı Aleyna her iki çemberin iç bölgesinde olduğundan bahsetmiş fakat iki çembere de ait olmadığını açıklamıştır. Bu bulgular ışığında katılımcı Ahmet ve Aleyna’nın, *nesne* aşamasına ulaştıkları düşünülmektedir.

Görüşmelerde Elde Edilen Bulgular

Katılımcılardan Aleyna, çember kavramını “*merkez noktadan*” eşit “*boyutta*”ki noktalar kümesi olarak tanımlamıştır. Bu ifadesinden yola çıkarak, ‘nokta’ *süreci*yle ‘uzaklık’ *süreci*ni koordine ederek ‘sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktalar kümesi bir çember belirtir’ şeklinde ‘çember’i kapsüllediği söylenebilir. Aleyna’nın *nesne* aşamasına geçtiğini belirlemek amacıyla fiskiye bağlamı soru yöneltilmiş ve şu şekilde açıklamıştır:

Aleyna: Sadece 3 metre o zaman çember olur.

A: Neden çember olur?

Aleyna: Çünkü 3 metrenin gerisine ya da iler[i]sine sulayamaz.

A: İç bölgesi peki... sulanır mı?

Aleyna: Sulanmaz.

A: Dış bölgesi?

Aleyna: Sulanmaz.

A: Bunun yarıçapı kaç metre olur?

Aleyna: 3 olur.

A: Çapı kaç olur?

Aleyna: 6.

A: Bunun merkezini seçmek istesek hangi noktayı seçersin?

Aleyna: *Bi[r] noktadan başlayıp ee... merkez nokta işte.*

A: *Merkez nokta... ne var orda?*

Aleyna: *Fıskiye.*

Aleyna, her yöne sadece 3 metre öteye kadar sulama yapabilen fıskiye'nin suladığı şeklin, “3 metrenin gerisine ya da ilersine sulayamaz” ifadesiyle bir “çember” olduğunu belirtmiştir. Bu çemberin yarıçapı “3”, çapını ise “6” metre olduğunu belirtmiştir. Ayrıca, merkez noktasında “fıskiye” olduğunu söylemiştir. Bu bağlamda, Aleyna’nın çember nesnesine ulaştığı söylenebilir.

Katılımcılardan Ahmet’e çember kavramı sorulmuştur:

A: *Bana çemberin tanımı yapabilir misin? Bana çemberi açıklayabilir misin?*

Ahmet: *Çemberi nasıl açıklayabilirim? Daire olmayan yani daireye göre içi boş olan bir nokta çizilen yani bir merkezi olan o merkezin üzerinde düzgün bir şekilde noktalardan oluşan bir şekil.*

A: *Peki düzgün de neye göre düzgün? Neresi düzgün?*

Ahmet: *Mesela böyle giderken bi[r] anda şöyle olup t[d]a gelmiyor mesela (çalışma kağıdın üzerinde göstererek).*

A: *Evet peki neyi düzgün bu noktaların?*

Ahmet: *Bu noktalar kendini hiç bozmadan gidiyor.*

A: *Bozmadan gidiyor. Nasıl bozmadan gidiyor?*

Ahmet: *A ile B arasında çizdiğimiz yarıçap B’yi döndürüyor. B’nin dönüşüne göre B’yi takip ediyor.*

Ahmet, çemberin “düzgün bir şekil” olduğunu ifade etmiş ve “A ile B arasında çizdiğimiz yarıçap B’yi döndürüyor” şeklinde açıklama yaparak, çemberin sabit bir merkez nokta etrafında sabit doğru parçasını döndürerek oluşturulduğunu açık bir şekilde belirtmiştir. Bu bulgular ışığında Ahmet, ‘nokta’ süreci ile ‘doğru parçası’ sürecini koordine ederek ‘sabit bir noktadan sabit bir doğru parçası uzunluğu kullanılarak oluşturulan noktalar bir çember belirtir’ şeklinde ‘çember’i kapsüllediği söylenebilir. Görüşmenin devamında, Ahmet’in çember kavramının nesneleştirme durumunu incelemek amacıyla fıskiye bağlamı soru sorulmuştur:

A: *Sadece 3 metre öteyi sulasaydı ne derdik?*

Ahmet: *O zaman çember deriz.*

A: *Maksimum 3 metrede ne deriz.*

Ahmet: *Daire.*

A: *Peki sulama yapılan bölgenin yarıçapı ve çapı kaç metredir?*

Ahmet: *Çap 6, yarıçap 3.*

Ahmet, her yöne sadece 3 metre öteye kadar sulama yapabilen fıskiye'nin suladığı şeklin “çember” olduğunu belirtmiş ve “çap 6 yarıçap 3” diyerek çemberin çapını ve yarıçapını doğru bir şekilde hesaplamıştır. Bu bulgudan dolayı Ahmet,

çember *nesne* aşamasına ulaştığı söylenebilir.

Katılımcılardan Berna, çemberi bir noktaya eşit “*derece*” uzaklıktaki noktalar kümesi olduğunu dile getirmiştir. Berna, ‘nokta’ *süreci* ile ‘uzaklık’ *sürecini* koordine ederek ‘sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktalar kümesi bir çember belirtir’ şeklinde ‘çember’i kapsüllediği söylenebilir. Berna’nın *nesne* aşamasına geçip geçmediğini belirlemek amacıyla yapılan görüşmede fiske bağlamı soru yöneltilmiştir:

A: Peki sadece 3 metre öteye kadar suladığında sen ne derdin? Sadece 3 metrede ne olur?

Berna: 2 metre şuraya gelemiyor. O zaman çember oluyor şöyle (çizdiği çemberin noktalarını kalemle göstererek) *dolan[a]cak çember ol[a]cak.*

A: Peki bu sulama yaptığımız bölgenin merkezini seçmek istersek nereyi seçerdik?

Berna: Ortası.

A: Ortası dediğimiz... ortası ne?

Berna: Burası.

A: Orasını seçiyorsun da neydi o?

Berna: Çeşmeyi seçiyorduk.

A: Peki sulama yaptığımız bölgenin yarıçapı ve çapı kaç metredir?

Berna: Yarıçapı 3 çapı 3 artı 3, 6 metredir.

Berna, fiskeyenin suladığı şeklin “*çember*” olduğunu belirtmiş ve çemberin temel elemanlarından “*yarıçapı 3, çapı 3 artı 3, 6*” şeklinde işlem yaparak doğru bir şekilde hesaplamıştır. Bu bulguya dayanarak, Berna’nın çember *nesnesine* ulaştığı söylenebilir.

Katılımcı Mert’e görüşmede çember kavramını tanımlaması istenilmiştir:

A: Bana çemberin tanımını yapabilir misin?

Mert: İçi boş. Sonsuz tane noktadan oluşur.

A: Bu sonsuz noktaların özelliği neydi?

Mert: Nasıl yani?

A: Bu noktalar rastgele mi?

Mert: Hepsi çemberde.

A: Peki bu noktaları merkez noktayla nasıl bir ilişkisi var?

Mert: Eşit mi?

Mert, çemberin “*İçi boş*” olduğunu ve “*sonsuz tane noktadan*” oluştuğunu ifade etmiş ve bu noktaların merkez noktaya “*eşit*” uzaklıkta olduğunu belirtmiştir. Mert’in ‘nokta’ *süreciyle* ‘uzaklık’ *sürecini* koordine ederek ‘sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktalar kümesi bir çember belirtir’ şeklinde ‘çember’i kapsüllediği söylenebilir. Görüşmenin devamında, Mert’in çember *nesnesine* ulaşma durumunu incelemek amacıyla fiske bağlamı soru sorulmuştur:

A: Peki bu fiskiye sadece etrafı 3 metre uzaklığı suluyor.

Mert: 3 metre uzaklığı sulu... yakınları yani sulayamaz o zaman.

A: Peki bu suladığı bölgeyi gösterebilir misin?

Mert: Şurayı sulayamaz (Çemberin iç bölgesini karalarken) şurayı sular (Çemberin üzerindeki bir noktayı göstererek).

A: Sadece o noktayı mı sular?

Mert: Evet o nokta.

A: Başka yok mudur?

Mert: Bunu fiskiye başka tarafa çevirirsek döndürürsek değişir yani şu siyah şeyler.

A: Bu siyah şey ne ifade ediyor sana?

Mert: Çember.

A: Peki bu sulama yaptığımız bölgenin merkezini seçmek istersen nereyi seçerdik.

Mert: Orta nokta fiss... fiskiye.

A: Peki bu çemberin yarıçapı kaçtır?

Mert: 3 mü?

A: Evet. Çapı kaçtır?

Mert: 6.

Mert, fiskiye'nin suladığı bölgenin "çember" olduğunu ifade etmiş ve bu çemberin yarıçapını "3", çapını ise "6" metre hesaplayarak doğru sonuca ulaşmıştır. Bu bulgudan yola çıkarak, Mert'in çember nesnesine ulaştığı söylenebilir.

Katılımcılardan Bilge, çember kavramını merkez noktaya "eşit" "mesafedeki" noktalar kümesi olduğunu belirtmiştir. Bu bulguya dayanarak Bilge'nin, 'nokta' süreci ile 'uzaklık' sürecini koordine ederek 'sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktalar kümesi bir çember belirtir' şeklinde 'çember'i kapsüllediği söylenebilir. Bilge'nin nesne aşamasına geçme durumunu incelemek amacıyla yapılan görüşmede fiskiye bağlamı soru yöneltmiştir:

A: Peki sadece 3 metre öteye kadar... sadece 3 metre öteyi suluyor. bi[r] tane fiskiye var. Suladığı alan hakkında bir şey diyebilir misin?

Bilge: Suladığı alan hakkında...

A: Suladığı bölge diyelim daha doğrusu.

Bilge: Çember veya dairedir.

A: Çember midir daire midir?

Bilge: Çemberdir.

A: Neden?

Bilge: Çember, sadece 3 metreye kadar gider.

Bilge, fiskiye'nin suladığı şeklin çember olduğunu ifade ettiğinden çember nesnesine ulaştığı söylenebilir.

4.1.2. Daire Kavramının Oluşumuna Ait Bulgular

Hazırlanan genetik çözümlemeye dayalı olarak, öğrencilerin çember nesnesini kapsülünden çıkarıp farklı kavramlar ile koordinasyon kurarak ‘çember ve iç bölgesindeki tüm noktalar daire olarak adlandırılır’ şeklinde tekrar kapsülleyip daire nesnesine ulaşması beklenmiştir. Bu bağlamda, GGB ortamında Etkinlik 3 ve Etkinlik 4 hazırlanmıştır. İlk olarak, verilen noktaların çemberin iç bölgesi, dış bölgesi ve çemberin üzerinde olma durumunu içeren Etkinlik 3 gerçekleştirilmiştir. Bu etkinlik öğrencilerin çember, iç bölgesi ve dış bölgesi kavramlarının inşasına hizmet etmektedir. Devamında gerçekleştirilen Etkinlik 4 ile, çember ve daire arasındaki ilişki GGB üzerinden işlemler gerçekleştirilerek tartışılmış ve böylece öğrencilerin daire nesnesine ulaşmalarına hizmet edilmiştir.

4.1.2.1. Nesne Aşaması

Gözlemlerde Elde Edilen Bulgular

Ders ortamında, Etkinlik 3 kapsamında dairenin iç bölgesi ve dış bölgesi kavramları aşağıdaki gibi tartışılmıştır:

A: Çocuklar tahtada gördüğünüz çemberin iç bölgesi neresi sizce? Bu şekle baktığımızda?

Onur: Merkez mi?

A: Sayılabilir, ama tam olarak değil. Bana tahtada gösterebilecek olan var mı?

Berna: Çember bu ya hocam. Bu, bu, bu, bu, (çemberin iç bölgesinde parmağını rastgele gezdirerek gezdirerek) ... Çizgiye ve noktaya değmeyen.

A: Peki iç bölgesindeki herhangi bir nokta sizce çember ait midir? Şurada bir nokta olduğunu düşünelim (GGB’de çemberin iç bölgesine rastgele bir nokta oluşturarak).

Nida: Çembere ait değil. Çünkü karesel bölge değil.

Berna: Hocam çembere dahil olması için çemberin çizgisi üzerinde olması gerekiyor.

Öğrencilerden Nida çemberin iç bölgesindeki noktalar ile ilgili olarak çembere ait olmadığını söylemiş ve katılımcılardan Berna ise bunun için “çemberin çizgisi üzerinde olması gerekiyor” diyerek arkadaşını desteklemiştir. Sonrasında daire kavramı sınıf ortamında aşağıdaki gibi tartışılmıştır:

A: Çocuklar daire denilince aklınıza ne geliyor?

Nida: Daire hocam yine yuvarlak şekilde içi dolu.

A: Evet, çemberin iç bölgesi ve çemberin kendisinden oluşan bölgeye daire diyoruz. Dairenin iç bölgesindeki herhangi bir nokta sizce daireye ait midir?

Öğrenciler: Evet.

A: Peki çember ile dairenin arasındaki farkı tanımlayabilecek var mı?

Berna: Hocam dairenin içini noktalar doldurmuyor mu?

A: Evet. Peki çember neydi?

Berna: Yuvarlak, içi boş olan.

Nida: Hocam çember halka gibi bir şey değil mi?

A: Evet halkaya benzerdir.

Daire kavramı için Nida “içi dolu” ifadesini kullanmış ve öğrencilerin çoğu çemberin iç bölgesindeki noktaların daireye dahil olduğunu kabul etmişlerdir. Devamında Etkinlik 4’te verilen daire ile çemberin farkı tartışılmış, farklı noktalar belirlenmiş ve bu noktaların daireye dahil olup olmadığı değerlendirilmiştir:

A: Sizce bunların hangisi dairedir?

Bilge: Şu ilk.

A: Neden peki?

Bilge: İçi dolu olduğu için.

A: Peki herhangi bir nokta koysam (GGB’de)... Bu J noktasını buraya koyduğumuzda çember dahil midir (çemberin iç bölgesine taşıyarak)?

Büşra: Çemberin içi tam olarak dolu değil.

A: Evet çemberin içi dolu değil. Daha açıklayıcı olan var mı peki?

Nehir: Çembere ait değildir çünkü çemberin üzerinde değil.

A: Peki dairenin iç bölgesine noktalar koyayım. Bu noktalar daireye dahil midir?

Ahmet: Aittir.

A: Peki birkaç nokta daha koyalım (daireyi çevreleyen çemberin üzerine). Peki bunlar dahil midir?

Cemile: Hocam bence yani kendi tahminimce o da dahildir. Çünkü yine çizgilerin içinde.

A: Peki (daireyi) nasıl tanımlarsın?

Cemile: Çember ve çemberin içinin birleşimi.

Katılımcı Bilge, Etkinlik 4’te verilen çember ile daireyi ayırt etmiştir. Katılımcı Ahmet ise, dairenin iç bölgesinde oluşturulan noktaların daireye dahil olduğunu belirtmiştir. Öğrencilerden Cemile, daireyi çevreleyen çember üzerindeki noktaların daireye dahil olduğunu dile getirmiş, çember ve çemberin iç (bölgesi)inin daire olduğunu ifade etmiştir. Bu bulgular ışığında Cemile’nin, ‘çember’ süreciyle ‘küme’ ve ‘bölge’ süreçlerini koordine ederek ‘çember ve iç bölgesindeki tüm noktalar daire olarak adlandırılır’ şeklinde ‘daire’yi kapsülleyip *nesne* aşamasına ulaştığı düşünülmektedir.

Görüşmelerde Elde Edilen Bulgular

Katılımcılardan Aleyna’ya görüşmede daire kavramı sorulmuş ve aşağıdaki gibi açıklamıştır:

A: Daire kavramı sana ne ifade ediyor?

Aleyna: Çemberin dışındaki halkasıyla içinin dolu hali.

A: *Dıştaki halkadan kasıt?*

Aleyna: *Ters çizgi çiziyo[ru]z...*

A: *Ters çizgiye ne diyorduk?*

Aleyna: *Çember.*

Aleyna, çember ve çemberin iç bölgesinden oluşan bölgeyi daire olarak ifade etmiştir. Böylece katılımcının, ‘çember’ *süreci*yle ‘küme’ ve ‘bölge’ *süreçleri* arasında koordinasyon kurarak ‘çember ve iç bölgesindeki tüm noktalar daire olarak adlandırılır’ şeklinde ‘daire’yi kapsüllediği söylenebilir. Görüşmenin devamında, Aleyna’nın *nesneleştirme* durumunu ortaya çıkarmak için fiskiye bağlamı soru sorulmuştur:

A: *Her yöne sulama yapabilen bir fiskiye düşün. Bu fiskiye maksimum 3 metre öteye kadar her yöne sulama yapıyor. Bu fiskiye'nin suladığı alan hakkında ne düşünürsün?*

Aleyna: *Burası 3 metre, burası 3 metre (bir noktadan sağa sola 3 metre öteye temsili doğru parçaları çizerek) 6 metre suluyor.*

A: *6 metre suluyor... peki bu suladığı alan sana ne ifade ediyor? Maksimum 3 metreye kadar.*

Aleyna: *Daire.*

A: *Neden daire peki çember demedin de daire dedin?*

Aleyna: *Çünkü içi dolu oluyor.*

A: *Neden dolu oluyor?*

Aleyna: *En orta noktadan maksimum 3 metre dediğine göre. Ee yani daha az kısmı suluyabilir.*

Aleyna, ilgili alanın daire olduğunu ifade etmiştir. Dolayısı ile Aleyna’nın *nesne* aşamasına ulaştığı söylenebilir.

Katılımcılardan Ahmet’e de benzer şekilde görüşmede daire kavramı sorulmuş ve şu şekilde açıklamıştır:

A: *Daire kavramı nedir? Açıklayabilir misin?*

Ahmet: *Daire çem... Şekli çembere benzeyen fakat bu çember yerine hocam çizemedim ama (çember çizip iç bölgesini karalamaya çalışırken). Bu çember diyelim hocam (Çemberin içini karadıktan sonra) o zaman bu daire oluyor.*

A: *Nasıl?*

Ahmet: *Mesela günlük hayattan arabaya takılmış lastik daire ama simit veya arabaya takılmamış lastik çember.*

A: *Peki daireye içi dolu dedin, daireyi kaplayan çember daireye dahil midir?*

Ahmet: *Dahil.*

Ahmet daireyi, çember ve çemberin iç bölgesinden oluşan bölge olarak tanımladığı görülmüştür. Bu bulguya dayanarak Ahmet’in, ‘çember’ *süreci*yle ‘bölge’ ve ‘küme’ *süreçleri*ni koordine ederek ‘çember ve iç bölgesindeki tüm noktalar daire olarak adlandırılır’ şeklinde ‘daire’yi kapsüllediği söylenebilir. Görüşmenin

devamında, katılımcının daireyi *nesneleştirme* durumunu tespit etmek için fiskeye bağlamalı soru sorulmuştur:

A: *Sulama yaptığı bölge hakkında ne diyebiliriz?*

Ahmet: *Sulama yaptığı bölgeyi böyle bir çember gibi düşünebiliriz hocam.*

A: *Maksimum 3 metre öteye kadar sulamaktan ne anlıyorsun?*

Ahmet: *Hocam aynı yerden başlıyor ama buraya kadar gidemiyor. Yine bur[a]da bunun hizasında bur[a]da takılıyor hocam (merkezden 3 metre uzaklığı göstererek).*

A: *Maksimum kelimesi neydi?*

Ahmet: *En üst seviye daha üstü yok.*

A: *Fiskeye 2 metre öteye kadar sulayabilir mi?*

Ahmet: *Sulayabilir.*

A: *Peki suladığı bölge nedir? Gösterebilir misin?*

Ahmet: *Yani hocam bu bölge sonsuz şekilde sulanır yani o bölgede daire.*

Ahmet, ilgili alanın “*bunun hizasında burada takılıyor*” diyerek sınırlı bir bölge olduğunu ifade etmiş ve bu bölgenin “*daire*” olduğunu belirtmiştir. Bu bulgular ışığında, Ahmet’in *nesne* aşamasına ulaştığı söylenebilir.

Katılımcılardan Berna’ya görüşmede daire kavramı sorulmuş ve aşağıdaki gibi cevaplamıştır:

A: *Daire kavramı sana ne ifade ediyor?*

Berna: *Hocam daire, çember gibi fakat çemberden farkı içi dolu.*

A: *Peki dairenin bana tanımı yapabilir misin?*

Berna: *Çember ve... çember şeklinde fakat içi dolu.*

A: *Peki çemberin kendisi dahil midir daireye?*

Berna: *Çemberin de içi boş.*

A: *Dairenin sınırı sence... o sınır bir çember belirtiyor. Sence o çember daireye dahil midir?*

Berna: *Evet.*

Berna, dairenin “*çember gibi fakat çemberden farkı içi dolu*” olduğunu söyleyerek, çember ile daire arasındaki farkın iç bölgeyle ilişkili olduğunu ifade etmiştir. Bu bağlamda Berna dairenin, çember ile iç bölgesinin birleşiminden oluştuğunu dile getirmiştir. Bu doğrultuda Berna ‘daire’yi, ‘çember’ *süreci* ile ‘bölge’ ve ‘küme’ *süreçlerini* koordine ederek ‘çember ve iç bölgesindeki tüm noktalar daire olarak adlandırılır’ şeklinde kapsüllediği söylenebilir. Berna’nın *nesne* aşamasına ilerlediğini belirlemek amacıyla yapılan görüşmede kendisine fiskeye bağlamalı soru yöneltilmiştir:

A: *Bi[r] tane maksimum 3 metre öteye kadar sulama yapabilen bir fiskeye düşün tamam mı?*

Berna: *Evet.*

A: *Peki... bu fiskiyenin suladığı alan hakkında ne düşünürsün?*

Berna: *Şurası 3 metreyse... Çemberi ama içi dolu daire...*

A: *İçi dolu mu? Neden içi dolu?*

Berna: *Çünkü su var içinde.*

Berna, ilgili bölgenin çemberi çağrıştırdığını belirtmiş ve “*içi dolu*” ifadesini kullanarak bu şeklin bir daire olduğunu ifade etmiştir. Bu bulgulardan, Berna’nın nesne aşamasına ulaştığı söylenebilmektedir.

Benzer şekilde katılımcı Mert’e görüşmede daire kavramı sorulmuş ve şu şekilde açıklamıştır:

A: *Bana daireyi tanımlayabilir misin?*

Mert: *Daire içi dolu...*

A: *Evet içi doluydu. Çemberle arasında ne fark vardı?*

Mert: *Biri boş biri dolu.*

A: *Peki çemberin kendisi daireye dahil midir?*

Mert: *Evet.*

Mert, daireyi çember ile ilişkilendirerek birinin içi boş, diğerinin dolu olduğunu ifade ederek dairenin çember ve iç bölgesinin birleşimi olduğunu belirtmiştir. Bu bulgu ışığında Mert’in, ‘çember’ süreci ile ‘bölge’ ve ‘küme’ süreçlerini koordine ederek ‘daire’yi ‘çember ve iç bölgesindeki tüm noktalar daire olarak adlandırılır’ şeklinde kapsüllediği söylenebilir. Görüşmenin devamında, Mert’e daireyi nesneleştirme durumunu incelemek amacıyla ‘fiskiye bağlamı soru yöneltildiğinde ise aşağıdaki gibi açıklamıştır:

A: *Maksimum 3 metre menzile kadar sulama yapabilen bir fiskiye düşün. Bu ne şekildir?*

Mert: *Yarıçap mı?*

A: *Yarıçap kaç olur?*

Mert: *3 mü?*

A: *Maksimum 3 metre sulamak ne demek sence?*

Mert: *Çemberin noktaları en fazla 3 metre gidebilir.*

A: *Peki bu iç bölgeyi sular mı?*

Mert: *Evet.*

A: *Peki bu fiskiyenin suladığı bölge ne ifade ediyor?*

Mert: *İçi doluydu daire.*

Mert, fiskiyenin suladığı bölgeyi “*içi doluydu daire*” olduğunu ifade etmiş ve dolayısı ile katılımcının nesne aşamasına ulaştığı söylenebilir.

Katılımcılardan Bilge’ye de görüşmede daire kavramı sorulmuş ve şu şekilde açıklamıştır:

A: Daire kavramı sana ne ifade ediyor?

Bilge: Yani içi dolu olan. Mesela şöyleyse (çember çizerken) ... böyle bunun içi dolu oluyor (çemberin iç bölgesini karalarken).

A: Çizdiğin şekil neydi?

Bilge: Yani içi doluysa mı?

A: Evet.

Bilge: Daire. İçi boşsa çember.

A: Çember sence daireye ait midir (daireyi çevreleyen çemberi göstererek)?

Bilge: Değildir.

A: Neden değildir?

Bilge: Yani bu çember oluyor (çemberi kalemle göstererek). İçini boyadığımızda daire oluyor.

A: Peki içini boyadığımızda daire oldu. Yani dıştaki çember daire dahil değil diyorsun değil mi?

Bilge: Çember daireye...

Bilge, daire için “içi boşsa çember” olduğunu dile getirmiş fakat daireyi çevreleyen çemberin daireye dahil olmadığını belirtmiştir. Bu anlamda Bilge’nin, ‘çember’ *süreci* ile ‘bölge’ ve ‘küme’ *süreçlerini* koordine edemediği için *nesne* aşamasına ulaşamadığı söylenebilir. Sonrasında, kendisine fiskiye bağlamalı soru yöneltilmiştir:

A: Peki maksimum 3 metrede ne olurdu?

Bilge: O da çember olur.

A: O da mı çember olur maksimumda?

Bilge: Maksimum 3.

A: Maksimum en fazla 3 metreye kadar sulayabiliyor.

Bilge: Çember olur.

Bilge, fiskiye nin suladığı bölgeyi çember olarak ifade etmesinden dolayı *nesne* aşamasına ulaşamadığı söylenmektedir.

Katılımcıların *şemaları* incelendiğinde, *eylemde* ve kapsülleme mekanizmalarında farklılıklar olduğu tespit edilmiştir. Bazı katılımcılar, ‘sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaları çizer’ *eylem*ini gerçekleştirirken, bazı katılımcılar ‘sabit bir nokta ve bir ucu bu sabit noktada olan bir doğru parçası uzaklığındaki noktaları çizer’ *eylem*ini gerçekleştirmişlerdir. Bundan hareketle, bazı katılımcılar ‘nokta’ ve ‘uzaklık’ *süreçleri* ile koordinasyon kurarken bazı katılımcılar ise ‘nokta’ ve ‘doğru parçası’ *süreçleri* arasında koordinasyon kurmuşlardır. Benzer şekilde bazı katılımcılar, ‘sabit bir noktaya (merkez) eşit uzaklıktaki noktalar kümesi’ şeklinde kapsülleme kapsülleme gerçekleştirerek ‘çember’ *nesnesine* ulaşırken, diğer katılımcılar ‘sabit bir noktadan (merkez) sabit bir doğru parçası (yarıçap) uzunluğu

kullanılarak oluşturulan noktalar bir çemberi belirtir' şeklinde 'çember' nesnesine ulaşılmıştır. Daire kavramında ise farklılıkların olmadığı tespit edilmiştir. Katılımcılar, 'çember' nesnesini kapsülden çıkartıp sürece indirgeyip 'bölge' ve 'küme' süreçleri koordine edilerek 'daire' nesnesine ulaşılmıştır.

4.2. Çemberin Çevre Uzunluğu Formülünün Oluşumuna Ait Bulgular

Öğrenciler, çemberin çevre uzunluğu formülünün oluşumunda başlangıç nesnesi olarak yarıçap uzunluğu bilinen bir çemberi ele almışlardır. 'Yarıçap uzunluğu bilinen bir çemberin çevre uzunluğu hesaplanıp çap uzunluğuna oranlanması' eylem aşamasıdır. Sınıf ortamında gerçekleştirilen Etkinlik 5 ile öğrencilerden pergel-cetvel kullanarak mukavva kâğıt üzerine çember çizimleri ve çizdikleri farklı yarıçap uzunluğundaki çemberlerinin çevre uzunluklarını ölçmeleri istenilmiş ve eylem aşaması desteklenmiştir. Sonrasında, 'herhangi bir çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna oranlar, bu sayının sabit bir sayı olduğunu görür ve π olarak kabul eder'se süreç aşamasına geçilir. Bu süreçte oran, çember, yarıçap, çap ve π gibi kavramlarla koordinasyonlar kurulabilir. GGB destekli öğretim ortamında gerçekleştirilen Etkinlik 6 ile süreç aşaması desteklenerek öğrencilerin çemberin çevre uzunluğu formülünü ve π sayısını genellemeleri ve içselleştirmeleri sağlanmıştır. Öğrencilerin koordinasyonlar sonucunda, ' π sayısı ile çap uzunluğunun çarpımı çevre uzunluğunu verir' bilgisini kapsülleyip nesne aşamasına ulaşması beklenir. Öğrencilerin nesne aşamasına ulaşıp ulaşmadığını belirlemek amacıyla için ise sınıf ortamında ve görüşmelerde kendilerine sunulan problem durumları değerlendirilmiştir.

4.2.1. Eylem Aşaması

Gözlemlerde Elde Edilen Bulgular

Öğrenciler sınıf ortamında, öncelikle Etkinlik 5 kapsamında mukavva kağıtlarının üzerine çizdikleri çemberlerin yarıçap ve çap uzunluklarını belirleyip kesmişlerdir. Araştırmacı önce öğrencilere çemberin çevre uzunluğunu ölçmenin mümkün olup olmadığını sormuştur:

A: Çemberin sizce çevresi ölçülebilir mi çocuklar?

Öğrenciler: Evet.

Mert: Hocam çemberin köşesi yok ölçemeyiz ki.

A: Neden ölçemeyiz?

Berna: Bilmiyoruz, çünkü öğrenmedik.

Aleyna: Hocam iple etrafını dolayıp ondan sonra metreyle ölçeriz.

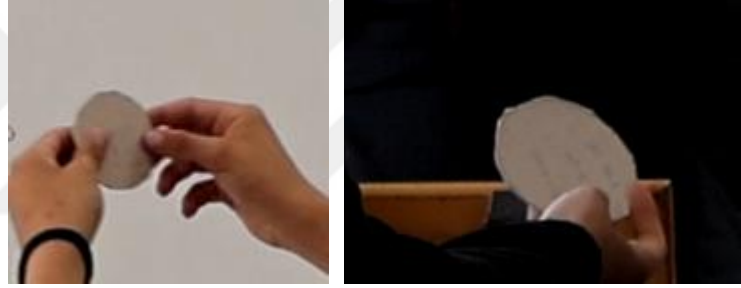
A: Aleyna ne dedi? İple çemberin çevresini tam bir turla döndürüp çemberin çevresinin uzunluğunu ölçebiliriz. Sizce doğru mu?

Öğrenciler: Evet.

Katılımcılardan Mert ve Berna çemberin çevre uzunluğunu ölçülemeyeceğini belirtmelerine rağmen diğer katılımcı Aleyna, etrafını dolayan bir iple çemberin çevresini ölçebileceğini söylemiştir. Ardından araştırmacı, derste her sıraya birer adet mukavva kağıt dağıtmış, ardından bu mukavva kağıtlara çember çizmeleri ve çizilen çemberlerin çaplarını ölçmeleri istenmiştir. Daha sonra çizilen çembersel bölgenin kesilmesi istenilmiştir (Şekil 4.14 ve Şekil 4.15).



Şekil 4. 14. Öğrencilerin Oluşturdukları Çemberi Kesme Görselleri.



Şekil 4. 15. Öğrencilerin Oluşturdukları Çembersel Bölge (Daire) Somut Model Görselleri.

Kesilen çembersel bölge(daire)lerin çevreleri, mezura yardımıyla ölçülmüştür. Bu işlemlerin ardından, çemberlerin ölçülen çevre uzunlukları çap uzunluklarına oranlanmıştır. Araştırmacı, sırayla öğrencilerin buldukları çevre uzunluklarını çap uzunluğuna oranlayarak tahtaya yazmıştır:

A: Evet çocuklar kaç buldunuz çevresini?

Onur: 10.

Sabri: 5.

A: Kaç buldunuz siz çevresini?

Nida: 22.

A: Çapı kaç buldunuz?

Nida: 7.

A: (Tahtada çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna bölerek) 22 bölü 7 kaç çıktı 3,14. Peki siz ne yaptınız?

Mustafa: 38.

A: Çapı kaç buldunuz?

Mustafa: 11.

A: 38 bölü 11 kaç çıktı 3,45. Siz ne yaptınız?

Mehtap: Çevresi 32 çapı da 11.

A: 2.90 (tahtada işlem yaparak). Siz ne yaptınız?

Sabri: 16.

A: Çap?

Sabri: 5.

A: 16 bölü 5... 3,2.

Araştırmacı, öğrencilerin buldukları çevre uzunluklarını çap uzunluğuna oranlamaya ve sırayla tahtaya yazmaya devam etmiştir:

A: Evet sizde?

Elif: Hocam çevre 15.

A: Çevre 15 (hesap makinesine yazarak). Çap kaç?

Bilge: 4.5

A: ...Bölü 4,5... 3,33.

A: Siz ne yaptınız?

Derya: Hocam biz bulduk 12'ye 4 yazıyor.

A: 12'ye 4 ise 3 olur.

A: Siz ne yaptınız?

Aleyna: 37'ye 12.

A: 37'ye 12 tamam. Kaç 3,08.

A: Siz ne yaptınız?

Mert: Hocam 45'e 16.

A: Kaç çıktı 2,81.

Devamında, süreci geç tamamlayan diğer öğrencilerin belirlediği değerler de hesaplanmaya çalışılmıştır:

Berna: Hocam bizimki 21'e 8.

A: 21'e 8... kaç 2,81.

Zehra: 23'e 7.

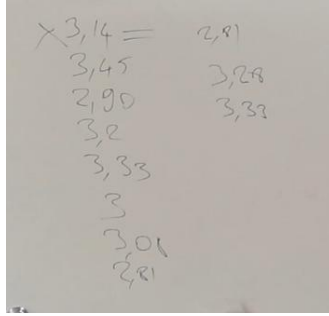
A: 23 bölü 7... 3,28.

Onur: Hocam 10'a 3.

A: Tamam sizinki 3.33.

Sınıf ortamında öğrencilerin çoğunluğu sürece dahil olup, pergel, cetvel, mezura ve makas kullanarak fiziksel bir şekilde 'yarıçap/çap uzunluğu bilinen bir çemberin

çevre uzunluğunu çap uzunluğuna oranlaması'nı yaparak *eylem* aşaması gerçekleştirmişlerdir (Şekil 4.16).



Şekil 4. 16. Öğrencilerin Oluşturdukları Çemberlerinin Çevre Uzunluklarının Çap Uzunluğuna Oranları.

Sürecin devamında, GGB ortamında Etkinlik 6 kapsamında tekrar çemberin çevre uzunluğun çap uzunluğuna oranlanması şu şekilde gerçekleştirilmiştir:

A: *Bakın çocuklar herhangi bir çemberimiz var yarıçapı 2 birim. Çemberin çevre uzunluğunu ölçeceğiz bakın. Çemberin çevresini sürgüsünü hareket ettiriyorum ben, kaç çıktı çemberin çevresi çocuklar?*

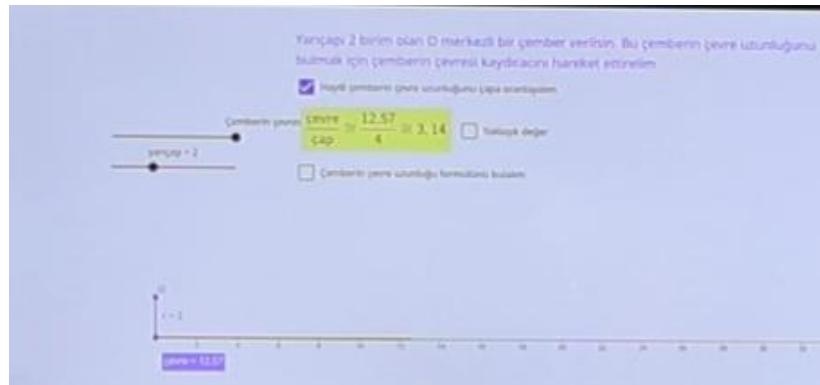
Öğrenciler: *Bazıları 12 bazıları 12.57.*

A: *Peki çemberin çapı kaç birim?*

Nida: 4.

A: *Yarıçapı 2 birim oluyorsa çapı 4 birim oluyor değil mi çocuklar. Çemberin çevresini ölçtüğümüzde ne çıktı? 12.57 çıktı. Peki bu çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna oranlayalım tamam mı bakalım ne çıkıyor? Çevreyi çap uzunluğuna böldüğümüzde 12.57'yi 4'e böldüğümüzde isterseniz hesap makinesiyle yapın isterseniz elinizle yapın bu sayı 3.14 çıkıyor (çemberin çevresini çap uzunluğuna oranlayalım işaret kutusuna tıklanıldığında).*

Böylece Etkinlik 6'da, Etkinlik 5'teki gibi yarıçap uzunluğu 2 birim olan çemberin çevre uzunluğu GGB ortamında hesaplanmış (Şekil 4.17), bu değer çemberin çap uzunluğuna oranlanarak 'yarıçap/çap uzunluğu bilinen bir çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna oranlaması' *eylemi* gerçekleştirilmiştir.



Şekil 4. 17. Etkinlik 6'da Yarıçapı 2 Birim Olan Çemberin Çevre Uzunluğunu Çap Uzunluğuna Oranlama.

Görüşmelerde Elde Edilen Bulgular

Katılımcılardan Aleyna'ya görüşmede sınıf ortamında yapılan Etkinlik 5'te neler yaptıkları sorulmuştur:

A: *Hatırlıyor musun? İlk deste biz çemberin çevresini mukavva kağıtlarla oluşturup ölçmeye çalışmıştık.*

Aleyna: *Evet.*

A: *O etkinlikte ne yapmıştık biz?*

Aleyna: *Çemberin çevresini çapına bölmüştük.*

Aleyna'nın "çemberin çevresini çapına bölmüştük" şeklindeki ifadesi, 'yarıçap/çap uzunluğu bilinen bir çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna oranlaması' eylemini gerçekleştirdiğini göstermektedir. Devamında, GGB ortamında gerçekleştirilen Etkinlik 6'da ne yapıldığı sorulmuştur:

A: *Sonrasında tahtada bir etkinlik yapmıştık hatırlıyor musun? Görsel olarak göstereyim (Görsel olarak etkinlik gösterilerek). Bu etkinlikte ne yapmıştık?*

Aleyna: *Eee çemberi böyle yuvarlamıştık, o kırmızı şey açılmıştı (Çemberin doğru parçasına dönüştürülmesi), boyutunu ölçmüştük (dönüştürülen doğru parçasının uzunluğunun ölçülmesi).*

A: *Evet yani çemberin çevresi sürgüsü ile açılmıştı demiştin sen bana (çemberin doğru parçasına dönüştürülmesi). Peki çemberin çevresi sürgüsünü hareket ettirdiğimizde görüntüye ne oldu?*

Aleyna: *Düz bir çizgi oldu.*

A: *Peki bu düz çizgi bizim için ne işe yaradı?*

Aleyna: *Boyutunu (çemberin uzunluğunu) ölçmemizi sağladı.*

A: *Boyutunu mu?*

Aleyna: *Evet.*

A: *Yani uzunluğunu ölçmemizi sağladı değil mi? Bu şekilde biz uzunluğunu bulduk. Ondan sonra ne yaptık biz?*

Aleyna: *Yarıçapına böldük.*

A: *Sonra yarıçapına mı böldük?*

Aleyna: *Eee çapına.*

Aleyna, Etkinlik 6'da çemberin çevre uzunluğunu ölçmek için onu "düz bir çizgi" gibi düşünüp doğru parçasına dönüştürerek uzunluğunu ölçtüğünü belirtmiştir. Daha sonra, bu uzunluğu çemberin "çapına" böldüğünü ifade etmiştir. Bu bulgulardan dolayı, Aleyna'nın 'yarıçap uzunluğu bilinen bir çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna oranlama' eylemini gerçekleştirdiği söylenebilir.

Katılımcılardan Ahmet'e görüşmede derste yapılan Etkinlik 5 hakkında soru sorulmuştur:

A: *Biz çemberin çevresini ölçmeye çalışmıştık hatırlıyor musun?*

Ahmet: *Evet.*

A: *İlk derste mukavva kağıtlarını dağıtmıştım.*

Ahmet: *Evet.*

A: *Çember çizmiştik... Herkes.*

Ahmet: *Evet.*

A: *Oluşturduğumuz şeklin kenarlarını kesmiştik.*

Ahmet: *Evet.*

A: *Ondan sonra ne yapmıştık biz?*

Ahmet: *Ondan sonra çemberin alanını ay... alan diyorum çevresini bulduk.*

A: *Ondan sonra ne yaptık peki? Sadece çevresini mi bulduk?*

Ahmet: *Ondan sonra hatırlamıyorum.*

Ahmet, Etkinlik 5'te çemberin çevresini hesapladığını söylemiş fakat çemberin çevresini çapa oranlandığını hatırlayamamıştır. Araştırmacı yönlendirmesiyle şu şekilde hatırlanması sağlanılmıştır.

A: *Peki tamam. Çemberin çevresini bulduk de[ğil] mi?*

Ahmet: *Evet.*

A: *Herkes çemberin çevresinin bir şeye bölüp tahtaya yazmıştık. Bir sayıya oranlamıştık.*

Ahmet: *Hee şey. Hatta π 'yi bulmuştuk.*

A: *Evet π 'yi bulmuştuk. π 'yi nasıl bulmuştuk peki?*

Ahmet: *Yarıçapına bölerek bulmuştuk.*

Ahmet, π 'yi çemberin çevre uzunluğunu “*yarıçapına bölerek*” hesapladığını belirtmiş, ancak bu ifade *eylem* aşamasını temsil etmektedir. Zira, başlangıçta yaptığı hatanın farkına varmamış olup, araştırmacı tarafından yönlendirilerek şu şekilde düzeltilmiştir.

A: *Etkinlikten devam edelim. Etkinlikte çemberin çevresi sürgüsü vardı hatırlıyor musun?*

Ahmet: *Evet.*

A: *Bu sürgüyü hareket ettirdiğimizde ne oldu?*

Ahmet: *Çevresi bulundu.*

A: *Çemberin çevresini ne yaptık biz?*

Ahmet: *Yarıçapına böldük.*

A: *Çemberin çevresini yarıçapına mı böldük emin misin?*

Ahmet: *Hayır hayır hayır hayır çapına.*

Ahmet, GGB destekli hazırlanan Etkinlik 6'da çemberin çevresini, sürgüyü hareket ettirerek hesaplamış ve bu durumu “*çevresi bulundu*” şeklinde açıklamıştır. Sonrasında, bu çevre uzunluğunu “*yarıçapına*” böldüğünü söylemiş, fakat yaptığı hatayı fark ederek aslında çemberin çevresini “*çapına*” böldüğünü söyleyerek düzeltilmiştir. Bu bulgudan hareketle Ahmet'in Etkinlik 6 kapsamında, ‘yarıçap uzunluğu bilinen bir çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna oranlama’sı *eylem* aşamasıdır.

Katılımcılardan Berna'ya görüşmede sınıf ortamında yapılan GGB destekli Etkinlik 6 hakkında soru sorulmuştur:

A: Ben bir size etkinlik açmışım. Etkinliği hatırlıyor musun?

Berna: Hı hı çemberi açmıştık.

A: Çemberi açtıktan sonra ne yaptık?

Berna: Bi[r] şeyleri böldük...

A: Çemberin çevresi sürgüsünü değil mi? Hareket ettirdiğimizde ne yaptık?

Berna: Açıldı.

A: Sonrasında açtıktan sonra... niye açtık bu çemberi?

Berna: Çemberin ölçüsünü aldık (çemberin çevre uzunluğu). Sonra 12,57 (çemberin çevresi) yarıçapı bunun 2'ymiş ona bölecektik.

A: Yarıçapına mı bölüyorduk?

Berna: Yok çapına bölüyorduk, yarıçapı 2 ise tam çap 4.

Berna, Etkinlik 6'da çemberi doğru parçasına dönüştürdüğünü “çemberi açmıştık” şeklinde açıklayarak ifade etmiştir. Bu işlem sayesinde sayı doğrusu üzerinde çemberin çevre uzunluğunu hesapladığını, “çemberin ölçüsünü aldık” diyerek belirtmiştir. Ardından, çemberin çevre uzunluğunu önce yarıçapına böldüğünü söylemiş, ancak düzeltme yaparak “çapına” böldüğünü ifade etmiştir. Bu bulgudan yola çıkarak, Berna'nın ‘yarıçap uzunluğu bilinen bir çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna oranlaması’ eylemini gerçekleştirdiği söylenebilir.

Katılımcı Mert'e görüşmede sınıf ortamında yapılan Etkinlik 5 hakkında soru sorulmuştur:

A: Çemberin çevre uzunluğunu ölçtüğümüz bir ders vardı mukavva kartonlarıyla. O derste ne yapmıştık?

Mert: Karton eee... ilk önce bi[r] tane pergelle çember çizmiştik. Sonra merkez noktası belirlemiştik. Ondan sonra da kesmiştik.

A: Kestik sonrasında ne yaptık peki?

Mert: Çemberin çevresini ölçtük.

A: Ondan sonra peki?

Mert: Ee şey π sayısına bölmüş...

A: π sayısına mı bölmüştük?

Mert: He hayır bi[r] dak[i]ka şeye bölmüştük.

A: Neye bölmüştük?

Mert: π sayısına.

A: π sayısına değil çemberin çevresini ölçtük. Sonra biz bu değeri bi[r] şeye bölmüştük?

Mert: Yarıçapa.

A: Derste yarıçapa mı bölmüştük?

Mert: Ben öyle hatırlıyorum valla.

A: Biz çemberin çevre uzunluğunu çapa bölmüştük hatırladın mı?

Mert: Hımm evet hatırladım.

Mert, sınıf ortamında “*pergelle çember çizmiştik*” diyerek çember çizdiğini ve çizdiği “*çemberin çevresini*” ölçtüğünü belirtmiştir. Fakat, derste çemberin çevre uzunluğunu “ *π sayısına*” böldüğünü ifade etmiş, sonrasında araştırmacının hatırlatmasıyla çemberin çevresini çap uzunluğuna böldüğü hatırlatılmıştır. Bu bağlamda Mert, ‘yarıçap uzunluğu bilinen bir çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna oranlaması’ eylemini gerçekleştirmiştir.

Benzer şekilde katılımcılardan Bilge’ye görüşmede sınıf ortamında yapılan Etkinlik 5 hakkında soru sorulmuştur:

A: Yaptığımız derste mukavva kağıtlarla çember çizmiştik.

Bilge: Evet.

A: Sonra kesmiştik. Sonrasında?

Bilge: Sonrasında çapını ve yarıçapını bulmuştuk ve çevresini bulmuştuk.

A: Çevresini ne yaptık sonrasında?

Bilge: Eee $n[e]$ $[y]$ aptık $2\pi r$ falan ya...

A: Şimdi çemberin çevresini hesapladık ya metre ile.

Bilge: He he.

A: Ondan sonra çemberin çevresini ne yaptık?

Bilge: Bulmuş olduk.

A: Çemberin çevresi ile çapı ne yaptık?

Bilge: Çarptık mı?

A: Çemberin çevresini bulduk sonra yarıçapla çapı bulduk. Sonra çemberin çevresini ne yaptık?

Bilge: Çarptık hocam. $2\pi r$ şöyle yaptık... $2\pi r$ kare falan...

Bilge, Etkinlik 5’te çember çizdiğini ve bu çemberin “*çapını ve yarıçapını*” bulduğunu dile getirmiştir. Sonrasında, çemberin “*çevresini*” hesapladığını söylemiştir. Fakat, Bilge derste yapılan ‘çap uzunluğu bilinen bir çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna oranlar’ eylemini hatırlamadığı görülmektedir. Ardından, GGB destekli Etkinlik 6 hatırlatılmıştır:

A: Bu derste biz çemberin çevresi sürgüsü vardı hatırlıyor musun?

Bilge: Evet.

A: Bu sürgüyü hareket ettirdiğimizde görüntüye ne oldu?

Bilge: Bir düzlem oldu... doğru oldu...

A: Bu doğru olunca ne oldu?

Bilge: Çemberin yani nasıl desem... çevresi.

A: Çevresi? Bu doğruyu yapmamız ne işimize yaradı bizim?

Bilge: Çemberin çevresini bulmamıza yaradı.

A: Bulmamıza yaradı. Bulduk mu?

Bilge: Bulduk.

A: Sonra biz çemberin çevresini ne yaptık biz?

Bilge: Çemberin çevresi...

Bilge, ‘çemberin çevresi’ sürgüsünü hareket ettirildiğinde çemberin “doğru” parçası olduğunu ve bu sayede “çemberin çevresini bulmamıza yaradı”ğını belirtmiştir. Fakat, *eylemi* tekrardan hatırlamadığı görülmüştür. Sonrasında çemberin çevresi ile çap arasındaki ilişki sorulmuştur.

A: Çemberin çevresi ile çap arasında bir ilişki var mıdır?

Bilge: Çapı arasında var.

A: Nasıl bir ilişki vardır.

Bilge: He çevresiyle... çevresiyle bir alakası yok hocam.

A: Niye yok?

Bilge: Yani şöyleyse (çember ve bir çap çizerek), doğru olduğunda (çap) yani bunla alakası olmaz ki (çember ile kıyaslayarak) hocam.

A: Tamam peki çemberin çevresini çapa böldüğümüzde ne oldu?

Bilge: Hee anladım hocam ayırmış olduk ikiye ayırmış olduk (çemberin çapını çizdikten sonra ikiye ayırdığını düşünerek).

A: Çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna böldük değil mi?

Bilge: Ayırdık.

Bilge, çemberin çevresi ile çap arasında bir ilişkinin olmadığını ve çap kavramının “doğru” olduğunu ve çember ile arasında ilişki olmadığını söylemiştir. Sonrasında araştırmacı yönlendirmesiyle, ‘çemberin çevresini çap uzunluğuna bölme’ eyleminin ne ifade ettiği sorulmuştur. Öğrenci bu soruya, çemberi “ikiye ayırmış” olduğunu söyleyerek cevap vermiştir. Bu bulgundan dolayı, Bilge’nin *eylem* aşamasında kaldığı söylenebilir.

4.2.2. Süreç Aşaması

Gözlemlerde Elde Edilen Bulgular

Somut materyallerin kullanıldığı Etkinlik 5’te, çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranının hesaplanmasının ardından öğrencilere, bu hesaplamada çıkan sonuçların birbirine yakın olma nedenleri sorulmuştur:

A: Herkes farklı farklı daireler kesti. Bu çemberlerin çevre uzunluklarını çap uzunlarına böldüğümüzde hep yakın sayılar geldi niye böyle oldu çocuklar sizce? Hep benzer sayılar, bazılarınızın çemberleri büyük bazılarınızınki küçük olsa da.

Mehtap: Hocam bence şeyden dolayı çünkü hepimiz merkez noktasıyla şu pergelin ucunu farklı yerlere koyduğumuz için farklı sayılar çıktı.

A: Farklı çevre uzunlukları var değil mi?

Mehtap: *Hocam pergelle şu pergelle aralıkları farklı.*

A: *Farklı ama sonuçlar niye biraz benzer gibi?*

Nida: *Çünkü benzer çemberler.*

A: *Bazıları büyük çember çizdi bazıları küçük çizdi ama sonuç hep 3 civarı?*

Berna: *Hocam çünkü çemberin belirli bir şeyi var.*

A: *Neyi var?*

Berna: *Şeyi var...*

Öğrenciler, çemberlerin çevre uzunluklarının çap uzunluklarına oranlarının benzer olduklarını söylemişlerdir. Öğrencilerden Nida, bu durumu “benzer çemberler” diye yorumlarken, öğrencilerden Mehtap “pergelle aralıkları farklı” şeklinde açıklamıştır. Sınıf içindeki diyalog ve gözlemler doğrultusunda öğrencilerin bu oranı sabit bir sayı olabileceği fikrini henüz düşünmedikleri anlaşılmaktadır. Araştırmacı daha sonra sınıfta GGB destekli Etkinliği 6’yı açarak, çemberlerin çevre uzunluklarını çap uzunluğuna oranlanması işlemini doğru ve hatasız bir şekilde gerçekleştirmesini sağlamıştır.

A: *Şimdi yarıçapı 1 birim olan çemberin çevre uzunluğunu ölçelim. Kaç çıkacak bakalım... çevresi kaç çıktı çocuklar 6.28 görüyo[r]nuz mu[sunuz]?*

Öğrenciler: *Evet.*

A: *Şimdi çemberin çevresini çap uzunluğuna bölüyoruz. Yarıçapı 1 birim olan çemberin çapı kaç birimdir?*

Aleyna: *2.*

A: *6.28’i 2’ye bölersek ne olur çocuklar (çemberin çevresini çap uzunluğuna oranlayalım işaret kutusuna tıklanıldığında). 3.14 olur değil mi?*

Berna: *Aaa 3.14.*

A: *Yarıçapı 3 birim olan çembere bakalım çocuklar. Yarıçapı 3 birim olan çemberin çapı kaç birim?*

Nida: *6.*

A: *6 birim değil mi? Çevresini hesaplayalım... (çemberin çevresi sürgüsünü hareket ettirdikten sonra). 18.85 de(değil) mi? 18’i 6’ya böldüğümüzde 3 civarı bi[r] şey çıkması gerekiyor. Bakalım 3.14 çıktı değil mi?*

A: *Yarıçapı 4 birim olan çemberin çevresine bakalım çocuklar? Bakın yarıçapı 4 birim olan ne oldu çevresi 25.14 değil mi? 13 pardon. Çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna bölelim. Yarıçapı 4 birim olan çemberin çapı nedir?*

Berna: *8.*

A: *8’dir değil mi?*

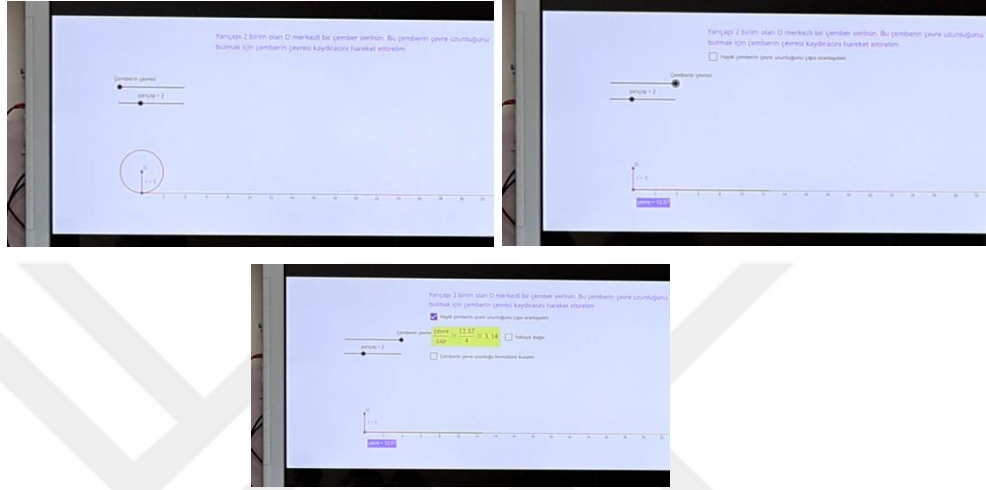
Kemal: *3.14.*

A: *25.13’ü 8’e böldüğümüzde ne oluyor?*

Kemal: *3.14.*

GGB destekli Etkinliği 6 kapsamında, öğrencilerin çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranının sabit bir sayı olduğunu anlamaları hedeflenmiştir. Yarıçapı

2 birim olan çemberde çevrenin çapa oranlanması *eylemi* gerçekleştirilmiş (Şekil 4.17), aynı işlem yarıçapı 1 birim olan çemberde de yapılmıştır (Şekil 4.18). Sonuçlar yine aynı çıktığında, katılımcı Berna, “aaa 3.14” diyerek şaşkınlığını dile getirmiştir. Yarıçapı 4 birim olan çemberde çevreyi çap uzunluğuna bölmeden önce Kemal, bu sayının sabit olduğunu ifade ederek “3.14” demiştir. Bu bulgu ışığında, Kemal ve katılımcı Berna’nın *eylemi* içselleştirerek *süreç* aşamasına ulaştıkları söylenebilir.



Şekil 4. 18. Sınıfta Gerçekleştirilen GGB Destekli Etkinlik 6’da Yarıçapı 2 Birim Olan Bir Çemberin Çevre Uzunluğunun Çap Uzunluğuna Oranlanması.

Görüşmelerde Elde Edilen Bulgular

Katılımcılardan Aleyna’ya görüşmede çemberin çevre uzunluğuyla o çembere ait çap uzunluğu arasındaki ilişki sorulmuştur:

A: Peki çemberin çevre uzunluğu ile çap uzunlu arasında bir ilişki var mıdır?

Aleyna: Eee var.

A: Çap ile çemberin çevre uzunluğu... Nasıl bir ilişki vardır?

Aleyna: Çapı 3.14 ile çarparsak çevresini buluruz.

Aleyna, çemberin çevre uzunluğu ile çap uzunluğu arasındaki ilişkiyi açıklamış ve çemberin çap uzunluğunu π sayısı olan “3.14 ile çarparsak” çevre uzunluğunu elde ettiğini söylemiştir. Çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranının sabit bir sayı olduğunu ifade etmesi beklenirken, Aleyna çemberin çevre uzunluğu formülünden de bahsetmiştir. Sonrasında araştırmacı tarafından yönlendirilerek, çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranının ne anlama geldiği sorulmuştur:

A: Çevre uzunluğunu çap uzunluğuna böldüğümüzde ne olmuştu?

Aleyna: π çıkmıştı.

A: Peki π nasıl bir sayı?

Aleyna: Eee sonsuza kadar giden bir sayı.

A: *Peki çemberlerin çevre uzunluklarını çap uzunluklarına böldüğümüzde bu π sayısı değişir mi?*

Aleyna: *Hayır.*

A: *Farklı çemberler olsa da değişir mi?*

Aleyna: *Değişmez.*

Aleyna, bir çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranının sabit, yani “değişmez” bir sayı olduğunu belirtmiştir. Bu sayıyı “ π ” olarak adlandırmış ve “sonsuz kadar giden bir sayı” diyerek ifade etmiştir. Farklı çemberlerde de bu sayının “değişmez” olduğunu vurgulamıştır. Bu bulgular ışığında Aleyna, çevre uzunluğu ile çap uzunluğu ilişkisi üzerine düşündüğü, çap ile çevre uzunluğu arasındaki oranın sabit olduğunu ve bu sayının farklı çemberlerde de değişmediğini ifade ettiği için *eylemi* içselleştirip *süreç* aşamasına ulaştığı söylenebilir.

Katılımcılardan Ahmet’e görüşmede çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna bölündüğünde ne olduğu ve çemberin çevresiyle çapı arasındaki ilişki sorulmuştur:

A: *Yaptığımız etkinlikten yola çıkarak çemberin çevresini çapına böldüğümüzde ne oldu?*

Ahmet: *$\pi \dots 3,14$.*

A: *Çemberin çevresi ile çap arasında bir ilişki var mı?*

Ahmet: *Var hocam çünkü, hocam $2\pi r$ yapmamıza gerek yok hocam çap üzerinden gideceksek π büyük R (πR) yapabiliriz hocam.*

A: *Evet*

Ahmet: *π büyük R ’de de yani büyük R çemberin çapı olduğu için oraya çap yazaca[ğ]ız.*

Ahmet, çemberin çevre uzunluğunu çapına bölündüğünde “ $\pi \dots 3,14$ ” olduğunu ifade etmiştir. Ardından, çemberin çevre uzunluğu ile çap arasındaki ilişki sorulduğunda, çemberin çevre uzunluğu formülüne değinmiştir. Daha sonra araştırmacı yönlendirmesiyle, π sayısının nasıl bir sayı olduğu ve bu sayının çemberin boyutuna göre değişip değişmediği üzerine sorular sorulmuştur:

A: *Bu π sayısı çemberlerden çembere değişir mi? Çemberin çevre uzunluğu büyük olsa da küçük olsa da bu sayı değişir mi?*

Ahmet: *Hayır çünkü, hocam çember mesela böyleydi diyelim şöyle 4’tü burası çevresi 12’ydi bunun gibi (çapı 4 cm çevre uzunluğu 12 cm olan bir çember çizerek). Ama böyle oldu mesela nasıl diy[ey]im... ya atıyorum hocam... Bunlar bölününce 3,14 oldu gibi düşünelim. Burası 64 olsun burası 18 olsun (çapı 18 cm çevre uzunluğu 64 cm olan bir çember çizerek)... Hocam bu çapı bu şeyi çevresi (çapı 18 cm çevresi 64 cm olan çemberin çapını ve çevresini göstererek).*

A: *Çevresi.*

Ahmet: *Hocam bu ikisini de bölünce (çevreyi çapa böldüğünü varsayarak) 3,14 çıktığını varsayalım demiştim.*

A: *hım.*

Ahmet: *Hocam bunun çevresi büyüdükçe çember büyür, çember büyüdükçe çapı da büyür.*

A: *Yani*

Ahmet: *Çünkü çapı çevresine oranlı.*

A: *Aynı mı peki o çemberlerde. O çemberlerde çevresi uzunluğunun çap uzunluğuna bölümü hep aynı sayı mıdır?*

Ahmet: *Evet.*

A: *O sayı neydi?*

Ahmet: *π yani 3,14.*

Ahmet, çemberin çevre uzunluğunun değeri değişse de π sayısının sabit kaldığını belirtmiştir. Görüşmede çapı 18 cm ve 4 cm olan iki farklı çember çizmiş ve çevrelerini hesaplamıştır (Şekil 4.19). Yapılan hesaplamalarda, çemberin çevre uzunluğu formülü üzerinde tersine işlem yaparak, çemberlerin “çapı çevresine oranlı” olduğunu vurgulayarak çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranının hep aynı sayı olduğunu ve bu sayıyı da “ π yani 3,14” olduğunu ifade etmiştir. Bu bulgulara dayanarak Ahmet, çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranının sabit olduğunu fark ettiği ve bu işlemin üzerine tersine işlem uyguladığından dolayı *eylemi* içselleştirip *süreç* aşamasına ulaşmıştır diyebiliriz.



Şekil 4. 19. Ahmet'in Görüşmede Çizdiği Çemberler ve Çevre Uzunlukları.

Katılımcı Berna'ya görüşmede çemberin çevre uzunluğu ile o çembere ait çap uzunluğu arasındaki ilişki sorulmuştur:

A: *Çemberin çevresi ile çap arasında bir ilişki var mıdır?*

Berna: *Var*

A: *Nasıl bir ilişki vardır?*

Berna: *Bölünce hep 3,14 çıkıyor ama devamı da var.*

A: *Peki bu sayıya ne diyorduk biz?*

Berna: *π sayısı.*

A: *Peki tüm çemberlerde π sayısı aynı mıdır?*

Berna: *Hepsinde aynıdır.*

A: *Yani çemberin çevre uzunluğu değişse de...*

Berna: Aynı.

Berna, çemberin çevre uzunluğu ile çap uzunluğu arasındaki ilişkiyi çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna “*bölünce hep 3,14*” şeklinde ifade etmiş, farklı çemberlerde de sayının sabit olduğunu ve bu değeri “ *π sayısı*” olduğunu kabul etmiştir. Bu bulgudan dolayı, Berna’nın çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranının sabit olduğunu ve bu sayının farklı çemberlerde de değişmediğini ifade ettiğinden dolayı *eylemi içselleştirip süreç* aşamasına ulaştığı söylenebilir.

Katılımcı Mert’e GGB destekli Etkinlik 6’da ‘çemberin çevresi’ sürgüsünü hareket ettirdiğimizde görüntüye ne olduğu sorulmuştur:

A: *Yaptığımız etkinlikte (Etkinlik 6) çemberin çevresi sürgüsünü hatırlıyor musun?*

Mert: *Evet.*

A: *Çemberin çevresi sürgüsü hareket ettirdiğimizde görüntüye ne olmuştu?*

Mert: *Eee şeyini bulmak için değil mi yarıçapımı?*

A: *Yarıçapı zaten verilmişti. Ben sana tekrar göstereyim. Çemberin çevresi sürgüsünü hareket ettirdiğimizde görüntüye ne oldu?*

Mert: *Görüntü değişti.*

A: *Peki niye değişti ne oldu yani?*

Mert: *He çemberin çevresini bulduk.*

Mert, ‘çemberin çevresi’ sürgüsünü hareket ettirildiğinde “*görüntü değişti*” ifadesini kullanarak, bu değişim aracılığıyla “*çemberin çevresini*” hesapladığını belirtmiştir. Ardından, çemberin çevre uzunluğu ile çap arasındaki ilişki hakkında sorular yöneltilmiştir:

A: *Yaptığımız etkinlikten yola çıkarak çemberin çevresi ile çapı arasında bir ilişki var mıdır?*

Mert: *Birbirleri... birbirin... böldüğümüz için var yani.*

A: *Bölünce ne oluyor?*

Mert: *π sayısı oluyor.*

A: *Peki bu π sayısı nasıl bir sayıdır?*

Mert: *Yani... sayısı 3 yani 3,14.*

A: *Tüm çemberler için farklı mıdır?*

Mert: *Yok hepsi aynı.*

A: *Çemberin boyutu değişse de aynı mıdır?*

Mert: *Evet.*

A: *Peki π sayısını nasıl buluyorduk tekrar söyler misin?*

Mert: *π sayısını eee çemberin çevresiyle... çemberin çevresini çapa bölmüştük.*

A: *Çapa böldüğümüzde π sayısını bulmuştuk?*

Mert: *Evet.*

Mert, çemberin “çevresini çapa” bölündüğünde “ π sayısını” elde ettiğini ifade etmiş ve π sayısının tüm çemberlerde “hepsi aynı” diyerek sabit bir sayı olduğunu vurgulamıştır. Mert’in çemberin çevre uzunluğu ile çap uzunluğu arasındaki oranın sabit olduğunu fark ettiğinden dolayı *eylemi* içselleştirip *süreç* aşamasına ulaştığı söylenebilir.

Katılımcılardan Bilge ise *eylem* aşamasında kaldığı için süreç aşamasından bahsedilmemiştir.

4.2.3. Nesne Aşaması

Gözlemlerde Elde Edilen Bulgular

Sınıf ortamında öğrencilere, çap uzunluğunu bilinen bir çemberin çevre uzunluğunun ölçülüp ölçülemeyeceği sorusu yöneltilmiştir:

A: Çocuklar π sayısı neydi tekrardan söyler misiniz bana?

Kemal: Sonsuza kadar gider.

A: Nasıl buluyorduk π sayısını?

Elif: Hocam çevre bölü çap.

A: Peki burada yarıçapı verilen çemberin çevre uzunluğu ölçülebilir mi çocuklar? Düşünün bakalım.

Ahmet: Nasıl yani hocam.

A: Çap uzunluğunu bildiğimiz çemberin çevre uzunluğunu ölçebilir miyiz sizce?

Berna: Hocam hocam hocam (parmak kaldırarak).

A: Evet.

Berna: 3.14 ile çarp[a]ca[ğı]z.

Katılımcı Berna, çemberin çevre uzunluğunu bulmak için “3.14 ile çarpcaz” ifadesini kullanmıştır. Dersin devamında öğrenciler, çemberin çevre uzunluğu formülünü şu şekilde daha ayrıntılı açıklanmışlardır:

A: Evet çocuklar ne yapmıştık az önce?

Ertem: Hocam çemberin çevresini bulmuştuk.

A: Sonra ne yapmıştık?

Berna: Çapa bölmüştük.

A: Evet çemberin çevresini nasıl gösteriyorduk?

Öğrenciler: Ç.

A: Çemberin çevresini ne yaptık çocuklar?

Büşra: Çapla böldük.

A: Çap neydi R’ydi değil mi? Biz çap yazalım kafamız karışmasın (araştırmacı tahtaya Ç/R yazarak). Ne çıktı sonuç?

Berna: 3.14 yani π sayısı.

A: 3.14’te ne dedik biz (tahtaya Ç/R= π yazarak).

Berna: π sayısı.

A: Sizce çemberin çevre uzunluğunu ölçebilir miyiz?

Aleyna: Hocam eğer çapını biliyorsak çapla π 'yi çarpıp bulabiliriz.

A: Bakın şimdi çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna bölüyoruz ve sonuç π çıkıyor de[ğil] mi? Çemberin çevre uzunluğu eşittir çap uzunluğu çarpı π . Çap neydi peki çocuklar?

Berna: Hocam eee çemberin merkez noktasına diğer noktalara ulaşan düz çizgi.

A: Peki kaç tane yarıçap ediyordu çap?

Berna: 2.

A: Çap yerine 2 yarıçap yazabilir miyim çocuklar?

Berna: hı hı. Çap $2r$.

A: Çevre ne oluyor çocuklar. $2\pi r$... r ile sadece π 'nin yerini değiştirdim tamam mı çocuklar.

Berna: Hocam peki çapı bulmak için çevre ile π 'yi böl[e]ürsek çap mı olur?

A: Tabi ki buluruz.... Yarıçapı verilen bir çemberin çevre uzunluğunu nasıl ölçüyoruz çocuklar?

Berna: Çap çarpı π .

A: Bu da $2\pi r$ oluyor.

Katılımcı Berna, çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranının “3 virgül 14 yani π sayısı” olduğunu dile getirmiş ve önceki tartışmada da çemberin çevre uzunluğunu bulmak için π sayısı ile çapını çarpacağını belirtmiştir. Ayrıca, Berna tersine işlem yaparak çap uzunluğunu “çevre ile π 'yi bölersek” bulunabileceğini ifade etmiştir. Öte yandan katılımcı Aleyna, çemberin çevre uzunluğunu bulmak için “çemberin çapını biliyorsak çapla π 'yi çarpıp bulabiliriz” demiştir. Gözlemlerden elde edilen bulgular ışığında, süreçte aktif olan katılımcılar Berna ve Aleyna ‘çember’ süreci ile ‘ π sayısı’, ‘çap’, ‘ters işlem’ ve ‘oran’ süreçlerini koordine ederek ‘ π sayısı ile çap uzunluğunun çarpımı çevre uzunluğunu verir’ şeklinde ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’nü kapsüllediği söylenebilir.

Öğrencilerin sınıf ortamında çemberin çevre uzunluğu formülüne ilişkin problem ve soruları çözerken izlediği adımlar incelenerek nesneleşme durumları tespit edilmeye çalışılmıştır. ‘Konu Değerlendirme Soruları 2’ testi dördüncü soruyu, katılımcı Berna şu şekilde çözümlenmiştir:

Berna: Hocam şimdi buna göre oluşturulan çember[ler]in yarıçapı uzunlukları kaç santimdir?

A: Evet.

Berna: Yarıçap uzunluğu 9 santimetre olan bir çember. Şöyle yarıçap 9... yarıçap 9’sa tam çap 9 çarpı 2... 18. π ... çember şeklindeki tel bunu açınca (tahtada çember şeklindeki teli Etkinlik 6’daki gibi doğrusal bir şekilde açarak)... 9 çarpı 4 ayy 3’müş pardon.

A: Tamam...

Berna: 18 çarpı 3... 54.

A: Tamam. Çocuklar, $2\pi r$ ya formülümüz, bakın burada $2r$ yerine çap (R) yazdı.

Berna: Şimdi diyo[r] ki 3 eş parçaya bölüyoruz. O zaman 54'ü 3'e bölüyoruz (tahtada işlemi yaparak).

Berna: Yani minik bir çemberin...

A: Minik çemberin birinin çevresinin uzunluğu kaç?

Berna: 18.

A: Yarıçapını nasıl bulaca[ğ]ız?

Berna: 18'i 6'ya bölece[ğ]im (tahtaya yazdığı denkleme bakarak).

A: 6'e bölünce kaç oluyor?

Berna: 3.

Katılımcı Berna, yarıçap uzunluğu 9 cm olan bir telin çapını hesaplamıştır. Ardından Etkinlik 6'da olduğu gibi çemberi doğru parçasına dönüştürerek çap uzunluğunu π sayısı ile çarpmış ve sonuca ulaşmıştır. Bu işlemde çemberin çevre uzunluğunu hesaplamış ve devamında çevre uzunluğu 18 cm olan eş çemberler elde etmiştir. Son aşamada ise yine küçük çemberin çevre uzunluğunu 2π sayısına bölerek doğru sonuca ulaşmıştır (Şekil 4.20). Bu bulgular ışığında katılımcı Berna'nın, *nesne* aşamasına ulaştığı düşünülmektedir.

The image shows a whiteboard with handwritten mathematical work. On the left, there is a diagram of a circle with a vertical line through its center, representing a diameter. To the right of the diagram, the following calculations are written:

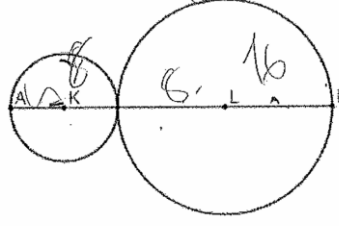
$$\begin{aligned} \text{Yarıçap} &= 9 \times 2 = 18 \\ \pi \times 18 &= 54 \\ \frac{54}{2} &= 27 \\ \frac{27}{3} &= 9 \end{aligned}$$

Below these calculations, there are two small circles, one labeled 'a' and one labeled 'b'. To the right of these circles, the following calculation is written:

$$2 \pi r = 18 \Rightarrow r = 3$$

Şekil 4. 20. Berna'nın Sınıf İçi Tahtada Problem Çözümündeki Görsel.

Katılımcı Aleyna, 'Konu Değerlendirme Soruları 2' testinde, K ve L merkezli iki çember ile ilgili beşinci soruyu çözerken önce L merkezli çemberin çapını bulmuş, ardından bulduğu değeri ikiyle bölerek K merkezli çemberin çapını bulmuştur. Sonrasında iki farklı çemberin çaplarını toplayarak AB doğru parçasını hesaplamıştır (Şekil 4.21). Burada Aleyna'nın, çemberi çevre uzunluğu formülünde tersine işlem yaparak çap uzunluğuna ulaştığı düşünülmektedir.

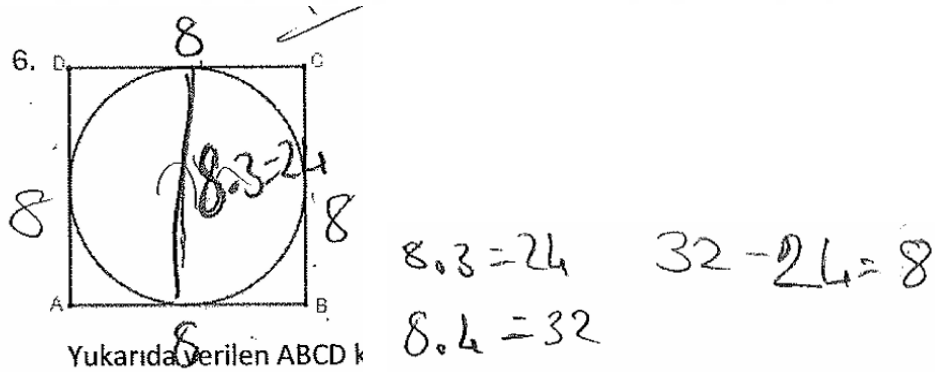


Yukarıda verilen K ve L merkezli çemberler birbirine bir noktada değen iki çemberdir. L merkezli çemberin yarıçapı K merkezli çemberin yarıçapının iki katıdır.

L merkezli çemberin çevresi 48 cm ise AB doğru parçası kaç cm'dir? (π yerine 3 alınız)

Şekil 4. 21. Aleyna'nın 'Konu Değerlendirme Soruları 2' Beşinci Soru Çözüm Görseli.

Katılımcı Aleyna, 'Konu değerlendirme Soruları 2' testinde, bir kenar uzunluğu 8 cm olan karesel bölgenin içine yerleştirilen çember ile ilgili altıncı soruyu çözerken önce çemberin çapını çizmiştir. Sonrasında, dikdörtgenin karşılıklı kenarlarını eşit kabul ederek çemberin çap uzunluğunu 8 cm olarak hesaplamıştır. Ardından, çemberin çevre uzunluğunu çap ile π sayısını çarparak elde etmiştir. Son olarak, karenin çevre uzunluğunu hesapladıktan sonra çevre uzunluklarının farkını bularak doğru sonuca ulaşmıştır (Şekil 4.22). Bu bulgulara dayanarak, Aleyna'nın *nesne* aşamasına ulaştığı düşünülmektedir.



Şekil 4. 22. Aleyna'nın 'Konu Değerlendirme Soruları 2' Altıncı Soru Çözüm Görseli.

Sınıf ortamında çözülen 'Konu Değerlendirme Soruları 2' testi altıncı soruyu ise Merve şu şekilde çözmüştür:

A: Bu soruyu nasıl yapıyorduk?

Merve: Şimdi ben yine de buraya çiz[e]ce[ği]m. Eee... şimdi hocam, burası eee... B, A, D, C (karenin köşeleri). Şurasının 8 olduğunu söylemiş. Burası 8 ise (AB kenarı) hepsi 8. Demek ki burası da 8 (çapın 8 olarak yazarak).

A: Çapı 8 değil mi?

Merve: Evet. Bi[r] de π sayısı ile çarpıyoruz. O yüzden 8'le 3'ü çarpıyoruz.

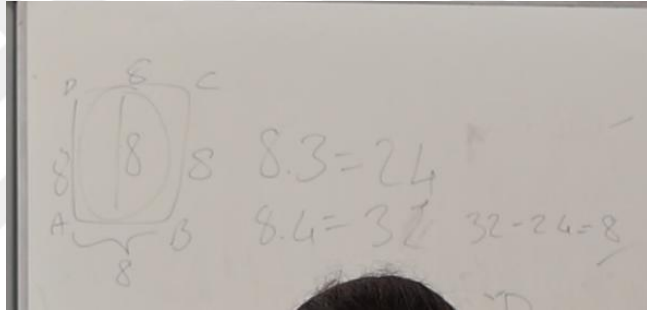
A: 24, neyi bulduk 24 ne?

Merve: Çevresi. Şimdi 8'le karenin çevresini bul[a]ca[ğı]z. 8'le 4'u çarpaca[ğı]z... eee... 36 ayy 32.

A: 32 aradaki fark ne kadar?

Merve: Şimdi aradaki farkı bulmak için 32'den 24'ü çıkarırız.

Merve, tahtaya temsili bir kare çizerek köşelerini “B, A, D, C” olarak belirlemiş, ardından AB doğru parçasını 8 olarak yazmıştır. Karenin diğer kenarların da aynı uzunlukta olduğunu belirtmek için, “8 ise hepsi 8” (AB kenarı) diyerek tüm kenarların uzunluğunu belirtmiştir. Sonrasında, karenin iç bölgesindeki çemberin çapını göstererek “demek ki burası da 8” demiştir. Ardından, çemberin çevre uzunluğunu hesaplamak için çapı “ π sayısı ile çarpıyoruz” diyerek “8'le 3'ü” çarpmış, karenin çevre uzunluğunu ise “8'le 4'ü çarpamaz” diyerek elde etmiştir. Son aşamada ise çevre uzunluklarının farkını alarak doğru sonuca ulaştığı görülmüştür (Şekil 4.23). Bu bulgular ışığında Merve'nin, *nesne* aşamasına ulaştığı düşünülmektedir.



Şekil 4. 23. Merve'nin 'Konu Değerlendirme Soruları 2' Altıncı Soruyu Sınıf İçi Tahtada Çözüm Görseli.

Görüşmelerde Elde Edilen Bulgular

Katılımcılardan Aleyna'ya görüşmede çemberin çevre uzunluğu formülünü nasıl bulunduğu sorulmuştur:

A: Çemberin çevre uzunluğu formülünü nasıl bulmuştuk biz? Ne yapmıştık? Formülü nasıl bulduğumuzu hatırlıyor musun?

Aleyna: He formül...

A: Biz çemberin çevre uzunluğunu C olarak gösterebiliriz. Neye bölmüştük biz çemberin çevre uzunluğunu?

Aleyna: Çapa.

A: Çapı yazabilir misin oraya? Ne çıktı sonuç?

Aleyna: π çıktı (bölen kısmına çap, bölüm kısmına da π 'yi yazdıktan sonra).

A: π 'yi de yazabilirsin. Peki buradan yola çıkarak nasıl bulmuştuk biz çemberin çevre uzunluğu formülünü?

Aleyna: Çevreli (çevreyi)... eee şimdi çapa bölersek eğer π çıkıyor (kağıdın üstüne yazarak). Eee çapını... çapıyla π çarpıp buluruz (eliyle çapı ve π 'yi göstererek).

A: Bu bulduğumuz formül π çarpı R 'den bahsediyoruz. Bu formül bütün çemberler için geçerli midir?

Aleyna: Evet.

A: Yani çemberlerin yarıçapları farklı olsa da... çapları farklı olsa da bütün çemberler için geçerli midir?

Aleyna: Evet.

Aleyna, çemberin çevre uzunluğunu “çapa” bölümünün “ π ” olduğunu ve bundan yola çıkarak “çapıyla π çarpıp” sonucun çevre uzunluğunu verdiğini söylemiştir. ‘Çember’ süreci ile ‘çap’, ‘ π ’, ‘ters işlem’ ve ‘oran’ süreçleri arasında koordinasyon kuran Aleyna, ‘ π sayısı ile çap uzunluğu çarpımının çemberin çevre uzunluğunu vermesi’ şeklinde ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’nü kapsüllediği söylenebilir. Görüşmenin devamında Aleyna’nın ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’ nesnesine ulaşma durumunu incelemek amacıyla ‘çapı 20 cm olan bir çember şeklindeki telin çevre uzunluğu kaç cm’dir’ sorusu yöneltmiştir:

Aleyna: 60 (çap ile π çarparak).

A: Ne yaptın peki nasıl buldun?

Aleyna: 20 (çap) ile 3’ü (π) çarptım.

A: Neden 20 ile 3’ü çarptın.

Aleyna: Çünkü çapla ile π çarpınca çevreyi buluyorduk.

A: Çap neydi soruda?

Aleyna: 20.

A: π neydi?

Aleyna: 3.

Aleyna çemberin çevre uzunluğunu “çapla ile π çarpınca” elde edeceğini söylemiş, “20 ile 3’ü” çarparak doğru sonuca ulaşmıştır (Şekil 4.24). Tüm bu bulgular ışığında, Aleyna’nın nesne aşamasına ulaştığı söylenebilir.



Şekil 4. 24. Aleyna’nın Görüşmede Çemberin Çevresini Hesaplama Görseli

Ahmet’e görüşmede çemberin çevre uzunluğu formülünü nasıl elde ettiği sorulmuştur:

A: Çemberin çevre uzunluğu formülünü nasıl bulmuştuk?

Ahmet: Eee nasıl buluruz hocam... işlemin tersini yaparız πr yaparız.

A: O işlem neydi? O işlemi yapar mısın?

Ahmet: Çemberin çevresini çapına bölmüştük. Şimdi hocam bunu böyle yapmıştık [Çemberin çevre uzunluğunu ($2\pi r$) çapa (R) bölerken]. Bu 3,14 eşittir π çıkmıştı (Bölmenin sonucu olarak yazdığı π sayısı).

A: Yaptığın doğru çemberin çevresini C olarak yazalım biz. C 'yi neye böldük. Neye eşit oldu? Buradan C 'yi bulabilir misin (C 'yi R 'ye oranlayıp π 'ye eşitledikten sonra)?

Ahmet: Bulurum hocam. İşlemi tersine döndürürüm hocam. C 'yi görmezden gelirim, π çarpı R büyük R ya da $2\pi r$ yaparım. Hocam benim alıştığım bu ben $2\pi r$ yap[a]ıca[ğ]ı[m].

A: Bu neye eşit oluyor?

Ahmet: Hocam önce bunu bulmam lazım (çapı göstererek).

A: Bunla bunun çarpımı neydi (çap ile π 'yi göstererek)?

Ahmet: Bunla bunun çarpımı çevreye eşit oluyor.

A: Bu formül $2\pi r$ dediğimiz veya π çarpı R formülü tüm çemberler için geçerli midir?

Ahmet: Evet.

A: Çemberlilerin boyutunda değişiklik olsa da bu formülde değişiklik olmaz d[eğ]i[l] mi?

Ahmet: Olmaz.

Ahmet, çemberin çevre uzunluğu formülüne ulaşmak için ilk önce “çemberin çevresini çapına” bölümünü “ π ” olduğunu belirtmiş, sonrasında “işlemi tersine döndürürüm” diyerek, “ C 'yi görmezden gelirim, π çarpı R ” şeklindeki ifadesiyle π sayısı ile çemberin çapını çarparak çemberin çevre uzunluğu formülüne ulaşmıştır (Şekil 4.25). Bu bulgulardan Ahmet'in ‘çember’ süreci ile ‘çap’, ‘ π ’, ‘ters işlem’ ve ‘oran’ süreçlerini koordine ederek ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’nü ‘ π sayısı ile çap uzunluğunun çarpımı çemberin çevre uzunluğunu verir’ şeklinde kapsüllediği söylenebilir.

$$\frac{2\pi r}{R} = 3,14 = \pi$$
$$\frac{C}{R} = \pi$$
$$\pi R \cdot 2\pi r = C$$

Şekil 4. 25. Ahmet'in Görüşmede Çevre Uzunluğu Formülünü Oluşturma Görseli.

Görüşmenin devamında, Ahmet'in nesneleşme durumunu incelemek amacıyla ‘çapı 20 cm olan bir çember şeklindeki telin çevre uzunluğu kaç cm’dir’ sorusu yöneltmiştir:

A: Çapı 20 cm olan bir çemberin çevre uzunluğunu hesaplayabilir misin?

Ahmet: Çapı 20 cm olan çevre uzunluğu... hesaplarım hocam. Çapı 20 (temsili bir çember çizip çapını 20 cm olarak belirterek).

A: Evet π 'yi 3 alacağız tamam mı?

Ahmet: Tamam. Hocam o zaman şur[a]dan bölüp yarıçapını bulmayı denerim ben (çapı 2'ye bölerek).

A: Tamam.

Ahmet: 20... 2'ye böldük. 10 dedik.

A: Ondan sonra?

Ahmet: Hocam yarıçapı 10 bu yarıçap olduğu için çapa tamamlayabilmek için 2 ile çarpmam lazım. Ama ben 2 ile şu şekilde çarp[a]ca[ğ]ım. $2\pi r$ olarak yapaca[ğ]ım.

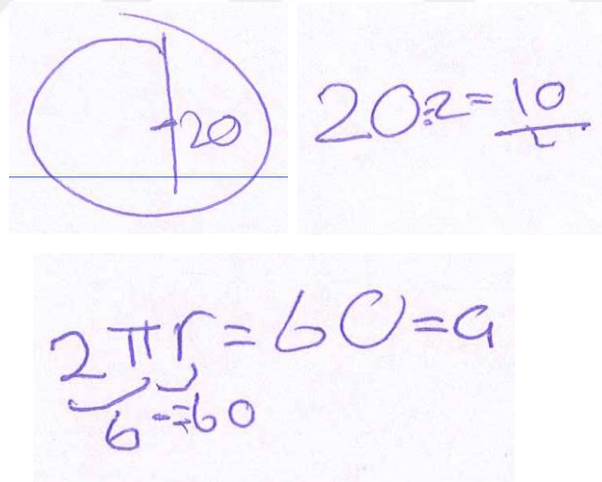
A: Tamam.

Ahmet: π 'yi de işlemin içine kat[a]ca[ğ]ım. Hocam bunları çarpınca 6 oluyor, 2 çarpı 3'ten 6, çarpı 10 (yarıçap uzunluğu) eşittir 60 oluyor.

A: 60 ne oluyor?

Ahmet: 60 o da eşittir çemberin çevre uzunluğu.

Ahmet, çemberin çevre uzunluğunun çap ile π sayısının çarpımı olduğunu dile getirmiştir. Çap uzunluğunun 2 yarıçap uzunluğu olarak kabul edilmesi gerektiğini ifade eden Ahmet, sonrasında $2\pi r$ formülünü kullanarak “2 çarpı 3'ten 6, çarpı 10” işlemini gerçekleştirmiş ve doğru sonuca ulaşmıştır (Şekil 4.26). Bu bulgudan dolayı Ahmet, nesne aşamasına ulaşmış diyebiliriz.



Şekil 4. 26. Ahmet'in Çap 20 Santimetre Olan Çemberin Çevresini Hesaplama Görseli

Berna'ya görüşmede çemberin çevre uzunluğu formülünü nasıl elde ettiği sorulmuştur:

A: Çemberin çevre uzunluğu formülünü nasıl bulduk hatırlıyor musun?

Berna: Evet, göstereyim mi?

A: Göster bakalım.

Berna: Hocam çemberimizin uzunluğu 12,57 (etkinlikteki çemberin çevre uzunluğu) ya.

A: Hım

Berna: Bunu çap... yarıçap 2 ise tam çap 4... 4'e bölüyoruz (Şekil 4.27).

A: *Tamam o işlemi yapmak zorunda değilsin.*

Berna: *Hep böyle bir şey çıkıyor (π sayısı).*

A: *Hep böyle bir şeyler çıkıyordu. Peki bunu formüle etmek istesek nasıl yapardık?*

Berna: $2\pi r$.

Berna, çemberin çevre uzunluğunun çapa bölümüne ilişkin olarak “*hep böyle bir şey çıkıyor*” ifadesiyle bu oranın sabit olduğunu belirtmiş ve bu sabitin π sayısı olduğunu ifade etmiştir (Şekil 4.27).

Handwritten calculation in pink ink showing the division of 12.57 by 4 to get 3.14. The calculation is written as follows:

$$\begin{array}{r} 12.57 \\ 4 \overline{) 12.57} \\ \underline{12} \\ 057 \\ \underline{40} \\ 17 \end{array}$$

Şekil 4. 27. Berna'nın Çevre Uzunluğu Formülünü İşlemde Açıklama Görseli.

Berna, çemberin çevre uzunluğunu formülünü ifade etmediğinden ötürü, araştırmacı yönlendirmesiyle süreç şu şekilde ilerlemiştir:

A: *Çevreyi neye bölüyorduk biz?*

Berna: *Çapına.*

A: *Neye eşit?*

Berna: *Eşittir π sayısı, eşittir 3,14 (kağıda yazarken).*

A: *Çevrenin formülünü nasıl buluyorduk? Çevrenin kendisi neye eşit?*

Berna: *Hocam şey çap çarpı π sayısına eşit (bölme işlemine ters işlem uygulayarak).*

A: *Çap neydi?*

Berna: *Çap hocam yarıçapın 2 katı.*

A: *Peki bu formül bütün çemberler için geçerli midir sence?*

Berna: *Evet.*

A: *Boyutları farklı olsa da geçerli olur değil mi?*

Berna: *Geçerli çünkü π sayısı ile çarpacağımızdan hep aynı sonuç çıkıyor.*

Berna, çemberin çevre uzunluğunu “*çapına*” bölümünün “ *π sayısı*” olduğunu ve bölme işleminin tersini uygulayarak çemberin çevre uzunluğunun “*çap çarpı π* ” olarak ifade ettiği görülmektedir (Şekil 4.28). Ayrıca bu formülün tüm çemberler için geçerli olduğunu da belirtmiştir. Bu bulgulara dayanarak Berna'nın, ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’nü, ‘çember’ süreci ile ‘çap’, ‘ π ’, ‘ters işlem’ ve ‘oran’ süreçlerini koordine ederek ‘ π sayısı ile çap uzunluğu çarpımı çemberin çevre uzunluğunu verir’ şeklinde kapsüllediği söylenebilir.

$$Ç \div Çap = \pi \text{ sayısı} = 3,14$$

$$Çap \times \pi \text{ sayısı} = \text{Çevre}$$

$$2r \times \pi =$$

$$R \quad 2r$$



Şekil 4. 28. Berna'nın Görüşmede Çemberin Çevre Uzunluğunu Formülünü Açıklama Görseli

Görüşmenin devamında, Berna'nın 'çemberin çevre uzunluğu formülü' nesnesine ulaşma durumunu incelemek amacıyla 'çapı 20 cm olan bir çember şeklindeki telin çevre uzunluğu kaç cm'dir' sorusu yöneltilmiştir:

A: Çapı 20 cm olan çember şeklindeki telin uzunluğu kaç cm'dir?

Berna: Çevresini mi bul[a]ca[ğ]ız?

A: Evet.

Berna: Çap çarpı 3,14 (kâğıda yazarken).

A: π 'yi 3 alalım tamam mı?

Berna: π , 3... he... 3 mü alaca[ğ]ız?

A: Evet.

Berna: O zaman 60 (telin uzunluğu). 20 (çap uzunluğu) çarpı 3 (π değeri) 60.

Berna, çemberin çevre uzunluğunu çap ile π sayısının çarpımı olarak kabul etmiştir. İlk olarak "çap çarpı 3,14" ifadesini kullanmış olup, daha sonra yapılan araştırmacı yönlendirmesiyle π değerini 3 alarak hesaplama yapması istenilmiştir. Bu yönlendirme sonucunda, "20 çarpı 3" şeklinde hesaplama gerçekleştirdiği görülmüştür (Şekil 4.29). Bu bulgu doğrultusunda, Berna'nın nesne aşamasına ulaştığını söyleyebiliriz.

$$Çap = 20 \times 3,14 =$$

$$20 \times 3 = 60 \text{ çevre}$$

Şekil 4. 29. Berna'nın Görüşmede Çapı 20 cm Olan Çemberin Çevresini Hesapla Görseli.

Mert'e görüşmede çemberin çevre uzunluğu formülünü nasıl bulduğu sorusu yöneltilmiştir:

A: Çemberin çevre uzunluğu formülünü nasıl bulmuştuk hatırlıyor musun?

Mert: $2\pi r$.

A: $2\pi r$, biz bunu nasıl bulduk? Şimdi çemberin çevresini π ile gösterelim.

Mert: He Ç.

A: Ç'yi neye bölmüştük biz?

Mert: Çemberin çevresini çapa bölmüştük.

A: Kesir çizgisi ile gösterebilir misin?

Mert: Tamam çevre bölü çap.

A: Neye eşit?

Mert: Eşittir π .

A: Buradan çevre uzunluğunu bulabilir misin? Çevreyi bulabilir miyiz burada?

Mert: Çevreyi π ile çapı çarpıp bulabiliriz (Parmağı ile içler dışlar çarpımı yaparak).

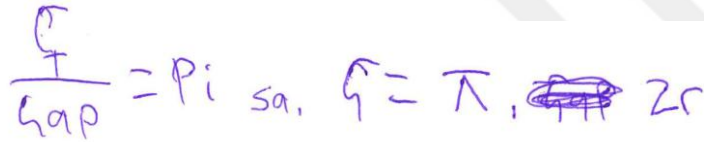
A: Çap neydi nasıl gösteriliyor?

Mert: Büyük R.

A: Yarıçap cinsinden gösterebilir misin?

Mert: $2r$.

Mert, “çemberin çevresini çapa” bölündüğünde çıkan sonucun “ π ” sayısı olduğunu söylemiş, ardından ters işlem yaparak çemberin çevre uzunluğunu “ π ile çapı çarpıp” elde edilebileceğini belirtmiştir (Şekil 4.30). Bu bulgular ışığında, ‘çember’ süreci ile ‘çap’, ‘ π ’, ‘ters işlem’ ve ‘oran’ süreçleriyle koordine eden Mert, ‘ π sayısı ile çap uzunluğu çarpımı çemberin çevre uzunluğunu verir’ şeklinde ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’ü kapsüllediği söylenebilir.


$$\frac{C}{\text{çap}} = \pi \text{ sa. } C = \pi \cdot 2r$$

Şekil 4. 30. Mert'in Görüşmede Çemberin Çevre Uzunluğu Formülünü Oluşturma Görseli.

Görüşmenin devamında, Mert'in ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’ nesnesine ulaşma durumunu incelemek amacıyla ‘çapı 20 cm olan bir çember şeklindeki telin çevre uzunluğu kaç cm’dir’ sorusu sorulmuştur:

A: Çapı 20 cm olan bir çember şeklindeki telin çevre uzunluğunu hesaplayabilir misin?

Mert: Evet hesaplarım. π 'yi 3 alıyoruz değil mi?

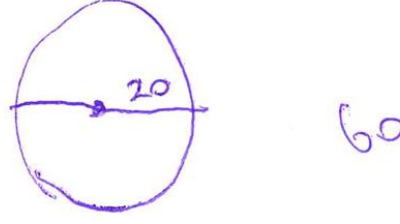
A: Evet 3π alıyoruz. Evet hımmm yani çap ile π 'yi çarptın değil mi (Mert zihninde çap ile π 'yi çarpıp sonucu kağıda yazdıktan sonra)?

Mert: Evet.

A: Bana tekrardan açıkla mısın? Çevreyi nasıl bulmuştuk?

Mert: Çevreyi π ça... $2r$ çarpı π .

Mert, çemberin çevresini “ $2r$ çarpı π ” olarak ifade etmiş ve zihninden hesaplayarak doğru sonuca ulaşmıştır (Şekil 4.31). Bu bulgulardan dolayı Mert'in, nesne aşamasına ulaştığı söylenebilir.



Şekil 4. 31. Mert'in Görüşmede Çapı 20 cm Olan Çemberin Çevresini Hesaplama Görseli.

Katılımcılardan Bilge ise *eylem* aşamasında kaldığı için nesne aşamasına ilişkin söz edilmesi mümkün değildir.

Çemberin çevre uzunluğu formülüne ilişkin katılımcıların *şemalar*ında farklılıkların olmadığı tespit edilmiştir. Katılımcıların biri hariç hepsi 'yarıçap/çap uzunluğu bilinen bir çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna oranlar' *eylem*ini gerçekleştirmişlerdir. Katılımcılar bu oranın sabit sayı olduğunu görüp, π olarak kabul ettiklerinden ötürü *süreci* içselleştirmişlerdir. Ardından, 'çember' *süreci* ile ' π ', 'çap' ve 'oran' *süreç*leri arasında koordinasyon kurarak ' π sayısı ile çap uzunluğunun çarpımı çevre uzunluğunu verir' şeklinde kapsülleme yaparak 'çevre uzunluğu formülü' *nesnesine* ulaşmışlardır.

4.3. Dairenin Alanı Formülünün Oluşumuna Ait Bulgular

Öğretim süreci doğrultusunda öğrencilerin dairenin alan formülünü, dairenin çevresi ile yarıçapının çarpımının yarısı olarak kavramsallaştırmaları amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda GGB destekli öğretim ortamında Etkinlik 7 ve Etkinlik 8 hazırlanmıştır. İlk olarak, dairenin alanını karesel bölgeler ile hesaplanılmaya yönelik Etkinlik 7 gerçekleştirilmiştir. Ardından, yarıçap uzunluğu bilinen bir dairenin, Etkinlik 8 yardımıyla uzun kenarı dairenin çevresi olan ve o kenara ait yüksekliği dairenin yarıçap uzunluğuna eşit olan bir ikizkenar üçgene dönüştürülmesiyle, alanın üçgensel bölge üzerinden hesaplanması sağlanmıştır. Öğrenciler bu süreçte *başlangıç nesnesi* olarak yarıçap uzunluğu bilinen bir daireyi ele almışlardır. Ele alınan dairenin üçgensel bölgeye dönüştürülmesi *eylem* aşamasıdır. Öğrenciler, dönüştürülen üçgensel bölgenin uzun kenar uzunluğunun dairenin çevre uzunluğuna, o kenara ait yüksekliğin ise dairenin yarıçap uzunluğuna eşit olduğunu ve dairenin alanının üçgensel bölgenin alanına eşit olduğunu fark ettiklerinde *süreç*i içselleştirmişlerdir. Bu süreçte öğrenciler farklı süreçlerle koordinasyonlar kurup 'daireyi çevreleyen çemberin uzunluğu (çevresi) ile yarıçap uzunluğunun çarpımının yarısı bu dairenin alanını verir' şeklinde

kapsüllemeyle dairenin alan formülü *nesnesine* ulaşmaları beklenmiştir. Öğrencilerin *nesne* aşamasına ulaşip ulaşmadığını belirlemek amacıyla için ise sınıf içinde ve görüşmelerde farklı problem durumları ele alınmıştır.

4.3.1. Eylem Aşaması

Gözlemlerde Elde Edilen Bulgular

Sınıf ortamında, Etkinlik 7’de verilen bir dairenin alanı, alanı bilinen karesel bölgeler ile hesaplatılmaya çalışılmıştır:

A: *Peki çocuklar bu şekilde dairenin alanını hesaplayabilir miyiz? Fikri olan var mı?*

Aleyna: *Hocam üçgenin alanlarını bulabilirsek hesaplarız.*

Birkaç öğrenci: *Hayır.*

A: *Yarıçapı 1 birim olan bir tane çemberimiz var. Burada ne var alanı 1 birimkare olan kareler var değil mi?*

Öğrenciler: *Evet.*

A: *Bu kareler ile dairenin alanını hesaplamaya çalışacağız... Bakın bir tanesini koydum alanı ne oldu 1 oldu. İkincisini koyuyorum... ne oldu 2 oldu. Üçüncüsünü koyuyorum.*

Mert: *3 birim.*

A: *Diğeri kaç oldu?*

Birkaç öğrenci: *4.*

Bu süreçte öğrencilere, yarıçapı 1 birim olan çemberin belirttiği bölgenin alanının, alanı 1 birimkare olan karesel bölgelerle kaplanarak hesaplanıp hesaplanamayacağı sorusu yöneltmiştir. Öğrencilerin bir kısmı soruya emin olmadan “*evet*”, bir kısmı ise “*hayır*” şeklinde yanıt vermiştir. Sürecin şu şekilde devam etmiştir:

A: *Sizce bu dairenin alanını verir mi?*

Ahmet: *Hocam önce karenin alanını buluruz.*

A: *Karenin alanı 1 birimkare... toplam 4 birimkare... karenin alanını biliyoruz.*

Ahmet: *Tamam hocam karenin alanı şey olarak... uzunluk ölçü birimi olarak. Mesela santimetre olarak bulduk diyelim hocam. O karenin alanından üçgenlerin alanını bulup çıkarırız.*

A: *Üçgen mi var peki burada?*

Berna: *Üçgen değil hocam o.*

Katılımcı Ahmet, çember yayını üçgensel bölgenin bir kenarı olduğunu düşünerek dairenin alanını “*karenin alanından üçgenlerin alanını bulup çıkarırız*” şeklinde bulabileceğini ifade etmiştir. Fakat katılımcı Berna, katılımcı Ahmet’in bahsettiği bölgelerin üçgen olmadığını dile getirmiştir. Sürecin devamında, daha küçük karesel bölgeler ile kaplama işlemi gerçekleştirilmiştir:

A: Ama ben alan dedim. Tamam şimdi ölçeği değiştirdim. Karesel bölgeleri daha küçük yaparak farklı bir hesap yapaca[ęı]z. Ne yaptım ben şimdi kareyi 4'e böldüm. 1 bölü 4 birimkareler ile... bu şekilde bi[r] hesap yapalım... bakalım diğerinden farklı olacak mı?...Bakın ne oldu? 0.75 oldu (karesel bölgeleri taşıırken).

Berna: Hocam o çıkıyo[r] kenarlardan...

A: 1 oldu. kaç oldu 2 oldu...1 bölü 4 birimkarelerle şekli doldurdum. Peki alan ne oldu? 3 birimkare bulduk. Peki diğer yaptığımıza göre daha mı yakın bulduk daha mı uzak sizce? Diğerinde 4 bulduk bunda 3.

Merve: Yakın bu...

Berna: Bence ikisinin ortası.

Merve: Bu daha yakın, bu daha yakın.

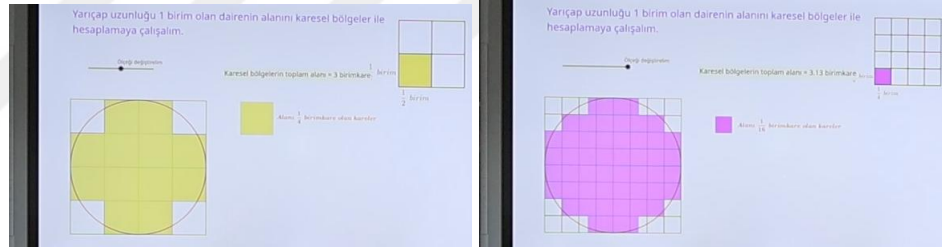
A: Diğerini tamamını kaplıyorduk... bunda biraz daha çıkıntılar var. Peki bir kez daha ölçeği değiştirelim çocuklar. Alanı 1 bölü 16 birimkarelerden oluşan karelerle dairenin alanını hesaplamaya çalışıyoruz... Evet çocuklar şekle baktığımızda daha isabetli mi yaptık?

Berna: Evet.

A: Peki bu dairenin alanını verir mi sizce?

Berna: Hayır.

Katılımcılardan Berna, kaplama işleminde taşmaların gerçekleştiğini “o çıkıyo kenarlardan” diyerek belirtmiş ve karesel bölgelerin küçülmesiyle alanın daha isabetli olacağını öğrencilerden Merve ve katılımcı Berna ifade etmişlerdir (Şekil 4.32).



Şekil 4. 32. Ders Sürecinde Çembersel Bölgeyi Karesel Bölgeler ile Hesaplanmasını İçeren Etkinlik 7 Görseli.

Ardından, dairenin üçgensel bölgeye dönüştürölmesini içeren Etkinlik 8 gerçekleştirilmiştir:

A: Dairenin alanını bu şekilde hesaplanamayacağını öğrendik değil mi (Etkinlik 7)? Daireyi sizce farklı şekle dönüştürme şansımız var mı?

Mert: Var hocam üçgen yapabiliriz.

A: Herhangi bir şekle.

Berna: Kare kare.

A: Bakalım bi[r]... tahtada bir etkinlik göstereceğim çocuklar.

A: Elimizde bir daire var... neden biz buna daire diyorduk çocuklar?

İdris: İçi dolu.

A: İçi dolu değil mi? Yarıçapı kaç birim?

Öğrenciler: 3 birim.

A: Biz bu daireyi çemberler ile parçalara ayırıyoruz tamam mı çocuklar (Çember sayısı sürgüsü). Kaç tane... 50 tane çember ile daireyi çemberler ile ayırdık. Sonrasında dairesel bölgeyi bir şekle dönüştürüyorum bakın çocuklar iyi izleyin (Animasyon sürgüsünü hareket ederek).

Katılımcı Mert daireyi “üçgen” şekline dönüştürülebileceğini ifade etmiş, katılımcı Berna ise “kare” olabileceğini dile getirmiştir. Dersin devamında, Etkinlik 8’deki ‘animasyon’ sürgüsü ile daire, üçgensel bölgeye dönüştürülmüştür:

A: Ne yaptık çocuklar daireyi?

Berna: Üçgene dönüştürdük.

A: Üçgensel bölgeye dönüştürdük görüyor musunuz?

Etkinlik 8 yardımıyla dairenin üçgensel bölgeye dönüştürülme süreci *eylem* aşamasıdır. Dönüştürülen bölgenin üçgensel bölge olduğunu ilk fark eden katılımcı Berna bunu “üçgene dönüştürdük” şeklinde belirtmiştir.

Görüşmelerde Elde Edilen Bulgular

Aleyna’ya görüşmede sınıf ortamında yapılan Etkinlik 7 hakkında soru sorulmuş ve daireyi karesel bölgeler ile doldurduğunu söylemiştir:

A: Hatırlıyor musun? Dairenin alanını hesaplamaya çalışmıştık. Çember şeklimiz vardı bu şekli karesel bölgelerle dolduruyorduk hatırlıyor musun? Ne yapmıştık ilk önce?

Aleyna: İlk önce kareleri koymuştuk.

A: Nereye koyduk peki?

Aleyna: Dışındaki kareleri içine koyduk.

A: Dairenin alanını hesaplamaya çalıştık de[ğil] mi? Hesaplayabildik mi?

Aleyna: Tam olarak hesaplayamadık.

A: Peki ölçüyü değiştirdiğinde ne oluyor? Daha küçük karesel bölgeler ile ne yaptık?

Aleyna: Ölçeği değiştirdiğimizde daha iyi hesaplayabildik.

A: Aynı şekilde daha küçük karesel bölgeler ile alanını hesaplamaya çalıştık. Peki burada ne oldu? Ölçeği değiştirmek sana ne ifade ediyor.

Aleyna: Yani daha iyi... fazla güzel hesap yapabiliriz.

A: Daha güzel hesaptan kasıt daha isabetli mi?

Aleyna: Evet.

A: Peki bu şekilde dairenin alanını hesaplayabildik mi?

Aleyna: Hesapladık ama sadece yakın bir değer.

A: Yakın bir değer bulduk. Ama tam olarak hesaplayabildik mi?

Aleyna: Hayır.

Aleyna, etkinlikte alanı verilen karesel bölgeleri dairenin “içine koyduk” diyerek dairenin alanını hesaplamaya çalıştığı, ancak dairenin alanını “tam olarak hesaplayamadık” diyerek doğru bir sonuca ulaşamadığını dile getirmiştir. Ardından, daha küçük karesel bölgeler kullanarak dairenin alanını “daha iyi hesaplayabildik”

demiş, fakat yine de dairenin alanını doğru bir şekilde hesaplayamadığını belirtmiştir. Sonrasında, Aleyna'ya Etkinlik 8'de ne yapıldığı sorulmuştur:

A: Sonrasında tam hesaplamak için bir etkinlik daha yapmıştık. Bu etkinlikte ne düşünüyorsun peki?

Aleyna: Bu etkinlikte üçgen yapmıştık.

A: Neyi yapmıştık?

Aleyna: Daireyi.

Aleyna'nın Etkinlik 8'de daireyi “üçgen yapmıştık” demesi, ‘yarıçapı bilinen bir dairenin üçgensel bölgeye dönüştürülmesi’ eylemini gerçekleştirdiğini göstermektedir.

Ahmet'e görüşmede derste yapılan Etkinlik 7 ile ilişkili birtakım sorular yöneltilmiştir:

A: Hatırlıyor musun? Dairenin alanını hesapladığımız bir ders vardı?

Ahmet: Evet.

A: Bu dersin başında bir etkinlik yapmıştık. Çembersel bölgemiz vardı sonra bunu karesel bölgelere ayırdık ve karesel bölgelerle dairenin alanını hesaplamaya çalıştık hatırlıyor musun?

Ahmet: Evet.

A: Dairenin alanını tam olarak doğru mu verir?

Ahmet: Hayır dışına taşıyor.

A: Aynı şekilde ölçeği düşürdük hatırlıyo[r]n mu[sun]? Burada ne fark oldu diğerine göre?

Ahmet: Bur[a]da diğerine göre pek de bir fark olmadı aslında. Çünkü bu da tam ifade edemedi. Çünkü buraya koysak hem dışarıda kal[a]cak hem içerde kalacak (etkinlikte eliyle göstererek).

A: Peki ölçeği daha küçük yaptığımızda ne oldu?

Ahmet: Hocam yani şu anda bi[r] şey değişmedi.

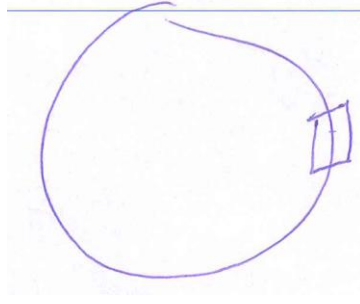
A: Peki ölçekler arasında bir fark var mıdır sence? Hangisi daha yakın bir hesap yapabilir?

Ahmet: 1 bölü 16 (etkinlikteki karesel bölgeler).

A: Bu şekilde bu şekilde dairenin alanını tam olarak hesaplayabilir miyiz?

Ahmet: Hayır. Çünkü hocam karesel bir zeminin üzerine daire çizmişiz. İster istemez hocam kare... yani dairenin şeyi çevresi yani çember kısmı diyim daireyi tamamlamadan önceki çemberi şur[a]daki bir karenin üzerinden geçse bile hocam sıkıntı çıkıyor.

Ahmet, etkinlikte alanı verilen karesel bölgeler ile dairenin alanını hesaplamaya çalışırken, çembersel bölgeyi karesel bölgelerle kaplarken “dışına taşıyor” diyerek (Şekil 4.33) doğru sonuç vermeyeceğini ifade etmiştir. Dairenin alanını daha isabetli hesaplamak için en küçük alana sahip karesel bölgeleri kullanacağını belirtmiştir.



Şekil 4. 33. Ahmet'in Çembersel Bölgeyi Karesel Bölgeler ile Hesaplamaya Çalışma Görseli

Devamında Ahmet'e görüşmede sınıf ortamında yapılan Etkinlik 8 hakkında soru sorulmuş ve çembersel bölgeyi üçgensel bölgeye dönüştürdüğünü söylemiştir:

A: Dairenin alanını bu şekilde hesaplayamadık. Sonrasında bu etkinlikte ne yapmıştık?

Ahmet: Bu etkinlikte hocam şey yapmıştık, önce bu daireyi... daireyi üçgene dönüştürmüştük.

A: Bu şekilde ne hesaplamaya çalıştık?

Ahmet: Üçgenin... ay üçgen diyorum dairenin alanı.

Ahmet, “daireyi üçgene dönüştürmüş” diyerek ‘yarıçap uzunluğu bilinen bir dairenin üçgensel bölgeye dönüştürülmesi’ eylemini gerçekleştirmiştir.

Berna'ya görüşmede sınıf ortamında yapılan Etkinlik 7 hakkında birtakım sorular yöneltilmiştir:

A: Biz derste dairenin alanını ölçmeye çalışıyorduk ne yapıyorduk dersteki etkinlikte?

Berna: Hocam, kareleri buraya koyuyorduk fakat kareler hep artıyordu.

A: Ölçeği değiştirdiğimizde ne oluyordu?

Berna: Daha küçüliyordu kareler ve daha çok koyuyorduk fakat yine de artıyordu.

A: Peki biraz daha küçültünce ne oldu?

Berna: Hocam daha çok dairenin alanına daha çok yakın oluyoruz daha küçük karelerle.

A: Peki bu şekilde dairenin alanını hesaplayabilir miyiz?

Berna: Çok doğru hesaplayamayız ama yaklaşık hesaplayabiliriz.

Berna, Etkinlik 7’de “kareleri buraya koyuyorduk” açıklamasıyla alanı verilen karesel bölgeleri kullanarak dairenin alanını hesaplamaya çalıştığını dile getirmiştir. Fakat, “çok doğru hesaplayamayız ama yaklaşık hesaplayabiliriz” diyerek bu yöntemin tam olarak doğru hesaplamamanın mümkün olmadığını ifade etmiştir. Ayrıca, karesel bölgeler küçüldükçe “çemberin alanına daha çok yakın” hesaplama yapabileceğini de belirtmiştir. Görüşmenin devamında Berna'ya derste yapılan Etkinlik 8 ile ilgili sorular yöneltilmiştir:

A: Bu etkinlikte ne olmuştu?

Berna: Hilal olmuştu sonra da üçgen olmuştu.

A: Çember sayısı sürgüsü vardı hatırlıyor musun? Bu sürgüyü hareket ettirdiğimizde görüntüye ne olmuştu?

Berna: Çemberler göründü.

A: Peki animasyon sürgüsünü hareket ettirdiğimizde görüntüye ne oldu?

Berna: Hilalden üçgene geçti.

A: Bu hilalden önce neydi?

Berna: Daire.

A: Daireden neye dönüştü?

Berna: Üçgene.

Berna, daire dönüşerek “üçgen olmuştu” diyerek, ‘yarıçap uzunluğu bilinen bir dairesel bölgenin üçgensel bölgeye dönüştürülmesi’ eylemini gerçekleştirmiş diyebiliriz.

Mert’e görüşmede sınıf ortamında yapılan Etkinlik 7 hakkında birtakım sorular yöneltilmiştir:

A: Bi[r] tane etkinlik vardı karesel bölgeler ile alanını doldurmaya çalışıyorduk.

Mert: Dairenin alanını bulmuştuk.

A: Dairenin alanını tam olarak bulmuş muyduk?

Mert: Bulmuş muyduk... bulmadık genelde.

A: Dairenin alanını karesel bölgelerle doldurmaya çalışmıştık. Sonra ölçeği değiştirdik daha küçük karelerle yaptık, 1 bölü 4 birim kare sonra 1 bölü 16 birim karelerle doldurduk değil mi?

Mert: Evet.

A: Bu etkinlikte dairenin alanını tam olarak hesaplayabildik mi?

Mert: Hayır, yani hesapladık da yani kendimiz çok yapmadık kare koyduk.

A: Doğru bir şekilde hesaplamadık mı?

Mert: Bence yapmadık.

A: İlk başta 4 tane birim kareyle doldurmuştuk dairenin alanını veriyor muydu? Tam olarak 4 mü oluyor dairenin alanı?

Mert: Tam olarak 4 değil.

A: Neden olmuyor?

Mert: Taşma oluyor.

Mert, çembersel bölgeyi karesel bölgelerle kaplayarak hesaplama yapılıp çalışıldığında “taşma oluyor” diyerek bu yöntemle doğru bir hesaplama yapılamayacağını ifade etmiştir. Görüşmenin devamında, sınıf ortamında gerçekleştirilen Etkinlik 8’deki ‘animasyon’ sürgüsünü hareket ettirdiğimizde ne olduğu sorulmuştur:

A: Sonrasında animasyon sürgüsü ile hareket ettirdiğimizde görüntüye ne oldu?

Mert: Görüntü hilalleşti sonra üçgen oldu.

A: Oluşan geometrik şekle sen üçgen dedin değil mi?

Mert: *Evet.*

Mert, dairenin dönüştürülerek “*üçgen oldu*”ğunu dile getirmesinden ötürü, katılımcı ‘yarıçap uzunluğu bilinen bir dairenin üçgensel bölgeye dönüştürülmesi’ eylemini gerçekleştirdiği söylenebilir.

Bilge’ye görüşmede sınıf ortamında yapılan Etkinlik 7 hakkında sorular yöneltilmiştir:

A: *Ölçeği değiştirdikten sonra ne fark oldu? Diğer karesel bölgeler ile ne fark oldu?*

Bilge: *Alanı değişti.*

A: *Peki hangisi daha isabetli bi[r] alan hesaplayabiliriz?*

Bilge: *Bu (küçük kareleri göstererek).*

A: *Neden bu?*

Bilge: *Çünkü küçük olduğu için tüm alanı hesaplayabiliyoruz.*

A: *Peki bu şekilde biz dairenin alanını hesaplayabilir miyiz?*

Bilge: *Hesaplayabiliriz.*

A: *Doğru bir şekilde hesaplayabilir miyiz?*

Bilge: *Hesaplayamayız.*

A: *Neden hesaplayamayız?*

Bilge: *Çünkü mesela bunlar... buraya bi[r] kare koyduğumuzda bu yarım oluyo[r].*

Bilge, önce karesel bölgeler ile dairenin alanını hesaplayabileceğini söylese de sonra “*buraya bi kare koyduğumuzda bu yarım oluyo*” diyerek tam olarak doğru bir şekilde hesaplanamayacağını söylemiştir. Ayrıca, daha küçük karesel bölgeler ile daha iyi hesap yapabileceğini de belirtmiştir. Görüşmenin devamında, Bilge’ye Etkinlik 8 kapsamında ‘animasyon’ sürgüsünü hareket ettirdiğimizde görüntüye ne olduğu sorulmuştur:

A: *Etkinlikte animasyon sürgüsü vardı hatırlıyor musun?*

Bilge: *Evet.*

A: *Bunu hareket ettirdiğimizde görüntüye ne oldu?*

Bilge: *Üçgen oluşuyo[r]du.*

A: *Daire neye dönüştü? Hangi geometrik şekle dönüştü?*

Bilge: *Üçgene dönüştü.*

Bilge, dairenin “*üçgene dönüştü*”ğini ifade etmiştir. Bu bulgudan dolayı ‘yarıçap uzunluğu bilinen bir dairenin üçgensel bölgeye dönüştürülmesi’ eylemini gerçekleştirdiği söylenebilir.

4.3.2. Süreç Aşaması

Gözlemlerde Elde Edilen Bulgular

Etkinlik 8 yardımıyla ile yapılan dairenin üçgensel bölgeye dönüştürülmesi eyleminin ardından öğrencilere, üçgensel bölgenin alanının ve taban uzunluğunun hesaplanıp hesaplanamayacağı sorulmuştur:

A: Sizce çocuklar bu üçgenin alanını hesaplarsak dairenin alanını hesaplayabilir miyiz? Bakın bunu tekrar tekrar göstereyim (animasyon sürgüsünü hareket ederek).

Berna: Hayır.

Öğrenciler: Evet.

A: Daireyi ne yaptık... üçgensel bölgeye dönüştürdük.

Berna: Hayır hesaplayamayız çünkü minik minik çizgiler var (çemberler).

Mert: Hesaplarız.

A: Nasıl hesaplarız üçgensel bölgenin alanını?

Ahmet: Taban çarpı yükseklik bölü 2.

A: Bunun tabanını bulabilir miyiz?

Ahmet: Evet... aaa bulamayız... bulamayız hocam.

A: Niye bulamayız? Bakın animasyonu tekrardan oynatıyorum. Bakın taban neresi? Taban uzunluğunu bulabilir miyiz?

Aleyna: Hocam eee çemberin yani çevresini... Çemberin hocam çevresi o üçgenin alt tarafı olur.

A: Aleyna ne dedi...bu alt taraftaki kısım yani taban uzunluğu... dairenin çevresi dedi. Çocuklar sizce çemberin çevresi midir?

Mert, Ertem ve İdris: Evet.

Katılımcı Ahmet, üçgensel bölgenin alanının “*taban çarpı yükseklik bölü 2*” formülü ile hesaplanabileceğini söylemiş, fakat üçgenin taban uzunluğunu hesaplayamayacağını belirtmiştir. Katılımcı Aleyna ise, “*çemberin hocam çevresi o üçgenin alt tarafı olur*” diyerek, üçgensel bölgenin taban uzunluğunun daireyi kaplayan çemberin çevre uzunluğuna eşit olduğunu belirtmiştir. Ardından, öğrencilerden Ertem, İdris ve katılımcı Mert, “*evet*” diyerek eşit olduğu fikrini desteklemişlerdir. Sonrasında, öğrencilere dairenin çevre uzunluğuna eşit olan kenara ait yüksekliğin ne olduğu sorusu yöneltmiştir:

A: Evet çocuklar bir tane üçgenimiz var. Şimdi tabana çevre demiştik (dairenin çevresi). Çevre neydi $2\pi r$ 'ydi değil mi? Ya da neydi π çarpı...?

Öğrenciler: R.

A: R neydi $2r$ 'ydi. Şimdi bu şekilde üçgenin alanını nasıl hesaplarız?

Ertem: Hocam taban uzunluğu ile...

A: Taban neydi dairenin çevresiydi. Peki yüksekliği neydi o tabana ait?

Mert: Hocam o...

A: O ne?

Mert: *Yükseklik işte hocam.*

A: *Animasyonu tekrardan oynatayım ben (tahtada animasyon sürgüsünü sürekli hareket ettirerek).*

Berna ve Ertem: *Yarıçap.*

A: *Peki taban neydi? Ç... Yükseklik ne?*

Berna: *r.*

A: *r bölü 2. Üçgenin alanı biliyor musunuz? Neydi? Taban uzunluğu çarpı yükseklik bölü 2'ydi de mi?*

Ertem ve katılımcı Berna, dairenin çevre uzunluğuna eşit olan üçgensel bölgenin kenarına ait yüksekliğinin “*yarıçap*” olduğunu ifade etmişlerdir. Katılımcı Aleyna, dairenin çevresinin üçgenin uzun kenarına eşit olduğunu söylerken Ertem ve katılımcı Berna ise, üçgenin uzun kenarına ait yüksekliğinin dairenin yarıçapına eşit olduğunu dile getirmişlerdir. Bu bulgulardan yola çıkarak Emirhan ve katılımcılar Aleyna ile Berna’nın *eylemi içselleştirip süreç* aşamasına ulaştıkları düşünülmektedir.

Görüşmelerde Elde Edilen Bulgular

Aleyna’ya, görüşmede Etkinlik 8’de ‘animasyon sürgüsünü’ hareket ettirdiğimizde görüntüye ne olduğu ve oluşan geometrik şekil ile daire arasında bir ilişki olduğu sorulmuştur:

A: *Oluşturduğumuz geometrik şekil ile yarıçap arasına bir ilişki var mıdır?*

Aleyna: *Var.*

A: *Nasıl bir ilişki vardır?*

Aleyna: *Eee... A noktasında (üçgenin tepe noktası ve çemberin merkezi) en alt kısma kadar (dik bir şekilde) gelen kısım yarıçap olur.*

A: *Peki bu üçgenin neyi olur? Üçgene ait midir?*

Aleyna: *Evet. Yüksekliği.*

A: *Bu daire ile üçgensel bölge arasında ne fark vardır sence? Ortak yönleri var mıdır?*

Aleyna: *Var.*

A: *Nedir?*

Aleyna: *Eee... üçgenin en üsteki noktası dairenin merkez (A noktası) noktasıdır... Aynı alandır yani.*

Aleyna, dairenin animasyon ile dönüştürülerek “*üçgen şekli*ni” aldığını ifade etmiş ve bu üçgenin tepe noktasının “*dairenin merkez noktası*” (A noktası) olduğunu söylemiştir. Bu noktadan “*en alt kısma gelen*” doğru parçasının o tabana ait üçgenin “*yüksekliği*” olduğunu ifade etmiş ve üçgensel bölge ile dairenin alanlarının “*aynı*” olduğunu belirtmiştir. Sonrasında, Aleyna’ya dairenin alanını nasıl bulduğu sorulmuştur:

A: *Peki bu etkinlikte dairenin alanın bulmuştuk hatırlıyor musun?*

Aleyna: *Evet.*

A: *Nasıl bulmuştuk peki?*

Aleyna: *Alt kısmını d yapmıştınız...*

A: *Bu üçgensel bölgenin alanıyla dairenin alanı eşitti değil mi? Biz dairenin alanını bulmaya çalışıyorduk. Nasıl yapmıştık? Üçgensel bölgeye dönüştürdükten sonra?*

Aleyna: *Çemberinin çevresi üçgenin alt kısmıdır.*

A: *Evet.*

Aleyna: *Eee çevresiyle yarıçapını çarpacağız ikiye böleceğiz.*

Aleyna, üçgensel bölgenin uzun kenar uzunluğunun daireyi çevreleyen çemberin çevre uzunluğu olduğunu “*çemberin çevresi üçgenin alt kısmı*” ifadesiyle açıklamıştır. Bu bulgular ışığında Aleyna’nın dönüştürülen üçgensel bölgenin uzun kenar uzunluğunun dairenin çevresi olduğunu, o kenara ait yüksekliğin dairenin yarıçapı olduğunu ve daire ile üçgensel bölgelerinin alanlarını eşit olduğunu söylediğinden *ötürü eylemi* içselleştirip *süreç* aşamasına ulaştığı söylenebilir.

Ahmet’e Etkinlik 8’de dönüştürülen üçgensel bölge ile daire ve bu dairenin yarıçapı arasındaki ilişki sorulmuştur:

A: *Elde ettiğimiz geometrik şekil ile yarıçap arasında bir ilişki var mıdır sence?*

Ahmet: *Evet.*

A: *Nasıl bir ilişki vardır?*

Ahmet: *Üçgenin yüksekliğidir.*

A: *Hangi kenara ait yüksekliktir?*

Ahmet: *Hocam A (merkez) bura[sı] B olsun bura[sı] C olsun. BC’ye A’dan inen BC’ye ait yükseklik (etkinliğin üzerinden göstererek).*

A: *Bu üçgensel bölgenin alanıyla dairenin alanı arasında bir ilişki var mıdır?*

Ahmet: *Vardır.*

A: *Nasıl bir ilişki vardır?*

Ahmet: *Hocam o zaten üçgen dairenin açılmış hali. O üçgen tekrar tamamlandığında daire haline gel[e]cek ayrıca bi[r] şey daha vardır aralarında eşitlik, hocam birinin taban birinin çevresi yani... eee dairenin çevresiyle üçgenin tabanı eşit.*

A: *Peki alanları hakkında ne düşürsün? Bu üçgensel bölgenin alanı ile dairenin alanı aynı mıdır?*

Ahmet: *Evet.*

Ahmet, dairenin yarıçapının “*üçgenin yüksekliği*” olduğunu söylemiş ve uzunlukları bağlamında “*dairenin çevresiyle üçgenin tabanı eşit*” olduğunu belirtmiştir. Ayrıca, üçgensel bölgenin alanı ile dairenin alanını eşit olarak kabul etmiştir. Bu bulgulardan yola çıkarak Ahmet’in üçgensel bölgenin uzun kenar uzunluğunun dairenin çevre uzunluğu olduğu, o kenara ait yüksekliğin dairenin

yarıçapı olduğunu ve üçgensel bölge ile dairenin alanlarının eşit olduğunu ifade ettiğinden dolayı *eylemi* içselleştirip *süreç* aşamasına ulaşmıştır diyebiliriz.

Berna'ya Etkinlik 8'de dönüştürülen üçgensel bölge ile daire ve bu dairenin yarıçapı arasındaki ilişki sorulmuştur:

A: *Peki üçgen ile daire arasında bir ilişki var mıdır?*

Berna: *Hocam şu üçgenin en uzun kısmı var ya o dairenin çevresine eşittir (etkinlik üzerinden üçgenin tabanını göstererek).*

A: *Üçgenin alanıyla dairenin arasında nasıl bir ilişki vardır?*

Berna: *Hocam hangi daireyi açarsak açtığımız üçgenle aynı (dairenin çap uzunlukları farklı olsa da).*

A: *Aynı, neyi aynı?*

Berna: *Dairenin alanı.*

Berna, üçgenin uzun kenar uzunluğunun “*dairenin çevresine*” eşit olduğunu belirtmiş ve daire ile üçgensel bölgenin alanlarının eşit olduğunu “*hangi daireyi açarsak açtığımız üçgenle aynı*” ifadesiyle belirtmiştir. Devamında, üçgensel bölge ile dairenin yarıçapı arasındaki ilişki sorulmuştur:

A: *Peki elde ettiğimiz bi[r] şekil vardı... bu geometrik şekle üçgen demiştin, bu üçgen ile yarıçap arasında bir ilişki var mıdır? Dairenin yarıçapı?*

Berna: *Üçgenin yüksekliği dairenin yarıçapı.*

Berna, dönüştürülen “*üçgenin yüksekliği dairenin yarıçapı*” olduğunu belirtmiştir. Bu bulgular ışığında, dairenin yarıçapının üçgenin yüksekliği olduğunu, o yüksekliğe ait tabanın dairenin çevresi olduğunu ve ayrıca dairenin alanı ile üçgensel bölgenin alanını eşit olduğunu ifade ettiğinden dolayı Berna'nın *eylemi* içselleştirip *süreç* aşamasına ulaştığı söylenebilir.

Mert'e görüşmede Etkinlik 8'de oluşturulan üçgensel bölge ile dairenin yarıçapı arasında bir ilişki olup olmadığı sorulmuştur:

A: *Elde ettiğimiz üçgen ile yarıçap arasında bir ilişki var mıdır sence?*

Mert: *Vardır.*

A: *Nasıl bir ilişki vardır?*

Mert: *Yani yeni yaptığın merkez nokt... ikisinin de çizgileri aynıdır (yarıçapları).*

A: *Peki bu yarıçap üçgen için ne ifade ediyor?*

Mert: *Yarıçap yani... tabanla yarıçapı çarpınca üçgenin alanını buluyoruz.*

A: *Yarıçap yani yükseklik mi?*

Mert: *Evet yükseklik diyebiliriz ona.*

Mert, dairenin yarıçapının dönüştürülen üçgensel bölgenin uzun kenarına ait “yükseklik” olduğunu ifade etmiştir. Fakat, üçgenin alanını yanlış ifade ederek “*tabanla yarıçapı çarpınca alanını buluyoruz*” demiştir. Görüşmenin devamında üçgensel bölgenin alanıyla dairenin alanı arasında bir ilişki olup olmadığı sorulmuştur:

A: *Peki üçgenin alanıyla dairenin alanıyla bir ilişki var mıdır sence?*

Mert: *Şurası dairenin çevresi oluyor şu taban (üçgenin uzun kenarı).*

A: *Üçgensel bölge ile dairenin alanı arasında bir ilişki var mıdır sence?*

Mert: *Eşittir.*

A: *Dairenin alanını bulmak için burada ne yapıyorduk?*

Mert: *Yükseklikle tabanı çarpabiliriz.*

A: *Yani çarpınca ne oluyor?*

Mert: *Alan oluyor.*

A: *Neyin alanı oluyor?*

Mert: *Dairenin.*

A: *Sadece dairenin alanını mı buluyoruz?*

Mert: *Bi[r] de üçgenin alanını.*

A: *Nasıl hesaplıyorduk hatırlıyor musun?*

Mert: *Yükseklik taban (çarpımı).*

Mert, üçgenin uzun kenar uzunluğunun “*dairenin çevresi*” olduğunu belirtmiştir. Bu bulgulara dayanarak Mert’in üçgensel bölgenin uzun kenar uzunluğunun dairenin çevre uzunluğuna eşit olduğunu, o kenara ait yüksekliğinin de dairenin yarıçapı olduğunu ve üçgensel bölge ile dairenin alanlarının eşit olduğunu ifade ettiğinden ötürü *eylemi içselleştirip süreç aşamasına ulaşmış* diyebiliriz.

Bilge’ye Etkinlik 8’de dönüştürülen üçgensel bölge ile dairenin alanları arasındaki ilişki olup olmadığı sorulmuştur:

A: *Üçgensel bölge ile dairesel bölgenin alanları hakkında bir fikrin var mıdır?*

Bilge: *Alanları...*

A: *Farklılık var mıdır?*

Bilge: *Farklılık vardır. Çünkü yani bu böyle bir yuvarlaksa bu baya bi[r] genişliyor ve üçgenin alanı çoğalıyor.*

A: *Daha büyük mü diyorsun?*

Bilge: *Evet üçgenin alanı daha büyük.*

A: *Bu daireyi bu şekilde üçgene dönüştürdüğümüzde... Yani kapladıkları alanlar eşit oluyordu?*

Bilge: *Hımm tamam.*

Bilge, dönüştürülen dairenin alanına göre “*üçgenin alanı daha büyük*” olduğunu ifade etmiştir. Araştırmacı yönlendirmesiyle dönüştürülen dairenin kapladığı alan ile

üçgensel bölgenin kapladığı alanın eşit olduğu hatırlatarak alan korunumunu farketmesi sağlanmaya çalışılmıştır. Ardından, aynı soru tekrar yöneltilmiştir:

A: *Bu üçgenin alanı ile dairenin alanları hakkında ne gibi fikrin vardır?*

Bilge: *Eşittir.*

A: *Peki üçgenin alanını hesaplarsak, sence dairenin alanını hesaplayabilir miyiz?*

Bilge: *Üçgenin alanını hesaplarsak... evet eşittir çünkü.*

A: *Peki üçgenin alanını nasıl hesaplarız?*

Bilge: *Üçgenin alanını ... taban çarpı yükseklik... Bölü 2.*

Bilge, üçgensel bölgenin alanı ile dairenin alanını yönlendirme ile “eşit” kabul etmiş ve “Üçgenin alanını hesaplarsak” dairenin alanını hesaplayabileceğini belirtmiştir. Sonrasında, üçgensel bölgenin taban uzunluğu ile daire arasındaki ilişki sorulmuştur:

A: *Sence üçgenin taban uzunluğunu nasıl buluruz? Daireyle bir ilişkisi var mıdır?*

Bilge: *Evet var.*

A: *Nedir?*

Bilge: *Yani böyle olunca bu da böyle... üçgen böyle olunca dairede bunlar kapattığımızda daire oluyor (üçgensel bölgenin daireye dönüşümünü anlatmaya çalışması).*

A: *Peki taban uzunluğu nedir sence?*

Bilge: *Dairenin şu kısımları (eliyle dairenin çevresini göstererek). Bu kısımları yani çember.*

A: *Peki çemberin uzunluğunu hesaplayabiliyor muyuz?*

Bilge: $2\pi r$.

A: *Peki taban uzunluğu ile $2\pi r$ aynı mıdır sence?*

Bilge: *Aynı, bunu burasını hesaplıyorsak yani (çemberi göstererek).*

A: *Peki yüksekliği ne bunun... Üçgenin?*

Bilge: *Üçgenin yüksekliği burası mı (uzunluğu $2\pi r$ olan kenarın yüksekliğini göstererek)?*

A: *Evet.*

Bilge: r .

A: *r neydi?*

Bilge: *Yarıçap.*

Bilge, üçgenin uzun kenar uzunluğunun daireyi kaplayan çemberin uzunluğuna eşit olduğunu ve uzun kenara ait yüksekliğin de dairenin “yarıçapı” olduğunu ifade etmiştir. Bu bulgular ışığında Bilge dairenin yarıçapının üçgenin uzun kenarına ait yüksekliği olduğunu, kenar olan tabanın uzunluğunun daireyi kaplayan çemberin çevresi olduğunu ve ayrıca dairenin alanı ile üçgensel bölgenin alanını eşit olduğunu ifade ettiğinden dolayı *eylemi içselleştirip süreç* aşamasına geçtiği söylenebilir.

4.3.3. Nesne Aşaması

Gözlemlerde Elde Edilen Bulgular

Sınıf ortamında öğrencilere Etkinlik 8 kapsamında, dairenin alanını nasıl hesaplandığı sorusu yöneltilmiştir:

A: Dairenin alanı nasıl buluruz?

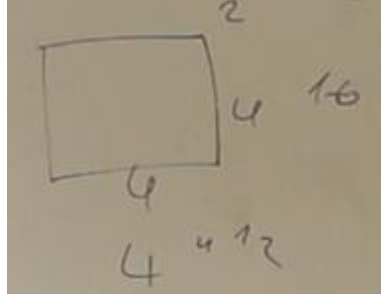
Merve: Çemberin çevresiyle yarıçapının çarpımının yarısıdır.

Merve, dairenin alanını “çemberin çevresiyle yarıçapının çarpımının yarısıdır” şeklinde bulabileceğini dile getirmiştir. Bu bulgu ışığında Merve, ‘daire’ süreci ile ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’, ‘üçgenin alan bağıntısı’ ve ‘yarıçap’ süreçlerini koordine ederek ‘daireyi çevreleyen çemberin uzunluğu ile yarıçap uzunluğunun çarpımının yarısı bu dairenin alanını verir’ şeklinde dairenin alan formülünü kapsüllediği düşünülmektedir. Öğrencilerin ders sürecinde dairenin alan formülüne ilişkin problemleri çözerken izlediği adımlar incelenmiş ve bu süreçte *nesne* aşamasına ulaşmış olduğu tespit edilmeye çalışılmıştır.

Sınıf ortamında, ‘Konu Değerlendirme Soruları 3’ testi altıncı sorusunu katılımcı Berna, şu şekilde çözmüştür:

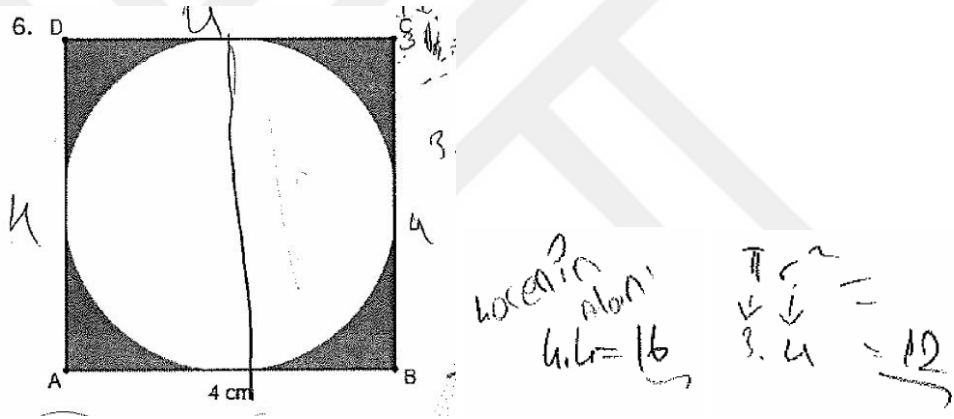
Berna: Burası 4’se burası da 4, 16 yani karenin alanı 16 (Tahtada kare çizerek). Eee şurası 4’se burası da 4, çap 4. (çemberin çapı). Bunun yarısı 2 (yarıçap), 2 ise 4 o da 12 (πr^2 formülünü kullanarak dairenin alanını hesaplayıp sonucu zihninde yapıp 4 sonucunu bulmuştur).

Katılımcı Berna, karenin bir kenar uzunluğu “4’se burası da 4” diyerek diğer kenarlarının da aynı uzunluğu olduğunu söylemiş ve iki kenarı çarparak karenin alanını hesaplamıştır. Sonrasında, karenin kenarlarına birer noktada değen çemberin çapını, “şurası 4’se burası da 4, çap 4” şeklinde açıklayarak hesaplamıştır. Burada katılımcı Berna, karenin karşılıklı kenarlarına teğet olan çemberin kesiştikleri noktaları arasında oluşturduğu doğru parçasını dikdörtgen kavramı üzerinden düşünerek, bu doğru parçasının uzunluğunun karşı kenar uzunluğuna eşit olduğunu söylemiştir. Ardından, “Bunun yarısı 2” şeklinde işlem yaparak çap uzunluğunu ikiye bölerek yarıçap uzunluğunu elde etmiştir. Daha sonrasında karenin iç bölgesini daire olarak kabul edip bu bölgenin alanını “2 ise 4 o da 12” şeklinde işlem yaparak πr^2 formülü üzerinden hesaplamıştır. Son olarak karesel bölgenin alanından dairenin alanını çıkartarak doğru sonuca ulaşmıştır (Şekil 4.34). Bu bulgu ışığında katılımcı Berna’nın, *nesne* aşamasına ulaştığı düşünülmektedir.



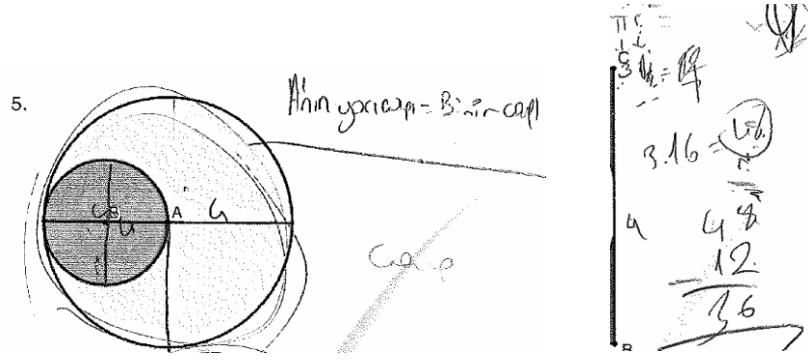
Şekil 4. 34. Berna'nın 'Konu Değerlendirme Soruları 3' Altıncı Sorusunun Sınıf İçinde Çözüm Görseli.

Benzer şekilde öğrencilerden Elif'in 'Konu Değerlendirme Soruları 3' kâğıdı incelendiğinde altıncı soruyu çözerken önce çemberin çap uzunluğunu karşılıklı teğet noktalarını birleştirerek bulmuş, sonrasında karenin alanı ile iç bölgesindeki dairenin alanını hesaplayıp farklarını almıştır. Elif, karesel bölgenin alanını iki kenarını çarparak bulurken, dairenin alanını πr^2 formülü ile hesaplamıştır (Şekil 4.35).



Şekil 4. 35. Elif'in 'Konu Değerlendirme Soruları 3' Altıncı Sorusunun Çalışma Kâğıdında Çözüm Görseli

Elif, A ve B merkezli iki daireyle ilgili beşinci soruyu çözerken önce B merkezli dairenin çapını bulmuş, ardından bulduğu değeri ikiyle çarparak A merkezli dairenin çapını bulmuştur. Sonrasında iki farklı çemberin alanlarını πr^2 formülünü kullanarak hesaplayıp farklarını alarak doğru sonuca ulaşmıştır (Şekil 4.36).



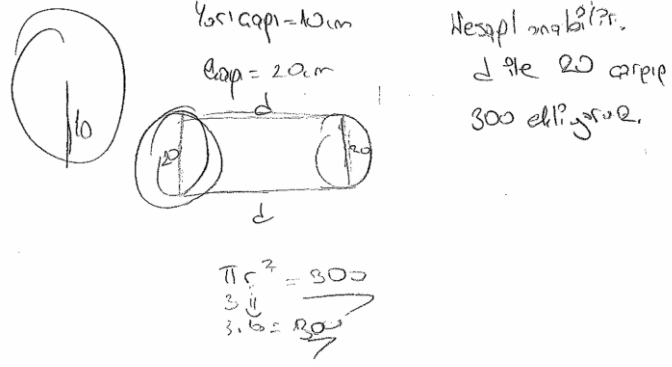
Şekil 4. 36. Elif'in 'Konu Değerlendirme Soruları 3' Beşinci Sorusunun Çalışma Kâğıdında Çözüm Görseli

Elif, 'Konu Değerlendirme Soruları 3' testi dördüncü sorusunu çözerken, dairenin alan değerini alan formülüne eşitlemiştir. Ardından, denklemi çözerek yarıçap uzunluğunu bulmuş, yarıçap uzunluğunun iki katını alarak tekrar alan formülünü kullanmış ve bu şekilde yarıçap uzunluğu iki katına çıkarılan dairenin alanını hesaplamıştır (Şekil 4.37).

$$\begin{aligned}
 & \pi r^2 = 12b^2 \\
 & 3 \cdot \pi r^2 = 3 \cdot 12b^2 \\
 & 3 \cdot \pi r^2 = 36b^2 \\
 & 3 \cdot \pi r^2 = 36b^2 \\
 & 3 \cdot \pi r^2 = 36b^2
 \end{aligned}$$

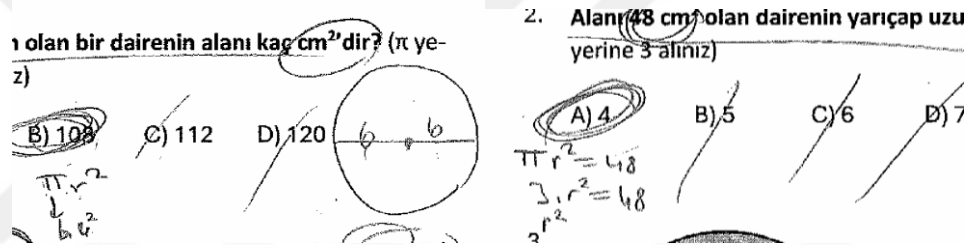
Şekil 4. 37. Elif'in 'Konu Değerlendirme Soruları 3' Dördüncü Sorusunun Çalışma Kâğıdında Çözüm Görseli

Ayrıca Elif'in Gerçek Yaşam Problemi 6'deki süpürge robotunun temizlediği alan ile ilgili soruya verdiği cevabı incelediğimizde, robotun temizlediği alanı temsili bir şekilde çizmiştir. Başlangıçta oluşan iki yarım dairenin alanını tek bir daire üzerinden πr^2 formülünü kullanarak hesaplamış, sonrasında hareket ettiği mesafeye "d" demiş, dikdörtgenin alanını çap uzunluğu ve "d" uzunluğunu çarparak elde etmiştir. Son olarak bulduğu iki farklı değeri toplayarak temizlediği alanı hesaplanabileceğini ifade etmiştir (Şekil 4.38). Bu bulgulardan dolayı, Elif'in *nesne* aşamasına ulaştığı düşünülmektedir.



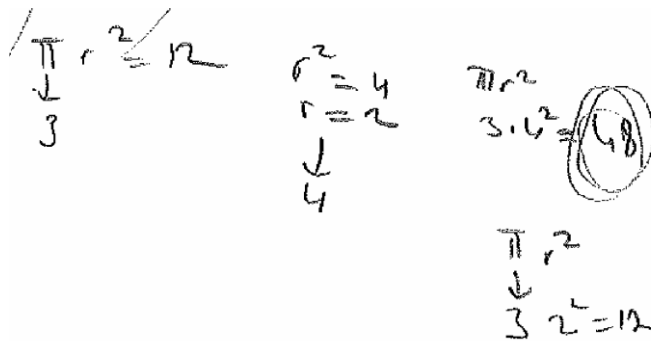
Şekil 4. 38. Elif'in 'Gerçek Yaşam Problemi 6' Problemini Çözerken Uyguladığı Adımlar

Öğrencilerden Beste'nin 'Konu Değerlendirme Soruları 3' testi incelendiğinde birinci soruda çapı verilen bir dairenin alanını yarıçapını bularak πr^2 formülü ile hesaplamış, ikinci soruda ise alanı verilen dairenin yarıçapını ters işlem uygulayarak elde etmiştir (Şekil 4.39).



Şekil 4. 39. Beste'nin 'Konu Değerlendirme Soruları 3' Birinci ve İkinci Sorularının Çözüm Görseli

Benzer şekilde Beste, testin dördüncü sorusunu çözerken önce πr^2 formülünü 12'ye eşitleyerek yarıçapını bulmuştur. Sonrasında yarıçapın iki katını bulmuş ve dairenin alanını tekrar hesaplayarak doğru sonuca ulaşmıştır (Şekil 4.40).

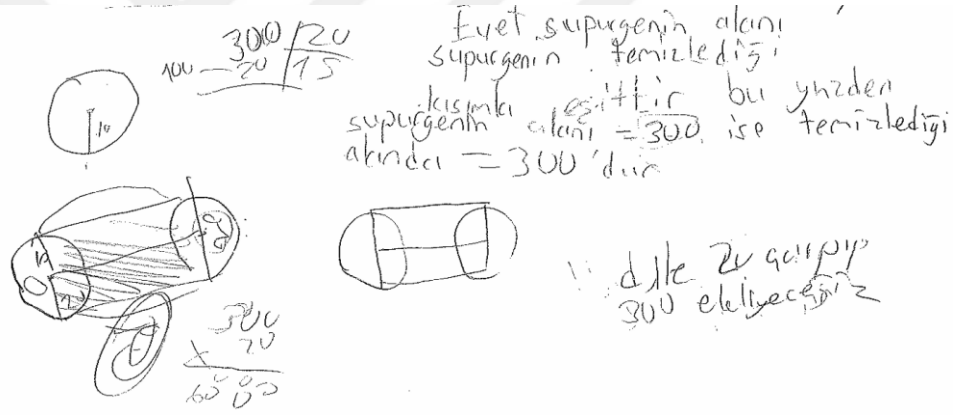


Şekil 4. 40. Beste'nin 'Konu Değerlendirme Soruları 3' Dördüncü Sorunun Çözüm Görseli

Son olarak 'Konu Değerlendirme Soruları 3' testinde A ve B merkezli iki daireyle ilgili beşinci soruyu çözerken önce soruda verilen bilgilerden yola çıkarak

dairelerin yarıçaplarını bulmuş, sonra iki farklı dairenin alanını πr^2 formülünü kullanarak elde etmiştir. Devamında dairelerin alanlarının farkını bularak doğru sonuca ulaşmıştır. Bu bulgular ışığında, Beste'nin *nesne* aşamasında ulaştığı düşünülmektedir.

Katılımcı Aleyna'nın 'Gerçek Yaşam Problemi 5'deki robot süpürge'nin temizlediği alanı içeren ilgili soruyu çözerken uyguladığı adımları incelenmiştir. Başlangıçta, robot süpürge'nin temizlediği alanı temsili bir şekilde çizmiştir. Devamında çizdiği şekilde oluşan iki yarım dairenin alanını tek bir daire olarak düşünüp πr^2 formülünü ile hesaplamıştır. Sonrasında hareket ettiği mesafeye " d " diyerek dikdörtgenin alanını çap uzunluğu ile " d " uzunluğunu çarparak elde etmiştir. Tüm bu işlemlerin sonunda iki değeri toplayarak temizlediği alanı hesaplanabileceğini ifade etmiştir (Şekil 4.41). Bu bulgudan, katılımcı Aleyna'nın *nesne* aşamasına ulaştığı düşünülmektedir.



Şekil 4. 41. Aleyna'nın 'Gerçek Yaşam Problemi 6' Problemini Çözüm Görseli

Görüşmelerde Elde Edilen Bulgular

Aleyna'ya görüşmede dairenin alanını nasıl bulduğu sorulmuştur:

A: Peki bu etkinlikte dairenin alanın bulmuştuk hatırlıyor musun?

Aleyna: Evet.

A: Nasıl bulmuştuk peki?

Aleyna: Alt kısmını d yapmıştınız...

A: Bu üçgensel bölgenin alanıyla dairenin alanı eşitti değil mi? Biz dairenin alanını bulmaya çalışıyorduk nasıl yapmıştık? Üçgensel bölgeye dönüştürdükten sonra?

Aleyna: Çemberinin çevresi üçgenin alt kısmıdır...Eee çevresiyle yarıçapını çarpacağız ikiye böleceğiz.

Aleyna, dairenin alanını üçgensel bölgenin alanını hesaplayarak bulduğunu ve dairenin “çevresiyle yarıçapını çarpacağız ikiye böleceğiz” şeklinde ifade etmiştir. Görüşmenin devamında ise dairenin alan formülü detaylı bir şekilde incelenmiştir:

A: Bu çevre yerine ne yazabiliriz?

Aleyna: $2\pi r$.

A: Sonra ne yaptık?

Aleyna: $2\pi r$ 'yi r ile çarptık.

A: Sonra bölü 2 var. Bunu en sade hale getirebilir misin?

Aleyna: Eee 2 ile 2'yi böl[e]ce[ğ]iz... r ile r 'yi çarp[a]ca[ğ]ız.

A: r ile r 'yi çarpınca ne olur.

Aleyna: O sayı r^2 olur.

A: Yani πr^2 diyebiliriz. Aynı şey yani çemberin çevresi çarpı yarıçap bölü 2 dairenin alanını veriyor. Peki bu bulduğün formül tüm daireler için geçerli midir sence?

Aleyna: Geçerlidir.

Aleyna, dairenin alan formülünü “ $2\pi r$ 'yi r ile çarptık” şeklinde açıklamıştır (Şekil 4.42). Bu formülün tüm çemberler için “geçerli” olduğunu söylemiştir. Bu bulgulara dayanarak Aleyna'nın, ‘daire’ süreci ile ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’, ‘üçgenin alan bağıntısı’ ve ‘yarıçap’ süreçlerini koordine ederek ‘daireyi çevreleyen çemberin uzunluğu ($2\pi r$) ile yarıçap uzunluğunun çarpımının yarısı bu dairenin alanını (πr^2) verir’ şeklinde ‘dairenin alan formülü’nü kapsüllediği söylenebilir.



Şekil 4. 42. Aleyna'nın Çalışma Kağıdında Dairenin Alan Formülü Görseli

Aleyna'nın nesne aşamasına ulaşmış olduğunu belirlemek amacıyla yapılan görüşmede, çap uzunluğu verilen bir dairenin alanını hesaplaması istenilmiştir. Bu doğrultuda, öğrencilere çapı 8 cm olan bir dairenin alanını nasıl hesaplayacağı sorulmuştur:

A: Çap uzunluğu 8 cm olan dairenin alanını hesaplayabilir misin bana?

Aleyna: 3 mü al[a]ca[ğ]ız π 'yi?

A: π 'yi 3 alacağız evet.

Aleyna: Yanlış yaptım (çemberin çevresinin 24 yerine 34 yazdığı için) ...

A: 48 mi buldun?

Aleyna: Evet.

A: Bana bu işlemleri anlatman lazım. İlk önce ne yaptın?

Aleyna: İlk önce ... yarıçapını al... buldum 4...4'le 4'ü çarptım 16 (zihninden çarparak), 16'yla 3'le çarptım.

Aleyna, dairenin alanını hesaplamak için önce yarıçapını bulmuş sonrasında πr^2 formülünü kullanarak “4'le 4'ü çarptım 16, 16'yla 3'le çarptım” şeklinde doğru sonuca ulaşmıştır (Şekil 4.43). Bu bulgulara göre Aleyna, *nesne* aşamasına ulaşmıştır diyebiliriz.

Handwritten calculation for the area of a circle. It shows 34 crossed out and 24 written below it. Then, 46 is written, followed by a multiplication of 46 by 3, resulting in 138, which is then crossed out and 48 is written below it.

Şekil 4. 43. Aleyna'nın Görüşmede Dairenin Alan Hesabını İçeren Sorunun Çözüm Görseli.

Görüşmede Ahmet'e dairenin alan formülünü nasıl elde ettiği sorulmuştur:

A: Bu dairenin alanını nasıl hesaplarız? Dairenin alan formülünü nasıl buluruz?

Ahmet: Hocam şöyle yaparız... bizim sadece r 'yi bilmemiz yeterli yarıçapını bilmemiz gerekir. Çünkü 2... $bi[r]$ saniye... $2\pi r$ 'den hocam bilmediğimiz bir sayı çıkıyor.

A: Ne bu hesaplayabiliyor muyuz?

Ahmet: Evet hocam r 'yi bilirse hesaplarız bu sayıyı. Bu sayıyı hesapladığımızda, tabanı ayrıca yüksekliği bulmuş oluruz, O zamanda taban...

A: Çarpı.

Ahmet: Yükseklik... eşittir alan olur (çalışma kağıdına yazarak).

A: Neyin alanı oluyor?

Ahmet: Hem üçgenin hem dairenin.

A: Üçgenin alanı taban çarpı yükseklik miydi?

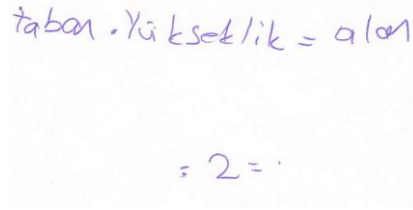
Ahmet: Hayır! Taban çarpı yükseklik bölü 2 eşittir üçgenin alanı.

A: Peki taban dediğimiz şeyin uzunluğu neydi? Taban neydi?

Ahmet: Taban çevrenin.

Ahmet, üçgenin alanını “taban çarpı yükseklik bölü 2” olarak bulduğunu ifade etmiş, bu işlemin sonucunu da “hem üçgenin hem de dairenin” alanına eşit olduğunu

belirtmiştir (Şekil 4.44). Buradaki taban uzunluğunun ise dairenin çevre uzunluğu olduğunu söylemiştir:



taban . yükseklik = alan
2 =

Şekil 4. 44. Ahmet'in Çalışma Kağıdında Dairenin Alan Formülü Görseli.

Görüşmenin devamında yapılan açıklamaların matematiksel ifadelerle desteklenmesi istenmiştir:

A: Bana matematiksel ifadeleri kullanmanı istiyorum.

Ahmet: Tamam.

A: Çevreye ne diyoruz.

Ahmet: Ç çarpı r , h (çembere ait yükseklik).

A: h neydi?

Ahmet: O da yüksekliği.

A: Onu yazmaya gerek var mı?

Ahmet: Yok.

A: Ne yapıyorduk biz Ç çarpı r 'yi.

Ahmet: Ç çarpı r .

A: Dairenin alanı formülü neydi?

Ahmet: Hayır $bi[r]$ de bölü 2.

A: Peki tüm daireler için geçerli midir?

Ahmet: Evet.

A: Neden geçerlidir?

Ahmet: Çünkü bütün daireler yarıçaplarına göre, çaplarına göre özdeş oranlı aynı oranlı (π sayısı).

Ahmet, dairenin alan formülünü “Ç çarpı r bölü 2” olarak ifade etmiştir. Ayrıca, “daireler yarıçaplarına göre, çaplarına göre özdeş oranlı aynı oranlı” olduğundan dolayı bu formülün tüm daireler için geçerli olduğunu söylemiştir (Şekil 4.45). Bu bulgulardan dolayı Ahmet'in, ‘daire’ süreci ile ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’, ‘üçgenin alan bağıntısı’ ve ‘yarıçap’ süreçlerini koordine ederek ‘daireyi çevreleyen çemberin uzunluğu ($2\pi r$) ile yarıçap uzunluğunun çarpımının yarısı bu dairenin alanını (πr^2) verir’ şeklinde ‘dairenin alan formülü’nü kapsüllediği söylenebilir.

$$G - r, h = \frac{G \cdot r}{2}$$

Şekil 4. 45. Ahmet'in Matematiksel Olarak Dairenin Alan Formülü Görseli.

Ahmet'in 'dairenin alan formülü'nü *nesneleştirme* durumunu tespit etmek amacıyla 'çap uzunluğu 8 cm olan dairenin alanını hesaplayınız' sorusu yöneltmiştir:

A: Çap uzunluğu 8 cm olan dairenin alanını hesaplayabilir misin?

Ahmet: O zaman yarıçapı 4'dür, ben direk(direkt) bi(bir) çevresini bulayım. $2\pi r$ eşittir hocam 6, 6 çarpı 4 kaç yapıyor... 6, 12, 18, 24 (çarpma işlemini aritmetik olarak hesaplayarak). Hocam 24 bunun şeyiymiş... çevresiymiş bu eşittir 24... 24 bölü 4 ya da... 24 bölü 4 eşittir...

A: 24'ü 4'e mi bölüyorsun?

Ahmet: Off ben niye karıştırdım bu sefer ya neyse, 24 çarpı 4 eşittir kaç yapıyor 80, 16 daha 96. 96'yı ikiye bölüyorduk, bölü 2 yapıyorduk. Hocam 90'nın yarısı 45, 6'nın yarısı 3, 3 artı 45 48.

Ahmet, çap uzunluğu verilen dairenin alanını hesaplamak için önce yarıçap uzunluğunu hesaplayıp sonra " $2\pi r$ eşittir hocam 6, 6 çarpı 4 kaç yapıyor... 6, 12, 18, 24" şeklinde işlem yaparak dairenin çevre uzunluğunu bulmuştur. Ardından, "24 çarpı 4 eşittir kaç yapıyor 80, 16 daha 96. 96'yı ikiye bölüyorduk, bölü 2 yapıyorduk. Hocam 90'nın yarısı 45, 6'nın yarısı 3, 3 artı 45 48" şeklinde işlem yaparak dairenin çevre uzunluğunu yarıçap uzunluğu ile çarpıp çıkan sonucu ikiye bölerek doğru sonuca ulaşmıştır (Şekil 4.46). Bu bulgular doğrultusunda, Ahmet'in *nesne* aşamasına ulaştığı söylenebilir.



$$2\pi r = 24$$

$$2 \cdot 4 = 4 = \frac{24}{4}$$

$$\pi r^2 = \pi$$

$$24 \cdot 4 = 96$$

$$\frac{96}{2} = 48$$

Şekil 4. 46. Ahmet'in Görüşmede Dairenin Alan Hesabını İçeren Sorunun Çözüm Görseli.

Görüşmede Berna'ya dairenin alanını nasıl hesaplandığı sorusu yöneltmiştir:

A: Peki dairenin alanını hesaplamıştık?

Berna: Daireyi açarak.

A: Peki açtık diyelim. Sonra ne yaptık?

Berna: Hocam şimdi üçgenin burasını bunla çarpmış mıydık (Üçgenin taban uzunluğu ile yüksekliğini ya da dairenin çevre uzunluğu ile yarıçap uzunluğunun çarparak)?

A: Üçgenin alanı neydi?

Berna: *Yükseklik çarpı uzun kısım (yüksekliğe ait taban uzunluğunu).*

A: *Yükseklikle uzun kısmı çarpınca üçgenin alanı mı oluyordu?*

Berna: *Evet sanki...*

A: *Taban uzunluğu çarpı yükseklik mi sadece?*

Berna: *He bi[r] de bölü 2.*

Berna, dairenin alanını hesaplamak için üçgensel bölgenin alanından yararlandığını belirtmiştir. Görüşmenin devamında dairenin alanını matematiksel olarak şu şekilde ifade etmiştir:

A: *Bana yapabilir misin? Taban uzunluğu neydi yazar mısın?*

Berna: *r aa...taban t yazalım.*

A: *t ne?*

Berna: *tabanın t'si.*

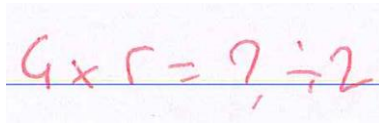
A: *Taban neye eşitti peki?*

Berna: *Dairenin şeyi... çevresi.*

A: *Biz ona Ç yazalım. Tamam mı?*

Berna: *Ç çarpı r eşittir bilmem ne, bunda bölü 2. Şunun da cevabını bilmiyorum (? işareti ile yazdığı yeri göstererek).*

Berna, dairenin alan formülünü “Ç çarpı r eşittir bilmem ne, bunda bölü 2” olarak açıklamış ve çemberin çevre uzunluğu ile yarıçapının çarpımının yarısının dairenin alanını verdiğini ifade etmiştir (Şekil 4.47). Bu bulgulardan yola çıkarak Berna'nın, ‘daire’ süreciyle ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’, ‘üçgenin alan bağıntısı’ ve ‘yarıçap’ süreçlerini koordine ederek ‘daireyi çevreleyen çemberin uzunluğu ($2\pi r$) ile yarıçap uzunluğunun çarpımının yarısı bu dairenin alanını (πr^2) verir’ şeklinde ‘dairenin alan formülü’nü kapsüllediği söylenebilir.


$$4 \times 5 = 20, \div 2 = 10$$

Şekil 4. 47. Berna'nın Matematiksel Olarak Dairenin Alan Formülü Görseli.

Berna'nın ‘dairenin alan formülü’nü nesneleştirme durumunu tespit etmek amacıyla ‘çap uzunluğu 8 cm olan dairenin alanını hesaplayınız’ sorusu sorulmuştur:

A: *Çap uzunluğu 8 cm olan dairenin alanını hesaplayabilir misin?*

Berna: *8 olarak (çemberin çapını çizerek), hocam çevresini bulmalıyız. 8 çarpı 3, 24.*

A: *Tamam π 'yi 3 aldık.*

Berna: *Eee çevresini bulduk. Ç çarpı r.*

A: *r neydi?*

Berna: *Tavanı... yüksekliği.*

A: Yükseklik neydi peki?

Berna: 8.

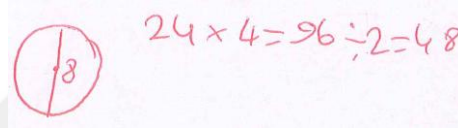
A: 8 miydi?

Berna: Ee bunun yüksekliği... hee bunun yarıçapı alınıyor 4.

A: 4 değil mi?

Berna: Evet 96 bölü 2, 48 (çemberin çevresiyle yarıçapının çarpımının yarısı).

Berna, dairenin alanını hesaplamak için başta “çevresini bulmalıyız” demiş ve “8 çarpı 3, 24” işlemi yaparak dairenin çevre uzunluğunu hesaplamıştır. Daha sonra, “96 bölü 2, 48” işlemiyle dairenin yarıçap uzunluğuyla çevresini çarpmış ve çıkan sonucu ikiye bölerek doğru sonuca ulaşmıştır (Şekil 4.48). Bu bulgulardan yola çıkarak Berna’nın *nesne* aşamasına ulaştığı söylenebilir.



24 x 4 = 96 : 2 = 48

Şekil 4. 48. Berna’nın Görüşmede Dairenin Alan Hesabını İçeren Sorunun Çözüm Görseli.

Mert’e görüşmede dairenin alanını nasıl hesaplandığı sorusu yöneltilmiştir:

A: Dairenin alanını hesaplayabilir miyiz? Üçgenin alanını nasıl bulmuştuk?

Mert: Üçgenin alanı taban uzunluğu çarpı yükseklik bölü 2.

A: Taban uzunluğu neydi?

Mert: Eşitti daireyle.

A: Dairenin neyine eşitti?

Mert: Alanı.

A: Alanı mı?

Mert: Dairenin alanı... ikisi... ikisinin alanı eşit (üçgen ile dairenin alanları).

A: Üçgenin taban uzunluğu neydi?

Mert: Yani bunun tabanı dairenin çevresi.

A: Peki alanı nasıl hesaplarız?

Mert: Dairenin çevresiyle yükseklik herhalde.

A: Tamam. Kalemle yap. Dairenin çevresine Ç de. Yükseklik neydi?

Mert: Yüksek... r.

A: Dairenin alanı neydi?

Mert: Dairenin alanı $2\pi r$.

A: Çevresiydi o.

Mert: He çevresi. Bu şey işte bu, bu, bölü 2 bu böyle (Ç çarpı r bölü 2 yazarken).

A: Çemberin çevresi çarpı yükseklik bölü 2’ydi değil mi?

Mert: Evet.

A: Peki dairenin alan formüllü bütün daireler için geçeli midir?

Mert: Evet.

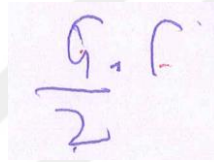
A: Neden?

Mert: Dairenin alanı mı?

A: Evet. Bu formül var ya. Bütün daireler için geçerli midir?

Mert: Bu formül yani π sayısı değişmediği için geçerli olmaz mı? Evet.

Mert, dairenin alanının üçgensel bir bölgenin alanına eşit olduğunu belirtmiş ve bu üçgensel bölgenin alanını hesaplayarak dairenin alanına ulaşılabileceğini ifade etmiştir. Dairenin alanını, “Dairenin çevresi” ile “yükseklik” çarpımının yarısı olarak açıklamıştır. Ayrıca, bu formülün tüm çemberler için geçerli olduğunu ise “Bu formül yani π sayısı değişmediği için geçerli” şeklinde ifade ederek belirtmiştir (Şekil 4.49). Bu bulgulardan Mert’in, ‘daire’ süreci ile ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’, ‘üçgenin alan bağıntısı’ ve ‘yarıçap’ süreçlerini koordine ederek ‘daireyi çevreleyen çemberin uzunluğu ($2\pi r$) ile yarıçap uzunluğunun çarpımının yarısı bu dairenin alanını (πr^2) verir’ şeklinde ‘dairenin alan formülü’nü kapsüllediği söylenebilir.


$$A = \frac{C \cdot r}{2}$$

Şekil 4. 49. Mert’in Matematiksel Olarak Dairenin Alan Formülü Görseli.

Mert’in *nesne* aşaması durumunu belirlemek amacıyla, yapılan görüşmede ‘çap uzunluğu 8 cm olan dairenin alanını hesaplayınız’ sorusu yöneltmiştir:

A: Çap uzunluğu 8 cm olan dairenin alanını hesaplayabilir misin? Bir tane daire çiz ve bir tane de çap çiz.

Mert: Çap?

A: Çap uzunluğu 8. Bunun alanını hesaplayabilir misin?

Mert: Evet.

A: Nasıl hesaplarsın ilk önce ne yaparsın?

Mert: İlk önce çap... çapla π sayısını çarparsın.

A: Sonra, π sayısını 3 alıyoruz.

Mert: Evet 3 olunca 8 çarpı 3’ten 24 oluyor.

A: Bu ne oluyor

Mert: Çevresi.

A: Çevresini buldun ama. Alanını nasıl buluyorduk?

Mert: Alanı şuydu r ile C ... çevre 24.

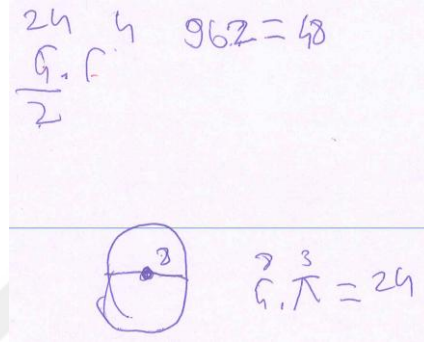
A: r ’si ne?

Mert: r yarıçaptı. 4 oluyor o zaman.

A: Yap bakalım.

Mert: 24'le 4'ü çarpınca 96, ikiye bölünce de 40... kaç oluyor... 48.

Mert, dairenin alanını hesaplamak için önce “İlk önce çap... çapla π sayısını çarpalım” diyerek dairenin çevresini bulmuş, daha sonra “24'le 4'ü çarpınca 96, ikiye bölünce de 40... kaç oluyor... 48” şeklinde işlem yaparak dairenin çevresini yarıçap ile çarpmış ve elde ettiği sonucu ikiye bölerek dairenin alanını hesaplamıştır (Şekil 4.50). Bu bulgular ışığında Mert, nesne aşamasına ulaşmış diyebiliriz.



Şekil 4. 50. Mert'in Görüşmede Dairenin Alan Hesabını İçeren Sorunun Çözüm Görseli.

Görüşmede Bilge'ye üçgensel bölgenin alanını ve dairenin alanını nasıl hesaplandığı sorulmuştur:

A: Üçgenin alanını hesaplayabilir misin?

Bilge: π 'yi 3 alırsak...

A: 2π dedin ya öyle gidelim (taban uzunluğu). Üçgenin tabanı ne? Taban uzunluğu?

Bilge: Çemberin çevresi.

A: Biz ne diyorduk ona?

Bilge: 2π .

A: Biz π diyelim ona. Üçgenin alanını nasıl hesaplıyoruz buraya π dersek?

Bilge: Buraya π dersek... bununda yarıçapını bulursak hesaplayabiliriz.

A: Yarıçapını verildi diyelim nasıl hesaplarız?

Bilge: Çemberin çevresini... burayı buluruz.

A: Ondan sonra?

Bilge: Sonra ikisini... yarıçapla eee çapı... ya pardon çevreyi yani, çemberin çevresini çarparak buluruz?

A: Bu üçgenin alanı mı?

Bilge: Dairenin.

A: Üçgenin alanını hesaplayınca dairenin alanını hesaplamış olur muyuz?

Bilge: Üçgenin yani... evet.

A: Taban uzunluğu ile yüksekliğinin çarpımı dedin. Bu doğru mudur üçgenin alanında?

Bilge: Evet...

A: Bölü 2 de var mıydı?

Bilge: Ayy, evet bölü 2 de var. Taban ... bunu bulursak hocam, yani çemberin çevresini bulursak bunu ... yüksekliği de buluruz. Taban çarpı yükseklik çarparsız bunları sonra 2'ye böleriz ve dairenin alanı bulmuş oluruz.

Bilge, dairenin alan formülünü üçgenin alanını hesaplayarak elde edeceğini söylemiştir. Üçgenin alanını hesaplamak için daireyi kaplayan çemberin çevre uzunluğuna eşit olan kenar ile dairenin yarıçap uzunluğu olan yüksekliğin çarpımının yarısı olarak ifade etmiştir. Bu bulgular ışığında Bilge'nin, 'daire' süreciyle 'çemberin çevre uzunluğu formülü', 'üçgenin alan bağıntısı' ve 'yarıçap' süreçlerini koordine ederek 'daireyi çevreleyen çemberin uzunluğu ($2\pi r$) ile yarıçap uzunluğunun çarpımının yarısı bu dairenin alanını (πr^2) verir' şeklinde 'dairenin alan formülü'nü kapsüllediği söylenebilir.

Bilge'ye 'dairenin alan formülü'nü nesneleştirme durumunu tespit etmek amacıyla 'çap uzunluğu 8 cm olan dairenin alanını hesaplayınız' sorusu yöneltilmiştir:

A: Çap uzunluğu 8 cm olan dairenin alanını hesaplayabilir misin?

Bilge: 8'se... Bunu gene üçgen şeklinde açarız.

A: Her zaman açacak mısın (gülerek)?

Bilge: Hee yok açmıcam (gülerek). Burayı böyle bi... bunu yine $2\pi r^2$ alırsız.

A: $2\pi r^2$ nereden geldi?

Bilge: Ay kare değil $2\pi r$. Burayı 3 alırsak (π sayısı). Eee r de yarıçap (yükseklik), burayı da 4 olur 8'se 4 olur (çap 8 ise, yarıçap 4).

A: Evet.

Bilge: 4 yazarız... taban çarpı yük... burayı işte hocam yapamıyorum hocam ben ya.

A: Niye yapamıyoruz. 2 ile 3'ü çarpabilir misin?

Bilge: 6.

A: Ondan sonra ne ile çarpacaksınız?

Bilge: 6 kere 4, 24.

A: Tamam 24. Ne buldun?

Bilge: 24, çemberin çevresi.

A: Sonra ne yapacağız?

Bilge: Eee 24'se... 24'le, taban çarpı yükseklik. 24'le 8'i çarparsız.

A: Yükseklik 8 oluyor değil mi?

Bilge: Taban çarpı...

A: Yükseklik neydi?

Bilge: Ha pardon 4'le yapaca[ğı]z. 96, 96'yı da ikiye böleceğiz.

A: 48 ne bulduk biz?

Bilge: Eee dairenin alanı.

Bilge, dairenin alanını hesaplamak için önce “*üçgen şeklinde açarız*” diyerek derste gerçekleştirdiği *eylemi* hatırlamış ve daireyi üçgensel bölgeye dönüştürmeyi düşünmüştür. Araştırmacı yönlendirmesiyle dairenin çevre uzunluğu formülünü kâğıda yazmış, ancak işlemi yapamayacağını söylemiştir. Ardından, yine araştırmacının yönlendirmesiyle “*6 kere 4, 24*” şeklinde işlem yaparak dairenin çevresini hesaplamıştır. Daha sonra, “*24’le, taban çarpı yükseklik. 24’le 8’i çarpalım... Ha pardon 4’le yapamaz. 96, 96’yı da ikiye böleceğiz*” şeklinde işlem yaparak, dairenin çevre uzunluğunu taban belirleyip, yüksekliği yarıçap ile çarpmış ve çıkan sonucu ikiye bölmüştür. Böylece, üçgensel bölgenin alanından yola çıkarak dairenin alanını doğru bir şekilde hesaplamıştır. Bu işlemlerin ardından, yaptığı işlemleri tekrardan açıklanması istenilmiştir:

A: *Peki ne yaptın burada? Yarıçapı bilinen bir daire verildi.*

Bilge: *Şimdi anladım hocam (gülerek).*

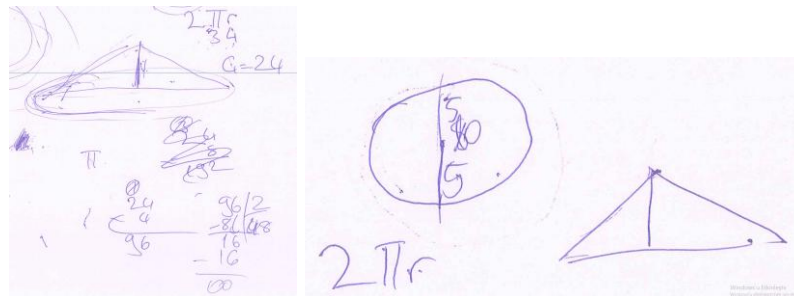
A: *Bu dairenin alanını nasıl hesaplıyorsun bana sözlü olarak söyle?*

Bilge: *Şimdi bu dairenin alanını, ilk önce çemberin çevresini... yani buralarını hesaplarım (çalışma kâğıdındaki çemberin çevresini kalemle göstererek). Yani $2\pi r$... $2\pi r$ ’yi hesaplarım.*

A: *Ondan sonra?*

Bilge: *Sonra hocam çemberin çapı zaten verilecek, mesela atıyorum 10’sa (çap) burası 5-5 olacağı için (yarıçaplar)... Bunları hesapladıktan sonra ... yani, 5 taban çarpı yükseklik yapıp. Bunun sonucuyla (çemberin çevre uzunluğu formülünü kalemle göstererek) 5’i çarparım. Sonra 2 ile bölerim.*

Bilge, yaptığı işlemleri anlatırken dairenin alanını hesaplamayı öğrendiğini ifade etmiştir. Öğrendiğini göstermek amacıyla çapı 10 birim olan bir daire belirlemiş ve bu dairenin alanını hesaplamak için “*taban çarpı yükseklik yapıp. Bunun sonucuyla 5’i çarparım. Sonra 2 ile bölerim*” diyerek, dairenin çevre uzunluğunu yarıçap ile çarpıp ikiye bölerek doğru sonuca ulaşabileceğini belirtmiştir (Şekil 4.51). Bu bulgular ışığında, Bilge *nesne* aşamasına ulaştığı söylenebilir.



Şekil 4. 51. Bilge’nin Görüşmede Dairenin Alan Hesabını İçeren Sorunun Çözüm Görseli

Dairenin alan formülüne ilişkin katılımcıların *şemalarında* farklılıkların olmadığı görülmüştür. Katılımcıların tamamı ‘yarıçap uzunluğu bilinen bir dairenin üçgensel bölgeye dönüştürülmesi’ *eylemini* gerçekleştirmişlerdir. Katılımcılar; dönüştürülen dairenin, çevresi taban uzunluğu ve yarıçapı yüksekliği olan bir üçgensel bölgeye dönüştürdüklerin farkına vararak süreci içselleştirmişlerdir. Ardından, ‘daire’ *süreciyle* ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’, ‘üçgenin alan formülü’ ve ‘yarıçap’ *süreçleri* arasında koordinasyon kurarak ‘daireyi çevreleyen çemberin uzunluğu (çevresi) ile yarıçap uzunluğunun çarpımının yarısı bu dairenin alanını verir’ şeklinde kapsülleme yapıp ‘dairenin alan formülü’ *nesnesine* ulaşmışlardır.



5. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5.1. Sonuç ve Tartışma

Bu araştırma, 6. sınıf öğrencilerinin çember ve temel elemanları (çember, merkez, yarıçap, çap ve daire), çemberin çevre uzunluğu formülü ve dairenin alan formülü kavramlarını nasıl yapılandıklarını incelemiştir. Bu amaç doğrultusunda, APOS teorik çerçevesi temel alınarak söz konusu kavramlara yönelik bir ön genetik çözümleme geliştirilmiş ve DMY (GGB) destekli bir öğrenme ortamı oluşturulmuştur. Uygulama sonrasında elde edilen bulgular doğrultusunda genetik çözümleme güncellenmiş ve nihai hâline kavuşturulmuştur.

Görüşmelerden elde edilen veriler, katılımcıların *eylem* aşamasında ve kapsülleme mekanizmalarında farklı bilişsel stratejiler geliştirdiklerini ortaya koymuştur. Çember kavramına ilişkin *eylem* aşamasında, ‘sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaları çizer’ *eylem*inin yanı sıra, ‘bir ucu bu sabit noktada olan bir doğru parçası uzaklığındaki noktaları çizer’ *eylem*ini de öğrenciler tarafından kullanıldığı gözlemlenmiştir. Düzeyi orta üstü ve düşük olan katılımcılar, ikinci şekilde *eylem*i gerçekleştirirken; diğer katılımcılar birinci *eylem*i esas almışlardır. Benzer şekilde kapsülleme aşamasında da belirgin farklılıklar gözlenmiştir. Hazırlanan ön genetik çözümlemeye yer alan ‘sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktalar kümesi bir çember belirtir’ bilgisine ek olarak, ‘sabit bir noktadan sabit uzunlukta bir doğru parçası ile oluşturulan noktalar bir çember belirtir’ ifadesi de sürece dâhil edilmiştir. Düzeyi iyi olan katılımcı ikinci tanımla kapsülleme gerçekleştirirken, diğer katılımcılar ilk tanımlı esas almışlardır. Bu sonuçlar, matematiksel bir kavramın öğreniminde öğrencilerin birden fazla *eylem*, süreç ve nesne düzeyinde kavramsallaştırma gerçekleştirebileceğini göstermektedir (Arnon vd., 2014). Nitekim Roa-Fuentes ve Oktaç (2010) tarafından yapılan çalışmada da doğrusal dönüşüm kavramı için iki farklı genetik çözümleme önerilmiş; bunlardan biri *eylem*in içselleştirilmesiyle nesneye ulaşmayı içerirken, diğeri iki farklı sürecin koordinasyonu ile nesneleştirme sürecine ulaşmayı içermiştir. Bu çalışma da benzer biçimde, öğrencilerin kavramları yapılandırma yollarında çeşitliliğin olduğunu ve dinamik ortamların bu süreçleri destekleyici rol oynadığını ortaya koymaktadır.

6. sınıf öğrencilerinin çember ve daire ile ilgili kavram oluşum süreçlerini desteklemek amacıyla ortam DMY’larından GGB destekli tasarlanmıştır. Öğretim süreci ve bireysel görüşmeler doğrultusunda, katılımcıların bu yazılım desteğiyle

kavramları daha kolay düşündükleri ve kavramlar arası ilişkileri daha kısa sürede kurabildikleri düşünülmektedir. Bu sonuçlar, DMY'lerin kavramsal öğrenmeye katkı sunduğunu ve geleneksel araçlar olan pergel ve çizgeçle yapılan inşalara göre daha uygulanabilir olduğunu ortaya koymaktadır. Bu durum, literatürde yapılan çalışmalarla da (örneğin; Günhan ve Açı, 2016; Öçal ve Şimşek, 2017; Topuz ve Birgin, 2020) örtüşmektedir. Ayrıca, DMY ve etkileşimli tahta kullanımının öğrencilerin öğrenmeye yönelik ilgisini artırdığı düşünülmektedir. Bu düşünce de literatürde yapılan (örneğin; Lavicza ve Papp-Varga, 2010; Wall vd., 2005) çalışmaları destekler niteliktedir. Bununla birlikte, teknolojik araçların sadece görsel olarak destek sağlamaktan öte, öğrencilerin akademik başarılarına yönelik olumlu bir etkisi olduğu düşünülmektedir. Nitekim, teknolojinin matematik öğretiminde kullanılmasının akademik başarıyı artırdığını yapılan çalışmalar da (örneğin; Ağaçdiken, 2021; Bhagat ve Chang, 2015; Çetin, 2018; Dikovic, 2009; Frank vd., 2022; Hutkemri ve Zakaria 2014; Keskin, 2019; Reisa, 2010; Thambi ve Eu, 2013; Zengin, 2019) bu düşünceyi desteklemektedir. Bu bağlamda, DMY (GGB) destekli öğrenme ortamının, çember ve daire kavramlarının öğretiminde hem kavramsal bütünlüğün sağlanması hem de öğrencilerin anlamlı öğrenmeler gerçekleştirmesi açısından etkili bir araç olduğu sonucuna ulaşılabilir. Ayrıca, ortaokul düzeyinde çember ve daire konularının öğretiminde de GGB kullanımının öğrencilerin akademik başarılarını artırdığını gösteren çalışmalar da mevcuttur (örneğin; Acar, 2017; Bayrambeğ, 2022; Topuz ve Birgin 2020; Şeker ve Erdoğan, 2017; Uzun, 2014; Tan, vd., 2020).

APOS teorisi bağlamında, özellikle DMY'nin sağladığı görselleştirme ve etkileşimli yapının, öğrencilerin süreçler arası koordinasyon kurmasını kolaylaştırdığını ve APOS teorisine uygun olarak kavramsal gelişimlerini desteklediğini düşünülmektedir. Nitekim, çember kavramının yapılandırılmasında öğrencilerden bazıları 'sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaları çizer' *eylem*ini gerçekleştirirken, diğerleri 'bir ucu bu sabit noktada olan bir doğru parçası uzaklığındaki noktaları çizer' şeklinde *eylem*i gerçekleştirmişlerdir. Bu durum, öğrencilerin çember kavramı ile ilgili farklı yollarla *eylem* gerçekleştirdikleri ve dinamik ortamın sunduğu farklı görsel deneyimlerin bu çeşitliliği tetiklediği düşünülmektedir. Nitekim, bir genetik çözümlemede matematiksel bir kavramın birkaç farklı *eylem*, *süreç* ve *nesneden* oluşması mümkündür (Arnon vd., 2014). Ayrıca, öğrencilerin çemberin çevre uzunluğu formülünü oluşturma sürecinde DMY

ortamının etkisi belirgin bir şekilde gözlemlenmiştir. Sınıf içinde yapılan etkinlik (5)te öğrenciler, çemberin çevre uzunluğunun çapına oranının sabit olduğunu fark edemezken; GGB destekli etkinlik (6)te bu sabit oranı keşfederek çevre uzunluğu formülünü bu ilişkiye dayalı olarak geliştirdikleri gözlemlenmiştir. Bu durum, APOS teorisinde yer alan *eylemden sürece* geçiş aşamasının (yani eylemin içselleştirilmesi), DMY'nin sunduğu etkileşimli yapılarla hızlandığını ve daha derinlemesine kavramsal öğrenmeyi mümkün kıldığını göstermektedir. Benzer şekilde, dairenin alan formülü oluşumu da DMY ortamında dairenin üçgensel bir bölgeye dönüştürülmesi yoluyla yapılandırılmış olup bu süreçte DMY'nin öğrencilerin çemberin çevresini üçgenin taban uzunluğu, yarıçapını ise yüksekliği olarak görmelerini sağlayarak içselleştirme mekanizmasına hizmet ettiği düşünülmektedir. Nitekim, literatürde yapılan bazı çalışmalar da bu sonuçları destekler niteliktedir. Tabaghi ve arkadaşlarının (2009) gerçekleştirdikleri çalışmada, DMYlerin APOS kuramı bağlamında bireylerin bilişsel yapılarını oluşturmalarını ve nesneleşme sürecini kolay ve etkili hale getirdiği sonucuna ulaşılmıştır.

5.1.1. Çember, Temel Elemanlar ve Daire Kavramlarının Oluşumuna Ait Sonuçlar

5.1.1.1. Çember ile Temel Elemanların Oluşumuna Ait Sonuçlar

Çember kavramının oluşum süreci APOS teorik çerçevesinde incelendiğinde, ders sürecinde öğrencilerin neredeyse tamamının sürece aktif olarak katıldığı ve 'sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaları çizme' *eylemini* başarıyla gerçekleştirdiği gözlemlenmiştir. Görüşmelerde de katılımcıların tamamının bu *eylemi* gerçekleştirebildiği anlaşılmaktadır. Katılımcıların bir kısmı, merkez nokta etrafında farklı bir noktanın döndürülmesi yoluyla çemberi oluşturmaya yönelik *eylemi* gerçekleştirirken, diğerleri merkez noktaya doğru parçası uzaklığındaki noktaları belirleyerek çemberi oluşturma *eylemini* gerçekleştirmişlerdir. Ancak, düzeyi düşük olan katılımcının, merkez nokta etrafında döndürdüğü doğru parçasını kavramsal olarak tanımlamada güçlük yaşadığı tespit edilmiştir.

Sınıf ortamında düzeyi orta ve orta altı olan katılımcılar çemberin merkezini doğru biçimde belirlemiştir. Sınıfta bulunan üç öğrenci, merkez nokta ile çember üzerindeki noktalar arasındaki mesafenin eşit olduğunu ifade etmişlerdir. Ayrıca, düzeyi iyi olan katılımcı merkez nokta ile çember üzerindeki noktalar arasındaki doğru parçalarının uzunluklarının eşit olduğunu belirtmiş; düzeyi orta üstü olan katılımcı ise

bu doğru parçalarının sayısının sonsuz olabileceğini ifade etmiştir. Çap kavramına ilişkin olarak düzeyi iyi ve orta olan katılımcılar çapın doğrusal olduğunu belirtmişlerdir. Bu bulgulardan hareketle sınıf ortamında, düzeyi iyi, orta üstü ve orta olan katılımcıların eylemi içselleştirip süreç aşamasına ulaştıkları düşünülmektedir.

Nitekim görüşmeye alınan katılımcılar, *eylem* aşamasında pergel ile çizdikleri çemberin ‘merkez’ noktasını, çemberin üzerindeki noktalara eşit uzaklıkta olan pergelin iğnesinin belirlediği yer olduğunu ifade etmişlerdir. Orta altı düzeyindeki katılımcı ise, GGB destekli etkinlik (2)de oluşturulan ilk noktayı merkez kabul etmiştir. Bununla birlikte tüm katılımcılar, merkez noktanın çember üzerindeki noktalara eşit uzaklıkta olması gerektiğini açıkça belirtmişlerdir. Ayrıca katılımcıların tamamı, merkez noktadan çember üzerine çizilen doğru parçalarının uzunluklarının eşit olduğunu ifade etmişler ve bu doğru parçalarını ‘yarıçap’ olarak adlandırmışlardır. Çap kavramı ise katılımcılar tarafından, merkezden geçen, uçları çember üzerinde bulunan ve uzunluğu iki yarıçap uzunluğuna eşit olan doğru parçası olarak tanımlamışlardır. Düzeyi iyi olan katılımcı, bu tanıma ek olarak çapı oluşturan yarıçaplar arasında 180 derecelik bir açı bulunduğunu ve çapın çemberi iki eşit parçaya böldüğünü belirtmiştir. Orta altı düzeydeki katılımcı ise çapı ‘çemberin genişliği’ olarak nitelendirmiştir. Öte yandan, düzeyi düşük olan katılımcının, yarıçap ve çap kavramlarının neyi ifade ettiğini bilse de bu kavramları birbirlerinin yerine kullandığı tespit edilmiştir. Sonuç olarak, katılımcıların tamamı sürecin üzerinde düşündüğü ve yaptıkları *eylemin* bilincinde olduklarından ötürü *eylemi* içselleştirip *süreç* aşamasına ulaşmışlardır.

Bu sonuçlar doğrultusunda, katılımcıların merkez noktayı belirleme konusunda herhangi bir zorluk yaşamadıkları, aksine bu kavramı diğer kavramlara nazaran doğru bir şekilde tanımladıkları görülmüştür. Elde edilen bu bulgular, Özerbaş ve Kaygusuz’un (2012) 5. sınıf, Çantimer ve Şengül’ün (2017) ise 7. ve 8. sınıf öğrencileriyle yürüttükleri ve çember ile daire konularına ilişkin kavram yanılgılarını inceledikleri çalışmalarla örtüşmektedir. Söz konusu çalışmalarda, öğrencilerin en az kavram yanılgısına düştükleri kavramın ‘merkez nokta’ olduğu görülmüştür. Dolayısıyla, araştırmada elde edilen bu sonuç literatürle tutarlılık göstermektedir.

Bununla birlikte, düzeyi düşük olan katılımcının ‘çap’ ve ‘yarıçap’ kavramlarını karıştırması, Çantimer ve Şengül’ün (2017) araştırmasındaki bulgularla paralellik göstermektedir. İlgili çalışmada, 7. sınıf öğrencilerinin çember konusuyla ilgili

kavramları tanımlamada güçlük çektikleri, tanımları yetersiz ya da hatalı açıkladıkları, ayrıca tanıma uygun çizim yapma ve kavramlar arası ilişki kurmada zorlandıkları belirtilmiştir. Benzer şekilde, Kristianti ve arkadaşlarının (2022) 11. sınıf öğrencileriyle gerçekleştirdikleri çalışmada da öğrencilerin yarıçap kavramını tanımlamada zorlandıkları ifade edilmiştir. Ayrıca, Özerbaş ve Kaygusuz'un (2012) çalışmasında, 5. sınıf öğrencilerinin en çok yanlışla düştükleri kavramın 'yarıçap' olduğu ortaya konmuştur. Buna karşın, mevcut araştırmada yalnızca bir öğrencinin bu kavramı karıştırmış olması, genel literatürde raporlanan sonuçlara kıyasla daha olumlu bir tabloyu yansıtmaktadır. Bu durum, araştırmada kullanılan DMY (GGB) destekli etkinliklerin akademik başarıya olumlu katkısı şeklinde yorumlanabilir. Nitekim, Topuz ve Birgin'in (2020) 7. sınıf öğrencileriyle gerçekleştirdikleri çalışmada, çember ve daire konularına yönelik geliştirilen DMY destekli öğretim ortamının, öğrenciler tarafından dersi daha eğlenceli hale getirdiği, öğrenmeyi kolaylaştırdığı ve şekilleri zihinsel olarak canlandırmayı desteklediği ifade etmektedir.

Sınıf ortamında bir öğrencinin, 'nokta' ve 'uzaklık' süreçleri arasında koordinasyon kurarak 'çember' nesnesine ulaştığı düşünülmektedir. Ayrıca, düzeyi iyi ve orta üstü olan katılımcıların sınıf ortamındaki problem çözme durumları incelendiğinde, çember nesnesine ulaştıkları düşünülmektedir. Nitekim görüşmelerde de tüm katılımcıların çember nesnesine ulaştıkları tespit edilmiştir. Düzeyi iyi, orta ve orta altı olan katılımcılar görüşme sürecinde 'nokta' ve 'uzaklık' süreçleri arasında koordinasyon kurarak 'çember' nesnesine ulaşırken, diğer katılımcılar ise 'nokta' ve 'doğru parçası' süreçleri arasında koordinasyon kurarak çember nesnesine ulaşmıştır. Bu farkın, GGB ortamındaki etkinlik (2)de gerçekleştirilen bir noktanın başka bir nokta etrafında döndürülmesi ve bir doğru parçasının bir nokta etrafında döndürülmesiyle ilgili olduğu düşünülmektedir. Benzer şekilde, farklı kavramsal koordinasyon yapılarına odaklanan araştırmalar literatürde yer almaktadır (Roa-Fuentes ve Oktaç, 2010). Ayrıca, kapsülleme sürecinde de farklılıklar gözlemlenmiştir. Bazı katılımcılar 'sabit bir noktaya (merkez) eşit uzaklıktaki noktalar kümesi' biçiminde kapsülleme ile 'çember' nesnesine ulaşırken, diğerleri 'sabit bir noktadan (merkez) sabit bir doğru parçası (yarıçap) uzunluğu kullanılarak oluşturulan noktalar bir çemberi belirtir' şeklinde kapsülleme yapıp 'çember' nesnesine ulaşmışlardır. Bu durum, öğretim süreci sonunda genetik çözümlemenin geliştirildiğini ve kavramsal olarak zenginleştiğini göstermektedir.

5.1.1.2. Daire Kavramının Oluşumuna Ait Sonuçlar

Süreç zihinsel bir *nesne*ye kapsüllendikten sonra, ihtiyaç duyulduğunda sürece tekrar geri kapsülden çıkarılabilir. Ayrıca iki *nesne* kapsülden çıkartılarak *sürece* indirgenebilir ve *süreçler* koordine edilip tekrardan kapsüllenebilir (Arnon vd., 2014; Dubinsky, 1991; Dubinsky vd., 2005; Oktaç ve Çetin, 2016; Yılmaz, 2023). Daire kavramının oluşumunda, çember *nesnesi* kapsülden çıkartılıp sürece indirgenmiş ve farklı süreçler ile koordinasyon kurularak tekrar kapsüllenmiştir. Bunu sınıf ortamında bir öğrenci, ‘çember’ nesnesini kapsülden çıkartıp sürece indirgeyip, ‘bölge’ ve ‘küme’ süreçleriyle koordinasyon kurarak tekrardan kapsülleme gerçekleştirerek ‘daire’ *nesnesine* ulaşmıştır. Görüşmede ise katılımcıların dördü, ‘çember’ *nesnesini* kapsülden çıkarıp *sürece* indirgemiş ve bu *süreci* ‘bölge’ ve ‘küme’ süreçleriyle koordinasyon kurarak, ‘çember ve iç bölgesindeki tüm noktalar daire olarak adlandırılır’ şeklinde tekrardan kapsülleyip ‘daire’ *nesnesine* ulaşmışlardır. Ancak düzeyi düşük olan katılımcı ‘bölge’ ve ‘küme’ süreçleri arasında koordinasyon kuramamış ve bu nedenle ‘daire’ kavramını *nesne* düzeyinde yapılandıramamıştır. Bu katılımcı çemberin üzerindeki noktaların daireye dâhil olup olmadığı sorusuna da tutarlı bir cevap verememiştir. Bu durum, katılımcının kavramsal yapılandırmasının henüz *süreç* düzeyinde olduğunu ve *nesne* düzeyine ulaşamadığını göstermektedir. Bu ise APOS teorisine göre bir kavramın tam anlamıyla *nesneleşmesi* için yalnızca *süreç* düzeyinde işlem yapılmasının yeterli olmadığını göstermektedir.

5.1.2. Çemberin Çevre Uzunluğu Formülünün Oluşumuna Ait Sonuçlar

Çemberin çevre uzunluğu formülünün oluşum süreci APOS teorik çerçevesinde incelendiğinde, sınıf ortamında öğrencilerin neredeyse tamamının süreçte aktif olduğu ve ‘yarıçap/çap uzunluğu bilinen bir çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna oranlar’ *eylemi*ni başarıyla gerçekleştirdiği gözlemlenmiştir. Görüşmelerde ise, düzeyleri farklı olan katılımcıların biri hariç tamamı bu *eylemi* gerçekleştirdiği tespit edilmiştir. Ancak, düzeyi düşük olan katılımcı *eylem* aşamasında kalmıştır. Bu katılımcı, görüşme sürecinde çemberin çevre uzunluğu ile çap uzunluğu arasında bir ilişkinin olmadığını belirtmiş ve çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna bölünmesinin çemberi fiziksel olarak iki parçaya ayırmak olduğunu dile getirmiştir. Bu durum, ilgili katılımcının uzunluk kavramını göz ardı ederek çapın yalnızca fiziksel bir kesme işlevi gördüğünü düşündüğünü ve kavramı yüzeysel bir şekilde değerlendirdiğini göstermektedir. Sonuç olarak, bu katılımcı sınıf içinde

gerçekleştirilen ‘yarıçap/çap uzunluğu bilinen bir çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna oranlar’ *eylemi*ni anlamlı bir şekilde gerçekleştirememiştir. Öte yandan, düzeyleri orta ve orta üstü olan katılımcılar çember kavramının oluşum sürecinde kavram karmaşası yaşayan düzeyi düşük olan katılımcı gibi benzer bir şekilde çap ile yarıçap kavramlarının neyi ifade ettiğini bilse de kavramları birbirini yerine kullanmıştır. Bu durum, öğrencilerin kavramları tanıdıkları hâlde kullanımda karıştırabildiklerini ve yapılandırmalarında eksiklikler bulunduğunu göstermektedir. Nitekim literatürde de benzer şekilde, öğrencilerin çember konusundaki kavramları birbirinin yerine kullandıkları ve kavramlar arasında ayırım yapmada güçlük çektikleri tespit edilmiştir (Çantimer ve Şengül, 2017).

Sınıf ortamında somut materyallerle gerçekleştirilen etkinlik (3) sürecinde, ‘yarıçap/çap uzunluğu bilinen bir çemberin çevre uzunluğunu çap uzunluğuna oranlar’ *eyleminde* elde ettikleri değerin sabit olabileceğini fark edememişlerdir. Ancak aynı *eylemin*, DMY destekli etkinlik (4)’te tekrarlanmasıyla birlikte, öğrencilerin çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranlanması sonucu elde edilen değerin sabit olduğunu fark ettikleri gözlemlenmiştir. Sınıf içi tartışmalarda bir öğrenci ve düzeyi orta olan katılımcı, bu oranın sabitliğini fark etmiş ve bu bağlamda gerçekleştirdikleri *eylemi* içselleştirerek APOS teorisi bağlamında *süreç* aşamasına ulaştıkları düşünülmektedir. Nitekim, bu katılımcı gibi diğer üç katılımcı ile yapılan görüşmede bu *eylemi* içselleştirerek *süreç* aşamasına ulaştıkları tespit edilmiştir. Eylem düzeyinde kalan katılımcı dışındakiler, çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna oranı ile elde edilen değerin sabit olduğunu açıkça ifade etmişlerdir. Bu durum, söz konusu katılımcıların ilgili *eylemi* içselleştirip *süreç* aşamasına ulaştıklarını göstermektedir.

Ders sürecindeki gözlemler doğrultusunda, düzeyi orta ve iyi olan katılımcıların ‘çember’ süreci ile ‘ π ’, ‘çap’ ve ‘oran’ süreçleri arasında koordinasyon kurarak ‘ π sayısı ile çap uzunluğunun çarpımı çevre uzunluğunu verir’ şeklinde kapsülleme yapıp ‘çevre uzunluğu formülü’ *nesnesine* ulaştıkları düşünülmektedir. Nitekim görüşmelerde, *eylem* aşamasında kalan katılımcı haricindeki katılımcıların ‘çember’ süreciyle ‘çap’, ‘ π ’, ‘ters işlem’ ve ‘oran’ süreçlerini koordine ederek ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’ *nesnesine* ulaştıkları tespit edilmiştir. Düzeyi orta olan katılımcı, sınıf ortamında verilen bir problemde çemberin çevre uzunluğunu ölçme sürecini etkinlik (4)teki deneyimlerine dayandırarak gerçekleştirmiştir. Bu katılımcı, GGB etkinliğinde çemberi dinamik olarak bir doğru parçasına dönüştürerek çevresini ölçme

*eylemi*ni zihninde canlandırmış ve bu dinamik imajı tahtaya çizerek aktarmıştır. Nitekim Yılmaz'ın (2011) lisans düzeyindeki öğrencilerle yürüttüğü, matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerinde görselleştirmenin önemini incelediği çalışmada, APOS teorisi kapsamında farklı bilişsel yapılarda görselleştirmenin gerçekleştirildiği görülmektedir. Bu durum, bu araştırmada elde edilen sonuçlarla paralellik göstermektedir. Ayrıca, düzeyi iyi ve düşük olan katılımcıların hazırbulunuşluk testinde oran sorusunu boş bıraktıkları tespit edilmiştir. Bu durumun dikkatsizlikten ya da oran kavramına ilişkin bilgi eksikliğinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Düzeyi orta olan katılımcı ise, iki çokluğun oranını yanlış kavramsallaştırarak toplamış ve soruyu hatalı yanıtlamıştır. Ancak, bu katılımcının 'çember' süreciyle 'çap', ' π ', ters işlem' ve 'oran' süreçlerini koordine ederek 'çemberin çevre uzunluğu formülü' *nesnesine* ulaşmasından ötürü, ders sürecinde bu kavram yanlışlığının düzeltildiği ve katılımcının oran kavramına ilişkin doğru bir anlayış geliştirdiği sonucuna varıldığı düşünülmektedir.

5.1.3. Dairenin Alan Formülünün Oluşumuna Ait Sonuçlar

Sınıf ortamında öğrenciler, alanı bilinen karesel bölgelerle dairenin alanını doğru bir şekilde hesaplayamayacaklarını ifade etmişlerdir. Görüşmelerde de benzer şekilde, katılımcılar bu şekilde dairenin alanının hesaplanamayacağını belirtmişlerdir. Nitekim Gür ve Döldül'ün (2024) gerçekleştirdiği çalışmada, özel yetenekli öğrencilerin dairenin alanını birim karelerle hesaplamaya çalıştıkları ancak doğru sonuca ulaşamadıkları rapor edilmiştir. Bu durum, yapılan araştırmanın sonuçlarını destekler niteliktedir. Sınıf ortamında dairenin alan formülünü yapılandırma sürecinde, 'yarıçap uzunluğu bilinen bir dairenin üçgensel bölgeye dönüştürülmesi' *eylemi*ni orta düzeyindeki katılımcı dile getirdiğinden dolayı *eylemi* gerçekleştirdiği düşünülmektedir. Ayrıca görüşmelerde tüm katılımcıların, bu *eylemi* gerçekleştirdikleri tespit edilmiştir.

Sınıf ortamında düzeyi iyi olan katılımcı, dönüştürülen üçgensel bölgenin uzun kenar uzunluğunun dairenin çevre uzunluğuna eşit olduğunu ifade etmiştir. Diğer bir öğrenci ve düzeyi orta olan katılımcı ise, o kenara ait yüksekliğinin dairenin yarıçapı olduğunu dile getirmişlerdir. Bu bağlamda, ilgili öğrencilerin sınıf ortamında *eylemi* içselleştirip *süreç* aşamasında ulaştıkları düşünülmektedir. Nitekim tüm katılımcılar, dönüştürülen üçgensel bölgenin uzun kenarının dairenin çevre uzunluğuna, bu kenara ait yüksekliğin ise dairenin yarıçap uzunluğuna eşit olduğunu ve bu üçgensel bölgenin

alanının dairenin alanına eşit olduğunu açıkça ifade etmişlerdir. Bu durum, tüm katılımcılarımızın *eylemi* içselleştirip *süreç* aşamasına ulaştıklarının göstergesidir. Ancak, düzeyi düşük olan katılımcı, dönüştürülen dairenin alanı ile elde edilen üçgensel bölgenin alanının farklı olduğunu ifade etmiştir. Üçgensel bölgenin uzun kenarının daireye göre daha geniş olduğunu belirterek, bu bölgenin alanının daha büyük olduğu kanaatine varmıştır. Bu durum, söz konusu katılımcının alan kavramına ilişkin yanlış bir kavram imajına sahip olabileceğini göstermektedir. Görüşme esnasında, ilgili GGB etkinliğinin hatırlatılması ile bu yanlış imajın düzeltildiği düşünülmektedir. Ancak bu düzeltmenin, katılımcının zihninde alan kavrama dair doğru bir kavram imajı mı yoksa araştırmacının sunduğu kavram tanımı mı olarak yer ettiği bilinmemektedir (Tall ve Vinner, 1981).

Sınıf ortamında bir öğrencinin ‘daire’ *süreciyle* ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’, ‘üçgenin alan formülü’ ve ‘yarıçap’ *süreçlerini* koordine ederek ‘daireyi çevreleyen çemberin uzunluğu (çevresi) ile yarıçap uzunluğunun çarpımının yarısı bu dairenin alanını verir’ şeklinde kapsülleme yapıp ‘dairenin alan formülü’ *nesnesine* ulaştığı düşünülmektedir. Ayrıca, düzeyi iyi ve orta olan katılımcı ve iki öğrencinin, ders sürecindeki problem çözme durumları incelendiğinde, ‘dairenin alan formülü’ *nesnesine* ulaştıkları düşünülmektedir. Nitekim görüşmelerde tüm katılımcıların ilgili koordinasyonları kurarak ‘dairenin alan formülü’ *nesnesine* ulaştıkları tespit edilmiştir. Hazırbulunuşluk testi sonuçlarına göre, üçgenin alan formülünü yanlış kavramsallaştıran düzeyi orta altı olan katılımcı, üçgenin alanını ‘taban uzunluğu ile o tabana ait yüksekliğin çarpımı’ şeklinde yanlış bir tanım ile ifade etmiştir. Süreç aşamasında da aynı hatayı yinelemiş, ancak üçgensel bölgenin alanı tekrar nasıl hesaplanacağı sorusu yöneltildiğinde doğru bir şekilde yanıtlamıştır. Bu durum, ders sürecinde yapılan etkinlikler sayesinde ilgili kavram yanlışlığının giderildiğini düşündürmektedir. Süreç aşamasında ise katılımcının hatalı söyleminin dikkatsizlikten kaynaklandığı düşünülmektedir.

Araştırma sonuçlarında, hazırbulunuşluk düzeyi düşük olan katılımcının, ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’ *nesnesine* ve ‘daire’ *nesnesine* ulaşamadığı hâlde, ‘dairenin alan formülü’ *nesnesine* ulaştığı görülmüştür. Bu durumun katılımcının son görüşmeye kadar olan süreçte bu kavramları anlamlı şekilde oluşturabilmiş olabileceği düşünülmektedir. Bu ihtimal dışında APOS teorisi bağlamında değerlendirildiğinde ise, bir bireyin matematiksel bir nesneye ulaşabilmesi için, o nesneyi oluşturan

süreçleri içselleştirmiş, gerektiğinde bu süreçleri yeniden yapılandırabilmiş ve bunlar arasında koordinasyon kurabilmiş olması gerekir (Asiala vd., 1996;Dubinsky, 1991). Katılımcının ‘dairenin alan formülü’ nesnesine ulaşması, büyük olasılıkla öğretim sürecinde kullanılan DMY destekli görselleştirmelerin ve öğretmen yönlendirmelerinin etkisiyle gerçekleşmiş olabilir. Bu bağlamda, öğrencinin dairenin alanını DMY yoluyla üçgensel bir bölgeye dönüştürerek hesaplaması bir formüle ulaşmasını sağlamış, ancak bu durum koordinasyonların gerçekleştirildiği süreçlerin içselleştirildiği anlamına gelmemektedir. Nitekim, Tall ve Vinner’ın (1981) belirttiği gibi, bir öğrencinin doğru bir kavram tanımını ifade etmesi, onun o kavramın doğru bir kavram imajına sahip olduğunu göstermeyebilir. Bu bağlamda, katılımcının ‘dairenin alan formülü’nü doğru biçimde ifade edebilmesi, bu formülü kavramsal düzeyde yapılandığı anlamına gelmemektedir. Bu katılımcının ‘daire’, ‘çemberin çevre uzunluğu formülü’ ve ‘üçgenin alan formülü’ süreçleri arasında koordinasyon kurmaya çalıştığı, ancak çevre formülü ve daire nesnelerini anlamlı şekilde yapılandırılmadığı göz önünde bulundurulduğunda, ‘dairenin alan formülü’ nesnesine ulaşımın yüzeysel düzeyde kaldığı ve APOS bağlamındaki kapsülleme sürecinin tam olarak gerçekleşmediği veya yanlış kapsüllendiği söylenebilir.

Yapılan araştırma, 6. sınıf öğrencilerinin çember ve temel elemanları, çemberin çevre uzunluğu formülü ve dairenin alan formülü kavramlarını APOS teorisi çerçevesinde nasıl yapılandığını kapsamlı biçimde ortaya koymaktadır. DMY (GGB) destekli öğrenme ortamında gerçekleştirilen uygulamalar sonucunda öğrencilerin kavram oluşum süreçlerinin önemli ölçüde desteklendiği, kavramsal geçişlerde başarı sağladıkları ve çok sayıda öğrencinin *eylem*den *sürece*, *süreçten nesneye* daha kolay bir şekilde ulaşabildikleri tespit edilmiştir.

5.2. Öneriler

DMY ile desteklenen öğrenme ortamları, öğrencilerin soyut matematiksel kavramları somutlaştırmalarına olanak tanıyarak, anlamlı öğrenme süreçlerini desteklemektedir. Özellikle GGB gibi yazılımlar, öğrencilerin etkileşimli bir şekilde kavramları keşfetmelerine, görselleştirmelerine ve bu kavramlar üzerinde düşünmelerine imkân sağlar. Bu tür yazılımlar sadece bireysel öğrenme deneyimlerinde değil, grup çalışmaları ve sınıf içi tartışmalar gibi sosyal öğrenme ortamlarında da etkili kullanılabilir. Ayrıca, bu yazılımlar farklı konu alanları için uygun genetik çözümleme yaklaşımlarıyla genişletilebilir, böylece farklı matematiksel

kavramların anlaşılmasına katkıda bulunacak biçimde öğretim programlarına entegre edilebilir. Dolayısıyla, DMY'ler öğretim sürecinin merkezine alınabilir ve kavramların görselleştirilmesi için aktif şekilde kullanılabilir.

Öğrencilerin bireysel başarı düzeylerindeki farklılıklar, öğrenme süreçlerinde belirleyici bir rol oynamaktadır. Başarı düzeyi düşük olan öğrenciler için öğretim süreci, kavramların daha somut ve deneyimsel yollarla ele alınmasını gerektirebilir. Bu kapsamda, kavram tanımını ile imajı arasındaki farkların ortaya konduğu kavramsal tartışma ortamları oluşturulmalı ve öğrencilerin mevcut zihinsel imgeleriyle yüzleşmeleri sağlanmalıdır. Ayrıca, öğrenme sürecine ek destekleyici etkinlikler ve yapılandırılmış yönlendirmeler entegre edilerek öğrencilerin kavramsal düzeyde anlamaları derinleştirilmelidir. Böylece öğrenciler, yalnızca tanımlar üzerinden değil, aynı zamanda anlamlı deneyimler yoluyla kavramlara erişebilir.

Öğrencilerin sadece bireysel başarı düzeyleri değil, teknolojiye erişim ve kullanım becerilerindeki farklılıklar da öğrenme sürecini etkileyebilir. Örneğin, ev ortamında düzenli olarak bilgisayar teknolojileriyle etkileşimde bulunan öğrenciler ile temel teknolojik araçları kullanmakta zorlanan öğrenciler arasında önemli farklılıklar gözlenebilir. Bu durum, özellikle teknoloji destekli öğrenme ortamlarında öğrencilerin etkileşim düzeylerini ve kavramsal anlayışlarını doğrudan etkileyebilir. Bu bağlamda, öğrencilerin teknoloji kullanım yeterliliklerine ilişkin farklılıkların, kavram oluşum süreçlerine etkisinin incelendiği araştırmalar yapılabilir ve bu araştırmalardan elde edilen bulgular, öğrencilerin akademik başarılarıyla karşılaştırmalı olarak değerlendirilebilir.

Matematiksel kavramların öğrenilmesinde APOS teorisinin sunduğu öğretim döngüsü önemli bir kuramsal çerçeve sunmaktadır. Bu çalışmada, öğrencilere tekrar eden *eylem* fırsatların sunulması, özellikle *eylem*den *sürece* ve *süreçten nesneye* geçiş aşamasında öğrencilerin kavramsal gelişimini hızlandırdığı gözlemlenmiştir. Bu bağlamda DMY'ler, APOS çerçevesinde bilişsel yapıların dönüşümünü sağlayan geçişlerde de etkili bir araç olarak değerlendirilebilir. Dolayısıyla, farklı matematiksel kavramların öğretiminde de APOS teorisinin DMY'ler ile birlikte kullanımının bu tür bilişsel geçişleri nasıl desteklediğini araştıran yeni çalışmalara ihtiyaç duyulmaktadır.

Matematiksel kavramlar, doğası gereği birbirinden bağımsız değildir. Aksine, birbirleriyle sıkı bir biçimde ilişkilidir. Bu nedenle, öğretim sürecinde yalnızca bir kavramın işlemsel yönü değil, diğer kavramlarla olan ilişkileri de açık bir biçimde

vurgulanmalıdır. Örneğin, bu araştırmada çemberin çevre uzunluğu formülü ile üçgenin alan bağıntısı arasındaki ilişki, sadece iki ayrı formül olarak değil, bu formüllerin dairenin alanı bağlamında, birbirleriyle nasıl bağlantılı olduğu ve bu bağlantının geometrik anlamı üzerinden ele alınmıştır. APOS teorisi çerçevesinde bu tür süreçler arası koordinasyonlar, öğrencilerin matematiği parçalı değil, bütüncül bir yapı olarak görmelerini sağlar.

Öğrencilerin sahip oldukları kavramsal bilgiyi doğru ve etkili bir şekilde ifade edebilmeleri, öğrenmenin kalıcılığı açısından son derece önemlidir. Bu doğrultuda, öğrencilerin sözel ve yazılı anlatım becerileri üzerinde de özel olarak durulmalıdır. Özellikle kavram imajlarının ifade edilmesi, öğrencilerin zihinsel temsillerini açığa çıkararak öğretmenlerin öğrenci düzeyini daha iyi değerlendirmesine yardımcı olabilir. Yazılı açıklamalar, kavram haritaları, görsel anlatımlar ve matematiksel argümantasyon gibi etkinliklerle öğrencilerin ifade becerileri geliştirilmeli, böylece kavramsal anlayışları pekiştirilmelidir.

Yapılan araştırmanın konusu 6. öğrencilerin, DMY destekli öğrenme ortamında çember ile temel elemanları, daire, çemberin çevresi ve dairenin alan kavramlarının oluşum süreçlerini incelemektir. Bu bağlamda, hem 2018 matematik öğretim programında (MEB, 2018) hem de Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli matematik öğretim programında (MEB, 2024a) dairenin alanı kavramı 7. sınıf düzeyinde yer almaktadır. Ancak, 6. sınıfta yer alan üçgenin alan bağıntısını konusunun öğretiminin ardından, söz konusu kavramın uygun öğretim stratejileriyle 6. sınıf öğrencileri tarafından da anlamlı bir şekilde öğrenilebileceğini göstermektedir. Bununla birlikte, bu sonucun genellenebilirliğini artırmak ve daha net çıkarımlarda bulunmak adına, farklı çalışma gruplarıyla yapılacak kapsamlı araştırmalara ihtiyaç duyulmaktadır.

KAYNAKÇA

- Acar, M. (2017). 7. Sınıfta bazı konuların dinamik matematik yazılımı ile öğretiminin akademik başarıya ve kalıcılığa etkisi. Yüksek lisans tezi, Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Zonguldak.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate mathematics education II*. CBMS issues in mathematics education (Vol. 6, pp. 1–32). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Asiala, M., Brown, A., Kleiman, J., & Mathews, D. (1998). The development of students' understanding of permutations and symmetries. *International Journal of Mathematical Learning*, 3, 13–43.
- Ağaçdiken, F. (2021). 5. Sınıf öğrencilerinin alan kavramını dinamik matematik yazılımı destekli öğretim ortamında oluşturma süreçleri: dikdörtgen durumu. Yüksek lisans tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Agacdiken, F., & Yilmaz, R. (2023). Concept Formation Processes of Area and its Formula with GeoGebra: Case of Rectangle. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 30(3), 191-201.
- Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel matematik kavramlarının künyesi*. Ankara: Gazi kitapevi.
- Arndt, J., & Haenel, C. (2013). *Pi: Algorithmen, computer, arithmetik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
- Ayyubi, I. I. A., Rohmatulloh, R., Suryana, I., & Wijaya, T. T. (2024). Improving Students' Creative Thinking Skills Assisted by GeoGebra Software. *Noumerico: Journal of Technology in Mathematics Education*, 2(1), 23-34.
- Bağ, G., & Karamık, G. A. (2024). 12th grade students interpretation of trigonometric functions on the unit circle with apos theory investigation. *Adnan Menderes Üniversitesi Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 15(1), 16-29.
- Baker, B., Trigueros, M., & Hemenway, C. (2001). On transformations of functions. In Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting, *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 91–98).
- Balacheff, N., & Kaput, J. J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. *In International handbook of mathematics education*. Dordrecht, Springer.
- Baturo, A., & Nason, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 235-268.
- Bayazit, I. (2010). The influence of teaching on student learning: The notion of piecewise function. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 5(3), 146–164.
- Bayrambeğ, N. (2022). *Matematik öğretiminde geogebra kullanımının öğrencilerin tutum ve akademik başarıları üzerindeki etkisinin incelenmesi*. Yüksek lisans tezi, Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi, Niğde.
- Berggren, J. L. (1986). *Episodes in the mathematics of medieval Islam*. New York: Springer-Verlag.

- Berggren, L., Borwein, J. M., & Borwein, P. B. (2000). *Pi: a source book*. New York: Springer.
- Beth, E. W., & Piaget, J. (1974). *Mathematical epistemology and psychology* (W. Mays, Trans.). Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.
- Bhagat, K. K., & Chang, C. Y. (2015). Incorporating GeoGebra into geometry learning-A lesson from India. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(1), 77-86.
- Boo, J. Y., & Leong, K. E. (2016). Teaching and learning geometry in primary school using GeoGebra. In W. C. Yang, D. B. Meade, & K. Khairiree (Ed.), *Teaching and learning mathematics, sciences and engineering through technology: Proceedings of the Twenty-First Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 289–300). Asian Technology Conference in Mathematics.
- Borji, V., Alamolhodaie H., & Radmehr F. (2018). Application of the APOS-ACE theory to improve students' graphical understanding of derivative. *Eurasia Journal of Mathematics. Science and Technology Education*, 14(7), 2947-2967.
- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23(3), 247-285.
- Brummelen, G. V. (2013). *Heavenly mathematics: The forgotten art of spherical trigonometry*. New Jersey: Princeton University Press.
- Cantimer, G., & Şengül, S. (2017). Ortaokul 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin çember ve daire konusundaki kavram yanlışları ve hataları. *Gazi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 3(1), 17-27.
- Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., John, D. S., Tolias, G., & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16, 345–364.
- Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. D. H. Clements, J. Sarama, A. M. DiBiase (ed.). *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, D. H., & Stephan, M. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. D. H. Clements, J. Sarama, A. M. DiBiase (ed.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 299-317). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches*. Sage publications, Inc.
- Çetin, O. (2018). *Ortaokul 7. sınıf öğrencilerinin dinamik geometri yazılımı Geogebra ile dönüşüm geometrisi öğrenim süreçlerinin incelenmesi*. Yüksek lisans tezi, Mersin Üniversitesi. Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Mersin.
- Çetin, İ. (2009). *Students' understanding of limit concept: An APOS perspective*. Doktora tezi. Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Dağlı, H., & Peker, M. (2011). What do 5th grades know related the geometric shapes' perimeter?. *Journal of Theoretical Educational Science*, 5(3), 330-351.
- Deniz, Ö. & Kabael, T. (2017). Students' mathematization process of the concept of slope within the realistic mathematics education. *Hacettepe University Journal of Education*, 32(1), 123-142.
- Diana, N., Suryadi, D., & Dahlan (2020). Students' creative thinking skills on the circle subject in terms of learning obstacle and learning trajectory. *Journal of Physics: Conference Series*, 1521(3). IOP Publishing.

- Diković, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6(2), 191-203.
- Drijvers, P. H. M., Mariotti, M., Olive, J., & Sacristán, A. I. (2010). Learning and assessing mathematics with and through digital technologies: Introduction to the section. C. Hoyles, C. J. B. Lagrange (ed.), *Mathematics education and technology-Rethinking the terrain* (pp. 81-87). New York: Springer.
- Dubinsky, E. (1984). The cognitive effect of computer experiences on learning abstract mathematical concepts. *Korkeakoulujen Atk-Uutiset*, 2, 41-47.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra on the college level. D. Carlson, C. Johnson, D. Lay, D. Porter, A. Watkins, & W. Watkins (ed.), *Resources for teaching linear algebra* (pp. 85-106). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 273-280). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335-359.
- Dubinsky, E., Arnon, I., & Weller, K. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The case of 0.9^- and 1. *Canadian Journal of science, mathematics and Technology education*, 13, 232-258.
- Dündar, M. (2019). *Gerçekçi matematik eğitimi temelli öğrenme ortamında altıncı sınıf öğrencilerinin prizmanın hacmi kavramını oluşturma süreçleri*. Yüksek lisans Tezi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi. Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Fitzpatrick, R. (2008). *Euclid's elements of geometry*.
- Frank, A., Ablordeppey, V., & Ntow, A. S. (2022). Effect of Apos instructional approach with Geogebra on pre-Service teachers' performance in linear programming. *Journal of Algebraic Statistics*, 13(3), 4046-4068.
- Funes, J. O., Kari, E. R. V., & Martin, P. (2024). Description of parameter variation learning with artificial intelligence and GeoGebra in students of a differential equations course. *Journal of Physics: Conference Series*, 2701(1), 012049.
- Gillings, R. J. (1972). *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York: Dover Publications, Inc.
- Greenberg, M. J. (1993). *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history*. W. H. Freeman and Company.
- Günhan, B. C., & Açı, H. (2016). Dinamik geometri yazılımı kullanımının geometri başarısına etkisi: Bir meta-analiz çalışması. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 7(1), 1-23.
- Gürbüz, M. K. (2018). *Yedinci sınıf öğrencilerinin etkinlik temelli öğrenme yaklaşımı altında oran-orantı kavramlarını oluşturma süreçlerinin incelenmesi: APOS teorisi*. Yüksek lisans Tezi. Osmangazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Gürefe, N. (2018). Ortaokul Öğrencilerinin Alan Ölçüm Problemlerinde Kullandıkları Stratejilerin Belirlenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 33(2), 417-438.

- Gür, E. Ş., & Döldül, B. U. (2025). Özel Yetenekli Öğrencilerin Dairenin Alan Formülünü Oluşturmalarına Yönelik Soyutlama Süreçlerinin RBC+C Modeli ile İncelenmesi. *International Journal of Educational Studies in Mathematics*, 12(1), 49-72.
- Hamady, S., Mershad, K., & Jabakhanji, B. (2024). Multi-version interactive assessment through the integration of GeoGebra with Moodle. *Frontiers in Education*, 9, Article 1466128.
- Heath. T. L (1897). *The works of archimedes*. New york: The Macmillan Company.
- Heath, T. (2004). *Aristarchus of Samos: The ancient Copernicus*. New York: Dover Publications, Inc.
- Heid, M. K. (1997). The technological revolution and the reform of school mathematics. *American Journal of Education*, 106(1), 5-61.
- Heid, M. K. (2005). Technology in mathematics education: tapping into visions of the future. In W. J. Masalski (ed.), *Technology-Supported Mathematics Learning Environments: NCTM 67th Yearbook*. Reston, VA: NCTM.
- Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. *Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching conference* (Vol. 2002, pp. 1-6).
- Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of online Mathematics and its applications*, 7(1), 2-12.
- Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza, Z. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. *11th International Congress on Mathematical Education (ICME 11)* (pp. 1-9).
- Hosch, W. L. (2011). *The Britannica guide to geometry*. New York: Britannica Educational Publishing.
- Hsieh, C. J., Li, C. J., & Chen, M. H. (2013). Using the APOS to design computer dynamic activities for learning the linear function. *2013 IEEE 63rd Annual Conference International Council for Education Media (ICEM)* (pp. 1-11).
- Huang, H. M. E., & Witz, K. G. (2013). Children's conceptions of area measurement and their strategies for solving area measurement problems. *Journal of Curriculum and Teaching*, 2(1), 10-26.
- Hutkemri, H., & Zakaria, E. (2014). Impact of using Geogebra on students' conceptual and procedural knowledge of limit function. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 5(23), 873.
- Jonassen, D. H., & Reeves, T. C. (1996). Learning with technology: Using computers as cognitive tools. D. H. Jonassen (Ed.), *Handbook of research for educational communications and technology* (pp. 693–719). New York: Simon & Schuster.
- Jonassen, D. H. (1996). *Computer in the Classroom: Mindtools for Critical Thinking*. Englewood, NJ: Merrill.
- Jonassen, D., Carr, C., & Yueh, H. (1998). Computers as mindtools for engaging learners in critical thinking. *TechTrends*, 43(2), 24-32.
- Jonassen, D. H., & Carr, C. S. (2000). Mindtools: Affording multiple knowledge representations for learnings. S. P. Lajoie (ed), *Computers as cognitive tools*. New York: Routledge.
- Keskin, M. (2019). *Teknoloji destekli öğretim etkinliklerinin 5E modeline göre matematik öğretimine entegrasyonunun değerlendirilmesi*. Doktora tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

- Khali, M., & Khalil, U. & Haq, Z. (2019). Geogebra as a Scaffolding Tool for Exploring Analytic Geometry Structure and Developing Mathematical Thinking of Diverse Achievers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(2), 427-434.
- Kohler, R. (2014). *Jean Piaget*. Bloomsbury Academic.
- Kristianti, R., Muchyidin, A., & Manfaat, B. (2022). Exploration of vocational school students' misconceptions of circle material. *Journal of General Education and Humanities*, 1(2), 95-106.
- Lage, A. E., & Gaisman, M. T. (2006). An analysis of students' ideas about transformations of functions. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz, A. Mendez (ed.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 23–30). Merida, Mexico: Universidad Pedagógica Nacional.
- Latifi, M., Esegir, A., Elmaroufi, A., Hattaf, K., & Achtaich, N. (2022). Modeling with differential equations and GeoGebra in high school mathematics education. *Journal of Educational and Social Research*, 12(3), 47-61.
- Lavicza, Z., & Papp-Varga, Z. (2010). Integrating GeoGebra into IWB-equipped teaching environments: preliminary results. *Technology, Pedagogy and Education*, 19(2), 245-252.
- Makar, K., & Confrey, J. (2006). Dynamic statistical software: how are learners using it to conduct data-based investigations? C. Hoyles, J.-b. Lagrange, L. H. Son, & N. Sinclair (ed.), *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction*. Hanoi Institute of Technology and Didirem Université Paris 7.
- Mariotti, M.-A. (2006). New artefacts and the mediation of mathematical meanings. In C. Hoyles, J.-b. Lagrange, L. H. Son, & N. Sinclair (ed.), *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the international commission on mathematical instruction* (pp. 378–385). Hanoi Institute of Technology and Didirem Université Paris 7.
- Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 365–384.
- Martínez-Planell, R., & Delgado, A. C. (2016). The unit circle approach to the construction of the sine and cosine functions and their inverses: An application of APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 43, 111-133.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], (2018). *Ortaokul Matematik Öğretim Programı*, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], (2024a). *Ortaokul Matematik Öğretim Programı: Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli*, Ankara.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], (2024b). *Matematik 6. sınıf ders kitabı*. Ankara: Doğa yayıncılık.
- Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], (2024c). *Matematik 7. sınıf ders kitabı*. Ankara: Edat Yayıncılık.
- Nagle, C., Martínez-Planell, R., & Moore-Russo, D. (2019). Using APOS theory as a framework for considering slope understanding. *The Journal of Mathematical Behavior*, 54, 100684.
- Navetta, A. (2016). Visualizing functions of complex numbers using GeoGebra. *North American GeoGebra Journal*, 5(2), 17–25.
- NCTM National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

- Noss, R. (1988). The computer as a cultural influence in mathematical learning. *Educational studies in mathematics*, 19(2), 251-268.
- Nunes, T., Light, P., & Mason, J. (1993). Tools for thought: The measurement of length and area. *Learning and instruction*, 3(1), 39-54.
- Ocakbaşı, E. (2019). *Gerçekçi matematik eğitimi temelli öğrenme ortamında 8.sınıf öğrencilerinin karekök kavramını oluşturma süreçleri*. Yüksek lisans tezi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Oktaç, A., & Çetin, İ. (2016). APOS teorisi ve matematiksel kavramların öğrenimi. E. Bingölbali, S. Arslan & İ. Ö. Zembat (ed.), *Matematik eğitiminde teoriler* (pp. 163-181). Ankara: Pegem Akademi.
- Oldknow, A. (1997). Dynamic geometry software-a powerful tool for teaching mathematics, not just geometry. *Proceedings of International Conference on Technology in Mathematics Teaching*.
- Olive, J., Makar, K., Hoyos, V., Kor, L. K., Kosheleva, O., & Sträßer, R. (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. C. Hoyles, C. J. B. Lagrange (ed.), *Mathematics education and technology-rethinking the terrain* (133-179). New York: Springer.
- Öçal, M. F., & Şimşek, M. (2016). Pergel-çizgeç ve GeoGebra inşaları üzerine: Öğretmenlerin geometrik inş süreçleri ve görüşleri. *Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 37(1), 219-262.
- Özerbaş, M. A., & Kaygusuz, Ç. (2012). “Çember alt öğrenme” alanına ait kavram yanlışlarının belirlenmesi. *Gazi Üniversitesi Endüstriyel Sanatlar Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 78-94.
- Özsoy, N., & Kemankaslı, N. (2004). Ortaöğretim öğrencilerinin çember konusundaki temel hataları ve kavram yanlışları. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 3(4), 140-147.
- Pedhazur, E. J., & Schmelkin, L. P. (1991). *Measurement, design, and analysis: An integrated approach*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Piaget, J. (1965). *The child's conception of number* (C. Gattegno & F. M. Hodgson, Trans.). New York: W. W. Norton.
- Piaget, J. (1970). *Structuralism* (C. Maschler, Trans.). New York: Basic Books.
- Piaget, J. (1971). *Biology and knowledge: An essay on the relations between organic regulations and cognitive processes*. Chicago: University of Chicago Press.
- Piaget, J. (1975). Piaget's theory (G. Cellerier & J. Langer, trans.). P.B. Neubauer (ed.), *The process of child development* (pp. 164-212). New York: Jason Aronson.
- Piaget, J. (1980). *Adaptation and intelligence*. Chicago: University of Chicago Press.
- Piaget, J., & Garcí'a, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science* (H. Feider, Trans.). New York: Columbia University Press.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez, P. Boero. (ed.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 205-235). Rotterdam: Sense Publishers.
- Reisa, Z. A. (2010). Computer supported mathematics with Geogebra. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 9, 1449-1455.
- Reynolds, A., & Wheatley, G. H. (1996). Elementary students' construction and coordination of units in an area setting. *Journal for research in mathematics education*, 27(5), 564-581.

- Roa-Fuentes, S., & Oktac, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89–112.
- Robins, G., & Shute, C. (1987). *The Rhind mathematical papyrus: An ancient Egyptian text*. British Museum Publications Ltd.
- Rossi, C. (2003). *Architecture and mathematics in ancient Egypt*. Cambridge University Press.
- Sacristan, A. I., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., Tabach, M., Moreno, N., & Perrusquía, E. (2010). The influence and shaping of digital technologies on the learning – and learning trajectories – of mathematical concepts. C. Hoyles, C. J. B. Lagrange (ed.), *Mathematics education and technology-Rethinking the terrain* (pp. 179-227). New York: Springer.
- Sekulić, T., & Takači, D. (2013). *Mathematical modelling, computers and GeoGebra in university and college mathematics education*. Proceedings of the 36th International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (MIPRO) (pp. 625–630). IEEE.
- Septian, A., Sugiarni, R., & Monariska, E. (2020). The application of android-based geogebra on quadratic equations material toward mathematical creative thinking ability. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*, 11(2), 261-272.
- Soare, I., & Antohe, C. (2010). Modeling the geographical studies with GeoGebra-software. *Annals of Computer Science*, 8(1), 173-180.
- Şeker, H. B., & Erdoğan, A. (2017). GeoGebra yazılımı ile geometri öğretiminin geometri ders başarısına ve geometri öz-yeterliliğine etkisi. *OPUS International Journal of Society Researches*, 7(12), 82-97.
- Şişman, G. T., & Aksu, M. (2009). Yedinci sınıf öğrencilerinin alan ve çevre konularındaki başarıları. *İlköğretim Online*, 8(1), 243-253.
- Tabaghi, S. G., Mamolo, A., & Sinclair, N. (2009). The effect of DGS on students' conception of slope. (S. L. Swars, D. W. Stinson & Lemons-Smith, S. (ed.)) *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 226–234). Atlanta, GA: Georgia State University.
- Tall, D. O. & Vinner, S., (1981). 'Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity', *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2) 151- 169.
- Tall, D. (1988). The nature of advanced mathematical thinking. *The Working Group for Advanced Mathematical Thinking for The Conference of the Psychology of Mathematics Education*, Veszprem, Hungary.
- Tan, S., Wijaya, T. T., Zou, L., & Hermita, N. (2020). Proving the formula for the area of a circle using Hawgent dynamic mathematics software. *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1655, No. 1, p. 012052). IOP Publishing.
- Tatar, E., Kağızmanlı, T. B., & Akkaya, A. (2014). The effect of a dynamic software on the success of analytical analysis of the circle and prospective mathematics teachers opinions. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science & Mathematics Education*, 8(1), 153-177.
- TDK (2024). *Türk Dil Kurumu Sözlükleri*. <https://sozluk.gov.tr/>
- Thambi, N., & Eu, L. K. (2013). Effect of students' achievement in fractions using GeoGebra. *Sainsab*, 16, 97-106.
- Topuz, F., & Birgin, O. (2020). Yedinci sınıf “çember ve daire” konusunda geliştirilen

- GeoGebra destekli öğretim materyaline ve öğrenme ortamına ilişkin öğrenci görüşleri. *Journal of Computer and Education Research*, 8(15), 1-27.
- Trigueros, M. (2004). Understanding the meaning and representation of straight line solutions of systems of differential equations. D. E. McDougall, J. A. Ross (ed.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Toronto.
- Trigueros, M., & Oktac, A. (2005). La the'orie APOS et l'enseignement de l'Alge'bre Line 'aire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Revue internationale de didactique des mathe'matiques* (pp. 157–176). IREM de Strasbourg, Universite' Louis Pasteur.
- Uzun, P. (2014). *GeoGebra ile öğretimin 7.sınıf öğrencilerinin akademik başarılarına ve geometriye yönelik tutumlarına etkisi*. Yüksek lisans tezi, Kastamonu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2015). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. Edinburgh: Pearson Education Limited.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293–305.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Wall, K., Higgins, S., & Smith, H. (2005). 'The visual helps me understand the complicated things': pupil views of teaching and learning with interactive whiteboards. *British Journal of Educational Technology*, 36(5), 851-867.
- Weller, K., Clark, J., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M., & Merkovsky, R. (2003). Student performance and attitudes in courses based on APOS theory and the ACE teaching cycle. A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel, F. Hitt (ed.), *Research in collegiate mathematics education V* (pp. 97–131). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 9(1), 5-28.
- Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2011). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: Strength and stability of belief. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 11, 129–159.
- Yıldız, Ş., & Ezentaş, R. (2024). Ortaöğretim öğrencilerinin geometrik kavramlara ilişkin bilgi oluşturma süreçlerinin APOS teorisi çerçevesinde incelenmesi. *Journal of Computer and Education Research*, 12(24), 666-688.
- Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2021). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Seçkin Yayıncılık.
- Yılmaz, R. (2011). *Matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerinde görselleştirme ve rolü*. Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Yılmaz, R. (2023). Geometri öğretiminde APOS teorisi. R. Akkuş, Z. Toluk-Uçar, A. Duatepe-Paksu, B. Boz-Yaman & S. Bulut (Ed.), *Geometri öğretiminde bilişsel süreçler* (pp. 371-408). Vizetek Yayıncılık.
- Yigit, M. (2014). An examination of pre-service secondary mathematics teachers' conceptions of angles. *The Mathematics Enthusiast*, 11(3), 707-736.
- Yin, R. K. (2011). *Qualitative research from start to finish*. Guilford Publications, Inc.

- Yin, R. K. (2014). *Case study research: Design and methods* (Vol. 5). Sage Puplication, Inc.
- Zengin, A. (2019). *GeoGebra destekli öğretimin 6.sınıf öğrencilerinin alan ve hacim ölçme konularındaki akademik başarılarına etkisi*. Yüksek lisans tezi, Uşak Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uşak.
- Zulnaidi, H. & Zamri, S. N. A. S. (2017). The effectiveness of the GeoGebra software: The intermediary role of procedural knowledge on students' conceptual knowledge and their achievement in mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 2155–2180.



EKLER

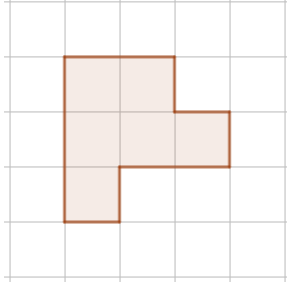
Ek 1. Hazırbulunuşluk Testi Belirtke Tablosu

	Bilgi	Kavrama	Uygulama	Analiz	Sentez	Toplam
M.2.2.1.1. Geometrik şekilleri kenar ve köşe sayılarına göre sınıflandırır.	13. soru					1
M.3.3.2.3. Şekillerin çevre uzunluğunu hesaplar.			1. soru			1
M.4.3.2.1. Kare ve dikdörtgenin çevre uzunlukları ile kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi açıklar.					16. soru	1
M.4.3.3.1. Şekillerin alanlarının, bu alanı kaplayan birimkarelerin sayısı olduğunu belirler.		10. soru	6. soru			2
M.5.1.2.10. Bir doğal sayının karesini ve küpünü üslü ifade olarak gösterir ve değerini hesaplar.	14. soru		15. soru			2
M.5.2.1.1. Doğru, doğru parçası, ışını açıklar ve sembolle gösterir.	11. soru					1
M.5.2.3.1. Uzunluk ölçme birimlerini tanıır; metre-kilometre, metre-desimetre-santimetre-milimetre birimlerini birbirine dönüştürür ve ilgili problemleri çözer.			12. soru			1
M.5.2.3.2. Üçgen ve dörtgenlerin çevre uzunluklarını hesaplar, verilen bir çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturur.			2. soru	8. soru		2
M.5.2.4.1. Dikdörtgenin alanını hesaplar, santimetre-kare ve metre-kareyi kullanır.				8. soru	3. soru	2
M.6.1.7.3. Aynı veya farklı birimlerdeki iki çokluğun birbirine oranını belirler.					16. soru	1
M.6.3.2.1. Üçgenin alan bağıntısını oluşturur, ilgili problemleri çözer.			4. soru	5. soru 7. soru 9. soru		4
M.6.3.2.3. Alan ölçme birimlerini tanıır, m ² -km ² , m ² -cm ² -mm ² birimlerini birbirine dönüştürür.			12. soru			1

Ek 2. Hazırbulunuşluk Testi

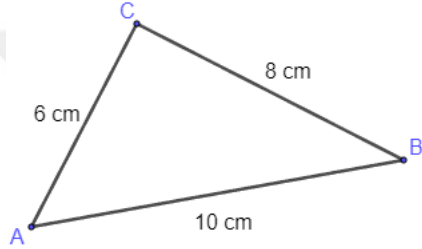
Hazırbulunuşluk Testi

1.



Yukarıda kenarı bir birim olan karelerden oluşan kâğıdın üzerinde verilen şeklin çevresi kaç birimdir?

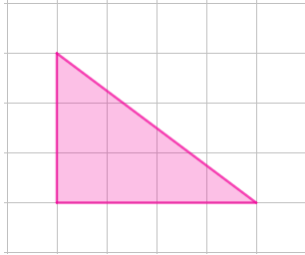
2.



Yukarıda verilen ABC üçgeninin AB kenarı 10 cm, BC kenarı 8 cm, CA kenarı 6 cm olduğuna göre ABC üçgeninin çevresi kaç cm'dir?

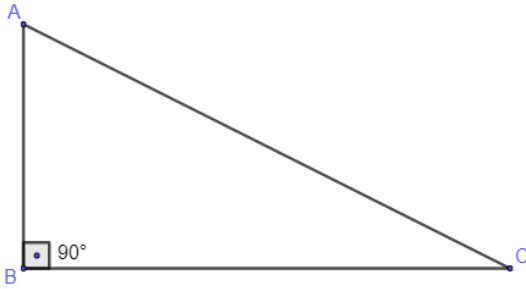
3. Çevresi 40 cm olan bir dikdörtgen çiziniz. Çizdiğiniz dikdörtgenin alanını hesaplayınız.

4.



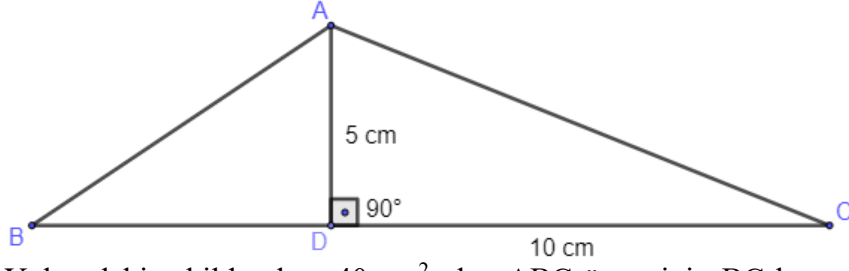
Yukarıda kenarı bir birim olan karelerden oluşan kâğıdın üzerinde verilen boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

5.



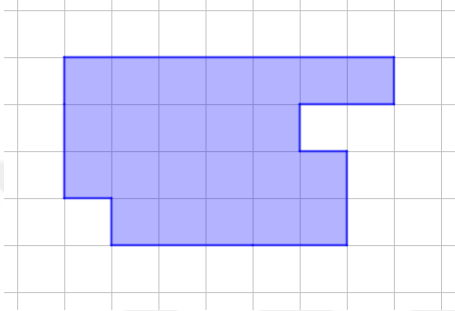
Yukarıda verilen ABC üçgeninin AB kenarı 4 cm, BC kenarı 8 cm ise ABC üçgeninin alanı kaç cm^2 'dir?

6.



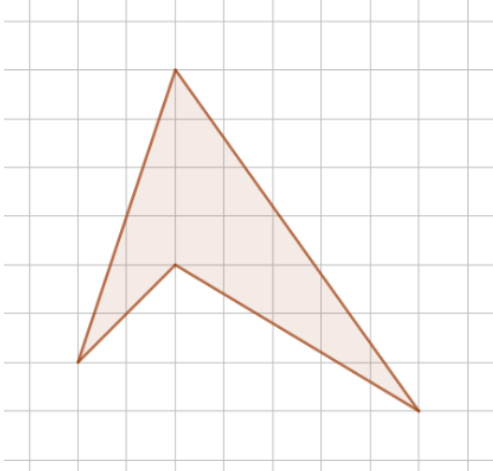
Yukarıdaki şekilde alanı 40 cm^2 olan ABC üçgeninin BC kenarına ait yüksekliği 5 cm'dir. DC kenarı 10 cm olduğuna göre ABD üçgeninin alanı kaç cm^2 'dir?

7.



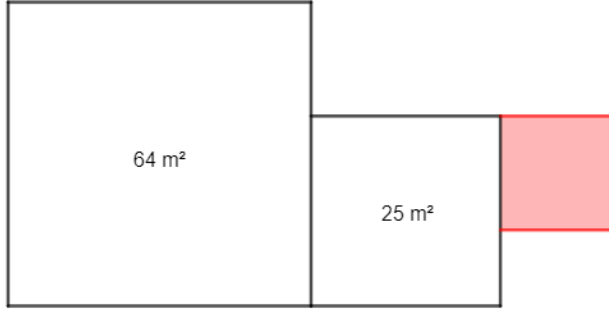
Yukarıda kenarı bir birim olan karelerden oluşan kâğıdın üzerinde verilen boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

8.



Yukarıda birimkarelerden oluşan kâğıdın üzerinde verilen boyalı bölgenin alanı kaç br^2 'dir?

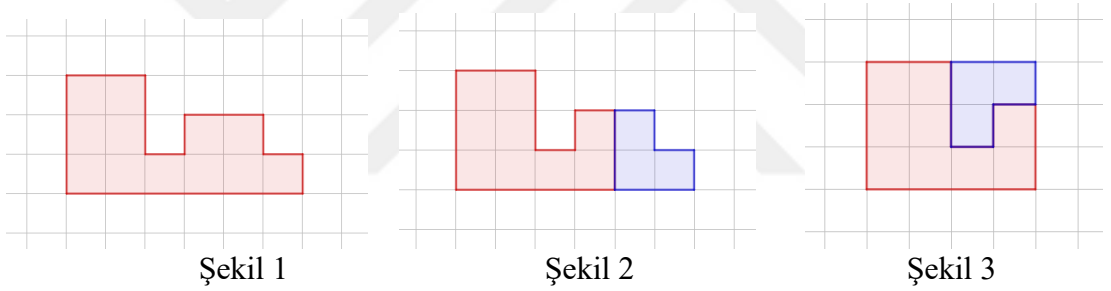
9.



Mehmet amcanın çiftliği şekildeki gibi alanı 64 m^2 ve 25 m^2 olan karesel bölgelerden oluşmaktadır. Mehmet amca tarlasına yukarıdaki gibi 16 m^2 alanı olan karesel bölgeyi tarlasına eklemiştir. Buna göre Mehmet amcanın sahip olduğu tarlanın çevresi kaç m'dir?

10. Alanı 64 cm^2 olan bir ABC üçgeninin BC kenarı 16 cm 'dir. Bu üçgenin köşesi olan C noktasını üçgenin BC doğru parçası üzerinden B noktasına belli bir miktar taşıyıp yaklaştırılıyor. Oluşan yeni üçgenin alanı 40 cm^2 'dir. Buna göre oluşturulan yeni üçgenin BC kenarı kaç cm'dir?

11.



Ahmet Şekil 1'deki tahta bloğunu Şekil 2'deki gibi kestikten sonra kestiği parçaları birleştirip Şekil 3'ü elde ediyor. Sizce oluşan yeni bloğun alanı değişmiş midir? Neden? Açıklayınız.

12. Noktalı yere aşağıdakilerden hangisi yazılmalıdır?

İki nokta arasındaki en kısa çizgi bir oluşturur.

- A) Işın B) Doğru Parçası C) Doğru D) Açık

13. Aşağıda verilen boşlukları doldurunuz.

$4 \text{ km} = \dots\dots\dots \text{ m}$
 $60 \text{ m} = \dots\dots\dots \text{ cm}$
 $20 \text{ cm} = \dots\dots\dots \text{ mm}$

14. Aşağıdakilerden hangisi bir çember modeli olabilir? Gerekçelerinizi açıklayınız?

- A) Yüzük B) Sınıf tahtası C) Kalem D) Kutu

15. 4^2 ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 16 B) 8 C) 6 D) 4

16. $5^2 - 3^2$ işleminin sonucunu hesaplayınız.

17. Çevresi 28 cm olan bir dikdörtgen çiziniz. Çizdiğiniz dikdörtgenin kısa kenarını uzun kenarına oranlayınız.

18. $3x - 4$ cebirsel ifadesinin $x = 5$ için değeri kaçtır?

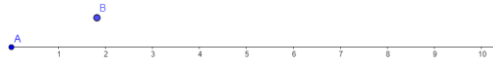


Ek 3. Etkinlik 1: Pergel ile Çember Çizme ve Etkinlik 2: GGB ile Çember Çizme

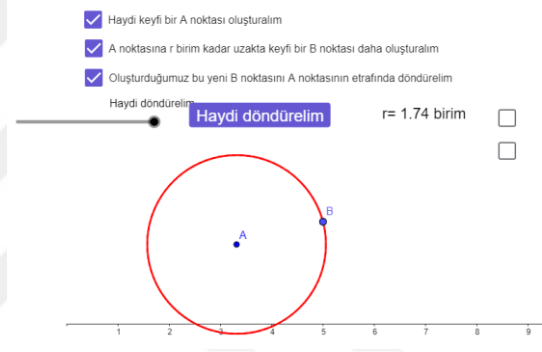
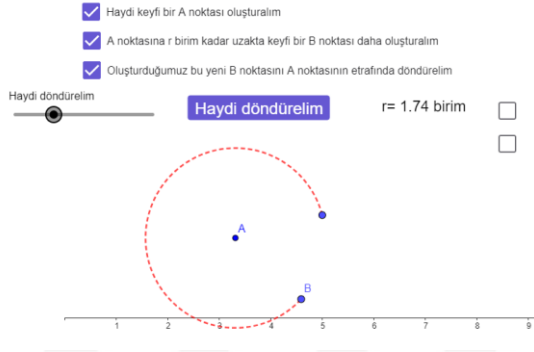
Etkinlik 1’de öğrencilerden defterlerine pergeli ile çember çizilmesini içerir. GGB destekli Etkinlik 2’de ise ilk olarak keyfi bir A noktası oluşturulur. Sonra, aynı şekilde farklı bir B noktası oluşturulur.

- ☒ Haydi keyfi bir A noktası oluşturalım
 - ☒ A noktasına r birim kadar uzakta keyfi bir B noktası daha oluşturalım
 - ☐ Oluşturduğumuz bu yeni B noktasını A noktasının etrafında döndürelim
- r= 1.92 birim

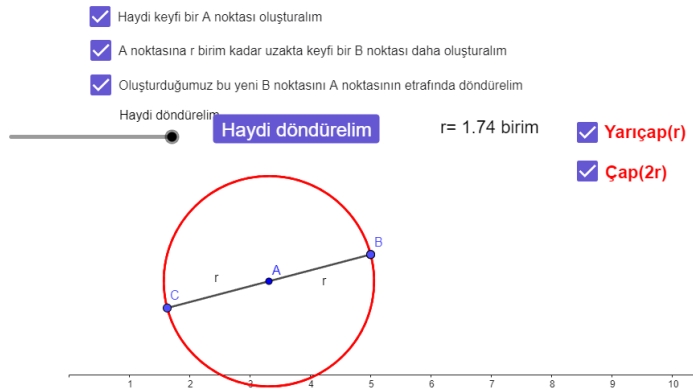
- ☒ Haydi keyfi bir A noktası oluşturalım
 - ☒ A noktasına r birim kadar uzakta keyfi bir B noktası daha oluşturalım
 - ☐ Oluşturduğumuz bu yeni B noktasını A noktasının etrafında döndürelim
- r= 1.92 birim



Ardından oluşturduğumuz B noktası, A noktası etrafında döndürülür.



Son olarak yarıçap ve çap, merkez nokta etrafında sürekli döndürülür.



Etkinlik 2 link: <https://www.geogebra.org/m/kwkjx6rf>

Ek 4. Etkinlik 3: GGB ile Çemberin İç Bölgesi ve Dış Bölgesi

Etkinlik 3'te merkez noktası O ve yarıçap uzunluğu değiştirilebilen bir çember ve dışında farklı noktalar verilmiştir.

Aşağıda verilen çembere; kırmızı, sarı ve mavi bölgelerdeki noktaları istenilen yerlere taşıyınız. İşleminiz bittikten sonra kontrol ediniz. Eğer yanlış yaptıysanız tekrar deneyiniz. (Çemberin yarıçapını ve konumunu istediğiniz şekilde değiştirebilirsiniz)

Kontrol et

Tekrar deneyiniz

Kırmızı bölgedeki noktaları çemberin dış bölgesine taşıyınız.

Sarı bölgedeki noktaları çemberin üzerine taşıyınız.

Mavi bölgedeki noktaları çemberin iç bölgesine taşıyınız.

Etkinlik verilen noktaları çember, çemberin iç bölgesi ve dış bölgelerine taşınmasını içerir.

Aşağıda verilen çembere; kırmızı, sarı ve mavi bölgelerdeki noktaları istenilen yerlere taşıyınız. İşleminiz bittikten sonra kontrol ediniz. Eğer yanlış yaptıysanız tekrar deneyiniz. (Çemberin yarıçapını ve konumunu istediğiniz şekilde değiştirebilirsiniz)

Kontrol et

Tekrar deneyiniz

Kırmızı bölgedeki noktaları çemberin dış bölgesine taşıyınız.

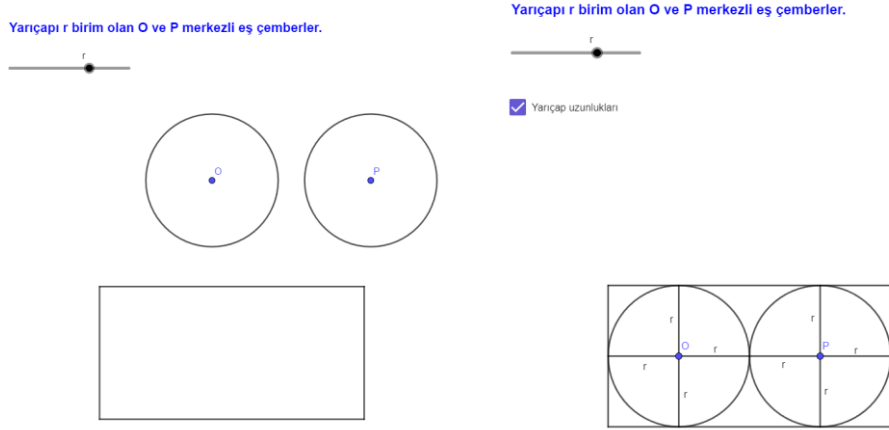
Sarı bölgedeki noktaları çemberin üzerine taşıyınız.

Mavi bölgedeki noktaları çemberin iç bölgesine taşıyınız.

Yanlış! tekrar kontrol et.

Etkinlik 3 link: <https://www.geogebra.org/m/cweg7765>

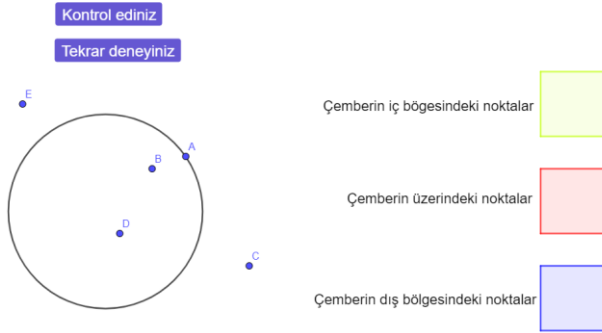
Ek 5. ‘Gerçek Yaşam problemi 3’ün çözüme hizmet eden GGB etkinliği ve 1-3 dersleri için verilen GGB ödevleri.



GGB ‘Gerçek Yaşam problemi 3’ link: <https://www.geogebra.org/m/hqxp3qje>

Ödev 1

Aşağıda verilen noktalar çemberin iç bölgesindeyse sarı, üzerinde ise kırmızı, dış bölgesindeyse mavi kutucuğa taşıyınız. İşleminiz bittikten sonra kontrol ediniz. Eğer yanlışsa tekrar dene.

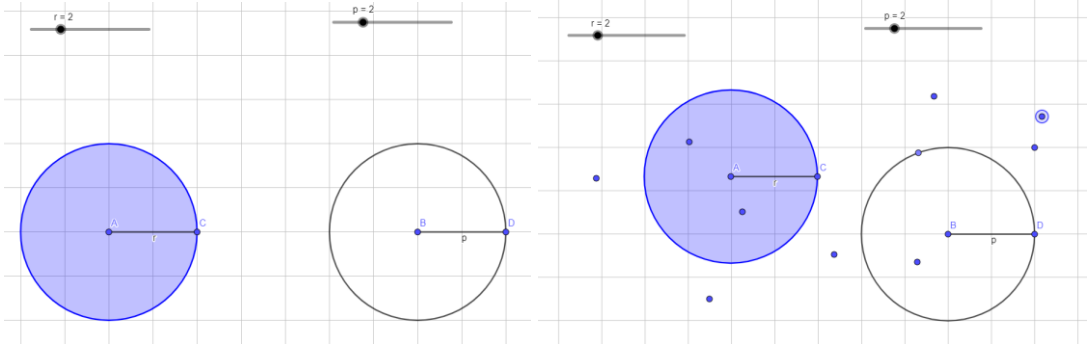


Etkinlik 3’e yapılanların tersine çember, iç ve dış bölgeleri üzerindeki noktaları ilgili kutucuklara taşımayı içerek ev ödevi 1.

Ödev 1 link: <https://www.geogebra.org/m/zmdg56gv>

Ek 6. Etkinlik 4: GGB ile Çember ve Daire Arasındaki Fark

Etkinlik 4’te bir çember ve daire verilmiştir. Bu etkinlikte öğrenciler çemberin bir çizgi şeklinde görüldüğünü dairenin ise bir alan kapladığını görmeleri amaçlanır. Çember ve dairenin yeri ve yarıçaplar uzunlukları değiştirilebilir. Ayrıca, noktalar oluşturulur, bu noktaların çember ve daire nesnelere ortak olup olmadığı tartışılır.



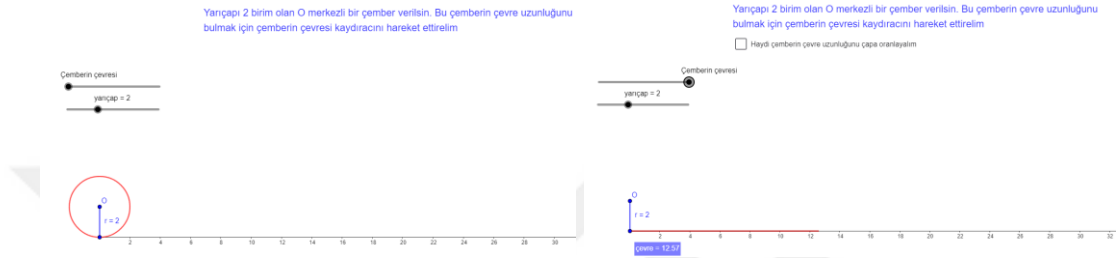
Etkinlik 4 link: <https://www.geogebra.org/m/mp7264rb>

Ek 7. ‘Etkinlik 5: Somut Model ile Çemberin Çevre Uzunluğunu Çap Uzunluğuna Oranlama’ ve ‘Etkinlik 6: GGB ile Çemberin Çevre Uzunluğunu Çap Uzunluğuna Oranlama’.

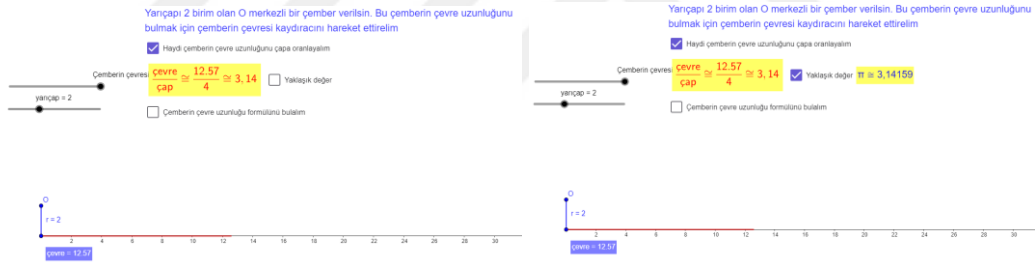
Etkinlik 5’te mukavva kağıtları üzerine prgelle çember çizilir, ardından bu çember kesilerek bir daire elde edilir. Sonrasında, elde edilen şeklin uzunluğu mezura ile ölçülür. Son olarak elde edilen uzunluk dairenin çap uzunluğuna oranlanır.

Etkinlik 6’da ise bu gerçekleştirilen eylemi GGB ortamında yapılması hedeflenir.

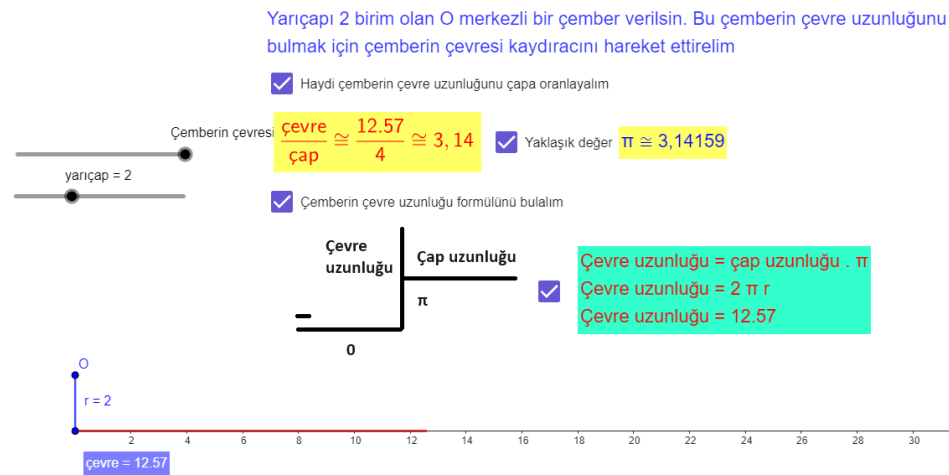
Etkinlik 6’da ilk olarak verilen bir çemberin çevresi, çemberin doğru parçasına dönüştürerek ölçülür.



Ardından, çemberin çevre uzunluğu çap uzunluğuna oranlanır. Bu işlem farklı yarıçap uzunluklarında da yapılır. Böylece π sayısının sabit olduğu ve yaklaşık değeri elde edilir.



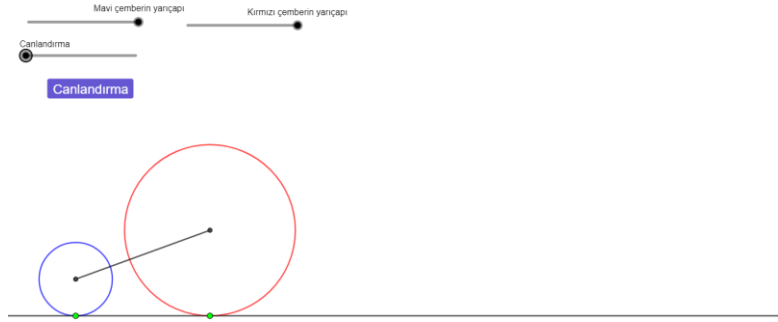
Son olarak bu oranlama ile çemberin çevre uzunluğu formülü keşfedilir.



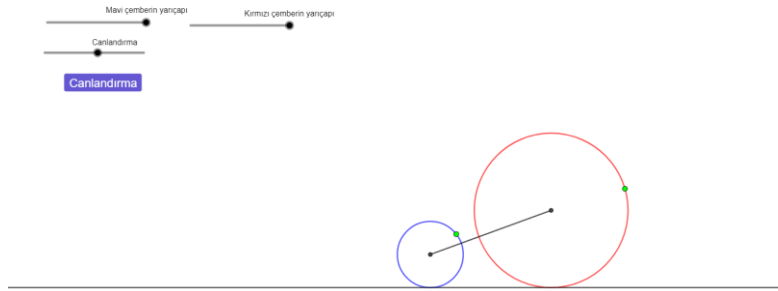
Etkinlik 6 link: <https://www.geogebra.org/m/whymzern>

Ek 8. ‘Gerçek Yaşam Problemi 4’ çözümü içeren ve Ders 3-6 ödevlerini içeren GGB etkinlikleri

‘Gerçek Yaşam Problemi 4’ün çözümünü içeren etkinlikte yarıçap uzunlukları değiştirilebilen iki farklı çember bulunmaktadır. Bu çemberler problemdeki bisikletin tekerleklerini temsil eder.



Canlandırma butonuna tıklandığında ise çemberler döner, bu sayede üzerindeki yeşil nokta da döner. Böylece, hangi nokta merkez nokta etrafında daha yavaş dönüyorsa o çember tekerlekle ilişkilendirilir ve hızı yorumlanır.



‘Gerçek Yaşam Problemi 4’ link: <https://www.geogebra.org/m/vgemwe3b>

Yarıçap uzunluğu verilen çemberin çevre uzunluğunu içeren Ödev 2:

Yarıçap uzunluğu verilen O merkezli çemberin çevre uzunluğunu hesaplayalım.
Bulduğumuz sonucu "Cevap" bölümüne yazalım kontrol edelim.
(π yerine 3 alınız)

Cevap 0 Kontrol Edelim Doğru cevap sayısı = 0 Yanlış cevap sayısı = 0 Tahmin sayısı = 0 1 birim

Yarıçap uzunluğu = 3 birim

Yarıçap uzunluğu verilen O merkezli çemberin çevre uzunluğunu hesaplayalım.
Bulduğumuz sonucu "Cevap" bölümüne yazalım kontrol edelim.
(π yerine 3 alınız)

Cevap 0 Kontrol Edelim Doğru cevap sayısı = 3 Yanlış cevap sayısı = 1 Tahmin sayısı = 4 1 birim

Yarıçap uzunluğu = 8 birim

Ödev 2 link: <https://www.geogebra.org/m/davyapts>

Çevre uzunluğu verilen çemberin yarıçapını ölçmeyi içeren Ödev 3:

Çevre uzunluğu 66 birim olan O merkezli çemberin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?

Yarıçap uzunluğu 0 Kontrol edelim Doğru cevap sayısı = 0 Yanlış cevap sayısı = 0 Tahmin sayısı = 0

Çemberin çevre uzunluğu = 66 birim

Çevre uzunluğu 36 birim olan O merkezli çemberin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?

Yarıçap uzunluğu 0 Kontrol edelim Doğru cevap sayısı = 2 Yanlış cevap sayısı = 1 Tahmin sayısı = 3

Çemberin çevre uzunluğu = 36 birim

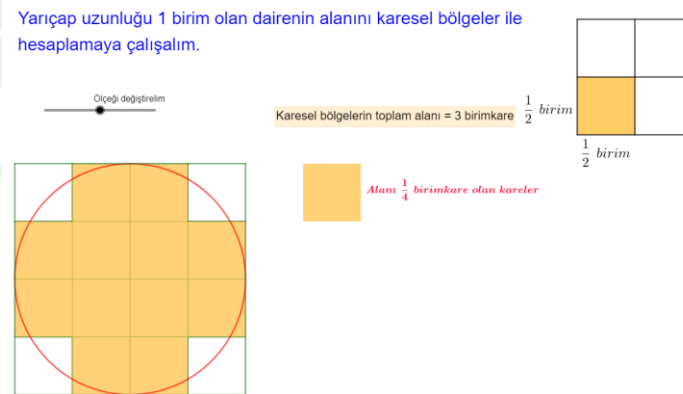
Ödev 3 link: <https://www.geogebra.org/m/mbz647qw>

Ek 9. Etkinlik 7: GGB ile Çembersel Bölge (Daire)nin Alanını Karesel Bölgelerle Hesaplama

Etkinlik 7’de GGB ortamında bir çember ile dışında alanı bilinen karesel bölgeler verilir. İlk önce birim kareler ile çemberin içi doldurulur ve alanı hesaplanır. Bu kaplama ile birimkarelerin çemberin dışına taşıdığı görülür.



Sonrasında, alanı $\frac{1}{4}$ birim kareler ile hesaplanır. Bu sayede kaplamadan kaynaklı taşma azaltılır.



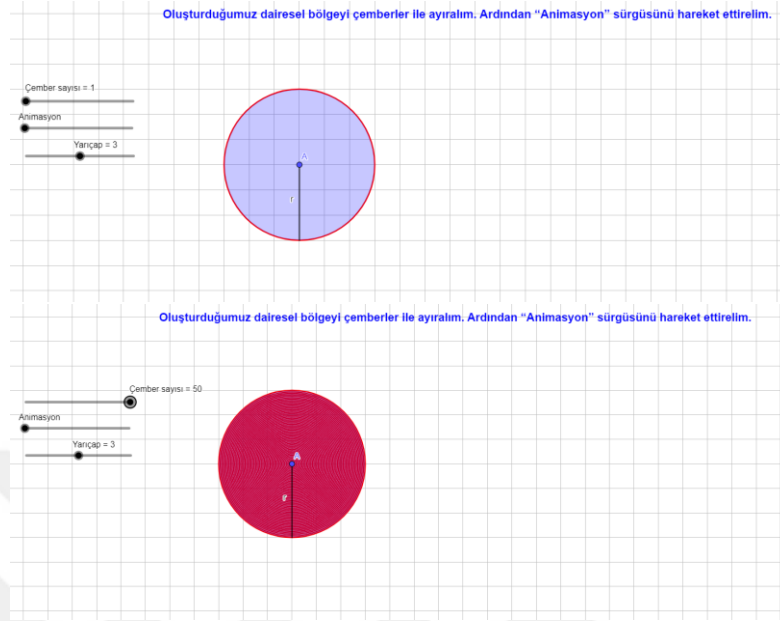
Son olarak, alanı $\frac{1}{16}$ birim kareler ile hesaplanır. Böylece kaplamadan kaynaklı taşma hataları daha da azaltılır. Devamında dairenin alanı hesaplanır.



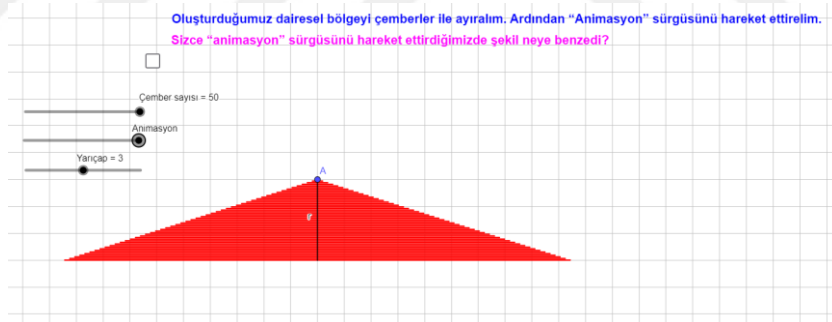
Etkinlik 7 link: <https://www.geogebra.org/m/jxvrrwkm>

Ek 10. Etkinlik 8: GGB ile Dairenin Alan Formülü

Etkinlik 8’de bir daire verilmiştir. Başlangıçta bu daire ‘çember sayısı’ sürgüsü ile çemberlere ayrılır.



Ardından, çembersel bölge (daire)nin üçgensel bölgeye dönüştürülmesini içeren ‘animasyon’ sürgüsü hareket ettirilir. Burada, dönüştürülen şeklin üçgen olduğunu öğrencilerin tespit etmeleri beklenir.

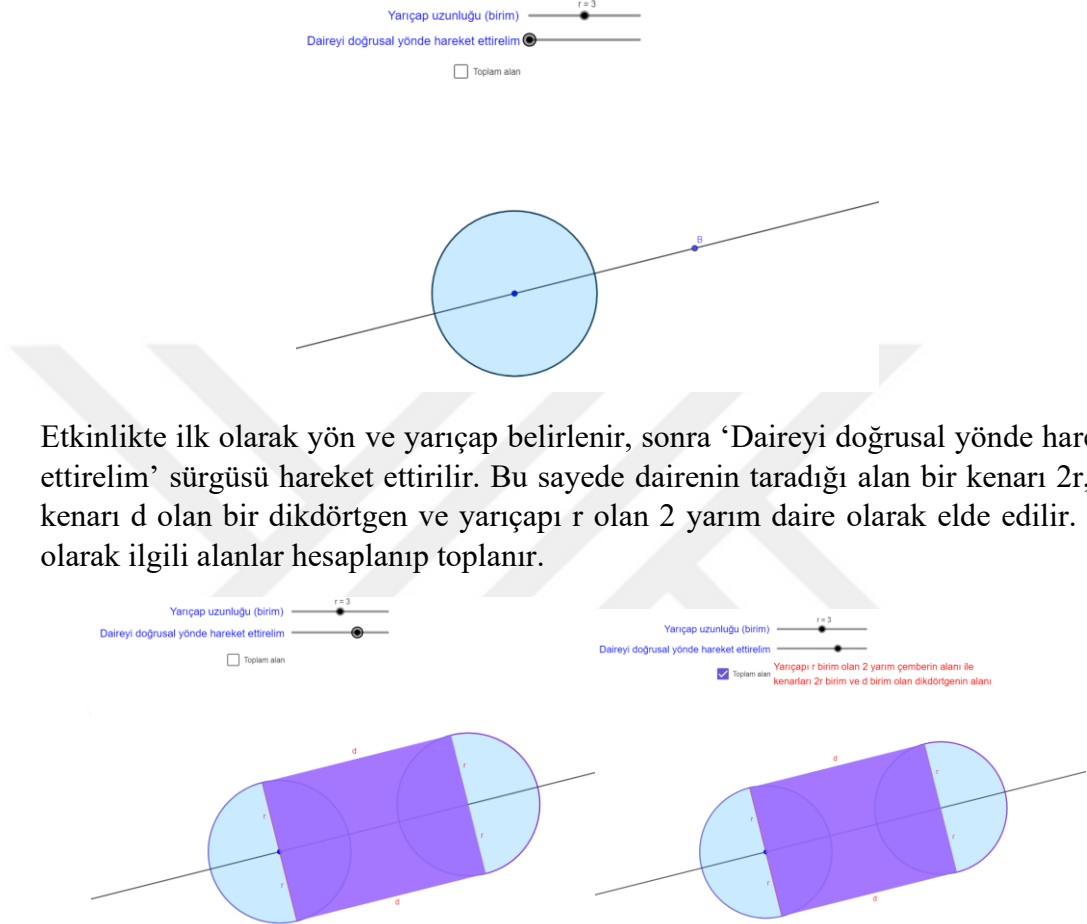


Son olarak, dairenin alanı ile üçgensel bölgenin alan ilişkisi tartışılır ve ilgili kutucuklara tıklayarak, dairenin alanını üçgensel bölge üzerinden hesaplanır.

Etkinlik 8 link: <https://www.geogebra.org/m/tfb39car>

Ek 11. ‘Gerçek Yaşam Problemi 6’ çözümü içeren ve 7-9 derslerin ödevini içeren GGB etkinlik 9

Problemin çözümünü içeren GGB etkinliğinde, robot süpürgeyi temsil eden bir çember ve gideceği yönü belirleyen bir doğruyu içermektedir.



Gerçek Yaşam Problemi 6’ link: <https://www.geogebra.org/m/mashxfhr>

Ödev 4 yarıçapı verilen bir dairenin alanının hesaplanmasını içerir:



Ödev 4 link: <https://www.geogebra.org/m/zbdafawew>

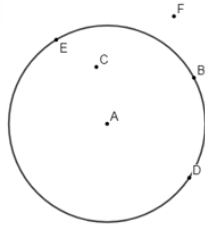
Ek 12. Konu Değerlendirme Testi 1

Konu Değerlendirme Soruları 1

1. Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere doğru ifadeleri yazınız

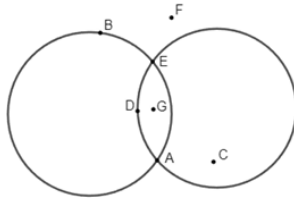
1. Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesine denir.
2. Çemberin merkezi ile üzerindeki bir noktayı birleştiren doğru parçasına çemberin bir denir.
3. Çemberin merkezinden geçen ve çemberin üzerinde bulunan iki noktayı birleştiren doğru parçasına çemberin bir denir.
4. Bir çemberin kendisi ve iç bölgesinden oluşan şekle denir.

2.



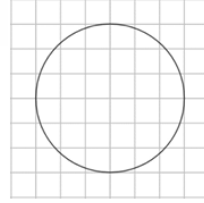
Yanda verilen noktaların hangisi ya da hangileri çemberin iç bölgesindedir?

3.



Yukarıda verilen çemberlerin ortak noktaları hangisi ya da hangileridir?

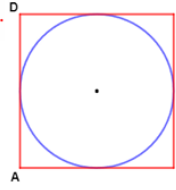
4.



Yanda kenar uzunlukları 1 br olan karelerden oluşan kağıt üzerine çizilen çemberin yarı çapı kaç br'dir?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 6

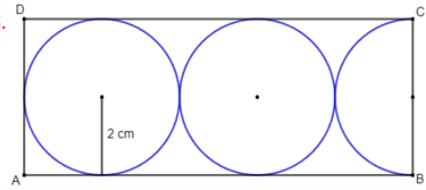
5.



ABCD karesinin kenarlarına bir noktada değecek şekilde bir çember çizilmiştir. Karenin alanı 64 cm^2 olduğuna göre çemberin yarı çapı kaç cm'dir?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 10

6.



Şekilde ABCD dikdörtgeninin içine çizilen iki eş çember ve bu çemberlerden elde edilen bir yarım çember bulunmaktadır. Bu çemberler dikdörtgenin kenarlarına bir noktada değmektedir.

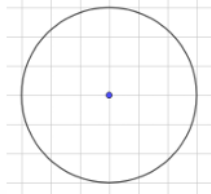
Çemberlerin yarı çapı 2 cm olduğuna göre ABCD dikdörtgeninin alanı kaç cm^2 'dir?

- A) 28 B) 32 C) 36 D) 40

Ek 13. Konu Değerlendirme Testi 2

Konu Değerlendirme 2

1.



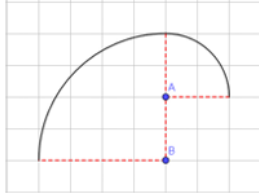
Yukarıda kenar uzunlukları 1 birim olan karelerden oluşan kâğıtta verilen çemberin çevre uzunluğu kaç cm'dir (π yerine 3 alınız).

- A) 9 B) 12 C) 18 D) 24

2. Uzunluğu 36 metre olan çember şeklindeki koşu pistinin çap uzunluğu kaç m'dir? (π yerine 3 alınız)

- A) 9 B) 12 C) 18 D) 24

3.



Yukarıda kenar uzunlukları 1 birim olan karelerden oluşan kâğıtta verilen A ve B merkezli çeyrek çemberlerin oluşturduğu şeklin uzunluğu kaç birimdir? (π yerine 3 alınız)

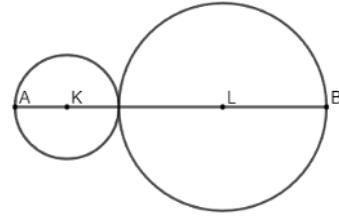
- A) 6 B) 8 C) 9 D) 12

4. Yarıçap uzunluğu 9 cm olan çember şeklindeki bir tel üç eş parçaya bölünüyor. Bu parçaların uç noktaları birbirine değecek şekilde 3 eş çember oluşturuluyor.

Buna göre oluşturulan çemberlerin yarıçap uzunlukları kaç cm'dir? (π yerine 3 alınız)

- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2

5.

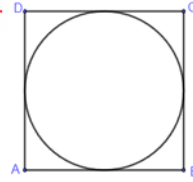


Yukarıda verilen K ve L merkezli çemberler birbirine bir noktada değen iki çemberdir. L merkezli çemberin yarıçapı K merkezli çemberin yarıçapının iki katıdır.

L merkezli çemberin çevresi 48 cm ise AB doğru parçası kaç cm'dir? (π yerine 3 alınız)

- A) 16 B) 20 C) 24 D) 28

6.



Yukarıda verilen ABCD karesinin içine, karenin kenarlarına bir noktada değecek şekilde bir çember yerleştirilmiştir.

AB doğru parçasının uzunluğu 8 cm ise kare ile çemberin çevre uzunlukları farkı kaç cm'dir? (π yerine 3 alınız)

- A) 16 B) 12 C) 10 D) 8

Ek 14. Konu Değerlendirme Testi 3

Konu Değerlendirme 3 Soruları

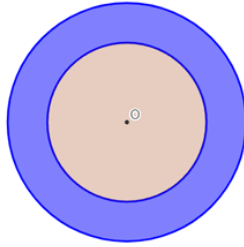
1. Çapı 12 cm olan bir dairenin alanı kaç cm^2 'dir? (π yerine 3 alınız)

A) 100 B) 108 C) 112 D) 120

2. Alanı 48 cm^2 olan dairenin yarıçap uzunluğu kaçtır? (π yerine 3 alınız)

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

3.



Şekildeki O merkezli iki daireden birinin yarıçapının uzunluğu 2 cm, diğerinin yarıçapının uzunluğu 3 cm'dir.

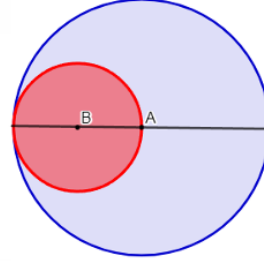
Buna göre mavi ile boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 'dir? (π yerine 3 alınız)

A) 3 B) 8 C) 12 D) 15

4. Alanı 12 br^2 olan dairenin yarıçap uzunluğu iki katına çıkarılırsa alanı kaç br^2 olur? (π yerine 3 alınız)

A) 24 B) 36 C) 48 D) 52

5.

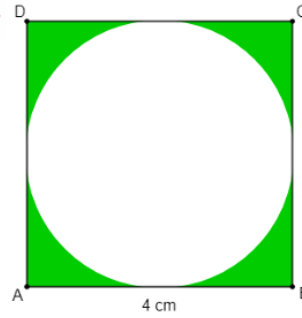


A ve B merkezli iki daire şekildeki gibi yerleştirilmiştir. A merkezli dairenin yarıçapı B merkezli dairenin çapına eşittir

B merkezli dairenin yarıçapı 2 birim olduğuna göre mavi ile boyalı bölgenin alanı kaç br^2 'dir ? (π yerine 3 alınız)

A) 32 B) 36 C) 40 D) 48

6.



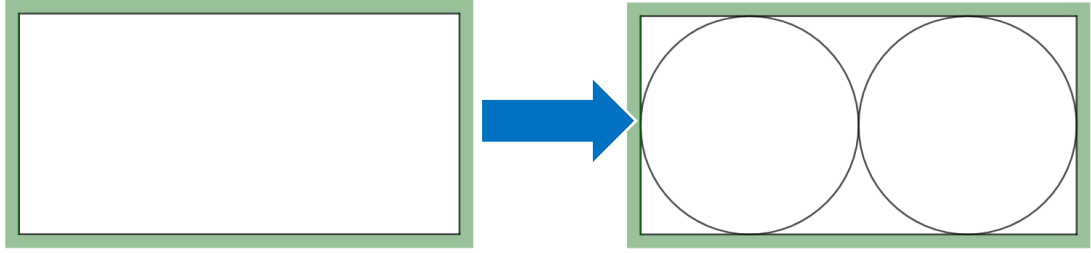
ABCD karesinin içine çizilen bir çember, karenin kenarlarına birer noktada değmektedir.

AB uzunluğu 4 cm olduğuna göre yeşil bölgenin alanı kaç cm^2 'dir? (π yerine 3 alınız)

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4

Ek 15. Gerçek Yaşam Problemleri

Problem 1

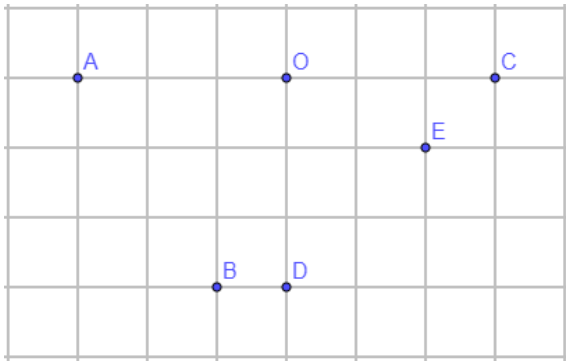


Elif dikdörtgen şeklindeki fotoğraf çerçevesin iç bölgesine, yarıçap uzunlukları eşit aynı iki çember şeklindeki teli, görseldeki gibi fotoğraf çerçevesinin içine çerçeve ile birer noktada değecek şekilde yerleştirebildiğini fark etmiştir. Sizce Elif çerçevenin iç bölgesindeki dikdörtgenin kenar uzunluklarını bulabilir mi? Bulabilirse nasıl? Açıklayınız.

Problem 2

Zeminden bir miktar yüksekte ve yarıçapı 3 metre olan çember şeklindeki dönme dolaba farklı bölmelere binen Kemal ve Mustafa'nın aralarındaki uzaklık 6 metredir. Dönme dolap bir miktar döndükten sonra Kemal'in yerden yüksekliği 2 metredir. Buna göre Mustafanın yerden yüksekliği en fazla kaç metre olabilir? Neden? Açıklayınız.

Problem 3



Ahmet kareli defterine A, B, C, D, E ve O noktalarını çiziyor. Sonrasında O merkezli bir çember çizen Ahmet bu noktalardan ikisinin çemberin üzerinde olmadığını fark ediyor. Sizce bu noktalar hangileri olabilir? Çizilen tüm noktalar çemberin üzerinde olabilecek bir çember çizilebilir mi? Açıklayınız.

Problem 4

Ön ve arka tekerlerinin çap uzunlukları farklı olan bir bisiklete binen Ayşe, bisikleti sürerken ön tekerleğin arka tekerleğine göre daha yavaş döndüğünü görüyor. Sizce bisikletin ön tekerleği arka tekerleğine göre neden yavaş dönmektedir? Açıklayınız.

Problem 5

Çevre uzunluğu 42 metre olan karesel bölgenin içine çember şeklinde yarış pisti inşa edilecektir. İnşa edilecek pistin maksimum uzunluğu kaç metre olur?

Problem 6

Ayşe, yarıçapı 10 cm olan, daire şeklinde bir robot süpürge satın alır. Bu robot süpürge, otomatik olarak kendi kendine temizlik yapabilmektedir. Robot süpürgenin çalışmasını izleyen Ayşe, cihazın yalnızca kapladığı alan kadar bir yüzeyi temizlediğini fark eder. Süpürgeyi bir süre çalıştırarak izlediğinde, onun doğrusal bir yolda belirli bir mesafe kat ettiğini gözlemler. Peki, robot süpürgenin bu doğrusal hareketi sonucunda temizlediği alan hesaplanabilir mi? Hesaplanabiliyorsa, bu nasıl yapılır?

Ek 16. Görüşme Formu 1

1. Görüşme Soruları

- İlk derste yaptığımız etkinliği hatırlayınız, etkinlikte neler yapmıştınız, neler düşünmüştünüz?
- “Haydi döndürelim” butonuna tıkladığımızda görüntüye ne oldu?
- Görüntüdeki çemberin merkezini belirlemek için hangi noktayı seçmek uygun olur?
- Çemberin merkezi ile üzerindeki noktaların arasında bir ilişki var mıdır? Varsa bu ilişki nedir?
- Çap kavramı nedir? Yarıçap ile ilişkisi var mıdır?
- Daire kavramı size neyi ifade etmektedir? Aralarında fark var mıdır? Neden?

Soru 1

1. Pergel ile ne çizmiştik hatırlıyor musun? Hatırladığın şekli çizer misin? Çizdiğin şekil neye benzedi? Çizdiğin şeklin adı nedir?
2. Çizdiğin çemberin merkezini gösterir misin?
3. Çemberin yarıçapını çizebilir misin?
4. Çemberin çapını çizebilir misin?

Soru 2

Maksimum 3 metre menzile kadar sulama yapabilen bir fiskiye düşünelim. Sizce bu fiskiye'nin sulama yaptığı alan size neyi çağrıştırmaktadır?

Başka bir fiskiye daha düşünelim, bu fiskiye sadece 3 metre ileriye suladığını varsayalım. Sizce fiskiye'lerin suladığı kısımların arasında fark var mıdır? Varsa nedir?

Sulama yapılan bölgenin merkezini seçmek istesen nereyi seçerdin? Açıklayınız.

Sulama yapılan çembersel bölgenin yarıçapı ve çapı kaç metredir?

Ek 17. Görüşme Formu 2

2. Görüşme Soruları

- 4. dersteki yaptığımız 2. etkinliği hatırlayınız? Yaptığımız etkinlikte “çemberin çevresi” sürgüsünü hareket ettirdiğinizde görüntüye ne oldu? Neden?
- Yaptığımız etkinlikten yola çıkarak ϕ ile çemberin çevre uzunluğu arasında ilişkisi var mıdır? Varsa bu ilişki nedir? Neden?
- Çemberin çevre uzunluğu formülü nedir? Nasıl bulmuştunuz?
- Bulduğunuz formül bütün çemberler için geçerli midir?

Çapı 20 cm olan bir çember şeklindeki telin çevre uzunluğu kaç cm’dir?



Ek 18. Görüme Formu 3

3. Görüşme Soruları

- 6. derste yaptığımız ilk etkinliği hatırlayınız, etkinlikte neler yapmıştınız, neler düşünmüştünüz?
- 6. derste yaptığımız ikinci etkinliği hatırlayınız, etkinlikte neler yapmıştınız, neler düşünmüştünüz? Neyi buldunuz? Nasıl buldunuz?
- İkinci etkinlikte “çember sayısı” sürgüsünü hareket ettirdiğimizde oluşan şekil size neyi ifade etti? Neden?
- İkinci etkinlikte “animasyon” sürgüsünü hareket ettirdiğimizde görüntüye ne oldu? Oluşan geometrik şekil size neyi ifade etti? Neden?
- Elde ettiğimiz geometrik şekil ile yarıçap arasında ilişki var mıdır? Varsa bu ilişki nedir? Neden?
- Dairenin alan formülü nedir? Nasıl bulmuştunuz?
- Bulduğumuz formül bütün daireler için geçerli midir?

Çap uzunluğu 8 cm olan dairenin alanını hesaplayınız.

Ek 19. Çember ve Daire Temalarına Ait Kod Tablosu

Kod	Kategori	Tema
“Pergelin iğnesini sabitlemiştik, sonra pergeli döndürüp bir çember çizmiştik” Mert “A (merkez) ile B arasında çizdiğimiz yarıçap B’yi döndürüyor. B’nin dönüşüne göre B’yi takip ediyor” Ahmet	Eylem	Çember
“En orta nokta” Aleyna “Çemberin en ortası” Bilge “Şu delik açtığımız yer” Berna “Hepsi aynı hız... boyutta.” Aleyna “Yarıçap, A ile B’nin arasında olup B’nin dönüşüyle çemberi oluşturan çizgi” Ahmet “Çapı yarıya bölünce yarıçap” Berna “Yarıçap çarpı iki eşittir çap” Ahmet “Bu $bi\ r$ (yarıçap) ise diğeri $2r$ (çap)” Berna “Bir tane noktadan başlayıp eee merkez noktadan geçerek karşı noktaya kadar” Aleyna “İkisi de çemberin merkez noktadan geçiyor.” Ahmet	Süreç	
“Bir merkezi olan o merkezin üzerinde düzgün bir şekilde (eşit uzaklıkta) noktalardan oluşan bir şekil.” Ahmet	Nesne	
“Çemberin dışındaki halkasıyla içinin dolu hali” Aleyna “Çember gibi fakat çemberden farkı içi dolu” Berna	Nesne	Daire

Ek 20. Çemberin Çevre Uzunluğu Formülü Temasına Ait Kod Tablosu

Kod	Kategori	Tema
<i>“Çemberin çevresini çapına bölmüştük.” Aleyna</i> <i>“Çapına bölüyorduk” Berna</i> <i>“Çemberin çevresini çapa bölmüştük” Mert</i>	Eylem	Çemberin Çevre Uzunluğu Formülü
<i>“Çapı çevresine oranlı” Ahmet</i> <i>“Bölünce hep 3,14 çıkıyor ama devamı da var” Berna</i> <i>“π sayısı oluyor (çevreyi çapa bölünce)” Mert</i>	Süreç	
<i>“Çapını biliyorsak çapla π'yi çarpıp bulabiliriz (çemberin çevre uzunluğunu)” Aleyna (ders)</i> <i>“(çemberin) çapıyla π çarpıp buluruz” Aleyna</i> <i>“π çarpı R” Ahmet</i> <i>“Çap çarpı π” Berna</i> <i>“Çevreyi π ile çapı çarpıp bulabiliriz” Mert</i>	Nesne	

Ek 21. Dairenin Alan Formülü Temasına Ait Kod Tablosu

Kod	Kategori	Tema
“Üçgen yapmıştık” Aleyna “Üçgene dönuştü” Bilge “Daireyi üçgene dönuştürmüştük” Ahmet “Hilal olmuştu sonra da üçgen olmuştu” Berna	Eylem	Dairenin Alan Formülü
“A noktasında (üçgenin tepe noktası ve çemberin merkezi) en alt kısma kadar (dik bir şekilde) gelen kısım yarıçap olur” Aleyna “Üçgenin yüksekliği dairenin yarıçapı” Berna “Çemberinin çevresi üçgenin alt kısmıdır” Aleyna “Dairenin çevresiyle üçgenin tabanı eşit” Ahmet “Şu üçgenin en uzun kısmı var ya o dairenin çevresine eşittir” Berna “Hangi daireyi açarsak açtığımız üçgenle aynı” Berna	Süreç	
“Çevresiyle yarıçapını çarpacağız ikiye böleceğiz” Aleyna “Ç (dairenin çevresi) çarpı r eşittir bilmem ne, bunda bölü 2” Berna “Üçgenin alanı taban uzunluğu çarpı yükseklik bölü 2” Mert “Taban çarpı yükseklik çarpıyoruz bunları sonra 2'ye böleriz ve dairenin alanı bulmuş oluruz” Bilge	Nesne	

Ek 22. Veli Onay Formu



T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER ARAŞTIRMALARI
ETİK KURULU

VELİ / VASİ ONAY FORMU

Tarih: .../.../20..

Bu çalışma, Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Öğrencisi YÜKSEL EMRE HARMANBAŞI tarafından yürütülen bir çalışmadır. Bu çalışmanın amacı 6. sınıf öğrencilerinin çember ve daire kavramlarına ilişkin dinamik yazılım desteğiyle zihinsel yapılanmalarının incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu amaçla velisi / vasisi olduğunuz kişinin bazı soruları cevaplandırmasına ve anketleri doldurmasına ihtiyaç duymaktayız. Uygulama tahminen 8 hafta sürecektir.

Velisi / vasisi olduğunuz kişinin çalışmaya katılımının onun fiziksel, zihinsel ve psikolojik gelişimine hiçbir olumsuz etkisi olmayacağından emin olabilirsiniz. Çalışmaya katılım tamamen gönüllülük esasına dayanmaktadır. Çalışma öncesinde velisi / vasisi olduğunuz kişinin de sözel olarak rızası alınacaktır. Velisi /vasisi olduğunuz kişinin vereceği cevaplar kesinlikle gizli tutulacak ve sadece bilimsel araştırma amacıyla kullanılacaktır. Bu formu imzaladıktan sonra da dilediğiniz zaman velisi / vasisi olduğunuz kişinin çalışmadan ayrılma hakkı bulunmaktadır. Çalışma hakkında daha fazla bilgi almak ve sorularınız için Yüksel Emre Harmanbaşı ile iletişim kurabilirsiniz.

Desteğiniz için teşekkür ederiz.

İmzası Araştırmacının
Yüksel Emre Harmanbaşı

Yukarıda açıklamasını okuduğum çalışmaya hiçbir baskı ve zorlama olmaksızın velisi / vasisi olduğum kişinin katılmasını kabul ediyorum.

Veli ya da Vasinin
İmzası
Adı-Soyadı

Ek 23. Etik Kurul Kararı



ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER ARAŞTIRMALARI ETİK KURUL KARARLARI

KARAR TARİHİ	TOPLANTI SAYISI	KARAR SAYISI
26.01.2024	1	2024-55

KARAR NO: Üniversitemiz Lisansüstü Eğitim Enstitüsü öğrencisi Yüksel Emre HARMANBAŞI'nın Doç. Dr. Rezan YILMAZ danışmanlığında "6. Sınıf Öğrencilerinin Dinamik Matematik Yazılımı Destekli Ortamda Çember ve Daire Kavramlarını Oluşturma Süreçleri" isimli yüksek lisans tezine ilişkin test, mülakat, gözlem ve video/film/görüntü kaydı çalışmasını içeren 12492 sayılı dilekçesi okunarak görüşüldü.

Üniversitemiz Lisansüstü Eğitim Enstitüsü öğrencisi Yüksel Emre HARMANBAŞI'nın Doç. Dr. Rezan YILMAZ danışmanlığında "6. Sınıf Öğrencilerinin Dinamik Matematik Yazılımı Destekli Ortamda Çember ve Daire Kavramlarını Oluşturma Süreçleri" isimli yüksek lisans tezine ilişkin test, mülakat, gözlem ve video/film/görüntü kaydı çalışmasının kabulüne oy birliği ile karar verildi.

Ek 24. Meb Uygulama İzni

BELGE TARİHİ: 13.03.2024 BELGE SAYISI: 2400054410



T.C.
SAMSUN VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü



Sayı : E-67180656-605.01-98679032
Konu : Yüksel Emre HARMANBAŞI'nın
Araştırma Uygulama İzni

12.03.2024

DAĞITIM YERLERİNE

- İlgi : a) Milli Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 21/01/2020 tarih ve 2020/2 sayılı Genelgesi.
b) Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürlüğünün 01.03.2024 tarih ve 2400045485 sayılı yazısı.

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Yüksel Emre HARMANBAŞI'nın ilçeniz resmi ortaokullara yönelik "6.Sınıf Öğrencilerinin Dinamik Matematik Yazılımı Destekli Ortamda Çember ve Daire Kavramlarını Oluşturma Süreçleri" konulu araştırma çalışması yapmak istediğine dair ilgi (b) yazı ve ekleri Müdürlüğümüz Araştırma ve Değerlendirme Komisyonu tarafından incelenmiştir.

İlgi (a) genelge gereği sonuçları Müdürlüğümüz Ar-Ge Birimiyle paylaşılacak üzere uygun görülmüş olup, söz konusu çalışmanın komisyon kararı doğrultusunda uygulama sorularının çalışmayı yapan kişi tarafından raporlanarak denetimi İlçe Milli Eğitim Müdürlükleri/Okul idaresinde olmak üzere, kurum faaliyetlerini aksatmadan gönüllülük esasına göre yapılmasının sağlanması hususunda;

Bilgilerinizi ve gereğini arz/rica ederim.

Dr. Murat AĞAR
Vali a.
İl Milli Eğitim Müdürü

Ek: Araştırma Değerlendirme Formu (1 sayfa)

Dağıtım:

Gereği :
17 İlçe Kaymakamlığına
(İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü)

Bilgi:
Ondokuz Mayıs Üniversitesi Rektörlüğüne

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Adres : Atatürk Bulv. Hükümet Konağı İl Milli Eğitim Müdürlüğü
İlkadım/SAMSUN
Telefon No : 0 (362) 435 80 63
E-Posta: arge55@meb.gov.tr
Kep Adresi : meb@hs01.kep.tr

Belge Doğrulama Adresi : <https://www.turkiye.gov.tr/meb-ebys>
Bilgi için:
Unvan : Memur
Faks: 3624324854

İnternet Adresi: <http://samsun.meb.gov.tr>

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evraksorgu.meb.gov.tr> adresinden 26da-1285-3b10-8645-6b5e kodu ile teyit edilebilir.

ÖZ GEÇMİŞ

Yüksel Emre HARMANBAŞI, Karabük Demir Çelik Anadolu Lisesi’ni bitirdikten sonra Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünden mezun oldu. 2022 yılında OMÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı Yüksek Lisans programına girdi.

İletişim Bilgileri

ORCID ID : 0009-0008-2774-5113

Yayınlar:

1. Harmanbaşı, Y. E. & Yılmaz R. (2024). 6. Sınıf Öğrencilerinin Çember, Daire ve Temel Elemanlarını Dinamik Matematik Yazılımı Destekli Ortamda Oluşturma Süreçleri. *11th International Eurasian Educational Research Congress (EJER)*. May 21-24, Kocaeli, Türkiye.