İKİ PARAMETRELİ UYUMLU TÜREVLİ ÖZDEĞER PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BÜŞRA BARUT
ORCID ID: 0009-0007-7033-8954

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. SERTAÇ GÖKTAŞ
ORCID ID: 0000-0001-7842-6309

MERSİN
AĞUSTOS-2024

ÖZET

İKİ PARAMETRELİ UYUMLU TÜREVLİ ÖZDEĞER PROBLEMLERİ

Tezde, iki parametreli özdeğer problemleri uyumlu türev yardımıyla yeniden tanımlanmıştır. Buna ek olarak, iki parametreli uyumlu türevli özdeğer problemleri tek parametreli uyumlu kısmi türevli denklemlere indirgenmiştir. Sonuç olarak, iki parametreli özdeğer operatörünün ortogonallik, özdeğerlerinin reelliği gibi spektral özellikleri incelenmiştir ve bazı integral bağıntıları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Uyumlu Türev, Özdeğer Problemleri, Sturm-Liouville Problemi

Danışman: Doç. Dr. Sertaç GÖKTAŞ, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

CONFORMABLE EIGENVALUE PROBLEMS WITH TWO PARAMETER

In this thesis, the two parameter eigenvalue problems are redefined with the help of conformable derivative. In addition, this conformable eigenvalue problem with two parameter is reduced to a one-parameter conformable partial equation. As a result, the spectral properties of the two-parameter eigenvalue operator such as orthogonality and the realness of its eigenvalues have been investigated and some integral relations have been given.

Keywords: Conformable Derivative, Eigenvalue Problems, Sturm-Liouville Problems.

Advisor: Assoc. Prof. Sertaç GÖKTAŞ, Department of Mathematics, Mersin University, Mersin.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunun belirlenmesini sağlayan, yüksek lisans eğitimim boyunca fikirlerinden yararlandığım, çalışmanın her aşamasında bilgisini, tecrübesini ve yardımını esirgemeyen, her zaman öğrencisi olmaktan gurur duyacağım değerli danışman hocam Doç. Dr. Sertaç GÖKTAŞ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca beni destekleyen, haklarını asla ödeyemeyeceğim annem ve babama teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Kısaltma/Simge	**Tanım**
$D_t^{\alpha}u(t)$	$u(t)$ Fonksiyonunun t Değişkenine Göre $\alpha-$Mertebeden Uyumlu Türevi
$\alpha-$türev	Uyumlu Türev
$\alpha-$integral	Uyumlu İntegral
$I_{\alpha}^{a}(u)(t)$	$u(t)$ Fonksiyonunun t Değişkenine Göre $\alpha-$Mertebeden Uyumlu İntegrali

1. GİRİŞ

Doğa bilimleri, fen bilimleri, finans, tıp gibi doğadaki birçok alanda önemli problemlerin matematiksel modellemesinde diferansiyel denklemlerle karşılaşılmaktadır. Bu diferansiyel denklemler, araştırılmak istenen bilimsel problemin matematiksel bir dilidir. Böylece bu denklemleri sağlayan fonksiyonlar, aynı zamanda bu problemlerin de matematiksel çözümleridir. Bu nedenle, her bir bilimsel problemin çözümlerinin araştırılmasında ilk adım diferansiyel denklemin oluşturulmasıdır.

Düzgün olmayan bir çubuktaki ısı akışı, iki ucundan bağlı gerilmiş titreşimli telin hareketi, bir hacmin yüzeyinde elektrostatik alan hesabı gibi örnekler içlerinde bilinmeyen bir parametrenin bulunduğu ve literatürde Sturm-Liouville diferansiyel denklemi olarak adlandırılan özdeğer problemi ile modellenmektedir. Bu denklem, kurulacak modellerin özelliklerine göre başlangıç veya sınır koşullarıyla birlikte düşünülür. Buradaki amaç, problemi oluşturan parametrenin ve bilinmeyen fonksiyonun bulunmasıdır. Kurulacak modellerin doğasına göre denklem birden fazla parametre de içerebilir. Sturm-Liouville problemleri, diferansiyel denklemler teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu teori, fizik, matematik, mühendislik gibi birçok farklı uygulama alanına sahiptir.

Diğer taraftan, Abel, Caputo, Euler, Fourier, Lacroix, Lagrange, Laplace, Leibniz, Liouville, Riemann ve Weyl gibi birçok matematikçi, kesir mertebeli türevleri çeşitli şekillerde tanımlamışlardır (Podlubny, 1999). Aynı zamanda, kesirli türev alma işlemi klasik (tam sayılı) türev kavramının bir genellemesi olan türev alma işleminin tam sayılı olmayan (kesirli) mertebelerde yapılmasını sağlar. Bu kavram, özellikle dinamik sistemler, kontrol teorisi, fizik gibi birçok bilim dalında yaygın olarak kullanılır. Literatürde bilinen kesirli türevlerin çoğu, klasikte var olan temel özelliklerden sadece lineerlik özelliğini ortak olarak sağladığından ve diğer tüm özellikler için uygulanamadığından dolayı karmaşıklığı gidermek için Khalil vd. (2014) uyumlu türev (conformable derivative) tanımını vermişlerdir. Uyumlu türev kesirli türevlerin bir çeşidi olup, kesirli türev kavramını daha anlaşılır ve hesaplaması daha kolay hale getirmeyi amaçlayan nispeten yeni bir yaklaşımdır. Uyumlu türev, klasik türev operatörünün bazı temel özelliklerini koruyarak, kesirli türevlerin daha genel uygulanabilirliğini sağlar. Bu nedenle, bilimsel araştırmalarda ve mühendislik uygulamalarında giderek daha fazla kullanılmaktadır.

Bu çalışmada, uyumlu türev yardımıyla iki parametreli Sturm-Liouville denklemi

$$D_t^{\alpha}\left(D_t^{\alpha}u(t)\right)+\{\lambda+\mu f(t)+g(t)\}u(t)=0 \tag{1.1}$$

tanımlanmıştır. Burada $f(t)$ ve $g(t)$, $[a,c]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar, λ ve μ ise birer spektral parametredir. $b\in(a,c)$ olmak üzere (1.1) denkleminin çözümü olan $u(t)$

$$u(a)=u(b)=u(c)=0 \tag{1.2}$$

koşulunu sağlar.

Bu tez çalışmasında, (1.1)-(1.2) problemi için iki parametreli uyumlu türevli özdeğer problemlerinin tek parametreli uyumlu kısmi türevli denkleme hangi şartlarda indirgenebileceği; ortogonallik özelliğinin hangi durumlarda sağlanacağı, yeni bir ortogonallik kavramına ihtiyaç duyulup duyulmayacağı; özdeğerlerin reel olup olmadığı, çözümlerle ilgili klasik problemde var olan integral bağıntılarının sağlanıp sağlanmadığı sorularına cevaplar aranmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

2.1. Uyumlu Kesirli Analiz

Kesirli analiz, tam sayı olmayan mertebeden türev ve integral hesabı anlamına gelir. Keyfi mertebeli türev ve integrasyon kavramı ilk kez 1695 yılında Leibniz ve L'Hospital tarafından ortaya atılmıştır. Kesirli mertebeli türevlere ilişkin farklı tanımlar (Samko vd., 1993) olmasına karşılık bu türevlerden "uyumlu kesirli türev" bu çalışmada ele alınacaktır.

Khalil vd. (2014), kesirli türev ve kesirli integralin uyumlu kesirli türev adında yeni bir tanımını verdiler. Klasik türevin doğal özelliklerini koruyarak, bilinen anlamdaki türev tanımlarını genişletmeyi amaçladılar. Ayrıca, bu türev tanımı kullanılarak elde edilen uyumlu kesirli diferansiyel denklemleri tanımladır. Uyumlu kesirli türev operatörü olarak isimlendirilen türev operatörü, klasik türev operatörüne olan benzerliği ile dikkat çekmiş ve bu benzerlik sayesindeki kullanışlılığı ile birçok problemin çözümü için motivasyon kaynağı olmuştur.

Katugampola (2014), Khalil vd. (2014) tarafından verilen tanıma benzer başka bir uyumlu kesirli türev tanımı vererek bu tanımın klasik türevin sağladığı lineerlik, iki fonksiyonun çarpımının türevi, iki fonksiyonun bölümünün türevi, zincir kuralı, sabit bir fonksiyonun türevinin sıfır olması gibi özelliklerini incelemiş ve ayrıca Rolle ve Ortalama Değer teoremlerinin ispatlarını vermiştir.

Abdeljawad (2015), Khalil vd. (2014) tarafından tanımlanan tanımları geliştirmeye ve bu yeni basit, ilgi çekici kesirli hesaplamadaki temel kavramları belirlemeyi amaçladılar. Zincir kuralının kesirli versiyonlarını, üstel fonksiyonlar, Gronwall eşitsizliği, Riemann integralli, Taylor kuvvet serisi açılımları, Laplace dönüşümleri ve lineer diferansiyel sistemleri uyumlu türev yardımıyla tekrar tanımlandı.

Musraini vd. (2019), Katugampola (2014)'nın yeni uyumlu kesirli türev ve uyumlu kesirli integral tanımlarını ele aldılar. Uyumlu kesirli türevin bölüm özelliği, çarpım özelliği ve Rolle teoremi gibi bazı sonuçlar elde edilmiştir. Fonksiyonun monotonluğunu belirleme gibi klasik analiz üzerine bir uygulama da verilmiştir. Klasik integral özelliklerinden bazıları uyumlu kesirli integral üzerinde de sağlanmıştır. Ayrıca, bu çalışmada kesirli integralin bir toplamın limiti gibi davrandığı da ispatlanmıştır. Daha sonra kesirli integralin karşılaştırma özellikleri verilmiştir. Son olarak, ortalama değer teoremi ve ikinci ortalama değer teoremi kesirli integral için de geçerli olduğu elde edilmiştir.

Bu çalışmalara ek olarak kesirli analiz ile ilgili literatürde (Butzer ve Westphal, 2000; Gorenflo ve Mainardi, 1997; Hilfer, 2000; Miller ve Ross,1993; Kilbas vd., 2006; Koning, 2015; Li ve Deng 2007; Malurkar, 1935; Miller ve Ross, 1993; Oldham ve Spanier, 1974; Rossikhin ve Shitikova, 1997; Zayernouri ve Karniadakis, 2013; Zayernouri vd., 2015; Zheng vd., 2019) önemli çalışmalar yer almaktadır.

2.2. Özdeğer Problemleri

Fourier metodu yardımıyla ısı iletim problemi, parametre içeren adi diferensiyel denklemlere dönüşür. Bu yeni denklem literatürde Sturm-Liouville denklemi olarak bilinir. Lineer diferansiyel operatörlerin temel teorisi, diferansiyel operatörler için Sturm-Liouville teorisi üzerine temel özellikler (Annaby ve Mansour, 2005; Atkinson ve Weiss, 1964; Freiling ve Yurko, 2001; Levitan ve Sargsyan, 1975; Marchenko, 2011; Sleeman, 1972; Zettl, 2005) çalışmalarında bulunur. Diğer taraftan bu problemin birden fazla parametre içermesi durumu da ele alınmış, önemli sonuçlar elde edilmiştir (Arscot, 1957, 1959, 1964a, 1964b; Atkinson ve Mingarelli, 1972).

Kesirli analiz üzerinde özdeğer problemleri üzerine yapılan bazı çalışmalar:

Gülşen vd. (2018), keyfi bir zaman skalasında sınır koşulları olan uyumlu kesirli Sturm-Liouville denklemini ele alıp, klasik Sturm-Liouville denkleminin temel spektral özelliklerini kesirli analiz üzerinde incelediler.

Allahverdiev vd. (2019), uyumlu kesirli Sturm-Liouville sınır değer problemini tanımladılar. Bu denklem için bir varlık ve teklik teoremini ispatlayıp bir öz-eşlenik sınır değer problemi formüle ettiler. Ayrıca bu problemin ilişkili Green fonksiyonunu oluşturup özfonksiyon açılımlarını elde edip örnekler verdiler.

Dehghan ve Mingarelli (2020, 2022), Caputo/Riemann–Liouville tipindeki iki terimli kesirli diferansiyel denklemin genel çözümünü el ettiler. Daha sonra, sınır koşullarının bu uç noktalardaki Riemann–Liouville integrallerini değerlendirerek türetildiği sonlu bir aralıkta bir Caputo ve bir Riemann-Riouville operatörünün özel bir bileşiminden türetilen bir kesirli diferansiyel denklem için bir Dirichlet tipi Sturm–Liouville özdeğer problemini çözdüler. Her biri için, sonlu sayıda gerçek özdeğer, sonsuz sayıda gerçek olmayan özdeğer olduğu, bu tür gerçek özdeğerlerin sayısının sınırsız olarak arttığı ve kesirli operatörün Dirichlet sınır koşullarıyla olduğu gibi sıradan iki terimli bir Sturm–Liouville operatörüne yakınsadığı gösterilmiştir.

Elbadi (2021), ikinci mertebeden uyumlu bir diferansiyel denklem ve sınır koşulları ile oluşturulan bir sınır değer problemi incelemiş ve bu problemin Green fonksiyonu ifade edilmiştir. Bunlara ek olarak, uyumlu türev yardımıyla verilen bir Sturm-Liouville problemini ele almış ve bu problemin özdeğer ve özfonksiyon özelliklerini incelemiştir.

Koyunbakan (2023), uyumlu Sturm-Liouville problemi için ters problemi ele aldı. Ayrılabilir sınır koşullarına sahip problemi tanımladı ve bazı spektral özelliklerini inceledi. Daha sonra, spektral verilerle, potansiyelin ve sınır koşullarındaki sabitlerin iki farklı problem için çakıştığını ispatladı. Ayrıca, potansiyel fonksiyonunun simetrik olma özelliğine sahip olması durumunda, bu fonksiyonu benzersiz olarak bulmak için yalnızca bir spektrumun yeterli olduğunu ispatladı.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, uyumlu türev, uyumlu integral tanımı ve özellikleri detaylı bir şekilde verilerek (Abdeljawad, 2015; Elbadi, 2021; Miller ve Ross, 1993; Khalil vd., 2014;), çok parametreli Sturm-Liouville problemleri (Atkinson, 1972) hakkında bilgi verilmiştir.

3.1. Uyumlu Türev Tanımı ve Özellikleri

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t>0$ olsun. f fonksiyonunun t noktasındaki klasik türevi

$$\frac{df}{dt}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon)-f(t)}{\varepsilon}$$

biçiminde tanımlıdır. Bu tanıma göre, $\frac{dt^n}{dt}=nt^{n-1}$ olduğu kolayca görülebilir.

Burada şu soru sorulabilir: $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere, yukarıda verilen türev tanımına benzer biçimde tanımlanabilecek α mertebeden bir kesirli türev var mıdır? Benzer türev tanımı, $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha\in(n,n+1]$ için de yapılabilir mi?

Aşağıdaki tanım, $\alpha\in(0,1]$ olmak üzere, α mertebeden kesirli türevin tanımıdır. Burada bu tanımın, herhangi bir α sayısı için genelleştirilebileceğini belirtmekte yarar vardır. Fakat yine de $\alpha\in(0,1]$ durumu en önemli durumdur ve türev tanımı bu durum için yapıldıktan sonra, diğer durumları elde etmek kolaydır.

Tanım 3.1.1. (Uyumlu Türev) $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tüm $t>0$ ve $\alpha\in(0,1]$ için f fonksiyonunun α mertebeden "Uyumlu türevi"

$$D_\alpha(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right)-f(t)}{\varepsilon}$$

eşitliği ile tanımlıdır. Eğer bazı $a>0$ sayıları için f fonksiyonu $(0,a)$ aralığında α diferansiyellenebilirse ve $\lim_{t\to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ mevcutsa f fonksiyonunun 0 noktasındaki α mertebeden kesirli türevi $f^{(\alpha)}(0)=\lim_{t\to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ biçimindedir.

f fonksiyonunun t değişkenine göre α mertebeden uyumlu türevi için $D_\alpha(f)(t)$, $D_t^\alpha(f)(t)$ veya $f^{(\alpha)}(t)$ gösterimi de kullanılabilir. Eğer f in α mertebeden türevi mevcutsa, kısaca f $\alpha-$türevlenebilirdir denir. Ayrıca $D_\alpha\left(t^p\right)=pt^{p-\alpha}$ eşitliği sağlanır.

$\alpha=1$ ise D_1 operatörü klasik türevle çakışır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. Tüm $a,b\in\mathbb{R}$ elemanları ve D_1 in tanım kümesinden alınan her f,g fonksiyonu için

$$D_1(af+bg)=aD_1(f)+bD_1(g)$$

dir.

ii. Tüm $p\in\mathbb{R}$ için $D_1\left(t^p\right)=pt^{p-1}$ dir.

iii. $D_1(fg)=fD_1(g)+gD_1(f)$.

iv. $D_1\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{gD_1(f)-fD_1(g)}{g^2}$.

v. Tüm sabit $f(t)=\lambda$ fonksiyonları için $D_1(\lambda)=0$ dır.

Teorem 3.1.1. $\alpha\in(0,1]$ olmak üzere, $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu bir $t_0>0$ noktasında $\alpha-$ türevlenebilirse, o halde f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir.

İspat: $f\left(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha}\right)-f(t_0)=\frac{f\left(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha}\right)}{\varepsilon}\varepsilon$ eşitliğinin her iki tarafından $\varepsilon\to 0$ için limit alınarak

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[f\left(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha}\right)-f(t_0)\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t_0+\varepsilon t_0^{1-\alpha}\right)}{\varepsilon}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon$$

yazılabilir. Burada $h=\varepsilon t_0^{1-\alpha}$ alınırsa son eşitlik

$$\lim_{h\to 0}\left[f(t_0+h)-f(t_0)\right]=f^{(\alpha)}(t_0)0$$

halini alır ve dolayısıyla $\lim_{h\to 0}f(t_0+h)=f(t_0)$ eşitliği sağlanır. Bu ise f fonksiyonunun t_0 noktasındaki sürekliliğini verir. Böylece ispat biter.

Tanım 3.1.1 ile verilen D_α uyumlu türevinin sağladığı özellikler aşağıdaki teoremde belirtilmiştir.

Teorem 3.1.2. $\alpha \in (0,1]$ olsun ve f ve g fonksiyonlarının bir $t > 0$ noktasında $\alpha-$ türevlenebilir fonksiyonlar olduğu kabul edilsin. Bu durumda

i. Her $a,b \in \mathbb{R}$ için

$$D_\alpha(af+bg) = aD_\alpha(f) + bD_\alpha(g)$$

dır.

ii. Her $p \in \mathbb{R}$ için $D_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ dır.

iii. Tüm sabit $f(t) = \lambda$ fonksiyonları için $D_\alpha(\lambda) = 0$ sağlanır.

iv. $D_\alpha(fg) = fD_\alpha(g) + gD_\alpha(g)$ dır.

v. $D_\alpha\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gD_\alpha(f) - fD_\alpha(g)}{g^2}$ sağlanır.

vi. Eğer f fonksiyonu türevlenebilirse $D_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}\dfrac{df}{dt}(t)$ olur.

İspat: (i)-(iii) şıklarının ispatları tanımdan direkt olarak elde edilebilir. (iv) ün ispatı için, sabitlenmiş $t > 0$ için

$$\begin{aligned}
D_\alpha(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right)g\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right)g\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right) - f(t)g\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right) + f(t)g\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right) - f(t)g(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{f\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right) - f(t)}{\varepsilon} \cdot g\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right)\right) + f(t)\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{g\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right) - g(t)}{\varepsilon} \\
&= D_\alpha(f)(t)\lim_{\varepsilon \to 0} g\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right) + f(t)D_\alpha(g)(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. g fonksiyonu t noktasında sürekli olduğundan $\lim_{\varepsilon \to 0} g\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right) = g(t)$ yazılabilir. Böylece (iv) ispatlanmış olur.

(v) ispatı için (iv) ispatına benzer biçimde ispatlanabilir.

(vi) yı ispatlamak için Tanım 3.1.1 de $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ alınırsa $\varepsilon = t^{\alpha-1}h$ yazılabilir. Dolayısıyla,

$$D_\alpha(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right)-f(t)}{\varepsilon}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{ht^{\alpha-1}}=t^{1-\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t)$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Aşağıda belirli bazı fonksiyonların uyumlu türevleri verilmiştir:

i. Her $p\in\mathbb{R}$ için $D_\alpha\left(t^p\right)=pt^{p-\alpha}$ dır.

ii. $D_\alpha(1)=0$ dır.

iii. Her $c\in\mathbb{R}$ için $D_\alpha\left(e^{cx}\right)=cx^{1-\alpha}e^{cx}$ dır.

Gerçekten, Tanım 3.1.1 kullanılarak

$$D_\alpha\left(e^{cx}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{c\left(x+\varepsilon x^{1-\alpha}\right)}-e^{cx}}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{cx}\left(e^{c\varepsilon x^{1-\alpha}}-1\right)}{\varepsilon}=e^{cx}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{cx^{1-\alpha}e^{c\varepsilon x^{1-\alpha}}}{1}=cx^{1-\alpha}e^{cx}$$

olduğu görülür.

iv. Her $b\in\mathbb{R}$ için $D_\alpha(\sin bx)=bx^{1-\alpha}\cos bx$ dir.

Gerçekten, Tanım 3.1.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}D_\alpha(\sin bx)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\left[b\left(x+\varepsilon x^{1-\alpha}\right)\right]-\sin bx}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin bx\cos\left(b\varepsilon x^{1-\alpha}\right)+\sin\left(b\varepsilon x^{1-\alpha}\right)\cos bx-\sin bx}{\varepsilon}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-\sin bx\left(bx^{1-\alpha}\right)\sin\left(b\varepsilon x^{1-\alpha}\right)+bx^{1-\alpha}\cos(bx)\cos\left(b\varepsilon x^{1-\alpha}\right)}{1}\\&=bx^{1-\alpha}\cos bx\end{aligned}$$

olduğu görülür.

v. Her $b\in\mathbb{R}$ için $D_\alpha(\cos bx)=-bx^{1-x}\sin bx$ dir.

Gerçekten, Tanım 3.1.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}D_\alpha(\cos bx)&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos\left[b\left(x+\varepsilon x^{1-\alpha}\right)\right]-\cos bx}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\cos bx\cos\left(b\varepsilon x^{1-\alpha}\right)-\sin\left(b\varepsilon x^{1-\alpha}\right)\sin bx-\cos bx}{\varepsilon}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-\cos bx\left(bx^{1-\alpha}\right)\sin\left(b\varepsilon x^{1-\alpha}\right)-bx^{1-\alpha}\sin(bx)\cos\left(b\varepsilon x^{1-\alpha}\right)}{1}\\&=-bx^{1-\alpha}\sin bx\end{aligned}$$

olduğu görülür.

vi. $D_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t\right)=1$ dır.

Gerçekten, Tanım 3.1.1 kullanılarak

$$D_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\alpha}\left(x+\varepsilon x^{1-\alpha}\right)^\alpha-\frac{1}{\alpha}x^\alpha}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\alpha}x^{1-\alpha}\alpha\left(x+\varepsilon x^{1-\alpha}\right)^{\alpha-1}}{1}=1$$

olduğu görülür.

Bunlara ek olarak, aşağıdaki eşitlikler de verilebilir:

i. $D_\alpha\left(\sin\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right)=\cos\frac{1}{\alpha}t^\alpha$.

ii. $D_\alpha\left(\cos\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right)=-\sin\frac{1}{\alpha}t^\alpha$.

iii. $D_\alpha\left(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}\right)=e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$.

$\alpha\in(0,1]$ aralığında tanımlanan uyumlu türev, $\alpha\in(n,n+1]$ durumunda nasıl tanımlanacağı aşağıda verilmiştir:

Tanım 3.1.2. $\alpha\in(n,n+1]$ olmak üzere f, $t>0$ noktasında n mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f in α mertebeden uyumlu türevi aşağıdaki gibidir:

$$D_\alpha(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{(\llbracket\alpha\rrbracket-1)}\left(t+\varepsilon t^{\llbracket\alpha\rrbracket-\alpha}\right)-f^{(\llbracket\alpha\rrbracket-1)}(t)}{\varepsilon}.$$

Burada, $\llbracket\alpha\rrbracket$, α sayısının tam değerini belirtir.

Tanım 3.1.2 nin ışığında $\alpha\in(n,n+1]$ ve f, $t>0$ noktasında $(n+1)$ mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$D^\alpha(f)(t)=t^{\left(\llbracket\alpha\rrbracket-\alpha\right)}f^{\llbracket\alpha\rrbracket}(t)$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.1.3. (Uyumlu Türevlenebilir Fonksiyonlar için Rolle Teoremi) $a>0$ olsun ve $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığı varsayılsın:

i. f , $[a,b]$ de süreklidir.

ii. Bazı $\alpha\in(0,1)$ ler için f fonksiyonu α türevlenebilirdir.

iii. $f(a)=f(b)$ dır.

Bu durumda, $f^{(\alpha)}(c)=0$ olacak biçimde bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır.

İspat: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli olduğundan ve $f(a)=f(b)$ eşitliği sağlandığından f fonksiyonunun bir $c\in(a,b)$ yerel ekstremum noktası vardır. Genelliği bozmadan c nin bir yerel minimum nokta olduğu kabul edilsin. O halde

$$f^{(\alpha)}(c)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{f\left(c+\varepsilon c^{1-\alpha}\right)-f(c)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0^-}\frac{f\left(c+\varepsilon c^{1-\alpha}\right)-f(c)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Bu eşitlikteki ilk limit negatif olmayan, ikinci limit ise pozitif olmayan bir değer aldığından $f^{(\alpha)}(c)=0$ olması gerekir. Böylece ispat biter.

Teorem 3.1.4. (Uyumlu Türevlenebilir Fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi) $a>0$ olsun ve $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın:

i. f , $[a,b]$ de süreklidir.

ii. Bazı $\alpha\in(0,1)$ ler için f $\alpha-$türevlenebilirdir.

Bu durumda

$$f^{(\alpha)}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}$$

olacak biçimde bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır.

İspat: Aşağıda verilen g fonksiyonu ele alınsın:

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}\right).$$

Bu durumda, g fonksiyonu teorem 3.1.3 ile verilen Rolle teoreminin koşullarını sağlar. Yani, $g^{(\alpha)}(c)=0$ olacak biçimde bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır. $D_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right)=1$ olması gerçeğinden yararlanarak istenen sonuca ulaşılır. Böylece ispat tamamlanır.

3.2. Uyumlu İntegral Tanımı ve Özellikleri

Bu bölümde, uyumlu integralin tanımı ve bazı özellikleri açıklanacaktır:

$\alpha\in(0,\infty)$ olsun ve $\alpha\neq -p$ olmak üzere keyfi $p\in\mathbb{R}$ için $J_\alpha\left(t^p\right)=\dfrac{t^{p+\alpha}}{p+\alpha}$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer $f(t)=\sum_{k=0}^{n}b_k t^k$ ise $J_\alpha(f)$ ifadesi

$$J_\alpha(f)=\sum_{k=0}^{n}b_k J_\alpha\left(t^k\right)=\sum_{k=0}^{n}b_k\frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}$$

ile ve $f(t)=\sum_{k=0}^{n}b_k t^k$ ise, serinin düzgün yakınsak olması durumunda

$$J_\alpha(f)=\sum_{k=0}^{n}b_k\frac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}$$

ile tanımlıdır. J_α nın tanım kümesinde lineer olduğu açıktır. Ayrıca, eğer $\alpha=1$ ise, o halde J_α klasik integral ile örtüşür.

Bu tanıma göre, $\alpha=\dfrac{1}{2}$ iken

$$J_\alpha(\sin t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+\frac{3}{2}}}{\left(2n+\frac{3}{2}\right)(2n+1)!}$$

olur. Herhangi $\alpha\in(0,1)$ için $\cos t$ ve e^t ifadeleri de benzer biçimde hesaplanabilir. Bu örnekler, $a\geq 0$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun α integralini aşağıdaki gibi tanımlamamıza olanak sağlar.

Tanım 3.2.1: $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$I_{\alpha}^{a}(f)(t) = I_{1}^{a}\left(t^{\alpha-1} f\right) = \int_{a}^{t} \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx$$

ile tanımlıdır. Burada integral klasik Riemann integralidir.

Teorem 3.2.1: $t \geq a$ ve f fonksiyonu I_{α} nın tanımlı olduğu bölgede sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$D_{\alpha} I_{\alpha}^{a}(f)(t) = f(t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonu sürekli olduğundan $I_{a}^{\alpha}(f)(t)$ fonksiyonu türevlenebilirdir. O halde

$$D_{\alpha}\left(I_{\alpha}^{a}(f)\right)(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} I_{\alpha}^{a}(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_{a}^{t} \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx = t^{1-\alpha} \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} = f(t)$$

yazılabilir ve böylece ispat tamamlanır.

3.3. Çok Parametreli Özdeğer Problemleri

Bu bölümde, klasik durumdaki Sturm-Liouville probleminin çok parametreli durumu incelenecektir (Atkinson, 1972). $k \in \mathbb{R}$,

$$I_r = [a_r, b_r], \quad r = 1, 2, \ldots, k, \tag{3.1}$$

sonlu açık aralık ve

$$p_{r,s}(x_r) \in C[a_r, b_r], \quad 1 \leq r, s \leq k, \tag{3.2}$$

$$q_r(x_r) \in C[a_r, b_r], \quad 1 \leq r \leq k \tag{3.3}$$

olsunlar. Ek olarak, sınır koşullarını belirlemek için $\alpha_r, \beta_r, r = 1 \ldots k$, $2k$ adet reel sayılarına ihtiyaç vardır. Genelliği kaybetmeksizin,

$$0 \le \alpha_r < \pi, \qquad 0 < \beta_r \le \pi, \quad r = 1, \ldots, k$$

sınırlaması yapılsın. O halde, çok parametreli Sturm-Liouville denklemi

$$y_r''(x_r) - q_r(x_r) y_r(x_r) + \sum_{1}^{k} \lambda_s p_{r,s}(x_r) y_r(x_r) = 0 \tag{3.3}$$

biçiminde tanımlanıp bu problemin k tane aşikar olmayan çözümleri araştırılacaktır. Burada $a_r \le x_r \le b_r, r = 1, \ldots, k$ ve

$$y_r(\alpha_r)\cos\alpha_r = y_r'(\alpha_r)\sin\alpha_r, \tag{3.4}$$

$$y_r(\beta_r)\cos\beta_r = y_r'(\beta_r)\sin\beta_r, \tag{3.5}$$

sınır koşulları sağlanır. O halde, $y_r(x_r) \ne 0$ olacak şekilde bulunan $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ lara özdeğer, $y_r(x_r)$ fonksiyonlarında ise problemin özdeğerleri denir.

Özfonksiyon terimi

$$y = y(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{r=1}^{k} y_r(x_r)$$

çarpımı için kullanılır. Burada, $y_r(x_r)$, (3.3)-(3.5) nin çözümleridir. Böylece

$$\left\{\partial^2/\partial x_r^2 - q_r(x_r)\right\} y + \sum_{s=1}^{k} p_{r,s}(x_r)\lambda_s y = 0, \quad r = 1, \ldots, k$$

denklemi ve

$$y\cos\alpha_r = (\partial y/\partial x_r)\sin\alpha_r, \quad x_r = a_r$$

$$y\cos\beta_r = (\partial y/\partial x_r)\sin\beta_r, \quad x_r = b_r$$

sınır koşulları mevcuttur. Tek parametreli durum için benzer sonuçlar elde edilmesi için bazı kesin sınırlamalar yapılmalıdır.

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ özdeğerleri k tane denklemin kökleri olsun. $y_r(x_r; \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ ler ise (3.3) r. denkleminin

$$y_r(a_r; \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \sin\alpha_r, \qquad y_r'(a_r; \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = \cos\alpha_r$$

koşullarını sağlayan bir çözümü olsun. Böylece (3.4) sağlanır. (3.5) koşulunun sağlanması için

$$y_r\left(b_r;\lambda_1,\ldots,\lambda_k\right)\cos\beta_r - y_r'\left(a_r;\lambda_1,\ldots,\lambda_k\right)\sin\beta_r = 0, \quad r = 1,\ldots,k$$

eşitliği sağlanmalıdır. Dolayısıyla $\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_k\right)$ özdeğerleri bu eşitliğin k tane tam fonksiyonun ortak sıfırlarıdır. (3.3)-(3.4) özdeğerler kümesi problemin "spektrumu" olarak adlandırılırlar.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Klasik Durumda İki Parametreli Özdeğer Problemleri

Bu bölümde, (Arscot, 1964) çalışması ele alınmıştır ve klasik durumda iki parametreli özdeğer probleminin bazı özellikleri incelenmiştir. Bu sonuçlar, bir sonraki bölümde tez çalışmasının ana sonuçlarını elde etmede yol göstermiştir.

İki parametreli ikinci mertebeden özdeğer problemi

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\{\lambda+\mu f(x)+g(x)\}y=0, \tag{4.1}$$

$$y(a)=y(b)=y(c)=0 \tag{4.2}$$

şeklinde verilsin. Burada, $f(x)$ ve $g(x)$, $[a,c]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar, $b\in(a,c)$, λ ve μ ise birer spektral parametredir.

(4.1)-(4.2) probleminde f ve g verildiğinde λ ve μ değerleri bulunabilir.

(4.1)-(4.2) problemi farklı şekillerde de verilebilir:

i. (4.2) koşullarının herhangi biri ya da hepsi, $y'(x)$ nin aynı noktada sıfır olması koşulları ile değiştirilebilir.

ii. $f(x)$, $g(x)$ fonksiyonları T periyoduna sahip fonksiyonlar olsunlar ve sınır koşullarının herhangi ikisi

$$y(x+T)\equiv y(x)$$

şeklinde tek bir koşul ile değiştirilebilir.

iii. $f(x)$, $g(x)$ fonksiyonları sırası ile T ve $\tilde{T}$ periyoduna sahip fonksiyonlar olsunlar ve (4.2) yerine a,b,c noktalarından sadece birinde

$$y(x+T)\equiv y(x+\tilde{T})\equiv y(x)$$

koşulu alınabilir.

Teorem 4.1.1. (4.1)-(4.2) problemi

$$\frac{\partial^2 Y(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 Y(\alpha,\beta)}{\partial\beta^2}+\left\{\mu\left(f(\alpha)-f(\beta)\right)+g(\alpha)-g(\beta)\right\}Y(\alpha,\beta)=0, \tag{4.3}$$

$$Y(\alpha,\beta)=0 \tag{4.4}$$

şeklinde tek parametreli probleme indirgenir (Arscot, 1964). Burada, $Y(\alpha,\beta)\equiv y(\alpha)y(\beta)$ dir.

Teorem 4.1.1 de (4.3) denkleminde λ parametresi yok edilmiş ve sadece μ parametresi kullanılmıştır. Bu ise iki parametreli bir diferansiyel denklemden tek parametreli bir kısmi diferansiyel denklemin elde edilebileceğini gösterir.

(4.3)-(4.4) problemi $\mu_n\left(n=0,1,2,\ldots\right)$ özdeğerlerinin bir sayılamaz kümesine sahiptir. Öyle ki $\mu=\mu_n$ öz değerlerine karşılık gelen $Y_{n,m}(\alpha,\beta)$ $\left(m=\overline{0,n}\right)$ çözümleri vardır.

Teorem 4.1.2. μ, (4.1) denkleminde sabit olarak alınsın. O halde, farklı λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen y_1 ve y_2 özfonksiyonları (a,b), (a,c) ya da (b,c) aralıklarında ortogonaldir (Arscot, 1964). Yani,

$$\int_a^b y_1y_2dz=\int_a^c y_1y_2dz=\int_b^c y_1y_2dz=0 \tag{4.5}$$

dir.

Farklı λ ve μ değerlerine karşılık gelen (4.1) denkleminin çözümleri daha geniş bir ortogonallik bağıntısını sağlar. Bu bağıntı, (4.5) deki bağıntıdan ayırt edilebilmesi için double ortogonallik kavramı kullanılacaktır.

Teorem 4.1.3. $y_1(z)$, $y_2(z)$; farklı λ ve μ değerleri için (4.1)-(4.2) probleminin özfonksiyonları olsunlar. O halde,

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} y_1(\alpha)y_1(\beta)y_2(\alpha)y_2(\beta)\left\{f(\alpha)-f(\beta)\right\}d\alpha d\beta=0 \tag{4.6}$$

dir (Arscot, 1964). Burada, $\lambda_1\neq\lambda_2$ ya da $\mu_1\neq\mu_2$ şeklindedir. Ayrıca (α_1,α_2) ve (β_1,β_2); $(a,b),(a,c),(b,c)$ değer çiftlerinin farklı değerlerini göstersin.

Şimdi teorem 4.1.3 de verilen ortogonallik bağıntıları kullanılarak belli şartlar altında λ ve μ öz değerlerinin reel olduğu gösterilecektir.

Teorem 4.1.4. (4.1) probleminin $u(\alpha,\lambda,\mu)=0$ şartını sağlayan çözümü $u(z,\lambda,\mu)$ olsun.

i. $(\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)$ yolları reel ya da imajiner eksene paralel olacak şekilde mevcut ve (4.1) denkleminin hiçbir tekil noktasından geçmesin.

ii. $u(z,\lambda,\mu)$, reel λ ve μ için (α_1,α_2) ve (β_1,β_2)de reel ya da tamamen imajiner olsun.

iii. (α_1,α_2) aralığındaki bir α ve (β_1,β_2)aralığındaki bir β değeri için $f(\alpha)-f(\beta)$ reel ve aynı işaretli olsun.

O halde (4.1)-(4.2) probleminin özdeğerlerinin tamamı reeldir (Arscot, 1964).

Şimdi, (4.1)-(4.2) probleminin çözümlerinin sağladığı integral denklemlerin türetilebileceği iki integral bağıntısı verilecektir.

Teorem 4.1.5. (Birinci İntegral Teoremi)

i. $y(z)$

$$y''+\{\lambda+\mu f(z)+g(z)\}y=0 \tag{4.7}$$

denkleminin bir çözümü,

ii. $G(z,\tilde{z})$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 G}{\partial \tilde{z}^2}+\{\mu[f(z)-f(\tilde{z})]+g(z)-g(\tilde{z})\}G=0 \tag{4.8}$$

kısmi diferansiyel denkleminin bir çözümü olsun, öyle ki $z,\tilde{z}$ sırasıyla $z-$, $\tilde{z}-$ kompleks düzlemlerinin belli $R,\tilde{R}$ bölgelerinde bulunan değerler ise $G(z,\tilde{z})$ analitiktir.

iii. C, $\tilde{z}-$ düzleminin tamamıyla $\tilde{R}$ de yatan bir yol olsun. Şöyle ki

a. $\left[G(z,\tilde{z})\dfrac{dy(\tilde{z})}{d\tilde{z}}-y(z)\dfrac{\partial G(z,\tilde{z})}{\partial \tilde{z}}\right]$

ifadesi C nin her iki ucunda aynı değere sahiptir ve

b. $\int_C G(z,\tilde{z})y(\tilde{z})d\tilde{z}$,

R deki bütün z ler için mevcuttur ve eğer integral tekil ise o R deki bütün z ler için ile ilgili olarak sabit bir noktaya yakınsar.

O halde

$$Y(z)=\int_C G(z,\tilde{z})y(\tilde{z})d\tilde{z} \tag{4.9}$$

ifadesi R deki bütün z ler için (4.7) denklemini sağlar (Arscot, 1964).

Teorem 4.1.6. (İkinci İntegral Teoremi)

i. $y(z)$, (4.7) nin bir çözümüdür.

ii. $H(\alpha,\beta,\gamma)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}\{f(\beta)-f(\gamma)\}\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha^2}+\{f(\gamma)-f(\alpha)\}\frac{\partial^2 H}{\partial\beta^2}+\{f(\alpha)-f(\beta)\}\frac{\partial^2 H}{\partial\beta^2}\\ =-\left[g(\alpha)\{f(\beta)-f(\gamma)\}+g(\beta)\{f(\gamma)-f(\alpha)\}+g(\gamma)\{f(\alpha)-f(\beta)\}\right]H\end{aligned} \tag{4.10}$$

kısmi diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. Öyle ki α,β,γ sırasıyla kompleks $\alpha-,\beta-,\gamma-$ düzlemleri $R_\alpha,R_\beta,R_\gamma$ bölgelerinin içinde bulunduğundan $H(\alpha,\beta,\gamma)$ analitiktir.

iii. $C_\alpha,C_\beta,R_\alpha,R_\beta$ deki yollar olsun öyle ki,

$$\left[\frac{\partial H}{\partial\alpha}y(\alpha)-H(\alpha,\beta,\gamma)y'(\alpha)\right]_{C_\alpha}=0, \tag{4.11}$$

$$\left[\frac{\partial H}{\partial\beta}y(\beta)-H(\alpha,\beta,\gamma)y'(\beta)\right]_{C_\beta}=0. \tag{4.12}$$

iv.

$$Y(\gamma)\equiv\int_{C_\alpha}\int_{C_\beta}\{f(\alpha)-f(\beta)\}H(\alpha,\beta,\lambda)y(\alpha)y(\beta)d\alpha d\beta \tag{4.13}$$

mevcut ve eğer tekilse, α,β,γ, $R_\alpha,R_\beta,R_\gamma$ bölgelerinin içinde γ ya göre düzgün yakınsaktır.

O halde, $Y(z)$ (4.7) nin bir çözümüdür (Arscot, 1964).

4.2. İki Parametreli Uyumlu Türevli Özdeğer Problemleri

İki parametreli uyumlu türevli $2\alpha-$ mertebeden özdeğer problemi

$$D_t^{\alpha}\left(D_t^{\alpha}u(t)\right)+\left\{\lambda+\mu f(t)+g(t)\right\}u=0, \tag{4.14}$$

$$u(a)=u(b)=u(c)=0 \tag{4.15}$$

şeklinde verilsin. Burada, $f(t)$ ve $g(t)$, $[a,c]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar, $b\in(a,c)$, λ ve μ ise birer spektral parametredir.

(4.14)-(4.15) probleminde f ve g verildiğinde λ ve μ değerleri bulunabilir.

(4.14)-(4.15) problemi farklı şekillerde de verilebilir:

i. (4.15) koşullarının herhangi biri ya da hepsi, $D_t^{\alpha}u(t)$ nin aynı noktada sıfır olması koşulları ile değiştirilebilir.

ii. $f(t)$, $g(t)$ fonksiyonları T periyoduna sahip fonksiyonlar olsunlar ve sınır koşullarının herhangi ikisi

$$u(t+T)\equiv u(t)$$

şeklinde tek bir koşul ile değiştirilebilir.

iii. $f(t)$, $g(t)$ fonksiyonları sırası ile T ve $\tilde{T}$ periyoduna sahip fonksiyonlar olsunlar ve (4.15) yerine a,b,c noktalarından sadece birinde

$$u(t+T)\equiv u(t+\tilde{T})\equiv u(t)$$

koşulu alınabilir.

4.2.1. Uyumlu Türevli Özdeğer Probleminin Tek Parametreli Probleme İndirgenmesi

$u(x)$ ve $u(y)$, (4.14) denkleminin birer çözümü olsun ve

$$U(x,y)=u(x)u(y) \tag{4.16}$$

olsun. Burada (4.16) ifadesi sırasıyla x ve y ya göre iki defa $\alpha-$türevlenebilirse

$$\begin{aligned} D_x^\alpha\left(D_x^\alpha U(x,y)\right)&=D_x^\alpha\left(D_x^\alpha u(x)\right)u(y), \\ D_y^\alpha\left(D_y^\alpha U(x,y)\right)&=u(x)D_y^\alpha\left(D_y^\alpha u(y)\right) \end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. Bununla beraber, $u(x)$ ve $u(y)$, (4.14) denklemini sağladığından;

$$\begin{aligned} &D_x^\alpha\left(D_x^\alpha u(x)\right)+\left\{\lambda+\mu f(x)+g(x)\right\}u(x)=0, \\ &D_y^\alpha\left(D_y^\alpha u(y)\right)+\left\{\lambda+\mu f(y)+g(y)\right\}u(y)=0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada ilk denklem $u(y)$, ikinci denklem $u(x)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} &D_x^\alpha\left(D_x^\alpha u(x)\right)u(y)+\left\{\lambda+\mu f(x)+g(x)\right\}u(x)u(y)=0, \\ &u(x)D_y^\alpha\left(D_y^\alpha u(y)\right)+\left\{\lambda+\mu f(y)+g(y)\right\}u(x)u(y)=0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa ve (4.17) ifadeleri dikkate alınırsa

$$D_x^\alpha\left(D_x^\alpha U(x,y)\right)-D_y^\alpha\left(D_y^\alpha U(x,y)\right)+\left\{\mu\left(f(x)-f(y)\right)+g(x)-g(y)\right\}U(x,y)=0 \tag{4.18}$$

şeklinde tek parametreli bir kısmi diferansiyel denklem elde edilir. Sınır koşulları ise

$$U(x,y)=0 \tag{4.19}$$

biçiminde ifade edilebilir.

(4.18) denkleminde λ parametresi yok edilmiş ve sadece μ parametresi kullanılmıştır. Bu ise iki parametreli bir uyumlu türevli diferansiyel denklemden tek parametreli bir uyumlu türevli kısmi diferansiyel denklemin elde edilebileceğini gösterir.

4.2.2. Ortogonallik Özelliği

Eğer μ, (4.14) denkleminde sabit olarak alınırsa, problem bir parametreli özdeğer problemine dönüştürülmüş olur. Şöyle ki; $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ aynı μ değeri ve sırasıyla farklı λ_1, λ_2 değerleri için (4.14)-(4.15) probleminin çözümleri olsun. O halde

$$D_t^{\alpha}\left(D_t^{\alpha}u_1(t)\right)+\left\{\lambda_1+\mu f(t)+g(t)\right\}u_1(t)=0,$$
$$D_t^{\alpha}\left(D_t^{\alpha}u_2(t)\right)+\left\{\lambda_2+\mu f(t)+g(t)\right\}u_2(t)=0$$

olur. Burada, ilk denklem $u_2(t)$ ile, ikinci denklem $u_1(t)$ ile çarpılıp elde edilen ifadeler taraf tarafa çıkarılırsa

$$D_t^{\alpha}\left(D_t^{\alpha}u_1(t)u_2(t)+u_1(t)D_t^{\alpha}u_2(t)\right)=\left\{\lambda_2-\lambda_1\right\}u_1(t)u_2(t)$$

yazılabilir. Burada (a,b) aralığında (4.15) sınır koşullarından $u_1(a)=u_1(b)=0$ ve $u_2(a)=u_2(b)=0$ olduğu dikkate alınırsa $\lambda_1\neq\lambda_2$ için

$$\int_a^b u_1(t)u_2(t)d_{\alpha}t=0$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $(t_1,t_2)=(a,c)$ ve $(t_1,t_2)=(b,c)$ aralıkları için de benzer işlemler yapılırsa

$$\int_{t_1}^{t_2} u_1(t)u_2(t)d_{\alpha}t=0$$

bulunur.

Farklı λ ve μ değerlerine karşılık gelen (4.14) denkleminin çözümleri daha geniş bir ortogonallik bağıntısını sağlar. Bu ortogonallik kavramı klasik anlamda double ortogonallik olarak adlandırılır. Uyumlu kesirli analizde ise double ortogonallik kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır.

Teorem 4.2.1. $v_1(t)$, $v_2(t)$; farklı (λ_1,μ_1) ve (λ_2,μ_2) değerleri için (4.14)-(4.15) probleminin çözüm fonksiyonları olsunlar. O halde

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} v_1(x)v_1(y)v_2(x)v_2(y)\left[f(x)-f(y)\right]d_{\alpha}y\,d_{\alpha}x=0 \tag{4.20}$$

dir. Burada, özdeğerler; $\lambda_1\neq\lambda_2$ ya da $\mu_1\neq\mu_2$ şeklindedir. Ayrıca (x_1,x_2) ve (y_1,y_2); $(a,b),(a,c),(b,c)$ değer çiftlerinin farklı değerlerini göstersin.

İspat:

$$V_i(x,y)=v_i(x)v_i(y),\ i=1,2 \tag{4.21}$$

olsun. Burada, (4.21) ifadesini x ve y değişkenlerine göre iki defa $\alpha-$türevleri alınırsa:

$V_1(x,y)=v_1(x)v_1(y)$ için

$$D_x^\alpha\left(D_x^\alpha V_1(x,y)\right)=D_x^\alpha\left(D_x^\alpha v_1(x)\right)v_1(y),$$
$$D_y^\alpha\left(D_y^\alpha V_1(x,y)\right)=v_1(x)D_y^\alpha\left(D_y^\alpha v_1(y)\right)$$

ve

$V_2(x,y)=v_2(x)v_2(y)$ için

$$D_x^\alpha\left(D_x^\alpha V_2(x,y)\right)=D_x^\alpha\left(D_x^\alpha v_2(x)\right)v_2(y),$$
$$D_y^\alpha\left(D_y^\alpha V_2(x,y)\right)=v_2(x)D_y^\alpha\left(D_y^\alpha v_2(y)\right).$$

yazılır.

İlk olarak, $V_1(x,y)=v_1(x)v_1(y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $v_1(x)$ ve $v_1(y)$ (4.14) denklemini sağladığından

$$D_x^\alpha\left(D_x^\alpha v_1(x)\right)+\left\{\lambda_1+\mu_1 f(x)+g(x)\right\}v_1(x)=0,$$
$$D_y^\alpha\left(D_y^\alpha v_1(y)\right)+\left\{\lambda_1+\mu_1 f(y)+g(y)\right\}v_1(y)=0$$

yazılabilir. Burada ilk denklem $v_1(y)$, ikinci denklem $v_1(x)$ ile çarpılıp ve ifadeler taraf tarafa çıkarılırsa;

$$D_x^\alpha\left(D_x^\alpha V_1(x,y)\right)-D_y^\alpha\left(D_y^\alpha V_1(x,y)\right)+\left\{\mu_1\left(f(x)-f(y)\right)+g(x)-g(y)\right\}V_1(x,y)=0 \tag{4.22}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $V_2(x,y)=v_2(x)v_2(y)$ fonksiyonu göz önüne alındığında

$$D_x^\alpha\left(D_x^\alpha V_2(x,y)\right)-D_y^\alpha\left(D_y^\alpha V_2(x,y)\right)+\left\{\mu_2\left(f(x)-f(y)\right)+g(x)-g(y)\right\}V_2(x,y)=0 \tag{4.23}$$

elde edilir.

(4.22) denklemi V_2 ile (4.23) denklemi ise V_1 ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$V_2\left\{D_x^\alpha\left(D_x^\alpha V_1\right)-D_y^\alpha\left(D_y^\alpha V_1\right)\right\}-V_1\left\{D_x^\alpha\left(D_x^\alpha V_2\right)-D_y^\alpha\left(D_y^\alpha V_2\right)\right\}+\left(\mu_1-\mu_2\right)\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)V_1V_2=0$$

bulunur. Bu ifadenin her iki tarafının $\left(x_1,x_2\right)$ ve $\left(y_1,y_2\right)$ aralıklarında $\alpha-$integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\left(\mu_2-\mu_1\right)\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)V_1V_2d_\alpha yd_\alpha x\\&=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\left[V_2D_x^\alpha\left(D_x^\alpha V_1\right)-V_1D_x^\alpha\left(D_x^\alpha V_2\right)\right]d_\alpha xd_\alpha y+\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left[V_1D_y^\alpha\left(D_y^\alpha V_2\right)-V_2D_y^\alpha\left(D_y^\alpha V_1\right)\right]d_\alpha yd_\alpha x\end{aligned}\tag{4.24}$$

elde edilir. (4.24) de köşeli parantez içi terimler

$$\begin{aligned}V_2D_x^\alpha\left(D_x^\alpha V_1\right)-V_1D_x^\alpha\left(D_x^\alpha V_2\right)&=D_x^\alpha\left[V_2D_x^\alpha V_1-V_1D_x^\alpha V_2\right]\\V_1D_y^\alpha\left(D_y^\alpha V_2\right)-V_2D_y^\alpha\left(D_y^\alpha V_1\right)&=D_y^\alpha\left[V_1D_y^\alpha V_2-V_2D_y^\alpha V_1\right]\end{aligned}$$

biçiminde düzenlenip (4.24) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}&\left(\mu_2-\mu_1\right)\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)V_1V_2d_\alpha yd_\alpha x\\&=\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\left[V_2D_x^\alpha\left(D_x^\alpha V_1\right)-V_1D_x^\alpha\left(D_x^\alpha V_2\right)\right]d_\alpha xd_\alpha y+\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left[V_1D_y^\alpha\left(D_y^\alpha V_2\right)-V_2D_y^\alpha\left(D_y^\alpha V_1\right)\right]d_\alpha yd_\alpha x\\&=\int_{y_1}^{y_2}\left[V_2D_x^\alpha V_1-V_1D_x^\alpha V\right]_{x_1}^{x_2}d_\alpha y+\int_{x_1}^{x_2}\left[V_1D_x^\alpha V_2-V_2D_x^\alpha V_1\right]_{y_1}^{y_2}d_\alpha x\end{aligned}$$

elde edilir. $\left(x_1,x_2\right)$ ve $\left(y_1,y_2\right)$; $(a,b),(a,c),(b,c)$ değer çiftlerinden herhangi ikisi için göz önüne alındığında $V_1\left(x,y\right)\equiv v_1\left(x\right)v_1\left(y\right)$ ve $V_2\left(x,y\right)\equiv v_2\left(x\right)v_2\left(y\right)$ için (4.15) sınır koşullarına göre

$$\left[V_2D_x^\alpha V_1-V_1D_x^\alpha V\right]_{x_1}^{x_2}=\left[V_1D_x^\alpha V_2-V_2D_x^\alpha V_1\right]_{y_1}^{y_2}=0$$

olur.

Dolayısıyla

$$(\mu_2-\mu_1)\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left(f(x)-f(y)\right)V_1V_2d_\alpha yd_\alpha x=0$$

bulunur.

Teoremin $\mu_1-\mu_2\neq 0$ koşulundan

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left(f(x)-f(y)\right)V_1V_2d_\alpha yd_\alpha x=0$$

veya

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}v_1(x)v_1(y)v_2(x)v_2(y)\left[f(x)-f(y)\right]d_\alpha yd_\alpha x=0$$

clde edilir. Bu ise (4.20) nin sağlandığını gösterir.

Şimdi $\mu_1=\mu_2,\ \lambda_1\neq\lambda_2$ olduğu durumu inceleyelim. Burada sabit μ ve farklı λ_1,λ_2 özdeğerleri için ortogonallikten özelliğinden

$$\int_{x_1}^{x_2}v_1(x)v_2(x)d_\alpha x=0,\quad \int_{y_1}^{y_2}v_1(y)v_2(y)d_\alpha y=0$$

olacağından (4.20) elde edilir.

4.2.3. Özdeğerlerin Reelliği

Bu kısımda, verilen ortogonallik bağıntıları kullanılarak belli şartlar altında λ ve μ öz değerlerinin reel olduğu gösterilmiştir.

Teorem 4.2.2. (4.14) denkleminin $u(a,\lambda,\mu)=0$ şartını sağlayan çözümü $u(t,\lambda,\mu)$ olsun. O halde, (4.14)-(4.15) probleminin özdeğerlerinin tamamı reeldir.

İspat: (4.14) denkleminin λ ve μ değerleri

$$u(b,\lambda,\mu)=u(c,\lambda,\mu)=0$$

denklemini sağlayan λ ve μ değerlerinin bulunmasıyla elde edilir. Eğer λ ve μ özdeğerleri reel değil ise

$$\overline{u(b,\lambda,\mu)} = \overline{u(c,\lambda,\mu)} = 0$$

sağlanır. O halde λ ve μ değerlerinin her ikisi reel olduğu zaman $u(b,\lambda,\mu)$ ve $u(c,\lambda,\mu)$; λ,μ nin fonksiyonlarıdır ve reel ya da tamamen imajinerdir. Bu nedenle;

$$u\left(b,\overline{\lambda},\overline{\mu}\right) = u\left(c,\overline{\lambda},\overline{\mu}\right) = 0$$

dir.

Şimdi; $u_0(t)$ fonksiyonu; λ_0,μ_0 kompleks özdeğer çiftine karşılık gelen özfonksiyon, $\overline{u_0}(t)$ fonksiyonu ise; bir başka $\overline{\lambda_0},\overline{\mu_0}$ kompleks özdeğer çiftine karşılık gelen özfonksiyon olsun. O halde, $\mu_1 = \mu_0, \mu_2 = \overline{\mu_0}, v_1 = u_0, v_2 = \overline{u_0}$ olmak üzere teorem 4.2.1 den

$$\left(\overline{\mu_0} - \mu_0\right)\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left(f(x) - f(y)\right)u_0(x)u_0(y)\overline{v_0}(x)\overline{v_0}(y)d_\alpha y d_\alpha x = 0$$

elde edilir. Fakat integrant reel ve tek işaretlidir. Bu nedenle $\overline{\mu_0} = \mu_0$ olup, μ_0 reeldir.

Diğer taraftan λ_0 ve $\overline{\lambda_0}$, μ nin aynı değerlerine ait özdeğerler olsun. Bu özdeğerlere karşılık gelen $u_0(t), \overline{u_0(t)}$ özfonksiyonları için;

$$\int_{t_1}^{t_2}|u_0|^2 d_\alpha t \neq 0$$

olduğundan $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$ olup λ_0 reeldir.

Dolayısıyla λ_0 ve μ_0 keyfi olduklarından (4.14)-(4.15) probleminin özdeğerlerinin tamamı reeldir.

4.2.4. Bazı İntegral Bağıntıları

Teorem 4.2.3. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda

$$U(t) = \int_{t_1}^{t_2} G(t,x)u(x)d_\alpha x$$

fonksiyonu (4.14) denkleminin bir çözümüdür.

i. $u(x)$,

$$D_t^{\alpha}\left(D_t^{\alpha}u(x)\right)+\{\lambda+\mu f(x)+g(x)\}u(x)=0$$

denkleminin bir çözümüdür.

ii. $G(t,x)$ fonksiyonu

$$D_t^{\alpha}\left(D_t^{\alpha}G(t,x)\right)-D_x^{\alpha}\left(D_x^{\alpha}G(t,x)\right)+\{\mu\left(f(t)-f(x)\right)+g(t)-g(x)\}G(t,x)=0$$

uyumlu kısmi türevli denklemin bir çözümüdür.

iii. $(a,b),(a,c),(b,c)$ aralıkların uç noktalarında

$$G(t,x)D_x^{\alpha}\left(u(x)\right)-u(x)D_x^{\alpha}\left(G(t,x)\right)$$

eşitliği aynı değere sahiptir.

iv. $\int_{t_1}^{t_2} G(t,x)u(x)d_{\alpha}x$ integrali mevcuttur.

İspat: İspatı tamamlamak için

$$D_t^{\alpha}\left(D_t^{\alpha}U(t)\right)+\{\lambda+\mu f(t)+g(t)\}U(t)=0$$

olduğu gösterilmelidir.

(iv) koşulundan integral işareti altında $U(t)$ in $\alpha-$türevi alınabilir. Böylece;

$$D_t^{\alpha}\left(D_t^{\alpha}U(t)\right)+\{\lambda+\mu f(t)+g(t)\}U(t)$$
$$==\int_{t_1}^{t_2}\left[D_t^{\alpha}\left(D_t^{\alpha}G(t,x)\right)+\{\lambda+\mu f(t)+g(t)\}G(t,x)\right]u(x)d_{\alpha}x$$

elde edilir. (ii) koşulu dikkate alınırsa

$$D_t^{\alpha}\left(D_t^{\alpha}G(t,x)\right)+\{\lambda+\mu f(t)+g(t)\}G(t,x)=D_x^{\alpha}\left(D_x^{\alpha}G(t,x)\right)+\{\lambda+\mu f(x)+g(x)\}G(t,x)$$

yazılabileceğinden;

$$\begin{aligned} &D_t^\alpha\left(D_t^\alpha U(t)\right)+\{\lambda+\mu f(t)+g(t)\}U(t) \\ &\qquad=\int_{t_1}^{t_2} D_x^\alpha\left(D_x^\alpha G(t,x)\right)u(x)\,d_\alpha x+\int_{t_1}^{t_2}\{\lambda+\mu f(x)+g(x)\}G(t,x)u(x)\,d_\alpha x \end{aligned}$$

olur. Burada $\int_{t_1}^{t_2} D_x^\alpha\left(D_x^\alpha G(t,x)\right)u(x)\,d_\alpha x$ integraline iki defa $\alpha-$kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_{t_1}^{t_2} D_x^\alpha\left(D_x^\alpha G(t,x)\right)u(x)\,d_\alpha x=\left[\left(D_x^\alpha G(t,x)\right)u(x)-G(t,x)D_x^\alpha u(x)\right]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2} G(t,x)D_x^\alpha\left(D_x^\alpha u(x)\right)d_\alpha x$$

şeklinde olur. Buradan

$$\begin{aligned} D_t^\alpha\left(D_t^\alpha U(t)\right)+\{\lambda+\mu f(t)+g(t)\}U(t)&=\left[D_x^\alpha\left(G(t,x)\right)u(x)-G(t,x)D_x^\alpha\left(u(x)\right)\right]_{t_1}^{t_2} \\ &\quad+\int_{t_1}^{t_2}\left[D_t^\alpha\left(D_t^\alpha u(x)\right)+\{\lambda+\mu f(x)+g(x)\}u(x)\right]G(t,x)\,d_\alpha x \end{aligned}$$

bulunur. Burada (i) ve (iii) koşulundan sağdaki ifadeler sıfıra eşit olur.

Dolayısıyla

$$D_t^\alpha\left(D_t^\alpha\left(U(t)\right)\right)+\{\lambda+\mu f(t)+g(t)\}U(t)=0$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.4. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda

$$U(z)=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\left[f(x)-f(y)\right]H(x,y,z)u(x)u(y)\,d_\alpha x d_\alpha y \tag{4.25}$$

fonksiyonu (4.14) denkleminin çözümüdür.

i. $u(x)$ ve $u(y)$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki denklemlerin çözümleridir:

$$\begin{aligned} &D_x^\alpha\left(D_x^\alpha u(x)\right)+\{\lambda+\mu f(x)+g(x)\}u(x)=0, \\ &D_y^\alpha\left(D_y^\alpha u(y)\right)+\{\lambda+\mu f(y)+g(y)\}u(y)=0. \end{aligned} \tag{4.26}$$

ii. $H(x,y,z)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}&\{f(y)-f(z)\}D_x^\alpha\left(D_x^\alpha H\right)+\{f(z)-f(x)\}D_y^\alpha\left(D_y^\alpha H\right)+\{f(x)-f(y)\}D_z^\alpha\left(D_z^\alpha H\right)\\&\quad=-\left[g(x)\{f(y)-f(z)\}+g(y)\{f(z)-f(x)\}+g(z)\{f(x)-f(y)\}\right]H\end{aligned} \tag{4.27}$$

uyumlu kısmi türevli denklemin bir çözümüdür.

iii.

$$\begin{aligned}&\left[\left(D_x^\alpha H\right)u(x)-H(x,y,z)D_x^\alpha u(x)\right]_{x_1}^{x_2}=0,\\&\left[\left(D_y^\alpha H\right)u(y)-H(x,y,z)D_y^\alpha u(y)\right]_{y_1}^{y_2}=0.\end{aligned} \tag{4.28}$$

olsun.

iv.

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\{f(x)-f(y)\}H(x,y,z)u(x)u(y)d_\alpha x d_\alpha y \tag{4.29}$$

integrali var ve yakınsaktır.

İspat: İspatı tamamlamak için

$$D_z^\alpha\left(D_z^\alpha U(z)\right)+\{\lambda+\mu f(z)+g(z)\}U(z)=0$$

olduğu gösterilmelidir.

(iv) koşulundan integral işareti altında $U(z)$ in $\alpha-$türevi alınabilir. Böylece

$$\begin{aligned}&D_z^\alpha\left(D_z^\alpha U(z)\right)+\{\lambda+\mu f(z)+g(z)\}U(z)\\&=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\{f(x)-f(y)\}D_z^\alpha\left(D_z^\alpha H\right)u(x)u(y)d_\alpha y d_\alpha x\\&+\{\lambda+\mu f(z)+g(z)\}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\{f(x)-f(y)\}H(x,y,z)u(x)u(y)d_\alpha x d_\alpha y\\&=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\{f(x)-f(y)\}\left[D_z^\alpha\left(D_z^\alpha H\right)+\{\lambda+\mu f(z)+g(z)\}H(x,y,z)\right]u(x)u(y)d_\alpha x d_\alpha y\end{aligned} \tag{4.30}$$

bulunur.

Şimdi (4.30) deki integrali tekrar düzenlemek için (4.27) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\Big[\{f(z)-f(y)\}D_x^\alpha\left(D_x^\alpha H\right)+\{f(x)-f(z)\}D_y^\alpha\left(D_y^\alpha H\right)-F(x,y,z)\\ +\{\lambda+\mu f(z)+g(z)\}\{f(x)-f(y)\}H\Big]u(x)u(y)\end{aligned} \tag{4.31}$$

elde edilir. O halde

$$F(x,y,z)=\big[g(x)\{f(x)-f(z)\}+g(y)\{f(z)-f(x)\}+g(z)\{f(x)-f(y)\}\big]H(x,y,z) \tag{4.32}$$

yazılabilir. (4.32) denklemi (4.31) denklemin de yerine konur. O zaman

$$\begin{aligned}&D_z^\alpha\left(D_z^\alpha U(z)\right)+\{\lambda+\mu f(z)+g(z)\}U(z)\\ &\quad=\int_{y_1}^{y_2}\{f(z)-f(y)\}u(y)\int_{x_1}^{x_2}D_x^\alpha\left(D_x^\alpha H\right)u(x)d_\alpha x d_\alpha y\\ &\quad+\int_{x_1}^{x_2}\{f(x)-f(y)\}u(x)\int_{y_1}^{y_2}D_y^\alpha\left(D_y^\alpha H\right)u(y)d_\alpha y d_\alpha x\\ &\quad-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\big[F(x,y,z)-\{\lambda+\mu f(z)+g(z)\}\{f(x)-f(y)\}H(x,y,z)\big]u(x)u(y)d_\alpha x d_\alpha y\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli $\alpha-$kısmi integerasyonu alınıp yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}&D_z^\alpha\left(D_z^\alpha U(z)\right)+\{\lambda+\mu f(z)+g(z)\}U(z)\\ &\qquad=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\big[\{f(y)-f(z)\}\{\lambda+\mu f(x)\}+\{f(z)-f(x)\}\{\lambda+\mu f(y)\}\\ &\qquad+\{f(x)-f(y)\}\{\lambda+\mu f(z)\}\big]u(x)u(y)H(x,y,z)d_\alpha x d_\alpha y\\ &\qquad=0\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Uyumlu türev ve integralin tanım ve özellikleri detaylıca incelenmiştir.

Diğer taraftan, klasik anlamda iki parametreli özdeğer problemleri araştırılmıştır. İki parametreli özdeğer problemleri tek parametreye indirgenmesi, ortogonallik özellikleri incelenmesi ve bazı integral bağıntıları verilmesi araştırılmış, bulgularda kullanılmak üzere ilgili teoremlerdeki geçişler yeniden hesaplanmıştır.

5.1. Sonuçlar

Tez çalışmasında, iki parametreli özdeğer problemleri uyumlu türev yardımıyla yeniden kurulmuştur. Bu problemin özellikleri incelenmiştir. Uyumlu türevli özedeğer problemleri tek parametreli özdeğer problemlerine indirgenmiştir. Ortogonallik özellikleri incelenmiş, özdeğerlerin reel olduğu gösterilerek, bazı integral bağıntılarına yer verilmiştir. $\alpha = 1$ alındığında sonuçların (Arscot, 1964) çalışmasıyla çakıştığı elde edilmiştir.

5.2. Öneriler

Bu çalışmada uyumlu türev kullanılmıştır. Problem, oransal türev veya zaman skalasında oransal türevle yeniden ele alınıp sonuçlar karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR

Abdeljawad, T. (2015). “On conformable fractional calculus.” Journal of computational and Applied Mathematics, Vol. 279, pp. 57-66.

Allahverdiev, B. P., Tuna, H. and Yalçinkaya, Y. (2019). “Conformable fractional Sturm-Liouville equation.” Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 42, No. 10, pp. 3508-3526.

Annaby, M. H. and Mansour, Z. S. (2005). “Basic Sturm–Liouville problems.” Journal of Physics A: Mathematical and General, Vol. 38, No. 17, pp. 3775.

Arscott, F. M. (1957). “Integral equations for ellipsoidal wave functions.” The Quarterly Journal of Mathematics, Vol. 8, No. 1, pp. 223-235.

Arscott, F. M. (1959). “A new treatment of the ellipsoidal wave equation.” Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 3, No. 1, pp. 21-50.

Arscot, F. M., (1964a). “Two-parameter Eigenvalue Problems in Differential Equations.”, Proc. London Math. Soc., Vol. 3, No. 14, pp. 459-70.

Arscott, F. M. (1964b). “Integral equations and relations for Lamé functions.” The Quarterly Journal of Mathematics, Vol. 15, No. 1, pp. 103-115.

Atkinson, F. V. (1972). Multiparameter eigenvalue problems. Academic Press, New York.

Atkinson, F. V., and Weiss, G. H. (1964). “Discrete and continuous boundary problems.” Physics Today, Vol. 17, No. 9, pp. 84.

Butzer, P. L. and Westphal, U. (2000). An introduction to fractional calculus. In Applications of fractional calculus in physics (pp. 1-85).

Dehghan, M. and Mingarelli, A. B. (2020). “Fractional Sturm–Liouville eigenvalue problems, I.” Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, Vol. 114, No. 2, pp. 46.

Dehghan, M. and Mingarelli, A. B. (2022). “Fractional Sturm–Liouville Eigenvalue Problems, II.” Fractal and Fractional, Vol. 6, No. 9, pp. 487.

Elbadi, D. (2021). Uyumlu türevli ikinci mertebeden diferansiyel denklemler, Yüksek Lisans Tezi, Mersin Üniversitesi, Mersin, Türkiye.

Freiling, G. and Yurko, V., (2001). “Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications.” Nova Science Pub, Inc., pp. 305.

Gorenflo, R. and Mainardi, F. (1997). Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order (pp. 223-276). Springer Vienna.

Gülşen, T., Yilmaz, E. and Kemaloğlu, H. (2018). “Conformable fractional Sturm-Liouville equation and some existenceresults on time scales.” Turkish Journal of Mathematics, Vol.42, No. 3, pp. 1348-1360.

Hilfer, R. (Ed.). (2000). Applications of fractional calculus in physics. World scientific.

Katugampola, U.N. (2014). “A new approach to generalized fractional derivatives,” Bull. Math. Anal. Appl. Vol. 6, No. 4, pp. 1–15

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., and Sababheh, M. (2014). “A new definition of fractional derivative.” Journal of computational and applied mathematics, Vol. 264, pp. 65-70.

Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations (Vol. 204). elsevier.

Koning, D. E. (2015). Fractional Calculus (Doctoral dissertation, Faculty of Science and Engineering).

Koyunbakan, H. (2023). “Uniqueness of the potential in conformable Sturm-Liouville problem.” Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 46, No. 16, pp. 17461-17468.

Levitan, B.M. and Sargsyan, I.S., (1975). “Introduction to spectral Theory; SelfAdjoint Ordinary Differential Operators.” American Mathematical Society, Province, Rhode Island, pp. 525.

Li, C. and Deng, W. (2007). “Remarks on fractional derivatives.” Applied mathematics and Computation, Vol. 187, No. 2, pp. 777-784.

Malurkar, S. L. (1935). “Ellipsoidal Wave-Functions.” Indian J. Phys. Vol. 9, pp. 45-80.

Marchenko, V. A. (2011). Sturm-Liouville operators and applications (Vol. 373). American Mathematical Soc..

Miller, K.S. and Ross B. (1993). An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons, New York.

Musraini, M., Efendi, R., Lily, E., and Hidayah, P. (2019). “Classical properties on conformable fractional calculus”. Pure and Applied Mathematics Journal, Vol. 13, No. 2, pp. 83-87.

Oldham K.B. and Spanier J., (1974). The Fractional Calculus, Academic Press, New York.

Podlubny, I.. (1999). Fractional Differential Equations, Academic Press, New York.

Rossikhin, Y.A. and Shitikova M.V. (1997). “Applications of Fractional Calculus to Dynamic Problems of Linear and Nonlinear Hereditary Mechanics of Solids”, Applied Mechanics Reviews, Vol.50, pp. 15-67.

Samko, S.G., Kilbas A.A. and Marichev O.I., (1993). Fractional Integrals and Derivatives-Theory and Applications, Gordon and Breach, Longhorne PA.

Sleeman, B. D. (1972). “The two-parameter Sturm-Liouville problem for ordinary differential equations. II.” Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 34, No. 1, pp. 165-170.

Zayernouri, M. and Karniadakis, G. E. (2013). “Fractional Sturm–Liouville eigen-problems: theory and numerical approximation.” Journal of Computational Physics, Vol. 252, 495-517.

Zayernouri, M., Ainsworth, M. and Karniadakis, G. E. (2015). “Tempered fractional Sturm--Liouville eigenproblems.” SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 37, No. 4, pp. A1777-A1800.

Zettl, A. (2005). Sturm-liouville theory (No. 121). American Mathematical Soc..

Zheng, Z., Zhao, W. and Dai, H. (2019). “A new definition of fractional derivative.” International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 108, pp. 1-6.