

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

uygulanır.
31.01.2001
Prof. Dr. Mehmet Erdoğan
M. F.

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YARI-RIEMANN ALTMANİFOLDLARIN
BAZI EĞRİLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

97949

Hakan Mete TAŞTAN
Matematik Anabilim Dalı

Danışman
Prof. Dr. Mehmet ERDOĞAN

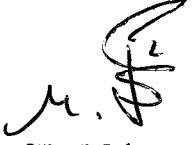
Aralık-2000

İSTANBUL

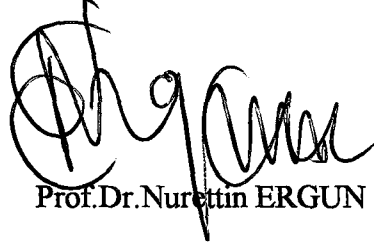
T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANİSTON MERKEZİ

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma 26.01.2001 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Yüksek Yüksek Lisans programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.



Prof.Dr.Mehmet ERDOĞAN
Danışman



Prof.Dr.Nurettin ERGUN



Prof.Dr.Kamil ALNIAÇIK



Prof.Dr.Elimham MAHMUDOV



Doç.Dr.Uğur Dursun

ÖNSÖZ

Bu tezin gerçekleşmesinde bana yol gösteren, gerekli kitaplara, makalelere ve diğer kaynaklara ulaşmamda yardımcı olan Danışman Hocam Prof.Dr. Mehmet Erdoğan'a çok teşekkür ederim. Ayrıca bilgisayardaki bazı çalışmalarımda yardımcı olan arkadaşım Araş.Gör. Özkan Değer' e de teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Önsöz	I
İçindekiler	II
Notasyon Listesi	III
Özet	IV
Summary	VI
I. Giriş Temel Bilgiler	1
II. Bölüm 1 Yarı-Riemann Manifoldlar	2
III. Bölüm 2 Yarı-Riemann Altmanifoldlar	8
IV. Bölüm 3 Eğriler	18
V. Bölüm 4 Lorentz Nedensel(Causal) Karakter	25
VI. Bölüm 5 Yarı-Riemann Manifoldlarda Bazı Eğriler	28
VII. Tartışma ve Sonuç	51
VIII. Kaynaklar	53
IX. Özgeçmiş	54

NOTASYON LİSTESİ

p, q	: noktalar
M, N	: manifoldlar
f, h	: reel-değerli, smooth(diferensiyellenebilir) fonksiyonlar
α, β, γ	: eğriler
V, W, X, Y	: vektör alanları
$\xi = (x^1, \dots, x^n)$	: koordinat sistemi
∂_i	: i-inci koordinat vektör alanı
dx^i	: ∂_i ye karşılık gelen dual 1-form
$I_q^p(M)$	: M üzerindeki (p, q) tipindeki tensörler kümesi
$\mathfrak{N}(M)$	: M üzerindeki vektör alanları kümesi
$\mathfrak{N}^*(M)$	: M üzerindeki 1-formların kümesi
$\mathfrak{F}(M)$	: M üzerindeki reel-değerli, smooth fonksiyonların kümesi

ÖZET

Bir Riemann manifoldunda herhangi bir eğri Frenet formülleri tarafından nitelendirilebilir. Örneğin, bir eğrinin bütün eğrilikleri özdeş olarak sıfır ise, bu durumda bu eğri bir geodezik, sadece birinci eğriliği sıfırdan farklı bir sabit ve diğerleri özdeş olarak sıfır ise, bu durumda eğri bir çember, birinci ve ikinci eğrilikleri sıfır olmayan sabitler ve diğerleri özdeş olarak sıfır ise, bu durumda eğri bir helis'tir.

Eğer bir M manifoldu, bir g indefinite-metrik'i üzerine kurulu ise, ortaya null vektörler, uzay-benzeri vektörler ve zaman-benzeri vektörler çıkacaktır. Bu durum doğal olarak eğrinin Frenet formüllerinde bir farklılığa neden olacaktır. Bu tez, bir yarı-Riemann (özellikle Lorentz) manifoldu üzerindeki çemberler, helisler ve null eğrilerle ilgili yapılan çalışmalardan bir derleme niteliğine sahiptir.

Giriş bölümünde, bir simetrik dönüşümün indefinite özelliği, non-dejenere özelliği, indeksi, vb. gibi yarı-Riemann manifoldların kuruluşu açısından can alıcı rol oynayan temel tanımlar verilmiştir.

Bölüm 1'de yarı-Riemann manifoldun tanımı, belirli özellikleri ve yarı-Riemann Geometrisinin en önemli elemanlarından Levi-Civita Koneksiyonunun tanımı verilmiştir.

Bölüm 2'de yarı-Riemann altmanifold, indirgenmiş koneksiyon, altmanifoldun geometrisini belirlemeye yarayan ikinci temel form (şekil tensörü) ve normal koneksiyonun tanımları ve bunlarla ilgili teoremler verilmiştir.

Bölüm 3'de Riemann manifoldlarındaki eğrilerle ilgili genel tanım ve teoremler

verilmiştir.

Bölüm 4, tezin asıl konusu olan Bölüm 5'e geçişi sağlayan Lorentz manifoldlarıyla ilgili tanım ve teoremleri içermektedir. Son bölümde yer alan örnekler, özgün olup ilgili teoremlere ışık tutmaktadır.



SUMMARY

In a Riemannian manifold, a curve is described by the Frenet formula. For example, If all curvatures of a curve are identically zero, then the curve is a geodesic. If only the first curvature is a non-zero constant and others are identically zero. Then the curve is called a circle. If the first and second curvatures are non-zero constants and others are identically zero, then the curve is called a helix.

If a manifold M is furnished with an indefinite metric g , then null vectors, space-like vectors and time-like vectors come forth.

This thesis consists of collective results on circles, helices and null curves in a semi-Riemannian manifold especially in a Lorentzian manifold.

In the introductory chapter, we gave fundamental notions which play the crucial roles to establish a semi-Riemannian manifold such as indefinite non-degenerate metrics and the index of a symmetric bilinear mapping and so on.

In the first chapter, a semi-Riemannian manifold and the Levi-Civita connection on it were defined and certain properties of a semi-Riemannian manifold were investigated.

Second chapter includes the definitions of a semi-Riemannian manifold, induced connection, the second fundamental form (shape tensor) and normal connection. In this chapter some theorems on the shape tensor and the others were given.

In the third chapter fundamental definitions and the theorem about curves of Riemannian manifolds were given.

Fourth chapter that is connecting fifth chapter in which we present main content of the thesis, includes basic notions and theorems on Lorentzian manifolds.

Examples given in the last chapter are original and they enlighten the related theorems.

I.Giriş

TEMEL BİLGİLER

V , m -boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde bir simetrik, bilinear dönüşüm verilsin. Eğer her $v \in V$ için $g(\xi, v) = 0$ olacak şekilde V nin sıfırdan farklı bir ξ vektörü varsa, o takdirde g , V üzerinde dejenere'dir, aksi takdirde non-dejenere'dir denir. Eğer g , V üzerinde non-dejenere ise, o takdirde her $v \in V$ için $g(u, v) = 0 \Rightarrow u = 0$ dir. V nin simetrik bilinear g formuna göre,

$$\text{Rad } V = \{ \xi \in V : g(\xi, v) = 0, v \in V \}$$

şeklinde tanımlı alt uzayına V nin null uzayı veya Radical'ı adı verilir. $\text{Rad } V$ 'nin boyutuna da g nin sıfırlık derecesi adı verilir ve $\text{null } V$ ile gösterilir. $\text{null } V > 0$ ise g dejenere, $\text{null } V = 0$ ise g , V üstünde non-dejenere'dir.

Sıfırdan farklı her $v \in V$ vektörü için $g(v, v) > 0$ ($g(v, v) < 0$) ise g ' ye V üzerinde pozitif-definite (negatif-definite) deriz. Böylece g definite ise non-dejenere'dir. Eğer her $v \in V$ için $g(v, v) \geq 0$ ($g(v, v) \leq 0$) ve $g(u, v) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $u \in V$ vektörü varsa o takdirde g , V üzerinde pozitif (negatif) semi-definite'dir denir. Böylece g semi-definite ise dejenere'dir.

W , V nin bir alt uzayı ise g , $W \times W$ üzerine kısıtlanabilir ve $g|_W$ kısıtlanmış W üzerinde yine bir simetrik, bilinear form'dur. $g|_W$ nin negatif-definite olduğu en geniş alt uzayın boyutu'na g nin V üzerindeki index'i adı verilir ve $\text{ind } V = q$ ile gösterilir.

Şimdi M , m -boyutlu bir reel smooth (düzgün) manifold ve g ' de M üstünde $(0,2)$ tipinde simetrik bir tensör alanı olsun. Böylece, g , M 'nin her p noktasındaki $T_p M$ tanjant uzayı üzerinde bir simetrik bilinear g_p formunu tanımlar [1].

II. Bölüm 1

YARI-RIEMANN MANİFOLDLAR

Tanım 1.1. Bir smooth M manifoldu üzerindeki bir g metrik tensörü sabit indekse sahip bir simetrik nondejenere $(0,2)$ tensor alanıdır.

Başka deyişle $g \in I_2^0(M)$, M nin herhangi bir p noktasını smooth olarak $T_p(M)$ üzerindeki g_p skaler çarpıma karşılık getirir, ve g nin indeksi bütün p noktaları için aynıdır.

Tanım 1.2. Bir yarı-Riemann manifold bir g metrik tensörü üzerine kurulu bir smooth M manifoldudur.

Böylece, bir yarı -Riemann manifold (M, g) sıralı çiftidir. Aynı manifold üzerinde farklı iki metrik tensör farklı yarı-Riemann manifoldlarını oluştururlar.

Bir M yarı-Riemannian manifoldu üzerindeki g_p metrik tensörünün v indeksine M nin indeksi denir. M nin boyutu n ise $0 \leq v \leq n$ yazılabilir. Eğer $v=0$ ise, M bir Riemann manifoldudur. Yani $\forall p \in M$, g_p , $T_p(M)$ üzerinde pozitif tanımlıdır. Özel olarak $v=1$ ve $n \geq 2$ ise o zaman M ye Lorentz manifoldu denir.

Biz g notasyonunun yerine alternatif olarak tanjant vektörler için $g_p(v, w) = \langle v, w \rangle_p \in \mathbb{R}$ ve vektör alanları için $g(V, W) = \langle V, W \rangle \in \mathfrak{F}(M)$ notasyonunu kullanacağız.

Eğer $x^1, \dots, x^n$, $U \subset M$ üzerinde bir koordinat sistemi ise bu durumda g metrik tensörünü

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle, \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

$$\text{ve} \quad V = \sum_{i=1}^n V^i \partial_i, \quad W = \sum_{j=1}^n W^j \partial_j$$

vektör alanları olmak üzere

$$g(V, W) = \langle V, W \rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} V^i W^j$$

şeklinde yazabiliriz. g non-dejenere olduğundan $\forall p \in U$, $g_{ij}(p)$ matrisinin tersi vardır ve tersini $g^{ij}(p)$ ile gösteriyoruz. g simetrik olduğundan $g_{ij} = g_{ji}$ ve buradan $g^{ij} = g^{ji}$ ($1 \leq i, j \leq n$). Sonuç olarak U üzerinde g metrik tensörünü

$g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $\forall p \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ ile $T_p(\mathbb{R}^n)$ arasında bir kanonik lineer izomorfizm vardır:

$$v \rightarrow v_p = \sum v^i \partial_i$$

Böylece $\mathbb{R}^n$ deki nokta çarpımından bir metrik tensor ortaya çıkarabiliriz.

$\langle v_p, w_p \rangle = v \cdot w = \sum v^i w^i$. Burada $0 \leq v \leq n$ olmak üzere toplamdaki ilk v tane “+” işareti, “-” işaretine çevirirsek;

$$\langle v_p, w_p \rangle = - \sum_{i=1}^v v^i w^i + \sum_{j=v+1}^n v^j w^j$$

şeklinde indeksi v olan bir metrik tensör inşa edilebilir.

Bu metrik tensörün meydana getirdiği uzayı $\mathbb{R}_v^n$ ile gösterelim. $\mathbb{R}_v^n$ ye yarı-Euclidean uzay denir. $n \geq 2$ olmak üzere $\mathbb{R}_1^n$, Minkowski n -uzay olarak adlandırılır. Eğer özel olarak $n=4$ ise $\mathbb{R}_1^4$ relativistik uzay-zaman adını alır. Sonuç olarak

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1 & , 1 \leq i \leq v \\ 1 & , v+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad \text{olmak üzere } \mathbb{R}_v^n \text{ üzerindeki metrik tensör}$$

$$g = \sum \epsilon_i du^i \otimes du^i \text{ şeklindedir.}$$

Tanım 1.3. Bir $v \in T_p(M)$ tanjant vektörüne

$$\langle v, v \rangle > 0 \text{ yada } v=0 \text{ ise uzay-benzeri (space-like)}$$

$$\langle v, v \rangle < 0 \text{ ise zaman-benzeri (time-like)}$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \text{ ve } v \neq 0 \text{ ise null vektör denir.}$$

Lorentz durumda null vektörlere ışıkbenzeri (light-like) vektörler denilebilir.

LEVI-CIVITA KONEKSİYONU

Tanım 1.4. $u^1, \dots, u^n$, $\mathbb{R}_V^n$ nin doğal koordinatları olsun. Eğer V ve $W = \sum w^i \partial_i$ $\mathbb{R}_V^n$ üzerinde vektör alanları iseler

$\nabla_V W = \sum V(W^i) \partial_i$ vektör alanına W nin V yönüne göre doğal kovaryant türevi denir.

Şimdi bu tanımı keyfi yarı-Riemann manifoldlara genişletelim.

Tanım 1.5. Bir smooth M manifoldu üzerindeki bir ∇ konneksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip bir fonksiyondur.

$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ şöyleki

(V1) $\nabla_V W$, V ye göre $\mathfrak{X}(M)$ - lineer.

(V2) $\nabla_V W$, W ye göre $\mathbb{R}$ - lineer.

(V3) $f \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere $\nabla_V(fW) = V(f)W + f\nabla_V W$

$\nabla_V W$ ye ∇ konneksiyonuna göre W nin V yönündeki kovaryant türevi denir.

(V1) aksiyomu $\nabla_V W$ 'nin V ye göre tensör olduğunu iddia eder, ancak (V3) aksiyomu ise $\nabla_V W$ nin W ye göre tensör olmadığını gösterir.

Şimdi asıl amacımızı gerçekleştirmek için aşağıdaki önermeden faydalanalım.

Önerme 1.6. M bir yarı-Riemann manifold olsun. Eğer $V \in \mathfrak{X}(M)$ ise V^* , M üzerinde bir 1-form olsun şöyleki

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M), \quad V^*(X) = \langle V, X \rangle$$

Bu durumda $V \rightarrow V^*$ şeklinde tanımlanan fonksiyon, $\mathfrak{X}(M)$ den $\mathfrak{X}^*(M)$ a $\mathfrak{X}(M)$ - lineer izomorfizm dir.

İspat: V^* , 1-form olduğundan $\mathfrak{Z}(M)$ -lineer dir. Dolayısıyla $V \rightarrow V^*$ fonksiyonunda $\mathfrak{Z}(M)$ lineer olur. Şimdi şu iddiaları gerçeklersek izomorfizm olduğunu göstermiş olacağız.

i) Eğer $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, $\langle V, X \rangle = \langle W, X \rangle$ ise bu durumda $V = W$ dir.

ii) Verilen $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ 1-formu için tektürlü belirli bir $V \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanı vardır, öyle ki $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, $\theta(X) = \langle V, X \rangle$ olur.

$U = V - W$ diyelim. Eğer $\forall p \in M$ ve $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ $\langle U_p, X_p \rangle = 0$ ise buradan $U = 0$ çıkar. Çünkü; $T_p(M)$ in her elemanı X_p formundadır ve $T_p(M)$ non-dejeneredir. Dolayısıyla $T_p(M)$ üzerindeki metrik tensör non-dejeneridir. Böylece i) doğrulanır.

Şimdi i) sayesinde ii) deki teklik koşulu ispatlanmış oldu. Dolayısıyla ii) yi ispatlamak için keyfi bir U koordinat komşuluğunda V yi bulmak yeterlidir. Eğer U üzerinde $\theta = \sum \theta_i dx^i$ ise, V yi $V = \sum g^{ij} \theta_i \partial_j$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda (g_{ij}) ve (g^{ij}) birbirlerinin ters matrisleri olduğundan

$$\begin{aligned} \langle V, \partial_k \rangle &= \sum_{i,j} g^{ij} \theta_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \sum_{i,j} \theta_i g^{ij} g_{jk} \\ &= \sum_i \theta_i \delta_{ik} = \theta_k = \theta(\partial_k) \end{aligned}$$

$\mathfrak{Z}(M)$ - lineerlikten U üzerinde bütün X ler için $\langle V, X \rangle = \theta(X)$ çıkar.

Böylece yarı-Riemann geometride bir vektör alanını rahatça bir 1-forma dönüştürebiliriz ve bunun tersinide yapabiliriz. Yukarıdaki Önerme deki koşulları sağlayan V vektör alanına, θ , 1-formuna metrik olarak eşdeğerdir denir.

Şimdi yarı-Riemann geometrisinin en temel teoremlerinden birini verelim.

Teorem 1.7. Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde tek türlü belirli öyle bir ∇ koneksiyonu vardır ki $\forall X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(\nabla 4) [V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$$

$$(\nabla 5) X \langle V, W \rangle = \langle \nabla_X V, W \rangle + \langle V, \nabla_X W \rangle$$

koşullarını sağlar. ∇ ye M nin Levi-Civita koneksiyonu denir ve aşağıdaki Koszul formülünü gerçekler.

$$2\langle \nabla_v W, X \rangle = V\langle W, X \rangle + W\langle X, V \rangle - X\langle V, W \rangle$$

$$- \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle.$$

İspat: Farzedelim ki M üzerindeki ∇ koneksiyonu $(\nabla 4)$ ve $(\nabla 5)$ i gerçeklesin. $(\nabla 5)$ i kullanırsak Koszul formülünün sağ yanındaki ilk üç terim şu hale gelir.

$\langle \nabla_v W, X \rangle + \langle W, \nabla_v W \rangle + \langle \nabla_w X, V \rangle + \langle X, \nabla_w V \rangle - \langle \nabla_x V, W \rangle - \langle V, \nabla_x W \rangle$ Bunu (I) ile gösterelim. $(\nabla 4)$ ü kullanırsak son üç terim şu hale gelir;

$$- \langle V, \nabla_w X \rangle + \langle V, \nabla_x W \rangle - \langle X, \nabla_w V \rangle$$

Bunu da (II) ile gösterelim (I) ile (II) yi toplayıp gerekli sadeleştirmeleri yaparsak $2\langle \nabla_v W, X \rangle$ kalır. Böylece ∇ , Koszul formülünü gerçeklemiş olur. Önerme 1.6 nın i) şikkından ∇ nin tekliği de ortaya çıkar.

Şimdi ∇ koneksiyonunun varlığını gösterelim. Koszul formülünün sağ tarafını $F(V, W, X)$ ile tanımlayalım. Sabit $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanları için doğrudan basit hesap gösterir ki $X \rightarrow F(V, W, X)$ fonksiyonu $\mathfrak{Z}(M)$ -lineerdir. Dolayısıyla bu fonksiyon bir 1-form dur. Önerme 1.5 sayesinde, tektürlü belirli öyle bir vektör alanı vardır ki, onu $\nabla_v W$ ile gösterirsek bütün X vektör alanları için $2\langle \nabla_v W, X \rangle = F(V, W, X)$ olur. Şimdi bu ∇ koneksiyonunun $(\nabla 1)$ den $(\nabla 5)$ 'e kadar bütün özellikleri gerçeklediğini gösterelim. Örneğin $(\nabla 4)$ 'ü açık olarak gösterelim. $2\langle \nabla_v W - \nabla_w V, X \rangle = F(V, W, X) - F(W, V, X)$ ifadesinin sağ tarafı $\langle X, [V, W] \rangle - \langle X, [W, V] \rangle = 2 \langle [V, W], X \rangle$ şeklindedir. Dolayısıyla Önerme 1.5 den istenen çıkar. Şimdi $(\nabla 3)$ ü gösterelim. Keyfi bir X vektör alanı için

$$\langle 2 \nabla_v (fW), X \rangle = V\langle fW, X \rangle + fW\langle X, V \rangle - X\langle V, fW \rangle$$

$$- \langle V, [fW, X] \rangle + \langle fW, [X, V] \rangle + \langle X, [V, fW] \rangle$$

burada $[fW, X] = -XfW + f[W, X]$ olduğunu kullanırsak eşitliğin sağ tarafı

$$Vf\langle W, X \rangle + Vf\langle X, W \rangle + Xf\langle V, W \rangle$$

$$-Wf\langle V, W \rangle + f(V, W, X) = 2\langle (Vf)W + f\nabla_V W, X \rangle \text{ şeklinde bulunur.}$$

Böylece Önerme 1.6 den $(\nabla 3)$ sağlanır. Diğerlerinin gerçekleşmesi ise daha açıktır.

Şimdi yarı-Riemann manifoldlarında ∇ Levi-Civita koneksiyonuyla ilgili ileride sıkça karşılaşacağımız iki tanım verelim.

Tanım 1.8. V , bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. M üzerinde tek türlü belirli öyle bir ∇_V kovaryant türevi (Levi-Civita) vardır ki

$$f \in \mathfrak{F}(M) \text{ için } \nabla_V f = Vf$$

ve $W \in \mathfrak{X}(M)$ için $\nabla_V W$ Levi-Civita kovaryant türevini elde ederiz.

Eğer $A \in I_s^r(M)$ ise (r, s) tipinden $\nabla_V A$ tensör alanı V 'ye göre $f(M)$ - lineerdir.

Tanım 1.9. Bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde (r, s) tipindeki A tensörünün kovaryant diferansiyeli $(r, s+1)$ tipindeki $\tilde{\nabla} A$ tensördür.

Şöyleki,

$(\tilde{\nabla} A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s, V) = (\nabla_V A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)$, burada $V, X_i \in \mathfrak{X}(M)$ ve $\theta^j \in \mathfrak{X}^*(M)$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r$. Özel olarak $r=s=0$ durumunda A tensörü bir $f \in \mathfrak{F}(M)$ fonksiyonu olacağından bu durumda bunun diferansiyeli $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ dir. Gerçekten; $\forall V \in \mathfrak{X}(M)$, $(\tilde{\nabla} f)(V) = \nabla_V f = Vf = df(V)$ dir. Bir A tensör alanının her $V \in \mathfrak{X}(M)$ için $\nabla_V A$ kovaryant diferansiyeli özdeş olarak sıfır ise A tensör alanına paralel'dir denir. Örneğin bir M yarı-Riemann manifoldu üzerindeki $g(V, W) = \langle V, W \rangle$ metrik tensörünün paralel olması $(\nabla 5)$ e eşdeğerdir. Gerçekten, $X \in \mathfrak{X}(M)$ keyfi vektör alanı için

$$(\nabla_X g)(V, W) = (\nabla g)(V, W, X) + g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W)$$

olduğundan istenen kolayca çıkar.

III. Bölüm 2

YARI-RIEMANN ALTMANİFOLDLAR

Öncelikle genel anlamda altmanifold tanımını yapalım.

Tanım 2.1. Eğer bir P manifoldu aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa M manifoldunun bir altmanifoldu dur denir:

(i) P, M nin topolojik altuzayı,

(ii) $j: P \subset M$ içine dönüşümü smooth ve her $p \in P$ noktasında dj diferansiyel dönüşümü bire-bir'dir.

Eğer $M, \bar{M}$ nin Tanım 2.1 deki gibi bir yarı-Riemann altmanifoldu ise $v, w \in T_p(M) \subset T_p(\bar{M})$ vektörleri için $\langle v, w \rangle$ notasyonu bilinen anlamdadır. M ve $\bar{M}$ nin Levi-Civita koneksiyonlarının karşılaştırılması sonucunda ortaya B ile göstereceğimiz bir tensor ortaya çıkar. Bu ise $\bar{M}$ de M nin şeklini belirlemeye yarar. M deki koneksiyonu ∇ , $\bar{M}$ deki koneksiyonu ise $\bar{\nabla}$ ile göstereceğiz. Öte yandan Y, M üstünde bir eğri üzerindeki vektör alanı ise $\dot{Y} = \bar{\nabla} Y / ds$ ve $Y' = \nabla Y / ds$. (Eğer eğri M de ise $\dot{\alpha} = \alpha' = d\alpha / ds$). Bundan böyle $M, \bar{M}$ nin yarı-Riemann altmanifoldudur demek yerine daha kısa olarak $M \subset \bar{M}$ notasyonunu kullanacağız.

TANJANTLAR ve NORMALER

Tanım 2.2. Bir smooth $\phi: P \rightarrow M$ dönüşümü üzerindeki bir Z vektör alanı şu şekilde tanımlanan dönüşümdür; $Z: P \rightarrow TM$ şöyleki $\pi \circ Z = \phi$, burada π, TM den M ye izdüşümdür.

$j: M \subset \bar{M}$ içine dönüşümü üzerindeki her bir X vektör alanı yukarıdaki tanımdaki gibi ise M ye $\bar{M}$ nin bir smooth altmanifoldu denir. Böylece X, M nin her p noktasına $\bar{M}$ nin p noktasındaki bir X_p tanjant vektörünü karşılık getirir. Eğer $f \in \mathfrak{F}(\bar{M})$ için $Xf \in \mathfrak{F}(M)$ oluyorsa X smooth'dur diyoruz. Bu şekilde tanımlı vektör alanlarının

kümesini $\bar{\mathfrak{N}}(M)$ ile gösterirsek, $\bar{\mathfrak{N}}(M)$, $\mathfrak{I}(M)$ üzerinde modül yapısına sahiptir.

Tanımdan kolayca şunu çıkarabiliriz; herhangi $Y \in \bar{\mathfrak{N}}(\bar{M})$ için $Y|_M \in \bar{\mathfrak{N}}(M)$ dir [2].

Şimdi $M \subset \bar{M}$ olsun. Her $p \in M$ için $T_p(M)$, $T_p(\bar{M})$ nin bir non-dejenere altuzayıdır. Dolayısıyla lineer cebir bilgilerimize göre

$$T_p(\bar{M}) = T_p(M) + T_p(M)^\perp \text{ yazabiliriz.}$$

ve üstelik $T_p(M)^\perp$ de nondejenere dir. $T_p(M)^\perp$ nin boyutu k , M nin $\bar{M}$ deki ko-boyutu adını alır. Dolayısıyla M nin boyutu n ise $\bar{M}$ nin boyutu $n+k$ olmak zorundadır. Yani

$$\text{Boy } T_p(\bar{M}) = \text{Boy } T_p(M) + \text{Boy } T_p(M)^\perp$$

$$\text{Ayrıca, } \text{ind } T_p(\bar{M}) = \text{ind } T_p(M) + \text{ind } T_p(M)^\perp$$

yazabiliriz.

$T_p(M)^\perp$ deki vektörlere M ye normal vektörler diyoruz. $T_p(M)$ deki vektörlere ise M ye tanjant vektörler diyoruz. Yukarıdaki toplamlardan faydalanarak $p \in M$ olmak üzere her $x \in T_p(\bar{M})$ vektörü için aşağıdaki tek türlü yazılışı yapabiliriz.

$$x = \tan(x) + \text{nor}(x)$$

$$\text{Burada } \tan(x) \in T_p(M) \text{ ve } \text{nor}(x) \in T_p(M)^\perp$$

Ortogonal izdüşümün doğal sonucu olarak

$$\tan: T_p(\bar{M}) \rightarrow T_p(M) \text{ ve } \text{nor}: T_p(\bar{M}) \rightarrow T_p(M)^\perp$$

izdüşümlerinin $\mathbb{R}$ -lineer olduğunu söyleyebiliriz.

Bir $Z \in \bar{\mathfrak{N}}(M)$ vektör alanı, eğer her Z_p vektörü M ye normal ise M ye normal dir.

Bu tür vektör alanlarından oluşan kümeyi $\mathfrak{N}(M)^\perp$ ile gösterirsek $\mathfrak{N}(M)^\perp$, $\bar{\mathfrak{N}}(M)$ nin bir altmodülü olur.

Bir $X \in \bar{\mathfrak{N}}(M)$ vektör alanına M nin her noktasında $\tan$ ve nor operatörlerini uygularsak $\tan X \in \mathfrak{N}(M)$ ve $\text{nor} X \in \mathfrak{N}(M)^\perp$ vektör alanlarını elde ederiz. Ortogonal izdüşümün sonuçlarından

$$\tan: \bar{\mathfrak{N}}(M) \rightarrow \mathfrak{N}(M) \text{ ve } \text{nor}: \bar{\mathfrak{N}}(M) \rightarrow \mathfrak{N}(M)^\perp$$

izdüşümleri $\mathfrak{Z}(M)$ -lineerdir. Ayrıca $\bar{\mathfrak{N}}(M) = \mathfrak{N}(M) + \mathfrak{N}(M)^\perp$ direkt toplamından $X = \tan X + \text{nor} X$ özdeşliğini yazabiliriz [3].

İNDİRGENMİŞ KONEKSİYON

Eğer M , $\bar{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ise, $\bar{M}$ nin $\bar{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyonundan faydalanarak M üzerine indirgenmiş bir koneksiyonu tanımlamaya çalışalım. $\mathfrak{N}(M) \times \bar{\mathfrak{N}}(M) \rightarrow \bar{\mathfrak{N}}(M)$ fonksiyonunu düşünelim. Eğer $V \in \mathfrak{N}(M)$ ve $X \in \bar{\mathfrak{N}}(M)$ ise, bu durumda, V ve X , $\mathfrak{N}(\bar{M})$ de olmadıklarından $\bar{\nabla}_V X$ in nerede olduğunu bilemeyiz. Bu eksikliği gidermek için aşağıdaki önermeyi kullanalım.

Önerme 2.3. $\phi: P \rightarrow M$ bir immersiyon olsun. Eğer $Z \in \mathfrak{N}(\phi)$ ise öyle bir $X \in \mathfrak{N}(M)$ vardır ki $p \in P$ nin bir komşuluğunda $Z = X_\phi$ olur. Burada X 'e Z nin smooth lokal genişlemesi denir.

Şimdi her $p \in M$ için $\bar{V}$ ve $\bar{X}$, p nin $\bar{M}$ deki bir U komşuluğunda V nin ve X in smooth lokal genişlemesi olsun. Bu durumda $U \cap M$ üzerinde $\bar{\nabla}_V X$ vektör alanını $\bar{\nabla}_V \bar{X}$ nin $U \cap M$ ye kısıtlanmış olarak tanımlayabiliriz.

Önerme 2.4. $\bar{\nabla}_V X$, M üzerinde iyi tanımlı smooth $\bar{M}$ vektör alanıdır.

İspat: Bir smooth vektör alanının kısıtlanmış da smooth olduğundan $\bar{\nabla}_V \bar{X}|_{U \cap M}$ de smooth olur. Böylece bu işlemin genişlemelerin seçiminden bağımsız olduğunu göstermek yeterlidir. Bir U koordinat sistemi üzerinde $\bar{X} = \sum f^i \partial_i$ yazalım. O zaman $\bar{\nabla}_V \bar{X} = \sum \bar{V} f^i \partial_i + \sum f^i \bar{\nabla}_V \partial_i$ olur. Ancak $q \in U \cap M$ için $(\bar{V} f^i)(q) = V_q f^i = V_q(f|_{U \cap M})$ ve $\bar{\nabla}_V(\partial_i)|_q = \bar{\nabla}_{V_q}(\partial_i)$ olduğundan $\bar{\nabla}_V \bar{X}$ in kısıtlanmış sadece V ve X 'e bağlıdır. Açıktır ki $\bar{\nabla}: \mathfrak{N}(M) \times \bar{\mathfrak{N}}(M) \rightarrow \bar{\mathfrak{N}}(M)$ indirgenmiş koneksiyonu $\bar{M}$ nin

Levi-Civita koneksiyonuyla çok yakından bağlantılıdır. Biz her iki koneksiyon için de aynı notasyonu kullanacağız. Böylece aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 2.5. $\bar{\nabla}$, $M \subset \bar{M}$ nin indirgenmiş koneksiyonu olsun. Eğer $V, W \in \mathfrak{N}(M)$ ve $X, Y \in \bar{\mathfrak{N}}(M)$ ise, o zaman

Sonuç 2.5. $\bar{\nabla}$, $M \subset \bar{M}$ nin indirgenmiş koneksiyonu olsun. Eğer $V, W \in \mathfrak{N}(M)$ ve $X, Y \in \bar{\mathfrak{N}}(M)$ ise, o zaman

- (1) $\bar{\nabla}_V X$, V ye göre $\mathfrak{I}(M)$ - lineerdir.
- (2) $\bar{\nabla}_V X$, X e göre $\mathbb{R}$ -lineerdir.
- (3) $f \in \mathfrak{I}(M)$ için $\bar{\nabla}_V (fX) = VfX + f\bar{\nabla}_V X$
- (4) $[V, W] = \bar{\nabla}_V W - \bar{\nabla}_W V$
- (5) $V\langle X, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_V X, Y \rangle + \langle X, \bar{\nabla}_V Y \rangle$

Burada şu basit gerçeği vurgulamakta yarar var. V, W vektör alanları M ye tanjant olmasına rağmen $\bar{\nabla}_V W$ kovaryant türevinin M ye tanjant olması gerekmez. Dolayısıyla ortaya $\tan \bar{\nabla}_V W$ ve $\text{nor } \bar{\nabla}_V W$ vektör alanlarının ne olduğu sorusu çıkıyor.

Önerme 2.6. $M \subset \bar{M}$ için, eğer $V, W \in \mathfrak{N}(M)$ ise bu durumda $\nabla_V W = \tan \bar{\nabla}_V W$ dir. Burada ∇ , M nin Levi-Civita koneksiyonudur.

İspat: $X \in \mathfrak{N}(M)$ keyfi bir vektör alanı olsun X, V, W vektör alanlarının lokal genişlemelerini Koszul denkleminde yazarsak.

$$2 \langle \bar{\nabla}_V \bar{W}, \bar{X} \rangle = F(\bar{V}, \bar{W}, \bar{X})$$

elde ederiz.

$$F(\bar{V}, \bar{W}, \bar{X})|_M = F(V, W, X) \text{ bulunur. Buradan } \langle \bar{\nabla}_V W, X \rangle = \langle \nabla_V W, X \rangle \text{ olur.}$$

X, M ye tanjant olduğundan $\bar{\nabla}_V W$ nin yerine $\tan \bar{\nabla}_V W$ yazabiliriz. Böylece metrik tensörün nondejenereliğinden $\nabla_V W = \tan \bar{\nabla}_V W$ sonucu çıkar [2].

Önerme 2.7. $B: \mathfrak{N}(M) \times \mathfrak{N}(M) \rightarrow \mathfrak{N}(M)^\perp$ olmak üzere $B(V, W) = \text{nor } \bar{\nabla}_V W$ şeklinde tanımlı fonksiyon $\mathfrak{I}(M)$ - bilinear ve simetriktir.

İspat: $\bar{\nabla}_V W$, V ye göre $\mathfrak{I}(M)$ -lineer ve nor operatörü $\mathfrak{I}(M)$ -lineer olduğundan B fonksiyonu V ye göre $\mathfrak{I}(M)$ - lineerdir. $f \in \mathfrak{I}(M)$ olmak üzere

$\bar{\nabla}_V(fW) = (Vf)W + f\bar{\nabla}_V W$ nor $\bar{\nabla}_V(fW) = \text{nor}(Vf)W + \text{nor}f\bar{\nabla}_V W$. Burada W , M ye tanjant ve nor operatörü $\mathfrak{Z}(M)$ lineer olduğundan

$$B(V, fW) = \text{nor}\bar{\nabla}_V(fW) = f \text{nor}\bar{\nabla}_V W = f B(V, W).$$

B , W ye göre de $\mathfrak{Z}(M)$ -lineerdir. Öte yandan

$B(V, W) - B(W, V) = \text{nor}(\bar{\nabla}_V W - \bar{\nabla}_W V) = \text{nor}[V, W] = 0$. Böylece istenilen iddialar ispatlanmış olur.

Biz bu B fonksiyonuna M nin şekil tensörü yada ikinci temel formu diyoruz.

Son iki önermeyi özetlersek Gauss denklemi diyeceğimiz bir özdeşliği elde ederiz.

$V, W \in \mathfrak{N}(M)$ olmak üzere $\bar{\nabla}_V W = \nabla_V W + B(V, W)$. Burada $\nabla_V W$, M ye tanjant $B(V, W)$ ise M ye normaldir [4].

Tanım 2.8. $\bar{M}$ nin bir M yarı-Riemann altmanifoldunun şekil tensörü $B = 0$ ise M ye $\bar{M}$ nin bir tümel geodezik altmanifoldu denir.

Tanım 2.9. $M \subset \bar{M}$ ve $p \in M$ olsun. Bütün $v, w \in T_p(M)$ ler için $B(v, w) = \langle v, w \rangle z$ olacak şekilde bir $z \in T_p(M)^\perp$ normal vektörü var ise p noktasına M nin bir umbilik noktası denir. Bu durumda z ye M nin p noktasındaki normal eğrilik vektörü denir.

Eğer bir $M \subset \bar{M}$ yarı-Riemann altmanifoldunun her noktası umbilik ise M ye tümel umbilik denir. Bu durumda M üzerinde $B(V, W) = \langle V, W \rangle Z$ olacak şekilde Z smooth normal eğrilik vektör alanı vardır. Böylece bir tümel umbilik altmanifoldunda Z normal eğrilik vektör alanı özdeş olarak sıfır ise o altmanifold tümel geodezik altmanifold olur.

YARI-RIEMANN HİPERYÜZEYLER

$\bar{M}$ nin bir M yarı-Riemann hiperyüzeyi sadece karşıt boyutu 1 olan yarı-Riemann altmanifoldudur. Böylece $T_p(M)^\perp$ normal uzayının indeksi ya 0 yada 1 dir. Şimdi bununla ilgili tanımı verelim.

Tanım 2.10. $\bar{M}$ nin bir M yarı-Riemann hiperyüzeyinin ε işareti, eğer M nin karşıt indeksi 0 ise $+1$ dir. Böylece her $z \neq 0$ normal vektörü için $\langle z, z \rangle > 0$ olur. Eğer M nin karşıt indeksi 1 ise ε işareti -1 dir, böylece her $z \neq 0$ normal vektörü için $\langle z, z \rangle < 0$ olur.

Açık olarak eğer $\varepsilon=1$ ise $\text{ind } M = \text{ind } \bar{M}$ ancak $\varepsilon=-1$ ise $\text{ind } M = \text{ind } \bar{M} - 1$ dir. Riemann manifoldlarda hiperyüzeylerin işareti daima $+1$ dir ancak, metriğin belirsiz olması durumunda hiperyüzeylerin işareti $+1$ veya -1 olabilir.

Önerme 2.11. $c, f \in \mathfrak{Z}(\bar{M})$ nin bir değeri olsun. Bu durumda $M = f^{-1}(c)$ kümesinin $\bar{M}$ nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter koşul M üzerinde $\langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle > 0$ yada < 0 olmasıdır. Bu durumda M nin işareti $\langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle$ in işaretidir ve $U = \text{grad} f / \|\text{grad} f\|$, M üzerinde bir normal vektör alanıdır.

İspat: $\text{grad} f, df$ e metrik olarak eşdeğer olduğundan buradan kolayca M nin hiperyüzey olduğu çıkar. Çünkü $c, f \in \mathfrak{Z}(\bar{M})$ nin bir değeri olduğundan $f(p)=c$ koşulunu sağlayan her $p \in M$ için $df_p \neq 0$ dir dolayısıyla $\langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle \neq 0$ dir ve $M = f^{-1}(c)$ bir hiperyüzey olur. Öte yandan herhangi bir $v \in T_p(M)$ için

$\langle \text{grad} f, v \rangle = v(f) = v(f|_M) = 0$ dir. Çünkü f, M üzerinde sabittir ve böylece $\text{grad} f$ M ye normal olmak zorundadır.

Örneğin $\mathbb{R}^{n+1}$ de $f = \sum (u^i)^2$ olarak alırsak $f^{-1}(r^2)$, bildiğimiz standart $S^n(r)$ küresidir.

Her $M \subset \bar{M}$ yarı-Riemann hiperyüzeyinin bu şekilde elde edilmesi gerekmiyor, çünkü M nin tamamında tanımlı smooth birim normal vektör alanının var olması garanti değildir. Örnek olarak $\mathbb{R}^3$ te Möbius bandını verebiliriz [9].

Tanım 2.12. $U, M \subset \overline{M}$ yarı-Riemann hiperyüzeyinin bir birim normal vektör alanı olsun. M üzerinde bütün $V, W \in \mathfrak{K}(M)$ vektör alanları için

$$\langle S(V), W \rangle = \langle B(V, W), U \rangle$$

koşulunu sağlayan (1,1) tipindeki S tensör alanına M nin U tarafından türetilen şekil operatorü denir.

Önerme 2.13. Eğer S, U tarafından türetilen şekil operatorü ise, bu durumda $S(v) = -\overline{\nabla}_v U$ dir ve her $p \in M$ için $T_p(M)$ üzerinde S lineer operatörü self-adjointtir.

İspat: $\langle U, U \rangle$ sabit olduğundan $\langle \overline{\nabla}_v U, U \rangle = 0$ olur. Böylece $\overline{\nabla}_v U, M$ ye tanjant olur. $W \in \mathfrak{K}(M)$ olsun. Bu durumda;

$$\langle S(V), W \rangle = \langle B(V, W), U \rangle = \langle \overline{\nabla}_v W, U \rangle = - \langle \overline{\nabla}_v U, W \rangle$$

Buradan $S(V) = -\overline{\nabla}_v U$ çıkar. B nin simetrik olması nedeniyle S nin self-adjointliği kolayca çıkar [2],[4].

HİPERKUADRIKLER

$q(v) = \langle v, v \rangle$ şeklindeki $q \in \mathfrak{I}(\mathbb{R}_v^{n+1})$ fonksiyonunu ele alalım. q yu doğal koordinatlara göre açarsak

$$q = \sum_{i=1}^n \epsilon_i (u^i)^2 = - \sum_{i=1}^v (u^i)^2 + \sum_{j=v+1}^{n+1} (u^j)^2$$

Eğer $P, \mathbb{R}_v^{n+1}$ nin bir yer vektörü ise o zaman $q = \langle P, P \rangle$ yazabiliriz. Sonuç olarak $\text{grad} q = 2P$ olur.

Çünkü her V için

$$\langle \text{grad} q, V \rangle = Vq = V \langle P, P \rangle = 2 \langle \overline{\nabla}_v P, P \rangle = 2 \langle P, V \rangle$$

Burada, $Vq = V[q]$, q nün V yönüne göre türevidir.

Böylece $\langle \text{grad} q, \text{grad} q \rangle = 4q$. Önerme 2.11 e göre $r > 0$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olduğundan $Q = q^{-1}(\varepsilon r^2)$ kümesi $\mathbb{R}_v^{n+1}$ nin bir yarı-Riemann hiperyüzeyidir. Q nün birim normali $U = P/r$ ve işareti ε dur. Bu şekilde tanımlanmış hiperyüzeylere $\mathbb{R}_v^{n+1}$ nin hiperkuadrikleri denir. Özel olarak $\Lambda = q^{-1}(0) - \{0\}$ kümesine $\mathbb{R}_v^{n+1}$ nin nul konisi diyoruz.

Tanım: 2.14. $n \geq 2$ ve $0 \leq v \leq n$ olsun. Bu durumda

(1) $\mathbb{R}_v^{n+1}$ nin $r > 0$ yarıçaplı sözde küresi (pseudo-sphere) boyutu n ve indeksi v olan bir hiperkuadriktir, şöyle ki

$$S_v^n(r) = q^{-1}(r^2) = \{p \in \mathbb{R}_{v+1}^{n+1}, \langle p, p \rangle = r^2\}$$

(2) $\mathbb{R}_v^{n+1}$ nin $r > 0$ yarıçaplı sözdehiperbolik (pseudo hyperbolic space) boyutu n ve indeksi v olan bir hiperkuadriktir, şöyle ki

$$H_v^n(r) = q^{-1}(-r^2) = \{p \in \mathbb{R}_{v+1}^{n+1} : \langle p, p \rangle = -r^2\}$$

Sözdekürelerin işareti $+1$ olduğundan indeksi $\mathbb{R}_v^{n+1}$ nin indeksi ile aynıdır, ancak sözdehiperbolik uzayların işareti -1 olduğundan $\mathbb{R}_v^{n+1}$ de indeksi $v-1$ olmak zorundadır. $v=0$ için $S_0^n(r)$, $\mathbb{R}_0^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ in standart küresidir.

Şimdi sözdeküreler ile sözdehiperbolik uzayların birbirleriyle ilişkisini ortaya çıkaran önermeyi verelim.

Önerme 2.15. $\sigma(p_1, \dots, p_{n+1}) = (p_{v+1}, \dots, p_{n+1}, p_1, \dots, p_v)$ şeklinde verilen $\sigma : \mathbb{R}_v^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{n-v+1}^{n+1}$ dönüşümü bir ters-izometridir. Şöyle ki σ , her $S_v^n(r)$ sözdeküresini $H_{n-v}^n(r)$ sözdehiperbolik uzayı üzerine taşır ve ters dönüşümde $H_{n-v}^n(r)$ yi $S_v^n(r)$ ye taşır.

İspat: σ bir lineer izomorfizm olduğundan ve $\langle \sigma(p), \sigma(p) \rangle = -\sum_{j=1}^{n+1} (p_j)^2 + \sum_{i=1}^v (p_i)^2 = -\langle p, p \rangle$ olduğundan σ nin bir izometri olduğu ve $S_v^n(r)$ yi $H_{n-v}^n(r)$ ye taşıdığı kolayca görülür [2].

NORMAL KONEKSİYON

$M \subset \bar{M}$ nin normal koneksiyonu $V \in \mathfrak{N}(M)$, $Z \in \mathfrak{N}(M)^\perp$ için $\nabla_V^\perp Z = \text{nor } \bar{\nabla}_V Z$ şeklinde tanımlı $\nabla^\perp : \mathfrak{N}(M) \times \mathfrak{N}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{N}(M)^\perp$ fonksiyonudur.

$\nabla_V^\perp Z$ ye Z nin V ye göre normal yöndeki kovaryant türevi denir. $\bar{\nabla}$ koneksiyonun özelliklerinden faydalanırsak aşağıdaki üç özelliği kolayca yazabiliriz.

- (1) $\nabla_V^\perp Z$, V -ye göre $\mathfrak{I}(M)$ -lineer ve Z ye göre $\mathbb{R}$ -lineerdir.
- (2) $\nabla_V^\perp (fZ) = f\nabla_V^\perp Z + VfZ$, burada $f \in \mathfrak{I}(M)$.
- (3) $V\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_V^\perp Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_V^\perp Z \rangle$, burada $Y, Z \in \mathfrak{N}(M)^\perp$

Tensörlerle ilgili türev tanımı ve normal koneksiyonu kullanarak $M \subset \bar{M}$ nin B şekil tensörü için $(\nabla_V B)(X, Y) = \nabla_V^\perp (B(X, Y)) - B(\nabla_V X, Y) - B(X, \nabla_V Y)$ eşitliğini yazabiliriz. Burada $V, X, Y \in \mathfrak{N}(M)$.

B nin simetrikliği ve $\mathfrak{I}(M)$ -bilineerliğinden $\nabla_V B : \mathfrak{N}(M) \times \mathfrak{N}(M) \rightarrow \mathfrak{N}(M)^\perp$ fonksiyonun da simetrik ve $\mathfrak{I}(M)$ -bilineer olduğunu görebiliriz.

Bir $Z \in \mathfrak{N}(M)^\perp$ vektör alanına, $\forall V \in \mathfrak{N}(M)$, $\nabla_V^\perp Z = 0$ koşulunu sağlıyorsa normal yönde paraleldir denir.

Şimdi $\bar{\nabla}$ ile $\nabla^\perp$ koneksiyonunun ilişkisini açıklamamıza yarayacak $\tilde{B}$ tensörünün tanımını verelim. $M \subset \bar{M}$ olsun $V \in \mathfrak{N}(M)$ ve $Z \in \mathfrak{N}(M)^\perp$ olmak üzere

$$\tilde{B}(V, Z) = \text{tan } \bar{\nabla}_V Z \text{ şeklinde tanımlanır.}$$

Böylece daha önceden görmüş olduğumuz tanımları birleştirirsek;

(1) $\bar{\nabla}_V Z = \tilde{B}(V, Z) + \nabla_V^\perp Z$ yi elde ederiz.

$\tilde{B} : \mathfrak{N}(M) \times \mathfrak{N}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{N}(M)$ fonksiyonunun $\mathfrak{I}(M)$ -bilineer olduğu açıktır. Buradan her $p \in M$ noktasında $\tilde{B}$ bize $T_p(M)$ ye bir $\mathbb{R}$ -bilineer dönüşümü verir.

$$(2) \langle \tilde{B}(V, Z), W \rangle = -\langle B(V, W), Z \rangle$$

Burada $V, W \in \mathfrak{N}(M)$ ve $Z \in \mathfrak{N}(M)^\perp$. Bunu şöyle ispat edebiliriz.

$$\langle Z, W \rangle = 0 \Rightarrow \langle \bar{\nabla}_V Z, W \rangle = -\langle Z, \bar{\nabla}_V W \rangle \text{ olduğundan}$$

$$\langle \tilde{B}(V, Z), W \rangle = \langle \bar{\nabla}_V Z, W \rangle = -\langle \bar{\nabla}_V W, Z \rangle = -\langle B(V, W), Z \rangle$$

(3) $Z \in \mathfrak{N}(M)^\perp$ için $S_Z V = -\tilde{B}(V, Z)$ dersek (2) den $\langle S_Z V, W \rangle = \langle B(V, W), Z \rangle$ yazabiliriz [2],[5].

IV. Bölüm 3

EĞRİLER

Bir M manifoldunda $\alpha:I \rightarrow M$ şeklindeki smooth dönüşüme bir eğri denir. Burada I , $\mathbb{R}$ nin açık aralığı olacağı gibi, yarı sonsuz açık aralık yada $\mathbb{R}$ nin kendisi de olabilir. Özdeşlik dönüşümü sayesinde I , $\mathbb{R}^1$ in bir açık altmanifoldudur. ($\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$)

Tanım 3.1. $\alpha:I \rightarrow M$ bir eğri olsun. α nin $t \in I$ noktasındaki hız vektörü

$$\alpha'(t) = d\alpha\left(\frac{d}{du}\Big|_t\right) \in T_{\alpha(t)}(M).$$

Şimdi eğrilerle ilgili basit özellikleri listeleyelim.

(1) Yöne göre türev: $f \in \mathfrak{F}(M)$ olmak üzere

$$\alpha'(t)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{du}(t).$$

Böylece eğer α , $\alpha'(0)=v$ olacak şekilde bir eğri ise bu durumda $v(f)=(d(f \circ \alpha)/dt)(0)$ dir.

(2) Koordinat açılımı: $x^1, \dots, x^n$, M nin $\alpha(t)$ noktasındaki bir koordinat sistemi olsun. Baz teoreminden;

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d(x^i \circ \alpha)}{du}(t) \partial_i \Big|_{\alpha(t)}$$

(3) Reparametrizasyon: Eğer $\alpha:I \rightarrow M$ bir eğri ve $h:J \rightarrow I$, J aralığında smooth dönüşüm olsun, bu durumda $\beta=\alpha(h):J \rightarrow M$ eğrisine α nın yeniden parametrelenmesi denir ve $\forall s \in J$, $\beta'(s)=(dh/du) \alpha'(h(s))$

(4) Bir dönüşümün etkisi: Eğer $\alpha:I \rightarrow M$, M de bir eğri ise, bu durumda $\phi:M \rightarrow N$ dönüşümü α eğrisini $\phi \circ \alpha:I \rightarrow N$ eğrisine taşır. ϕ nin diferensiyel dönüşümü hızları korur, yani;

$$d\phi(\alpha'(t))=(\phi\circ\alpha)'(t), \forall t\in I.$$

$\forall t\in I, \alpha'(t)\neq 0$ ise α ya regüler eğri denir.

Bir eğriyi daima $t\rightarrow\alpha(t+c), (c\in\mathbb{R})$ şeklinde yeniden parametreleyebileceğimiz için bir eğrinin tanım bölgesinin daima sıfırı içerdiğini kabul edebiliriz [2].

PARALEL ÖTELEME

Bir dönüşüm üzerindeki vektör alanının en basit durumu bir $\alpha:I\rightarrow M$ eğrisi üzerindeki Z vektör alanıdır. Z , her $t\in I$ noktasını smooth bir şekilde M nin $\alpha(t)$ noktasındaki tanjant vektörüne karşılık getirir. Örneğin; α üzerindeki α' hız vektörü bir vektör alanıdır. Bu α' vektör alanı bir $V\in\mathfrak{N}(M)$ vektör alanının α eğrisine kısıtlanmış halidir. Yani $\alpha'=V_\alpha$ dır. Bu tür smooth vektör alanlarının kümesini $\mathfrak{N}(\alpha)$ ile gösterirsek $\mathfrak{N}(\alpha), \mathfrak{I}(I)$ üzerinde bir modül yapısına sahiptir.

Önerme 3.2. $\alpha:I\rightarrow M$, bir M yarı-Riemann manifoldu üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda $\mathfrak{N}(\alpha)$ dan $\mathfrak{N}(\alpha)$ ya tektürlü belirli $Z\rightarrow Z'=\nabla Z/dt$ şeklinde öyle bir fonksiyon vardır ki

- (1) $(aZ_1+bZ_2)'=aZ_1'+bZ_2' \quad (a,b\in\mathbb{R})$
- (2) $(hZ)'=(dh/dt)Z+hZ', \quad h\in\mathfrak{I}(I)$
- (3) $(V_\alpha)'(t)=\nabla_{\alpha'(t)}(V) \quad t\in I, V\in\mathfrak{N}(M)$
- (4) $d/dt\langle Z_1, Z_2\rangle =\langle Z_1', Z_2\rangle +\langle Z_1, Z_2'\rangle .$

koşullarını gerçekler. Sözü edilen bu fonksiyona indirgenmiş kovaryant türev diyoruz.

İspat: Teklik: Farzedelim ki bir indirgenmiş koneksiyon yukarıdaki ilk üç özelliği gerçeklesin. Biz α eğrisinin bir tek $x^1, \dots, x^n$ koordinat sisteminin tanım bölgesinde bulunduğunu farzedebiliriz. Baz teoremine göre, eğer $Z\in\mathfrak{N}(\alpha)$ ise, o zaman $\alpha(t)$ noktasında

$$Z(t)=\sum Z(t)x^i\partial_i=\sum(Zx^i)(t)\partial_i$$

şeklindedir.

$Z^i: I \rightarrow \mathbb{R}$ bileşen fonksiyonunu Z^i ile gösterelim. (1) ve (2) özelliklerinden

$$Z' = \sum_{i=1}^n \frac{dZ^i}{dt} \partial_i|_{\alpha} + \sum_{i=1}^n Z^i (\partial_i|_{\alpha})' \text{ olur. Burada (3) ü kullanırsak } (\partial_i|_{\alpha})' = \nabla_{\alpha'}(\partial_i)$$

olduğundan

$$Z' = \sum_{i=1}^n \frac{dZ^i}{dt} \partial_i + \sum_{i=1}^n Z^i \nabla_{\alpha'}(\partial_i)$$

yazabiliriz.

Böylece Z' tamamen ∇ Levi-Civita koneksiyonu tarafından belirleniyor. O halde bu koneksiyon tek olmak zorundadır.

Varlık: $\alpha(J)$ bir koordinat komşuluğunda tanımlansın. Burada J, I nin herhangi bir altaralığıdır. Z' bu aralıkta yukarıdaki formüldeki gibi tanımlanırsa yukarıdaki dört özellik gerçekleşir.

Özel olarak $Z = \alpha'$ olması durumunda $Z' = \alpha''$ ye α nin ivmesi denir.

Bir Z vektör alanı için $Z' = \nabla_{\alpha'} Z$ şeklinde yazabiliriz ve buradan $\alpha'' = \nabla_{\alpha'}(\alpha')$ çıkar.

Yukardaki koordinat formülünün içine Christoffel sembollerini koyarsak

$$Z' = \sum_k \left\{ \frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^k \circ \alpha)}{dt} Z^j \right\} \partial_k$$

elde ederiz.

Eğer $Z' = 0$ ise Z ye paralel'dir denir. Bu formül gösterir ki $Z' = 0$ olması bir lineer adi diferensiyel denklem sistemine eşdeğerdir. Bu tür sistemler için temel varlık ve teklik teoremi sayesinde aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 3.3. Bir $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisi için $a \in I$ ve $z \in T_{\alpha(a)}(M)$ olsun. Bu durumda $Z(a) = z$ olacak şekilde bir tek paralel Z vektör alanı vardır.

$b \in I$ olmak üzere $P = P_a^b(\alpha): T_p(M) \rightarrow T_q(M)$ dönüşümü her z yi $Z(b)$ ye gönderir. Bu dönüşüme $p = \alpha(a)$ dan $q = \alpha(b)$ ye α boyunca paralel öteleme adı verilir.

Önerme 3.4. Paralel ötelemeler bir izometridir.

İspat: $v, w \in T_p(M)$ olsun. Bu vektörlere karşılık gelen Sonuç 3.3. deki gibi paralel vektör alanları V, W olsun. $V+W$ de paralel olacağından $P(v+w) = (V+W)(b) = V(b) + W(b) = P(v) + P(w)$. Benzer şekilde $c \in \mathbb{R}$ için $P(cv) = cP(v)$ dir. Böylece P lineerdir.

Eğer $P(v)=0$ ise o zaman Sonuç 3.3. deki teklikten V, α üzerinde özdeş olarak sıfır olmak zorundadır. Böylece $v=V(a)=0$ olur. O halde P bire bir ve M nin tanjant uzayları aynı boyuta sahip olduklarından P bir lineer izomorfizmdir. Sonuç olarak yukardaki V, W vektör alanlar için

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle = 0. \text{ Buradan } \langle V, W \rangle \text{ sabit olduğundan}$$

$\langle P(v), P(w) \rangle = \langle V(b), W(b) \rangle = \langle V(a), W(a) \rangle = \langle v, w \rangle$ yazarız. Böylece P bir izometridir [2],[6].

GEODEZİKLER

Bir M yarı-Riemann manifoldunda $\gamma: I \rightarrow M$ eğrisinin γ' hız vektör alanı paralel ise γ ya bir geodezik denir.

Sonuç 3.5. $x^1, \dots, x^n, U \subset M$ üzerinde bir koordinat sistemi olsun. U daki bir γ eğrisinin M nin geodeziği olması için gerek ve yeter koşul γ nın koordinat fonksiyonları olan $x^k \circ \gamma$ lar için

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0, \quad (1 \leq k \leq n)$$

olmasıdır.

Adi diferensiyel denklemlerin varlık ve teklik teoreminin sonucunda aşağıdaki önermeyi yazabiliriz.

Önerme 3.6. Eğer $v \in T_p(M)$ ise 0 (sıfır) içine alan bir I aralığı ve tek türlü belirli bir $\gamma: I \rightarrow M$ geodeziği $\gamma'(0)=v$ olacak şekilde vardır.

Örnek 3.7. Yarı-Öklidyen Uzayın Geodezikleri

$\mathbb{R}_v^n$ nin doğal koordinatlarına göre bütün Christoffel sembolleri sıfır olacağından geodezik denklemi $\frac{d^2(u^i \circ \gamma)}{dt} = 0$ ($1 \leq i \leq n$) haline gelir. Böylece $u^i(\gamma(t))=p^i+tv^i$ yazarız. Burada her $t \in \mathbb{R}$ için p^i ve v^i ler keyfi sabitlerdir. Dolayısıyla vektör notasyonuna göre $\gamma(t)=p+tv$ elde ederiz. Buradan $\mathbb{R}_v^n$ nin geodeziklerinin doğrular olduğunu görürüz.

Önerme 3.8. $\gamma: I \rightarrow M$, M nin sabit olmayan t parametrelili geodeziği olsun. γ nin $\gamma \circ h: J \rightarrow M$ reparametrizasyonunun da bir geodezik olması için gerek ve yeter koşul $h(t)=at+b$ $a, b \in \mathbb{R}$, olmasıdır.

İspat: Herhangibir γ eğrisi için

$(\gamma \circ h)'(t) = (dh/dt) \gamma'(h(t))$. Burada Leibniz ve zincir kuralını kullanırsak

γ geodezik olduğundan $\gamma''=0$ ve γ sabit olmadığından γ' asla sıfır olmaz.

Böylece $(\gamma \circ h)(t)$ eğrisinin geodezik olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{d^2 h}{dt^2}(t) = 0 \Leftrightarrow h(t) = at + b \text{ olmasıdır [2],[4],[5],[6].}$$

ALTMANİFOLDLARDA GEODEZİKLER

$\bar{\nabla}_v W = \nabla_v W + B(V, W)$ eşitliğini bir eğri üzerindeki vektör alanlarına uygulayabiliriz.

Önerme 3.9. $M, \bar{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu ve Y, M deki bir α eğrisi üzerinde M ye tanjant bir vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\dot{Y} = Y' + B(\alpha', Y) \text{ dır.}$$

Burada $\dot{Y} = \overline{\nabla} Y / ds$ ve $Y' = \nabla Y / ds$

İspat: Her zamanki gibi α yı M nin bir tek koşuluğunda düşünebiliriz. $Y = \sum Y^i \partial_i$ yazalım. $\overline{M}$ nin geometrisine göre

$$\dot{Y} = \sum \frac{dY^i}{ds} \partial_i + \sum Y^i (\partial_i|_{\alpha})^*$$

yazabiliriz. Ancak $(\partial_i|_{\alpha})^* = \overline{\nabla}_{\alpha'} \partial_i = \nabla_{\alpha'} (\partial_i) + B(\alpha', \partial_i)$

olduğundan son ifadeyi bir önceki ifadede yerine koyarsak

$$\dot{Y} = \sum \frac{dY^i}{ds} \partial_i + \sum Y^i (\nabla_{\alpha'} (\partial_i) + B(\alpha', \partial_i))$$

buluruz. Böylece B nin $\mathfrak{I}(M)$ -lineerliğini kullanırsak

$$\dot{Y} = \sum \frac{dY^i}{ds} \partial_i + \sum Y^i \nabla_{\alpha'} \partial_i + B(\alpha', \sum Y^i \partial_i)$$

$$\dot{Y} = Y' + B(\alpha', Y)$$

elde ederiz.

Sonuç 3.10. Eğer α , $M \subset \overline{M}$ de bir eğri ise o zaman

$$\ddot{\alpha} = \alpha'' + B(\alpha', \alpha')$$

yazılabilir.

Burada $\ddot{\alpha}$, α nın $\overline{M}$ geometrisine göre ivmesi ve α'' , M geometrisine göre ivmesidir.

Bu sonucun ispatı için yukarıdaki önermede Y yerine α eğrisinin hız vektörünü almak yeterlidir.

Şimdi B tensörünün $\overline{M}$ de M nin şeklini nasıl belirlediğini görmeye çalışalım. Sabit $p \in M$ için $v \in T_p(M)$ ve γ eğrisinde $\gamma'(0)=v$ olacak şekilde M nin bir geodeziği olsun.

M ye göre γ bir doğru olduğundan γ nın $\overline{M}$ deki eğriliği aslında M nin $\overline{M}$ deki lokal eğriliğidir. Sonuç 3.10. a göre $\ddot{\gamma}(0) = B(v, v)$ olur. Böylece bütün v ler için B , $p \in M$ noktasında M nin $\overline{M}$ deki şeklini belirlemiş olur.

Sonuç 3.11. $M \subset \overline{M}$ olsun. M deki bir α eğrisinin M nin geodeziği olması için gerek ve yeter koşul $\overline{M}$ nin geometrisine göre ivmesinin M ye normal olmasıdır.

İspat: Sonuç 3.10. a göre $\ddot{\alpha} = \alpha'' + B(\alpha', \alpha')$ yazılır. Şimdi α , M nin geodeziği ise $\alpha''=0$ olur. Böylece $\ddot{\alpha} = B(\alpha', \alpha')$ ve B , daima M ye normal olduğundan $\ddot{\alpha}$, de M ye normal olur. $\ddot{\alpha}$, M ye normal olsun. Buradan $\alpha''=0$ çıkar. Bu ise α nin M nin bir geodeziği olduğunu ifade eder [2].

V. Bölüm 4

LORENTZ NEDENSEL (CAUSAL) KARAKTER

Bir Lorentz manifoldu indeksi 1 ve boyutu en az 2 olan bir yarı-Riemann manifoldtur.

W bir V Lorentz vektör uzayının bir altuzayı ve g , V de bir skaler çarpım olsun. Bu durumda;

- (1) $g|_W$ pozitif tanımlı ise, yani, W bir iç çarpım uzayı ise W ye uzay-benzeri'dir denir.
- (2) $g|_W$ indeksi 1 olan nondejenere skaler çarpım ise o zaman W ye zaman-benzeri'dir denir.
- (3) $g|_W$ dejenere skaler çarpım ise o zaman W ye ışık-benzeri'dir denir.

Bu üç tane karaktere, W nin nedensel karakteri deriz. Bu tanımları Tanım 1.3 ile birleştirirsek bir v vektörünün nedensel karakteri ile R_v altuzayının nedensel karakteri aynıdır. (Burada R_v , v tarafından doğrulan altuzay)

Sıfır altuzayı yani sadece sıfır vektöründen oluşan altuzay uzay-benzeridir.

Önerme 4.1. V bir Lorentz vektör uzayı olsun. z , V de bir zaman-benzeri vektör ise, o zaman $z^\perp$ altuzayı uzay-benzeridir ve $V=R_z \oplus z^\perp$ dir.

İspat: R_z indeksi 1 olan nondejenere bir altuzaydır. Buradan $z^\perp$ de nondejeredir ve $V=R_z + z^\perp$ dir. Böylece $\text{ind} V = \text{ind} R_z + \text{ind} z^\perp$ olduğundan $\text{ind} z^\perp = 0$ yani $z^\perp$ uzay-benzeri olur.

Bu ispat gösterir ki W altuzayının zaman-benzeri olması için gerek ve yeter koşul $W^\perp$ nin uzay-benzeri olmasıdır ve üstelik bu iddia $(W^\perp)^\perp = W$ eşitliği ile uyumludur. Bunun sonucu olarak şunu iddia edebiliriz. Bir W altuzayının ışık-benzeri olması için gerek ve yeter koşul $W^\perp$ nin ışık-benzeri olmasıdır.

Uzay-benzeri olan altuzaylarla uğraşmak çok kolaydır. Çünkü uzay-benzeri altuzayların altuzayları da uzay-benzeridir ve Schwarz Eşitsizliği bu uzaylarda geçerlidir.

$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$, eşitlik için gerek ve yeter koşul v ile w nin lineer bağımlı olmasıdır.

Önerme 4.2. W , bir Lorentz uzayında boyutu en az 2 olan bir altuzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

- (1) W zaman-benzeri ise Lorentz uzayının kendisidir.
- (2) W iki tane lineer bağımsız null vektör ihtiva eder.
- (3) W bir tane zaman-benzeri vektör ihtiva eder.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2). $e_1, \dots, e_m$, W nin bir ortonormal bazı olsun. Burada e_1 zaman-benzeri vektördür. Bu durumda $e_1 \pm e_2$ lineer bağımsız null vektörlerdir. Gerçekten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ için

$$c_1(e_1 + e_2) + c_2(e_1 - e_2) = 0$$

$$\Rightarrow (c_1 + c_2)e_1 + (c_1 - c_2)e_2 = 0$$

e_1 ile e_2 lineer bağımsız olduğundan $c_1 + c_2 = c_1 - c_2 = 0$. Buradan $c_1 = c_2 = 0$.

$$\text{Örneğin } \langle e_1 + e_2, e_1 + e_2 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle + 2\langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_2, e_2 \rangle = -1 + 0 + 1 = 0$$

(2) $\Rightarrow$ (3) u ile v lineer bağımsız null vektör ise $\langle u, v \rangle \neq 0$ dir. Buradan $u \pm v$ vektörlerinden birisi zaman-benzeridir.

(3) $\Rightarrow$ (1). Eğer z , W de zaman-benzeri vektör ise o zaman $W^\perp \subset z^\perp$ ve $W^\perp$ uzay-benzeri olmak zorunda olur. Ancak o zaman

$$W = (W^\perp)^\perp \text{ olduğundan } W \text{ zaman-benzeri olur.}$$

Önerme 4.3. Bir Lorentz uzayının bir W altuzayı için aşağıdakiler eşdeğerdir.

- (1) W ışık-benzeridir, yani dejeneredir.

(2) W en az bir null vektör ihtiva eder ancak zaman-benzeri vektör ihtiva etmez.

(3) $W \cap \Lambda = L - \{0\}$, burada L bir 1-boyutlu altuzay ve Λ, V Lorentz uzayının null konisidir.

İspat: (1) $\Rightarrow$ (2) W dejenere olduğundan bir tane null vektör ihtiva edecektir. Ancak bir önceki önermeden bir zaman-benzeri vektör ihtiva edemez.

(2) $\Rightarrow$ (3) W bir null vektör ihtiva ettiğinden $W \cap \Lambda$ kümesi boş değildir. Bir önceki önerme nedeniyle iki tane null vektör ihtiva etseydi W bir tane zaman-benzeri vektör ihtiva edeceğinden $W \cap \Lambda = L - \{0\}$, tekboyutlu olmak zorunda olur.

(3) $\Rightarrow$ (1) W uzay-benzeri olamaz ve bir önceki önerme nedeniyle zaman-benzeride olamaz. Buradan W ışık-benzeridir [1],[2].



VI. Bölüm 5

YARI-RIEMANN MANİFOLDLARDA

BAZI EĞRİLER

Hazırlık Önergeler

Önerme 5.1. Herhangibir $p \in M_1$ (boyutu en az 3) noktasında $B(x,y)=0$ olsun, burada $x \in T_p(M_1)$ bir zaman-benzeri birim vektör, $y \in T_p(M_1)$ bir uzay-benzeri birim vektör ve $\langle x,y \rangle = 0$ dir. Bu takdirde M_1 bir tümel umbilik altmanifoldtur.

Önerme 5.2. B , bir M_1 Lorentz manifoldunun ikinci temel formu olsun. Eğer herhangibir $p \in M_1$ noktasındaki herhangibir n null vektörü için $B(n,n)=0$ oluyorsa, bu taktirde M_1 bir tümel umbilik altmanifoldtur.

Önerme 5.3. Eğer $\langle n_1, n_2 \rangle = -1$ koşulunu sağlayan herhangi n_1, n_2 null vektörleri için $B(n_1, n_2) = 0$ oluyorsa bu taktirde M_1 bir tümel geodezik altmanifoldtur.

Önerme 5.4. $p \in M_1$ olsun. Bu noktadaki $\langle x, y \rangle = 0$ koşulunu sağlayan herhangibir zaman-benzeri birim vektör x ve herhangibir uzay-benzeri birim vektör y için

$$2B(x,x) = -B(y,y)$$

oluyorsa, bu takdirde M_1 bir tümel geodezik altmanifoldtur.

Önerme 5.5. H , bir M_1 Lorentz altmanifoldun ortalama eğrilik vektör alanı ve herhangi $p \in M_1$ için $\nabla_x^\perp H = 0$ olsun (Burada $x \in T_p(M_1)$ herhangi uzay-benzeri yada zaman-benzeri vektördür.) Bu durumda H paraleldir [7].

İndeksi ν olan yarı-Riemann manifoldu M_ν ile gösterelim. $\alpha: I \rightarrow M_\nu$ regüler eğrisini ele alalım. Burada I , $\mathbb{R}^1$ nin bir açık alt aralığıdır. Eğer α eğrisinin bütün hız vektörleri $\alpha'(t)$ ler uzay-benzeri ise α eğrisine uzay-benzeri denir. Benzer şekilde bütün hız vektörleri zaman-benzeri (ışık-benzeri) ise zaman-benzeri (ışık-benzeri) eğri denir. Eğer α eğrisi zaman-benzeri yada uzay-benzeri ise α yı $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = \epsilon$ olacak şekilde yeniden parametreleyebiliriz. (Burada $\epsilon = +1$ eğer α uzay-benzeri ise, $\epsilon = -1$ eğer α

zaman-benzeri ise). $\alpha(t)$ eğrisinin parametresini α nın yay uzunluğu olarak kabul ediyoruz [7],[8].

ÇEMBERLER ve HELİSLER

$\alpha=\alpha(t)$, M_v de bir zaman-benzeri eğri olsun. $k_j(t)$ ile $\alpha(t)$ nin j-inci eğriliğini gözönüne alalım. $j>2$ için $k_j(t)\equiv 0$ ve Y asal vektör alanı ve Z binormal vektör alanı uzay-benzeri olmak üzere $\alpha(t)$ boyunca Frenet formülleri

$$\alpha'(t) = X$$

$$\nabla_x X = k_1(t)Y$$

$$\nabla_x Y = k_1(t)X + k_2(t)Z$$

$$\nabla_x Z = -k_2(t)Y$$

şeklinde olur. Burada ∇ ile M_v nin kovaryant türevini gösteriyoruz. Eğer $k_2(t)\equiv 0$ ve $k_1(t)$, $\alpha(t)$ boyunca pozitif bir sabit ise $\alpha=\alpha(t)$ eğrisine bir çember denir. Eğer hem $k_1(t)$ ve hem $k_2(t)$ $\alpha(t)$ boyunca bir pozitif sabite eşit iseler $\alpha=\alpha(t)$ eğrisine bir helis denir.

Buradaki en önemli sorun bu koşulları sağlayan eğrilerin var olup olmadığıdır. Adi diferensiyel denklem sistemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliğine ilişkin teori gereğince $t=0$ ı içine alan yeterince küçük bir aralıkta tanımlı ve verilen başlangıç koşullarını gerçekleyen bir tek çözüm vardır. Yani herhangi bir $p \in M_v$ noktası ve bu noktadaki ortonormal x ve y vektörleri için (burada x zaman-benzeri ve y uzay-benzeri) yerel olarak p den geçen ve tanjant vektörü x olan bir çember vardır ve verilen koşulları sağlar. Benzer iddialar helisler içinde söylenebilir.

$\alpha=\alpha(t)$, M_1 Lorentz manifoldunda bir zaman-benzeri eğri olsun. Eğer $\alpha(t)$ eğrisi

$$(5.6) \quad \begin{cases} \alpha'(t)=X \\ \nabla_x X=kY \\ \nabla_x Y=kX \end{cases}$$

koşullarını, $\forall t \in I$, gerçekliyorsa $\alpha(t)$ ye bir çember denir. Burada Y bir uzay-benzeri vektör alanı ve k bir pozitif sabittir.

Önerme 5.7. $\alpha(t)$, M_1 Lorentz manifoldunda bir zaman-benzeri eğri olsun. Eğer $\alpha(t)$ bir çember ise o zaman $\alpha(t)$ nin hız vektör alanı X için

$$(5.8) \nabla_x \nabla_x X - \langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle X = 0 \text{ koşulu gerçekleşir.}$$

Tersine eğer bir zaman-benzeri eğri bu koşulu gerçeklerse ya bir geodeziktir yada bir çemberdir.

İspat: $\alpha=\alpha(t)$ bir çember olsun. (5.6) deki eşitlikleri (5.8) de yazalım.

$$\nabla_x(kY) - \langle kY, kY \rangle X = k \nabla_x Y - k^2 \langle Y, Y \rangle X = k^2 X - k^2 X = 0$$

Şimdi tersini düşünelim. Yani bir $\alpha=\alpha(t)$ zamanbenzeri eğri (5.8) koşulunu gerçeklesin.

$\langle X, \nabla_x X \rangle = 0$ olduğundan (5.8) den faydalanarak

$d(\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle)/dt = 2 \langle \nabla_x \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = 2 \langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle \langle X, \nabla_x X \rangle = 0$ yazabiliriz. Buradan $\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle$ $\alpha(t)$ boyunca sabit olur. Eğer $\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = 0$ ise $\alpha(t)$ bir geodeziktir. Kabul edelim ki $\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle$ sıfırdan farklı bir sabit olsun. M_1 , Lorentz manifoldu olduğundan bir zaman-benzeri vektöre ortogonal olan sıfırdan farklı bir zaman-benzeri yada bir null vektöre sahip olamaz. Dolayısıyla $\langle X, \nabla_x X \rangle = 0$ dan $\nabla_x X$ uzay-benzeri olmak zorundadır. Böylece,

$$\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = k^2, \nabla_x X = kY$$

yazabiliriz. Burada Y bir uzay-benzeri birim vektör ve k pozitif bir sabittir.

Bu durumda $\nabla_x Y = (1/k) \nabla_x \nabla_x X = (1/k)(k^2 X) = kX$ bulunur. Böylece $\alpha(t)$ bir çemberdir [7],[9].

ÖRNEK 5.9. $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(v, w) = -v_1 w_1 + v_2 w_2$$

şeklinde tanımlı g metrik tensörünün belirlediği $\mathbb{R}_1^2$ Lorentz manifoldunda

$$\alpha(t) = (\sinh t, \cosh t), t \in \mathbb{R}$$

eğrisini düşünelim

$$\alpha'(t)=X=(\cosh t, \sinh t)$$

$$g(X,X)=\langle X,X \rangle = -\cosh^2 t + \sinh^2 t = -1$$

Böylece $\alpha(t)$ bir zaman-benzeri eğridir.

$$\nabla_x X = \alpha''(t) = (\sinh t, \cosh t)$$

$$\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = -\sinh^2 t + \cosh^2 t = 1.$$

$\nabla_x X = Y$ diyelim. Y bir uzay-benzeri vektör alanı $\nabla_x Y = (\cosh t, \sinh t)$ yani

$\nabla_x Y = X$ Sonuçta $\alpha = \alpha(t)$ nin $\mathbb{R}_1^2$ de bir çember olduğunu söyleyebiliriz. Üstelik;

$$\nabla_x \nabla_x X - \langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle X$$

$$= \nabla_x Y - \langle Y, Y \rangle X = X - X = 0$$

olduğundan $\alpha(t)$ eğrisi (5.8) koşulunu sağlar.

Teorem 5.10. M_1 , bir $\overline{M}_v$ yarı-Riemann manifoldunun boyutu 2 den büyük bir bağlantılı Lorentz altmanifoldu olsun. Eğer bir $k > 0$ için M_1 deki k eğrilğine sahip her zaman-benzeri çember $\overline{M}_v$ de de bir zaman-benzeri çember ise bu durumda M_1 tümel umbiliktir ve $\overline{M}_v$ de bir paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir. Tersine eğer M_1 tümel umbilik ve paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip ise, bu durumda M_1 deki her zaman-benzeri eğri $\overline{M}_v$ de de bir zaman-benzeri eğridir.

İspat: p , M_1 in keyfi bir noktası olsun. $x, y \in T_p(M_1)$ ortonormal vektörlerini düşünelim şöyleki x zaman-benzeri ve y uzay-benzeridir. $\alpha = \alpha(t)$, M_1 de aşağıdaki koşullar sağlayan bir çember olsun;

$$\alpha(0)=p, X(p)=x, (\nabla_x X)(p)=ky.$$

Burada ∇ , M_1 in kovaryant türev operatörü ve X , $\alpha(t)$ eğrisinin hız vektör alanıdır. Bu durumda X , M_1 üzerinde $\nabla_x \nabla_x X - \langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle X = 0$ koşulunu gerçekler. Hipotezden $\alpha(t)$, $\overline{M}_v$ de bir çember olduğundan

$$\overline{\nabla}_x \overline{\nabla}_x X - \langle \overline{\nabla}_x X, \overline{\nabla}_x X \rangle X = 0 \text{ olur.}$$

Burada $\bar{\nabla}$, $\bar{M}_v$ üzerinde kovaryant türev operatörüdür. Daha önceki temel bilgileri kullanarak son ifadeyi düzenleyelim ve sonra ortaya çıkan sonucun normal parçasını yazalım.

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_x(\nabla_x X + B(X, X)) - \langle \bar{\nabla}_x X, \bar{\nabla}_x X \rangle X &= 0 \\ \bar{\nabla}_x \nabla_x X + \bar{\nabla}_x(B(X, X)) - \langle \bar{\nabla}_x X, \bar{\nabla}_x X \rangle X &= 0\end{aligned}$$

$$\nabla_x \nabla_x X + B(X, \nabla_x X) + \tan \bar{\nabla}_x(B(X, X)) + \text{nor} \bar{\nabla}_x(B(X, X))$$

$$- \langle \bar{\nabla}_x X, \bar{\nabla}_x X \rangle X = 0.$$

Son ifadenin normalini alırsak

$$B(X, \nabla_x X) + \nabla_x^\perp B(X, X) = 0 \text{ olur.}$$

Bu ifadeyi

$$(\tilde{\nabla} B)(x, x, x) = \nabla_x^\perp B(x, x) - B(\nabla_x x, x) - B(x, \nabla_x x) \text{ eşitliğinde yerine yazarsak } p$$

noktasında $(\tilde{\nabla} B)(x, x, x) = 3B(x, \nabla_x x) = -3kB(x, y)$ olur. Bu bize verilen bir birim zaman benzeri $x \in T_p(M_1)$ vektörü için, $B(x, y)$ nin x e ortogonal olan bir birim uzay-benzeri vektör olduğunu ve y vektöründen bağımsız olduğunu söyler. Son ifadede y yerine $-y$ yazarsak $B(x, y) = 0$ elde ederiz, burada x zaman-benzeri ve y uzay-benzeri olmak üzere ortonormal vektörlerdir. p noktası keyfi olduğundan M_1 tümel umbiliktir. Buradan herhangi ortonormal X ve Y vektör alanları için $B(X, Y) = \langle X, Y \rangle H$ yazabiliriz.

Bu denklemi $B(X, \nabla_x X) + \nabla_x^\perp B(X, X) = 0$ denkleminde kullanalım.

$$\underbrace{\langle X, \nabla_x X \rangle}_0 H + \nabla_x^\perp \underbrace{\langle X, X \rangle}_{-1} H = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_x^\perp H = 0 \text{ Buradan } X \text{ herhangi zaman-benzeri vektör alanı olduğundan}$$

Önerme 5.4. den H nin ortalama vektör alanı bir paralel vektör alanı olduğu ortaya çıkar.

Şimdi tersini ispatlayalım. $\alpha(t)$, M_1 de bir zaman-benzeri çember olsun. M_1 tümel umbilik ve paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip olduğundan

$$B(X,X) = -H, \quad B(\nabla_x X, X) = \langle \nabla_x X, X \rangle H = 0,$$

$S_{B(X,X)}(X) = -\langle H, H \rangle X$, $\nabla_x^\perp B(X,X) = \nabla_x^\perp H = 0$, burada X bir zaman-benzeri vektör alanıdır. Şimdi

$$\bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_x X - \langle \bar{\nabla}_x X, \bar{\nabla}_x X \rangle X = 0$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_x X &= \bar{\nabla}_x (\nabla_x X + B(X, X)) \\ &= \bar{\nabla}_x \nabla_x X + \bar{\nabla}_x (B(X, X)) \\ &= \nabla_x \nabla_x X + B(X, \nabla_x X) - S_{B(X,X)}(X) + \nabla_x^\perp B(X, X) \\ &= \nabla_x \nabla_x X + \langle H, H \rangle X. \end{aligned}$$

Öte yandan $\langle \bar{\nabla}_x X, \bar{\nabla}_x X \rangle = \langle \nabla_x X + B(X, X), \nabla_x X + B(X, X) \rangle$

$$= \langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle + \langle B(X, X), B(X, X) \rangle$$

$$= \langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle + \langle H, H \rangle.$$

Böylece $\bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_x X - \langle \bar{\nabla}_x X, \bar{\nabla}_x X \rangle X$

$$= \nabla_x \nabla_x X + \langle H, H \rangle X - \langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle X - \langle H, H \rangle X$$

$$= \nabla_x \nabla_x X - \langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle X = 0.$$

O halde $\alpha(t)$, $\overline{M}_v$ de bir zaman-benzeri çemberdir [7].

Şimdi M_1 (Boy $M_1 \geq 3$) Lorentz manifoldunda helisleri düşünelim. $\alpha=\alpha(t)$, M_1 Lorentz manifoldunda bir regüler zaman-benzeri helis olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= X, & \nabla_x Y &= k_1 X + k_2 Z \\ \nabla_x X &= k_1 Y, & \nabla_x Z &= -k_2 Y\end{aligned}$$

formüllerini $\alpha(t)$ boyunca elde ederiz. Burada Y, Z uzay-benzeri vektör alanları ve k_1, k_2 pozitif sabitlerdir.

Önerme 5.11. $\alpha=\alpha(t)$ boyutu en az 3 olan bir Lorentz manifoldun bir zaman-benzeri eğrisi olsun. Eğer $\alpha(t)$ bir helis ise bu durumda $\alpha(t)$ nin hız vektör alanı (5.12) $\nabla_x \nabla_x \nabla_x X - K \nabla_x X = 0$ koşulunu gerçekler burada K bir sabitdir. Tersine bir zaman-benzeri $\alpha(t)$ eğrisinin hız vektör alanı bu koşulu gerçekliyorsa o zaman $\alpha(t)$, ya bir geodezik, ya bir çember ya da bir helistir.

İspat: Farzedelim ki $\alpha(t)$ bir zaman-benzeri helis olsun.

$$\nabla_x \nabla_x \nabla_x X - K \nabla_x X = \nabla_x \nabla_x (k_1 Y) - K k_1 Y$$

$$= k_1 \nabla_x (k_1 X + k_2 Z) - K k_1 Y$$

$$= k_1^3 Y - k_1 k_2^2 Y - K k_1 Y$$

$$= k_1 Y (k_1^2 - k_2^2 - K), \text{ burada } K = k_1^2 - k_2^2 \text{ dersek istenen koşul sağlanır.}$$

Tersini düşünelim. Kabul edelim ki $\alpha(t)$ zaman-benzeri eğrisi (5.12) koşulunu gerçekliyor.

$$\langle X, \nabla_x X \rangle = 0 \text{ eşitliğini } X \text{ yönüne göre türetirsek}$$

$\langle X, \nabla_x \nabla_x X \rangle + \langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = 0$ elde ederiz. Bu denklemi tekrar X doğrultusunda türetirsek $\langle \nabla_x \nabla_x \nabla_x X, X \rangle + 3 \langle \nabla_x \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = 0$ olur. (5.12) koşulunu son denklemde kullanırsak

$$\langle \nabla_x \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = 0 \text{ elde ederiz.}$$

Buradan $\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle$ in $\alpha(t)$ boyunca sabit olduğu ortaya çıkar.

Eğer $\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = 0$ ise $\alpha(t)$ bir geodeziktir. Eğer $\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle \neq 0$ ise bu durumda öyle bir birim uzay-benzeri Y vektör alanı vardır ki bir pozitif k_1 sabiti için

$\nabla_x X = k_1 Y$ yazılabilir. Çünkü $\langle X, \nabla_x X \rangle = 0$ olduğundan $\nabla_x X$ uzay-benzeri olmak zorundadır. M_1 boyutu en az 3 olan Lorentz manifold olduğundan

$\nabla_x Y = k_1 X + bZ$ yazarız, burada Z hem X' e hem de Y' ye ortogonal olan bir uzay-benzeri vektör alanıdır. Eğer $b \equiv 0$ ise bu durumda $\alpha(t)$ bir çemberdir. Buradan b nin pozitif fonksiyon olduğunu kabul edersek

$$\begin{aligned} d\langle \nabla_x \nabla_x X, \nabla_x X \rangle / dt &= \langle \nabla_x \nabla_x \nabla_x X, \nabla_x X \rangle \\ + \langle \nabla_x \nabla_x X, \nabla_x \nabla_x X \rangle &= K \langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle + \langle \nabla_x \nabla_x X, \nabla_x X \rangle \end{aligned}$$

yazabiliriz.

Bu denklemde $\nabla_x X = k_1 Y$ ve $\nabla_x Y = k_1 X + bZ$ eşitliğini kullanırsak

$$k_1^2 b^2 = k_1^4 - K k_1^2 \text{ olur.}$$

$k_1 \neq 0$ ve b pozitif olduğundan buradan

$$b = \sqrt{k_1^2 - K} \text{ çıkar. } b = k_2 \text{ dersek}$$

$$\nabla_x Y = k_1 X + k_2 Z \text{ buluruz.}$$

Bu ifadeyi X doğrultusunda türetirsek

$$\nabla_x \nabla_x Y = k_1 \nabla_x X + k_2 (\nabla_x Z) \text{ olur.}$$

$$\text{Öte yandan } \nabla_x \nabla_x Y = (1/k_1) \nabla_x \nabla_x \nabla_x X = (1/k_1) (k_1^2 - k_2^2) \nabla_x X,$$

$$\text{yani } \nabla_x \nabla_x Y = (k_1^2 - k_2^2) Y \text{ olur.}$$

Az önce $\nabla_x \nabla_x Y = k_1^2 Y + k_2 \nabla_x Z$ bulmuştuk. Sonuçta $\nabla_x Z = -k_2 Y$ çıkar. Yani $\alpha(t)$ bir zaman-benzeri helis olur.

Örnek 5.13. $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$g(v, w) = \langle v, w \rangle = -v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$ şeklinde tanımlı metrik tensörün belirlediği $\mathbb{R}_1^3$ Lorentz manifoldun da $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$\alpha(t) = (\sinh \sqrt{2} t, \cosh \sqrt{2} t, t)$ eğrisini ele alalım.

$$X = \alpha'(t) = (\sqrt{2} \cosh \sqrt{2} t, \sqrt{2} \sinh \sqrt{2} t, 1)$$

$$\langle X, X \rangle = -2 \cosh^2 \sqrt{2} t + 2 \sinh^2 \sqrt{2} t + 1 = -1 < 0$$

Böylece $\alpha(t)$ bir zaman-benzeri eğridir.

$$\nabla_x X = (2 \sinh \sqrt{2} t, 2 \cosh \sqrt{2} t, 0)$$

$$\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = -4 \sinh^2 \sqrt{2} t + 4 \cosh^2 \sqrt{2} t = 4 > 0$$

$\|\nabla_x X\| = 2$, yani $\nabla_x X$ bir uzay-benzeri vektör alanıdır.

$\nabla_x X = 2Y$ ($k_1 = 2$) dersek Y bir birim uzay-benzeri vektör alanı olur. Üstelik $\langle X, \nabla_x X \rangle = 0$, olduğundan Y, X 'e ortogonal olur.

$$Y = (\sinh \sqrt{2} t, \cosh \sqrt{2} t, 0)$$

$$\nabla_x Y = (\sqrt{2} \cosh \sqrt{2} t, \sqrt{2} \sinh \sqrt{2} t, 0).$$

Burada $k_2 = \sqrt{2}$ ve $Z = (-\cosh \sqrt{2} t, -\sinh \sqrt{2} t, -\sqrt{2})$ seçersek;

$$\nabla_x Y = k_1 X + k_2 Z \text{ olur.}$$

$\langle Z, Z \rangle = -\cosh^2 \sqrt{2} t + \sinh^2 \sqrt{2} t + 2 = 1 > 0$ olduğundan Z bir uzay-benzeri birim vektör alanıdır.

$$\langle X, Z \rangle = +\sqrt{2} \cosh^2 \sqrt{2} t - \sqrt{2} \sinh^2 \sqrt{2} t - \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$\langle Y, Z \rangle = +\cosh \sqrt{2} t \cdot \sinh \sqrt{2} t - \cosh \sqrt{2} t \cdot \sinh \sqrt{2} t + 0 = 0$$

$$\nabla_x Z = (-\sqrt{2} \sinh \sqrt{2} t, -\sqrt{2} \cosh \sqrt{2} t, 0) = -\sqrt{2} Y.$$

$$\text{Böylece,} \quad \nabla_x Z = 2Y$$

$$\nabla_x Y = 2X + \sqrt{2} Z$$

$$\nabla_x Y = -\sqrt{2} Y$$

Böylece $\alpha(t)$, $\mathbb{R}_1^3$ de bir zaman-benzeri helis olur.

$$\text{Şimdi} \quad \nabla_x \nabla_x \nabla_x X - K \nabla_x X = 0$$

olduğunu kontrol edelim.

$$\nabla_x \nabla_x (2 \cosh \sqrt{2} t, 2 \sinh \sqrt{2} t, 0) - K(2 \cosh \sqrt{2} t, 2 \sinh \sqrt{2} t, 0)$$

$$= \nabla_x (2 \sqrt{2} \sinh \sqrt{2} t, 2 \sqrt{2} \cosh \sqrt{2} t, 0) - K(2 \cosh \sqrt{2} t, 2 \sinh \sqrt{2} t, 0)$$

$$= 4(\cosh \sqrt{2} t, \sinh \sqrt{2} t, 0) - K(2 \cosh \sqrt{2} t, 2 \sinh \sqrt{2} t, 0)$$

burada $K = k_1^2 - k_2^2 = 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 2$ dir ve böylece $\nabla_x \nabla_x \nabla_x X - K \nabla_x X = 0$ olur.

Teorem 5.14. M_1 , bir $\overline{M}_v$ yarı-Riemann manifoldunun bir bağlantılı Lorentz altmanifoldu olsun. Eğer k_1, k_2 için M_1 deki k_1 ve k_2 eğriliklerine sahip her zaman-benzeri helis $\overline{M}_v$ de de zaman-benzeri ise bu durumda $M_1, \overline{M}_v$ nin tümel geodezik altmanifoldudur.

İspat: Herhangi bir $p \in M$ için x, y ve z , $T_p(M_1)$ de ortonormal vektörler olsun şöyleki; x zaman-benzeri y ve z uzay-benzeri vektörlerdir .

$\alpha = \alpha(t)$, M_1 de aşağıdaki koşulları sağlayan bir helis olsun

$$\alpha(0) = p, \alpha'(t) = X, X(p) = x, Y(p) = y, Z(p) = z.$$

$(\nabla_x X)(p) = k_1 y$, $(\nabla_x Y)(p) = k_1 x + k_2 z$, $(\nabla_x Z)(p) = -k_2 y$, burada Y asal normal, Z de binormal vektör alanıdır.

$\alpha(t)$, M_1 de bir helis olduğundan

$$\nabla_x \nabla_x \nabla_x X - k \nabla_x X = 0, k = k_1^2 - k_2^2$$

yazarız.

Hipotezden $\alpha(t)$, $\bar{M}_v$ de de bir helis olduğundan

$$\bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_x X - K \bar{\nabla}_x X = 0 \text{ olur.}$$

Daha önceki bölümlerde elde ettiğimiz Gauss denklemini son denklemde yerine yazalım.

$$\bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_x (\nabla_x X + B(X, X)) - K \nabla_x X - K B(X, X) = 0$$

$$\bar{\nabla}_x (\bar{\nabla}_x \nabla_x X + \bar{\nabla}_x (B(X, X))) - K \nabla_x X - K B(X, X) = 0$$

$$\bar{\nabla}_x (\nabla_x \nabla_x X + B(X, \nabla_x X)) - S_{B(X, X)}(X) + \nabla_x^\perp B(X, X)$$

$$- K \nabla_x X - K B(X, X) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}_x (\nabla_x \nabla_x X) + \bar{\nabla}_x (B(X, \nabla_x X)) - \bar{\nabla}_x (S_{B(X, X)}(X) + \nabla_x^\perp B(X, X))$$

$$- K \nabla_x X - K (B(X, X)) = 0.$$

$$\Rightarrow \nabla_x \nabla_x \nabla_x X + B(X, \nabla_x \nabla_x X) - S_{B(X, \nabla_x X)}(X) + \nabla_x^\perp B(X, \nabla_x X)$$

$$- \nabla_x S_{B(X, X)}(X) - B(X, S_{B(X, X)}(X)) - S_{\nabla_x^\perp (B(X, X))}(X)$$

$$+ \nabla_x^\perp (\nabla_x^\perp (B(X, X))) - K \nabla_x X - K B(X, X) = 0.$$

Son denkleme $k \nabla_x X$ terimini bir kez ekleyip bir kez çıkarırsak ve M_1 deki normalini alırsak

$$B(X, \nabla_x \nabla_x X) + \nabla_x^\perp B(X, \nabla_x X) - B(X, S_{B(X,X)}(X))$$

$$+ \nabla_x^\perp (\nabla_x^\perp B(X, X)) - KB(X, X) = 0$$

elde ederiz.

M_1 deki tanjant kısmını alırsak

$$-S_{B(X,X)}(X) - \nabla_x (S_{B(X,X)}(X)) - S_{\nabla_x^\perp(B(X,X))}(X) + (k - K)\nabla_x X = 0 \text{ elde ederiz. Elde}$$

ettiğimiz son iki denklemden ilkinin p noktasında değerlendirirsek

$$B(x, \nabla_x k_1 Y) + \nabla_x^\perp B(x, k_1 y) - B(x, S_{B(X,X)}(x)) + \nabla_x^\perp (\nabla_x^\perp B(x, x)) - KB(x, x) = 0.$$

$$\Rightarrow k_1 B(x, k_1 x + k_2 z) + k_1 \{ \nabla_x^\perp B(x, y) \} - B(x, S_{B(X,X)}(x))$$

$$+ \nabla_x^\perp (\nabla_x^\perp B(x, x)) - KB(x, x) = 0.$$

$$\Rightarrow k_1^2 B(x, x) + k_1 k_2 B(x, z) + k_1 \{ (\tilde{\nabla} B)(x, y, x) + B(\nabla_x x, y) \}$$

$$+ B(x, \nabla_x y) \} - B(x, S_{B(X,X)}(x)) + \nabla_x^\perp (\tilde{\nabla} B)(x, x, x)$$

$$+ B(\nabla_x x, x) + B(x, \nabla_x x) - KB(x, x) = 0.$$

$$\Rightarrow k_1^2 B(x, x) + k_1 k_2 B(x, z) + k_1 (\tilde{\nabla} B)(x, y, x) + k_1^2 B(y, y) + k_1^2 B(x, x)$$

$$+ k_1 k_2 B(x, z) - B(x, S_{B(X,X)}(x)) + (\tilde{\nabla}^2 B)(x, x, x, x) + (\tilde{\nabla} B)(\nabla_x x, x, x)$$

$$+ (\tilde{\nabla} B)(x, \nabla_x x, x) + (\tilde{\nabla} B)(x, x, \nabla_x x) + 2k_1 \nabla_x^\perp B(x, y) - KB(x, x) = 0.$$

$$\Rightarrow k_1^2 B(x, x) + k_1 k_2 B(x, z) + k_1 (\tilde{\nabla} B)(x, y, x) + k_1^2 B(y, y) + k_1^2 B(x, x)$$

$$+ k_1 k_2 B(x, z) - B(x, S_{B(X,X)}(x)) + (\tilde{\nabla}^2 B)(x, x, x, x) + k_1 (\tilde{\nabla} B)(y, x, x)$$

$$+ k_1 (\tilde{\nabla} B)(x, y, x) + k_1 (\tilde{\nabla} B)(x, x, y) + 2k_1 \{ (\tilde{\nabla} B)(x, y, x) +$$

$$B(\nabla_x x, y) + B(x, \nabla_x y) \} - KB(X, X) = 0$$

Düzenlemeler ve sadeleştirmeler yaparsak

$$(5.15) \quad 4k_1^2 B(x, x) + 3k_1^2 B(y, y) + 4k_1 k_2 B(x, z) + 5k_1 (\tilde{\nabla} B)(x, y, x) \\ + (\tilde{\nabla}^2 B)(x, x, x, x) + k_1 (\tilde{\nabla} B)(x, x, y) - B(x, S_{B(x, x)}(x)) - KB(x, x) = 0.$$

buluruz

Bu denklemde z yerine -z yazarsak

$B(x, z) = 0$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla M_1 in tümel umbilik olduğu ortaya çıkar.

(5.15) denklemini şu şekilde yeniden düzenleyelim.

$$5k_1 (\tilde{\nabla} B)(x, y, x) + k_1 (\tilde{\nabla} B)(x, x, y) = -4k_1^2 B(x, x) - 3k_1^2 B(y, y) \\ - 4k_1 k_2 B(x, z) - (\tilde{\nabla}^2 B)(x, x, x, x) + B(x, S_{B(x, x)}(x)) + KB(x, x)$$

Burada y yerine -y yazarsak denklemin sağ tarafı değişmeyeceğinden

$$5k_1 (\tilde{\nabla} B)(x, y, x) + k_1 (\tilde{\nabla} B)(x, x, y) = 0$$

çıkar yani;

$$5k_1 \{ (\nabla_x^\perp B)(x, y) - B(\nabla_x x, y) - B(x, \nabla_x y) \} \\ + k_1 \{ \nabla_y^\perp B(x, x) - B(\nabla_x y, x) - B(y, \nabla_x x) \} = 0$$

M_1 tümel umbilik olduğundan $B(x, y) = \langle x, y \rangle H$ dır.

Burada $\langle x, x \rangle = -1, \langle y, y \rangle = 1$ ve $\langle x, y \rangle = 0$ olduğundan

$$5k_1 \{ \nabla_x^\perp \langle x, y \rangle H - k_1 \langle y, y \rangle H - k_1 \langle x, x \rangle H - k_2 \langle x, z \rangle H \}$$

$$+ k_1 \{ \nabla_x^\perp \langle x, x \rangle H - k_1 \langle x, x \rangle H - k_2 \langle z, x \rangle H - k_1 \langle y, y \rangle H \} = 0$$

$$\Rightarrow 5k_1 \{ 0 - k_1 H + k_1 H - 0 \} + k_1 \{ -\nabla_x^\perp H + H - 0 - H \} = 0$$

$$\Rightarrow -k_1 \nabla_x^\perp H = 0 \Rightarrow \nabla_x^\perp H = 0.$$

Burada x zaman-benzeridir dolayısıyla H ortalama vektör alanı paraleldir.

Öte yandan $\langle x, y \rangle = 0$ olduğundan

dolayı $(\tilde{\nabla} B)(x, x, x) = 0$ olur. Çünkü

$$(\tilde{\nabla} B)(x, x, x) = (\nabla_x^\perp B)(x, x) - 2B(x, \nabla_x x)$$

$$= \nabla_x^\perp \langle x, x \rangle H - 2k_1 B(x, y) = -\nabla_x^\perp H - 2k_1 \langle x, y \rangle H = 0$$

Dolayısıyla $(\tilde{\nabla} B)(x, x, x) = 0$ olur.

Bu bilgileri (5.15) te kullanırsak

$$4k_1^2 \langle x, x \rangle H + 4k_1 k_2 \langle x, z \rangle H + 0 + 3k_1^2 \langle y, y \rangle H +$$

$$\langle S_{B(X,X)}(x), x \rangle H + 0 - K \langle x, x \rangle H = 0$$

$$\Rightarrow -4k_1^2 H + 3k_1^2 H - \langle B(x, x), B(x, x) \rangle H + KH = 0.$$

$$\Rightarrow -k_1^2 H + KH - \langle H, H \rangle H = 0$$

$$\Rightarrow (-k_1^2 + K - \langle H, H \rangle) H = 0$$

Şimdi

$$-S_{B(X, \nabla_x X)}(x) - \nabla_x (S_{B(X,X)}(x)) - S_{\nabla_x^\perp(B(X,X))}(X) + (k - K) \nabla_x X = 0 \quad \text{denkleminin}$$

her iki yanını Y ile çarpalım.

$$\langle -S_{B(X, \nabla_x X)}(X), Y \rangle - \langle \nabla_x (S_{B(X,X)}(X)), Y \rangle - \langle S_{\nabla_x^\perp(B(X,X))}(X), Y \rangle$$

$$+ \langle k - K \rangle \nabla_x X, Y \rangle = 0$$

$$\Rightarrow - \langle B(X, Y), B(X, k_1 Y) \rangle - \langle \nabla_x (S_{B(X,X)}(X)), Y \rangle$$

$$- \langle B(X, X), \nabla_x^\perp B(X, X) \rangle - k_1 (k - K) \langle Y, Y \rangle = 0$$

$$\Rightarrow - \langle \nabla_x (S_{B(X,X)}(X)), Y \rangle + k_1 (k_1^2 - k_2^2 - K) \langle Y, Y \rangle = 0$$

Buradan $B(X, Y) = 0$ olduğundan

$$\langle \nabla_x (S_{B(X,X)}(X)), Y \rangle = \nabla_x \langle S_{B(X,X)}(X), Y \rangle - \langle S_{B(X,X)}(X), \nabla_x Y \rangle$$

$$= \nabla_x \langle B(X, Y), B(X, X) \rangle - \langle B(X, k_1 X + k_2 Z), B(X, X) \rangle$$

$$= -k_1 \langle B(X, X), B(X, X) \rangle$$

$$= -k_1 \langle H, H \rangle.$$

elde ederiz. Böylece

$$k_1 \langle H, H \rangle + k_1 (k_1^2 - k_2^2 - K) = 0 \text{ olur. Dolayısıyla}$$

$$\langle H, H \rangle = -k_1^2 + k_2^2 + K \text{ bulunur.}$$

Bu eşitliği $(-k_1^2 + K - \langle H, H \rangle)H = 0$ eşitliğinde kullanırsak;

$$(-k_1^2 + K + k_1^2 - k_2^2 - K)H = 0$$

$$\Rightarrow -k_2^2 H = 0 \Rightarrow H = 0$$

elde ederiz.

Bu ise M_1 in tümel geodezik olduğunu gösterir. Çünkü $\forall x \in Tp(M_1)$ için

$$B(x, x) = \langle x, x \rangle H = 0 \Rightarrow B = 0 [7].$$

CARTAN ÇATILI NULL EĞRİLER

M_1 boyutu en az 3 olan bir Lorentz manifold olsun. $\alpha=\alpha(t)$ ile k_1 ve k_2 sabit eğriliklerine sahip Cartan çatılı null eğriyi gösterelim. Bu durumda $\alpha(t)$ üzerindeki X , Y ve Z vektör alanları aşağıdaki koşulları gerçekliyorsaa $\alpha(t)$ ye Cartan çatılı null eğri denir.

$$\alpha'(t)=X, \langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = 0, \langle X, Y \rangle = -1$$

$$\langle X, Z \rangle = \langle Y, Z \rangle = 0, \langle Z, Z \rangle = 1$$

$$\nabla_x X = k_1 Z \quad \nabla_x Y = k_2 Z, \quad \nabla_x Z = k_2 X + k_1 Y$$

burada ∇ , M_1 üzerindeki kovaryant türev operatörüdür.

Önerme 5.16. Sabit eğrilikleri k_1 ve k_2 olan bir $\alpha(t)$ Cartan çatılı null eğri $\nabla_x \nabla_x \nabla_x X = 2k_1 k_2 \nabla_x X$ koşulunu gerçekler. Burada $X = \alpha'(t)$.

Önerme 5.17. $\alpha=\alpha(t)$ bir M_1 Lorentz manifoldunun bir null eğrisi olsun. Farzedelim ki $\alpha(t)$ null eğrisinin hız vektör alanı $X=\alpha'(t)$ ve bir null vektör alanı Y , $\alpha(t)$ boyunca

$$\nabla_x \nabla_x \nabla_x X = 2(\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle)^{1/2} (\langle \nabla_x Y, \nabla_x Y \rangle)^{1/2} \nabla_x X$$

$$\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle > 0, \langle \nabla_x Y, \nabla_x Y \rangle < 0, \langle X, Y \rangle = -1 \quad \dots (I)$$

koşullarını sağlasınlar. Bu durumda $\alpha=\alpha(t)$ sabit eğriliklere sahip bir Cartan çatılı null eğridir.

İspat: $\langle X, X \rangle = 0$ ifadesini X yönünde türetirsek $\langle \nabla_x X, X \rangle = 0 \dots (II)$ elde ederiz.

(II) ifadesini X yönünde iki kez türetirsek

$$\langle \nabla_x \nabla_x \nabla_x X, X \rangle + 3 \langle \nabla_x \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = 0 \dots (III) \text{ elde ederiz. (I) dekileri (III) te}$$

yerine yazarsak ve (II) yi kullanırsak $\langle \nabla_x \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = 0 \dots (IV)$ elde ederiz. Bu denklem $\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle$ in eğri boyunca sabit olduğunu gösterir.

Buradan hipotezden $kZ = \nabla_x X$ yazabiliriz. Burada Z bir birim uzay-benzeri vektör alanı ve k pozitif bir sabittir. (II) den kolayca görülebileceği gibi $\langle X, Z \rangle = 0 \dots (V)$.

(IV) denklemini X yönünde türetirsek (I) den dolayı

$2k (\langle \nabla_x Y, \nabla_x Y \rangle)^{1/2} + \langle \nabla_x Z, \nabla_x Z \rangle = 0 \dots$ (VI) denklemini elde ederiz. Bu denklemden

$$4k^2 \langle \nabla_x \nabla_x Y, \nabla_x Y \rangle = \langle \nabla_x Z, \nabla_x Z \rangle \langle \nabla_x \nabla_x Z, \nabla_x Z \rangle \dots \text{(VII) elde ederiz.}$$

Öte yandan

$\nabla_x \nabla_x Z = (1/k) \nabla_x \nabla_x \nabla_x X$ olduğundan (I) ve (IV) nedeniyle

$$\langle \nabla_x \nabla_x Z, \nabla_x Z \rangle = \langle \nabla_x \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = 0 \text{ olur. Buradan (VII) den}$$

$\langle \nabla_x \nabla_x Y, \nabla_x Y \rangle = 0$ olur. Bu ise $\alpha(t)$ boyunca $\langle \nabla_x Y, \nabla_x Y \rangle$ sabit demektir.

$\langle \nabla_x Y, \nabla_x Y \rangle = w^2$ yazalım. Burada w bir pozitif sabittir. $\alpha(t)$ boyunca (VI) yı bu denklemde yerine yazarsak

$\langle \nabla_x Z, \nabla_x Z \rangle = -2kw \dots$ (VIII) olur. Bu $\nabla_x Z$ nin bir zaman-benzeri vektör alanı olduğunu söyler. M_1 bir Lorentz manifold olduğundan $\nabla_x Z = aX + bY \dots$ (IX) yazabiliriz, burada a ve b reel fonksiyonlardır. Buradan $\langle \nabla_x \nabla_x X, X \rangle = -bk$ elde ederiz. Öte yandan (II) den

$\langle \nabla_x \nabla_x X, X \rangle = -\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = -k^2$ olduğundan son iki denklemden $b=k=(\text{sabit})$ sonucunu elde ederiz. Böylece (IX) dan $\nabla_x Z = aX + kY$ çıkar.

$$\langle \nabla_x Z, \nabla_x Z \rangle = -2ak = -2kw$$

oldüğundan, buradan $a = w = (\text{sabit})$ ve

$\nabla_x Z = wX + kY \dots$ (X) sonucunu çıkartırız. Bu son ifadeyi X yönünde türetirsek

$$\nabla_x \nabla_x Z = w \nabla_x X + k \nabla_x Y \dots \text{(XI)}$$

Öte yandan (I) ve (V) den dolayı

$\nabla_x \nabla_x Z = (1/k) \nabla_x \nabla_x \nabla_x X = (1/k) 2kw \nabla_x X = 2w \nabla_x X \dots$ (XII). Son iki denklemi birleştirirsek ve (V) i kullanırsak $\nabla_x Y = wZ \dots$ (XII) elde ederiz. $\langle X, Y \rangle = -1$ ifadesini X yönünde türetirsek $\langle \nabla_x X, Y \rangle + \langle X, \nabla_x Y \rangle = 0$ olur. Burada (XIII)'ü kullanırsak $\langle Y, Z \rangle = 0$ (XIV) Sonuçta (V), (VI), (X), (XII) ve (XIV) ten $\alpha(t)$ nin bir Cartan çatılı null eğri olduğu sonucu çıkar.

Örnek 5.18. IR_1^4 , Lorentz manifoldunda $\alpha(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh t, \frac{t}{2}, \frac{t}{2}) \quad t \in IR$ eğrisini ele alalım.

$$\alpha'(t) = X = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cosh t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh t, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\langle X, X \rangle = \frac{1}{2}(-\cosh^2 t + \sinh^2 t) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

X , bir null vektör alanı.

$$Y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cosh t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh t, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \text{ olarak seçelim.}$$

$$\langle Y, Y \rangle = \frac{1}{2}(-\cosh^2 t + \sinh^2 t) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}(-\cosh^2 t + \sinh^2 t) - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

$$\nabla_x X = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh t, \cosh t, 0, 0)$$

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad Z = (\sinh t, \cosh t, 0, 0) \text{ olsun.}$$

$$\langle Z, Z \rangle = -\sinh^2 t + \cosh^2 t + 0^2 + 0^2 = 1, \text{ o halde } Z \text{ uzay-benzeridir.}$$

$$\nabla_x Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sinh t, \cosh t, 0, 0) \text{ yazabiliriz.}$$

$$k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ seçebiliriz.}$$

$$\nabla_x Z = (\cosh t, \sinh t, 0, 0)$$

$$\nabla_x Z = k_2 X + k_1 Y \text{ olduğu açıktır. Böylece}$$

$$\alpha'(t) = X, \langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = 0, \langle X, Y \rangle = -1$$

$$\langle X, Z \rangle = \langle Y, Z \rangle = 0, \langle Z, Z \rangle = 1$$

$$\nabla_x X = k_1 Z, \nabla_x Y = k_2 Z, \nabla_x Z = k_2 X + k_1 Y$$

olduğundan $\alpha(t)$ bir Cartan çatılı null eğridir.

Teorem 5.19. M_1 , bir $\overline{M}_v$ yarı-Riemann manifoldunun bir Lorentz altmanifoldu olsun. Eğer M_1 deki her sabit eğrilikleri olan Cartan çatılı null eğri $\overline{M}_v$ nin de sabit

eğrilikleri olan Cartan çatılı null eğrisi ise, bu durumda $M_1 \bar{M}_v$ nin bir tümel geodezik altmanifoldudur.

İspat: Keyfi bir $p \in M_1$ için $x, y, z \in T_p(M_1)$ olsun. Şöyleki x ve y null vektör, z ise uzay-benzeri birim vektör. $\langle x, y \rangle = -1$ ve $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle = 0$ kabul edelim. $\alpha = \alpha(t)$, sabit eğrilikleri k_1, k_2 olan bir null eğri olsun. Cartan çatısı (X, Y, Z) , şu şekilde olsun.

$$\alpha(0) = p, \alpha'(t) = X, X(p) = x, Y(p) = y, Z(p) = z$$

$$(5.20) \quad (\nabla_x X)(p) = k_1 z, (\nabla_x Y)(p) = k_2 z, (\nabla_x Z)(p) = k_2 x + k_1 y,$$

Burada ∇ , M_1 üzerindeki kovaryant türev operatörüdür. $\alpha(t)$, M_1 de Cartan çatılı null eğri olduğundan, Önerme 5.16. dan $\nabla_x \nabla_x \nabla_x X = 2k_1 k_2 \nabla_x X \dots (I)$ yazabiliriz. Öte yandan hipotez gereği $\alpha(t)$, $\bar{M}_v$ de bir Cartan çatılı null eğri olduğundan Önerme 5.16. dan $\bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_x X = 2K_1 K_2 \bar{\nabla}_x X \dots (II)$ yazabiliriz. Burada $\bar{\nabla}$, $\bar{M}_v$ nin kovaryant türev operatörü ve K_1, K_2 pozitif sabitlerdir.

(II) yi açık şekilde yazıp buarda (I) i kullanalım ve daha sonra M_1 deki normalini alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} & 4B(X, \nabla_x \nabla_x X) + 5(\tilde{\nabla} B)(X, \nabla_x X, X) + 3B(\nabla_x X, \nabla_x X) \\ & - B(X, S_{B(X,X)}(X)) + (\tilde{\nabla}^2 B)(X, X, X, X) \\ & + (\tilde{\nabla} B)(X, X, \nabla_x X) - 2K_1 K_2 B(X, X) = 0 \text{ olur.} \end{aligned}$$

(5.20) daki bilgileri yukarıdaki denklemde yazarsak p noktasında

$$\begin{aligned} & 4k_1 k_2 B(x, x) + 4k_1^2 B(x, y) + 5k_1 (\tilde{\nabla} B)(x, z, x) \\ & + 3k_1^2 B(z, z) - B(x, S_{B(x,x)}(x)) + (\tilde{\nabla}^2 B)(x, x, x, x) \\ & + k (\tilde{\nabla} B)(x, x, z) - 2K_1 K_2 B(x, x) = 0 \dots (III) \end{aligned}$$

ifadeleri yazılabilir.

Şimdi (III) denkleminde z yerine $-z$ koyarsak

$$\begin{aligned} & 2(2k_1 k_2 - K_1 K_2) B(x, x) + 4k_1^2 B(x, y) + 3k_1^2 B(z, z) \\ & - B(x, S_{B(x,x)}(x)) + (\tilde{\nabla}^2 B)(x, x, x, x) = 0 \dots (IV) \end{aligned}$$

şekline gelir.

(IV) te x yerine 2x ve y yerine (1/2)y yazarsak

$$8(2k_1k_2-K_1K_2)B(x,x)+4k_1^2B(x,y)+3k_1^2B(z,z)$$

$$16B(x,S_{B(x,x)}(x))+16(\tilde{\nabla}^2B)(x,x,x,x)=0$$

Bu denklemi ve (IV) ü kullanıp gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$2(2k_1k_2-K_1K_2)B(x,x)-5B(x,S_{B(x,x)}(x))+5(\tilde{\nabla}^2B)(x,x,x,x)=0. \text{ Bu denklemi (IV)}$$

te yazarsak

$$4B(x,S_{B(x,x)}(x))-4(\tilde{\nabla}^2B)(x,x,x,x)+4k_1^2B(x,y)+3k_1^2B(z,z)=0 \dots (V). \text{ Şimdi}$$

x yerine 2x ve y yerine (1/2)y yazalım, bu durumda

$$4B(x,y)=-3B(z,z)\dots(VI) \text{ olur.}$$

z bir uzay-benzeri birim vektör ve x ve y null vektörler şöyleki $\langle x,z \rangle = \langle y,z \rangle = 0$ ve $\langle x,y \rangle = -1$ olduğundan $x = z+t$ ve $y = 1/2(t-z)$ yazabiliriz. Burada t bir zaman-benzeri birim vektör şöyleki

$$\langle z,t \rangle = 0 \text{ dır. (VI) nedeniyle}$$

$$4B(z+t, (t-z)/2) = -3B(z,z) \text{ yazarız.}$$

Buradan $2B(t,t) = -B(z,z)$ elde ederiz ki bu M_1 in $\overline{M}_v$ nin tümel geodezik altmanifoldu olduğunu gösterir.

Cartan çatısına sahip null eğri $k_2 = 0$ koşulunu gerçekliyorsa bu eğriye genelleştirilmiş null kubik denir.

Önerme 5.21. $\alpha=\alpha(t)$ genelleştirilmiş null kübik eğrisi $\nabla_x \nabla_x \nabla_x X=0$, koşulunu gerçekler.

Burada ∇ , eğri boyunca kovaryant türevidir.

Teorem 5.22. Eğer bir $\alpha=\alpha(t)$ null eğrisi

$$X = \alpha'(t), \nabla_x \nabla_x \nabla_x X=0, \langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle > 0 \text{ koşulunu gerçekliyorsa bu durumda } \alpha(t)$$

bir sabit eğrilikli genelleştirilmiş null kubiktir.

Örnek 5.23. $\mathbb{R}_1^3$, Lorentz manifoldunda

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^3}{6} + t, \frac{\sqrt{2}}{2} t^2, \frac{t^3}{6} - t \right), t \in \mathbb{R} \text{ eğrisini ele alalım.}$$

$$X = \alpha'(t) = \left(\frac{t^2}{2} + 1, \sqrt{2}t, \frac{t^2}{2} - 1 \right)$$

$$\langle X, X \rangle = -\left(\frac{t^2}{2} + 1\right)^2 + 2t^2 + \left(\frac{t^2}{2} - 1\right)^2 = 0$$

$$\nabla_x \nabla_x \nabla_x X = (0, 0, 0) \text{ olduğu ise açıktır.}$$

$$\text{Öte yandan } \nabla_x X = (t, \sqrt{2}, t) \text{ ve } \langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = -t^2 + 2 + t^2 = 2 > 0.$$

Böylece $\alpha = \alpha(t)$ bir genelleştirilmiş null kübiktir.

Teorem 5.24. M_1 bir $\overline{M}_v$ yarı-Riemann manifoldunun bir Lorentz altmanifoldu olsun. Eğer M_1 deki her genelleştirilmiş null kübik, $\overline{M}_v$ de de bir genelleştirilmiş null kübik ise, bu durumda M_1 , $\overline{M}_v$ de tümel geodezik altmanifoldtur.

İspat: $\alpha = \alpha(t)$, M_1 de genelleştirilmiş null kübik olsun. O halde $\alpha'(t) = X$ olmak üzere $\langle X, X \rangle = 0$, $\nabla_x \nabla_x \nabla_x X = 0$ ve $\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle > 0$, $p \in M_1$ için $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = X$, $X(p) = x$,

$(\nabla_x X)(p) = k_1 z$, $\langle x, z \rangle = 0$ koşulları gerçeklensin. Burada z uzay-benzeri birim vektör.

$\langle X, X \rangle = 0$ ifadesini X yönünde türetirsek

$\langle \nabla_x X, X \rangle = 0$ olur. Bu son ifadeyi tekrar X yönünde türetirsek

$\langle \nabla_x \nabla_x X, X \rangle + \langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle = 0$ elde ederiz.

$\langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle > 0$ olduğundan

$\langle \nabla_x \nabla_x X, X \rangle < 0$ olmak zorundadır.

$\nabla_x \nabla_x X = k_1^2 Y$ diyelim. Burada Y , $\langle X, Y \rangle = -1$ olacak şekilde bir vektör alanıdır.

Öte yandan $\nabla_x \nabla_x \nabla_x X = 0$ olduğundan $\nabla_x \nabla_x X$, $\alpha = \alpha(t)$ boyunca sabittir.

$$\langle \nabla_x \nabla_x X, \nabla_x \nabla_x X \rangle = X \langle \nabla_x \nabla_x X, \nabla_x X \rangle - \underbrace{\langle \nabla_x \nabla_x \nabla_x X, \nabla_x X \rangle}_{0}$$

$$= X \left[\frac{1}{2} X \langle \nabla_x X, \nabla_x X \rangle \right]$$

$$= X \left[\frac{1}{2} X k_1^2 \langle Z, Z \rangle \right]$$

ve $\langle Z, Z \rangle = 1$ olduğundan

$$\langle \nabla_x \nabla_x X, \nabla_x \nabla_x X \rangle = X \left[\underbrace{\frac{1}{2} X (k_1^2)}_0 \right] = X[0] = 0.$$

Böylece $\nabla_x \nabla_x X$ bir null vektör alanıdır ve $k_1^2 = k_2$ dersek $\nabla_x \nabla_x X = k_2 Y$ den Y bir null birim vektör alanı olmak zorundadır.

Hipotez gereği $\alpha = \alpha(t)$, $\bar{M}_v$ de de genelleştirilmiş null kübik olduğundan

$$\bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_x X = 0 \text{ olur.}$$

$$\bar{\nabla}_x \bar{\nabla}_x (\nabla_x X + B(X, X)) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}_x (\nabla_x \nabla_x X + B(X, \nabla_x X) + \nabla_x^\perp B(X, X) - S_{B(X, X)}(X)) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_x \nabla_x \nabla_x X + B(X, \nabla_x \nabla_x X) + \nabla_x^\perp B(X, \nabla_x X) - S_{B(X, \nabla_x X)}(X)$$

$$+ \nabla_x^\perp \nabla_x^\perp B(X, X) - S_{\nabla_x^\perp B(X, X)}(X) - \nabla_x S_{B(X, X)}(X)$$

$$- B(X, S_{B(X, X)}(X)) = 0$$

Bu ifadenin M_1 deki normalini alırsak

$$B(X, \nabla_x \nabla_x X) + \nabla_x^\perp B(X, \nabla_x X)$$

$$+ \nabla_x^\perp \nabla_x^\perp B(X, X) - B(X, S_{B(X, X)}(X)) = 0 \text{ elde ederiz.}$$

Bu ifadeyi $p \in M_1$ noktasında değerlendirirsek

$$k_2 B(x, y) + k_1 \nabla_x^\perp B(x, z) + \nabla_x^\perp \nabla_x^\perp B(x, x)$$

$$- B(x, S_{B(x, X)}(x)) = 0$$

buluruz. Bu ifadede y yerine $-y$ yazarsak

$$k_2 B(x, -y) + k_1 \nabla_x^\perp B(x, z) + \nabla_x^\perp \nabla_x^\perp B(x, x) - B(x, S_{B(x, x)}(x)) = 0$$

elde ederiz.

Bulduğumuz son iki ifadeyi taraf tarafa çıkarırsak, sonuç olarak $B(x, y) = 0$ buluruz. Burada $\langle x, y \rangle = -1$ ve x ve y null vektörler olduğundan hazırlık teoremlerine göre M_1 tümel geodezik altmanifold olmak zorundadır[7],[9].



VII. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bilindiği üzere Riemann Geometri’de eğriler ve üzerinde bulunduğu altmanifoldlar ile ilişkili özellikler günümüze kadar çalışılmış ve bir çok sonuçlar ortaya konmuştur. Ancak yarı-Riemann Geometri’de eğrilerin yapısı ve üzerinde bulunduğu yarı-Riemann altmanifoldun eğriye yüklediği nitelikler eğrinin ve altmanifoldun uzay-benzeri, zaman-benzeri ve ışık-benzeri oluşuna göre birbiri ile ilişkilendirilmesi Riemann haline göreceli olarak yeni ve halen üzerinde çalışmaların sürdürülmekte olduğu bir alandır. Özellikle Lorentz manifoldların ve daha genel olarak yarı-Riemann manifoldların ışık-benzeri eğrilerinin incelenmesi ve özelliklerinin içinde bulunduğu manifolddan nasıl etkilendiğinin veya tümel geodezik yada tümel umbilik oluşu gibi niteliklerin yapısına etkisinin araştırılması halen üzerinde yoğun çalışmaların yapılmakta olduğu konulardır.

Bu çalışmayı biz ileri çalışmalara zemin hazırlayacak bir biçimde hazırladık. Bu amaçla yarı-Riemann altmanifoldlar birinci ve ikinci bölümde çalışıldı. Üçüncü bölümde bu altmanifoldlar üstündeki eğriler ve dördüncü bölümde Lorentz manifoldların zaman-benzeri eğrileri ve bunlar içinde de çember, helis ve Cartan çatılı null eğriler çalışıldı. Riemann manifoldları üstündeki eğriler için tanımlanan Frenet formülleri bu halde farklılık gösterdi. Bunun için eğri üstünde uygun bir çatı, Cartan çatısı olarak adlandırıldı.

n -boyutlu bir Lorentz manifoldunun($n \geq 3$) ışık-benzeri bir eğrinin transversal vektör bundle’ının yani; non-dejenere kısmının “ki o eğrinin tanjant bundle ile normal bundle’ının boş olmayan arakesiti olarak tanımlanır” belirlenmesi durumunda eğrinin Cartan çatısı 2 tanesi ışık-benzeri ve $n-2$ tanesi de uzay-benzeri olarak bulunur ve bunlar sayesinde eğrinin Frenet denklemleri tanımlanabilir. Beşinci bölümde zaman-benzeri eğrilerin Cartan çatıları zaman-benzeri helisler için tanımlanarak Teo.5.14 de bir Lorentz altmanifoldunun bir yarı- Riemann manifoldunda tümel geodezik olarak bulunabilmesinin bir helisin altmanifoldta zaman-benzeri olmasının yarı-Riemann üstmanifoldta da korunuyor olması olduğu ispatlanmıştır. Bu teoremin sabit eğrilikli Cartan çatılı null eğrinin üstmanifoldada sabit eğrilikli Cartan çatılı bir null eğri olması Teo.5.19. da ispatlanmıştır.

Örnek 5.18. ile $\mathbb{R}_1^4$ Lorentz manifoldunun

$\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh t, \frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right)$ şeklindeki bir eğrisinin bir null çatıya sahip olduğu

gösterilmiş olup özgün bir örnektir. Örnek 5.23. ile verilen

$\alpha(t) = \left(\frac{t^3}{6} + t, \frac{\sqrt{2}}{2} t^2, \frac{t^3}{6} - t \right)$ eğrisi de $\mathbb{R}_1^3$ de genelleştirilmiş null-kübiktir.

Teo.5.19.da ki sonuç genelleştirilmiş null-kübikler için Teo.5.24 de özgün olarak ispatlanmıştır.

Bu çalışma daha sonra üzerinde çalışacağımız yarı-Riemann manifoldların ışık-benzeri altmanifoldlarını anlayabilmemize yarayacak bir pencereyi aralamamızı sağlamıştır.



VIII. KAYNAKLAR

- [1] DUGGAL, K.L. and BEJANCU A., **Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications**, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [2] O'NEILL, B., **Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity**, Academic Press, 1983.
- [3] HOFFMAN, K. and KUNZE, R., **Linear Algebra**, Prentice-Hall of India Private Limited, 1967.
- [4] HICKS, N.J., **Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds**, Rend. Circ. Mat. Palermo **12**(1963) 137-149.
- [5] HICKS, N.J., **Notes on Differential Geometry**, D. Van Nostrand Company, Inc., 1965.
- [6] BOOTHBY, W.M., **An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry**, Academic Press, 1975.
- [7] IKAWA, T., **On curves and Submanifolds in an Indefinite-Riemannian Manifold**, Tsukuba J. Math. Vol. 9 No. 2(1985), 353-371.
- [8] BONNER, W.B., **Null curves in a Minkowski space-time**, Tensor N.S., **20**(1969), 229-242.
- [9] NOMIZU, K. and YANO, K., **On circles and spheres in Riemannian Geometry**, Math. Ann., **210**(1974), 163-170.

IX. ÖZGEÇMİŞ

27.03.1973 tarihinde Artvin'in Şavşat ilçesinin Küplüce köyünde doğdum. İlkokulu Küplüce İlkokulu'nda, Ortaokulu Şavşat Ortaokulu'nda okudum. Liseyi Giresun Atatürk Lisesi'nde tamamladım. 1992 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdim. 1996 yılında bu bölümden mezun oldum ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladım. 6 Kasım 1996 tarihinde İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda araştırma görevlisi olarak atandım ve halen aynı bölümde görevimi sürdürmekteyim.