



ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNİN DENKLEM VE EŞİTSİZLİK
KAVRAMLARINA İLİŞKİN RUTİNLERİNİN İNCELENMESİ

Tuba Akçakoca

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKİM, 2024

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU

Bu tezin tüm hakları saklıdır. Kaynak göstermek koşuluyla tezin teslim tarihinden itibaren on iki (12) ay sonra tezden fotokopi çekilebilir.

YAZARIN

Adı : Tuba

Soyadı : Akçakoca

Bölümü : Matematik Eğitimi

İmza :

Teslim Tarihi :

TEZİN

Türkçe Adı: Ortaöğretim Öğrencilerinin Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarına İlişkin Rutinlerinin İncelenmesi

İngilizce Adı: Examination of the Routines of Secondary School Students Related to Concepts of Equations and Inequalities

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı: Tuba Akçakoca

İmza:

JÜRİ ONAY SAYFASI

Tuba Akçakoca tarafından hazırlanan “Ortaöğretim Öğrencilerinin Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarına İlişkin Rutinlerinin İncelenmesi” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Gazi Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ziya Argün

(Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

İkinci Danışman: Doç. Dr. Gönül Yazgan Sağ

(Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

Başkan: Prof. Dr. Ahmet Arıkan

(Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

Üye: Prof. Dr. Selami Ercan

(Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi)

Üye: Doç. Dr. Elçin Emre Akdoğan

(Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, TED Üniversitesi)

Üye: Doç. Dr. Handan Demircioğlu

(Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi)

Üye: Doç. Dr. Mesture Kayhan Altay

(Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi)

Tez Savunma Tarihi: 18/09/2024

Bu tezin Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Doktora tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Şaban ÇETİN

Eğitim Bilimleri Enstitü Müdürü



Kendime

TEŞEKKÜR

Doktora tez sürecim boyunca akademik birikimi ve tecrübeleriyle sağlıklı adımlar atmamı sağlayan, paylaştığı değerli görüş ve öneriyle bakış açımı geliştiren ve ufkumu açan kıymetli danışmanım Prof. Dr. Ziya Argün'e üzerimdeki tüm emeği için teşekkürü bir borç bilir ve saygılarımı sunarım.

Doktora tez sürecimde öğrencisi olmanın mutluluğunu yaşadığım ve çalışmamın her aşamasında gece gündüz demeden akademik birikimini ve yardımlarını esirgemeyen, güler yüzlü, olumlu tavırlarıyla çalışma sürecimi hızlandıran ve zorlandığım her anda beni cesaretlendiren ve yola devam etmemi sağlayan motivasyon kaynağım, akademik duruşunu ve kişiliğini örnek aldığım değerli hocam ve kıymetli danışmanım Doç. Dr. Gönül Yazgan Sağ'a da üzerimdeki tüm emekleri için teşekkürü bir borç bilir ve saygılarımı sunarım.

Tez izleme komitesinde farklı bakış açısıyla ve değerli görüşleriyle çalışmama sunduğu katkılardan dolayı değerli hocam Prof. Dr. Ahmet Arıkan'a saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Tez izleme sürecinde ve ihtiyacım olduğu her zamanda bana değerli vaktini ayırarak çalışmama ve teoriye yönelik değerli görüşlerini ve önerilerini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Elçin Emre Akdoğan'a da sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm sürecimde ve hayatımın her anında anlayışlı tavırlarından ve bana olan desteğinden dolayı eşim Gökhan Akçakoca'ya ve bu zorlu süreçte hedeflerine ulaşmak için gösterdiği sabır, azim, istek ve gayretinden dolayı kendime teşekkür ederim.

**ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNİN DENKLEM
VE EŞİTSİZLİK KAVRAMLARINA İLİŞKİN RUTİNLERİNİN
İNCELENMESİ**
(Doktora Tezi)

Tuba Akçakoca
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ekim 2024

ÖZ

Matematik bir söylem olarak ele alındığında, (Commognitive teoriye göre) matematiği öğrenme kişinin söylemsel rutinlerinde meydana gelen değişimler yoluyla yetkin bir birey haline gelmesi olarak tanımlanır. Bu bağlamda ortaöğretim öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik kavramlarına dair öğrenmelerine odaklanan bu araştırmanın amacı, ortaöğretim öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait görev durumlarında rutinlerinin yapısını açıklığa kavuşturmak ve buna bağlı olarak matematiksel söyleme katılımlarını incelemektir. Bu bağlamda bu çalışmada öğrencilerin (mümkünse) kavramlara yönelik rutin gelişimlerinin nasıl gerçekleştiğini araştırmak da amaçlanmıştır. Bu doğrultuda araştırmanın katılımcıları, Türkiye’de bir devlet lisesinde Matematik ve Fen bilimleri ağırlıklı dersleri alan ve 11. sınıfta öğrenim gören 3 öğrencidir. Araştırmanın katılımcıları belirlenirken, katılımcılardan zengin bir veri kaynağı elde edebilmek için amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın verileri, katılımcıların belirlenmesi

sürecinde de kullanılan tarama formları, yarı-yapılandırılmış bireysel ve odak grup görüşmeleri ve bu görüşmelerde öğrencilere ait yazılı kaynaklar aracılığıyla toplanmıştır. Araştırmanın bulguları, tarama formunda yer alan katılımcı yanıtlarına yönelik yürütülen ve yaklaşık 90 ile 120 dakika arasında süren bireysel görüşmeler ile 11 farklı oturumda ve 26 farklı görev durumu için yürütülen odak grup görüşmelerindeki verilerden elde edilmiştir. Araştırmada hem bireysel görüşmeler hem de odak grup görüşmelerinin tamamı iki kamera ve bir ses kayıt cihazı aracılığıyla kayıt altına alınmıştır. Araştırmanın bulguları sunulurken hem söylem analizinin detaylı olması hem de katılımcıların benzer bulguları sunması sebebiyle, zengin veri kaynağı sunduğu ön görülen üç katılımcının verilerine yönelik bulgulara yer verilmiştir. Araştırmada öğrencilerin söyleme katılım biçimlerini analiz edebilmek için bir kriter listesi geliştirilmiştir. Bu kriter listesi esas alınarak öğrencilerin hem bireysel görüşmelerde hem de odak grup görüşmelerinde rutinleri aracılığıyla matematiksel söyleme katılımları; söylemin nesneleştirilmesi, esneklik, bağlılık-tutarlılık, gerekçelendirme, katılımcının yetkinliği ve uygulanabilirlik özellikleri bağlamında analiz edilmiştir. Öğrencilerin gözlemlenen rutin gelişimlerinin nasıl olduğu ise, bireysel ve odak grup görüşmelerinden elde edilen bulguların bütüncül bir bakış açısıyla ele alınarak yorumlanmasıyla izah edilmiştir. Araştırmanın bulguları, öğrencilerin matematiksel söyleme ritüel ve keşif rutinlerini bir arada kullanarak katılım sağladıklarını göstermiştir. Öğrenciler kavramların yapısına ve özelliklerine yönelik söyleme çoğunlukla keşif rutinleri aracılığıyla katılırken, işlemsel prosedürleri içeren rutinleriyle söyleme çoğunlukla ritüel katılmışlardır. Araştırmanın bulguları, söyleme katılımında rutinlerini sosyal bir bağ kurma ve başkalarını memnun etme amacıyla ve daha deneyimli katılımcıların yaptıkları üzerine düşünmeden, onları taklit etme yoluyla sergileyen öğrencilerin rutinlerinde bir gelişimin gözlemlenemeyebileceğini ortaya koymuştur. Bununla birlikte bu bulgular, öğrencilerin rutinlerini anlatı üretmeyi hedefleyerek ve daha tecrübeli katılımcıların ya da uzmanların söylemleri üzerine düşünerek sergilediğinde; matematiksel söylemleri bireyselleştirebileceğini, yani matematiksel söylemleri kendi düşüncesinin bir parçası haline getirebileceğini göstermiştir. Bu doğrultuda öğrencilerin karşılaştıkları görev durumlarının ve uzman söylemlerinin; matematiksel söylemi bireyselleştirmelerinde etkili olabileceği sonucuna varılmıştır. Bununla birlikte öğretim sürecinde, matematik öğrenme ortamlarında kavramların yapısına ve farklı gelişmelerine yönelik söylemsel iletişimlere yer verilmesinin öğrencilerin matematiksel söyleme daha keşifsel bir şekilde katılmalarını sağlayabileceği sonucuna da ulaşılmıştır. Ayrıca araştırmanın bulguları, ritüel rutinlerin keşif rutinine dönüşmesinin yanı sıra mevcut keşif rutinine dair anlatıların giderek zenginleşmesi ve farklı öğrenme ortamlarında aynı türden sergilenen rutinlerde söyleme katılım biçiminde değişiklik olması yoluyla da öğrenci rutinlerinde gelişimin gözlemlenebileceğini göstermiştir.



Anahtar Kelimeler : Matematiksel söylem, söylemsel rutinler, ritüel katılım, hibrit katılım, keşifsel katılım, denklem ve eşitsizlikler, ortaöğretim öğrencileri

Sayfa Adedi : xxxii+507

Danışman : Prof. Dr. Ziya Argün

İkinci Danışman : Doç. Dr. Gönül Yazgan Sağ

EXAMINATION OF THE ROUTINES OF SECONDARY SCHOOL STUDENTS RELATED TO CONCEPTS OF EQUATIONS AND INEQUALITIES

(Ph.D Thesis)

Tuba Akçakoca

GAZI UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES

October 2024

ABSTRACT

When mathematics is considered a discourse (according to Commognitive theory), learning mathematics may also be defined as becoming a competent individual in mathematical discourse through changes in a person's discursive routines. The purpose of this research, which focuses on the learning of secondary school students about the concepts of equations and inequality, is to clarify the structure of the routines of secondary school students in task situations related to the concepts of equations and inequality and, accordingly, to examine their participation in mathematical discourse. This research also aims to investigate how the routine development of students towards concepts takes place (if possible). The participants of this study consisted of three students taking mostly Mathematics and Science courses in the 11th grade of a public high school in Turkey. The study participants were determined by the purposeful sampling method to obtain a rich

source of data from the participants. The research data were collected through the survey forms used to determine the participants, semi-structured individual and focus group interviews, and written resources belonging to the students in these interviews. The study's findings were obtained from the data of the individual interviews conducted for the participant responses contained in the survey form, which lasted between 90 and 120 minutes, as well as focus group interviews conducted in 11 different sessions and for 26 different task situations. Individual and focus group interviews were recorded via two cameras and an audio recorder. While presenting the findings of the research, due to the detailed discourse analysis and the fact that the participants presented similar findings, the findings related to the data of the three participants, who were considered to offer a rich data source. A criterion list has been developed to analyze the students' participation in the discourse. Based on this criterion list, students' participation in mathematical discourse through their routines in individual and focus group interviews was analyzed in discourse objectification, flexibility, bondedness-consistency, substantiability, performer's agentivity, and applicability characteristics. How the students' routine development is explained by interpreting the findings obtained from individual and focus group interviews from a holistic point of view. The study's findings showed that students participated in mathematical discourse by using a combination of ritual and exploration routines. When the students' routines were examined, it was observed that while they mostly participated in the discourse about the structure and characteristics of concepts through explorative routines, their routines involving their operational procedures were mainly rituals. According to the findings, it was revealed that an improvement may not be observed in the routines of students who exhibit their routines in participating in discourse for social acceptance and pleasing others and by imitating them, without thinking about what more experienced participants do. However, these findings showed that when students exhibit their routines by aiming to produce narratives and think about the discourses of more experienced participants or experts, they have demonstrated that they could individualize mathematical discourses, making mathematical discourses a part of their own thought. In this direction, it has been concluded that the task situations and expert discourses encountered by students can be effective in individualizing mathematical discourse. They have also concluded that giving place to discursive communications aimed at the structure and different realizations of concepts in mathematics learning environments during the teaching process may enable students to participate in more explorative mathematical discourse. Lastly, the findings of this study have shown that the development of student routines can be observed through the transformation of ritual routines into exploration routines, the increasing enrichment of narratives about the current exploration routine, and changes in the way of participation in the same kind of routines exhibited in different learning environments.



Key words : Mathematical discourse, discursive routines, ritual participation, hybrid participation, explorative participation, equations and inequalities, secondary school students

Page number : xxxii+507

Supervisor : Prof. Dr. Ziya Argün

Co-supervisor : Assoc. Prof. Dr. Gönül Yazgan Sağ

İÇİNDEKİLER

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU	iv
ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI.....	v
JÜRİ ONAY SAYFASI	vi
TEŞEKKÜR	viii
ÖZ.....	ix
ABSTRACT.....	xii
İÇİNDEKİLER	xv
TABLolar LİSTESİ.....	xix
ŞEKİLLER LİSTESİ	xxiv
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xxxii
BÖLÜM I.....	1
GİRİŞ	1
Problem Durumu	1
Araştırmanın Problemi	8
Alt Problemler	8
Araştırmanın Amacı	8
Araştırmanın Önemi.....	9
Araştırmanın Varsayımları.....	14
Araştırmanın Sınırlılıkları	14
Araştırmanın Sınırlamaları	14
Tanımlar	15
BÖLÜM II	18
KAVRAMSAL ÇERÇEVE.....	18
Sosyokültürel Teoriler	18
Commognitive Teori	20

Rutinler	25
Rutinleştirme Bağlamında Matematiksel Öğrenme	29
Ritüel Katılım ve Keşifsel Katılım	33
<i>Söylemin Nesneleştirilmesi (Objectification of the Discourse)</i>	35
<i>Esneklik (Flexibility)</i>	39
<i>Bağlılık (Bondedness)</i>	40
<i>Katılımcının Yetkinliği (Performer's Agentivity)</i>	40
<i>Gerekçelendirme (Substantiability)</i>	41
<i>Uygulanabilirlik (Applicability)</i>	42
İlgili Çalışmalar	43
Matematik Eğitiminde Öğrencilerin Rutinlerine ve Söyleme Katılımlarına	
Odaklanan İlgili Araştırmalar	48
BÖLÜM III.....	53
YÖNTEM.....	53
Araştırmanın Deseni.....	53
Katılımcıların Belirlenmesi ve Araştırmanın Katılımcıları.....	54
Katılımcıların Belirlenmesi	54
Araştırmanın Katılımcıları	57
Araştırmacının Rolü	59
Veri Toplanması.....	62
Veri Toplama Araçları	62
Görev Durumlarının Hazırlanması	62
<i>Odak Grup Görüşmeleri ve Görev Durumlarının Uygulanması</i>	66
Veri Toplama Süreci	72
Verilerin Analizi.....	74
Verilerin Transkripti	74
Verilerin Kodlanması	77
<i>Commognitive Bakış Açısıyla Denklem ve Eşitsizlik Kavramları</i>	84
Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği	98

BÖLÜM IV	100
BULGULAR VE YORUM.....	100
Katılımcıların Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarına İlişkin Rutinleri ve Söyleme Katılımına Yönelik Bulgular.....	103
Elif'in Bireysel Görüşmelerdeki Rutinleri ve Söyleme Katılımına Yönelik Bulgular.....	103
Elif'in Odak Grup Görüşmelerindeki Rutinleri ve Söyleme Katılımına Yönelik Bulgular.....	148
Burcu'nun Bireysel Görüşmedeki Rutinleri ve Söyleme Katılımına Yönelik Bulgular.....	205
Burcu'nun Odak Grup Görüşmelerindeki Rutinleri ve Söyleme Katılımına Yönelik Bulgular	263
Zehra'nın Bireysel Görüşmedeki Rutinleri ve Söyleme Katılımına Yönelik Bulgular.....	314
Zehra'nın Odak Grup Görüşmelerindeki Rutinleri ve Söyleme Katılımına Yönelik Bulgular	360
Katılımcıların Rutin Gelişimlerine Yönelik Bulgular	410
BÖLÜM V.....	441
SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER.....	441
Sonuçlar ve Tartışma.....	441
Öneriler.....	458
KAYNAKLAR	469
EKLER.....	481
EK 1. Etik Komisyon Onay Formu	482
EK 2. Araştırma için MEB İzin Belgesi	483
EK 3. Katılımcılar için Bilgilendirilmiş Gönüllü Olur Formu	485
EK 4. Veli Onam Formu	486
EK 5. Katılımcı Belirleme Tarama Formu.....	487
EK 6. Einat Heyd-Metzuyanım ile Mail Yoluyla Yapılan Yazışma.....	494
EK 7. Araştırmacının Ders Materyalleri	495
EK 8. Görev Durumları.....	504

EK 9. Çalışma Ortamı Fotoğrafları	507



TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1. <i>Rutin Türleri</i>	27
Tablo 2. <i>Rutinlerin Ritiel Yönlerini Keşifsel Yönlerinden Ayırmaya Yardımcı Olacak Özellikler</i>	43
Tablo 3. <i>Katılımcıları Belirlemede Kullanılan Tarama Formunun İçeriği</i>	56
Tablo 4. <i>Araştırmacının Yürüttüğü Derslerin Süreci ve İçeriği</i>	61
Tablo 5. <i>Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı (Polinom Biçiminde) Denklem ve Eşitsizliklerle İlgili Kazanımlar</i>	64
Tablo 6. <i>Görev Durumlarının İçeriği</i>	65
Tablo 7. <i>Odak Grup Görüşmelerinde Araştırmacının Kullandığı Tetikleyiciler</i>	71
Tablo 8. <i>Pilot Uygulama ve Görüşme Süreci</i>	72
Tablo 9. <i>Tarama Formunun Uygulanma Süreci</i>	73
Tablo 10. <i>Bireysel Görüşme Süreci</i>	73
Tablo 11. <i>Odak Grup Görüşmelerinin Süreci</i>	74
Tablo 12. <i>Veri Analizi Kriter Listesi</i>	80
Tablo 13. <i>Polinom Biçimindeki Denklem ve Eşitsizliklere Ait Söylemlerdeki Anahtar Kelimeler ve Tanımları</i>	86
Tablo 14. <i>Polinom Biçimindeki Denklem ve Eşitsizliklere Ait Söylemlerdeki Görsel Aracı Örnekleri</i>	89
Tablo 15. <i>Polinom Biçimindeki Denklem ve Eşitsizliklere Ait Kanonik Anlatılar</i>	92

Tablo 16. Elif'in "Denklemin Çözümü" Kavramına Dair Prosedürü.....	111
Tablo 17. Elif'in Denklemleri ve Eşitsizlikleri Çözme Prosedürü.....	112
Tablo 18. Elif'in Birinci Dereceden İki Değişkenli Denklem Sistemine Dair Prosedürü..	117
Tablo 19. Elif'in Eşitsizlik Sistemini (Yok Etme Metoduyla) Çözme Prosedürü.....	121
Tablo 20. Elif'in İkinci Dereceden Tek Değişkenli Denklem Çözümüne Ait Cebirsel Gerçekleşmeleri.....	125
Tablo 21. Elif'in İkinci Dereceden Tek Değişkenli Denklemlere Dair Görsel Aracıları...	126
Tablo 22. Elif'in Problem İçeren Görev Durumlarına Ait Cebirsel Gerçekleşmeleri.....	127
Tablo 23. Elif'in Bireysel Görüşmedeki Rutin Profili.....	129
Tablo 24. Elif'in Bireysel Görüşmedeki Rutinlerinin Türü.....	137
Tablo 25. Elif'in Rutinleri Aracılığıyla Kriterler Bağlamında Bireysel Görüşmede Söyleme Katılım Türü.....	148
Tablo 26. Elif'in GD5'te Yer Alan Denklemi Çözme Prosedürü.....	157
Tablo 27. Elif'in GD9'da Yer Alan Denklem Sistemini Çözme Sürecindeki İletişimi.....	161
Tablo 28. Elif'in $f(x) = 15x - x^2$ Fonksiyonunun Grafiğini Çizerken Uyguladığı Prosedürü.....	171
Tablo 29. Elif'in Odak Grup Görüşmelerindeki Rutin Profili.....	177
Tablo 30. Elif'in Odak Grup Görüşmelerindeki Rutinlerinin Türü.....	187
Tablo 31. Elif'in Odak Grup Görüşmelerindeki Yetkinliğine Yönelik İletişim Örnekleri..	197
Tablo 32. Elif'in Rutinlerinin Görev Durumlarındaki Uygulanabilirliği.....	202
Tablo 33. Elif'in Rutinleri Aracılığıyla Kriterler Bağlamında Odak Grup Görüşmelerindeki Söyleme Katılım Türü.....	204
Tablo 34. Burcu'nun "Her Eşitsizlik Bir Denklemdir" Anlatısına Dair Prosedürü.....	212
Tablo 35. Burcu'nun Denklemleri ve Eşitsizlikleri Çözme Prosedürü.....	217
Tablo 36. Burcu'nun Birinci Dereceden İki Değişkenli Denklem Sistemine Dair Prosedürü.....	222

Tablo 37. <i>Burcu'nun Yok Etme Metodunu Ezbere (Katı) Bir Şekilde Uyguladığı Prosedürleri.....</i>	223
Tablo 38. <i>Burcu'nun Birinci Dereceden İki Değişkenli Denklem Sistemlerinin Analitik Düzlemdeki Çözümüne Yönelik İletişimi.....</i>	224
Tablo 39. <i>Burcu'nun İkinci Dereceden Tek Değişkenli Denklemlerin Çözümlerini Belirlerken Uyguladığı Prosedürleri.....</i>	230
Tablo 40. <i>Burcu'nun Çözümü Verilen İkinci Dereceden Tek Değişkenli Denklemi Yazma Prosedürü.....</i>	232
Tablo 41. <i>Burcu'nun Problem İçeren Görev Durumlarına Ait Cebirsel Gerçekleşmeleri.....</i>	233
Tablo 42. <i>Burcu'nun Bireysel Görüşmedeki Rutin Profili.....</i>	235
Tablo 43. <i>Burcu'nun Bireysel Görüşmedeki Rutinlerinin Türü.....</i>	244
Tablo 44. <i>Burcu'nun Söylemini Nesneleştirmede Ritüel Bir Katılım Sergilediği İletişimsel Örnekleri.....</i>	246
Tablo 45. <i>Burcu'nun Rutinleri Aracılığıyla Kriterler Bağlamında Bireysel Görüşmede Söyleme Katılım Türü.....</i>	262
Tablo 46. <i>Burcu'nun Eşitsizlikleri Çözme Prosedürü.....</i>	275
Tablo 47. <i>Burcu'nun Birinci Dereceden Tek Değişkenli Denklem Çözme Prosedürü.....</i>	278
Tablo 48. <i>Burcu'nun Elif'in Söylemlerini Tekrar Eden Benzer Söylemleri.....</i>	282
Tablo 49. <i>Burcu'nun GD20, GD21 ve GD22'ye Yönelik Prosedürü ve Söylemsel İletişimleri.....</i>	291
Tablo 50. <i>Burcu'nun Odak Grup Görüşmelerindeki Rutin Profili.....</i>	299
Tablo 51. <i>Burcu'nun Odak Grup Görüşmelerindeki Rutinlerinin Türü.....</i>	306
Tablo 52. <i>Burcu'nun Rutinleri Aracılığıyla Kriterler Bağlamında Odak Grup Görüşmelerinde Söyleme Katılım Türü.....</i>	314
Tablo 53. <i>Zehra'nın Denklem Çözme Prosedürü.....</i>	323

Tablo 54. Zehra'nın Birinci Dereceden Tek Değişkenli Denklem ve Eşitsizlik Çözme Prosedürü.....	325
Tablo 55. Zehra'nın Denklem ve Eşitsizlik Sistemlerinin Çözüm Kümelerini Belirlemede Uyguladığı Benzer Adımları İçeren Prosedürleri.....	331
Tablo 56. Zehra'nın Birinci Dereceden İki Değişkenli Denklem Sistemine Dair Prosedürü.....	335
Tablo 57. Zehra'nın İkinci Dereceden Tek Değişkenli Denklemleri Çözme Prosedürü....	338
Tablo 58. Zehra'nın Problem İçeren Görev Durumlarına Ait Cebirsel Gerçekleşmeleri..	339
Tablo 59. Zehra'nın Bireysel Görüşmedeki Rutin Profili.....	340
Tablo 60. Zehra'nın Bireysel Görüşmedeki Rutinlerinin Türü.....	347
Tablo 61. Zehra'nın BG-Z4, BG-Z8 ve BG-Z10 Kodlu Rutinlerinde Performansını Gerekçelendirmesinin İletişimsel Örnekleri.....	354
Tablo 62. Zehra'nın Rutinleri Aracılığıyla Kriterler Bağlamında Bireysel Görüşmede Söyleme Katılım Türü.....	359
Tablo 63. Zehra'nın GD5'te Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarının Tanımına Yönelik İletişimsel Örnekleri ve Yorumlar.....	364
Tablo 64. Zehra'nın Birinci Dereceden Tek Değişkenli Denklem ve Eşitsizlikleri Çözme Prosedürü.....	373
Tablo 65. Zehra'nın " $x^2 - 6x + 2 = 0$ " Denkleminin Reel Sayılarda Çözüm Kümesini Belirleme Prosedürü.....	381
Tablo 66. Zehra'nın İkinci Dereceden Tek Değişkenli Bağıntılara Yönelik Prosedürü....	383
Tablo 67. Zehra'nın Odak Grup Görüşmelerindeki Rutin Profili.....	388
Tablo 68. Zehra'nın Odak Grup Görüşmelerindeki Rutinlerinin Türü.....	396
Tablo 69. Zehra'nın Katılımcının Yetkinliğinde Hibrit Bir Katılım Sergilediği İletişimsel Örnekleri.....	405
Tablo 70. Zehra'nın Rutinleri Aracılığıyla Kriterler Bağlamında Odak Grup Görüşmelerinde Söyleme Katılım Türü.....	410

Tablo 71. <i>Elif'in Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarını Tanımlama Rutine Yönelik Söylemleri</i>	417
Tablo 72. <i>Elif'in Çözüm Kümesi ya da Çözüm Kümesinin Elemanları Hakkında Konuşurken Ürettiği Anlatıları</i>	419
Tablo 73. <i>Elif'in Denklem ve Eşitsizlik Sistemlerine Yönelik Anlatılarının Zenginleştiğini Gösteren Bulguları</i>	422
Tablo 74. <i>Elif'in Gelişim Gözlemlenen Rutinleri</i>	427
Tablo 75. <i>Zehra'nın Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarını Tanımlama Rutine Yönelik Söylemleri</i>	430
Tablo 76. <i>Zehra'nın Çözüm Kümesi ya da Çözüm Kümesinin Elemanları Hakkında Konuşurken Ürettiği Anlatıları</i>	433
Tablo 77. <i>Zehra'nın Gelişim Gözlemlenen Rutinleri</i>	437

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Göstergelerin matematiksel söylemde farklı türdeki gerçekleştirmeleri	37
Şekil 2. 22. görev durumuna ait katılımcı (Burcu) çalışma kâğıdı örneği.....	68
Şekil 3. 22. görev durumuna ait katılımcı (Zehra) çalışma kâğıdı örneği.....	69
Şekil 4. “ $11 + 2(x - 3) = 7, x \in \mathbb{R}$ ” göstergesine ait gerçekleştirme ağacı örneği.....	97
Şekil 5. Elif’in denklem ve eşitsizlik tanımına dair sözel ve cebirsel gerçekleştirmeleri.....	105
Şekil 6. Elif’in denklem tanımına dair sözel ve cebirsel gerçekleştirmeleri.....	106
Şekil 7. Elif’in eşitsizlik tanımına dair sözel ve cebirsel gerçekleştirmeleri.....	106
Şekil 8. Elif’in denklem ve eşitsizlik tanımına dair görsel gerçekleştirmeleri.....	107
Şekil 9. Elif’in “denklemin çözümü” tanımına dair görsel gerçekleştirmeleri.....	110
Şekil 10. Elif’in “ $x, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{1}{x+2} - 2z = 9 \wedge \frac{x}{x+2} + 4z = -18$ ” biçimindeki cebirsel ifadesine yönelik görsel araçları.....	115
Şekil 11. Elif’in denklem ve eşitsizlik sistemi tanımına dair görsel araçları.....	116
Şekil 12. Elif’in Oturum 3’teki görev durumu 3’e ait gerçekleştirme ağacı.....	119

Şekil 13. Elif'in Oturum 3'teki eşitsizlik sistemi çözümüne ait gerçekleşme ağacı.....	120
Şekil 14. Elif'in ikinci dereceden tek değişkenli denklem tanımına dair görsel araçları..	122
Şekil 15. Elif'in ikinci dereceden denklemlere dair anlatısının sözel gerçekleşmesi.....	123
Şekil 16. Elif'in " $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-x(x + 6) = 2$ " göstergesine dair görsel araçları.....	124
Şekil 17. Elif'in " $3x - 2(x - 4) = 4(x + 1)$ " denklemine ait prosedürü.....	138
Şekil 18. Elif'in " $2x^2 + x - 3 = 0$ " göstergesine dair gerçekleştirmeleri.....	142
Şekil 19. Elif'in GD1'deki denklem tanımının sözel gerçekleşmesi.....	150
Şekil 20. Elif'in odak grup görüşmelerindeki denklem ve eşitsizlik tanımına yönelik sözel gerçekleştirmeleri.....	152
Şekil 21. Elif'in denklem ve eşitsizlik çözümüne dair görsel araçları.....	154
Şekil 22. Elif'in çözüm kümesinin boş küme olduğunu belirten görsel araçları.....	155
Şekil 23. Elif'in birinci dereceden denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürü.....	156
Şekil 24. Elif'in GD22'de yer alan denklem sistemini çözme prosedürü.....	159
Şekil 25. Elif'in birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sistemi çözme prosedürü.....	164
Şekil 26. Elif'in " $y \leq 2 - x, x, y \in \mathbb{R}$ " eşitsizliğini çözme prosedürü.....	165
Şekil 27. Elif'in " $t^2 + 4t = -1, t \in \mathbb{R}$ " biçimindeki ikinci dereceden denklemi çözme prosedürleri.....	165
Şekil 28. Elif'in GD15'e yönelik sözel gerçekleştirmeleri.....	166
Şekil 29. Elif'in ikinci dereceden denklemlerin çözümlerini çarpanlarına ayırma metoduyla belirleme prosedürü.....	167
Şekil 30. Elif'in ikinci dereceden tek değişkenli denklemlere yönelik görsel araçları....	168

Şekil 31. Elif'in GD21 ve GD23 için anlatılarını onaylayan görsel araçları.....	169
Şekil 32. " $x^2 - 3x = y$ " bağıntısının grafiksel bir gerçekleşmesi.....	170
Şekil 33. Elif'in GD19'da için uyguladığı prosedürün görsel gerçekleştirmeleri.....	172
Şekil 34. Elif'in $f(x) = -x^2 + 50x + 600$ fonksiyonunun tepe noktasının ordinatını bulurken kullandığı görsel araçlar.....	173
Şekil 35. Elif'in GD23'e ait gerçekleştirme ağacı.....	174
Şekil 36. Elif'in " $-2x^2 - 4x - 2 \leq 0$ " eşitsizliğine yönelik prosedürün görsel gerçekleşmesi.....	175
Şekil 37. " $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ " eşitsizliğinin çözümüne yönelik görsel gerçekleştirme.....	175
Şekil 38. Elif'in eşitsizlik ve eşitsizlik sistemlerini çözme prosedürü.....	176
Şekil 39. Burcu'nun denklem ve eşitsizlik tanımlarına yönelik sözel gerçekleştirmeleri.....	207
Şekil 40. Burcu'nun denklem ve eşitsizliklere yönelik sözel gerçekleştirmeleri.....	207
Şekil 41. Burcu'nun denklem ve eşitsizlik örneklerine yönelik görsel araçları.....	209
Şekil 42. Burcu'nun denklem ve eşitsizlik kavramları arasındaki ilişkiye dair sözel gerçekleştirmeleri.....	210
Şekil 43. Burcu'nun denklem ve eşitsizlik kavramları arasındaki ilişkiye dair görsel araçları.....	211
Şekil 44. Burcu'nun denklemin çözümüne yönelik örneği.....	214
Şekil 45. Burcu'nun denklemin çözümüne yönelik görsel araçları.....	214
Şekil 46. Burcu'nun oturum 4'te yer alan 4. görev durumu için kullandığı görsel araçları.....	216
Şekil 47. Burcu'nun " $3x - 15 = 3x - 15, x \in \mathbb{R}$ " özdeşliğine yönelik farklı prosedürlerinin görsel gerçekleştirmeleri.....	220

<i>Şekil 48.</i> Burcu'nun denklem ve eşitsizlik sistemi tanımına dair sözel gerçekleştirmeleri...	221
<i>Şekil 49.</i> Burcu'nun Oturum 3'teki görev durumu 3'te yer alan denklem sistemi çözümüne ait gerçekleştirme ağacı.....	226
<i>Şekil 50.</i> Burcu'nun eşitsizlik sisteminin çözümüne yönelik görsel araçları.....	227
<i>Şekil 51.</i> Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli denklem tanımına yönelik sözel gerçekleştirmesi.....	228
<i>Şekil 52.</i> Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli denklem tanımına yönelik cebirsel gerçekleştirmeleri.....	228
<i>Şekil 53.</i> Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli denklem tanımına yönelik yazılı yanıtlarında yer alan sözel gerçekleştirmeleri.....	229
<i>Şekil 54.</i> Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli denklemin diskriminantı ile çözüm kümesi arasındaki ilişkiye yönelik görsel araçları.....	231
<i>Şekil 55.</i> Burcu'nun denklem sistemi çözümlerinde prosedür-sonuç ilişkisini kuramadığına yönelik görsel araçları (BG-B7 kodlu rutin).....	252
<i>Şekil 56.</i> Burcu'nun denklem sistemi çözümlerinde prosedür-sonuç ilişkisini kuramadığına yönelik görsel araçları (BG-B8 kodlu rutin).....	253
<i>Şekil 57.</i> Burcu'nun BG-B5 kodlu rutin prosedüründe ardışık adımlarının bağlılığına dair görsel araçları.....	254
<i>Şekil 58.</i> Burcu'nun BG-B9 kodlu rutin prosedürünü gerekçelendirmesine yönelik görsel araçları.....	256
<i>Şekil 59.</i> Burcu'nun odak grup görüşmelerindeki denklem tanımına yönelik sözel gerçekleştirmesi.....	264
<i>Şekil 60.</i> Burcu'nun “ $-4(x - 7) = x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesi için sözel gerçekleştirmesi.....	265

<i>Şekil 61.</i> Burcu'nun denklem ve eşitsizlik kavram tanımına yönelik sözel gerçekleşmesi.....	269
<i>Şekil 62.</i> Burcu'nun denklem ve eşitsizlik arasındaki ilişkiyi ifade eden görsel araçları.....	273
<i>Şekil 63.</i> Burcu'nun GD2 için uyguladığı prosedür ve kullandığı görsel araçları.....	277
<i>Şekil 64.</i> Burcu'nun GD9'a yönelik prosedürünün görsel araçları.....	278
<i>Şekil 65.</i> “ $x - 2y = 4$ ” denklemine dair görsel aracı.....	279
<i>Şekil 66.</i> Ç. $K = \{(0, -2), (4, 0)\}$ ifadesine ait görsel araçlar.....	281
<i>Şekil 67.</i> Burcu'nun “ $y < 8 - 2x, x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğine yönelik görsel araçları.....	283
<i>Şekil 68.</i> Burcu'nun birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlik sistemine yönelik gerçekleşme ağacı.....	284
<i>Şekil 69.</i> Burcu'nun GD20'ye ait kağıdında yer alan görsel araçları.....	285
<i>Şekil 70.</i> Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli denklem tanımına yönelik sözel gerçekleşmesi.....	285
<i>Şekil 71.</i> Burcu'nun odak grup görüşmelerinde ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme prosedürleri.....	287
<i>Şekil 72.</i> Burcu'nun BG-B11 kodlu keşif rutinindeki anlatısını onaylayan görsel araçları.....	289
<i>Şekil 73.</i> Burcu'nun BG-B11 kodlu rutinine yönelik GD26'da yer alan sözel gerçekleşmesi.....	289
<i>Şekil 74.</i> GD14 ve Burcu'nun GD14 için uyguladığı prosedürü.....	290
<i>Şekil 75.</i> Burcu'nun kağıdında yer alan GD21 ve GD22 için uyguladığı prosedürün görsel araçları.....	295

<i>Şekil 76.</i> Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sistemi çözme prosedürü.....	298
<i>Şekil 77.</i> Zehra'nın denklem ve eşitsizlik tanımına yönelik sözel gerçekleşmesi.....	316
<i>Şekil 78.</i> Zehra'nın denklem çözümüne ilişkin sözel gerçekleşmesi.....	317
<i>Şekil 79.</i> Zehra'nın denklem ve eşitsizlik arasındaki ilişkiyi açıklarken kullandığı görsel araçları.....	319
<i>Şekil 80.</i> Zehra'nın denklem ve eşitsizlik arasındaki ilişkiye yönelik söylemlerine ait cebirsel gerçekleştirmeleri.....	320
<i>Şekil 81.</i> Zehra'nın Oturum 2'de yer alan görev durumu 4'e ait görsel araçları.....	322
<i>Şekil 82.</i> Zehra'nın denklem ve eşitsizlik sistemi tanımına yönelik görsel araçları.....	329
<i>Şekil 83.</i> Zehra'nın denklem ve eşitsizlik sistemleri prosedürüne yönelik sözel gerçekleşmesi.....	330
<i>Şekil 84.</i> Zehra'nın denklem sistemi çözümünde prosedür sonuç ilişkisini kuramadığına yönelik sözel gerçekleşmesi.....	333
<i>Şekil 85.</i> Zehra'nın Oturum 3'teki görev durumu 3'e ait gerçekleşme ağacı.....	334
<i>Şekil 86.</i> Zehra'nın ikinci dereceden tek değişkenli denklem örneklerini içeren görsel araçları.....	337
<i>Şekil 87.</i> Zehra'nın ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerin çözümünde yaşadığı güçlüğü gösteren görsel araçları.....	337
<i>Şekil 88.</i> Zehra'nın Oturum 2- Görev durumu 3 için görüşme öncesi kağıdında yer alan görsel araçları.....	352
<i>Şekil 89.</i> Zehra'nın Oturum 2- Görev durumu 2 için görüşme öncesi kağıdında yer alan görsel araçları.....	353

<i>Şekil 90.</i> Zehra'nın odak grup görüşmelerindeki denklem ve eşitsizlik kavramı tanımlarına yönelik sözel gerçekleştirmeleri.....	368
<i>Şekil 91.</i> Zehra'nın denklem ve eşitsizliklerin çözümleri hakkındaki sözel gerçekleştirmesi.....	368
<i>Şekil 92.</i> Zehra'nın sonsuz elemana sahip denklemlerin çözüm kümesine dair cebirsel ve sözel gerçekleştirmesi.....	370
<i>Şekil 93.</i> Zehra'nın denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümesi gösterimine yönelik görsel araçları.....	372
<i>Şekil 94.</i> Zehra'nın GD7'ye yönelik prosedürüne ait görsel araçları.....	375
<i>Şekil 95.</i> Zehra'nın GD9, GD10 ve GD12 için uyguladığı eksik ve hatalı prosedürlerine yönelik görsel araçları.....	376
<i>Şekil 96.</i> Zehra'nın ikinci dereceden tek değişkenli denklemin çözümlerinin varlığını belirleme prosedürü.....	379
<i>Şekil 97.</i> Zehra'nın ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sistemlerini çözme prosedürü.....	386
<i>Şekil 98.</i> Zehra'nın prosedüründe yaşadığı güçlüğüne yönelik sözel gerçekleştirmesi.....	387
<i>Şekil 99.</i> Zehra'nın BG-Z4 kodlu rutin prosedürlerindeki ardışık adımları.....	399
<i>Şekil 100.</i> Zehra'nın görev durumu 8 için uyguladığı prosedürün cebirsel gerçekleştirmeleri.....	400
<i>Şekil 101.</i> Elif'in açık önerme ve denklem kavramlarına yönelik defterinde yer alan notları.....	416
<i>Şekil 102.</i> Elif'in odak grup görüşmeleri bitiminde yaptığı denklem ve eşitsizlik kavramlarının tanımına yönelik sözel gerçekleştirmeleri.....	416

<i>Şekil 103.</i> Elif'in odak grup görüşmeleri bitiminde çözüm kümesi ya da çözüm kümesinin elemanları hakkındaki söylemlerine ait sözel gerçekleşmesi.....	420
<i>Şekil 104.</i> Elif'in ders notlarına yönelik bir örnek.....	425
<i>Şekil 105.</i> Zehra'nın "açık önerme" terimini vurguladığı ders notları.....	430
<i>Şekil 106.</i> İkinci dereceden tek değişkenli polinomların çarpanlarına ayrılmasına yönelik görsel araçlar.....	435



SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

A	Araştırmacı
B	Burcu
D	Derya
E	Elif
Ş	Şule
Z	Zehra
BG	Bireysel görüşme
OG	Odak grup görüşmesi
GD	Görev durumu
GDS	Görev durumlarının sonrası
KA	Kanonik anlatı
MEB	Millî Eğitim Bakanlığı

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın; problem durumu, problem cümlesi amacı ve önemi, varsayımları, sınırlamaları ve sınırlılıkları ile temel tanımları yer almaktadır.

Problem Durumu

Öğrenmenin doğasını açıklamaya çalışan teoriler, öğrenmenin bir değişim süreci olduğu konusunda hemfikir olsa/lar da öğrenme gerçekleştiğinde nelerin değiştiği sorusuna verdikleri yanıtlar farklılık göstermektedir (Sfard, 2015). Davranışçı teoriler (Guthrie, 1940; Pavlov, 1927; Skinner, 1938; Watson, 1924) bu değişimin bireyin davranışlarında gerçekleşeceğini iddia ederken, insan zihnine odaklanan bilişsel teorilerin tümü (Bandura, 1986; Bruner, 1964; Piaget, 1952; Vygotsky, 1978) bu değişimin bireyin zihinsel yapılarında veya süreçlerinde olduğunu savunmaktadır. Öğrenmedeki gelişimin çevresel faktörlerden bağımsız bir şekilde bireyin bilişsel yapılarındaki veya şemalarındaki değişiklikleri içerdiğini savunan teorilere yapısal teoriler denilmektedir. Bununla birlikte sosyal ve kültürel etmenlerin öğrenmedeki gelişimi etkilediğini, bireysel ve toplumsal etkileşimlerin öğrenmede önemli bir rol oynadığını savunan teoriler de bağlamsal teoriler

olarak adlandırılmaktadır (Schunk, 2012). Matematik eğitiminde öğrenmeyi açıklayan bilişsel teorilerde de yapısal ya da bağlamsal teorileri esas almalarına göre edinimci (acquisitionist) veya katılımcı (participationist) yaklaşım olmak üzere iki farklı eğilimin hâkim olduğu görülmektedir (Sfard, 2015). Matematik eğitiminde teorik çerçevelerini Piaget'nin fikirlerinden etkilenecek oluşturulan ve öğrenmeyi şemalar, içsel temsiller, kavramlar gibi zihinsel varlıkların birey tarafından edinilmesi veya yapılandırılması olarak kavramsallaştıran yapısal bilişsel teoriler edinimci bir yaklaşımı benimsemektedir (Kieran, 2006). APOS (Eylem, Süreç Nesne, Şema) teori (Dubinsky, 1991), subje düşüncesi (bir matematiksel kavramın süreç ve obje olarak anlaşılması) (Gray & Tall, 1994) ve Sfard'ın (1991) işlemsel ve yapısal kavrayış teorisi matematik eğitiminde edinimci yaklaşımı benimseyerek öğrenmeyi açıklamaya çalışan teorilere örnek verilebilir. Bununla birlikte, edinimci yaklaşıma karşılık Rus psikolog Vygotsky'nin çalışmalarından ilham alan ve "katılımcı (participationist)" olarak adlandırılan yaklaşımın savunucuları öğrenmeyi bireyin farklı türdeki etkinliklere katılımında meydana gelen değişiklikler olarak tanımlamaktadır. Vygotsky'nin (1987) başlattığı sosyokültürel gelenekten gelen bu katılımcı yaklaşım, insan zihninin içinde olup bitenler hakkında tahmin ve yorumlamalar yapmak yerine bireyin sosyal aktivitelere katılırken söylediklerine ve yaptıklarına odaklanmaktadır (Sfard, 2015). Matematik eğitiminde son yirmi yılı kapsayan araştırmalar, öğrenmeyi temelde sosyal bir etkinlik olarak tanımlamakta ayrıca anlamı, düşünmeyi ve akıl yürütmeyi, bu sosyal etkinliğin ürünleri olarak görmektedir (Ben-Zvi & Sfard, 2007; Kieran, Forman & Sfard, 2001; Lerman, 2000, 2001, 2006; Moschkovich, 2010; Sfard, 2008). Sosyokültürel perspektiften bakıldığında, matematik öğreniminin sosyal etkinliklere katılımı ile gerçekleştiği ifade edilmektedir (Wenger, 1998). Sosyo-kültürel öğrenme teorilerine dayanarak (Lave & Wenger, 1991; Vygotsky, 1978), Sfard'ın (2008) matematiksel biliş ile iletişimsel yaklaşım teorisi (Commognitive teorisi), matematik öğrenmeye yönelik diğer sosyokültürel yaklaşımlara benzer bir şekilde, öğrenmeyi belirli bir topluluğun söyleminde katılımcı olmak olarak görmektedir (Weingarden, Heyd-

Metzuyanım & Nachlieli, 2019). Katılımcı görüşü benimseyen bu teoriye göre öğrenme, bireyin kendi başına veya başkalarıyla birlikte söyleme katılım yoluyla gelişmesiyle gerçekleşmektedir. Dolayısıyla Commognitive perspektife göre öğrenme gerçekleştiğinde bireyin söylemlerinde ve söyleme katılımında bir değişikliğin olması beklenmektedir. Matematik eğitimi literatüründe söylem terimi, basitçe herhangi bir iletişimsel aktiviteye atıfta bulunmaktan, sosyal aktivitenin belirli biçimlerine katılımı yapılandıran belirli konuşma, davranış ve dünyayı görme biçimlerinin konfigürasyonlarına atıfta bulunmaya kadar geniş bir anlam yelpazesinde kullanılmaktadır (Foucault, 1972). Söylem sadece bilgi alışverişi ile ilgili değildir, aynı zamanda katılımcıları arasında ilişkiler kurmayı, müzakere etmeyi ve sürdürmeyi, dünya ile ilgili deneyimlerimizi anlama yollarını da içermektedir (Morgan, 1998). Öğrenmeye yönelik Commognitive yaklaşımın temellerinden biri de öğrencilerin öğrenmesinin ayrılmaz bir parçası olan sosyal etkileşimleri anlama ihtiyacını içermektedir. Bu nedenle Sfard (2008), insan düşüncesinin kolektif bir özelliğe, yani kişilerarası iletişime sahip olduğunu düşünmektedir. Vygotsky'ye paralel olarak Sfard (2008, s.77), bireyin öğrenme sürecinin “kültürel olarak üretilen ve kolektif insan çabalarının sürekli olarak değiştirilen sonuçlarına atıfta bulunduğunu” öne sürmektedir. Commognitive yaklaşıma göre sözlü ya da sözlü olmayan söylem, belirli bir topluluğa özgü iletişimsel bir etkinlik olarak tanımlanmakta ve matematik de bir söylem türü olarak görülmektedir (Sfard, 2008). “Düşünmenin bir iletişim biçimi olduğu” varsayımı üzerine inşa edilen bu teori düşünmeyi, kişinin kendisiyle ya da başkalarıyla olan iletişimi olarak tanımlamaktadır (Sfard, 2008, 2012). Sfard’a (2012) göre bireyler hem konuşarak hem de düşünerek matematiksel söyleme katılmaktadır. Bu bakımdan matematiksel söyleme katılım bireyin eylemlerinde görülürken öğrenmedeki gelişimi ise söylem değişiminde görülmektedir (Sfard, 2012). Matematik öğrenmeyi bu söyleme katılabilme becerisine sahip olmak olarak tanımlayan bu yaklaşım matematiğin öğrenimini ve öğretimini analiz etmede kullanılmaktadır (Nardi, Ryve, Stadler & Viirman, 2014; Sfard, 2007, 2017). Bu nedenle bu yaklaşım, hem öğrenme ortamlarındaki matematiksel söylemin içeriğiyle hem

de öğrenenlerin bu söyleme katılımlarıyla ilgilenmektedir (Nardi, 2005). Matematiksel söylem anahtar kelimeler (key words), görsel aracılar (visual mediator), anlatılar (narratives) ve rutinler (routines) olmak üzere dört unsurla karakterize edilmektedir (Sfard, 2008). Matematiksel söylemdeki anahtar kelimeler, esas olarak niceliği ve şekli (sayılar, geometrik nesneler) ve bunlar arasındaki ilişkileri (eşitlik, eşitsizlik, benzerlik, denklik vb.) ifade eden kelimelerdir. Görsel aracılar, söylem katılımcılarının konuşmalarının nesnesini tanımladıkları ve iletişimlerini koordine ettikleri araçlardır. Görsel araçların en yaygın örnekleri arasında rakamlar, cebirsel ve mantıksal gösterimler, grafikler, matematiksel formüller, geometrik çizimler, diyagramlar bulunur. Anlatılar, nesnelerin tanımlarını, nesneler arasındaki ilişkileri veya süreçleri içeren söz dizileridir. Onaylama veya reddetme prosedürleri ile onaylama veya reddetmeye tabidirler. Matematiksel söylemde aksiyomlar, tanımlar, iddialar, ispatlar gibi anlatı türleri vardır. Rutinler, nesneler üzerindeki eylemler de dahil, tekrarlayan iletişim kalıplarıdır. Başka bir deyişle, anahtar kelimelerin ve görsel araçların kullanımındaki düzenlilikler (regularities) ve bunların anlatılardaki kullanımı rutinler olarak adlandırılır. Matematiksel söylem, hesaplama ve problem çözme, yeni anlatıları doğrulama ve kanıtlama gibi rutinleri içerir. Rutinler diğer söylem öğelerini de kapsadığı için Lavie, Steiner ve Sfard (2019), rutinlerin söylemsel yaklaşıma dayanan çalışmalarda analiz birimi olarak ele alınabileceğini öne sürmektedir. Bu bağlamda Lavie vd. (2019) rutini, görev (task) ve prosedür (procedure) kavramlarını kullanarak “görev-prosedür” çifti olarak tanımlamaktadır. Başka bir deyişle rutin, bir görev ve bir prosedürden oluşan ikili olarak tanımlanmaktadır. Lavie ve arkadaşları (2019) katılımcının kendisini bir şey yapmakla yükümlü gördüğü herhangi bir an veya durumu görev durumu (task situation) olarak isimlendirmektedir. Örneğin, matematiksel bir problemi çözmek veya kurmak, matematiksel bir tanım veya ispat yapmak gibi katılımcıdan yapması beklenen herhangi bir matematiksel etkinlik görev durumudur. Görev, herhangi bir matematiksel etkinlikte katılımcının geçmiş öğrenme yaşantılarını göz önüne alarak, ne yapması ya da yapmaması gerektiğine dair verdiği kararı, prosedür ise katılımcının

izleyeceği adımları gösteren işlem, yol ve yöntem gibi sembolik manipölasyonlardır. Commognitive teoriye göre söylemsel rutinler ritüel (ritual) ve keşif (exploration) rutin olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Rutinin amacı sosyal bir bağ kurmak ve bu bağ sürdürmek ise ritüel, onaylanabilir matematiksel anlatılar üretmek ise keşif rutini olarak isimlendirilmektedir (Lavie vd., 2019; Sfard, 2008). Matematiksel söyleme katılım, öğrenen ve öğreticilerin söylemsel rutinlerle nasıl meşgul olduklarına bağlı olarak farklı biçimler alabilmektedir (Baccaglini-Frank, 2021). Böylece keşifsel (explorative) ve ritüel (ritual) katılım, algılanan amaçları ve katılım kuralları bakımından farklılık gösteren iki tür söylemsel katılım biçimi olarak karşımıza çıkmaktadır. Sınıf içi ya da sınıf dışı ortamlarda matematiksel söylemi inceleyen araştırmalar, öğrencilerin söyleme katılımlarının ne tamamen saf ritüellerden ne de katıksız keşiflerden ibaret olmadığı göstermektedir (Lavie vd., 2019; Nachlieli & Katz, 2017; Sfard & Lavie, 2005). Ancak bu araştırmalar matematiksel söylemde ritüel katılımı, keşifsel katılım için bir başlangıç olduğunu iddia etmektedir. Bununla birlikte matematiksel söylem araştırmacılarına göre matematiksel öğrenme, öğrencilerin daha az gelişmiş söylemlerden daha gelişmiş söylemlere doğru kritik geçişler yapmasını gerektirmektedir (Ben-Dor & Heyd-Metzuyanım, 2021; Heyd-Metzuyanım, 2019; Sfard, 2007, 2008). Lavie vd. (2019), öğrenmeyi bireyin zihindeki belirli bilişsel yapıları değiştirdiği bir süreç olmaktan ziyade belirli bir topluluktaki katılım rutinlerindeki değişim süreci olarak görmektedir. Bu bağlamda araştırmacılar öğrenmeyi, bireyin eylemlerini rutinleştirme süreci olarak tanımlamakta ve öğrenmenin gerçekleşmesi için ritüellerden keşiflere kademeli bir değişimin olması gerektiğini iddia etmektedir (Lavie vd., 2019). Bu değişim sürecini ritüelden keşfe geçiş süreci (process of *deritualization*) olarak isimlendiren araştırmacılara göre, bireylerin bir yandan söyleme katılımları, bir yandan da rutinlerinin süreç odaklı olmaktan sonuç odaklı olmaya doğru gelişmesi için çaba göstermeleri gerekmektedir (Nachlieli & Tabach, 2022; Sfard, 2020). Araştırmacılar, matematiksel söylemde rutinlerin ritüelden keşfe geçiş sürecini esneklik (flexibility), bağlılık (bondedness), uygulanabilirlik (applicability), katılımcının yetkinliği

(performer's agentivity), söylemi nesneleştirme (objectification of the discourse) ve gerekçelendirme (substantiability) gibi kriterlerle karakterize etmektedir (Lavie vd., 2019). Bununla birlikte ritüel ve keşif rutinleri arasında, öğrenme bağlamında bir rutinin gelişimindeki aşamalar olarak görülebilecek birden fazla özelliğin (karakteristiğinin) olasılığından da söz etmektedir. Bu nedenle Lavie vd. (2019), ritüel ve keşfi bir sürekliliğin iki uç noktası gibi düşünmektedir. Araştırmacılar ritüelden keşfe geçiş sürecinde herhangi bir ilerlemeden söz edilebilmesi için bu özelliklerin bir veya daha fazlasında artış veya gelişim gözlemlenmesi gerektiğini iddia etmektedir (Lavie vd., 2019). Ritüelden keşfe geçiş sürecindeki karakteristiğinin çeşitliliğine ve incelenebilecekleri yolların çokluğuna rağmen, yapılan araştırmalar bu süreci gözlemlemenin zorluğunu vurgulamaktadır. Çünkü araştırmalar, topluluğa özgü bir söylemin bireyselleştirilmesinin uzun bir çaba gerektirdiğini ve zor olduğunu iddia etmektedir (Ben-Dor & Heyd-Metzuyanim, 2021; Lavie vd., 2019; Sinclair & Moss, 2012). Öte yandan rutinleştirme bağlamında öğrenmeyi araştıran Heyd-Metzuyanim, Tabach ve Nachlieli (2016)'nin bulguları ağırlıklı olarak ritüel olarak katılan öğrencilerin, daha keşifsel olarak katılanlara paralel bir yörüngede (genellikle başarısızlıkla sonuçlanacak şekilde) ilerlediği alternatif bir olasılığa işaret etmektedir. Ben-Dor ve Heyd-Metzuyanim (2021) ise bulgularının, öğrencilerin daha gelişmiş söylem (keşifsel katılım) ile daha az gelişmiş söylem (ritüel katılım) arasında gidip geldiği bir süreci içerdiğini öne sürmektedir. Tüm bu alternatif olasılıklara rağmen Heyd-Metzuyanim ve Graven (2019), ritüel katılımdan keşifsel katılıma ilerlemeye başlayan öğrenciler hakkında çok az ampirik çalışmalar bulunduğunu iddia etmektedir. İlgili literatür incelendiğinde de son yıllarda matematik eğitiminde, Commognitive bakış açısıyla öğrencilerin ve öğretmenlerin matematiksel söyleme katılım biçimlerini inceleyen araştırmaların giderek arttığı görülmekte ve bu çalışmaların çoğunluğunun öğretmen ve öğretmen adaylarının söyleme katılım biçimlerini incelediği görülmektedir (Christiansen, Coriveau & Pettersson, 2023; Ehrenfeld & Heyd-Metzuyanim, 2018; Heyd-Metzuyanim & Graven, 2019; Heyd-Metzuyanim & Shabtay, 2019; Heyd-Metzuyanim, Smith, Bill &

Resnick, 2019; Heyd-Metzuyanim, Tabach & Nachlieli, 2016; Nachlieli & Katz, 2017; Sfard, 2007). Bununla birlikte bu araştırmaların birkaçının öğrencilerin matematiksel söyleme katılımlarına odaklandığı dikkat çekmektedir (Baccaglini-Frank, 2021; Essack, 2015; Nisa, Lukito & Masriyah, 2021; Roberts & le Roux, 2019). Matematiksel düşünmeye odaklanan Commognitive çalışmaların eşitlik, denklem ve mutlak değer gibi cebirsel kavramlara (Caspi & Sfard, 2012; Emre-Akdoğan, 2023; Nisa vd., 2021; Roberts & le Roux, 2019), fonksiyon kavramına (Baccagli-Frank, 2021; Essack, 2015; Mbhiza, 2021; Nachlieli & Tabach, 2012; Tabach & Nachlieli, 2011) ve çeşitli geometrik kavramlara (Ben- Dor & Heyd-Metzuyanim, 2021; Christiansen vd., 2022; Emre-Akdoğan, 2015; Emre-Akdoğan, Güçler & Argün, 2018; Sinclair & Moss, 2012) dair matematiksel söylemleri analiz ettiği görölmektedir. Buna ek olarak öğrenci söylemlerine teknoloji destekli ortamda fonksiyonlar kavramının tartışılması yoluyla gerçekleştirilen bazı çalışmalara da rastlanmaktadır (Baccaglini-Frank, 2021; Lisarelli, 2019; Ng, 2016; Sinclair & Heyd-Metzuyanim, 2014). Tüm bu çalışmalar dikkate alındığında Lavie ve diğerlerinin (2019) rutin tanımını esas alan ve bu doğrultuda öğrencilerin matematiksel söyleme katılımlarını inceleyen çalışmalar (Baccaglini-Frank, 2021; Essack, 2015; Nisa vd., 2021; Roberts & le Roux, 2019) araştırma probleminin belirlenmesinde yol gösterici olmuştur. Bu çalışmalarda öğrencilerin matematiksel söyleme katılımları fonksiyon (Baccaglini-Frank, 2021; Essack, 2015), lineer denklem (Roberts & le Roux, 2019) ve mutlak değer (Nisa vd., 2021) kavramları bağlamında analiz edildiği görölmektedir. Öğrencilerin söylemlerini ve söyleme katılımlarını inceleyen bu çalışmaların azlığından ve daha fazla ampirik çalışmaya ihtiyaç olduğunun belirtilmesinden dolayı bu araştırmada öğrenci söylemlerine odaklanılmaktadır. Buna ek olarak araştırmacılar matematiksel söylemde öğrenmeyi araştırmanın rutinlerin nasıl ortaya çıktığı ve daha sonra nasıl geliştiği sorusunu yanıtlamakla eşdeğer olduğunu söylemektedir (Lavie vd., 2019; Sfard, 2008). Bu bağlamda bu çalışmada denklem ve eşitsizlik kavramları bağlamında öğrencilerin matematiksel

rutinleri, bu rutinleriyle söyleme katılımları ve rutin gelişimleri merak konusu olmuştur. Bu doğrultuda araştırmanın problem cümlesi ve alt problemleri belirlenmiştir.

Araştırmanın Problemi

Bu çalışmada “Ortaöğretim öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik kavramlarını içeren görev durumlarında rutinleri, söyleme katılımları ve rutin gelişimleri nasıldır?” sorusuna cevap aranmıştır.

Alt Problemler

Bu probleme cevap aşağıdaki alt problemler aracılığıyla aranmaya çalışılacaktır.

1. Öğrencilerin denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait farklı görev durumlarındaki matematiksel söyleme katılımlarının türü (ritüel ya da keşifsel) nedir ve bu katılım nasıl gerçekleşmektedir?
2. Öğrencilerin bu görev durumlarında ritüelden keşfe geçiş süreçleri nasıl olmaktadır?

Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı, ortaöğretim öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait görev durumlarında rutinlerinin yapısını açıklığa kavuşturmak ve buna bağlı olarak matematiksel söyleme katılımlarını incelemektir. Bununla birlikte bu çalışmada öğrencilerin (mümkünse) kavramlara yönelik rutin gelişimlerinin nasıl gerçekleştiğini araştırmak da amaçlanmıştır.

Araştırmanın Önemi

Matematik eğitiminde son yirmi yıl öncesi yapılan literatür incelemeleri, çoğu araştırmanın edinimci perspektif dilinde olduğunu ve teorik çerçevelerini Piaget'nin yapılandırmacılığına dayandığı görülmektedir (Kieran, 2006). Bu geleneksel yaklaşımı benimseyen matematik eğitimi araştırmaları matematiksel bilginin edinilmesine ve bilgi aktarımının didaktik sürecine odaklanmaktadır (Kim, Choi & Lim, 2017). Sfard (2008) ve diğerlerinin (Caspi & Sfard, 2012; Nachlieli & Tabach, 2012) benimsediği katılımcı bakış açısı, Piaget'nin öğrenmenin biyolojik yapının bir ürünü olduğu görüşü ile zıt düşmektedir. (Essack, 2015). Matematik eğitiminde çok daha yeni olan bu katılımcı bakış açısı, öğrencilerin “neye sahip olduklarını” açıklayan bilişsel yeteneklerinin gelişiminin aksine, öğrencilerin “ne” ve “nasıl” iletişim kurduğu aracılığıyla sosyal-kültürel bağlamlarda öğrencinin matematiksel düşüncesine odaklanmaktadır. Bu bağlamda Sfard'ın (2008) Commognitive teorisi, katılımcı bir bakış açısıyla öğrenmeyi *kalıplaşmış kolektif bir eylem biçimine katılım* olarak tanımlamaktadır. Commognitive kuramın özünde, tüm insan etkinliklerinin sosyal etkinliğin içselleştirilmesinde kök saldığı varsayımı yatmaktadır. Bu teoriye göre düşünme, ontolojik olarak iletişim kurmaktan farklı değildir ve öğrenme *kişinin söylemini değiştirmenin bir biçimi* olarak tanımlanmaktadır (Vyncke, 2012). Sfard (2008) söylemi, kabaca belirli bir konu hakkında herhangi bir tartışma, iletişim, konuşma veya yazı biçimi olarak yorumlayabileceğimizi söylemektedir. Sosyo-kültürel bir çerçeve içerisinde, matematik eğitimi araştırmalarındaki bu mevcut söylemsel dönüşüm iletişim zorunluluğunun aciliyetini benimsemekte ve hataların, yanlış anlamaların tanımlanması ile bunların düzeltilmesinin ötesinde öğrenen düşüncesini incelemek için araçlar sağlamaktadır (Essack, 2015; Morgan, 2012). Presmeg (2016), Commognitive teorisinin bireyin matematiksel söylemini detaylı, bütünüyle ve geniş bir şekilde ortaya koyabilen ve analiz edebilen bir teori olduğunu iddia etmektedir. Buna ek olarak bu teorisinin aynı zamanda bir bireyin potansiyelini keşfedebileceğini, yalnızca öğretme ve öğrenmeyi açıklamak için değil aynı zamanda öğrenmenin insan gelişimiyle nasıl ilişkili olduğunu

açıklayabildiğini savunmaktadır. Öğrencilerin öğrenme deneyimlerine daha bütünsel bir bakış açısı sağlayan Commognitive teori matematiksel düşünmeyi izah etmede tutarlı ve ayrıntılı olduğu düşünülmektedir (Presmeg, 2016). Kim vd. (2017) Commognitive söylem analizinin öğrencilerin matematiksel düşünmesine ve öğrencilerin okul matematiğinde sosyalleşme sürecine ilişkin anlayışımıza daha fazla netlik getirme potansiyeline sahip olduğunu iddia etmektedir. Matematiksel öğrenmeyi sosyokültürel bağlamda ele alan bu teorinin matematik eğitimcileri tarafından giderek artan kullanımı da teorinin yararlılığına dikkat çekmektedir (Sfard, 2012; Tabach & Nachlieli, 2016). İlgili literatür incelendiğinde matematik eğitiminde cebirsel kavramlarında az da olsa katılımcı bir bakış açısıyla ele alındığı görülmektedir (Caspi & Sfard, 2012; Emre-Akdoğan, 2023; Nisa vd., 2021; Roberts & le Roux, 2019). Öte yandan Sfard (2015), matematik eğitiminde cebirsel kavramlarla ilgili öğrenci düşüncesine ilişkin çalışmaların çoğunun edinimci öğrenme paradigması içine yerleştirilebilecek bilişsel öğrenme teorilerinden (Hoch & Dreyfus, 2006; Skemp, 1979) yararlandığını söylemektedir. Fakat Sfard (2008, 2015) öğrenen düşüncesinin nasıl olduğunu açıklama noktasında bu teorileri yeterli bulmamakta ve sosyokültürel ortamda matematiksel düşünmenin ayrıntılarına nüfuz eden teorisinin önemine vurgu yapmaktadır. Bu çalışmada sosyokültürel ortam; öğrencilerin araştırmacıyla, birbirleriyle ve sağlanabilecek kaynaklarla etkileşim içinde öğrendikleri sınıf dışı bir matematik ortamıdır. Bu çalışma, bahsi geçen sosyokültürel ortamda öğrenci söylemlerini ve söyleme katılımlarını cebirsel kavramlar (denklem ve eşitsizlik) bağlamında incelemektedir. Tüm bunlar göz önüne alındığında bu çalışmanın Sfard'ın (2008) Commognitive teorisini esas alan ve katılımcı yaklaşımı benimseyen sosyokültürel bir çalışma olarak ilgili literatüre teorik anlamda katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Sfard'ın (2008) Commognitive çerçevesi, matematiği bir söylem olarak kavramsallaştırmakta ve araştırmacılara matematik sınıfında söylem analizine, özellikle de bireylerin (öğrenci-öğrenci ve öğrenci-öğretmen) söylemle nasıl meşgul olduklarına dair teorik bir temel sağlamaktadır. Bu teori hem bilişi hem de iletişimi kapsadığından,

kişilerarası iletişim ile bilişsel süreç arasındaki ilişkiyi ve bireylerin katılım yoluyla anlamlı bir söyleme doğru nasıl ilerlediklerini açıklayabilmektedir (Kim vd., 2017). Matematiksel söylem belirli bir topluluğa özgü iletişimsel etkinlikleri ifade etmekte ve okul matematiği de bu topluluğun bir altkümesi olarak görülmektedir (Ben-Zvi & Sfard, 2007). Bu bağlamda sınıf içi ya da sınıf dışı okul söylemi de öğrencilerin düşünmesini açığa çıkarmanın ve bu düşünmeyi topluma açık hale getirmenin bir yolu olmaktadır. Matematik ortamlarındaki söylem araştırmaları son on yılda giderek artsa da öğretmenlerin sınıf söylemini nasıl yönetebilecekleri ve öğretim uygulamalarında bunların geliştirilmesinin nasıl desteklenebileceği önemli bir soru olmaya devam etmektedir (Herbel-Eisenmann, Meany, Bishop & Heyd-Metzuyanim, 2017; Kooloos, Oolbekkink-Marchand, Kaenders & Heckman, 2020a, 2020b). Bu çalışmada lise matematiğinin birer nesnesi olan denklem ve eşitsizlik kavramlarına dair öğrencilerin okul söylemleri, sınıf dışı bir öğrenme ortamında öğrencilerin matematiksel rutinleri aracılığıyla analiz edilmektedir. Bu bağlamda bu çalışmanın, öğretmen ve öğretmen adaylarına bu kavramlara ait öğrenci söylemlerinin ne ve nasıl olduğuna dair fikirler vereceği düşünülmektedir.

Matematik yalnızca belirli bir terminoloji ve kabul edilen iddialarla değil aynı zamanda kabul edilen eylemlerle de karakterize edilmektedir (Kitcher, 1984). Sfard (2008) matematiği belirli bir terminolojiye ve görsellere, kabul edilmiş ifadelere (onaylanmış anlatılara) ve rutinlere sahip bir söylem olarak tanımlamaktadır. Matematiği öğrenmek, tüm bu açılardan söylemi öğrenmek anlamına gelmektedir (Christiansen vd., 2023). Bu görüşün, öğrenmenin ve uygulama yoluyla öğretimin nasıl tanımlandığı ve analiz edildiğine dair çıkarımları bulunmaktadır. İlgili literatür incelendiğinde, uygulama yoluyla öğretimi analiz eden ve bu doğrultuda farklı bağlamlarda öğretmen hamlelerinin öğrenci söylemleri üzerindeki etkilerini incelemek için Commognitive bakış açısını ve rutin kavramını kullanan çalışmaların fazlalığı dikkat çekmektedir (Christiansen vd., 2023; Ehrenfeld & Heyd-Metzuyanim, 2018; Heyd-Metzuyanim & Graven, 2019; Heyd-Metzuyanim & Shabtay, 2019; Heyd-Metzuyanim vd., 2019; Heyd-Metzuyanim vd., 2016;

Nachlieli & Katz, 2017; Sfard, 2007). Ritüel ve keşifsel rutinler bağlamında; öğretici söylemlerinin öğrenci söylemlerine dair etkilerine odaklanarak daha çok matematik öğretiminin nasıl olması gerektiğini vurgulayan bu çalışmaların, öğrenende öğrenmenin nasıl gerçekleştiğine dair odağının daha az olduğu görülmüştür. Buna karşılık Steffe ve Thomson (2000) öğrenci merkezli öğretimin önemli bir parçasının “öğrencilerin matematiğini” çözmek olduğunu belirtmektedir. Lesh ve Doerr (2003) ise öğrencilerin karşılaştıkları matematiksel açıdan anlamlı sistemleri oluşturmak, tanımlamak veya açıklamak için onların geliştirdiği modellerini anlamamız gerektiğini vurgulamaktadır. Bununla birlikte, Heyd-Metzuyanım vd. (2019) ritüelden keşifsel katılıma geçişe nasıl yardımcı (how to assist) olunacağı konusunda henüz çok fazla şey bilinmediğini söylemekte ve bu düşünce, öğrenenlerin öğrenmesinin incelenmesini önemli kılmaktadır. Ayrıca Nisa ve arkadaşları da (2021) öğrenci söylemlerini analiz etmenin, öğretmenin söyleminin öğrencilerin söylem düzeyini etkileyip etkilemediği konusunda daha fazla bilgi vereceğini iddia etmektedir. Bu bağlamda öğrencilerin denklem ve eşitsizlik kavramlarına dair öğrenmelerini, onların rutinleri aracılığıyla ortaya koymayı amaçlayan bu çalışmanın ilgili literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Araştırmanın bulgularının öğrencilerin ne ölçüde keşifsel düşündüklerini anlamaları açısından öğretmen ve öğretmen adayları için zengin bir kaynak olacağı ve literatüre öğrenci söylemlerine yönelik ampirik çalışmalara katkı sağlayacağı öngörülmektedir.

Commognitive teori matematiğin öğrenilmesini, öğrencilerin yavaş yavaş matematiksel söylemin katılımcıları haline geldiği bir süreç olarak tanımlamaktadır. Bu süreç, ritüel rutinlerin gerçekleştirilmesinden keşif rutinlerine geçişle karakterize edilmektedir (Heyd-Metzuyanım, Elbaum-Cohen & Tabach, 2022; Lavie vd., 2019). Araştırmacılara göre (Lavie vd., 2019; Nachlieli & Tabach, 2019) öğrenme, başlangıç rutinleri olan ritüellerin, keşif rutinlerine dönüşümünün (process of de-ritualization) meydana gelmesiyle (sağlanmasıyla) gerçekleşmektedir. Öğrenmenin nasıl gerçekleştiğinin gözlemlenebileceği bu geçişin incelenmesinin güçlüğünden bahseden araştırmacılara göre, ritüelden keşfe

geçiş süreci kademeli ve yavaş olmaktadır. Hatta bu sürecin gözlemlenemeyecek kadar ani olabileceği gibi, kimi katılımcılar için hiçbir zamanda gerçekleşmeyebileceği söylenmektedir (Lavie & Sfard, 2019; Lavie vd., 2019; Sfard & Lavie, 2005; Sfard, 2008). Buna rağmen Heyd-Metzuyanım vd. (2019), ritüelden keşifsel katılıma geçişe odaklanmanın matematiği öğrenme süreçlerinin doğasını, şemasını, hızını ve altta yatan mekanizmalarını net bir şekilde görebilmemizi sağlayacağını iddia etmektedir. Bu bağlamda matematiksel öğrenmeyi araştırmak için öğrenenlerin söylemlerine ve rutinlerine odaklanan çalışmaların, öğrencilerin ritüel ve keşifsel katılımlarına belirli kriterler ışığında baktığı görülmektedir (Baccaglini-Frank, 2021; Essack, 2015; Nisa vd., 2021; Roberts & le Roux, 2019). Öğrenenlerin söyleme katılımlarına odaklanan bu çalışmalar, her bir kriter için ritüel ve keşifsel katılımın karakteristiğini ortaya koydukları listeler aracılığıyla verilerini analiz etmektedir. Ritüel ve keşifsel katılımın karakteristiğini esas alarak çoğunlukla kavram bağlamı oluşturulan bu kriter listeleri bu çalışma için de yol gösterici olarak dikkate alınmıştır. Bu bağlamda bu araştırmada hem sözü edilen hem de Lavie vd. (2019) çalışmalarında yer alan öğrenme göstergeleri (esneklik, bağlılık, uygulanabilirlik, katılımcının yetkinliği, matematiksel nesneleştirme ve gerekçelendirme) dikkate alınarak verilerin analizinde kullanılabilecek daha kapsamlı bir kriter listesi okuyucuya sunulmaktadır. Öğrencilerin söyleme katılımlarına odaklanan diğer çalışmalardan farklı olarak bu çalışma, ritüel ve keşifsel katılıma ek olarak geçiş sürecini betimlediği düşünülen ve hibrit katılım olarak adlandırılan katılım düzeyinin karakteristiğini de ortaya koymaktadır. Araştırmanın verilerini analiz etmede kullanılacak olan ve diğerlerine (Baccaglini-Frank, 2021; Essack, 2015; Nisa vd., 2021; Roberts & le Roux, 2019) göre daha kapsamlı olan bu kriter listesinin, denklem ve eşitsizlik bağlamında olsa da diğer cebirsel kavramlara yönelik ilgili literatüre metodolojik anlamda katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bununla birlikte bu çalışma, denklem ve eşitsizlik kavramları bağlamında öğrencilerin ritüelden keşfe geçiş sürecini detaylandırılmaya çalışması bakımından da ilgili literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Diğer taraftan,

öğrenmenin söylemsel bağlamda nasıl gerçekleştiğini açıklamaya çalışan bu araştırmanın, öğretmen ve öğretmen adaylarına ilgili kavramın öğretim sürecinde yol gösterici olacağı ve bu anlamda da literatüre katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bununla birlikte, ritüelden keşfe geçiş sürecini detaylı bir şekilde gözlemlemeye çalışılacağı bu çalışmanın bulgularının “Ritüel ve keşif rutin türleri arasında net bir ayrım var mı?”, “Bu rutinler birbirinin zıddı mı yoksa iç içe geçmiş durumda mı?” ve “Ritüelden keşfe geçiş sürecinin kademeli bir şekilde mi gerçekleşir?” gibi sorulara yanıt vereceği öngörülmektedir.

Araştırmanın Varsayımları

Bu araştırmanın herhangi bir varsayımı bulunmamaktadır.

Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırmanın herhangi bir kuramsal/teorik ya da metodolojik/yöntemsel sınırlılığı bulunmamaktadır.

Araştırmanın Sınırlamaları

Araştırmanın sınırlamaları aşağıdaki şekilde sıralanmıştır:

1. Araştırma, 2021-2022 eğitim- öğretim yılının ikinci döneminde, bir devlet lisesinin ortaöğretim 11. sınıf öğrencilerinden oluşan 3 katılımcı ile yürütülmüştür.
2. Araştırmanın yapıldığı sosyokültürel ortam öğrencilerin, öğretmenleriyle (aynı zamanda araştırmacı), birbirleriyle (5 kişilik bir öğrenci grubuyla) ve onlara sunulan kaynaklarla iletişim içinde oldukları sınıf dışı bir matematik çalışma ortamıdır.
3. Araştırmada öğrenci rutinleri ve söyleme katılımları denklem ve eşitsizlik kavramlarını içeren görev durumları bağlamında analiz edilmiştir.

Tanımlar

Rutin: Bir “görev-prosedür” ikilisi olarak tanımlanır (Lavie vd., 2019). Belirli bir kişi tarafından belirli bir görev durumunda gerçekleştirilen bir rutin; katılımcının, görevi gerçekleştirmek için yürüttüğü prosedürle birlikte, bir eylemdir. Matematiksel bu eylemler; varsayım, tanımlama, tahmin etme, hesaplama, gösterme vb. gibi tipik problem çözme görevlerini ve prosedürleri içerir.

Görev durumu: Katılımcının kendisini bir şey yapmakla yükümlü gördüğü, hissettiği herhangi bir an veya durumu ifade eder (Lavie vd., 2019). Matematiksel bir problemi çözmek veya kurmak, matematiksel bir tanım veya ispat yapmak gibi katılımcıdan yapması beklenen herhangi bir matematiksel etkinliktir.

Görev: Bir katılımcı tarafından anlaşıldığı şekliyle bir görev, bir görev durumunda katılımcının tekrarlaması gerektiğini düşündüğü önceki (emsal) olayların tüm özelliklerinin kümesidir (Lavie vd., 2019). Başka bir deyişle, katılımcının belirli bir görev durumda geçmiş öğrenme yaşantılarından yola çıkarak ne yapması ya da yapmaması gerektiğine dair verdiği karardır. Yani görev terimi, bir kişinin belirli bir görev durumuna ilişkin yorumuna atıfta bulunur.

Prosedür: Belli bir görev durumunda katılımcının görevini gerçekleştirmek için uyguladığı işlem, yol, yöntem ve sembolik manipülasyonlar gibi eylemlerin tamamıdır (Lavie vd., 2019).

Ritüel: Sosyal bir bağ oluşturmak ve bu bağ (matematiksel iletişimi) sürdürmek amacıyla uygulanan söylemsel bir rutin türüdür (Lavie vd., 2019; Sfard, 2008).

Keşif: Matematiksel bir anlatı üretmek amacıyla uygulanan söylemsel bir rutin türüdür (Lavie vd., 2019; Sfard, 2008).

Ritüel katılım: Katılımcının prosedürünü başkalarını taklit ederek tüm adımlarıyla uygulamaya çalıştığı süreç odaklı söylemsel katılım biçimidir. Katılımcının ilgisi yalnızca sembolik bir manipülasyon olarak görülen prosedürün performansındadır. Ritüel katılımı yeni kararlar alınmaz ve katılımcılar ders kitaplarında veya öğretmen (uzman) tarafından

sunulan hatırlama ve taklit prosedürlerine başvururlar. Bu nedenle ritüel katılımı katılımcı rutini problemi çözmek için değil başkalarını memnun etmek adına gerçekleştirir (Lavie vd., 2019; Sfard, 2008; Sfard & Lavie, 2005).

Keşifsel katılım: Katılımcının doğru olarak kabul edilen anlatılardan (aksiyom, tanım, teorem vb.) mantıksal olarak çıkarsanabilen matematiksel anlatılar üretmeyi amaçladığı hedef odaklı söylemsel katılım biçimidir. Başka bir deyişle, katılımcının kendi argümanını inşa ederek görevini bağımsız bir şekilde (başkalarından yardım, katkı almadan) yapabildiği ve söylemi kendi düşüncesinin bir parçası haline getirebildiği söylemsel katılıma verilen isimdir (Lavie vd., 2019; Sfard, 2008; Sfard & Lavie, 2005).

Hibrit katılım: Bu çalışmada ritüel katılımıdan keşifsel katılıma geçişin görülmeye başladığı iletişimsel belirleyicileri betimleyen katılım türüne verilen isimdir.

Söylemin nesneleştirilmesi: Katılımcının söylemlerinde bir ismi (örneğin, denklem, eşitsizlik, değişken, küme, eşitlik, açık önerme, bağıntı vb.) insani eylemlerden/faaliyetlerden bağımsız ve matematiksel bir nesneyi temsil eden bir şekilde kullanmaya başladığı süreç olarak tanımlanır (Sfard, 2008, s. 300). Başka bir deyişle, katılımcı matematiksel nesneler ve onların özellikleri hakkında konuşmaya başladığında söylemi nesneleşmiş bir hal almaya başlar (Bacaglini-Frank, 2021). Bu nedenle söylemin nesneleştirilmesi basitçe matematiksel anlatıların üretilmesi anlamına da gelmektedir. Örneğin, katılımcı “ x ’imiz (değişkenimiz, bunun) yerine ikiyi yazdığımızda denklemimizi (bunu, burayı, şu ifadeyi) doğrulamış olurum” şeklinde iyelik eki, zamir, zarf ve insani eylemleri içeren söylemi yerine, “değişken yerine iki (iki reel sayısı) yazıldığında denklemi (açık önermeyi) sağlar (doğrular).” şeklinde bir anlatı üretmeye başladığında söylemini nesneleştirdiği ve “değişken”, “denklem” gibi isimleri matematiksel bir nesneyi temsilen kullanmaya başladığı söylenebilir.

Esneklik: Katılımcının görev durumunda prosedürünü birden fazla yol ve yöntem kullanarak uygulayabiliyor olması anlamına gelir. Başka bir deyişle, esneklik belirli bir görev durumunu çözmek için kullanılabilecek çeşitli prosedürlerin dikkate alınmasını içerir

ve dolayısıyla esneklikte prosedürün birkaç alternatif yolla sergilenmesi söz konusudur (Lavie vd., 2019; Nachlieli & Tabach, 2022).

Bağlılık: Katılımcının prosedüründeki herhangi bir adımın çıktısını, sonraki adımlarda girdi olarak kullanması anlamına gelir. Bu şekilde bir çıktının sonraki adımlarda girdi olduğu bir rutine de “bağlı” (bonded) denir (Lavie vd., 2019; Nachlieli & Tabach, 2022).

Katılımcının yetkinliği: Katılımcının bir rutini ne zaman başlatacağını, devam etmek için hangi kararların gerekli olduğunu, bunların ne zaman biteceğini bilmesini ve çözümü değerlendirebilmesini içerir (Lavie vd., 2019).

Gerekçelendirme: Katılımcının kendine ya da başkalarına ait herhangi bir rutine, prosedüre veya anlatıya yönelik akıl yürütme, (doğrulamak ya da yanlışlamak için) argüman sunma veya nedenini gösterebilme süreçlerini içerir (Lavie vd., 2019).

Uygulanabilirlik: Katılımcı rutinini; farklı çevrede, farklı görev durumunda, görev durumundaki farklı bir bağlam ve aşına olduğu benzer görev durumlarında uygulayabilme performansını içerir (Lavie vd., 2019).

Denklem: Eşitlik bağıntısı içeren açık önermelere verilen isimdir (Argün, Arıkan, Bulut & Halıcıoğlu, 2020).

Eşitsizlik: “ $\leq$ ” bağıntısını içeren açık önermeye verilen isimdir (Argün vd., 2020).

BÖLÜM II

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde öncelikle Sfard'ın (2008) Commognitive teorisine ilham veren sosyokültürel teorilerden (Lave & Wenger, 1991; Vygotsky, 1978) kısaca bahsedilecek ve sonrasında bu çalışmanın esas teorik çerçevesi olan Commognitive teori dört ögesiyle birlikte (kelime kullanımı, görsel araçlar, rutinler ve anlatılar) açıklanacaktır. Daha sonra bu çalışmanın analiz birimi olan rutinlere Lavie ve diğerlerinin (2019) tanımladığı haliyle detaylı bir şekilde yer verilecektir. Sonrasında rutinleştirme bağlamında matematiksel öğrenme izah edilerek, matematiksel söyleme katılımında ritüelden keşfe geçiş sürecini gözlemlemede dikkate alınan özelliklerden (söylemin nesneleştirilmesi, esneklik, bağlılık, katılımcının yetkinliği, gerekçelendirme, uygulanabilirlik) bahsedilecektir. Son olarak matematiksel söylemde katılım rutinlerine odaklanan ve bu çalışma ile ilgili olan araştırmalara yer verilecektir.

Sosyokültürel Teoriler

Vygotsky'nin sosyokültürel teorisi, bireysel zihinsel işleyişin (öğrenmenin) kültürel, kurumsal ve tarihsel bağlamla ilişkisini açıklamaya çalışan bağlamsal bir teoridir (Scott & Palincsar, 2013; Tudge & Scrimsher, 2003). Bu nedenle sosyal açıdan anlamlı etkinliklerin

insan bilinci üzerinde önemli bir etkisi olduğuna vurgu yapan Rus psikolog Vygotsky, sosyokültürel öğrenme teorisinin gelişmesine katkıda bulunmasıyla tanınır (Bredo, 1997; Kozulin & Wertsch, 1987). Vygotsky; sürekli değişen ve benzersiz şekilde insana özgü olan davranış biçimlerinin sadece bireylerin algısal deneyimlerine yanıt olarak gelişen “içsel” bir şey olmadığını, aksine insana özgü faaliyet biçimlerinin diğer insanlardan öğrenilen bir şey olduğunu iddia etmektedir (Sfard, 2015). Bu nedenle Vygotsky’nin düşüncesi, bilginin birey ve çevresi arasındaki etkileşimden kaynaklandığını öne sürdüğü için diyalektik (bilişsel) yapılandırmacılık bakış açısına sahiptir (Schunk, 2012). Bu teoriye göre kişilerarası (sosyal) etkileşim, gelişim süreçlerini harekete geçirerek bilişsel gelişimi hızlandırır. Dolayısıyla Vygotsky, sosyal ortamın öğrenme için çok önemli olduğunu ve sosyal etkileşimin öğrenme tecrübelerini değiştirdiğini iddia etmektedir (Kozulin & Wertsch, 1987). Farklı bilgi düzeylerine sahip bireyler (çocuklar ve onların ebeveynleri; acemiler ve uzmanlar gibi) arasındaki etkileşimler üzerinde yapılan incelemeler, sosyal etkileşimlerde kültürel araçların kullanılması ve bu etkileşimlerin içselleştirilmesiyle zihinsel bir değişimin gerçekleştiğini öne sürer (Scott & Palincsar, 2013; Tudge & Scrimsher, 2003). Vygotsky’nin teorisi sadece daha bilgili olanın (ebeveyn, uzman, öğretmen vs.) etkileşime ne kattığıyla değil, aynı zamanda daha az bilgili olanın (çocuk, acemi, öğrenci vs.) kendisinin etkileşime ne kattığının, kültürel ve tarihsel ortamın etkileşimi nasıl şekillendirdiğinin de önemli olduğunu vurgulamaktadır (Tudge & Scrimsher, 2003). Bu nedenle sosyokültürel teoriye göre bireyin bilişsel gelişimi, içinde bulunduğu kültürden karşılıklı olarak etkilenir ve içinde bulunduğu belirli ortam bağlamında şekillenir (Cobb, 2006a).

Vygotsky (1981)’ye göre öğrenmenin gelişimi; jest, mimik, dil, semboller (sayma sistemleri, cebirsel ifadeler vb.), şemalar, diyagramlar, haritalar ve mekanik çizimler gibi semiyotik araçların kültürel aktarımıyla gerçekleşmektedir. Kişilerarası iletişimi kurmada yardımcı olan dil, bilginin yapılandırılmasını kolaylaştırarak öğrenme sürecinde önemli bir rol oynar ve bu nedenle öğrenmede en etkili araç olarak görülür (Scott & Palincsar, 2013).

Bununla birlikte sosyokültürel teori, bireyi yerleşik, tarih boyunca gelişen kültürel etkinliklerin bir katılımcısı olarak nitelendirmektedir (Cobb, 2006a). Bu düşünceyi destekleyen bir başka sosyokültürel yaklaşım ise Lave ve Wenger'in (1991) "meşru çevresel katılım (legitimate peripheral participation)" fikridir. Vygotsky'ye dayanan bu katılımcı öğrenme görüşü, öğrenmeyi sosyal ve kültürel yaşamın, faaliyetlerin bir sonucu olarak görmektedir. Öğrenmeyi uygulama topluluklarına artan bir katılımı betimleyen Lave ve Wenger (1991) göre katılımcılar etkinlikte sorumluluk üstlendikçe, katılımcının o toplumun bir üyesi olmaya başladığı bir dönüşüm meydana gelmektedir (Scott & Palincsar, 2013). Sosyokültürel etkinliklere katılımın; bireyin gelişimine katkıda bulunduğunu öne süren Lave ve Wenger (1991), toplumsal olarak uygulanan faaliyetlere katılım sağlamasıyla bireyin kendi başına (bireysel) bir görevi üstlenerek bağımsız bir performans sergileyebildiği benzer eylem biçimlerine geçtiğini iddia etmektedir (Sfard, 2008).

Commognitive Teori

Commognitive teori Sfard (2008)'ın sosyokültürel öğrenme teorilerine dayanarak (Lave & Wenger, 1991; Vygotsky, 1978), matematiksel öğrenme alanında, *öğrenmeyi "belirli bir söylemin katılımcısı olmak"* olarak savunduğu bir teoridir (Heyd-Metzuyanım vd., 2019). Dolayısıyla bu perspektif, geleneksel bilişsel perspektiflerin varsaydığı düşünme ve öğrenme süreçlerinin evrensel, bağlamdan bağımsız ve bireysel doğasının aksine *bilişi bir iletişim biçimi olarak* ele alır ve *bireyleri; sosyal ilişkiler, niyetler ve motivasyonlardan oluşan bağlamsal bir ağ* içerisine yerleştirir (Emre-Akdoğan vd., 2018). Düşüncenin ve düşünceye ait sözlü veya sözsüz ifadelerin ayrılmazlığını vurgulayan Vygotsky ile çağdaşı olmasa da onunla aynı fikirde olan Ludwig Wittgenstein'in fikirlerinden de etkilenen Sfard, *düşünmeyi kişilerarası iletişimin bireyselleştirilmiş biçimi* olarak görmektedir (Sfard, 2007; 2008, 2015, 2020). Böylece Sfard (2008), düşünmeyi; sözlü veya sözlü olmayan iletişimin bireyselleştirilmiş bir versiyonu olarak tanımlayarak, öğrenmenin bireysel ve sosyal yönleri arasındaki ayrımı ortadan kaldırmıştır. Düşünmenin kişilerarası

iletişimin bireyselleştirilmiş bir biçimi olduğu konusunda hemfikir olduğunda; öğrenmenin, insan düşüncesinin kolektif bir eylemin ürünü olduğunun da kabul edilmesi gerektiğini vurgular (Sfard, 2008). Ayrıca Lave ve Wenger'in (1991) uygulama topluluklarına katılım fikrinden etkilenen Sfard (2008), *öğrenmeyi belirli bir topluluğa katılımcı olmanın bir parçası olarak kişinin söylemini değiştirmesi* olarak tanımlar. Bu bakış açısına göre *öğrenme, kişinin söylemindeki değişiklikler yoluyla uygulama topluluklarında yetkin bir katılımcı haline gelmesi* olarak nitelendirilir. Söylemin katılımcısı olabilmek için sadece söyleme katılmak değil, aynı zamanda onu bireyselleştirebilmek, yani söylemi etkin bir şekilde uygulayabilmek gerekmektedir (Sfard, 2020). Böylece Sfard'ın (2008, s. 92) teorisi, bilişsel süreçleri “kişilerarası iletişimin bireyselleştirilmiş biçimleri” olarak ve iletişimi de bir söylem topluluğunun üyelerinin etkinliklerine “aracılık eden ve koordine eden, kolektif olarak gerçekleştirilen, kural odaklı bir etkinlik” olarak tanımlayarak düşünme ve iletişimi bütünleştirmiştir.

Sfard, Vygotsky ile aynı çizgide yer alarak, bireyin öğrenme sürecinin kolektif insan çabalarının kültürel olarak üretilen ve sürekli değişen sonuçlarına atıfta bulunduğunu savunmaktadır (Essack, 2015). Bu nedenle Sfard, matematiksel öğrenmenin kolektif ve tarihsel olarak gelişmiş matematiksel söylemi bireyselleştirme sürecini içerdiğini ileri sürmektedir (Cobb, 2006b). Dolayısıyla Commognitive yaklaşımın öğrenmeye yönelik esaslarından biri, bireyin öğrenmesinin ayrılmaz bir parçası olan sosyal etkileşimleri anlama ihtiyacını içermektedir (Swidan & Daher, 2019). Commognitive çerçevenin bir diğer temel ilkesi ise matematiğin bir söylem biçimi olmasıdır (Essack, 2015). Sfard (2008)'a göre *söylem, anahtar kelimeleri, görsel araçları, rutinleri ve onaylanmış anlatılarıyla karakterize edilen, iyi tanımlanmış bir iletişim biçimidir*. Matematik öğrenmenin hem toplumsal hem de bireysel yönüne vurgu yapan Commognitive teori, matematiği bir söylem olarak kabul eder ve matematik öğrenmeyi belirli bir topluluğa katılımcı olmanın bir parçası olarak kişinin söylemini değiştirmesi olarak tanımlar (Caduri & Heyd-Metzuyanım, 2015; Sfard, 2008). Söylemsel öğrenme, dünya hakkında sürekli

yeni hikayeler anlatabilme ve üretebilme olarak tanımlanabilir ve bu nedenle, edinimci yaklaşımdaki “bilgiyi inşa etme” teriminin katılımcı yaklaşımdaki muadili olarak görülebilir (Sfard, 2015).

Commognitive çerçeve, matematiksel söylemin iyi tanımlanmış bir iletişim biçimi olduğunu ve matematik öğrenmenin de bu özel söyleme katılmakla gerçekleştiğini öne sürmektedir (Roberts, 2016). Bu nedenle Sfard (2008, s. 299) öğrenmeyi “söylemi kalıcı bir şekilde değiştirmek” olarak tanımlamaktadır. Sfard’a göre öğrenme başkalarıyla iş birliği veya etkileşim yoluyla gerçekleşir ve matematiği öğrenmek bu söyleme katılabilme becerisine sahip olmak demektir (Sfard, 2017). Başka bir deyişle öğrenme, yerleşik bir söylemde yetkin bir muhatap olma sürecidir ve öğrenmenin tespiti kişinin o söyleme katılımındaki değişikliklerin tespitini kapsamaktadır. Matematiksel söylemin katılımcıları kişisel iletişimlerini söyledikleri, yazdıkları, çizdikleri veya yaptıklarıyla gösterirler ve dolayısıyla iletişim hem konuşmada hem de eylemde görülür (Mudaly & Mpofu, 2019). Bu yaklaşıma göre matematiksel söyleme katılan bireyler, bu özel iletişimin gerçekleştiği bir topluluğa ait olacaklardır. Okul matematiği böyle bir topluluğun bir altkümesi olarak görülmekte ve okul matematik söylemi, bu özel iletişim biçiminin bir başlangıcı olduğu düşünülmektedir (Ben-Zvi & Sfard, 2007). Matematiği öğrenmek, bu özel söylemi geliştirme etkinliği olarak tanımlanırken (Baccaglini-Frank, 2021) matematiği öğretme, amacı öğrencilerin söylemini kanonik (kabul görmüş) bir söyleme yaklaştırmaya hizmet eden iletişimsel etkinlik olarak tanımlanmaktadır (Tabach & Nachlieli, 2016). Başka bir deyişle, bir toplulukta matematik öğrenimi, tarihsel olarak oluşturulmuş rutinlere katılımı artırmak olarak tanımlanırken; matematik öğretimi ise öğrencilere matematik rutinlerini gözlemleme ve bu rutinleri kendi başına uygulayıp kullanma fırsatı vererek öğrencinin matematik söylemini etkin bir şekilde kullanmasını sağlamak olarak tanımlanır (Sfard, 2020). Bu nedenle, öğrencilerin söyleminin uzmanların söylemine doğru evrilmesi, öğretme ve öğrenme süreçlerinin altında yatan temel amaç olarak görülür (Lisarelli, Macchioni & Miragliotta, 2022).

Matematiksel söylem; kelime kullanımı (anahtar kelimeler) (word use), görsel aracılar (visual mediators), rutinler (routines) ve tasdik edilmiş anlatılar (endorsed narratives) olmak üzere dört söylem ögesini içermektedir (Sfard, 2008). Matematik yapmak, belirli kelimelerle (örneğin, dört, kare, denklem, eşitsizlik, fonksiyon), görsel araçlarla (örneğin, $5x + 3$, bir fonksiyonun grafiği), onaylanmış anlatılarla (örneğin, teoremler, tanımlar ve hesaplama kuralları) ve rutinler ile (karakteristik görevlerin yerine getirildiği kalıplı yollar) karakterize edilen belirli bir iletişim türüne katılmak anlamına gelmektedir (Sfard, 2008, 2018). Kelime kullanımı ve görsel aracılar matematiksel söylemlerin “araçlarını” (Sfard, 2008, s. 161) oluşturur. Kelime kullanımı, bir söylemde kullanılan anahtar kelimeleri, bunların anlamlarını ve kullanımlarını kapsar ve söyleme bağlı olarak aynı kelime farklı şekillerde kullanılabilir. Matematiksel söylemde “denklem”, “üçgen”, “türev”, “fonksiyon” gibi sözcüklerin (kavramların) kullanımı anahtar kelimelere örnek verilebilir. Matematikte kullanılan kelimeler sadece miktarları ve şekilleri belirtmezler. Günlük dildeki söylemlerden farklı olarak okulda veya akademik ortamlarda kullanılan matematiğe ait söylemler bu alana özgüdür. Bu nedenle sözcük kullanımı, bireyin kelimeyi hangi anlamda kullandığıyla ilgilidir ve bu nedenle oldukça önemli olduğu iddia edilmektedir (Sfard, 2008). Anahtar kelimelerin kullanımı, matematiksel söylem katılımcılarının düşündükleri ve hakkında konuştukları nesneleri tanımlamalarına, bu tür nesneler hakkındaki konuşmalarını koordine etmelerine yardımcı olan, Sfard (2008)’ın görsel aracılar olarak adlandırdığı bir diğer söylem ögesinin kullanımıyla desteklenir. Matematiksel söylemin bir diğer ögesi olan görsel aracılar ise iletişim sürecinin bir parçasını harekete geçiren görsel nesnelerdir (Sfard, 2008). Matematiksel söylemde görsel aracılar; semboller, grafikler, geometrik şekiller, tablolar ve matematiğin ifade edildiği lisandaki görsel simgeler (harfler, yazılı sözcükler) gibi yazılı ve sözlü olarak kullandığımız tüm görsel araçları kapsamaktadır (Emre-Akdoğan, 2015). Bu nedenle görsel aracılar “iletişim sürecinin bir parçası olarak kullanılan görünür nesnelerdir” (Sfard, 2008, s. 133).

Anlatılar; nesnelerin, nesneler arasındaki ilişkilerin veya söyleme özgü kanıtlama prosedürlerinin yardımıyla onaylanmaya veya reddedilmeye tabi olan; nesnelerle veya nesneler tarafından süreçlerin açıklaması olarak çerçevelenen ifadeler dizisidir. Başka bir deyişle anlatılar bir nesneyi, nesneler arasındaki ilişkiyi, doğruyu ya da yanlışlığı gösteren bir süreci tanımlayan sözlü ya da yazılı herhangi bir cümledir (Nisa vd., 2021). Tasdik edilmiş (onaylanan) anlatılar ise söylem içerisinde katılımcıların doğru kabul ettiği argümanlar olarak tanımlanır. Yani onaylanan anlatı, tanımlar, ispatlar ve teoremler gibi toplum tarafından yeterince kabul edilen matematiksel bir anlatıdır (Nisa vd., 2021). Burada “tasdik edilmiş” terimi, anlatının verilen matematiksel söylemin iyi tanımlanmış kurallarına göre onaylanabileceği veya reddedilebileceği anlamına gelir. Matematiksel söylemde tasdik edilmiş anlatılar; tanımlar, teoremler ve ispatlardır (Sfard, 2008). Matematiksel anlatıların onaylanması için bu söyleme özgü, iyi tanımlanmış bir dizi kurala göre inşa edilmesi ve doğrulanması gerekir. Matematiksel bir söylemin anlatılar arasındaki tüm dengeli ilişkilerle dayandığı kabul edilir (Sfard, 2007, 2008).

Rutinler, matematiksel söylemde sürekli tekrarlayan eylemlerdir (Sfard, 2008). Başka bir deyişle rutin, bir kişinin anahtar kelimeleri ve görsel araçları kullanarak yaptığı eylemlerin ve bunların anlatılarda kullanımının bir modeli/düzenliliğidir. Öğrencilerin matematiğe ait rutinleri, matematikte iletişim kurmasının kalıplaşmış yolları olarak kabul edilir. Rutinler, topluluk tarafından farklı ve karakteristik şekillerde kullanılan, düzenli olarak tekrarlanan ve tanımlama, tahmin etme, kanıtlama, genelleme ve soyutlama gibi iyi tanımlanmış uygulamaları içerir (Nardi vd., 2014). Commognitive teoriye göre, daha önce katıldığı bir duruma benzer bir durumla karşılaşan katılımcının öncekine benzer eylemleri gerçekleştirmesi muhtemeldir. Bu nedenle söylemsel yaklaşım, rutinleri “benzer durumlarda tekrarlanan söylemsel kalıplar” olarak kavramsallaştırmaktadır (Sfard & Lavie, 2005). Bu bağlamda bir rutin, tekrarlanan söylemsel eylemi tanımlayan bir dizi meta (üst) kurallar (metarules) olarak da tanımlanabilir. Rutinler matematiksel söylemin diğer öğelerini kapalı veya açık olarak etkiler, katılımcıların eylemleri ile matematiksel

söylemlerindeki diğer öğeleri yönlendirir (Emre-Akdoğan, 2015; Nisa vd., 2021). Kalıplaşmış söylemsel eylemin, yani bir rutinin “*nasıl*” uygulandığı, rutinin sürecini belirleyen ya da sadece sınırlayan bir dizi meta (üst) kuralları (kullanılan prosedür ve eylemi) içerir. Rutinin “*ne zaman*” uygulandığı ise katılımcının bir rutinin kullanımını hangi matematiksel koşullarda uygun gördükleri ile ilgilidir (Sfard, 2008). Rutinlerin ne zaman kullanıldığı *uygulanabilirlik* (applicability) ve *kapanış* (closure) olmak üzere iki ayrı terim kapsamında ele alınmaktadır. *Uygulanabilirlik*, bir katılımcının hangi durumlarda belirli bir rutini uygulayacağını altını çizerken, *kapanış* katılımcının hangi durumlarda uyguladığı rutinin tamamlandığı kanısına vardığını araştırmaktadır (Sfard, 2008). Matematiksel rutinler, farklı hesaplama türlerinde olduğu gibi, matematiksel nesneleri işlemenin algoritmik olarak belirlenmiş yollarını ve ayrıca kanıtlama, tanımlama veya doğrulamaya yönelik buluşsal prosedürleri içerir (Sfard, 2015).

Rutinlerin söylemin diğer öğelerini de içermesi nedeniyle Lavie vd. (2019) çalışmasında rutin tanımını daha açık bir şekilde işlevselleştirerek, rutinlerin söylemsel yaklaşıma dayanan çalışmalarda analiz birimi olarak ele alınabileceğini öne sürmektedir. Rutin tanımının işlevselleştirilmesi, öğrenme ve öğretme söylemindeki rutinleri analiz etmek için açık bir dizi analitik ve operasyonel araç sağlamaktadır (Heyd-Metzuyanim & Graven, 2019). Bu çalışmanın da analiz birimi olan rutinler, Lavie ve diğerlerinin (2019) rutin tanımı bağlamında ele alınacağından, rutinin işlevselleştirilmiş tanımına detaylı bir şekilde yer verilecektir.

Rutinler

Lavie vd. (2019) rutini, görev (task) ve prosedür (procedure) kavramlarını kullanarak “görev-prosedür” çifti olarak tanımlamaktadır. Başka bir deyişle rutinler, görev (katılımcının belirli bir görev durumuna ilişkin yorumu) ve prosedür (görevi gerçekleştirmek için atılan adımlar) çiftlerinden oluşur (Sfard, 2018). Burada görev; katılımcının geçmiş öğrenme yaşantılarını göz önüne alarak, yeni görev durumunda ne

yapması ya da yapmaması gerektiğine dair mekanik olarak verdiği kararı iken prosedür; katılımcının görevini gerçekleştirmek için uyguladığı işlem, yol, yöntem ve sembolik manipölasyonlar gibi eylemlerin tamamıdır. Bu şekilde nesnellikten arındırılan “görev” ve “prosedür” terimlerinin tanımlarına göre bir “rutin” görev durumuna ve görevi gerçekleştiren katılımcıya bağlıdır (Lavie vd., 2019). Bununla birlikte yenilenen rutin tanımı, belirli kişilerden ve bağlamlardan bağımsız bir şekilde uzman matematikçiler tarafından uygulanan rutinleri de göz ardı etmemektedir.

Görev durumu (task situation), katılımcının kendisini bir şey yapmakla yükümlü gördüğü herhangi bir işi veya çözmekle yükümlü olduğu bir problem durumunu belirtir. Görev durumu, belirli bir eylem türünün ortaya çıkarılması için görev belirleyici (araştırmacı, uzman, öğretmen vb.) tarafından kasıtlı olarak oluşturulabilir. Katılımcıların yeni görev durumlarında hareket etmelerine olanak sağlayan ve önceki görev durumlarında meydana gelenlerin tamamını kapsayan geçmiş durumlara ise emsal olaylar (precedent events) denir. Görev, katılımcının görev durumlarında tekrarlanması gerektiğini düşündüğü emsal olayların tüm unsurlarını ve prosedür ise görev durumuna yanıt olarak görevi gerçekleştiren kişi tarafından uygulanan eylemleri içerir (Baccaglini-Frank, 2021, Lavie vd., 2019). Belirli bir görev durumunda katılımcılar, uygulanan prosedürü oluşturan mevcut eylemlerini geçmişte öğrendikleri ve yaptıklarına göre modeller ve bu, rutin adı verilen eylem kalıplarıyla sonuçlanır (Lisarelli vd., 2022). Katılımcı görevi belirledikten sonra, emsal eylemi tekrarlayarak mevcut görevi gerçekleştirebilir. Emsal olayı tekrarlayan katılımcı; önceki performansının bazı yönlerini korurken, bazı yönlerini de değiştirir. Rutinin yenilenen tanımına göre “görev” terimi katılımcının görev durumuna yönelik yorumuna atıfta bulunur ve katılımcının görevi “ne” olarak gördüğü söylemlerinde gözlemlenemeyebilir (Lavie vd., 2019). Bununla birlikte aynı görev durumu için farklı katılımcılar; benzer prosedürleri, farklı görevleri amaçlayarak uygulayabilir. Örneğin, “ $2x - 1 = 3$ denklemini sağlayan reel sayıları belirleyiniz” biçimindeki bir görev durumu için, bir katılımcı “ $x = \text{sayı}$ ” biçiminde bir ifade üretmeyi kendine görev edinebilirken, bir

diğeri denklemde (açık önermede) x yerine konulduğunda eşitliği (doğru bir önerme) sağlayan reel sayıyı arıyor olabilir (Lavie vd., 2019).

Araştırmacılara (Lavie vd., 2019; Sfard, 2008) göre tarih boyunca ortaya çıkan ve gelişen, nesnel (practical) ve söylemsel olmak üzere iki tür rutin vardır. Nesnel rutinler, görev durumunun nesnelerin değiştirilmesini, yeniden düzenlenmesini veya yeniden konumlandırılmasını gerektirdiği rutinler olarak tanımlanır. Sayılarla veya matematiksel nesnelerle işlemler yapmak, geometrik nesneleri manipüle etmek nesnel rutinelere örnek olarak verilebilir. Söylemsel rutinler ise görev durumunun iletişimsel bir eylem gerektirdiği rutinlerdir. Başka bir deyişle, söylemsel rutinler, başkalarıyla veya kendimizle iletişim kurarken kullandığımız kalıplardır. Rutinlerin nesnel veya söylemsel olarak belirlenmesi bağlama göre değişebilir. Başka bir ifadeyle, herhangi bir rutin bir bağlamda nesnel olabilirken aynı rutin başka bir bağlamda söylemsel olarak kabul edilebilir. Örneğin iki sayının toplanması görevinde katılımcı matematiksel nesneler hakkında yeni bir anlatı oluşturmayı ($351+28=379$ olur şeklinde) ve onaylamayı hedefliyorsa bu rutin söylemseldir. Eğer katılımcı sayıları (351, 28 ve 379) matematiksel bir nesne ve toplama işlemini de yeni bir matematiksel nesneyi elde edebileceği bir eylem olarak görüyorsa bu rutin nesneldir. Lavie vd. (2019) nesnel ve söylemsel rutinleri süreç ve sonuç odaklı olmak üzere ikiye ayırmakta ve bu rutinleri Tablo 1'deki gibi ritüel (ritual), edim (deed) ve keşif (exploration) olarak sınıflandırmaktadır.

Tablo 1

Rutin Türleri

Rutinler	Süreç odaklı	Sonuç odaklı
Nesnel	Ritüel	Edim (Eylem)
Söylemsel	Ritüel	Keşif

Ritüel rutinlerin kapanış koşulları diğer insanlarla bir bağ oluşturmak ve bu bağı sürdürmektir. Ritüel olarak tarif edilen rutin kullanımında, katılımcının temel kaygısı sosyal bağ kurma ve başkalarıyla uyum içinde hareket etme olduğu için ritüeller genellikle başkalarının yaptıklarını taklit ederek inşa edilir ve sürdürülür. Bu nedenle de ritüel

rutinlerin uygulanabilirlik koşulları oldukça kısıtlayıcıdır. Yani katılımcının tek amacı prosedürü kesin ve doğru bir şekilde başkalarını taklit ederek uygulamaktır. Ritüeller aynı zamanda son derece kısıtlı tetikleyicileri olan rutinlerdir ve rutinin tetikleyicisi başka bir kişiden veya bir kişi tarafından üretilenlerden kaynaklanır. Bu nedenle ritüel bir rutin, nadiren herhangi bir yaratıcılık veya bağımsız karar vermeyi içeren, önceden yapılmış bir sürecin kopyası olarak karakterize edilir (Nachlieli & Tabach, 2019). Belirli bir görev durumunda ritüeli icra eden katılımcı, prosedürü “*Nasıl ilerlerim?*” sorusuna yanıt arayarak uygulamaya çalışır. Bu nedenle ritüeller süreç odaklıdır. Bununla birlikte ritüellerin başkalarını taklit yoluyla icra edilmesi söz konusu olduğundan prosedür sürecinde kanıtlamaya yer yoktur (Heyd-Metzuyanim vd., 2022; Lavie vd., 2019; Sfard, 2008).

Keşif, onaylanabilir bir anlatı üretildiğinde veya doğrulandığında performansı tamamlanmış sayılan bir rutindir (Sfard, 2008). Bu türden rutinlerin kapanış koşulları matematiksel bir anlatı üretmek üzerine kuruludur. Bir anlatının üretilmesiyle sonuçlanan sayısal hesaplamalar, denklem çözme, tanımlama veya kanıtlama gibi matematiksel söylemler keşiflere örnek verilebilir. Keşif rutini tek bir görevi başarmak için farklı prosedürlerin esnek kullanımı ve katılımcının kendi hedeflerine ulaşmak için bu prosedürleri başlatması ile karakterize edilir. Yani katılımcı rutinini dışsal bir otoriteyi memnun etmek için değil, dünya hakkında anlatılar üretmek için gerçekleştirir. Bu nedenle keşif rutininde, belirli bir görev durumunda katılımcı prosedürü başkalarından bağımsız bir şekilde uygulayabilir ve uygulayıp uygulamama kararını kendisi alabilir. Belirli bir görev durumunda keşfi icra eden katılımcı, prosedürü “*Neyi başarmak istiyorum?*” sorusuna yanıt arayarak uygulamaya çalışır. Bu nedenle keşifler ürün odaklı rutinlerdir ve keşif prosedürünün uygulanması sürecinde matematiksel ispatlara yer verilir (Lavie vd., 2019; Sfard, 2008). Keşifler; inşa (construction), doğrulama (substantiation) ve hatırlama (recall) olmak üzere üç farklı yolla icra edilebilirler. Anlatıların inşa yoluyla icra edilmesi, yeni onaylanabilir anlatılarla sonuçlanan söylemsel süreci içerir. Buradaki matematiksel söylemde yeni anlatılar daha önceki onaylanmış anlatılar üzerindeki işlemler yoluyla inşa

edilir. Keşfin icrasının bir başka yolu da matematikçilerin önceden oluşturulmuş anlatıları onaylayıp onaylamamaya karar vermelerine yardımcı olan doğrulama eylemidir. Bir anlatının doğrulanması; matematikçilerin, anlatının onaylanabileceğine ikna olduğu bir süreci içerir. Keşfin bir diğer icra yolu olan hatırlama ise geçmişte onaylanan bir anlatıyı çağırabilmek için gerçekleştirilen süreci kapsar. Keşifler daha önce onaylanmış anlatılar üzerine inşa edildiğinden önceki (geçmiş) anlatıların belirli bir miktarını hatırlamak kişinin söylemsel akıcılığı için önemlidir. Katılımcının onaylanmış anlatıları hatırlamaya çalışma biçimi; sadece anlatıların nasıl ezberlendiği hakkında değil, aynı zamanda orijinal olarak nasıl oluşturuldukları ve doğrulandıkları hakkında da çok şey gösterebilir (Sfard, 2008).

Bununla birlikte Sfard (2008); nesnelerde fiziksel bir değişimle sonuçlanan eylemleri içeren nesnel rutinleri, “edim” olarak tanımlar. Bu rutinlerin kapanış koşulu öğrenme ortamında fiziksel bir değişikliğin meydana gelmesidir. Edimler, anlatıları ve matematiksel nesneleri üreten veya değiştiren bir dizi eylemi içerir. Söylemsel yaklaşıma göre edim rutinleri, katılımcının yalnızca ne yaptığını betimlemek, bildirmek veya ifade etmekle kalmaz; aynı zamanda onu fiilen yaptığını da ifade eder.

Her üç rutin türü de matematiksel söylemin gelişiminde rol oynamaktadır (Tabach & Nachlieli, 2016). Farklı katılımcılar tarafından gerçekleştirilen benzer adımlar, bir eylemin (deed), bir ritüelin ve hatta bir keşfin gerçekleştirilmesi olarak değerlendirilebilir. Katılımın türünü belirleyebilmek için, katılımcının adımları gerçekleştirmedeki amacının ne olduğunun farkına varılması önemlidir (Tabach & Nachlieli, 2016).

Rutinleştirme Bağlamında Matematiksel Öğrenme

Sosyo-kültürel öğrenme teorilerine dayanarak (Lave & Wenger, 1991; Vygotsky, 1978), Sfard’ın (2008) matematiksel öğrenmeyi, katılımcının söylemlerindeki yani matematikle ilgili iletişim kurma biçimlerindeki değişim olarak tanımladığından daha önceki başlıklarda bahsedilmiştir. Bahsi geçen bu tanımları genişleten Lavie vd. (2019) ise öğrenmeyi, bireyin eylemlerini rutinleştirme süreci olarak tanımlamakta ve tekrarın

öğrenmenin özü olduğunu vurgulamaktadır. Bu tanım ışığında araştırmacılar (Lavie vd., 2019; Sfard, 2008, 2017) bireyin matematiği öğrenebilmesi için, tarihsel olarak geliştirilmiş köklü matematiksel rutinleri bireyselleştirmesi (kendisine mal etmesi) gerektirdiğini söylemektedir. Commognitive bakış açısına göre katılımcının matematiksel söylemi bireyselleştirmesi, ilgili söylemi bireyin kendi düşüncesinin bir parçası haline getirdiği anlamına gelir ve bu durum öğrenmenin gerçekleştiğini gösterir (Sfard, 2017). Araştırmacılara göre (Lavie vd., 2019; Nachlieli & Tabach, 2019) öğrenmenin ilerlemesi için bireyin başlangıçta başkalarına bağlı bir şekilde taklit ederek sergilediği ritüel rutinlerini; başkalarından bağımsız, esnek ve yetkin bir şekilde uygulayabildiği keşif rutinlere dönüştürmesi gerekmektedir. Ritüelden keşfe geçiş süreci (process of de-ritualization) bir öğrencinin rutininin süreç odaklı olmaktan sonuç odaklı olmaya doğru gelişmesiyle *rutininin ritüelden keşif rutinine doğru kademeli bir şekilde değişimi* anlamına gelmektedir (Christiansen vd., 2023; Lavie vd., 2019). Bu değişimin gerçekleşebilmesi için bireylerin bir yandan söyleme katılmaları, bir yandan da rutinlerinin süreç odaklı olmaktan sonuç odaklı olmaya doğru gelişmesi için çaba göstermeleri gerekmektedir (Nachlieli & Tabach, 2022; Sfard, 2020). Commognitive teoride, herhangi bir öğrenme sürecinde bir uzmanın taklit edilmesine büyük önem verilmektedir. Bu teoriye göre matematik rutininin taklit edilmesi ve rutin içerisinde esnek bir şekilde çalışılabilmesi öğrenmenin ilk adımlarından biri olarak kabul edilmektedir (Sfard, 2008). Matematiği öğrenme, yani matematiksel söylemin bireyselleştirilmesi, sadece başkalarıyla değil aynı zamanda kişinin kendisiyle de matematiksel iletişim kurabilmesi süreci olarak tanımlanmaktadır (Sfard, 2007). Matematiği öğrenme, öğrencilerin daha az gelişmiş söylemlerden daha gelişmiş söylemlere doğru kritik geçişler yapmasını gerektirir (Heyd-Metzuyanim, 2019; Sfard, 2008). Bu kritik geçişler, matematiksel olarak neyin doğru olduğuna karar vermek ve doğrulamak için kullanılan “kuralların (rutinlerin)” değişmesiyle karakterize edilmektedir. Öğrencilerin yeni kuralları uygulamasının başkaları için söylem olmaktan kendisi için söylem olmaya doğru değiştiği aşamalı bir bireyselleşme süreci yoluyla gerçekleşir (Sfard,

2020). Başka bir deyişle, rutininin amacı öğretmenin/uzmanın beklentilerini karşılamamanın bir yolu olmaktan ziyade, kendilerini matematiksel gerçeklere ikna etmenin bir yolu haline gelir (Ben-Dor & Heyd-Metzuyanım, 2021). Bir öğrencinin basit lineer denklem türlerine aşına olduktan sonra dağılma özelliğini kullanarak lineer bir denklemi çözmek için yeni bir prosedürü öğrenme süreci ya da biraz daha meta (üst) düzeyde; kare, dik açılı üçgenler, üçgenler ve bir geometrik yüzeyin alanı ile teoremlerin nesnelere aşına olduktan sonra öğrencinin Pisagor teoremini ispatlayarak onaylaması süreci söylemin bireyselleştirilmesi durumuna örnek olarak verilebilir.

Lavie vd. (2019) önceki çalışmalarında da (Lavie & Sfard, 2019; Sfard & Lavie, 2005; Sfard, 2008) olduğu gibi ritüellerin acemi katılımcının yeni bir söyleme katılırken attığı ilk ve gerekli adım olduğunu belirtmektedir. Araştırmacılara göre ritüel, yeni bir söyleme giriş biletidir ve herhangi bir öğrenme sürecinin olmazsa olmazıdır. Lavie vd. (2019) katılımcının yeni bir görev durumunda harekete geçebiliyor olmasının önceki deneyimleri sayesinde olduğunu öne sürmektedir. Yani katılımcı, görev durumunu emsallerine (şimdiki görev durumuna yeterince benzer olarak yorumladığı geçmiş durumlara) başarılı bir şekilde geri dönüşü yapabildiği için gerçekleştirebilmektedir. Bazı durumlarda; ilgili geçmiş deneyime yapılan bu geri dönüş, açık bir çabanın ürünüdür. Ancak çoğu zaman, bilinçli bir hatırlama söz konusu değildir. Katılımcı belirli bir görev durumunda, emsal olaylardan hangilerinin tekrar edip etmeyeceğine ve emsal olaylarda değişimin nasıl olacağına karar verir. Bu nedenle yeni bir söylemle karşılaşan katılımcı için emsalleri belirleme sürecinde, seçicilik söz konusudur. Bununla birlikte, katılımcının belirli bir görev durumunda açığa çıkan emsal olayları, ilgili katılımcının emsal arama alanıyla (precedent-search-space) sınırlıdır. Matematik derslerinde emsal arama alanı genellikle son birkaç derste öğrenilen ve gerçekleştirilen rutinleri içerir (Nachlieli & Tabach, 2022). Bu süreç, öğrencilerin görevi yerine getirmek için önerilen prosedürü “olması gerektiği gibi” katı bir şekilde kullanmalarıyla başlar (Nachlieli & Tabach, 2012; Sfard & Lavie, 2005). Ritüelin kullanılması da aslında katılımcının belirli bir görev durumuna ait emsal arama

alanındaki emsallerin eksikliğinden kaynaklanır. Emsal arama alanının yetersizliği veya eksikliği, katılımcıyı görev durumunu yorumlamada veya bir prosedürü gerçekleştirmede bir yetişkini (veya uzmanı) taklit etmeye yöneltir (Lavie vd., 2019). Sabit, taklitçi eylemler, süreçler ya da sözcük kullanımı olarak karşımıza çıkan bu ritüel rutinler, *bir ritüel rutin keşif rutinine dönüşmesi süreci* aracılığıyla yeni söylemlere geçişi mümkün kılan gerekli ilk katılım biçimleridir.

Sfard' a (2017) göre katılımcı, karşılaştığı yeni bir görev durumunda devam edebilmek için başkalarını (uzman katılımcılar, öğretmenler vb) taklit ederek yeni söyleme katılmaya çalışır. Fakat bu bağlamdaki taklit, düşüncenin olmadığı bir taklit anlamına gelmez. Sfard (2008) bu tür taklidi “düşünerek taklit etme (thoughtful imitation)” olarak isimlendirir. “Düşünerek taklit etme” terimiyle Sfard (2008, s. 250), öğrenenin, uzmanın eylemini yeniden üretmeye çalışırken, bu eylemin hangi özelliklerinin korunması gerektiğini ve hangilerinin yeni bir durumun taleplerine göre değiştirilmesi gerektiğini dair sürekli kendine soru sorma ihtiyacı duyduğu sürecini kastetmektedir. Başka bir deyişle, düşünerek taklit eden (thoughtful imitator) katılımcı; performansını sürekli olarak başkalarının performansına göre ayarlarken, aynı zamanda uzman (yetkili) matematikçilerin yaptıklarının nedenleri üzerinde düşünür. Bu bağlamda ritüelden keşfe geçiş süreci aracılığıyla bir ritüel rutin, bir keşif rutinine dönüşebilir. Bununla birlikte en uygun koşullarda bile bazı öğrenciler başarısız olabilir. Burada “başarısızlık” terimi ile kastedilen, katılımcıların aslında ne hakkında konuştuklarını bilmeden matematiksel söyleme katılma durumlarıdır (Sfard, 2017). Ayrıca araştırmalar (Lavie & Sfard, 2019; Lavie vd., 2019; Sfard & Lavie, 2005) ritüelden keşfe geçiş sürecinin, kademeli ve yavaş olabileceğini vurgulamaktadır. Keşif rutinleri ise katılımcının “matematiksel anlatılar ürettiği ürün odaklı rutinler” olarak karşımıza çıkmaktadır (Baccaglini-Frank, 2021). Bu bağlamda öğrenme; katılımcının rutinlerinin, ritüelden keşiflere dönüştürülmesi süreci ve belirli bir görev durumu için eylem arama alanının genişletilmesi olarak açıklanmaktadır (Lavie vd., 2019).

Düşünmeyi kişinin kendisiyle iletişim kurması olarak tanımlayan Commognitive teoriye göre, öğrenciler hem konuşarak hem de düşünerek matematiksel bir söyleme katılmaktadır. Burada düşünme sözlü veya yazılı olarak ifade edilebilir. Bu bakımdan matematiksel söyleme katılım eylem halinde görülürken, gelişim ise söylem değişiminde görülmektedir (Sfard, 2012). Bu çerçeveye göre öğretimin temel amacı, öğrencilerin matematikçiler gibi düşünmesini ve konuşmasını sağlamaktır. Buradaki odak nokta *öğrenendeki değişim değil, söylemindeki değişimdir* ve söylemin aynı kalması durumunda gelişimin gerçekleşmeyeceği söylenmektedir. Söylemdeki gelişme, öğrenenlerin matematiksel söylemdeki yeni kuralları kullanması ile kendini göstermektedir (Sfard, 2012). Öğrenciler yeni kuralları (rutinleri) kullandıklarında iletişimleri değişir ve dolayısıyla öğrenenlerin bu değişimi iletişimlerinde gösterebilmeleri halinde anlama ve matematiksel söylemlerinin geliştiği söylenir (Vyncke, 2012). Yani bir öğrencinin tarih içinde oluşmuş ve geliştirilmiş matematiksel söylemlere aşamalı ve artan katılımı, onun matematiksel düşünmesini geliştirir (Essack, 2015). Bu bağlamda Commognitive teorinin temel varsayımı; öğrenmenin öncelikle bireyin kafasındaki belirli bilişsel yapıları değiştirdiği bir süreç olmadığı, daha ziyade belirli bir topluluktaki katılım rutinlerindeki değişim süreci olduğudur (Heyd-Metzuyanim vd., 2019). Bu nedenle Commognitive bakış açısını benimseyen güncel çalışmalar, matematik hakkındaki öğretimi ve öğrenimi analiz etmek ve araştırmak için söyleme katılımlarına (ritüel ve keşif rutinlere) odaklanır (Christiansen vd., 2023). Matematiksel söylemde, öğrencilerin söylemsel rutinlerle nasıl meşgul olduklarına bağlı olarak karşımıza çıkan ritüel katılım ve keşifsel katılım; algılanan amaçları ve katılım kuralları bakımından da farklılık gösteren iki tür söylemsel katılım biçimidir (Baccaglini-Frank, 2021).

Ritüel Katılım ve Keşifsel Katılım

Commognitive çerçeve; rutinleri (ritüeller ve keşifler), “katılımcı rutininin amacı”, “katılımcının hakkında konuştuğu nesneler”, “rutinlerin kullanımında katılımcı esnekliği”, “dış otoriteye bağlılık” ve “katılımcının odak noktasının prosedürde ya da anlatı üretmede

olması” gibi yönlerden birbirinden ayırmakta ve karakterize etmektedir (Ehrenfeld & Heyd-Metzuyanım, 2018). Bu bağlamda ritüel katılımı; katılımcı rutininin amacı, başkalarını (arkadaş, öğretmen vb.) memnun etmek ve sosyal bir bağ kurmaktır. Bu nedenle ritüel katılımı, katılımcının belirli bir görev durumunda başkalarını taklit etmesi söz konusudur. Rutinlerin ritüel performansı, bir otorite tarafından belirlenen prosedürleri taklit etmeyi veya katı bir şekilde takip etmeyi içerir (Roberts & le Roux, 2019). Böylece ritüel katılımı katılımcının ilgi odağı yalnızca sembolik bir manipölasyon olarak görülen prosedürün uygulanmasındadır. Burada katılımcı, prosedürü uygularken yeni ve bağımsız kararlar alamaz, buna karşılık katılımcının sıklıkla hafızaya ya da otoriteye (arkadaş, öğretmen, ders kitabı) başvurması söz konusudur (Baccaglini-Frank, 2021). Süreç odaklı olan ritüel katılımı, katılımcı performansı belirli adımların atılması ve gerçekleştirilmesi ihtiyacına odaklanır (Nachlieli & Tabach, 2022).

Keşifsel katılımı ise matematiksel anlatılar üretmek amaçlanır ve yalnızca doğru olarak kabul edilen anlatılardan (aksiyom, tanım, teorem vb.) mantık yoluyla çıkarım yapılan anlatılar onaylanır. Keşifsel katılımı katılımcının başkalarından bağımsız karar verebilmesi durumu vardır ve keşifsel performans, elde edilecek ürüne veya sonuca odaklanmakla karakterize edilir. Bu nedenle keşifsel performans, eylemlilik göstermeyi, bağımsız seçimler yapmayı ve prosedürleri esnek bir şekilde uyarlamayı içerir (Heyd-Metzuyanım vd., 2016; Nachlieli & Tabach, 2019). Keşifsel katılımı, katılımcı prosedürü uygularken herhangi bir otoriteye başvurma ihtiyacı hissetmez ve problem çözücü olarak hareket eder. Belirli bir görev durumunu anlamlandırmak için konuşmalarını başkalarını memnun etmek için değil kendi argümanlarını sunmak için yerine getirir. Bu sebeple, keşifsel katılımı katılımcının söylemleri süreçlerden ziyade matematiksel nesneler hakkındadır ve sonuç odaklıdır (Baccaglini-Frank, 2021).

Matematik sınıflarında öğrencilerin katılımı genellikle ne tamamen ritüel ne de keşif amaçlıdır. Burada ritüel ve keşifsel katılımlar, katılımcının prosedür ile görevi ayırma becerisinde farklılık gösteren bir sürekliliğin uçları olarak görülebilmektedir (Nachlieli &

Katz, 2017). Söylemsel rutinleri ritüel-keşif sürekliliği bağlamında ele alabilmek için Lavie vd. (2019) rutinlere ait altı özelliği göz önüne almayı önermiştir: esneklik (flexibility), bağlılık (bondedness), uygulanabilirlik (applicability), katılımcının yetkinliği (performer's agentivity), söylemin nesneleştirilmesi (objectification of the discourse) ve gerekçelendirme (substantiability). Bu özelliklerin yeterince kapsamlı ve yeterli olamayabileceğini de tartışan Lavie vd. (2019), ritüel rutinlerden keşif rutinlerine geçiş sürecinin takip edilebilmesinde kullanılabileceğini öne sürmektedir. Araştırmacılara göre rutinlerin ritüelden keşfe geçiş sürecinde herhangi bir ilerlemeden söz edilebilmesi için bu özelliklerin bir veya daha fazlasında artış veya gelişim gözlemlenmelidir (Küchle, 2021). Bununla birlikte Lavie vd. (2019) ritüel ve keşif rutinleri arasında, öğrenme bağlamında bir rutinin gelişimindeki aşamalar olarak görülebilecek birden fazla özelliğin olasılığından da söz etmektedir. Bu nedenle araştırmacılar, ritüel ve keşfi "ritüel-keşif sürekliliğinin" iki uç noktası gibi düşünmektedir. Araştırmacılar olası belirleyicilerin (indicators) çeşitliliğine ve incelenebilecek yolların çokluğuna rağmen, ritüelleri tam teşekküllü keşiflere dönüştürme sürecini takip etmenin kolay olmayacağını da belirtmektedir. Buna ek olarak yapılan çalışmalar (Heyd-Metzuyanim, 2013, 2015; Heyd-Metzuyanim & Graven, 2019) ağırlıklı olarak ritüel olarak katılan öğrencilerin, daha keşfedici katılımcılara paralel olarak (çoğunlukla başarısızlığa yol açan) ilerlediği alternatif bir yola da işaret etmektedir. Şimdi Lavie ve diğerlerinin (2019) bahsettiği altı özelliğin karakteristiğine yer verilerek ritüel ve keşifsel katılım detaylandırılmaya çalışılacaktır.

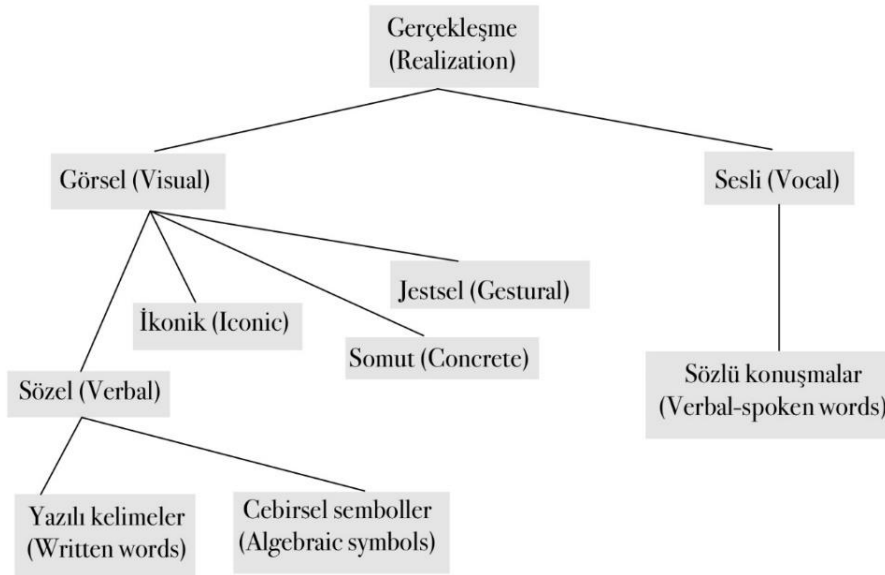
Söylemin Nesneleştirilmesi (Objectification of the Discourse)

Commognitive çerçevede nesneleştirme, katılımcının söylemlerinde bir ismi (örneğin, denklem, eşitsizlik, değişken, küme, eşitlik, açık önerme, bağıntı vb.) insani eylemlerden/faaliyetlerden bağımsız ve matematiksel bir nesneyi temsil eden bir şekilde kullanmaya başladığı süreç olarak tanımlanır (Sfard, 2008, s. 300). Başka bir deyişle bu yaklaşım nesneleştirmeyi; matematiksel söylemde, süreçlerden bahsetmenin yerini

matematiksel nesnelerden bahsetmenin aldığı yollardan biri olarak tanımlamaktadır. Sfard (2008)'a göre nesneleştirme, birbirleriyle sıkı sıkıya bağlı ve birbirinden ayrılmaz olan cisimleştirme (reification) ve bağımsızlaştırma (alienation) olmak üzere iki alt süreci içermektedir. Cisimleştirme (reification), bir katılımcının süreçler hakkında konuşmaktan matematiksel nesneler hakkında konuşmaya geçtiği sürece denilmektedir. Bağımsızlaştırma (alienation) ise matematiksel söylemin insani eylemlerden arındırılması olarak tanımlanmaktadır. Örneğin, “dizinin ilk ve son elemanlarını topluyorum ...” cümlesi ile “dizinin ilk ve son elemanlarının toplamı ...” cümlesini göz önüne alındığında, ilk cümle bir insan tarafından gerçekleştirilen bir işleme (ekleme) atıfta bulunurken; ikinci cümle, herhangi bir insana atıfta bulunmadan bir isimden (toplam) bahseder ve bu nedenle toplama işlemi bağımsızlaştırılmış ve dolayısıyla nesneleştirilmiş kabul edilir (Nachlieli & Tabach, 2022). Yani katılımcı matematiksel nesneler ve onların özellikleri hakkında konuşmaya başladığında söylemi, nesneleşmiş bir hal almaya başlar (Bacaglini-Frank, 2021). Bu nedenle söylemin nesneleştirilmesi basitçe matematiksel anlatıların üretilmesi anlamına da gelmektedir.

Commognitive teoriye göre, matematik kendi nesnelerini oluşturan otopoietik (autopoietic) yani kendi kendini üreten bir sistemdir ve matematiksel nesneler söylemsel nesnelerdir (Sfard, 2008). Sfard (2008) “matematiksel nesne”yi izah edebilmek için teorisinde gösterge (signifier) ve gerçekleşme (realization) terimlerini kullanır. Gösterge (signifier) söylem katılımcılarının ifadelerinde isim olarak işlev gören kelimeler veya sembollerdir (Sfard, 2008, s. 154). Başka bir deyişle matematiksel söylemde birincil nesne olarak işlev gören bir dizi kelimeye veya sembole gösterge (signifier) adı verilmektedir (Jayakody, 2015; Sfard, 2008). Buna göre herhangi bir görev durumu, bir problem, bir denklem, bir cebirsel ifade, bir sayı veya kavramların herhangi bir temsili, bir gösterge olabilir. Bir gerçekleşme (realization) ise bir göstergeyi başka bir birincil nesneyle eşleştiren prosedür ya da böyle bir prosedürün ürünü olarak tanımlanır (Sfard, 2008, s. 301). Başka bir deyişle bir gerçekleşme (realization), bir gösterge (signifier) hakkında iletişim kurmanın olası bir

yoludur (Jayakody, 2015). Örneğin “ $7x + 4 = 5x - 2$ denkleminin reel sayılar kümesindeki (cismindeki) çözümü” bir gösterge (signifiers) olarak düşünülürse bu göstergenin (olası) bir gerçekleşmesi (a realization of a signifier) analitik düzlemde çizilen $y = 7x + 4$ ve $y = 5x - 2$ doğrularının grafiklerinin kesişim noktasının x koordinatı olabilir. Bu bağlamda “matematiksel bir nesne” de gerçekleştirmeleriyle birlikte bir “gösterge” olarak tanımlanır (Sfard, 2008). Örneğin, bir kartezyen grafik ve bir cebirsel ifade, aynı fonksiyonun iki farklı gerçekleşmesi olabilir (Lisarelli vd., 2022). Gerçekleşmeler, Şekil 1’deki gibi sözlü veya yazılı kelimeler, cebirsel semboller, çizimler (ikonlar), somut nesneler ve hatta jestler biçiminde olabilir.



Şekil 1. Göstergelerin matematiksel söylemde farklı türdeki gerçekleştirmeleri. Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University. p. 155’ten uyarlanmıştır.

Bir göstergenin tüm gerçekleştirmeleri, hiyerarşik bir şekilde düzenlendiğinde buna “gerçekleşme ağacı (realization tree)” adı verilir (Jayakody, 2015). Başka bir deyişle, bir gerçekleşme ağacı (realization tree) belirli bir göstergenin tüm gerçekleştirmelerinin hiyerarşik olarak organize edilmiş bir kümesine denir (Sfard, 2008). Bir gerçekleşme aynı zamanda bir gösterge olarak da hizmet edebileceğinden, gerçekleşme ağacı bu gerçekleştirmelerin gerçekleştirmelerini de içeren hiyerarşik bir yapıya sahiptir. Bu nedenle her

matematiksel gerçekleşme, bir sonraki gerçekleşmenin göstergesi olabilir. Bu durum bir göstergenin bir gerçekleşme ağacının kökü (gerçekleşme ağacındaki birincil (primary) nesne) olmasına neden olur (Nisa vd., 2021). Örneğın “ $x \in \mathbb{R}$ için $2x - 5 = 3$ ” ifadesini bir gerçekleşme ağacının kökü olan bir gösterge olarak ele alırsak, “bir reel sayının iki katının beş eksiğı üçe eşittir” veya “eşitlik bağıntısı içeren bir açık önermedir” ifadeleri bu göstergenin sözel bir gerçekleşmesi olurken; “ $x = 4$ ” gibi cebirsel bir ifade, bu gösterenin sembolik (cebirsel) bir gerçekleşmesi olarak düşünölebilir. Bununla birlikte, belirli bir göstergenin gerçekleşme ağacı bireysel bir yapıdır ve katılımcılara göre değışiklikler içermektedir (Nachlieli & Tabach, 2012). Sfard (2008) matematiksel öğrenmenin, göstergenin gerekleşmelerinden ziyade, bir matematiksel nesneye ait gerçekleşmeler arasındaki ilişkilerde yer aldığını söylemektedir. Bu bağlamda matematiksel iletişim, bir göstergenin farklı gerçekleşmeleri arasında kolay ve aralıksız geçişleri içerir. Katılımcının bu geçişleri rahatça yapabilmesi ritüelden keşfe geçişin bir karakteristiğı olarak görölür (Lavie vd., 2019). Ritüel katılımda katılımcının gerçekleşmeler arası geçişleri yapması söz konusu değılken, keşifsel katılımda katılımcının bir göstergenin birden fazla gerçekleşmesini ve bunlar arasında esnek ve tutarlı geçişleri yapabilmesi mümkündür. Bunlara ek olarak katılımcının kullandığı dilin de nesneleştirilmesi (matematiksel dilin kullanılması) ritüelden keşfe ilerleyişinin bir başka göstergesi olarak alınabilir (Lavie vd., 2019).

Matematiksel nesneyi belirli göstergelere sahip soyut nesneler olarak tanımlayan bu teoriye göre, cebirsel bir ifade öğrenciler tarafından ya somut bir nesne (kâğıt üzerindeki semboller dizisi) ya da soyut (matematiksel) bir nesnenin göstergesi olarak görölabilir. Somut bir nesne olarak cebirsel ifade, hiçbir gerçekleşmesi olmayan ve katılımcının sadece semboller dizisi olarak gördüğü bir matematiksel gösterge olarak düşünölebilir. Yani bir ifadenin gerçekleşmeleri olmadığı sürece, bu ifade yalnızca kendisinden başka hiçbir şeyi temsil etmeyen ve yalnızca iyi tanımlanmış şekillerde manipöle edilebilen somut bir nesne olarak görölür. Bir ifadeyi gerçekleşmesi olmayan bir sembol olarak görmek, bir kişinin

adını, kendisiyle hiç tanışmadan veya onun hakkında çok fazla bilgiye sahip olmadan bilme durumuna benzetilebilir. Buna karşılık bir cebirsel ifadenin “sayı”, “açık önerme”, “polinom” veya “fonksiyon” gibi soyut bir nesne olarak görülmesi, bu ifadenin birer gerçekleşme biçimi olarak görülür. Örneğin bir öğrenci, “ $x^2 - 5x + 3$ ” cebirsel ifadesini sadece bir semboller dizisi olarak görüyorsa, bu ifade bahsi geçen öğrenci için bir somut nesnedir. Eğer bu cebirsel ifadeye bir “sayı”, bir “fonksiyon” veya “polinom” gibi soyut bir nesne gibi bakabiliyorsa, bu, öğrenci için bir gerçekleşmedir ve dolayısıyla “ $x^2 - 5x + 3$ ” cebirsel ifadesi katılımcının gözünde soyut matematiksel bir nesnedir. Katılımcı; (gerçekleşmenin olmadığı) semboller ve bu semboller üzerindeki işlemler hakkında konuşmak yerine, soyut nesneler ve özellikleri hakkında konuşmaya başladığında söylemi nesneleşmiş demektir. Başka bir deyişle, yalnızca göstergelere değil, matematiksel nesnelere de göndermeler içeren söylem “nesneleştirilmiş söylem” olarak adlandırılmaktadır (Heyd-Metzuyanım vd., 2016). Ritüel katılımı katılımcılar çoğunlukla somut nesnelerle (örneğin, gerçekleşmenin olmadığı cebirsel ifadeler) hareket ederler ve matematiksel bir nesne (soyut nesneler) hakkında bir anlatı üretmek gibi bir niyetleri yoktur (Baccaglini-Frank, 2021). Keşifsel katılımı ise katılımcı matematiksel nesneler hakkında konuşur ve matematiksel bir dil eşliğinde anlatılar üretmeyi amaçlar.

Esneklik (Flexibility)

Rutin performanstaki esneklik, katılımcının görev durumunda görevini yerine getirmede birden fazla yol kullanabiliyor olması anlamına gelir. Başka bir deyişle, esneklik belirli bir görev durumunu çözmek için kullanılabilecek çeşitli prosedürlerin dikkate alınmasını içerir ve dolayısıyla prosedürün birkaç alternatif yolla sergilenmesi söz konusudur (Nachlieli & Tabach, 2022). Ritüel katılımı katılımcı ezbere, katı bir prosedürü takip etme eğiliminde olduğundan alternatif yollar üretmede de güçlük yaşar. Katılımcı aynı görevi yerine getirmek için daha önce kullanmadığı bir prosedürü kullanabileceğini fark ettiğinde ise

esneklik oluşmaya başlar. Bu şekildeki bir değişiklik, keşfedici bir katılımın özelliklerindendir (Lavie vd., 2019).

Bağlılık (Bondedness)

Bağlılık; katılımcının prosedüründeki herhangi bir adımın çıktısını, sonraki adımlarda girdi olarak kullanması anlamına gelir. Bu şekilde bir çıktının sonraki adımlarda girdi olduğu bir rutine “bağlı” (bonded) denir. Prosedürde gerçekleştirilen herhangi bir adımın çıktısı, bir sonraki adıma girdi olarak kullanılıyorsa, rutin performans “bağlı” olarak kabul edilir. Ritüel katılımı katılımcı başka birinin performansını taklit etmeye başladığında, ardışık adımlar arasındaki ilişkinin farkında olmayabilir ve hepsini tekrar etmeye çalışsa da birinin çıktısını bir sonraki için girdi olarak kullanarak onları birbirine bağlaması mümkün olmayabilir (Nachlieli & Tabach, 2022). Bu nedenle prosedür sırasında atılan her adımın birbirine bir dişlinin çarkları gibi bağlı olması, keşif rutininin gerekli bir özelliğidir (Lavie vd., 2019).

Katılımcının Yetkinliği (Performer’s Agentivity)

Katılımcının yetkinliği, katılımcının bir rutini ne zaman başlatacağını, devam etmek için hangi kararların gerekli olduğunu, bunların ne zaman biteceğini bilmesini ve çözümü değerlendirebilmesini içerir (Lavie vd., 2019). Ritüel katılımı; belirli bir görev durumunda katılımcı, prosedürün tam olarak yerine getirilmesini vazife olarak görür ve katılımcı neyin, ne zaman yapılması gerektiğine karar vermekte özgür değildir. Ritüelden keşfe geçiş sürecinde ise katılımcı başkalarından yardım almadan ve giderek artan bir şekilde kendi kararlarını almaya başlayarak prosedürü bağımsız bir şekilde uygulamaya başlar. Yani artan yetkinlik, öğrencinin dış otoritelerden bağımsız olarak daha fazla karar alabilmesi anlamına gelir (Heyd-Metzuyanim vd., 2022; Lavie vd., 2019). Her ne kadar Commognitive teoride açıkça tanımlanmamış olsa da “otorite” terimi, öğrencilerin meta

(üst) seviye öğrenme bağlamında güvendikleri veya güvenmeleri beklenen, söylemde deneyimli bir bireyi temsil etmektedir (Ben-Zvi & Sfard, 2007). Bir kişinin rutininin tam teşekküllü bir keşif haline geldiğinin nihai göstergesi, katılımcının rutinini uygulamak için başka birinin davetine ihtiyaç duymamasıdır. Katılımcının kendi ihtiyaçlarına yanıt olarak ilgili görev durumlarını kendisi için belirleyebilmesi, ritüelden keşfe geçişin bir özelliğidir (Lavie vd., 2019).

Gerekçelendirme (Substantiability)

Gerekçelendirme, ortaya çıkan (zuhur eden) herhangi bir rutin, bir prosedür ya da bir anlatı hakkında akıl yürütmeyi, argümanlar sunmayı veya nedenini gösterebilmeyi içerir. Katılımcının rutininin nedenini gösterebilme ve gerekçelendirme biçimi onun rutin gelişimine dair ipuçları verebilir. Katılımcı, süreçlere odaklanmak veya otorite olarak gördükleri kişilerin yargılarına güvenmek yerine kendi performansını giderek daha fazla değerlendirebildiğinde ve bunun uygunluğunu veya doğruluğuna dayanak gösterebildiğinde, gerekçelendirme artar (Lavie vd., 2019; Nachlieli & Tabach, 2022). Süreç odaklı ritüel katılımı, katılımcı rutinini gerekçelendirmede veya doğrulamada belirli bir kritere sahip olmadığı için otorite olarak gördüğü kişilerin yargısına güvenir. Ritüel katılımı katılımcı performansı, genellikle doğrulama talebine yanıt olarak atılan adımların (prosedürün) ayrıntılandırılmasını içerir. Bazı katılımcılar yaptığı eylemlerin adımlarını özetleyerek doğruluğunu gösterirken, bazıları ise bunu süreci basitçe tanımlayarak yapar. Başka bir deyişle katılımcı; sonraki eylemlerinin kabul edilebilirliğini, bu eylemleri özetleyerek ve doğru bir şekilde gerçekleştirildiğini göstererek yapmaya çalışır. Örneğin, bir denklemi yeni çözen bir öğrenci, prosedür adımlarının her birini detaylandırarak çözüm sürecini gerekçelendirebilir. Keşifsel katılımı ise katılımcı alternatif bir prosedürün aynı sonucu vereceğini göstererek performansını doğrular. Keşifsel katılımı katılımcılardan rutinini doğrulamaları istendiğinde, gerekçelerini genellikle kendi toplulukları tarafından onaylanan üst kurallara dayandırır (Nachlieli &

Tabach, 2022). Örneğin keşifsel bir katılımda öğrenci, denklemdeki değişkenin yerine o andaki evrensel kümenin elemanlarını koyarak cebirsel ifadeyi sağlayabilir ve böylece keşifsel bir performans sergileyebilir. Katılımcının süreçten ziyade sonuca odaklanarak rutinini doğrulaması ritüelden keşfe geçişin özelliklerinden biri olarak görülür (Lavie vd., 2019).

Uygulanabilirlik (Applicability)

Uygulanabilirlik, katılımcının bir rutini farklı çevre, farklı görev durumu, görev durumundaki farklı bir bağlam ve aşına olduğu benzer görev durumlarında uygulayabilme performansını içerir. Yeni bir görevle karşı karşıya kaldıklarında, katılımcılar belirli bir prosedürün görevi çözmek için uygulanabilir olup olmadığını düşünmelidir. Yani, ellerindeki görevi yerine getirmede yardımcı olabilecek olası emsaller için geçmiş emsal alanlarını araştırırlar. Yeterince benzer görünen bir görev ararlar ve mevcut görevi yerine getirmek için (önceki deneyimlerinden) uygun olduğunu düşündükleri prosedürü benimserler (Nachlieli & Tabach, 2022). Ritüel katılımda, bir katılımcının emsal durumları sergileyebilmesi için önceki görev durumuyla benzer ortamların oluşması gerekir. Bu nedenle katılımcının bir rutini farklı görev durumlarında veya ortamlarda uygulamaya başlaması ritüelden keşfe geçişin bir göstergesi olarak düşünülür (Lavie vd., 2019).

Küchle (2021) çalışmasında, Lavie ve diğerlerinin (2019) ritüel rutinlerden keşif rutinlere geçişi betimleyen bu altı özelliği Tablo 2'deki gibi "Rutinlerin ritüel yönlerini keşifsel yönlerinden ayırmaya yardımcı olacak özellikler" başlığı altında tablolastırmıştır:

Tablo 2

Rutinlerin Ritüel Yönlerini Keşifsel Yönlerinden Ayırmaya Yardımcı Olacak Özellikler

	Rutin ritüel yönleri	Rutin keşifsel yönleri
Esneklik	Katılımcı yalnızca tek bir prosedürü bilir ve uygular.	Katılımcı, rutini gerçekleştirmek için kullanılan prosedürleri değiştirebilir.
Bağılılık	Rutin “bağlı” hale gelmemiştir, yani kişi bir adımın çıktısının sonraki adımların girdisi haline geldiğini fark etmeyebilir.	Rutin bağılıdır, yani adımlar arasındaki ilişki katılımcı için açıktır.
Uygulanabilirlik	Rutin yalnızca ilk öğrenildiği duruma son derece benzer durumlarda çağrılır.	Rutin çeşitli farklı bağlamlarda uygulanabilir.
Katılımcının yetkinliği	Katılımcı, gerçek ya da hayali olarak başkalarına bağımlıdır ve onlar için performans sergiler.	Katılımcı rutinin performansı hakkında seçim yapmakta özgür hisseder.
Söylemin nesneleştirilmesi	Katılımcı, rutini gerçekleştirmek için somut örnekler/nesnelere güvenir. Katılımcının söylemi henüz nesneleştirilmemiştir.	Katılımcı, somut nesneleri matematiksel nesnelere soyutlamış ve nesneleştirilmiş söylemi kullanmıştır.
Gereçlendirme	Katılımcı, rutinin geçerliliğini kanıtlayamaz ve dış otoriteye güvenir.	Katılımcı kendi performansının geçerliliğini değerlendirebilir ve dış otoriteye güvenmez.

Küchle, V. A. (2021). Operationalizing the Commognitive Framework. <https://www.researchgate.net/publication/355181349> kaynağından uyarlanmıştır.

İlgili Çalışmalar

Bu bölümde sosyokültürel öğrenme teorilerine dayanarak (Lave & Wenger, 1991; Vygotsky, 1978) Sfard'ın (Lavie vd., 2019; Sfard, 2008; Sfard & Lavie, 2005) matematiksel öğrenme ve öğretme teorisini esas alan ve söyleme katılımında rutinlerin nasıl olduğuna odaklanan ilgili araştırmalar yer almaktadır. Öncelikle matematik eğitiminde Commognitive bakış açısıyla öğretimi açıklamaya çalışan ve öğreticilerin rutinlerine odaklanan çalışmalara kısaca değinilecek ve daha sonra öğrencilerin söyleme katılımlarına ve rutinlerine odaklanan bu çalışmayla ilgili olanlara (Baccaglini-Frank, 2021; Essack, 2015; Nisa vd., 2021; Roberts & le Roux, 2019) detaylı bir şekilde yer verilecektir.

İlgili literatür incelendiğinde matematik eğitiminde söylemlere odaklanan çalışmaların çoğunlukla öğretim süreçlerine odaklandığı ve katılımcıların da öğretmen ya da öğretmen adayları oldukları görülmektedir (Christiansen vd., 2023; Emre-Akdoğan, 2023; Heyd-Metzuyanım & Shabtay, 2019; Heyd-Metzuyanım vd., 2019; Heyd-Metzuyanım vd., 2016; Mbhiza, 2021; Nachlieli & Katz, 2017; Nachlieli & Tabach, 2015, 2019; Sfard, 2017). Çalışmalarında iki lise matematik öğretmenin ikinci dereceden polinom fonksiyonlarının incelendiği derslerine odaklanan Mbhiza (2021) öğretmenlerin iletişim kalıplarının, öğrencileri keşifsel katılıma teşvik edecek fırsatları kaçırdığını ortaya koymuştur. Öğretim süreçlerinin öğrenciler için sunduğu öğrenme fırsatlarını inceleyen Nachlieli ve Tabach (2019) ise çalışmasında ritüel katılım fırsatları sağlayan öğretim uygulamalarının yaygınlığının olası nedenlerini araştırmıştır. Farklı ülkelerden videoya kaydedilmiş onbir farklı derste öğretim rutinlerini sundukları ve öğrenme fırsatı bakımından “ritüeli mümkün kılan” ve “keşfi gerektiren” olarak tanımlayan araştırmacılar, inceledikleri ders videolarında ritüeli mümkün kılan öğretim rutinlerinin yaygınlığını gözlemlemiştir. Araştırmacılar keşif gerektiren rutinler ile ritüeli mümkün kılan öğretim rutinlerinin iç içe geçmiş doğasını ön plana çıkararak, öğretim söylemlerinde sıklıkla bu iki rutinin bir arada kullanıldığına dair örnekler vermiştir. 8. sınıf matematik derslerinin öğretim rutinlerini inceleyen araştırmacılar ritüel öğretimin, keşiflere temel oluşturması ve öğrencilere yeni bir söyleme geçişin ilk adımlarında yardımcı olması nedeniyle öğrenme için gerekli olduğunu iddia etmektedir. Benzer şekilde Emre-Akdoğan (2023) da matematik sınıflarında “ritüeli mümkün kılan” öğretim fırsatlarının öğrenciler için yeni bir söyleme geçişin ilk adımlarında yardımcı olması ve keşifler için temel oluşturması açısından önemli olduğunu öne sürmektedir. Araştırmacı, lise öğrencilerinin ve öğretmenlerinin “eşittir işareti” ve “değişken” kavramlarına ilişkin sınıf bağlamındaki matematiksel söylemlerinin özelliklerini 32 kişilik bir sınıf ortamında incelemiştir. Çalışmasında verilerini 45 dakikalık iki sınıf gözlemiyle 16 farklı görev durumu üzerinden toplayan Emre-Akdoğan (2023), verilerini Nachlieli ve Tabach (2019)’ın “ritüeli mümkün kılan” ve “keşfi gerektiren”

öğrenme fırsatlarına ilişkin metodolojik bakış açısıyla analiz etmiştir. Araştırmanın bulguları, öğretmenin öğretiminin, öğrencilerinin kendisinin uyguladığı prosedürleri sıkı bir şekilde takip etmesini sağladığı ritüel öğretim tarafından yönetildiğini ortaya koymuştur. Öğrencilerin “değişken” ve “bilinmeyen” kavramları arasındaki cebirsel ayrımı yapmada güçlük yaşadığını da ortaya koyan Emre-Akdoğan (2023), bu durumun ilgili kavramlar hakkında öğretmen söyleminin öğrenciler için yeterince şeffaf olmamasından kaynaklandığını iddia etmektedir. Bu nedenle araştırmacı, öğrenciler için daha açık ve şeffaf söylemler oluşturmak amacıyla matematik sınıflarında hem ritüel hem de keşifsel rutinlerin bir arada kullanıldığı öğretim fırsatlarına yer verilmesini önermektedir.

Nachlieli ve Tabach (2019)’ın çalışmasını biraz daha ileri bir aşamaya taşıyan başka bir çalışmada Christiansen vd. (2023) öğretmen hamlelerinin yarattığı öğrenme fırsatlarının ritüelden keşfe geçiş sürecine etkisini belirlemeye çalışmıştır. Lavie ve diğerlerinin (2019) bahsettiği ritüelden keşfe geçiş göstergelerine odaklanan araştırmacılar farklı bağlamlarda üç farklı ders sürecini analiz etmiştir. Araştırmacılar çalışmalarında öğretim sürecinde öğrencilere daha bağımsız kararlar verme ve söylediklerini gerekçelendirme noktasında sunulabilecek öğrenme fırsatlarını belirlemeye çalışmıştır. Christiansen vd. (2023), Nachlieli ve Tabach (2019)’ın çalışmasından farklı olarak öğretimde ortaya çıkan ritüel ve keşif arasında olan melez (her iki rutinin özelliklerini taşıyan) rutinlerin varlığından bahsetmektedir. Araştırmanın bulguları öğretim sürecinin, ritüel rutini mümkün kılan etkinliklerle uyarlanmış olmasına rağmen az da olsa öğrencileri bağımsız kararlar almada ve kendi kanıtlarını yapmada teşvik ettiğini ortaya çıkarmıştır. Christiansen vd. (2023) göre ders süreleri, ölçme ve değerlendirme ile müfredatın gereklilikleri, öğretmenleri ritüel rutini mümkün kılan etkinlikleri içeren bir öğretime yönlendirmektedir. Bu nedenle araştırmacılar tüm öğrencilerin sınırlı süreye sahip dersler ile kalabalık, farklı öğrenme düzeyine sahip öğrencilerden oluşan sınıflarda tam bir keşif yapmayı başaramayacağını fakat bu melez öğretim rutinlerinin onlar için ritüelden keşfe geçiş sürecinde fırsatlar sunabileceğini iddia etmektedir. Ayrıca araştırmacılar öğretmenin hamlelerinin yanı sıra

görev seçiminin de öğrencilere ritüellere, keşif rutinlerine ve söylemlere katılma konusunda farklı fırsatlar sunacağını söylemektedir.

Heyd-Metzuyanım vd. (2019) çalışmasında görev durumu seçiminin ve öğretmen söylemlerinin, öğrencilerin keşifsel katılımlarını mümkün hale getirebildiği veya daha fazla ritüel katılıma olanak sağladığı fikrini savunmaktadır. Bu fikirden yola çıkan araştırmacılar, çalışmalarında bilişsel düzeyi zor görev durumlarıyla öğretim yapan iki ortaokul matematik öğretmenin söylemlerine odaklanmıştır. Burada öğretmenlerin öğretim sürecini inceleyen Heyd-Metzuyanım vd. (2019) çalışmasında ritüel katılımdan keşifsel katılıma geçişi sağlayacak öğretmen uygulamalarının nasıl olacağını belirlemeye çalışmıştır. Araştırmacılara göre bu uygulamalar arasında; bilişsel açıdan zorlu görevlerin seçilmesi, öğrencilerin tepkilerinin tahmin edilmesi, çalışmalarının izlenmesi, öğrencilerin sunumlarının sıralanması ve ilişkilendirilmesi ve sınıf tartışmalarında sorumlu konuşmanın kullanılması yer almaktadır.

Öğretmenlerin sınıf içi uygulamalarına ve söylemlerine odaklanan bir başka araştırmada Sfard (2017) bir matematik öğretmenin söylemlerinin öğrencileri için ritüellerden keşiflere geçişte fırsatlar ve ihtiyaçlar oluşturup oluşturmadığını araştırmıştır. İkinci dereceden bir eşitsizliğin çözümünü içeren bir ders sürecinde öğretmenin konuşmalarına odaklanan araştırmacı, öğretmenin matematiksel söylemlerini ritüel ve keşifsel katılım bakımından analiz etmiştir. Sfard (2017) öğretmenin öğrencileri keşifsel söyleme geçiş noktasında teşvik edip etmediğini gözlemlemek için öğrencilerle ders sonrasında görüşmeler yapmış ve öğrencilerin söyleme katılımlarını incelemiştir. Böylece araştırmacı, öğretmenin öğrencileri için ne çeşit öğrenme fırsatları sunduğunu ve öğrencilerin bu fırsatları nasıl kullandıklarını da tespit etmeye çalışmıştır. Araştırmanın bulguları sınıf içi ders etkinliklerinde öğretmenin öncelikli amacının öğrencileri bir araya getirmek, dayanışma duygusu yaratmak ve eşitsizlik çözümlerinde öğrencilerin hepsinin aynı çözüm kalıplarını hatasız izlemesini sağlamak olduğunu ortaya koymuştur. Öğrencilerle yapılan görüşmelerin bulguları ise öğrencilerin matematiksel anlatı kaynaklarının

öğretmenlerinininkinden farklı olmadığını göstermiştir. Sfard (2017) çalışmasında, öğrencilerin anlatılarının onaylanması sürecinde öğretmenlerini otorite olarak aldıklarına ve çözümler esnasında ezberlenmiş kurallara bağlılıklarına dair örnekler vermiştir. Araştırmacı yeni matematiksel nesneler içeren bir konunun öğrenilmesi sürecinde öğrencilerin keşifsel bir katılım sergileyebilmesi için bir uzmanın keşifsel söylemine maruz kalması veya keşifsel katılmaya davet edilmesi gerektiğini iddia etmektedir. Aşına olmadıkları bir söylemle karşılaşan biyoloji öğretmen adaylarının söyleme katılımlarını inceleyen Viirman ve Nardi'nin (2019) çalışması ise bu fikri desteklemektedir. Disiplinler arası bağlamda yapılan bu çalışmada oniki üniversite öğrencisi biyoloji konularını içeren matematiksel modelleme etkinliğinde problem çözmeye çalışmıştır. Bu çalışma, öğrencilerin başlangıçta problemi “tahmin etme” yoluyla ritüel bir katılımıla çözmeye çalışırken, onların daha üretken çözüm yollarına davet edilmesiyle ilerleyen oturumlarda “formüle etme” yoluyla daha keşifsel bir katılım sergilediklerini göstermiştir.

Benzer bulgulara ulaşarak Sfard'ın (2017) düşüncesini destekleyen bir diğer çalışmada ise Nachlieli ve Katz (2017), öğretmen adaylarına daha keşifsel öğrenme fırsatları sunarak onların söyleme katılımlarını incelemiştir. 18 ilköğretim matematik öğretmenin problem çözme süreçlerini analiz eden araştırmacılar, öğretmen adaylarının ritüel-keşif sürekliliğini karakterize etmeye ve aynı zamanda keşifsel katılım için hangi fırsatların öğrencilere sunulabileceğini de gözlemlemeye çalışmıştır. Araştırmanın bulguları ilk kez karşılaştıkları bir görevle (öğrenci için) karşı karşıya kaldığında katılımcının, kendisini çözüme götürecek prosedürü bulmayı görev olarak üstlendiğini ve bu nedenle öğretmen adaylarının katılımının ritüel olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte farklı çözüm yolları istendiğinde öğretmen adaylarının daha keşifsel katılım sergilediğini gözlemleyen araştırmacılar, belirli öğrenme fırsatlarını hedefleyen dersler tasarlanırsa bile, ritüel katılımdan keşifsel katılıma geçişin her zaman gerçekleşmediği sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca araştırmacılar öğretmen adaylarının belirli bir rutini çözüm yolu olarak seçtiğinde, bazen bunu körü körüne, ritüel bir şekilde takip ederek görev durumunun özünden uzaklaştığını iddia etmiştir.

Öğrenciler için daha keşifsel öğrenme fırsatları oluşturulan ortamlarda öğretmen söylemlerine odaklanan Heyd-Metzuyanım vd. (2016) de on altı ilköğretim matematik öğretmen adayına fonksiyonları inceleyen bir dersi veren bir öğretmenin söylemlerini incelemiştir. Araştırmacılar gözlemledikleri on bir ders boyunca öğretmenin söylemlerinin öğrenme fırsatları açısından ritüel ya da keşifsel katılımı uyumunu araştırmıştır. Bu bağlamda Heyd-Metzuyanım vd. (2016) öğretmenin matematiksel nesneler hakkındaki konuşmalarını içeren matematikleştirme (mathematizing) söylemlerini ve söylemin katılımcıları (öğrencileri) hakkındaki konuşmalarını içeren özneleştirme (subjectifying) söylemlerini analiz etmiştir. Keşifsel bir ortam gibi görünen sınıf ortamına rağmen bulgular, öğretmenin söylemlerinin çoğunlukla özneleştirme söylemlerini içerdiğini ve bu nedenle öğrenme fırsatları bakımından ritüel katılımı uyumlu olduğunu göstermiştir.

Bu çalışmalardan farklı olarak Nachlieli ve Tabach (2022) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının ritüelden keşfe geçiş süreçleri üzerine bir çalışma yapmıştır. Lavie ve diğerlerinin (2019) tanımlamalarını esas alan araştırmacılar, esneklik, bağlılık, katılımcının yetkinliği ve gerekçelendirme açısından ritüelden keşfe geçiş sürecini incelemiştir. Öğretmen adaylarının üç ders boyunca söylemlerini analiz eden araştırmacılar öğrencilerin performanslarında değişimler gözlemlemiş ve bulgularından yola çıkarak sınıf içi öğrenmeyi Commognitive bakış açısıyla kavramsallaştırmaya çalışmışlardır.

Matematik Eğitiminde Öğrencilerin Rutinlerine ve Söyleme Katılımlarına Odaklanan İlgili Araştırmalar

Matematik eğitiminde Commognitive bakış açısıyla öğrencilerin rutinlerine ve söyleme katılımlarına odaklanan ilgili çalışmalardan ilkinde Baccaglini-Frank (2021), öğrencilerin Geogebra programının kullanıldığı bir dijital ortamdaki etkileşimlerinden ortaya çıkan matematiksel söylemlerine odaklanmıştır. Geogebra programı, matematiksel göstergeleri gerçekleştiren ve daha sonra onlarla etkileşime giren sanal nesneler oluşturulabildiği için tercih edilmiştir. Araştırmacı bu sanal nesne gerçekleştirmelerinin, öğrencilerin

matematiksel söyleminin gelişimini etkileyen dinamik etkileşimli araçlar haline gelebileceğini iddia etmektedir. Araştırma ikişer öğrenciden oluşan iki farklı grubun matematiksel söyleminin detaylı bir şekilde analiz edildiği bir durum çalışmasıdır. Gruplardan biri Geogebra programının kullanılmadığı bir sınıftan seçilen ve öğretmenlerinin değerlendirmesine göre yüksek başarıya sahip iki öğrenciyi, diğeri Geogebra programının sınıf uygulamasının bir parçası haline geldiği ve genel olarak motivasyonu düşük ve akademik başarısı zayıf bir sınıftan seçilen iki öğrenciyi içermektedir. Baccaglini-Frank (2021), özellikle düşük başarılı iki lise öğrencisine odaklanarak dijital öğrenme ortamlarının bu öğrencilerin söylemlerini nasıl şekillendirdiğini gözlemlemeye çalışmıştır. Çalışmasında dijital öğrenme ortamlarının matematiksel ritüelleri nasıl ve neden gerçek keşiflere dönüştürdüğünü araştıran Baccaglini-Frank (2021), öğrencilerin görüşmelerini yazıya geçirdikten sonra söylemlerinin ritüel ve keşifsel doğasını gösteren özelliklerini vurgulamıştır. Bunun için araştırmacı katılımcıların söylemlerindeki nesneleştirme derecesine, görevi nasıl algıladıklarına, bağımsız kararlar alıp alamamalarına ve anlamlandırma yeteneklerine göre dört farklı özelliği esas alarak analizi yapmıştır. Araştırmada dinamik geometri ve cebir yazılımı kullanmanın öğrenci rutinleri üzerindeki etkisini “fonksiyon” kavramıyla inceleyen araştırmacı, her gruba görüşmeler sırasında aynı soruları yöneltmiştir. Elde edilen bulgulara göre Geogebra kullanımının olduğu sınıftan seçilen düşük başarılı öğrenciler, Geogebra kullanımının olmadığı sınıftan seçilen ortalama başarıdan daha yüksek başarıya sahip öğrencilerin başaramadığı görevde başarılı olmuştur. Baccaglini-Frank (2021)’a göre araştırmanın bulguları dijital öğrenme ortamlarının daha düşük başarılı öğrencilerin matematiksel söylemde keşfedici katılımlarını desteklediğini göstermiştir.

Bir diğer öğrenci söylemlerini analiz eden çalışmada ise Roberts ve le Roux (2019) doğrusal denklem çözümleriyle uğraşan 15 (8 ve 9. sınıf) öğrencinin konuşmalarına odaklanmıştır. Araştırmanın katılımcılarını, denklemleri çözme sürecinde sıkıntı

yaşamayan fakat çözümünün nedenini açıklamakta güçlük yaşayan öğrenciler oluşturmuştur. Bu nedenle araştırmacılar öğrencilerin denklemleri nasıl çözdüklerini açıklarken ve elde ettikleri çözümleri gerekçelendirirken matematiksel olarak onaylanabilir anlatılar kullanıp kullanmadıklarını analiz etmeye çalışmıştır. Roberts ve le Roux (2019), Sfard'ın (2008) fikirlerinden yola çıkarak söylemleri ritüel ya da keşifsel söylem olarak ayırt eden bir kriter listesi oluşturmuştur. Araştırmacılar bu listede; söylemlerin nesneleştirme düzeyi, onaylanabilir anlatı üretip üretilmediği, rutinlerin ne amaçla yapıldığı, sergilenen rutinlerin kim tarafından ve kim için olduğu, öğrenci çözümlerinin esnekliği ve doğruluğu gibi özelliklere yer vermiştir. Araştırmanın bulguları tüm öğrencilerin, keşifsel söylemden ziyade işlemler esnasında kuralların ezbere ve esnek olmayan bir şekilde uygulandığı rutin, ritüel söylemi kullandığını göstermiştir. Başka bir deyişle bulgular, öğrencilerin denklemleri çözerken matematiksel yapılar arasındaki ilişkileri kullanmak yerine prosedürün nedenini bilmeden sembolleri araçsal bir şekilde manipüle etme eğiliminde olduklarını göstermiştir. Bununla birlikte bulgulara göre öğrencilerin hakkında onaylanmış anlatılar ürettikleri tek matematiksel nesne, pozitif tamsayılar olmuştur. Araştırmacılar bazı öğrencilerin görüşmecinin yönlendirmesi üzerine negatif tamsayılar, cebirsel terimler ve bir denklemin yapısı hakkında onaylanmış anlatılar kullandığını belirtmiştir. Roberts ve le Roux'a (2019) göre çalışmaları, herhangi bir öğrencinin keşifsel söyleme geçiş yaptığını gösteren yeterli kanıtı içermese bile öğretmenlerin mesleki gelişimi ve daha fazla araştırma için bir fırsat olarak görülmelidir. Araştırmacılar, bulgularının öğrenci söyleminin öğretmenler için öğrencilerin ne ölçüde keşifsel düşündüklerini anlamaları açısından zengin bir kaynak olduğunu düşünmekte ve öğrencilerin söylemlerinin nasıl değiştirilebileceğine dair öğretmenlere öneriler sunmaktadır.

Nisa vd. (2021) ise Roberts ve le Roux (2019)'un çalışmasına benzer bir çalışmayı onuncu sınıf öğrencileriyle “mutlak değer” kavramı bağlamında yapmıştır. Araştırmacılar rastgele seçtikleri on öğrencinin söylemlerini mutlak değer içeren denklemleri çözerken

sergiledikleri eylemlere, yazdıklarına ve söylediklerine odaklanarak iki düzeyde analiz etmiştir. Nisa vd. (2021) öncelikle söylemin dört özelliğini, yani kelime kullanımı, görsel araçlar, anlatılar ve rutinleri analiz ederek işe başlamış sonrasında öğrenci söylemlerinin ritüel veya keşifsel söyleme ait olup olmadığını belirlemeye çalışmıştır. Öğrencilerin söyleme katılım düzeylerini analiz etmek için Nisa vd. (2021) de diğer araştırmacılara (Baccaglini-Frank, 2021; Roberts & le Roux, 2019) benzer şekilde bir kriter listesi oluşturmuştur. Bu listede; anahtar kelime ve görsel aracı kullanımı, rutinin kapanış koşulu, rutinin yerine getirilmesine başkalarının dahil edilmesi ve rutinin uygulanabilirliği gibi özellikler yer almıştır. Araştırmacılar katılımcıları belirlerken daha öncesinde mutlak değer kavramı üzerine çalışmış rastgele on öğrenciye yazılı bir test uygulamış ve tüm sorulara doğru cevap veren iki öğrencinin görüşmelerini, çalışmalarında paylaşmıştır. Nisa vd. (2021) söylemin dört özelliğini baz alarak yaptıkları analizde, öğrencilerin söylemlerinin çoğunluğunun kriterler açısından ritüel düzeyde olduğunu sonucuna ulaşmıştır. Öte yandan bulguları, öğrencilerin söyleminin “kapanış koşulları” ve “rutinin gerçekleştirilmesine başkalarının dahil edilmesi” özelliklerine göre keşfedici söylem düzeyinde olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte, anahtar kelime ve görsel aracı kullanımı ile uygulanabilirlik boyutunda da öğrenciler keşifsel söylemin özelliklerinden bazılarını sergilemiştir. Araştırmacılar bu bulgularına yönelik öğrencilerin söyleme katılımlarının ritüelden keşfe geçiş sürecinde olduğu yorumunu yapmıştır. Başka bir deyişle öğrenciler herhangi bir kritere ait keşifsel söylemin göstergelerinin çoğunu yerine getirdiğinde, araştırmacılar keşifsel söyleme geçişin gerçekleştiğini kabul etmiş ve çalışmalarında bu durumu gözlemlediklerini iddia etmiştir.

Öğrencilerin söylem rutinlerine odaklanan bir diğer çalışmada Essack (2015), 11. sınıf öğrencilerinin “fonksiyon” kavramına dair söyleme katılımlarını incelemiştir. Farklı performans düzeyinde öğrenciler seçilerek yapılan bu çalışmada, araştırmacı öncelikle öğrencilerin fonksiyon kavramına ilişkin söylemlerinin nasıl olduğunu belirlemeyi amaçlamıştır. Sonrasında beklemediği zenginlikte bir veri elde eden Essack (2015) düşük

başarı gösteren öğrencilerin söylemsel rutinlerinden yola çıkarak, söylemsel bakış açısıyla matematikteki zayıf performansı açıklamaya çalışmıştır. Öğrenciler fonksiyon kavramına dair müfredatı tamamen bitirdikten sonra yazılı sınav olmuş ve bu sınav sonuçlarına göre altı farklı okuldan düşük, orta ve yüksek başarılı öğrenciler seçilmiştir. Öğrencileri performans olarak üst, orta ve alt grup olarak sınıflayan araştırmacı her okul için bu üç grupta iki katılımcı olacak şekilde öğrenci çiftleri oluşturmuştur. Araştırmanın verilerini öğrenci çiftleriyle yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler yoluyla toplayan Essack (2015), farklı performans gruplarının söylemlerini karşılaştırma fırsatı bulmuştur. Öğrencilerin söyleme katılımlarını keşifsel ve ritüel olarak karakterize eden araştırmacı, çalışmasında bir kriter listesi kullanmıştır. Bu listede; rutinin amacı, söylemlerin ne (matematiksel nesneler ya da gösterenler) hakkında oldukları, prosedürün esnekliği, rutinin uygulanabilirliği, katılımcının bağımsızlığı, kabul nedeni gibi özellikler yer almıştır. Bu özellikler bağlamında öğrenci rutinlerini ritüel ya da keşifsel olarak karakterize eden Essack (2015), farklı performans gruplarına ait öğrencilerin çoğunlukla ritüel katılım sergilediği sonucuna ulaşmış ve bunun okul matematiğinin doğal bir sonucu olduğunu belirtmiştir. Buna rağmen araştırmanın bulguları matematiksel başarısı yüksek olan üst gruptaki öğrencilerin keşifsel söylemlerde bulunduğunu ortaya koymuştur. Çalışmanın bulgularına göre düşük başarılı öğrenciler keşifsel bir katılım sergilemede güçlük yaşarken, başarı arttıkça öğrenciler keşifsel bir katılım sergilemişlerdir. Bu nedenle Essack (2015), resmi matematiksel söyleme mümkün olduğu kadar yakın olmaya çalışan nesneleştirilmiş bir söylemin, gelişmiş performansla ilişkili olduğunu iddia etmiştir.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın deseni, katılımcıları, kavramları ile araştırmacının rolü, veri toplama araçları ve verilerin toplanma süreci, verilerin analizi, araştırmanın geçerlik ve güvenirliği yer almaktadır.

Araştırmanın Deseni

Bu çalışmanın amacı ortaöğretim öğrencilerinin matematiksel söylemde rutinlerini derinlemesine incelemek olduğundan, çalışmanın deseni nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması olarak belirlenmiştir. Durum çalışması, “güncel bir “durumu” derinlemesine ve gerçek dünya bağlamında, özellikle de durum ve bağlam arasındaki sınırların açıkça belirgin olmadığı durumlarda araştıran ampirik bir yöntemdir” (Yin, 2018, s. 45). Bu bağlamda bu yöntem gerçek yaşamın, güncel bağlam ya da ortamın içindeki bir durumun araştırılmasını gerektirmektedir (Creswell, 2014). Bu yöntemin amacı belirli bir durum hakkında kapsamlı, sistematik, derinlemesine bilgi toplamak ve bu duruma ilişkin sonuçlar ortaya koymaktır (Patton, 2015; Yıldırım & Şimşek, 2013). Bu desende ele alınan durumlar arasında “bireyler”, “organizasyonlar”, “süreçler”, “programlar”, “mahalleler”,

“kurumlar” ve hatta “olaylar” yer alabilir (Yin, 2018). Durumlar aynı zamanda bir kişinin hayatında veya bir programdaki kritik olaylar veya “özel, özgün, sınırlandırılmış bir sistem” olarak tanımlanabilen herhangi bir şey de olabilir (Patton, 2015). Burada temel nokta, durumun özel bir zaman ve yer gibi belirli parametrelerle sınırlandırılabilir ya da tanımlanabilir olmasıdır (Creswell, 2013). Patton’a (2015) göre iyi yapılandırılmış bir durum çalışması bütüncül ve bağlamsal hassasiyete sahiptir. Bu çalışmada (kapsamlı, sistematik ve derinlemesine bilgi toplanarak sonuçlar ortaya koymaya çalışılan) durumlar; öğrencilerin matematiksel rutinleridir.

Katılımcıların Belirlenmesi ve Araştırmanın Katılımcıları

Katılımcıların Belirlenmesi

Bu araştırmada veri toplama sürecine başlamadan önce etik kurul izni (EK 1) ve İl Millî Eğitim Müdürlüğünün araştırma izni (EK 2) alınmıştır. Sonrasında okul idaresine çalışmanın yapılacağı çalışma ortamları, sınıf ve öğrenciler hakkında bilgi verilerek okul idaresinden onay alınmıştır. Araştırmanın katılımcılarının seçileceği sınıfta öğrencilere derslerin kamera ile kayıt altına alınacağı, araştırmanın konusu, gizliliği ve gönüllülük esas olduğunu, istedikleri zaman bir sebep belirtmeksizin çalışmadan çekilebileceklerini sınıfta sesli bir şekilde söylenmiştir. Katılımcılardan bilgilendirilmiş gönüllü olur formları (EK 3) ve velilerden veli onam formları (EK 4) aracılığıyla gerekli onaylar alındıktan sonra araştırmaya başlanmıştır. Bu bağlamda araştırmanın katılımcıları bir devlet lisesinde 11. sınıf sayısal ders (matematik ve fen bilimleri) ağırlıklı öğrenim gören 23 kişilik bir sınıftan seçilmiştir. Araştırmanın katılımcılarını belirlemek için ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11, ve 12. sınıflar) öğretim programında (MEB, 2018) yer alan 9 ve 10. sınıf polinom biçimindeki denklem ve eşitsizlik kazanımlarına ve kavramların tanımlarına yönelik 26 tane görev durumu içeren bir tarama formu (EK 5) oluşturulmuştur. Görev durumlarının

yer aldığı bu tarama formu hazırlanırken alanında profesör olan bir uzmanın görüşüne başvurulmuştur. Tarama formunda yer alan 26 görev durumu, ilgili kazanımlara göre 5 farklı oturuma ayrılmış ve bu oturumlar yaklaşık 30 ile 40 dakika süreyle öğrencilere uygulanmıştır. Katılımcıların belirlenmesi için hazırlanan tarama formu, 23 kişilik sınıfa uygulanmadan önce 11. sınıf sayısal ders (matematik ve fen bilimleri) ağırlıklı öğrenim gören başka bir sınıftaki 2 öğrenciyle pilot uygulamaları yapılmıştır. 5 farklı oturumda 3 günde uygulanan ve 50 ile 70 dakika arasında süren pilot uygulamaların hemen ardından 2 öğrenci ile pilot görüşmeler yapılarak görev durumlarındaki eksiklik ve hatalar giderilmiş ve gerekirse eklemeler yapılmıştır. Tablo 3’te pilot görüşmeler sonucunda, araştırma için belirlenen 23 kişilik sınıftaki öğrencilere uygulanan oturumlarda kullanılan tarama formundaki görev durumlarının içeriğine yönelik bilgiler ve sayılar yer almaktadır. Öğrencileri kavramın tanımına ve yapısına yönelik söylemlerde bulunması noktasında tetikleyici olacağı düşünülen görev durumları “kavrama yönelik görev durumu” olarak isimlendirilirken; öğrencilerin denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürlerini uygulamaları yönünde tetikleyici olacağı düşünülen görev durumları “işleme yönelik görev durumu” olarak isimlendirilmiştir. Bununla birlikte günlük hayatla ilişkili problem durumlarını içeren görev durumları ise “problem durumu” olarak adlandırılmıştır.

Tablo 3

Katılımcıları Belirlemede Kullanılan Tarama Formunun İçeriği

Oturum	Tarama formunun içeriği	Sayısı
1	“Denklem” ve “eşitsizlik” kavramlarına yönelik görev durumu	3
2	“Denklemin çözümü” kavramına yönelik görev durumu	1
	9. sınıf “Birinci dereceden bir değişkenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu	7
3	“Denklem ve eşitsizlik sistemleri” kavramlarına yönelik görev durumu	1
	9. sınıf “Birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu	3
4	10. sınıf “İkinci dereceden bir değişkenli denklem kavramını açıklar.” kazanımını içeren kavrama yönelik görev durumu	3
	10. sınıf “İkinci dereceden bir değişkenli denklemleri çözer.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu	2
	10. sınıf “İkinci dereceden bir değişkenli denklemin kökleri ile katsayıları arasındaki ilişkileri kullanarak işlemler yapar.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu	3
5	9. sınıf “Denklemler ve eşitsizlikler ile ilgili problemler çözer.” kazanımını içeren problem durumu	3

Tarama formu, 5 farklı oturumda öğrencilere uygulandıktan sonra öğrenci yanıtları araştırmacı tarafından incelenerek notlar alınmıştır. Yapılan bu incelemelerde 23 öğrenciden çalışmaya gönüllü olmayanlar ile tarama formunda yer alan görev durumlarının çoğunu eksik ya da hatalı yanıtlayan öğrenciler zengin veri kaynağı oluşturmayacağı düşüncesiyle katılımcı olarak seçilmemiştir. Bu öğrenciler dışında geriye 9 öğrenci kalmıştır ve söylem analizinin zorluğundan dolayı bu sayısının azaltılması için bu 9 öğrenciyle bireysel görüşmeler yapılmıştır. Bireysel görüşmelerde öğrenciler 5 farklı oturumda verdikleri yanıtları tek bir oturumda gerekçeleriyle açıklamaya çalışmıştır. Araştırmacı bu süreçte içerik açısından öğrencilere herhangi bir yönlendirmede bulunmamış sadece öğrencilerden yanıtlarını gerekçelendirmesini, gerekirse tekrardan sesli bir şekilde çözümlerini paylaşmalarını istemiştir. Bireysel görüşmede elde edilen bulgular, aynı zamanda katılımcıların odak grup görüşmeleri öncesindeki rutinlerinin yapısını belirlemek amacıyla da kullanılmış ve araştırmanın ana verilerinin bir kısmını oluşturmuştur. Görüşmeler kamera ile kayıt altına alınmıştır ve bu bireysel görüşmelerin

incelenmesi sonucunda araştırmanın odak grup görüşmelerinin 5 öğrenci ile yürütülmesi kararına varılmıştır. Bu 5 öğrenciden 3'ü araştırma için zengin ve farklı veri sunması sebebiyle araştırmanın katılımcıları olarak belirlenmiştir. Araştırma için bu 5 öğrencinin uygun görülmesinin ve 3 öğrencinin de araştırmanın katılımcıları olarak seçilmesinin gerekçeleri bir sonraki bölümde detaylı bir şekilde okuyucuya sunulmuştur.

Araştırmanın Katılımcıları

Bu araştırmanın katılımcıları, Türkiye’de bir devlet lisesinde sayısal dersler (matematik ve fen bilimleri) ağırlıklı olacak şekilde 11. sınıfta öğrenim gören 3 öğrencidir. Araştırmanın katılımcıları belirlenirken, katılımcılardan zengin bir veri kaynağı elde edebilmek için amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmıştır (Patton, 2015). Bununla birlikte katılımcıların seçiminde rutinleştirme bağlamında öğrenmeyi (Lavie vd., 2019) (mümkünse) araştırma sürecinde gözlemlemeye çalışabilmek için “otorite” ya da “düşünerek taklit eden” rolünü üstlenebilecek öğrencilerin varlığı uygun görülmüştür. Katılımcı seçimi yapılırken öğrencilerin gönüllüğü esas olmak üzere, tarama formunda (EK 5) yer alan görev durumlarına verilen yanıtlar ve bireysel görüşmelerin yanı sıra öğretmenin (araştırmacının) öğrencilerine yönelik ders deneyimleri de etkili olmuştur. Katılımcıların gizlilik haklarını korumak amacıyla araştırmada takma isim kullanılmıştır. Katılımcıların takma isimleri Elif, Şule, Derya, Zehra ve Burcu’dur. Araştırma sürecinde tüm katılımcılar hem matematik derslerine hem de odak grup görüşmelerine yüksek ilgi ve motivasyonla katılmışlardır. Katılımcılardan Elif ve Şule’nin matematik ders başarı ortalaması 95’in üzerindedir. Araştırmacının ders deneyimlerine göre (özellikle 9. sınıf) Elif ve Şule sınıftaki diğer arkadaşlarının onlarla akran öğretimi için iletişim kurduğu ve çözemediği soruların çözümünde yardım istediği akademik başarısı yüksek öğrencilerdir. Bu nedenle diğer katılımcılar için Elif ve Şule söyleme katılımı arkadaşları için daha deneyimli bir katılımcı yani güvenilir bir otorite olma potansiyeline sahip öğrenciler olarak araştırmaya dahil edilmiştir. Katılımcılardan Derya ve Zehra matematik ders başarı ortalaması 80 ve 85

aralığında olan yani Elif ve Şule ye göre akademik başarısı daha düşük olan öğrencilerdir. Derya ve Zehra matematik derslerine diğer derslerine göre daha fazla ilgi gösteren ve sınıfta akranlarının “otorite”si rolünü üstlenebilecek potansiyelde olmayan öğrencilerdedir. Bununla birlikte bireysel görüşmelerde Derya ve Zehra kendini ifade etmede güçlük yaşamayan ve matematiksel iletişimi (doğru olmasa bile) rahatça kurabilen iki öğrencidir. Bu nedenle Derya ve Zehra, araştırmaya söyleme katılımında “düşünerek taklit eden” rolünü yani Sfard’ın (2008) kastettiği anlamda “performansını sürekli olarak başkalarının performansına göre ayarlarken, aynı zamanda daha tecrübeli katılımcıların yaptıklarının nedenleri üzerinde düşünen” bir rolü üstlenebilecek potansiyele sahip öğrenciler olarak dahil edilmiştir. Araştırmanın katılımcılarından Burcu ise matematik derslerinde öğretmenini memnun etmeye çalışan, matematiğe günü gününe çalışan (studying day to day), pekiştirmek amacıyla tekrar eden ve derslerden sonra öğretmeninden günlük ders performansı hakkında dönütler isteyen bir öğrencidir. Burcu, 9. sınıfta düşük bir not ortalamasına sahipken, çalışmaları sonucunda 10. sınıfta matematik ders başarı ortalamasını 85 ile 90 aralığına çıkaran bir öğrencidir. Burcu, iletişimlerinde sosyal bir bağ oluşturmaya önem veren dolayısıyla matematiksel söylemde ritüel katılım biçimi sergileme potansiyeline sahip, araştırmaya zengin veri kaynağı sunabileceği düşünülen bir öğrencidir. Bu araştırma 5 katılımcı ile yürütülmüş fakat hem söylem analizinin detaylı olması hem de katılımcıların benzer bulguları sunması sebebiyle Elif, Burcu ve Zehra isimli öğrenciler araştırmanın katılımcıları olarak belirlenmiştir. Diğer iki katılımcıdan biri olan Şule’nin görüşmelerde söyleme katılımında çoğunlukla sessiz kalmayı tercih ettiği ve rutinlerinin çoğunlukla ritüel olduğu gözlemlenmiştir. Şule’nin gözlemlenen ritüel rutinlerinin bu araştırmanın katılımcılarıyla benzerlik göstermesi ve bulgularının araştırma için zengin veri kaynağı sunmamasından dolayı Şule’nin bulgularına araştırmada yer verilmemiştir. Derya ise çoğunlukla Zehra’ya benzer ritüel rutinleri sergilemiştir. Benzer rutinleri sergileyen bu iki katılımcıdan Zehra, Derya’ya göre hem daha zengin veri kaynağı sunmuş hem de Zehra’nın bulgularında Elif ve Burcu’ya göre farklı durumlara rastlanmıştır. Bu

nedenle araştırmada veri zenginliği açısından Derya yerine Zehra'nın bulgularına yer verilmesinin uygun olacağı dūřınılmıřtır. Bununla birlikte Derya ve řule'nin sūylemlerine Elif, Burcu ve Zehra ile olan iletişimleri bağlamında bulgularda yer verilmiştir.

Arařtırmacının Rolū

Sfard'a (2018) gūre Commognitive perspektifle çalıřma yapan bir arařtırmacı, ūzerinde çalıřtıęı sūylemi “dıřarıdan (outsider)” olduęu kadar “içeriden (insider)” birinin bakıř açısıyla da arařtırılmalıdır. Bu çalıřmada arařtırmacı, arařtırmacı-ūęretmen (researcher-teacher) rolūnū (Tabach, 2006) ūstlenerek ūęrencilerin matematiksel sūylemlerine arařtırmacı olarak “dıřarıdan”, ūęretmen olarak “içeriden” bir bakıř açısıyla inceleme firsatı bulmuřtur. Arařtırmacı, çalıřmasını 2021-2022 eęitim-ūęretim yılında gūrev yapmakta olduęu bir devlet lisesindeki sayısal ders aęırlıklı bir sınıfta ūęrenim gūren 5 ūęrencisiyle yūrūtmūřtur. Arařtırmacı, alıřma yaptıęı ūęrencilerinin de bulunduęu sınıfın haftada 6'řar saat olmak ūzere 9, 10 ve 11. sınıfta matematik derslerine girmiřtir. Bu 3 yıllık eęitim-ūęretim sūrecinin 1,5 yılı (9. sınıfın ikinci dūnemi ile 10. sınıf) Covid-19 salgını nedeniyle uzaktan eęitimle gerçekleřtirilmiřtir. Arařtırmacı yūz yūze yapılan eęitim-ūęretim sūrecinde hem sınıf içi hem de sınıf dıřı ortamlarda ūęrencileriyle uzun sūreli bir etkileřim içinde olmuř ve katılımcıları uzun soluklu gūzlemleme firsatı bulmuřtur. Aynı zamanda arařtırmacı, bu çalıřma boyunca hem ūęretmen olarak derslerini hem de arařtırmacı olarak gūrūřmelerini ūęrencileriyle yūz yūze gerçekleřtirmiřtir. Arařtırmacı, arařtırmanın verilerini 2021-2022 eęitim-ūęretim yılının Mart ayında toplamaya bařlamıř ve aynı zamanda derslerde mūfredatla eř zamanlı olarak Mart ayı boyunca “Denklem ve Eřitsizlik Sistemleri” konusunu iřlemiřtir. Bu nedenle arařtırmacı, arařtırmacı-ūęretmen rolūnūn sınırlarını belirlemek için Commognitive teori çalıřan bir teorisyenle iletiřim kurmuř (EK 6) ve literatūrden faydalanmıřtır (Sfard, 2018; Tabach, 2006). Bu baęlamda arařtırmacı, bir ūęretmen olarak ūęrenme ortamını ve materyalleri

(EK 7) sınıf ortamına uygunluğunu (süre, zorluk seviyesi, uygulanabilirlik, içerik vb.) dikkate alarak tasarlamaya çalışmıştır. Araştırmacının sınıf ortamında öncelikli amacı kazanımların öğretimi, sınıftaki tüm öğrencilerin öğretim ihtiyaçlarının karşılanması, öğrenci sorularına gerekli dönütlerin verilmesi ve öğrencilere sınıf ortamında uygulama ve grup çalışmaları yapma fırsatı sunma olmuştur. “Denklem ve eşitsizlik” kavramlarına yönelik öğrenci söylemine odaklanan ve dersler boyunca araştırmacı rolünü ikinci planda tutan araştırmacı, herhangi bir veri kaybı yaşanmaması adına dersleri kayıt altına almıştır. Mart ayı boyunca “Denklem ve Eşitsizlik Sistemleri” konusunun işlendiği her bir ders iki farklı kamera ve ses kayıt cihazıyla kaydedilmiştir. Araştırmanın katılımcıları ön sıralarda bir arada olacak şekilde sınıf ortamında oturmuş ve kameralardan biri sınıf tahtasını, diğeri araştırmanın odak grup görüşmelerine katılan 5 öğrencinin oturduğu yeri kaydetmiştir. Öğrencilerin kendi aralarında sessiz de dahil olmak üzere her türlü konuşmalarını yakalayabilmek adına ses kayıt cihazı da kullanılmıştır. Böylece araştırmacı, sınıfın kayıtlı verilerini ders sonralarında izleyerek notlar alma ve sınıf ortamında katılımcı söylemlerini ve rutinlerini bir “gözlemci gözüyle” inceleme fırsatı yakalamıştır. Araştırmacı, Mart ayı boyunca dersleri yürütmek için müfredattaki kazanımları (MEB, 2018) baz kalarak ve Commognitive teorisinin esaslarını dikkate alarak ders notları (EK 7) hazırlamıştır. Bir akademisyenin görüşü alınarak oluşturulan ders notlarında, katılımcılar için odak grup görüşmelerinde “emsal” bir durum oluşturabilecek şekilde benzer görev durumları yer almaktadır. Araştırmacı, bu şekilde hazırladığı ders notlarıyla yürüttüğü derslerin süreci ve içeriği Tablo 4’te yer almaktadır.

Tablo 4

Araştırmacının Yürüttüğü Derslerin Süreci ve İçeriği

Tarih	Süre	Kazanım
07.03.22	29 dk	“İkinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulur.”
07.03.22	38 dk	“İkinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulur.”
08.03.22	28 dk	“İkinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulur.”
11.03.22	30 dk	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur.”
11.03.22	37 dk	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur.”
14.03.22	38 dk	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur.”
15.03.22	33 dk	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur.”
15.03.22	37 dk	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur.”
18.03.22	38 dk	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur.”
18.03.22	40 dk	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur.”
22.03.22	26 dk	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur.”
22.03.22	40 dk	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini bulur.”
25.03.22	35 dk	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini bulur.”
25.03.22	35 dk	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini bulur.”
28.03.22	35+35 dk	Sınıf içi grup çalışması yapıldı
29.03.22	35+35 dk	Sınıf içi grup çalışması yapıldı

Bununla birlikte, araştırmacı-öğretmen rolü araştırmacıya yansıtıcı bir öğretmen olma fırsatı sunmuştur (Tabach, 2006). Böylece araştırmacı sınıf ortamında matematiksel söylemlerinde, sözcük ve görsel aracı kullanımının matematiksel olarak doğruluğuna, rutinlerinin sadece süreç odaklı (anlatılarının prosedür hakkında olması) değil aynı zamanda sonuç odaklı (anlatılarının matematiksel nesneler hakkında olması) olmasına dikkat etmeye çalışmıştır. Bu nedenle araştırmacı ders süreci öncesinde literatürden faydalanarak ikinci dereceden eşitsizliklerin öğretiminde dikkat edilmesi gereken nüansları prosedürün uygulanması açısından ve Commognitive bakış açısından araştırmıştır (de Lima & Tall, 2010; Halmaghi, 2011; Nain, 2017; Rivera & Becker, 2004; Sfard, 2017; Tsamir & Reshef, 2006).

Araştırmanın katılımcıları ile sınıf dışı bir öğrenme ortamında odak grup görüşmelerini yapan araştırmacı, bu görüşmeler sürecinde araştırmacı rolüne uygun bir şekilde davranmıştır. Araştırmacı birinci ve ikinci dereceden “denklem ve eşitsizlik” içeren görev

durumlarıyla uğraşan ve sonrasında fikirlerini tartışan katılımcıları içerik yönünden yönlendirmemeye özen göstererek, rahatça iletişim kurmalarına yardımcı olmuştur. Araştırmacı görüşme sürecince öğrencilerin iletişimi sağlıklı bir şekilde kurması için süreci koordine eden, keşif rutinlerinin ortaya çıkabilmesi için gerektiğinde katılımcılara tetikleyici sorular yönelten ve katılımcıların matematiksel söyleme katılımlarını dışarıdan bir gözle gözlemlemeye çalışan bir rol üstlenmiştir.

Veri Toplanması

Veri Toplama Araçları

Ortaöğretim öğrencilerinin birinci ve ikinci dereceden denklem ve eşitsizlik içeren görev durumlarında matematiksel rutinlerinin incelendiği bu çalışmada, çeşitli veri toplama araçları kullanılmıştır. Çalışmanın birincil veri toplama araçları, *tarama formları*, *yarı-yapılandırılmış bireysel ve odak grup görüşmeleri* ve bu görüşmelerde öğrencilere ait *yazılı kaynakların* tamamıdır. Bununla birlikte çalışmacının dersler süresince yapmış olduğu yapılandırılmamış gözlemler, katılımcıların ders defterleri ile derslerdeki diğer yazılı kaynakları ve çalışmacının notları da bu çalışmada veri toplama aracı olarak kullanılmıştır. Çalışma sürecinde yapılan bireysel görüşme ve odak grup görüşmeleri ile çalışmacı tarafından yürütülen dersler iki farklı kamera ve bir ses kayıt cihazıyla kayıt altına alınmıştır.

Görev Durumlarının Hazırlanması

Görev durumu, katılımcının kendisini bir şey yapmakla yükümlü hissettiği ve bu nedenle eyleme geçtiği herhangi bir ortamı, herhangi bir anı veya bir problem durumunu ifade eden matematiksel bir etkinlik olarak tanımlanır. Bununla birlikte, görev durumu belirli bir tür eyleme davet olarak, görev belirleyici (uzman, çalışmacı, öğretmen vb.) tarafından

bilinçli olarak oluşturulabilir (Lavie vd., 2019). Bu çalışmada katılımcıların denklem ve eşitsizlik kavramlarına ilişkin rutinlerinin yapısını açığa çıkarabilmek amacıyla 26 farklı görev durumu (EK 8) araştırmacı tarafından müfredat (MEB, 2018) esas alınarak oluşturulmuştur. Bu bağlamda, ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı (MEB, 2018) incelenmiş ve dört sınıf düzeyinde de denklem ve eşitsizlikler ile ilgili kazanımların yer aldığı görülmüştür. 9. sınıf müfredatında yer alan “denklem ve eşitsizlikler” konusu kapsamında birinci dereceden (bir ya da iki değişkenli) denklem ve eşitsizlikler ile üslü ifade içeren denklemlerin öğretimi yapılmaktadır. Bununla birlikte denklem ve eşitsizliklerle ilgili uygulamalar yapılmakta ve problemlerin çözümünde denklem ve eşitsizliklerin kullanımına yer verilmektedir. 10. sınıf müfredatı kapsamında ise ikinci dereceden tek değişkenli denklemlere yönelik kazanımlar yer almaktadır. 11. sınıf müfredatında “denklem ve eşitsizlik sistemleri” konusu kapsamında ikinci dereceden iki değişkenli denklem sistemleri ile ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sistemlerine dair kazanımlar yer almaktadır. 12. sınıf kazanımları ise üstel, logaritmik denklem ve eşitsizlikler ile trigonometrik denklemlerine yöneliktir (MEB, 2018). Bu çalışma 11. sınıf öğrencileriyle yapıldığı için görev durumları hazırlanırken ortaöğretim matematik dersi öğretim programında 9, 10, ve 11. sınıf kazanımlarından polinom biçimindeki denklem ve eşitsizliklere dair kazanımlar (MEB, 2018) esas alınmıştır ve 26 farklı görev durumu hazırlanırken bir uzmanın görüşüne başvurulmuştur.

Lavie vd. (2019); gözlemcinin, katılımcıların görev durumlarına ilişkin yorumları hakkında geçerli varsayımlar ortaya koyma yeteneğinin, büyük ölçüde elindeki verilerin miktarına ve kalitesine bağlı olduğunu belirtmektedir. Bununla birlikte araştırmacılar, çalışmasında tekrarın öğrenmenin özü olduğunu ve öğrenenlerin yeni görev durumunda hareket etmelerine olanak sağlayan geçmiş durumları (öğrenme yaşantıları) ve yapısal olarak onlara benzeyen durumların önemini vurgular (Lavie vd., 2019). Bu nedenle, bu çalışmada 26 farklı görev durumu hazırlanırken hem zengin veri kaynağı oluşturması hem de katılımcı rutinlerinin uygulanabilirliğinin gözlemlenebilmesi için aynı kazanıma ait ve

katılımcıların okul derslerinde de uğraşılan sorulara benzer görev durumlarına da yer verilmiştir. Böylece katılımcıların yeni görev durumlarında geçmiş öğrenme yaşantılarına (emsal olaylara) başvurup başvurmadığını ve eylemlerinin “rutin” olarak kodlanması için yeterli tekrarı sergileyip sergileyemediklerini gözlemlemek de amaçlanmıştır. Görev durumlarının hazırlanmasında esas alınan kazanımlar (MEB, 2018) ise Tablo 5’teki gibidir:

Tablo 5

Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı (Polinom Biçiminde) Denklem ve Eşitsizliklerle İlgili Kazanımlar

Sınıf düzeyi	Kazanımlar
9. Sınıf	9.3.3.2. Birinci dereceden bir değişkenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur. a) Birinci dereceden bir değişkenli denklem ve eşitsizliklerin çözümü hatırlatılır. 9.3.3.4. Birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini bulur. a) Birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerinin çözüm kümeleri bulunurken yerine koyma, yok etme veya grafikte çözüm yöntemlerinden faydalanılır. b) Birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözümü, analitik düzlemde gösterilir. 9.3.5.2. Denklemler ve eşitsizlikler ile ilgili problemler çözer. a) Gerçek hayat durumlarını temsil eden sözel ifadelerdeki ilişkilerin cebirsel, grafiksel ve sayısal temsilleri ile ilgili uygulamalar yapılır. b) Farklı problem çözme stratejilerinin uygulanmasını gerektiren oran, orantı kavramlarının kullanıldığı problemlere (örneğin elektrik, su vb. fatura ve ödemeler; sayı, kesir, yaş, işçi, alım-satım, kâr-zarar, yüzde ve karışım problemleri; hız ve hareket (hız kavramı, sabit hız, ortalama hız, birimler arası dönüşüm ($km/sa, m/sn$) yer verilir; faiz, havuz, saat problemlerine girilmez. c) Rutin olmayan problem türlerine de yer verilerek farklı problem çözme stratejilerinin uygulanmasına imkân verilir.
10. Sınıf	10.4.1.1. İkinci dereceden bir değişkenli denklem kavramını açıklar. 10.4.1.2. İkinci dereceden bir değişkenli denklemleri çözer. a) $ax^2 + bx + c$ biçimindeki cebirsel ifadelerin; tam kare ve iki kare farkına ait özdeşlikler kullanılarak çarpanlara ayrılmasıyla ilgili uygulamalar yapılır. b) Denklemlerin çözümünde farklı yöntemlerden (çarpanlara ayırma, tam kareye tamamlama, değişken değiştirme, iki kare farkı, diskriminant) yararlanılır. c) Gerçek hayat problemlerine yer verilir. 10.4.1.4. İkinci dereceden bir değişkenli denklemin kökleri ile katsayıları arasındaki ilişkileri kullanarak işlemler yapar. a) Sadece kökler toplamı ve çarpımı ile denklemin katsayıları arasındaki ilişkiler üzerinde durulur. b) Kökleri verilen ikinci dereceden denklemini elde etme ile ilgili uygulamalara yer verilir.

11. Sınıf	11.4.1.1. İkinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulur. Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılarak çizilen grafikler yardımıyla çözüm yorumlatılır. 11.4.2.1. İkinci dereceden bir değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur. a) $ax + b$ veya $ax^2 + bx + c$ şeklindeki ifadelerin çarpımı veya bölümü biçiminde verilen eşitsizliklerin çözüm kümesi buldurulur. b) Bilgi ve iletişim teknolojilerinden yararlanılarak çizilen grafikler yardımıyla çözüm yorumlatılır. 11.4.2.2. İkinci dereceden bir değişkenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini bulur.

Tablo 5'teki kazanımlar esas alınarak hazırlanan 26 görev durumunun (EK 8) hangi kazanıma ait olduğu ve görev durumunun içeriği ise Tablo 6'da yer almaktadır.

Tablo 6

Görev Durumlarının İçeriği

Görev Durumu	Kazanım/Görev durumunun içeriği
1	“Denklem” kavramına yönelik görev durumu
2	“Birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
3	“Eşitsizlik” kavramına yönelik görev durumu
4	“Birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
5	“Birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
6	“Birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
7	“Birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
8	“Birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
9	“Birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
10	“Birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
11	“Birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
12	“Birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
13	“İkinci dereceden tek değişkenli denklem kavramını açıklar.” kazanımını içeren kavrama yönelik görev durumu
14	“İkinci dereceden tek değişkenli denklemin kökleri ile katsayıları arasındaki ilişkileri kullanarak işlemler yapar.” kazanımını içeren kavrama ve işleme yönelik görev durumu
15	“İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözer.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
16	“Denklemler ve eşitsizlikler ile ilgili problemler çözer.” kazanımına yönelik problem durumu

17	“Denklemler ve eşitsizlikler ile ilgili problemler çözer.” kazanımına yönelik problem durumu
18	“Denklemler ve eşitsizlikler ile ilgili problemler çözer.” kazanımına yönelik problem durumu
19	“İkinci dereceden fonksiyonlarla modellenen problemleri çözer.” kazanımına yönelik problem durumu
20	“İkinci dereceden fonksiyonlarla modellenen problemleri çözer.” kazanımına yönelik problem durumu
21	“İkinci dereceden fonksiyonlarla modellenen problemleri çözer.” kazanımına yönelik problem durumu
22	“İkinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
23	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
24	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
25	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini bulur.” kazanımını içeren işleme yönelik görev durumu
26	“İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur.” kazanımını içeren kavrama ve işleme yönelik görev durumu

Odak Grup Görüşmeleri ve Görev Durumlarının Uygulanması

Bu araştırma matematik eğitiminde sosyokültürel bir teori olan Commognitive teoriyi esas almakta ve katılımcıların matematiksel söylemlerine sosyal ve bağlamsal bir ortamda odaklanmaktadır. Bu nedenle araştırma verilerinin odak grup görüşmeleri (Krueger & Casey, 2000) aracılığıyla toplanması uygun görülmüştür. Bu çalışmada katılımcılar için hem birbirleriyle hem de araştırmacıyla etkileşim içinde oldukları sosyokültürel ortam, okul içerisinde bulunan sınıf dışı öğrenme ortamlarıdır. Farklı öğrenme ortamlarında (EK 9) gerçekleştirilen odak grup görüşmeleri araştırmacı ve 5 katılımcı ile yürütülmüş ve iki farklı kamera ile görüşmeler kayıt altına alınmıştır. Bireysel görüşmelerle birlikte araştırmanın diğer verilerinin toplandığı odak grup görüşmeleri, katılımcıların araştırmacıyla (aynı zamanda öğretmenleri) ve birbirleriyle (5 kişilik öğrenci grubu) etkileşim içinde oldukları sınıf dışı bir matematik öğrenme ortamında (EK 9’da çalışma ortamı 3) yürütülmüştür. Odak grup görüşmelerinde katılımcılar (Elif, Burcu ve Zehra) diğer arkadaşlarıyla (Derya ve Şule) bir masa etrafında yüzleri tahtaya ve araştırmacıya dönük bir şekilde konumlanmışlardır. Oturma düzeni öğrencilerin tercihinin bırakılmış ve

katılımcılar çoğunlukla çalışma ortamında (EK 9’da çalışma ortamı 3) masaya sağdan sola doğru Elif, Burcu, Şule, Derya ve Zehra olacak şekilde yerleşmişlerdir. Odak grup görüşmeleri süresince söylem katılımcıları bir masanın etrafında yüzleri tahtaya ve araştırmacıya dönük bir şekilde oturmuştur. Görüşmelerde kameralardan biri katılımcıların yüzlerini ve yaptıklarını rahatça gören bir konumdan oturdukları masaya odaklı, diğeri ise yazılanları ve tahtaya kalkan katılımcıları rahatça gören bir konumdan tahtaya odaklı olacak şekilde ayarlanmıştır. Herhangi bir oturumda uygulanan görev durumunun sayısı, katılımcıların o görev durumuyla ilgili matematiksel söylemlerinin ve tartışmalarının süresine göre farklılık göstermiştir. Toplam 11 oturumda tamamlanan odak grup görüşmelerinde tek seferde en fazla 3 görev durumu tartışılmıştır. Oturum süreleri görüşülen görev sayısı durumuna göre 35 dk ile 90 dk arasında sürmüştür. Odak grup görüşmeleri yürütülürken, görüşme öncesinde araştırmacı tarafından katılımcılara yer ve saat bilgisi verilmiş ve araştırmacı her oturum öncesinde çalışma ortamını hazır hale getirmiştir. Katılımcılar çalışma ortamında masa etrafında yüzleri tahtaya ve araştırmacıya dönük olacak şekilde istedikleri bir düzende oturduktan sonra, araştırmacı katılımcıları selamlamış ve kayıt sürecini başlatmıştır. Araştırmacı görev durumlarını katılımcılara sunmadan önce; görev durumunu yanıtlamaları için yeterli sürenin sağlanacağına, yanıtlarındaki matematiksel doğruluktan ziyade içeriğinin önemli olduğuna ve görev durumuna dair daha önceki öğrenme yaşantılarını işe koşarak yanıtlarını paylaşımlarına dair hatırlatmalarda bulunmuştur. Böylece katılımcıların kendilerini rahat hissetmeleri sağlanarak zengin bir veri kaynağı elde edilmesi amaçlanmıştır. Sonrasında her bir görev durumu katılımcılara sırayla sunulmuş ve bir görev durumu hakkındaki katılımcı görevleri, tartışmalar ve paylaşımlar bitmeden diğer görev durumu katılımcılara uygulanmamıştır. Bu çalışmada odak grup görüşmelerinin amacı, özgün katılımcı düşüncesini ortaya çıkarmak ve matematiksel iletişimlerini yakalamak olmuştur. Bu amaçla; oturumlarda her bir görev durumu için araştırmacı öncelikle ilgili görev durumunu içeren kağıtları katılımcılara dağıtmış ve görev durumuyla bireysel bir şekilde uğraşmalarını istemiştir. Her bir katılımcı

görev durumunun çözümüyle hiçbir arkadaşıyla etkileşime girmeden, bireysel bir şekilde ortalama 3 ile 8 dakika arasında uğraşmıştır. Katılımcılara çözümle uğraşmaları için yeterli bir süre tanınmış ve katılımcılar çözümlerini tamamladığında araştırmacıya teslim etmiştir. Şekil 2’de ilgili görev durumuna dair çözümünü tamamlamış bir katılımcı kâğıdı örneği yer almaktadır.

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x^2 - y - 3x &= 0 \\ 3 - x + y &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= y \\ 3 - x + y &= 0 \\ x = 0 &\Rightarrow y = -3 \\ y = 0 &\Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-b}{2a} &= \left(\frac{3}{2}\right) \\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) &= \\ \frac{9}{4} - \frac{9}{2} &= \\ \frac{9}{4} - \frac{18}{4} &= \\ -\frac{9}{4} & \end{aligned}$$

$x^2 - y - 3x = 3 - x + y$
 $x^2 - 2x - 2y = 0$

Şekil 2. 22. görev durumuna ait katılımcı (Burcu) çalışma kâğıdı örneği

Araştırmacı tüm katılımcılar çözümü tamamladığında görev durumlarındaki katılımcı yanıtlarını incelemiş ve araştırmaya zengin veri sunacağını düşündüğü bir akışa göre katılımcıları çözümlerini sesli bir şekilde paylaşmaları için tahtaya davet etmiştir. Örneğin; görev durumu 22’de araştırmacının çözümleri incelemesi sonucunda çözümünün sadece cebirsel bir çözüm içermesi ve bu çözümün (Şekil 3) de hatalı olmasından dolayı tahtaya katılımcılardan öncelikle Zehra’nın davet edilmesi uygun görülmüştür. Bu durumun diğer çözümü farklı ve doğru çözüme ulaşan (Derya, Azra ve Şule) katılımcılar için matematiksel söylemlerini paylaşabileceği bir tartışma ortamı oluşturabileceği düşünülmüştür. Aynı görev durumunda Zehra’dan sonra tahtaya bu görev durumunu grafik çizimiyle çözmeye çalışan tek katılımcı olan Burcu davet edilmiştir. Diğer katılımcıların çözüm için cebirsel bir gerçekleşme kullanması Burcu’nun grafikle çözümünü (Şekil 2)

farklı kılmış ve yine bu durumun da katılımcılar için matematiksel söylemlerini paylaşabileceği bir tartışma ortamı oluşturabileceği düşünülmüştür.

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x^2 - y - 3x = 0 \\ 3 - x + y = 0 \end{cases}$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

$y = x - 3$

$$x^2 - (x - 3) - 3x = 0$$

$$x^2 - x + 3 - 3x = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1 \text{ veya } x = 3$$

$y^2 + 5y = 0$

$$y(y + 5) = 0$$

$$y = 0 \text{ veya } y = -5$$

x, y nrd. ktl.

$$K = \{(3, 1)\}$$

Şekil 3. 22. görev durumuna ait katılımcı (Zehra) çalışma kâğıdı örneği

Bu aşamadan sonra katılımcıların birbirleriyle etkileşim içinde oldukları ve matematiksel söylemlerini paylaştıkları ve tartıştıkları bir ortamda odak grup görüşmeleri devam etmiştir. Bir görev durumuyla ilgili katılımcıların paylaşımlarının devam edip etmediği teyit edildikten sonra, yeni bir görev durumunun uygulanmasına geçilmiştir. Bu şekilde yürütülen odak grup görüşmelerine başlarken katılımcılara, görev durumundaki yanıtların herhangi bir değerlendirmeye tabi tutulmayacağı, düşüncelerinin ve çözümlerinin doğruluğundan ziyade paylaşımının önemli olduğu belirtilmiştir. Bununla birlikte katılımcılar görev durumlarının çözümleriyle uğraşırken acele ettirilmeden her bir katılımcıya gerekli süre tanınmıştır. Katılımcıların kendilerini rahatça ifade edebilmesi için hem tahtaya kalkıp paylaştığı düşüncelerine (matematiksel söylemlerine) hem de yazılı kaynaklardaki çözümlerine dair bir yönlendirme yapılmamıştır. Böylece katılımcılar için kişisel ve kişilerarası matematiksel iletişimi rahatça kurabilecekleri güvenli bir ortam oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu süreçte katılımcı gözlemci (Adler & Adler, 1998) bir rol üstlenen araştırmacı gerektiğinde katılımcılara yönelttiği tetikleyiciler (sondalar) (Glesne

& Peskin, 1992) aracılığıyla katılımcılarla matematiksel iletişimi kurmaya ve katılımcıları keşif rutinlerinin kullanımına teşvik etmeye çalışmıştır. Araştırmacının tetikleyicileri her bir görev durumunda matematiksel iletişimin akışına göre farklılıklar gösterse de görev durumlarının benzerliğinden dolayı araştırmacı tarafından sıklıkla kullanılan ve görüşmelerde akışa göre katılımcılara yöneltilen tetikleyicilerin bazıları ve ne amaçla sorulduğu Tablo 7'deki gibidir. Araştırmacı haftada 2 ya da 3 kere gerçekleştirme fırsatı bulduğu oturumlar aracılığıyla katılımcılarla görüşmeleri yürütmüş ve bu şekilde yürütülen araştırma yeterli veri zenginliğine ve çeşitliliğine ulaşıldığı düşünüldüğünde sonlandırılmıştır.

Tablo 7

Odak Grup Görüşmelerinde Araştırmacının Kullandığı Tetikleyiciler

Tetikleyiciler	Hangi durumda?	Ne amaçla?
“Arkadaşımızın söyledikleri hakkında neler düşünüyorsunuz?”, “Arkadaşınıza katılıyor musunuz?”, “Neden katılıyorsunuz?” ya da “Neden katılmıyorsunuz?” gibi sorular	Herhangi bir katılımcı, bir prosedür uyguladığında ya da bir anlatı ürettiğinde	İlgili prosedür ve anlatı ile ilgili farklı söylemlerin açığa çıkarılması
“Hıı hıı”, “evet”, “anladım”, “gayet güzel”, “tamam” gibi ifadeler	Herhangi bir katılımcı, rutinini uygularken ya da rutinini sonlandırdığında	Katılımcının göreve devam etmesi ya da görevi sonlandırmasını onaylama Katılımcının yetkinliğini destekleme
“Çözümünü sesli bir şekilde paylaşır mısın?”, “Çözümünü gerekçeleriyle sesli bir şekilde açıklar mısın?”, “Nasıl ilerlediğini açıklar mısın?”, “Çözüm kümesini nasıl belirledin?” gibi sorular	Herhangi bir katılımcı görev durumunun çözümü için tahtaya kalktığında	Prosedürün uygulanmasında katılımcının rutinlerini nasıl gerekçelendirdiğini açığa çıkarma ve prosedürün uygulanmasında bağlılığın olup olmadığını gözlemleme
“Başka bir yolla çözüm yapabilir misin?”, “Bunu çözmenin başka bir yolu olabilir mi?”, “Çözüm için başka bir fikri olan var mı?” gibi sorular	Katılımcılar görev durumlarıyla uğraşırken ya da bir katılımcı prosedürünü paylaştığında	Prosedürün uygulanmasında katılımcı esnekliğini gözlemleyebilme
“Bu soru tipini hatırlayan var mı?”, “Kavramın tanımını hatırlayan var mı?”, “Sorunun nasıl çözüleceğini hatırladınız mı?” gibi sorular	Yeni bir görev durumuna başlarken ya da yeni bir kavram hakkında konuşulduğunda	Görev durumlarının katılımcılar için hangi emsal olayları çağrıştırdığının belirlenmesi ve görev durumunun uygulanabilirliğini gözlemleme
“Bu (cebirsel) ifadeyi sesli bir şekilde okur musun?”, “Bu ifadeyi sözel bir cümleye nasıl dökersin?”, “Bu ifade de yer alan harfleri/sembolleri nasıl isimlendirsin?”, “Neden öyle isimlendirdiğini açıklar mısın?” gibi sorular	Cebirsel ifade içeren her bir görev durumunda	Katılımcıların matematiksel nesnelere dair söylemlerini açığa çıkarma

Veri Toplama Süreci

Bu çalışmanın veri toplama süreci Millî Eğitim Bakanlığı'nın 22.02.2022 tarihli araştırma izni (EK 2) sonrasında başlamıştır. Şubat-Nisan 2022 tarihleri arasında devam eden bu araştırmada öncelikle katılımcıların belirlenmesi için hazırlanan tarama formalarının (EK 5) pilot uygulaması yapılmıştır. Pilot uygulama, öğrencilerin 5 farklı oturum için tarama formunda yer alan görev durumlarının çözümleriyle uğraştığı ve sonrasında öğrenci yanıtları üzerine görüşmelerin yapıldığı bir süreci içermektedir. Tarama formundaki görev durumlarının geçerliği için 2 öğrenci ile yapılan bu pilot uygulama ve görüşme süreci Tablo 8'de yer almaktadır.

Tablo 8

Pilot Uygulama ve Görüşme Süreci

Oturum	Pilot Uygulamalar		Pilot Görüşmeler	
	Tarih	Saat	Tarih	Saat
1	23.02.2022	10.00-10.30	23.02.2022	10.40-11.20
2	23.02.2022	13.00-13.20	23.02.2022	13.30-14.00
3	24.02.2022	10.30-10.50	24.02.2022	11.00-11.35
4	24.02.2022	13.00-13.25	24.02.2022	13.35-14.05
5	25.02.2022	14.00-14.20	25.02.2022	14.30-15.00

Pilot uygulama ve görüşme sürecinin ardından tarama formunda yer alan görev durumlarındaki eksiklik ya da hatalar düzeltilip gerekli eklemeler yapıldıktan sonra tarama formu, 5 farklı oturumda katılımcıların seçildiği 23 kişilik sınıfa uygulanmıştır. Tarama formunun uygulama tarihi ve süreleri ve oturumlara katılan öğrenci sayıları Tablo 9'da yer almaktadır. Tablo 9'da yer alan 6 numaralı oturum, oturumlara zamanında katılamayan öğrenciler için düzenlenen yedek oturumu belirtmektedir.

Tablo 9

Tarama Formunun Uygulanma Süreci

Oturum	Uygulama Tarihi	Uygulama Saati	Katılan Öğrenci Sayısı
1	24.02.2022	09.50-10.20	23
2	24.02.2022	13.30-14.00	23
3	25.02.2022	12.20-13.00	19
4	28.02.2022	09.50-10.30	21
5	28.02.2022	13.00-13.40	21
6	01.03.2022	10.40-11.20	7

Tarama formunun 5 farklı oturumda uygulanması sonucunda 23 öğrenciden seçilen 9 öğrenci ile araştırmanın katılımcılarını belirlemek için yapılan bireysel görüşmelerin süreci Tablo 10’da yer almaktadır. Tablo 10’da Derya, Şule, Burcu, Zehra ve Elif araştırmanın bu bireysel görüşmeler sonucunda seçilen asıl katılımcılarının temsil ederken; Ö1, Ö2, Ö3 ve Ö4 kodlamaları bireysel görüşme yapılan fakat araştırmanın katılımcıları olmayan diğer öğrencileri temsil etmektedir.

Tablo 10

Bireysel Görüşme Süreci

Öğrenci	Görüşme Tarihi	Görüşme Süresi
Elif	04.03.2022	10.40-12.15
Zehra	07.03.2022	12.30-14.15
Şule	03.03.2022	10.40-12.15
Derya	08.03.2022	09.00-11.00
Burcu	03.03.2022	14.40-16.30
Ö1	04.03.2022	13.00-14.30
Ö2	04.03.2022	14.45-16.00
Ö3	07.03.2022	14.30-16.15
Ö4	08.03.2022	11.30-12.15

Öğrencilerle yapılan bireysel görüşmeler sonrasında araştırmanın katılımcılarının belirlenmesinin ardından görev durumlarının tartışıldığı odak grup görüşmeleriyle bu çalışmanın bireysel görüşme verileri dışındaki diğer esas verileri toplanmıştır. Toplamda 11 oturumda 26 görev durumunun tartışıldığı odak grup görüşmelerinin süreci Tablo 11’de yer almaktadır.

Tablo 11

Odak Grup Görüşmelerinin Süreci

Oturum	Görev Durumu	Tarih	Süre
1	1	10.03.2022	24 dk
	2		40 dk
2	3	11.03.2022	45 dk
	4		36 dk
3	5	14.03.2022	30 dk
	6		17 dk
	7		26 dk
4	8	16.03.2022	48 dk
	9		42 dk
5	10	24.03.2022	33 dk
	11		47 dk
6	12	28.03.2022	21 dk
	13		30 dk
	14		25 dk
7	15	31.03.2022	32 dk
	16		25 dk
	17		24 dk
8	18	06.04.2022	32 dk
	19		23 dk
	20		17 dk
9	21	20.04.2022	37 dk
10	22	21.04.2022	29 dk
	23		25 dk
	24		13 dk
11	25	22.04.2022	32 dk
	26		30 dk

Verilerin Analizi**Verilerin Transkripti**

Matematiksel söylem, dilin ve diğer semiyotik kaynakların kullanımını içerdiği için (Kim vd., 2017) araştırmanın verileri katılımcıların eşzamanlı sözel ifadelerini (ne söylediğini), eylemlerini (ne yaptığını) ve çizimlerini (ne çizdiğini) içerecek şekilde transkript edilmiştir. Bu çalışmada 5 farklı oturumda toplanan tarama formlarında verdikleri yanıtları üzerine

katılımcılarla yapılan bireysel görüşmeler ve 11 farklı oturumda odak grup görüşmeleri aracılığıyla toplanan 26 görev durumuna ait katılımcı söylemlerinin transkripti yapılırken her bir satır numaralandırılmış ve aşağıdaki kısaltmalar kullanılmıştır:

- A: Araştırmacı
- E: Elif
- B: Burcu
- D: Derya
- Ş: Şule
- Z: Zehra
- Os: s. Oturum (s yerine oturumun numarası yazılacak)
- GDs: s. Görev Durumu (s yerine görev durumunun numarası yazılacak)
- [...]: bir süre bekliyor
- [...]: bir katılımcı konuşurken yaptığı eylemler italik bir şekilde “...” lı kısımda yer alacak
- (...): bir katılımcı konuşurken başka bir katılımcının konuşmaya kısa süreli dahil olduğu konuşmaları italik bir şekilde “...” lı kısımda yer alacak
- <...>: bir katılımcı konuşurken diğer katılımcıların eylemleri ve durumları “...” lı kısımda ifade edilecek
- (x): Tahtaya yazılırken söylenenler
- (xx): Kağıda yazılırken söylenenler
- Kelimenin sonundaki “—” işareti katılımcının konuşmasının yarım kaldığını belirtmek için kullanılacak

Bununla birlikte bulgular sunulurken ilgili olmayan ve o kısım için atlanan konuşmalar yerine “...” işareti kullanılacaktır. Bu şekilde kısaltmalar yapılarak transkripti yapılan görüşmelerin örnek bir kesiti ise aşağıdaki gibidir:

#O5#GD10#Görüşme

148. <Şule sessizce tahtada çözüm kümesini temsil eden ifadeyi yazıyor>
149. <Elif arkadaşının yazdıklarına bakarak doğru anlamında kafasını sallıyor>
150. [Şule yazma işlemini tamamlıyor] Ş: Böyle olur mu bilemedim. [“Ç. $K = \{(x, y) | y < 8 - 2x, x, y \in \mathbb{R}\}$ ” cebirsel ifadesini yazıyor]
151. A: Yeterli olur mu sizce?
152. Z: Ama bu seferde şeyi yazmadık [...] üstteki (D: Evet) x küçüktür dört, y küçüktür sekizi yazmadık.
153. E: İkisini birleştiresek.
154. Ş: Onu zaten y ’ye sıfır verdiğinde görebilirsin ki.
155. A: Şule diyor ki, bunu yazmam yeterli olur.
156. Z: Ama bu direkt çözüm kümesi değil ki.
157. E: Sadece açık önermenin kendisini yazdık bence ikisini birlikte yazmalıyız.
158. D: Evet, evet, evet.
159. E: Çünkü ıı ikisini beraber yazarsak ııı hem aralarındaki ilişkiyi sağladığı değerleri hem de x ve y için aralığı belirtmiş oluruz bence.
160. A: Nasıl?
161. Z: Evet bu açık önermenin kendisi de değil ama çözüm kümesi de değil.
162. A: Çözüm kümesi olması için ortak özellik yöntemiyle yazmak yeterli değil mi?
163. <Öğrenciler düşünüyor; kafaları karışık>
164. Z: Evet nasıl yani?
165. D: Yeterli mi?
166. B: Böyle değil bence ya.
167. Z: Bence de değil.
168. B: Ama başka türlü de aklıma gelmiyor.
169. E: Eksik.
170. Z: Eksik yani [...] bence ikisi de eksik.
171. E: Aklıma gelmiyor başka bir şey.
172. A: Tamam böyle kalsın o zaman. [...] Hadi gelin kızlar.
173. <Şule ve Elif yerlerine oturuyor>

Verilerin Kodlanması

Bu araştırmada “Ortaöğretim öğrencilerinin (polinom biçimindeki) denklem ve eşitsizlik kavramlarını içeren görev durumlarında rutinleri, söyleme katılımları ve rutin gelişimleri nasıldır?” problemine cevap aranmaktadır. Bu problemin cevabını araştırmak için araştırmanın verilerinde iki alt probleme dair cevap aranmıştır. Öncelikle ortaöğretim öğrencilerinin kavramlara ait söylemsel rutinlerinin yapısı açığa çıkarılmış ve katılımcılarının rutinlerini ne zaman ve nasıl sergilediklerine odaklanılmıştır. Sonrasında katılımcıların rutin türü (ritüel ya da keşif) belirlenerek, onların bu rutinleri aracılığıyla kavramlara ait farklı görev durumlarında matematiksel söyleme katılım biçiminin ne (ritüel, hibrit, keşifsel) olduğu ve bu katılımın nesneleştirme, esneklik, bağlılık-tutarlılık, gerekçelendirme, katılımcının yetkinliği ve uygulanabilirlik açısından nasıl gerçekleştiği izah edilmiştir. Bununla birlikte araştırma süresinde elde edilen verilerin mümkün kıldığı kadarıyla öğrencilerin rutin gelişimlerini belirlemek için öğrencilerin ritüel olarak belirlenen bir katılımdan daha keşifsel bir katılıma geçişlerinin nasıl gerçekleştiği betimlenmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin rutinlerinin ve rutin gelişimlerinin nasıl olduğunu analiz edebilmek için literatür yardımıyla veri analizini yaparken kullanılacak bir kriter listesi (Tablo 12) hazırlanmıştır (Baccaglini-Frank, 2021; Chan & Sfard, 2020; Essack, 2015; Lavie vd., 2019; Nachlieli & Katz, 2017; Nisa vd., 2021; Roberts & le Roux, 2019; Sfard, 2008, 2012, 2017; Weingarden vd., 2019). Bu kriter listesi hazırlanırken katılım türleri, Lavie ve diğerlerinin (2019) çalışmalarında bahsettiği altı özellik (söylemin nesneleştirilmesi, bağlılık, esneklik, katılımcı yetkinliği, gerekçelendirme, uygulanabilirlik) ve “denklem ve eşitsizlik” kavramları bağlamında özgün bir şekilde betimlenmiştir. Kriter listesi oluşturulurken; söylemin nesneleştirilmesi, esneklik, bağlılık-tutarlılık, gerekçelendirme, katılımcının yetkinliği ve uygulanabilirlik olarak isimlendirilen altı özellik bağlamında katılımcıların söyleme katılımlarının (olası) iletişimsel belirleyicileri (communicational indicators) betimlenmiştir. Başka bir deyişle, kriter listesinde bu özelliklerin katılımcının matematiksel söyleminde nasıl ortaya çıkacağı ya da

çıkamayacağı katılım türleri açısından izah edilmiştir. Söyleme katılım türlerindeki iletişimsel belirleyicileri belirlenirken literatürün yanı sıra araştırmanın verileri de dikkate alınmıştır. Bu çalışmada diğer çalışmalardan farklı olarak ritüel ve keşifsel katılım türlerine, “hibrit katılım” olarak isimlendirilen bir katılım türü daha eklenmiştir. Christiansen vd. (2022) çalışmasında öğretmenlerin öğrenciler için sunduğu öğrenme fırsatlarında ritüel ve keşif rutinlerini iç içe geçmiş bir şekildeki kullanımı adlandırmak için “hibrit (hybrids)” terimini tercih etmiştir. Bu doğrultuda bu çalışmada ritüel katılımdan keşifsel katılıma geçişin olmaya başladığı iletişimsel belirleyicileri betimleyen katılım türüne “hibrit katılım” şeklindeki isimlendirme uygun görülmüştür. Böylece katılımcıların ritüel katılımdan keşifsel katılıma geçiş sürecini detaylandırmak ve verilerin analizini daha anlaşılır kılmak amaçlanmıştır.

Bu çalışmada katılımcıların söyleme katılımlarının rutinleri aracılığıyla nasıl olduğu; söylemin nesneleşmesi, esneklik, bağlılık-tutarlılık, katılımcının yetkinliği, gerekçelendirme ve uygulanabilirlik açısından Tablo 12’deki analiz listesi esas alınarak analiz edilmiştir. Bu listede “kriterler” terimi, Lavie ve diğerlerinin (2019) çalışmasında ritüelden keşfe geçiş sürecinin gözlemlenebileceği özellikler olarak bahsettiği özellikleri ifade etmektedir. Lavie ve diğerlerinden (2019) farklı olarak “bağlılık” özelliğinin “bağlılık-tutarlılık” şeklinde isimlendirilmesinin ve verilerin bu kriter açısından incelenmesinin uygun olacağı düşünülmüştür. Çünkü “bağlılık” özelliği, katılımcının prosedüründeki ardışık adımlarına odaklanırken, ardışık adımlar neticesinde ulaşılan sonucun prosedürün uygulanma süreciyle olan ilişkisini göz ardı etmektedir. Bununla birlikte prosedüründe ardışık adımları bağlı olan farklı katılımcıların uyguladıkları prosedürünün ne anlam ifade ettiğinin farkında olup olmamasına göre söyleme katılımının farklılık göstereceği düşünülmüştür. Bu bağlamda “tutarlılık” terimi, katılımcının uyguladığı prosedürün elde ettiği sonuçla olan mantıksal ilişkisini betimlemek için kullanılmıştır. Bulguların analizinde de “prosedür-sonuç” şeklinde bir isimlendirme kullanılmış ve “prosedür-sonuç” ikilisinde “prosedür” terimi, katılımcının uyguladığı

işlem, yol, yöntem ve sembolik manipölasyonlar gibi eylemlerin tamamını temsil ederken; “sonuç” terimi ise katılımcının uyguladığı prosedür neticesinde elde ettiği reel sayı, çözüm(ler), çözüm kümesi, grafik gibi cebirsel ve grafiksel gerçekleştirmelerin tamamını temsilen kullanılmıştır.

Heyd-Metzuyanım (2009) matematik öğrenme sürecinde, katılımcının matematiksel nesneler hakkındaki söylemlerini temsil eden “matematikleştirme eylemleri (acts of mathematizing)” ile sürece dahil olanlar hakkında söylemlerini temsil eden “öznelleştirme eylemleri (acts of subjectifying)” arasında bir etkileşim olduğunu ve katılımcının söylemlerinde bu ikisinin iç içe geçmiş bir şekilde gözlemlenebileceğini söylemektedir. Örneğin “ $x - 2y = 4$, $x, y \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesi için “Çünkü ben onun doğru denklemi olduğuna inanıyorum.” şeklindeki bir katılımcı söyleminde “... doğru denklemi ...” ifadesi katılımcının matematikleştirme söylemini temsil ederken “... olduğuna inanıyorum” biçimindeki ifadesi kendisine yönelik kişisel bir söylemini temsil etmektedir. Bu çalışmada da katılımcıların rutinleri aracılığıyla söyleme katılımları; katılımcının yetkinliği, gerekçelendirme ve uygulanabilirlik bağlamında incelenirken katılımcıların matematiksel nesneler hakkındaki söylemleriyle (acts of mathematizing) birlikte söyleme katılanlar (kendisi ya da başkaları) hakkındaki söylemleri de (acts of subjectifying) dikkate alınmıştır. Ayrıca “kanonik” kelimesi katılımcının söyleminin uzman matematik topluluğu tarafından kullanılan prosedürler ve anlatılarla aynı fikirde olması yani matematiksel olarak “doğru” olması anlamında kullanılmaktadır. Bu bağlamda araştırmanın verilerinin analizinde kullanılan kriter listesi Tablo 12’de yer almaktadır.

Tablo 12

Veri Analizi Kriter Listesi

Kriterler	Katılım türü	İletişimsel belirleyiciler (Communicational Indicators)
Söylemin nesneleştirilmesi (Objectification of discourse)	Ritüel katılım	❖ Katılımcı denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait göstergeleri (signifiers) ve görsel araçları (cebirsal ifadeler, değişkenler, semboller, grafikler vb.) manipüle edilebilen bir nesne olarak görür.
		❖ Katılımcı prosedürün uygulanması sürecine odaklanır ve söylemleri matematiksel nesneleri manipüle etme hakkındadır.
		❖ Prosedürü uygularken kavramlara ait göstergeleri isimlendirmede (anlamlandırmada) zamirleri (bu, şu, o, bunlar, şunlar, onlar) ve iyelik eklerini kullanır. Söylemleri insani eylemleri içeren ifadeleri (ekliyorum, yapıyorum, çarpıyorum, karşı tarafa atıyorum, buradan şöyle oluyor vb.) içerir.
		❖ Göstergeleri ve görsel araçları isimlendirme ve ifade etmede çoğunlukla (anamlı olmayan) günlük bir dil kullanır.
		❖ Söylemlerinde kavramlar, göstergeler ve görsel araçlar için anahtar sözcükleri doğru bir şekilde kullanmada güçlük yaşar.
		❖ Katılımcı bağlama bağlı olarak cebirsal ifadelerin ve sembollerin ayırımında ve isimlendirilmesinde güçlük yaşar.
		❖ Katılımcı denklem ve eşitsizlik kavramlarına dair göstergeleri tek bir gerçekleşmenin göstergesi olarak görür ve göstergenin tek bir gerçekleşmesi ile görevini tamamlar.
		❖ Katılımcı göstergelerin gerçekleşmeleri arasında geçiş yapmada güçlük yaşar. Aynı göstergeye ait farklı gerçekleşmeler arasında ilişkiyi kurmada güçlük yaşar.
		❖ Sözel ifadeleri cebirsal ifadelere ya da cebirsal ifadeleri sözel ifadelere dönüştürmede zorluk çeker.
		❖ Katılımcı denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait göstergeleri ve görsel araçları isimlendirmede ve ifade etmede anahtar sözcükleri günlük bir dil eşliğinde doğru bir şekilde kullanır.
	Hibrit katılım	❖ Katılımcının söylemleri matematiksel nesneleri manipüle etme hakkındadır ve bu söylemlerini istendiğinde anlatılar üretir (eksik ya da doğru) gerekçelendirir.
		❖ Söylemlerinde göstergeler (cebirsal ifade, sembol, grafik vb.) için anahtar kelimeleri anlamına (bağlamına) uygun olmayan bir şekilde kullanır.
		❖ Katılımcı bağlama bağlı olarak cebirsal ifadelerin ve sembollerin ayırımının farkındadır fakat bağlama bağlı olarak cebirsal ifadelerin ve sembollerin ayırımını ve isimlendirmesini eksik bir şekilde yapar.
		❖ Katılımcı denklem ve eşitsizlik kavramlarına dair göstergelerin farklı gerçekleşmelerinin farkındadır fakat bu gerçekleşmeler arasındaki geçişleri eksik ya da kanonik olmayan (matematiksel olarak doğru)

		olmayan) bir şekilde yapar. ❖ Sözel ifadeleri cebirsel ifadelere ya da cebirsel ifadeleri sözel ifadelere eksik bir şekilde dönüştürür.
	Keşifsel katılım	❖ Katılımcı denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait göstergeleri ve görsel araçları soyut birer matematiksel nesne olarak görür. ❖ Göstergeleri ve görsel araçları isimlendirmede, ifade etmede ve anlamlandırmada anahtar sözcükleri kanonik bir şekilde (tam ve doğru olarak) kullanır. ❖ Söylemlerinde matematiksel nesneler (sembol, cebirsel ifade, grafik, kavram vb.) hakkında onaylanmış anlatılar üretir. ❖ Katılımcı süreç odaklı değil sonuç odaklıdır ve bu nedenle prosedürün uygulanmasına değil prosedürün ürününe (sonuca) odaklanır. ❖ Katılımcı söylemlerinde insani eylemlerden arındırılmış matematiksel bir dil kullanır. ❖ Katılımcı bağlama bağlı olarak cebirsel ifadelerin ve sembollerin ayrımını ve isimlendirmesini doğru bir şekilde yapar. ❖ Katılımcı denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait göstergelerin gerçekleştirmeleri arasındaki geçişleri kanonik bir şekilde (doğru ve tam bir şekilde) yapar. Aynı göstergeye ait farklı gerçekleştirmeler arasında ilişki/leri kurar. ❖ Sözel ifadeleri cebirsel ifadelere ya da cebirsel ifadeleri sözel ifadelere kanonik (tam ve doğru) bir şekilde dönüştürür.
Esneklik (Flexibility)	Ritüel katılım	❖ Katılımcı prosedürünü ezbere ve katı (rigid) bir çözüm yoluyla gerçekleştirir.
	Hibrit katılım	❖ Katılımcı prosedürü farklı çözüm yollarını kullanarak uygulayabileceğinin farkındadır. ❖ Katılımcının prosedürü uygulamada kullandığı alternatif çözüm yolları eksiklik ya da hatalar içerir.
	Keşifsel katılım	❖ Katılımcı farklı çözüm yollarını kanonik bir şekilde (tam ve doğru) kullanarak prosedürünü gerçekleştirir.
Bağlılık-Tutarlılık (Bondedness-Consistency)	Ritüel katılım	❖ Katılımcının prosedüründeki ardışık adımları birbiriyle bağlantılı değildir. ❖ Katılımcı cebirsel bir ifadeye (göstergeye) denk (açık) önermeler yazmada güçlük yaşar. ❖ Prosedürün performansını tam ve doğru bir şekilde uygulamada güçlük yaşar. ❖ Katılımcı prosedürünü eksik ya da kanonik olmayan (matematiksel olarak doğru olmayan) bir şekilde uygular. ❖ Katılımcının ulaştığı sonuç (bilinmeyen, herhangi bir reel sayı, çözüm, çözüm kümesi vb.), prosedürün süreci ile mantıksal olarak bağlantılı değildir.
	Hibrit katılım	❖ Katılımcının prosedüründeki ardışık adımların bağlılığında eksiklikler ya da (kısmi) hatalar olmasına rağmen katılımcı prosedüründeki eksikliklerin ya da hataların farkındadır. ❖ Katılımcı cebirsel bir ifadeye (göstergeye) denk (açık) önermeler yazar fakat prosedürün performansını

Gerekçendirme (Substantiability)	Keşifsel katılım	kanonik (tam ve doğru) bir şekilde uygulayarak tamamlamada güçlük yaşar.
		❖ Katılımcı kanonik bir şekilde prosedürünü uygulasa da cebirsel ifadelerle denk (açık) önermeler yazarken bağımsız kararlar almada güçlük yaşar.
	Ritüel katılım	❖ Katılımcının uyguladığı prosedürle doğru çözüme ulaşır fakat prosedür-sonuç ilişkisini kurmada güçlük yaşar.
		❖ Katılımcının prosedüründeki ardışık adımları birbiriyle kanonik (tam ve doğru) bir şekilde bağlantılıdır.
		❖ Katılımcı cebirsel bir ifadeye (göstergeye) denk (açık) önermeleri kanonik bir şekilde yazar.
		❖ Prosedürünü kanonik bir şekilde (tam ve doğru bir şekilde) tamamlar.
Gerekçendirme (Substantiability)	Hibrit katılım	❖ Katılımcının ulaştığı sonuç (bilinmeyen, herhangi bir reel sayı, çözüm, çözüm kümesi vb.), prosedür süreciyle mantıksal olarak ilişkilidir.
		❖ Katılımcı herhangi bir rutini, performansı ya da anlatıyı gerekçelendirmede ve kendi argümanını inşa etmede güçlük yaşar.
	Keşifsel katılım	❖ Herhangi bir söylemi (rutin, performans, anlatı vb.) sezgilerine dayanarak (“bilmiyorum, hatırlamıyorum, öyle olduğunu düşünüyorum” gibi ifadelerle); bir otoriteye güvenerek (arkadaş, uzman, öğretmen, ders kitapları, vb.) ya da önceki görev durumlarını, ders oturumlarını, öğrenme tecrübelerini kaynak göstererek (“derste öyle gördük, siz söylediniz, arkadaşımın duydum” gibi ifadelerle) gerekçelendirir.
		❖ Katılımcı herhangi bir rutini, anlatıyı ya da prosedürü eylemleri veya süreçleri vurgulayarak gerekçelendirir.
		❖ Katılımcı herhangi bir rutini, performansı ya da anlatıyı matematiksel örneklerle başvurarak gerekçelendirir.
		❖ Katılımcı herhangi bir rutini, performansı ya da anlatıyı gerekçelendirirken anahtar sözcükleri ve görsel araçları bağlama uygun ve mantıksal bir şekilde kullanır fakat anlatı üretmede güçlük yaşar.
Gerekçendirme (Substantiability)	Ritüel katılım	❖ Katılımcı kendi argümanını inşa ederken çoğunlukla süreç odaklıdır.
		❖ Katılımcı herhangi bir rutini, performansı ya da anlatıyı onaylanmış anlatılarla üretmek gerekçelendirir.
	Keşifsel katılım	❖ Kendi argümanını inşa ederken sonuç odaklıdır, söylemleri matematiksel nesneler hakkında ve mantıksal çıkarımlarda bulunur.
		❖ Katılımcı görev durumunda prosedürü uygularken bağımsız kararlar almada güçlük çeker.
		❖ Bir dış otoriteye (arkadaş, lider tartışmacı (lead discussant), öğretmen, uzman, ders kitabı vb.) güvenir.
		❖ Başkalarından söylemlerinin doğruluğu için onay isteme ihtiyacı hisseder, söylemlerinde tereddüt eder ve zihninde soru işaretleri vardır.
Gerekçendirme (Substantiability)	Ritüel katılım	❖ Ses tonu ve yüz ifadesinde kararsızlığa sahiptir.
	Keşifsel katılım	

Katılımcının yetkinliği (Performer's agentivity)	Hibrit katılım	❖ Katılımcı söylemlerinde duraksamalar yaşar. ❖ Arkadaşlarına herhangi bir öneride bulunmada güçlük yaşar, ortamda gözlemci bir rol üstlenir. ❖ Görev durumuna ilişkin anlamlı olmayan veya tutarsız söylemlerde bulunur.
		❖ Katılımcı bir görev durumunda prosedürü uygularken çoğunlukla bağımsız kararlar alır, prosedürü uygularken zorluk yaşadığında dış otoriteye ihtiyaç duyar. ❖ Emin olmadığı durumlarda nadiren başkalarının onayına başvurur. ❖ Arkadaşlarına eksik ya da matematiksel olarak doğru olmayan önerilerde bulunur. ❖ Katılımcı söylemlerinin (özellikle anlatılarının) sonuna “öyle değil mi, doğru mu, ...şöyle olmalı değil mi” gibi onay ifadelerini ekler. ❖ Katılımcı prosedüründeki eksik ya da hataların (varsa) farkındadır fakat doğru prosedürü nasıl uygulaması gerektiği noktasında bağımsız kararlar almada güçlük yaşar. ❖ Katılımcı başkalarının söylemlerinden mantıksal çıkarımlar yapar.
Uygulanabilirlik (Applicability)	Keşifsel katılım	❖ Katılımcı görev durumunda prosedürü uygularken bağımsız kararlar alır. ❖ Kendisi dışında hiç kimseyi otorite olarak görmez. Arkadaşları tarafından bir otorite olarak kabul edilir. ❖ Söylemlerinde kendinden emindir. ❖ Anlatılar üretir ve mantıksal çıkarımlarda bulunur. ❖ Matematiksel söylemlerden mantıksal çıkarımlar yaparak onaylanmış anlatılar üretir ve başkalarının mantıksal çıkarımlar yapmasına katkı sağlayan söylemlerde bulunur. ❖ Prosedürü uygularken deneyimli katılımcı (diğer katılımcılar için bir otorite) rolündedir ve söylemlerinde “yaparım, çözerim, haydi şöyle yapalım” gibi ifadeler kullanır.
	Ritüel katılım	❖ Katılımcı farklı çalışma ortamlarında benzer görev durumlarını hatırlamakta güçlük yaşar. Bu durumu söylemlerinde “bilmiyorum, hatırlayamadım, ben bunu hiç yapamıyorum, bu konuda her zaman çok zorlanıyorum” gibi tanımlayıcı ifadelerle belirtir. ❖ Katılımcı bir görev durumunda gerçekleştirdiği rutinini; farklı çevre, farklı görev durumu, görev durumundaki farklı bir bağlam ve aşına olduğu benzer görev durumlarında uygulamada zorluk çeker.
	Hibrit katılım	❖ Katılımcı daha önceki emsal olaylardan (benzer görev durumlarındaki öğrenme yaşantıları, ders deneyimleri vb.) yola çıkarak rutini, farklı çevre, farklı görev durumu, görev durumundaki farklı bir bağlam ve aşına olduğu benzer görev durumlarında eksik ya da hatalı bir şekilde uygular.
	Keşifsel katılım	❖ Katılımcı rutinini, farklı çevre, farklı görev durumu, görev durumundaki farklı bir bağlam ve aşına olduğu benzer görev durumlarında kanonik (tam ve doğru) bir şekilde uygular.

Araştırmanın ham verilerini oluşturan bireysel görüşmeler ve odak grup görüşmeleri hem veriler transkript edilirken hem de katılımcıların rutinlerinin yapısı ve söyleme katılımlarının nasıl olduğu analiz edilirken araştırmacı tarafından defalarca izlenmiştir. Araştırmanın birinci alt problemine cevap aramak için katılımcıların hem bireysel hem de odak grup görüşmelerinde tekrarlanan eylemleri “rutin” olarak kodlanmış ve katılımcıların, bu kodlanan rutinleri aracılığıyla söyleme katılımları betimlenmiştir. Araştırmanın ikinci alt problemine cevap aramak içinse araştırmanın birinci alt problemine yönelik bulgularına bağlamsal ve bütüncül bir bakış açısıyla bakılarak analizler yapılmıştır. Ayrıca verilerin kodlanması sürecinde “denklem” ve “eşitsizlik” kavramlarına dair katılımcı söylemleri Commognitive bakış açısıyla ele alınmış ve katılımcı söylemlerinin kanonik olup olmadığına karar vermek adına ilgili kavramlara dair söylem öğeleri kategorize edilmiştir.

Commognitive Bakış Açısıyla Denklem ve Eşitsizlik Kavramları

Polinom biçimindeki denklemler ve eşitsizlikler birer açık önermedir. Eşitlik bağıntısı içeren her bir açık önermeye bir *denklem*; “ $\leq$ ” bağıntısını içeren açık önermeye de bir *eşitsizlik* denir (Argün vd., 2020). Açık önermeler en az bir değişken içereceğinden burada değişken kavramının tanımı da önem kazanmaktadır. Bir kümenin tüm elemanlarını aynı anda temsil eden bir simge veya bir sembole *değişken* denilmektedir (Argün vd., 2020). Denklem ve eşitsizlikler içerdiği değişken sayısına göre bir değişkenli, iki değişkenli vb. gibi isimler alır. Örneğin $y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, “ $2y - 5 = y + 11$ ” cebirsel ifadesi *bir değişkenli bir denklemi* belirtmektedir. Burada evrensel küme reel sayılardır ve evrensel kümenin tüm elemanlarını temsil eden değişken ise y sembolü ile gösterilmiştir. Açık önermeler, değişkenin yerine evrensel kümeden seçilen elemanlara göre doğru ya da yanlış hüküm bildirirler. Başka bir deyişle evrensel kümenin elemanları, denklem ya da eşitsizlikte değişken yerine yazıldığında, o açık önermeyi doğru ya da yanlış bir önerme yapar. Evrensel kümenin herhangi bir elemanı değişken yerine yazıldığında açık önerme doğru bir önerme oluyorsa bu elemana *bilinmeyen* adı verilir Bir evrensel küme üzerinde

ifade edilen bir açık önermedeki değişkenlerin yerine konulduğunda açık önermenin doğru olduğu bütün elemanların kümesine bu açık önermenin *doğruluk kümesi* denir (Argün vd., 2020). Denklem ya da eşitsizlikleri doğrulayan evrensel kümenin elemanlarının her birine denklemin ya da eşitsizliğin *çözümü* denir ve bu elemanların oluşturduğu kümeye de denklemin ya da eşitsizliğin *çözüm kümesi* adı verilir. $y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, “ $2y - 5 = y + 11$ ” cebirsel ifadesi örneği göz önüne alınırsa $y = 16$ için “ $2y - 5 = y + 11$ ” denklemi doğru bir önerme olduğundan 16 reel sayısı bu denklemin çözümü ve bilinmeyendir. Bu denklem 16 reel sayısı dışındaki tüm reel sayılar için doğru olmadığından (doğrulayan) çözüm kümesi $\{16\}$ dir. Bir denklem, değişkenlerin temsil ettiği kümenin bütün elemanları tarafından sağlanıyorsa bu denkleme *özdeşlik* adı verilir (Argün vd., 2020). Ayrıca $n \geq 1$ olmak üzere n . dereceden polinom biçimindeki denklemlere ya da eşitsizliklere n . dereceden denklem ya da n . dereceden eşitsizlik adı verilir. Böylece polinom biçimindeki bir denklemi ya da eşitsizliği adlandırırken değişken sayısı ve derecesi belirtilir. Örneğin, “ $4 - 2x^2 < y, x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliği *ikinci dereceden iki değişkenli bir eşitsizlik* olarak adlandırılır.

Polinom biçimindeki denklem ve eşitsizlikleri söylemsel birer nesne olarak ele alırsak, “evrensel küme”, “değişken”, “açık önerme”, “bilinmeyen”, “denklem”, “eşitsizlik”, “çözüm kümesi”, “özdeşlik”, “aralık”, “polinomun derecesi”, “katsayı”, “kök” ve “diskriminant” gibi matematiksel kelimeler bu söylemin anahtar kelimelerini oluşturmaktadır. Polinom biçimindeki denklem ve eşitsizlikler için görsel araçlar; en az bir değişken ve “=”, “ $\geq$ ”, “ $\leq$ ”, “ $>$ ” ve “ $<$ ” sembollerini içeren cebirsel gösterimleri, analitik düzlemde çizilen grafikleri (doğru ya da eğriler), tablo ya da sayı doğrusu üzerindeki gösterimleri ile kavramlara ilişkin tüm sembol ve gösterimleri içermektedir. Polinom biçimindeki denklem ve eşitsizlikler için onaylanabilir anlatılar; sayılara, kümelere, açık önermelere, polinomlara, fonksiyonlara ve analitik düzleme dair tanımları, kuralları ve teoremleri içeren anlatıları kapsamaktadır. Polinom biçimindeki denklem ve eşitsizliklere ait söylemsel rutinler; kelimelerin, görsel araçların ve anlatıların kullanımı

ile denklem ve eşitsizlik çözüme, çözüm sürecini gerekçelendirme, tanımlama ve hesaplama gibi rutinleri de içermektedir.

Bu çalışmada ortaöğretim müfredatı kapsamında (MEB, 2018) öğrencilerin (reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı) polinom biçimindeki denklem ve eşitsizlikler hakkındaki (muhtemel) söylemleri (anahtar kelimeler, görsel araçlar ve anlatılar) belirlenerek katılımcıların rutinlerinin (ritüel ya da keşif) matematiksel olarak doğru (kanonik) olup olmadığını gerekçelendirmek amacıyla kullanılacaktır. Bu doğrultuda kaynaklar (Argün vd., 2020; MEB, 2019) ve uzman görüşü esas alınarak müfredat (MEB, 2018) bağlamında polinom biçimindeki denklem ve eşitsizlikler hakkındaki söylemlere ait (muhtemel) anahtar kelimeler ve tanımları, görsel aracı örnekleri ve kanonik anlatılar belirlenmiştir. Tablo 13'te öğrencilerin polinom biçimindeki denklem ve eşitsizlikler için kullanması muhtemel anahtar kelimelere ve matematiksel tanımlarına yer verilmiştir.

Tablo 13

Polinom Biçimindeki Denklem ve Eşitsizliklere Ait Söylemlerdeki Anahtar Kelimeler ve Tanımları

Anahtar Kelime	Tanım
Evrensel küme	Bağlama göre göz önüne alınan, incelenen veya söz konusu olan en geniş kümeye <i>evrensel küme</i> denir.
Değişken	Evrensel kümenin tüm elemanlarını aynı anda temsil eden bir simge veya bir semboldür.
Açık önerme	Eğer hüküm verici ifade, (i) bir veya daha fazla değişken içeriyorsa, (ii) bir önerme değilse fakat (iii) değişkenler yerine izin verilebilen/uygun seçimler yazıldığında bir önerme oluyorsa bu ifadeye bir <i>açık önerme</i> denir.
Bilinmeyen	Evrensel kümenin herhangi bir elemanı değişken yerine yazıldığında açık önerme doğru bir önerme oluyorsa bu elemana <i>bilinmeyen</i> adı verilir.
Denklem	Eşitlik bağıntısı içeren açık önermelere verilen isimdir.
Eşitsizlik	" $\leq$ " bağıntısını içeren açık önermeye bir <i>eşitsizlik</i> denir.
Çözüm kümesi	Bir evrensel küme üzerinde ifade edilen bir denklem ya da eşitsizlikteki değişkenlerin yerine konulduğunda denklemin ya da eşitsizliğin doğru bir önerme olduğu evrensel kümenin elemanlarının her birine denklemin ya da eşitsizliğin <i>çözümü</i> ve çözüm olan bu elemanların oluşturduğu kümeye de denklemin ya da eşitsizliğin <i>çözüm kümesi</i> adı

	verilir.
Özdeşlik	Bir denklem, değişkenlerin temsil ettiği evrensel kümenin bütün elemanları tarafından sağlanıyorsa bu denkleme <i>özdeşlik</i> adı verilir.
Aralık	$(A, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $B \subset A$ olsun. Her $a, b \in B$, $a \leq b$ için $a \leq z \leq b$ şartını sağlayan $z \in A$ 'lar B kümesinin de bir elemanı oluyorsa B altkümesine A kümesinde bir <i>kapalı aralık</i> adı verilir ve literatürde $[a, b]$ şeklinde göstermek gelenek haline gelmiştir. $[a, b] \setminus \{a\}$ veya $[a, b] \setminus \{b\}$ kümelerinden her birine A kümesinde bir <i>yarı açık aralık</i> ya da <i>yarı kapalı aralık</i> denir ve sırasıyla $(a, b]$ ve $[a, b)$ ile gösterilir. Ayrıca $[a, b] \setminus \{a, b\}$ kümesine A kümesinde bir <i>açık aralık</i> denir ve (a, b) ile gösterilir. Bu küme çeşitlerinden her birine A kümesinde bir <i>aralık</i> denir.
Polinom	R birimli bir halka, x bir belirsiz, n pozitif bir tamsayı ve $0 \leq i \leq n$ için $a_i \in R$ olmak üzere, $a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ ifadesine x 'e göre R üzerinde tanımlı bir <i>polinom</i> adı verilir. R üzerinde tanımlı polinomların kümesi de toplama ve çarpma işlemiyle birlikte bir halkadır.
Katsayı	R birimli bir halka, x bir belirsiz, n pozitif bir tamsayı ve $0 \leq i \leq n$ için $a_i \in R$ olmak üzere, $a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ polinomunda $0 \leq i \leq n$ için $a_i \in R$ ye bu polinomun <i>katsayıları</i> denir. a_0x^0 da bu polinomun <i>sabit terimidir</i> .
Derece	Bir birimli R halkası üzerinde tanımlı ve $a_n \neq 0$ için $a_0x^0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n$ polinomunda a_i katsayılarının sıfırdan farklı olduğu en büyük i doğal sayısına bu <i>polinomun derecesi</i> denir. Polinom formundaki bir denklemde polinomun derecesine denklemin derecesi adı verilmektedir. $n \geq 1$ olmak üzere n . dereceden polinom formunda olan denklemlere ya da eşitsizliklere n . dereceden denklem ya da n . dereceden eşitsizlik adı verilir.
Kök	Bir birimli R halkası üzerinde tanımlı $R[x]$ polinom halkası ve $a \in R$ olsun. $\varphi_a : R[x] \rightarrow R, \varphi_a(p(x)) = p(a)$ şeklinde tanımlı fonksiyona $R[x]$ üzerinde tanımlanmış bir <i>değer homomorfizması</i> adı verilir. Bir $p(x) \in R[x]$ verildiğinde $\varphi_a(p(x)) = p(a) = 0$ şartını sağlayan R nin a elemanlarına bu $p(x)$ <i>polinomunun kökleri</i> adı verilir.
Diskriminant	$\mathbb{R}$ üzerinde verilmiş ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ formundaki ikinci dereceden bir denklemde $b^2 - 4ac$ reel sayısına bu <i>denklemin diskriminantı</i> adı verilir ve Δ (delta) ile gösterilir.

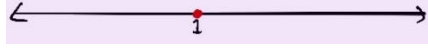
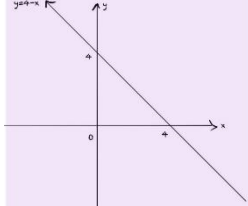
Bu çalışmada polinom kavramına ait olan “derece”, “katsayı” ve “kök” terimleri denklemler için katılımcıların “denklemin derecesi”, “değişkenin katsayısı” ve “denklemin kökü” biçimindeki kullanımları, çalışmada yer alan denklemlerin polinom biçiminde olması ve okul matematiğinde de bu kullanımların kabul görmesinden dolayı matematiksel olarak doğru (kanonik) kabul edilecektir. Bununla birlikte, ortaöğretim müfredatı (MEB, 2018) kapsamında öğrencilerin denklem ve eşitsizlikleri çözme sürecinde kullanmaları

muhtemel cebirsel, sayısal ve grafiksel gerçekleşmelerini temsil eden görsel aracılardan birer rneği ise Tablo 14’te yer almaktadır.



Tablo 14

Polinom Biçimindeki Denklem ve Eşitsizliklere Ait Söylemlerdeki Görsel Aracı Örnekleri

Ne zaman?	Nasıl?			
	Görev durumu örneği	Sözel gerçekleşme	Cebirsel gerçekleşme	Grafiksel gerçekleşme
Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken	“ $11 + 2(x - 3) = 7$ ” denklemini sağlayan reel sayıların çözüm kümesini belirleyiniz.	Denklemini sağlayan reel sayı 1 dir.	$11 + 2(x - 3) = 7$ $\Rightarrow 2(x - 3) = -4$ $\Rightarrow x - 3 = -2$ $\Rightarrow x = 1$ $\Rightarrow \zeta, K = \{1\}$	
Birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken	“ $11 + 2(x - 3) > 7$ ” eşitsizliğini sağlayan reel sayıların çözüm kümesini belirleyiniz.	Çözüm kümesinin elemanları 1'den büyük reel sayılardır.	$11 + 2(x - 3) > 7$ $\Rightarrow 2(x - 3) > -4$ $\Rightarrow x - 3 > -2$ $\Rightarrow x > 1$ $\Rightarrow \zeta, K = (1, \infty)$	
Birinci dereceden iki değişkenli denklemleri çözerken	“ $x + y = 4$ ” denklemini doğrulayan reel sayı ikililerini belirleyiniz.	Denklemin çözüm kümesinin elemanlarının analitik düzlemde gösterimi bir doğru belirtir.	$x + y = 4$ $x = 0 \Rightarrow y = 4$ $y = 0 \Rightarrow x = 4$	

Birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlikleri çözerken

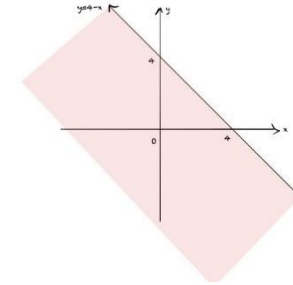
“ $x + y \leq 4$ ” eşitsizliğini doğrulayan reel sayı ikililerini belirleyiniz.

Eşitsizliğin çözüm kümesinin elemanlarının analitik düzlemde gösterimi bir bölge belirtir.

$$x+y=4$$

$$x=0 \Rightarrow y=4$$

$$y=0 \Rightarrow x=4$$



Birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerini çözerken

“ $x + y = 4 \wedge 2x - y = 2$ ” denklem sisteminin reel sayılarda çözüm kümesini belirleyiniz.

Denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanı (2,2) sıralı ikilisi doğruların kesim noktasıdır.

$$\begin{array}{r} x+y=4 \\ 2x-y=2 \\ + \end{array}$$

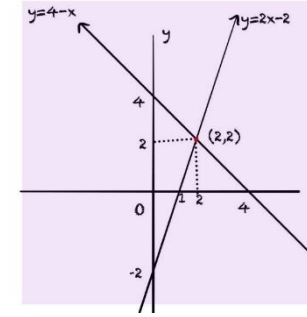
$$3x=6$$

$$\Rightarrow x=2$$

$$x=2 \Rightarrow 2+y=4$$

$$\Rightarrow y=2$$

$$\Rightarrow \zeta.K=\{(2,2)\}$$



Birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlik sistemlerini çözerken

“ $x + y \geq 4 \wedge 2x - y > 2$ ” denklem sisteminin reel sayılarda çözüm kümesini belirleyiniz.

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinin elemanları sistemde yer alan her bir eşitsizliği sağlar.

$$x+y=4$$

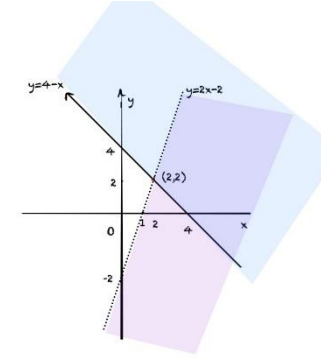
$$x=0 \Rightarrow y=4$$

$$y=0 \Rightarrow x=4$$

$$2x-y=2$$

$$x=0 \Rightarrow y=-2$$

$$y=0 \Rightarrow x=1$$



İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken “ $x^2 - 2x - 3 = 0$ ” denklemini sağlayan reel sayıları belirleyiniz.

Denklemin diskriminantı pozitifse denklemini sağlayan iki farklı reel kök vardır.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

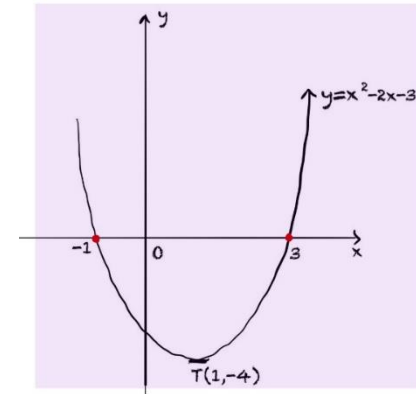
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2} \wedge x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2} \wedge x_2 = \frac{2-4}{2}$$

$$x_1 = 3 \wedge x_2 = 1$$

$$\zeta.K = \{1, 3\}$$



İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken “ $x^2 - 2x - 3 < 0$ ” eşitsizliğini sağlayan reel sayıları belirleyiniz.

$(-1, 3)$ açık aralığında her bir reel sayı bu eşitsizliği doğrular.

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

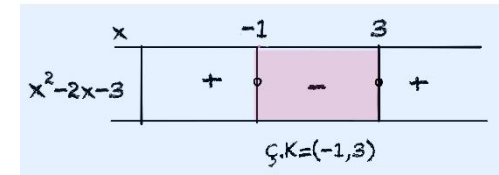
$$x \quad -3$$

$$x \quad 1$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \vee x = -1$$

$$\zeta.K = \{-1, 3\}$$



Bu çalışmada katılımcıların anlatı üretmeyi amaçlayan keşif rutinlerini belirlemek için Tablo 15'te yer alan “kanonik anlatılar” referans alınacaktır. Katılımcıların görsel araçlarıyla da onayladığı anlatıları, bu tabloda yer alan kanonik anlatılara denk olduğunda, rutini keşif olarak kodlanacaktır. Bu çalışmada “kanonik anlatı” ifadesiyle bir anlatının, matematiksel söylemin onaylanmış anlatıları olan tanım, teorem ve ispatları içermesi veya matematiksel olarak doğru olması kastedilmektedir. Uzman görüşü alınarak hazırlanan ve polinom biçimindeki denklem ve eşitsizliklere ait olan kanonik anlatılar ise Tablo 15'teki gibidir:

Tablo 15

Polinom Biçimindeki Denklem ve Eşitsizliklere Ait Kanonik Anlatılar

Kanonik Anlatılar		
Ne zaman?	No	Nasıl?
$\mathbb{R}$ üzerinde verilmiş birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizlikler hakkında konuşurken	1	a, b birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax + b = 0$ şeklinde verilen açık önermeye x değişkenine göre <i>birinci dereceden bir değişkenli denklem</i> denir.
	2	a, b birer reel sayı olmak üzere, eğer $ax + b = 0$ denkleminde $a \neq 0$ ise o zaman denklemin çözüm kümesi bir elemanlıdır (denklemin reel sayılarda tek çözümü vardır/denklemi sağlayan tek bir reel sayı vardır). Denklemin çözümü değişken yerine yazıldığında denklemi doğrular.
	3	a, b birer reel sayı olmak üzere, eğer $ax + b = 0$ denkleminin çözüm kümesi boş küme ise o zaman $a = 0$ ve $b \neq 0$ dır.
	4	a, b birer reel sayı olmak üzere, eğer $ax + b = 0$ denkleminde $a = 0$ ve $b \neq 0$ ise o zaman denklem $0.x + b = 0$ şeklindeki yanlış önermeye denk olur. Bu durumda x değişkeninin temsil ettiği herhangi bir reel sayı için bu eşitlik daima yanlış olduğundan (çelişki) çözüm kümesi boş kümedir. Ç.K. = $\emptyset$ biçiminde gösterilir.
	5	a, b birer reel sayı olmak üzere, eğer $ax + b = 0$ denkleminde çözüm kümesi reel sayıların tamamı ise o zaman $a = 0$ ve $b = 0$ dır.
	6	a, b birer reel sayı olmak üzere, eğer $ax + b = 0$ denkleminde $a = 0$ ve $b = 0$ ise o zaman denklem $0.x + 0 = 0$ şeklindeki doğru önermeye denk olur. Bu durumda x değişkeninin temsil ettiği her reel sayı için bu eşitlik daima doğru olduğundan (totoloji) çözüm kümesi reel sayılardır. Ç.K. = $\mathbb{R}$ biçiminde gösterilir.
	7	a, b birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax + b < 0$, $ax +$

	$b > 0$, $ax + b \leq 0$ ve $ax + b \geq 0$ şeklindeki açık önermelerin her birine x değişkenine göre <i>birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik</i> denir.
8	$\mathbb{R}$ üzerinde verilmiş birinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesi reel sayıların bir altaralığıdır. Aralık bir reel sayılar kümesinin bir altkümesidir. Reel sayılarda boş küme hariç diğer reel sayı aralıkları sonsuz elemanlı bir kümedir.
9	$\mathbb{R}$ üzerinde verilmiş bir eşitsizliğin her iki tarafına herhangi bir reel sayı eklenir ya da çıkarılırsa eşitsizliğin yönü değişmez.
10	$\mathbb{R}$ üzerinde verilmiş bir eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir sayı ile çarpılırsa (bölünürse) eşitsizlik yön değiştirmez. Negatif bir sayı ile çarpılırsa (bölünürse) eşitsizlik yön değiştirir.
11	Her iki tarafı da aynı işaretli olan $\mathbb{R}$ üzerinde verilmiş eşitsizliklerde iki tarafın çarpmaya göre tersi alınırsa eşitsizlik yön değiştirir.
12	a, b, c birer reel sayı, $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olmak üzere, $ax + by + c = 0$ şeklindeki açık önermeye x ve y değişkenlerine göre <i>birinci dereceden iki değişkenli denklem</i> denir. Açık önermeyi doğrulayan (x, y) sıralı ikililerinden oluşan kümeye birinci dereceden iki değişkenli denklemin <i>çözüm kümesi</i> denir.
13	$\mathbb{R}$ üzerinde verilmiş birinci dereceden iki değişkenli bir denklemin çözüm kümesinin elemanlarının analitik düzlemdeki gösterimi düzlemde bir doğru belirtir.
14	a, b, c birer reel sayı, $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olmak üzere, $ax + by + c < 0$, $ax + by + c \leq 0$, $ax + by + c > 0$ ve $ax + by + c \geq 0$ açık önermelerinin her birine $\mathbb{R}$ üzerinde verilmiş <i>birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlik</i> denir. Açık önermelerden her birini doğrulayan (x, y) sıralı ikililerinden oluşan kümeye birinci dereceden iki değişkenli eşitsizliğin <i>çözüm kümesi</i> denir.
15	$\mathbb{R}$ üzerinde verilmiş birinci dereceden iki değişkenli bir eşitsizliğin çözüm kümesinin elemanlarının analitik düzlemdeki gösterimi düzlemde bir “bölge” belirtir.
16	$\mathbb{R}$ üzerinde verilmiş birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlerin çözüm kümesinin elemanları analitik düzlemde gösterilirken açık önermenin “ $\leq$ ” veya “ $\geq$ ” şeklindeki eşitsizlikleri içermesi durumunda düzlemde çizilen doğru üzerindeki noktalar çözüm kümesinin elemanı olduğundan, bu doğru kesikli çizgilerle temsil edilmez.
17	$\mathbb{R}$ üzerinde verilmiş birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlerin çözüm kümesinin elemanları analitik düzlemde gösterilirken açık önerme “ $<$ ” veya “ $>$ ” şeklindeki eşitsizlikleri içermesi durumunda düzlemde çizilen doğru

$\mathbb{R}$ üzerinde verilmiş birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizlikler hakkında konuşurken

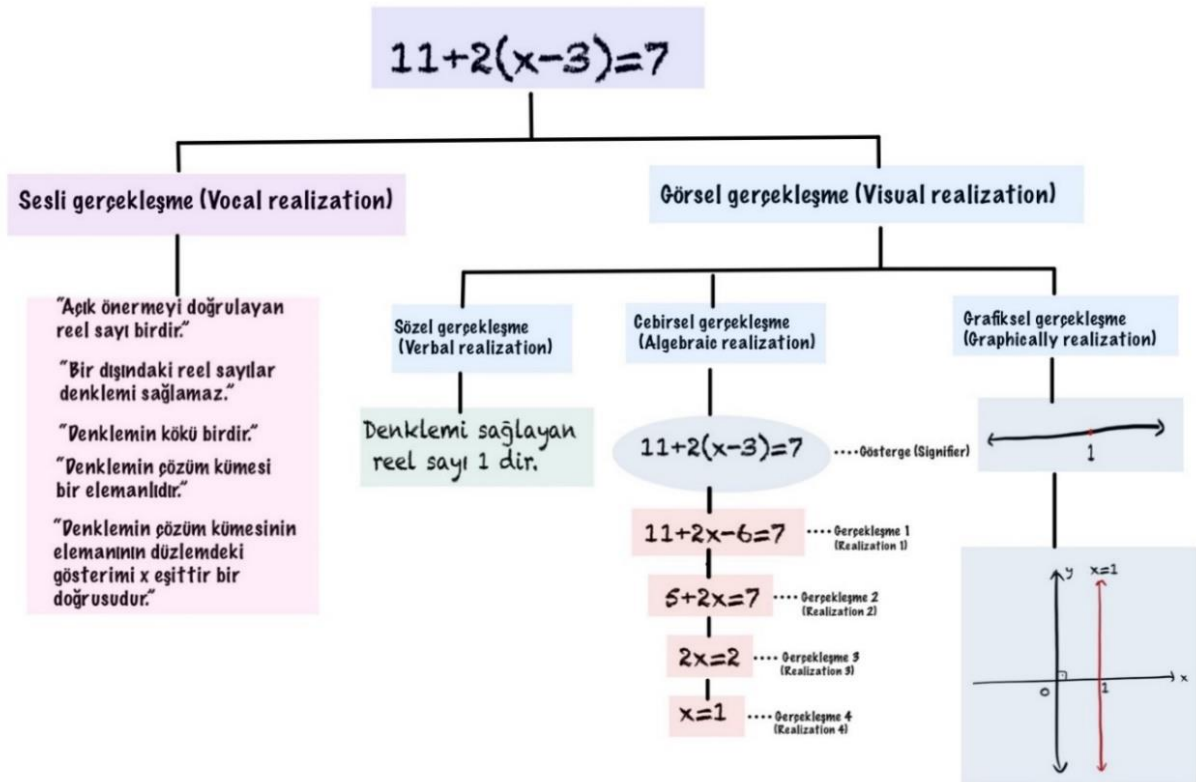
	üzerindeki noktalar çözüm kümesinin elemanı olmadığından, bu doğru kesikli çizgilerle gösterilir.
18	m, n birer reel sayı ve $m \neq 0$ olmak üzere, $y = mx + n$ denkleminin çözüm kümesinin elemanları, analitik düzlemde temsili olan doğrunun üzerindeki noktalardır. $y > mx + n$ eşitsizliğinin çözüm kümesinin elemanlarının görüntüsü $y = mx + n$ doğrusunun ayırdığı üst yarı düzlemdir. $y < mx + n$ eşitsizliğinin çözüm kümesinin elemanlarının görüntüsü $y = mx + n$ doğrusunun ayırdığı alt yarı düzlemdir.
19	Eğer $x < y$ ve $y < z$ ise o zaman $x < z$ dir.
20	a, b, c, d, e, f birer reel sayı ve a, b, c, d sıfırdan farklı olmak üzere, $ax + by + c = 0$ ve $dx + ey + f = 0$ açık önermelerinden oluşan sisteme <i>birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemi</i> denir. İki denklemin de ortak çözümleri olan (x, y) sıralı ikililerden oluşan kümeye <i>denklem sisteminin çözüm kümesi</i> denir.
21	a, b, c, d, e, f birer reel sayı ve a, b, c, d sıfırdan farklı olmak üzere, $ax + by + c = 0$ ve $dx + ey + f = 0$ biçimindeki denklem sisteminde $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ ise denklem sisteminin çözüm kümesi tek elemanlıdır. Denklemlerin düzlemde temsil ettiği doğrular bir noktada kesişir.
22	a, b, c, d, e, f birer reel sayı ve a, b, c, d sıfırdan farklı olmak üzere, $ax + by + c = 0$ ve $dx + ey + f = 0$ biçimindeki denklem sisteminde $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ ise denklem sisteminin çözüm kümesi boş kümedir. Denklemlerin düzlemde temsil ettiği doğrular birbirine paraleldir.
$\mathbb{R}$ üzerinde ifade edilmiş birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizlik sistemleri hakkında konuşurken	23 a, b, c, d, e, f birer reel sayı ve a, b, c, d sıfırdan farklı olmak üzere, $ax + by + c = 0$ ve $dx + ey + f = 0$ biçimindeki denklem sisteminde $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ ise denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır. Denklemlerin düzlemde temsil ettiği doğrular çakışık.
24	En az iki tane birinci dereceden iki değişkenli eşitsizliğin oluşturduğu sisteme <i>birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlik sistemi</i> denir. Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimidir.
25	Birinci dereceden iki değişkenli denklemlerin çözüm kümesinin elemanları (x, y) sıralı ikililerden oluşur. Birinci dereceden iki değişkenli bir denklemin çözüm kümesi düzlemde bir doğru ile temsil edildiğinden sonsuz sayıda (x, y) sıralı ikililerini içerir.
26	Düzlemde iki doğru çakışık ise bu doğruları temsil eden denklemlerinin çözümleri aynı elemanlardan oluşur ve bunların oluşturduğu denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.
27	Düzlemde iki doğru paralel ise bu doğruları temsil eden

	denklemlerin ikisini de sağlayan ortak eleman yoktur ve bunların oluşturduğu denklem sisteminin çözüm kümesi boş kümedir.
	28 Düzlemde iki doğru tek noktada kesişiyor ise bu nokta doğruları temsil eden denklemlerin çözüm kümesinin elemanıdır ve dolayısıyla bu denklemlerin oluşturduğu denklem sisteminin de bir çözümüdür.
	29 Aynı yönlü eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir.
	30 a, b, c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ şeklindeki açık önermeye x değişkenine göre <i>ikinci dereceden bir değişkenli denklem</i> denir. a, b, c reel sayılarına denklemin <i>katsayıları</i> denir.
	31 a, b, c, x birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, eğer $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin sol tarafı bir “tam kare ifadesi” ile yazılabiliyorsa o zaman denklemin var olan iki çözümü birbirine eşittir (denklemin tek çözümü vardır).
	32 a, b, c, x birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $b^2 - 4ac$ reel sayısına denklemin diskriminantı denir ve Δ (delta) ile gösterilir.
$\mathbb{R}$ üzerinde ifade edilmiş ikinci dereceden tek değişkenli denklemler hakkında konuşurken	33 Diskriminant pozitifse ($\Delta > 0$) denklemin $\mathbb{R}$ de iki farklı çözümü vardır ve bu çözüm $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülleriyle elde edilir.
	34 Diskriminant sıfır ($\Delta = 0$) denklemin var olan iki çözümü birbirine eşittir (akışık, çift katlı, eşit) ve bu çözüm $\frac{-b}{a}$ reel sayısıdır.
	35 Diskriminant negatifse ($\Delta < 0$) denklemin $\mathbb{R}$ de çözümü yoktur ve dolayısıyla çözüm kümesi boş kümedir.
	36 a, b, c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, $y = ax^2 + bx + c$ ile verilen bağıntının elamanları analitik düzlemde bir parabol ile temsil edilir. Eğer $a > 0$ ise o zaman temsil eden parabolün kolları yukarıya, eğer $a < 0$ ise o zaman temsil eden parabolün kolları aşağıya doğrudur.
	37 a, b, c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, $y = ax^2 + bx + c$ ile verilen bağıntının grafiğinin (parabolün) en küçük ya da en büyük ordinata sahip olan noktasına <i>tepe noktası</i> denir. Tepe noktası $T(r, k)$ ile gösterilir ve tepe noktasının apsisi $r = \frac{-b}{2a}$ ve ordinatı $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ şeklinde elde edilir.
	38 a, b, c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, eğer $y = ax^2 + bx + c$ ile verilen bağıntının grafiğinde (parabolünde) kollar yukarı yönlü ($a > 0$) ise o zaman tepe noktası $T(r, k)$ için $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun aldığı en küçük değer $k = f(r)$ dir.
	39 a, b, c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, eğer $y = ax^2 + bx + c$ ile verilen bağıntının grafiğinde (parabolünde) kollar aşağı yönlü ($a < 0$) ise o zaman tepe noktası $T(r, k)$ için

		$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun aldığı en büyük değer $k = f(r)$ dir.
	40	a, b, c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, eğer $y = ax^2 + bx + c$ denkleminde $y = 0$ için $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin $\mathbb{R}$ de çözümleri varsa o zaman bu çözümler $y = ax^2 + bx + c$ ile verilen bağıntıyı temsil eden parabolün x eksenini kestiği noktaların apsiseridir. Eğer $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\Delta > 0$ ise o zaman bu parabol x eksenini iki farklı noktada keser, eğer $\Delta = 0$ ise o zaman bu parabol x eksenine teğettir (tek noktada keser, çözümler çakışıktır) ve eğer $\Delta < 0$ ise o zaman bu parabol x eksenini kesmez.
$\mathbb{R}$ üzerinde ifade edilmiş ikinci dereceden iki değişkenli denklemler hakkında konuşurken	41	a, b, c, d, e, f birer reel sayı ve a, b, c reel sayılarından en az ikisi sıfırdan farklı olmak üzere $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ biçimindeki açık önermeye <i>ikinci dereceden iki değişkenli denklem</i> denir. Bu açık önermeyi sağlayan (x, y) sıralı ikililerinin tamamının oluşturduğu kümeye de denklemin <i>çözüm kümesi</i> denir.
	42	a, b, c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$ ve $ax^2 + bx + c \geq 0$ şeklindeki her bir açık önermeye x değişkenine göre ifade edilmiş <i>ikinci dereceden bir değişkenli eşitsizlik</i> denir.
$\mathbb{R}$ üzerinde ifade edilmiş ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sistemleri hakkında konuşurken	43	$ax^2 + bx + c < 0$ eşitsizliği için $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun negatif değer aldığı en geniş kümeye, $ax^2 + bx + c \leq 0$ eşitsizliği için $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun negatif veya sıfır değer aldığı en geniş kümeye, $ax^2 + bx + c > 0$ eşitsizliği için $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun pozitif değer aldığı en geniş kümeye ve $ax^2 + bx + c \geq 0$ eşitsizliği için $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun pozitif veya sıfır değer aldığı en geniş kümeye sırasıyla bu <i>eşitsizliklerin çözüm kümesi</i> denir.
	44	En az biri eşitsizlik olan iki veya daha fazla açık önermeden oluşan sistem eşitsizlik sistemi olarak adlandırılır. Sistemde yer alan eşitsizliklerden en az bir tanesi ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ise bu sisteme <i>ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik sistemi</i> denir. Tüm eşitsizlikleri aynı anda sağlayan çözümlerin oluşturduğu kümeye eşitsizlik sisteminin <i>çözüm kümesi</i> denir.

Commognitive bakış açısına göre denklem ve eşitsizlik kavramları birer matematiksel nesnedir. Sfard (2008) matematiksel bir nesneyi “gerçekleşme ağacı” ile birlikte bir gösterge (signifier) olarak tanımlar. Başka bir deyişle, matematiksel bir nesne gerçekleşme ağacı ile birlikte bir sözcüktür (Tabach & Nachlieli, 2016). Örneğin, denklem ya da eşitsizlik kelimeleri sadece kavramın sözlü gösterim sistemi ile değil, nesneyi oluşturan

gerçekleşmelerin bütünüyle ilgilidir. Bir denklem ya da eşitsizliğin gerçekleştirmeleri arasında; bir açık önerme, bir tablo, bir grafik ya da cebirsel çözüm prosedürleri yer alabilir. Bununla birlikte denklem ya da eşitsizlik matematiksel nesnelere (kavramlarına) ait göstergelerin gerçekleştirmeleri, sesli gerçekleştirme (vocal realization) ya da görsel gerçekleştirme (visual realization) olmak üzere ikiye ayrılabilir. Örneğin “ $11 + 2(x - 3) = 7, x \in \mathbb{R}$ ” ifadesi *denklem için bir gösterge (signifier)* olarak düşünülürse, katılımcının söylemlerinde yer alan “Açık önermeyi sağlayan reel sayı birdir” cümlesi bu göstergenin sesli bir gerçekleştirme olurken, analitik düzlemde $x = 1$ doğrusunun grafiğinin çizilmesi ya da sayı doğrusunda 1’in temsil ettiği yerin işaretlenmesi bu göstergenin görsel bir gerçekleştirme olacaktır. Bu çalışmada öğrencilerin denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait bireysel gerçekleştirme ağaçları verilerin analizinde kullanılacağından “ $11 + 2(x - 3) = 7, x \in \mathbb{R}$ ” göstergesinin olası gerçekleştirmeleri örnek olması açısından Şekil 4’te okuyucuya sunulmuştur.



Şekil 4. “ $11 + 2(x - 3) = 7, x \in \mathbb{R}$ ” göstergesine ait gerçekleştirme ağacı örneği

Gerçekleşme ağaçları katılımcılara özgü olduğundan kişiye ve bağlama bağlı olarak değişiklikler içerir. Şekil 2’de gerçekleşme ağacı örneğinde “ $11 + 2(x - 3) = 7, x \in \mathbb{R}$ ” ifadesi bu gerçekleşme ağacının kökü olarak ele alınabilir. Sfard (2008), gerçekleşmeyi bir göstergesi başka bir birincil nesneyle eşleştiren prosedür veya böyle bir prosedürün ürünü olarak tanımlar. Bu örnekte cebirsel gerçekleşmeyi göz önüne alırsak “ $11 + 2x - 6 = 7$ ” cebirsel ifadesi (gerçekleşme 1), “ $11 + 2(x - 3) = 7, x \in \mathbb{R}$ ” göstergesini başka bir birincil nesneyle (burada “ $11 + 2x - 6 = 7$ ” ifadesi) eşleştiren prosedür olarak düşünülebilir. Artık “ $11 + 2x - 6 = 7$ ” cebirsel ifadesi de bir gösterge rolündedir ve bu örnek için “ $5 + 2x = 7$ ” ifadesi onun bir gerçekleşmesidir. Bu şekilde gösterge-gerçekleşme ilişkisi prosedür sonlanıncaya kadar devam etmektedir. Bu gösterge için prosedürün ürünü olan gerçekleştirmelere örnek olarak Şekil 2’deki grafiksel gerçekleşme ya da sesli gerçekleşme örnekleri de verilebilir. Rutinin bir görev-prosedür çifti olarak ele alındığı bu çalışmada; her bir *görev durumu* katılımcılar için birer gösterge (signifier) rolünde olurken, katılımcıların *prosedürü ve prosedürleri sonucunda ortaya koydukları ürünleri* bu göstergenin gerçekleştirmelerini temsil etmektedir. Bununla birlikte gerçekleşme ağaçlarında yer alan katılımcılara ait gerçekleştirmelerin matematiksel olarak doğru olma zorunluluğu yoktur.

Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Bu nitel araştırmanın geçerlik ve güvenirliği için inandırıcılık (iç geçerlik), aktarılabirlik (dış geçerlik), tutarlılık (iç güvenirlik) ve teyit edilebilirlik (dış güvenirlik) stratejileri kullanılmıştır (Lincoln & Guba, 1985). İnandırıcılık (iç geçerlik) araştırma bulgularının dış dünyadaki gerçekliğe uygunluğuna, aktarılabirlik (dış geçerlik) bir araştırmanın sonuçlarının benzer durumlara ya da ortamlara genellenebilirliğine, tutarlılık (iç güvenirlik) başka araştırmacıların aynı veriyi kullanarak aynı sonuçlara ulaşımaya ve teyit edilebilirlik (dış güvenirlik), araştırma sonuçlarının gerçeği yansıtmaya ve araştırmacının öznel yargılardan ve varsayımlardan uzak olmasına

ilişkindir (Yıldırım & Şimşek, 2013). İnandırıcılık için artırmada uzun süreli etkileşim, sürekli gözlem, çeşitleme (triangulation) ve uzman incelemesi stratejileri kullanılmıştır. Bu çalışmada araştırmacı, araştırmacı-öğretmen rolünde katılımcılarla uzun süreli etkileşim halinde olma fırsatı bulmuş ve olayın gerçekleştiği doğal ortamda katılımcıları doğrudan sürekli gözlemleyebilmiştir. Bununla birlikte bu çalışmada bulguların inandırıcılığını artırmak için veri kaynaklarının ve veri toplama araçlarının çeşitlemesi stratejisi kullanılmıştır. Araştırmanın veri kaynaklarını yarı-yapılandırılmış görüşmeler, ders içi ve ders dışı yapılandırılmamış gözlemler ile yazılı kaynaklar oluşturmuştur. Araştırmanın inandırıcılığını artırmada kullanılan bir diğer strateji ise uzman incelemesidir. Araştırmada tarama formları ve görev durumları ile araştırmacının ders notları hazırlanırken uzman görüşü alınmıştır.

Aktarılabilirlik (dış geçerlik) yani araştırma sonuçlarının benzer gruplara ya da ortamlara transfer edilebilmesi için bu çalışmada araştırmacının rolü, katılımcıların nasıl belirlendiği, katılımcılara ait bilgiler, odak grup görüşmelerin nasıl yapıldığı ve veri analizi detaylı bir şekilde betimlenmiştir. Bununla birlikte araştırmanın amacına uygun bir şekilde katılımcı seçimi ile aktarılabilirlik artırılmaya çalışılmıştır.

Araştırmanın tutarlılığını (iç güvenilirlik) sağlamak için benzer görev durumlarında araştırmacı sorularını benzer bir yaklaşımla sormuş ve görüşmeler kayıt altına alınmıştır. Araştırmanın ham verileri transkript edildikten sonra veri analizinde kullanılan kriterlere göre kodlanmak için tekrar izlenmiştir. Verilerin analizinde kullanılan kriterlerin belirlenmesinde literatürle birlikte araştırmanın ham verilerine de başvurulmuş ve böylece verilerin sonuçlar ile ilişkisi kurulmaya çalışılmıştır. Bu çalışmada teyit edilebilirlik (dış güvenilirlik) için transkriptin ve kodlamanın nasıl yapıldığı detaylı bir şekilde açıklanmış ve veri analizinde dikkate alınan kriter listesi okuyucu ile paylaşılmıştır. Ayrıca araştırma süresinde kayıt altına alınan tüm görüşmeler ve katılımcıların kullandıkları dokümanlar gerektiğinde tekrar ulaşabilmek adına saklanmıştır.

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUM

Bu araştırma ortaöğretim öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik kavramlarına yönelik rutinlerinin yapısını açıklığa kavuşturmayı ve buna bağlı olarak öğrencilerin matematiksel söyleme katılımlarını incelemeyi amaçlamaktadır. Bu çalışmada öğrencilerin söylemsel rutinleri Commognitive bakış açısıyla analiz edilmiş ve rutinin yenilenen “görev-prosedür” ikilisi şeklindeki tanımı (Lavie vd., 2019) esas alınmıştır. Burada “görev” terimi bir katılımcının belirli bir görev durumuna ilişkin yorumuna atıfta bulunmaktadır. Başka bir deyişle görev, katılımcının geçmiş öğrenme yaşantılarını göz önüne alarak, görev durumunda ne yapması ya da yapmaması gerektiğine dair verdiği karardır. Prosedür ise belli bir görev durumunda katılımcının görevini gerçekleştirmek için uyguladığı işlem, yol, yöntem ve sembolik manipülasyonlar gibi eylemlerin tamamıdır. Başka bir deyişle prosedür, katılımcının belli bir görev durumundaki matematiksel söylemlerine dair sesli ve görsel gerçekleştirmelerinin tümüdür. Bu şekilde nesnellikten arındırılan “görev” ve “prosedür” terimlerinin tanımlarına göre bir “rutin” görev durumuna ve görevi gerçekleştiren katılımcıya bağlıdır (Lavie vd., 2019). Bu nedenle bu çalışmanın analiz birimi olan “rutinler” belli bir görev durumunda ve katılımcıya bağlı olacak şekilde betimlenecektir. Bu bağlamda çalışmanın bu bölümünde Elif, Burcu ve Zeynep isimli katılımcıların hem bireysel görüşmede hem de odak grup görüşmelerinde yer alan görev durumlarından elde edilen bulgularına yer verilecektir.

Bu araştırmanın problemi olan “Ortaöğretim öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik kavramlarını içeren görev durumlarında rutinleri, söyleme katılımları ve rutin gelişimleri nasıldır?” sorusuna iki alt problemle yanıt aranacaktır. Bu alt problemlerden ilki olan “Öğrencilerin denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait farklı görev durumlarındaki matematiksel söyleme katılımlarının türü (ritüel ya da keşifsel) nedir ve bu katılım nasıl gerçekleşmektedir?” sorusuna yanıt ararken araştırmanın bulguları aşağıdaki şekilde okuyucuya sunulacaktır:

- ❖ Her bir katılımcı için bireysel görüşme ve odak grup görüşmelerindeki söylemsel rutinlerinin analizi ayrı başlıklar altında verilecektir.
- ❖ Her bir katılımcı için hem bireysel görüşme hem de odak grup görüşmelerindeki bulgular sunulurken,
 - Katılımcının matematiksel söylemlerinden örnekler sunularak “denklem ve eşitsizlik” kavramlarına yönelik tespit edilen rutinleri paylaşılacaktır.
 - Katılımcının elde edilen söylemsel rutinlerinin ne zaman (örneğin, “denklem kavramını tanımlarken” şeklinde) ve nasıl (görev, prosedür, gerçekleşme türü ve tekrarı) olduğunu gösteren bir tablo sunulacaktır. Katılımcıların rutin profilini temsil eden bu tabloda her bir rutin için kod atanacak (örneğin, BG-E1, OG-Z4 gibi) ve rutinler “görev-prosedür” ikilisi şeklinde katılımcıya ve görev durumuna bağlı olarak örneklerle betimlenecektir. Kodlamada kullanılan kısaltmalarda “BG: bireysel görüşme”, “OG: odak grup görüşmesi”, “E: Elif”, “B: Burcu” ve “Z: Zehra” yı temsil edecektir. Bireysel görüşmede gözlemlenen rutinler, odak grup görüşmelerinde de aynı şekilde gözlemlenmeye devam ederse kodu değiştirilmeyecektir. Bununla birlikte ritüel bir rutin keşif rutinine dönüşürse (ya da tam tersi) rutine yeni bir kod atanacaktır. Katılımcının bireysel görüşmede gözlemlenen bir keşif rutini odak grup görüşmelerinde gözlemlenmeye devam edilirse ve anlatılarının kümesi genişlerse (anlatıları

zenginleşirse) bu rutine yeni bir kod verilerek “*” eklenecektir (örneğin, OG-E3*).

- Katılımcıların bulgularından elde edilen söylemsel rutinlerinin amacına göre türü (ritüel ya da keşif) belirlenecektir. Bu belirleme yapılırken süreç odaklı ve amacı iletişimi sürdürmek ya da sosyal bir bağ kurmak olan rutinler ritüel rutin, sonuç odaklı ve amacı “kanonik anlatı” üretmek olan rutinler keşif rutini olarak kodlanacaktır. Burada “kanonik anlatı” terimi, uzman matematikçilerin aynı görev durumu için kullandığı anlatıları (Tablo 15) temsil etmektedir. Katılımcıların görsel araçlarla onayladığı anlatıları, bu kanonik anlatılara denk bir anlatı olduğunda katılımcının rutini keşif olarak kodlanacaktır. Tablo 15’te yer alan kanonik anlatılara atıfta bulunurken “kanonik anlatı” terimi için “KA” kısaltması kullanılacaktır.
- Katılımcıların ritüel ya da keşif olarak belirlenen rutinleri aracılığıyla söyleme katılım biçimlerinin nasıl olduğu (ritüel, hibrit ya da keşifsel) açıklanacaktır. Katılımcıların bulgulardan elde edilen rutinleri ile söyleme katılımlarının nasıl olduğu; söylemin nesneleştirilmesi, esneklik, bağlılık-tutarlılık, gerekçelendirme, katılımcının yetkinliği ve uygulanabilirlik açısından ele alınarak örneklerle açıklanacaktır. Bu süreçte katılımcıların hem matematik nesneler hakkındaki söylemleri hem de söyleme katılanlar hakkındaki (kendisi, arkadaşı, araştırmacı, ders kitabı vs.) kişisel söylemleri dikkate alınacaktır. Katılımın türünün ritüel, hibrit ya da keşifsel olduğu Tablo 12’de yer alan kriterler ve iletişimsel belirleyiciler bağlamında betimlenecektir. Elde edilen sonuçlar bir tabloda paylaşılacaktır.
- Bu adımlar, her bir katılımcı için hem bireysel görüşme hem de odak grup görüşmelerine dair matematiksel söylemleri için yapılacaktır.

Araştırmanın ikinci alt problemi olan “Öğrencilerin bu görev durumlarında ritüelden keşfe geçiş süreçleri nasıl olmaktadır?” sorusuna yanıt ararken ise üç farklı katılımcıdan elde

edilen bulgular tek bir başlık altında örneklerle açıklanacak ve bulgular aşağıdaki gibi okuyucuya sunulacaktır:

- ❖ Her bir katılımcı için bireysel görüşme ve odak grup görüşmelerinden elde edilen söylemsel rutinler, bütüncül bir bakış açısıyla ele alınacaktır.
- ❖ Bir rutinin gelişiminin nasıl olduğu (eğer varsa) görev durumuna ve katılımcılara bağlı olacak şekilde birinci alt problemin yanıtı olan bulgulardan örneklerle izah edilecektir.
- ❖ Bu başlık altında belirli bir görev durumunda, öğrencilerin denklem ve eşitsizlik kavramlarına ilişkin rutin gelişimlerinin nasıl olduğuna yanıt aramak için kriterler bağlamında katılımcıların (varsa) (i) ritüelden keşfe dönüşmekte olan rutinlerine, (ii) giderek anlatılarının zenginleştiği keşif rutinlerine ve (iii) hem bireysel hem de odak grup görüşmesinde aynı türden sergilenen fakat söyleme katılım biçiminde değişim gözlemlenen rutinlerine dair bulgulara yer verilecektir.

Katılımcıların Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarına İlişkin Rutinleri ve Söyleme

Katılımına Yönelik Bulgular

Bu kısımda katılımcıların (Elif, Burcu ve Zehra) bireysel ve odak grup görüşmelerinde gözlemlenen rutinlerine ve katılımcıların bu rutinleriyle matematiksel söyleme katılım biçimlerinin nasıl olduğuna dair bulgulara yer verilmiştir.

Elif'in Bireysel Görüşmelerdeki Rutinleri ve Söyleme Katılımına Yönelik Bulgular

Elif'in 26 farklı görev durumunu içeren ve beş farklı oturumda uygulanan yazılı verileri üzerine katılımcı ile yaklaşık 95 dakika süren bireysel bir görüşme yapılmıştır. Bu bireysel görüşmenin söylemsel analizi sonucunda katılımcıya ait 11 farklı rutin elde edilmiştir. Elif'in denklem ve eşitsizlik içeren 26 farklı görev durumu için sergilediği rutinlerinden

6'sının ritüel, 5'inin ise keşif rutini olduğunu görülmüştür. Katılımcının denklem ve eşitsizlik kavramlarına yönelik rutinleri aşağıdaki durumlarda gözlemlenmiştir:

- Denklem ve eşitsizlik kavramını tanımlarken ya da herhangi bir cebirsel ifadenin birinci dereceden tek değişkenli bir denklem ya da eşitsizlik olduğunu belirlerken (ritüel rutin)
- Değişken kavramını tanımlarken ya da değişkenler hakkında konuşurken (keşif rutini)
- Çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken (keşif rutini)
- Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken (ritüel rutin)
- Birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken (ritüel rutin)
- Denklem ve eşitsizlik sistemi kavramlarını tanımlarken (keşif rutini)
- Birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizlik sistemlerini çözerken (ritüel rutin)
- Çözüm kümesini analitik düzlemde grafik çizme yoluyla belirlemesi istendiğinde, birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizlik sistemlerini çözerken (keşif rutini)
- İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken (ritüel rutin)
- İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken (ritüel rutin)
- İkinci dereceden tek değişkenli denklemlerin çözümlerinin varlığını belirlerken (keşif rutini)

Elif'in bu durumlarda sıklıkla gözlemlenen 11 farklı rutini aracılığıyla söyleme katılım türü incelendiğinde nesneleştirme ve esneklik bağlamında çoğunlukla ritüel bir katılım göstermesine rağmen, bağlılık-tutarlılık, katılımcının yetkinliği ve uygulanabilirlik bağlamında daha keşifsel bir katılım sergilediği görülmüştür.

Odak grup görüşmeleri öncesinde, beş farklı oturumda yazılı olarak toplanan veriler üzerine yapılan bireysel görüşmelerde Elif'ten görev durumlarını nasıl yanıtladığını detaylı bir şekilde paylaşması istenmiştir. Araştırmacının “Denklem ve eşitsizlik kavramlarını

tekrar tanımlar mısın?” sorusu üzerine Elif ile araştırmacı arasında aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

1. A: Denklem ve eşitsizlik kavramlarını tekrar tanımlar mısın?
2. E: [...] denklem dediğimiz şey içinde en az bir bilinmeyen olması gerekiyordu, eşitlik olması gerekiyordu mı eşitsizlik de mı bir denklemin [...] x değeri mesela bir tane değer alabiliyordu çözüm kümesi diyoruz zaten biz buna ama eşitsizlikte ise birden fazla değer alabiliyordu, hatırladığım kadarıyla yani.
3. A: Hı hım.
4. E: Tanımı bu şekilde yapmıştım.
5. A: Evet [...] Eşitsizlik tanımın nedir şimdi? Eşitsizlik için ne düşünüyorsun?
6. E: x 'in belirli bir değer aralığı oluyordu yani belli bir çözüm kümesi oluyordu, birden fazla değer alabiliyordu.

Burada Elif denklemi tanımlamak için “... içinde en az bir bilinmeyen olması gerekiyordu, eşitlik olması gerekiyordu [2]” şeklinde bir söylemde bulunmuş olsa da bireysel görüşme süresince denklem ve eşitsizliği çözüm kümesindeki eleman sayısı ile ilişkilendirerek tanımlamış ve “... denklemin [...] x değeri mesela bir tane değer alabiliyordu, çözüm kümesi diyoruz zaten biz buna ama eşitsizlikte ise birden fazla değer alabiliyordu [2]” biçimindeki anlatısına benzer anlatılar üretmiştir. Katılımcı bu anlatısını bireysel görüşme süresince sıklıkla tekrarlamış ve görsel araçlarla da onaylamıştır. Elif'in denklem ve eşitsizlik tanımına yönelik bu rutini ilk olarak Oturum 1'de yer alan “Denklem ve eşitsizlik kavramlarından anladıklarınızı paylaşınız” sorusuna katılımcının Şekil 5'te verildiği üzere sözel ve cebirsel gerçekleştirmelerde görülmüştür:

1. Denklem ve eşitsizlik kavramlarından anladıklarınızı paylaşınız.

Sözel gerçekleşme

Hatırladığım kadarıyla denklemlerde x değeri bir değer alırdı.

Eşitsizlik $\rightarrow x$ 'in belli bir değer aralığı vardı. Ya da en azından tek bir sonuç yoktu. Denklemi sağlayan birden fazla değer olı. Zaten eşitsizlik oluyor.

Denklem içinde en az bir bilinmeyen olan sabit terim veya katsayı içerebilen eşitlik.

Eşitsizlikte

$$\begin{aligned} -10 &\leq 2x - 2 \leq 6 \\ -8 &\leq 2x \leq 8 \\ -4 &\leq x \leq 4 \\ [-4, 4] \end{aligned}$$

Cebirsel gerçekleşme

Denklem

$$\begin{aligned} 5x + 10 &= 30 \\ 5x &= 20 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Cebirsel gerçekleşme

tek bir değer ver.

Sözel gerçekleşme

birden fazla değer ver.

Sözel gerçekleşme

Şekil 5. Elif'in denklem ve eşitsizlik tanımına dair sözel ve cebirsel gerçekleştirmeleri

Bununla birlikte katılımcıya denklem ve eşitsizlik arasında bir ilişki olup olmadığını konusunda ne düşündüğü sorulduğunda “... orada yazdığım gibi yine çözüm kümesi belirli bir aralığı [...] içinde yani ıı işte dediğim gibi [gülerek kağıdını işaret ediyor] çözüm kümesi belirli bir aralığın içinde ama denklemde ise tek bir cevabı var [12]” yanıtını vermiştir. Oturum 1’de yer alan “Aşağıdaki cebirsel ifadelerden “birinci dereceden bir değişkenli denklem” ya da “birinci dereceden bir değişkenli eşitsizlik” olanları seçiniz. Seçiminizin gerekçelerini açıklayınız.” sorusu üzerine konuşurken de katılımcı benzer anlatılar üretmiş ve görsel araçlarla onaylamıştır. Elif, “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $-3x + \sqrt{7} = 0,5x - 4$ ” cebirsel ifadesi üzerine konuşurken,

18. E: Burada zaten x var sadece [kalemiyle göstererek] ıı yani karşı tarafa attığımız zaman x ’in tek bir değeri oluyor, o yüzden ben buna denklem demiştim.

...

22. E: Yok hayır! ıı yani şey x ’i karşı tarafa attığım zaman x in tek bir değer aldığını gördüm.

...

24. E: ... Buradan x tek bir değer almış ve x ’i yerine yazdığımız zaman denklemi sağlıyor [...]

ıı bu yüzden de bence bu bir denklem.

söylemlerinde bulunmuş ve anlatılarını Şekil 6’da yer verilen sözel ve cebirsel gerçekleştirmeler ile onaylamıştır:

• $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

denkleme

Cebirsel gerçeşleme $-3x + \sqrt{7} = 0,5x - 4$

$\sqrt{7} + 4 = 0,5x + 3x$

$\sqrt{7} + 4 = 3,5x$

Sözel gerçeşleme $\hookrightarrow x = \frac{\sqrt{7} + 4}{3,5}$ $\hookrightarrow$ tek bir değer

• $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

Şekil 6. Elif’in denklem tanımına dair sözel ve cebirsel gerçekleştirmeleri

Burada Elif, birinci dereceden tek değişkenli denklemin çözümünü yapmış ve çözüm kümesini bir elemanlı bulunca cebirsel ifadenin bir denklem olduğu fikrine varmıştır. Benzer bir durum Elif’in “ $x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $x - 9 < 8 + 2x$ ” cebirsel ifadesinin bir eşitsizlik olduğuna karar verme sürecinde de görülmüştür. Katılımcı prosedürünü uygulamış ve çözüm kümesini sonsuz elemanlı bir reel sayı aralığı biçiminde bulunca,

cebirsel ifadenin bir eşitsizlik olduğu kararına varmıştır. Katılımcının bu karar verme sürecinde eşitsizlik tanımına dair anlatısını onaylayan sözel ve cebirsel gerçekleştirmeleri ise Şekil 7’ deki gibidir:

eşitsizlik

$$x - 9 < 8 + 2x$$

..... Cebirsel gerçekleştirme

$$-9 < 8 + x$$

$$-17 < x$$

Sözel gerçekleştirme

$$(-17, \infty)$$

Sonsuza kadar değer alabilir

Şekil 7. Elif’in eşitsizlik tanımına dair sözel ve cebirsel gerçekleştirmeleri

Bireysel görüşme bulgularında Elif’in denklemi “... içinde en az bir bilinmeyen olması ... eşitlik olması gerekiyordu [2]”, “Bir değişken olacak ve eşitlik olması lazım [215]” gibi en az bir değişken ve eşittir sembolünü içeren cebirsel ifadeler olarak tanımladığı anlatılara da rastlanmıştır fakat katılımcı, bu anlatılarını görsel araçlarla onaylamamıştır. Bu nedenle katılımcının “... x değeri mesela bir tane değer alabiliyordu [2]” ve “... denklemde ise tek bir cevabı var [12]” şeklindeki onaylanmış anlatıları katılımcının denklem tanımlama rutini olarak kodlanmıştır. Bununla birlikte eşitsizlik sembollerini ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$) içeren cebirsel ifadelerin de birer eşitsizlik olabileceğini düşünmüş fakat yine karar verebilmek için çözüm kümesini bulmak istemiş ya da çözüm kümesi üzerinden bir karara varmıştır.

72. E: İki aslında burada büyüktür küçüktür işareti olduğu için aklıma eşitsizlik geliyor ama [...] yine de çözüm yapmak istiyorum.

...

82. E: Aslında ediyor yani burada dediğim gibi küçüktür büyüktür [*kâğıt üzerinde sembolü göstererek*] işareti olduğunda direkt eşitsizlik diyebilirim ama sadece sonucunu bulamadığım için belki ikisi birbirine eşit çıkacak, tek bir değer olacak.

...

193. E: Burada direkt aslında büyüktür küçüktür [...] yani ilk bakışta baktığımızda eşitsizlik [...] ve birden çok değer alabiliyor, m ve n var bence eşitsizlik $<m, n \in \mathbb{N} \text{ olmak üzere, } 2m + 3n > 6$ cebirsel ifadesi hakkında konuşurken>

...

215. E: ... yani eğer zaten büyüktür küçüktür işaretleri varsa ve birden fazla değer alabiliyorsa eşitsizlik diyoruz.

Bu durumun başka bir örneğinde ise “ $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(x + 3)(y + 3) = xy + 9$ ” cebirsel ifadesi için Elif aşağıdaki açıklamaları yapmıştır.

28. E: İı burada sonucu x eşittir eksi y bulduğum için buraya y yerine ne yazarsam ya da x yerine ne yazarsam bunun eksilisi çıkacağı için birden fazla tanım yani değer kümesi olacak [...] o yüzden ben buna eşitsizlik dedim [...] ama emin değilim yani.
29. A: Emin değilsin.
30. E: Evet.
31. A: Tek bir reel sayı bulamayacağın için eşitsizlik diye mi düşündün?
32. E: Evet yani kafamda direkt böyle bir tanım olduğu için tanıma göre gitmek istedim.
33. A: Tamam, zihnindeki tanımları tekrar söyleyebilir misin?
34. E: ıı şey, x bir tane değer alıyorsa ve yerine yazdığında sağlıyorsa, hani eşitlik varsa buna denklem dedim ama birden fazla değer alıyorsa da eşitsizlik demişim.

• $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$(x + 3)(y + 3) = xy + 9$

$xy + 3x + 3y + 9 = xy + 9$

$3x = -3y \quad |x = -y$

Şekil 8. Elif’in denklem ve eşitsizlik tanımına dair görsel gerçekleştirmeleri

Burada Elif cebirsel ifadenin eşitlik bağıntısı içermesinden dolayı denklem olması gerektiğini ifade etmesine rağmen, çözüm kümesinin sonsuz elemanlı olmasından dolayı bu cebirsel ifadenin eşitsizlik olabileceğini söylemiştir. Fakat katılımcının açıklamaları, bu düşüncesinden emin olmadığını göstermiş ve katılımcı bireysel görüşmelerde benzer durumlar karşısında aynı kararsızlığını tekrarlamıştır:

170. E: İı aslında eşitlik varsa denklem [...] iki değer alırsa aslında yine eşitlik varsa birden fazla değer alırsa eşitsizlik [*emin gözükmüyor*]
- ...
181. E: Burada da direkt aslında bu sıfırıyor çünkü yani bu iki kare farkı [$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ifadeyi göstererek] sıfırıyor o yüzden sıfır eşittir sıfır o yüzden burada x ve y yerine ne yazarsam yazayım sağlıyor, o yüzden aslında eşitsizlik dedim yani benim tanımına göre eşitsizlik oluyor aslında.

Bununla birlikte araştırmanın bulguları, Elif’in (polinom biçimindeki) denklem ve eşitsizliklere dair “değişken”, “bilinmeyen”, “katsayı” gibi kavramların bağlamsal ayrımında da güçlük yaşadığını göstermiştir. Katılımcı denklem tanımında x, y, z gibi

değişkenler için bazen “... yine eşitlik kullanmış ve tek [...] bir bilinmeyen var en az içinde [14]” söyleminde olduğu gibi “bilinmeyen” ifadesini kullanmıştır. Fakat a, b, c gibi genelleştirilmiş reel sayıları içeren örnekler ile karşılaşınca “ x in ben değişken olduğundan eminim çünkü 9. sınıfta işlediğimize göre [...] yani x değişken çünkü her farklı değeri alabiliyor ama a ve b bilinmeyen [144]” söyleminde bulunmuş ve x ’in değişken olduğunu belirtmiştir. Bireysel görüşme süresince katılımcı değişkeni “her farklı değeri alabilen [144]” biçiminde tanımlamış ve görüşmenin devamında x, y, z gibi harfler için değişken kullanımına devam etmiştir:

168. E: Çünkü eşitlik var yani bir tane değişken var ve bunu karşı tarafa atsak işlemleri devam ettirsek y ’nin bir tane sonuç alabileceğini düşünüyorum. $\langle y \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere, } y^5 - 3y + 1 = 0 \text{ ifadesini hakkında konuşurken} \rangle$

...

185. E: Yine burada [...] x, z ve y yerine zaten bunlar üç değişkenli oluyor.

...

215. E: Bir değişken olacak ve eşitlik olması lazım yani eğer zaten büyüktür küçüktür işaretleri varsa ve birden fazla değer alabiliyorsa eşitsizlik diyoruz.

Bireysel görüşmeler boyunca Elif’in “bilinmeyen”, “katsayı” gibi kavramlar için herhangi bir anlatısına rastlanmamış, katılımcı örnekler üzerinden tutarsız söylemlerde bulunmuştur.

Aşağıda bu durumu örnekleyen anlatıları yer almaktadır:

188. A: Ama yukarıda a ve b ’yi değişken olarak görmedin doğru mu hatırlıyorum?

189. E: Evet.

190. A: Burada x, y ve z ’yi hepsini değişken olarak mı isimlendiriyorsun?

191. E: Evet [gülerek] kendimle çeliştim ama.

199. E: Çünkü [...] m ve n yerine ne yazarsak sonuç farklı gelecek ve ikisi de değişken [...] durumuna geliyor.

...

201. E: Evet ben de onu düşünüyorum şu an [gülerek, düşünceli gözüküyor] Aslında buna göre a ve b de değişken olur, hepsi değişken tekrar tanım değiştiriyorum [gülerek] $\langle m, n \in \mathbb{N} \text{ olmak üzere, } 2m+3n>6 \text{ ifadesi üzerine konuşurken } m \text{ ve } n \text{ den dolayı } a \text{ ve } b \text{ ye de değişken demek zorunda kalıyor} \rangle$

Bununla birlikte bireysel görüşme bulguları Elif’in “değişken” kavramını “her farklı değeri alabilen [144]” biçiminde ürettiği anlatısının, katılımcının bir rutini olduğunu göstermiştir.

Katılımcı rutinini, denklemleri ve eşitsizlikleri çözerken söylemlerinde “... x ’in belirli bir değer aralığı oluyordu ... [6]”, “... x ’in tek bir değeri oluyor [18]”, “... x ve y değerleri var bu iki değişkenli oluyor ... [60]” ve “... zaten bunlar üç değişkenli oluyor [...] yerine ne yazarsam farklı değer alabileceği için ... [185]” şeklinde sıklıkla kullanmıştır. Bireysel görüşme bulguları katılımcının bu anlatısını Şekil 5, Şekil 6 ve Şekil 7’deki gibi görsel araçlarla sıklıkla onayladığını da göstermiştir. Bununla birlikte katılımcı kendi söylemine göre “değişken yerine yazılabilecek değerlerin” denklemin çözümü ya da çözüm kümesinin elemanları olduğunu belirtmiştir. Araştırmacının “... denklemin çözümü ifadesinden ne anlıyorsun? [240]” sorusu üzerine, kağıdındaki çözümünü göstererek “Denklemin çözümü [...] x yani buradaki [*kendi örneğini işaret ederek*] değişken yerine ne yazarsak bu denklemi sağlaması gereken ifade. [241]” biçiminde bir anlatı üretmiştir. Bireysel görüşmeler süresince Elif,

249. E: x yerine bu değeri yazdığımız zaman bu denklemin iki tarafında da sağlaması lazım.

250. A: Sağlamadan kastettiğin şey nedir?

251. E: Eşitliğin iki tarafında da aynı şeyi bulmam lazım.

...

265. E: İki x yerine yazdığımız zaman eşitliğin iki tarafında da aynı şey olursa denklem sağlanmış olur.

...

289. E: Çözüm kümesi bence x yerine ne yazarsak zaten burada reel sayı olduğunu söylemiş, ben burada x yerine ne yazarsam yazayım sağlayacak ...

...

291. E: Yok yani burada x eleman reel sayı olduğunu vermiş, x yerine reel sayılar içinde ne yazarsam yazayım sağlıyor çözüm kümesi reel sayılar.

...

674. E: x yerine eksi biri yazınca denklemi sağlaması lazım [...] yani eşitliğin her iki tarafını da aynı şeyi bulmam lazım.

şeklinde söylemlerde bulunmuş ve denklemin çözümü ile ilgili “değişken yerine ne yazarsak bu denklemi sağlaması gereken ifade” anlatısını sesli gerçekleştirmelerle onaylamıştır. Bu anlatısını görsel araçlarla da benzer şekilde sıklıkla onaylayan Elif, Oturum 2’de yer alan “Denklemin çözümü ifadesinden anladıklarınızı örneklerle

açıklayınız” şeklindeki görev durumuna Şekil 9’daki gibi sözel ve cebirsel gerçekleştirmeleri içeren bir yanıt vermiştir:

Şekil 9. Elif’in “denklemin çözümü” tanımına dair görsel gerçekleştirmeleri

Bununla birlikte katılımcı “ $m \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ” olmak üzere $(m+1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$ ” biçimindeki ikinci dereceden tek değişkenli denklem için çözüm kümesinin elemanlarından birinin -1 olduğunu gerekçelendirirken Tablo 16’daki prosedürünü uygulamıştır.

Tablo 16

Elif’in “Denklemin Çözümü” Kavramına Dair Prosedürü

Ne söylüyor?	Ne yapıyor?
674. E: x yerine eksi biri yazınca denklemi sağlaması lazım [...] yani eşitliğin her iki tarafını da aynı şeyi bulmam lazım.	
...	
676. E: Yazayım [göstergeyi yazarak] x yerine eksi bir yazacağım. Burası m artı bir oldu, o zaman burası eksi iki m , artı m eksi bir eşittir sıfır (gerçekleşme 1) yani bunun sıfıra eşit olması lazım. Bu da şöyle olur şu birler gitti [kalemle üzerini çizer gibi yaparak] m eksi iki m artı m (gerçekleşme 2) sıfır oldu. Yani sıfır eşittir sıfır (gerçekleşme 3) sağladı, o yüzden eksi bir çözüm kümesinin elemanlarından biridir.	

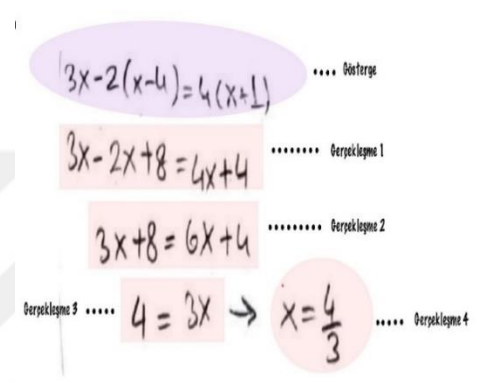
Bireysel görüşmede denklemleri ve eşitsizlikleri çözme sürecinde Elif, dağılma işlemini uygularken “içeriye dağıtmak”, ters işlemleri uygularken “karşı tarafa atmak/göndermek”, paydaları eşitlerken “genişletmek” gibi eylem içeren ifadelerle birlikte matematiksel nesneler için “o”, “bu”, “şu” gibi zamirleri sıklıkla kullanmıştır. Katılımcının bireysel

görüşmede denklem ve eşitsizlikleri çözerken uyguladığı prosedürün örnekleri Tablo 17’de yer almaktadır.

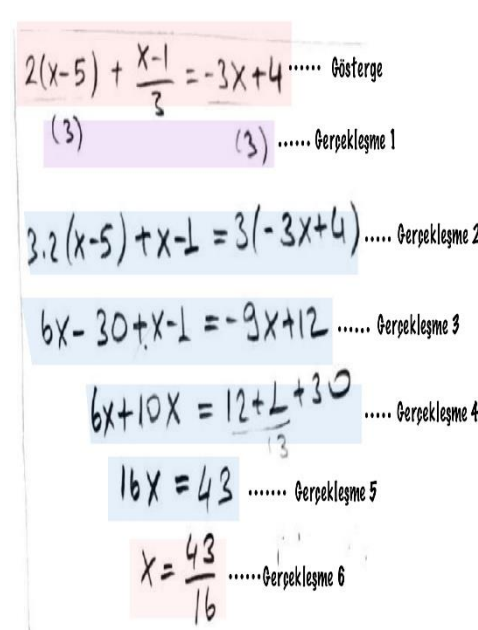
Tablo 17

Elif’in Denklemleri ve Eşitsizlikleri Çözme Prosedürü

Oturum 2- Görev Durumu 2: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $3x - 2(x - 4) = 4(x + 1)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.”

Ne söylüyor?	Ne yapıyor?
243. E: İıı burada şöyle yaptım, direkt parantezleri dokunmuyoruz, ikiye içeriye dağıttım, üç x eksi [...] eksi ikiye içeri dağıttım ve dağıtıp çarptığım zaman eksi iki x artı sekiz [...] eşittir bunu içeri dağıtıyorum dördü (A: Hı hı) dört x artı dört oldu (gerçekleşme 1) ııı burada iki x ’i karşı tarafa gönderdiğimiz zaman ııı toplama yani artı duruma geçtiği için altı x oldu [...] altı x artı dört eşittir üç x artı sekiz (gerçekleşme 2) ııı burada eksi üç x olarak karşıya geçti, üç x eşittir dört oldu (gerçekleşme 3) bunu da karşıya attım, buradan da x eşittir, yine burada çarpım durumunda olduğu için [gerçekleşme 3’teki 3 ü işaret ederek] bölüm olarak karşıya geçtiğinde x eşittir dört bölü üç (gerçekleşme 4).	

Oturum 2- Görev Durumu 3: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $2(x - 5) + \frac{x-1}{3} = -3x + 4$ denklemini sağlayan reel sayıları belirleyiniz.”

Ne söylüyor?	Ne yapıyor?
255. E: Bunların $[2(x - 5)]$ ifadesini kast ederek aslında paydası bir, o yüzden bunu üçle genişletmem lazım, bunu da $[-3x + 4]$ ifadesini kast ederek üçle genişletebiliriz (gerçekleşme 1). Burada direkt [...] aslında şöyle [...] üç çarpı iki [parantez koyarak] x eksi beş artı x eksi bir [...] bunu da şöyle üç parantez içine almam lazım (A: Hı hı) eksi üç artı dört oldu (gerçekleşme 2).	
257. E: Paydaları yazmaya gerek yok çünkü eşitler, çünkü paydaları eşit [...] yani üslerle [...] üsleriyle işlem yapıyoruz.	
261. E: Burası içeri dağıtayım mı direkt (A: Hı hı) altı x eksi otuz oldu [...] burası da x eksi bir eşittir eksi dokuz x artı on iki (gerçekleşme 3). Burada karşı tarafa atıyorum x ’leri bir tarafa toplayacağım. Burası da on x oldu. On x eşittir on iki artı bir artı otuz oldu [...] doğru mu yaptım? [şüphelenerek] on x bir de şurada altı x var [Gerçekleşme 4 adımına 6x ifadesini sonradan ekliyor] (gerçekleşme 4). Burada onaltı x eşittir ııı kırk dört [...] ııı kırk üç, (gerçekleşme 5) x eşittir kırk üç bölü on altı geldi (gerçekleşme 6).	

Oturum 2- Görev Durumu 6: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} > 1$ eşitsizliğinin çözümlerini belirleyiniz.”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

297. E: Burada yine önce paydaları eşitleyeceğim [...] burayı üçle burayı ikiyle genişletirsem (gerçekleşme 1), burası da altıyla genişletmem lazım biri [...] o zaman şöyle olur iki x eksi üç parantezinde x eksi dört büyüktür altı oldu ((gerçekleşme 2) iki x eksi üç x artı on iki büyüktür altı (gerçekleşme 3).

299. E: Eksi üçü içeriye dağıttım, 111 büyüktür altı oldu. Burada eksi x karşı tarafa attığım zaman büyüktür eksi altı (gerçekleşme 4) [...] burada her tarafı eksiyle çarparsam, işaret yön değiştirir x küçüktür altı (gerçekleşme 5).

301. E: Burada bana reel sayılar olarak belirttiği için [$x \in \mathbb{R}$ ifadesini göstererek] yani aslında belli bir değer aralığında olduğu için bana zaten bunu söylemesi gerekiyordu [...] x küçüktür altıymış o zaman şöyle olur [yazmaya başlıyor] eksi sonsuz [...] şöyle (gerçekleşme 6).

303. E: 111 sonsuzun çünkü belli bir [...] 111 sonsuz adı üstünde çünkü o yüzden kapalı diyemem belli bir sonu yok çünkü, altı da aynı şekilde, yani burada küçüktür, küçük-eşittir olsaydı kapalı yazardım ama küçüktür dediği için açık yazdım (gerçekleşme 6).

$$\frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} > 1 \quad \text{..... Gösterge}$$

$$\Rightarrow 2x - 3(x-4) > 6 \quad \text{..... Gerçekleşme 2}$$

$$2x - 3x + 12 > 6 \quad \text{..... Gerçekleşme 3}$$

$$-x > -6 \quad \text{..... Gerçekleşme 4}$$

$$x < 6 \quad \text{..... Gerçekleşme 5}$$

$$(-\infty, 6) \quad \text{..... Gerçekleşme 6}$$

Oturum 2- Görev Durumu 7: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x - 1 \leq 5 - x < 8 + 3x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini aralık olarak ifade ediniz.”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

305. E: Evet tamam, 111 burada ikiye ayırdım [...] ihhh çünkü burada hepsini bir anda götüremiyorum yani x karşıya attığım zaman [...] 111 olmuyor yani. x eksi bir küçük-eşittir beş eksi x ve beş eksi x küçüktür sekiz artı üç x (gerçekleşme 1).

315. E: Buradan devam [...] [bir an duraksıyor ve kararsız kalıyor] tamam edeyim [yazmaya başlıyor] burada böyle [...] ha tamam [tekrar yazıyor] x 'i karşıya attığım zaman iki x küçük-eşittir altı oldu (gerçekleşme 2) [...] x küçük-eşittir üç oldu (gerçekleşme 3). [...] iki karşı tarafa bölüm olarak geçti, altı bölü ikiden üç geldi (gerçekleşme 4).

317. E: Buradan da karşıya attığımız zaman [...] 111 sekizi karşıya atıyorum, eksi üç küçüktür dört x oldu (gerçekleşme 5), eksi üç bölü dört eşittir x (gerçekleşme 6).

319. E: Evet [çözümüne bakıyor] bu şekilde yaptım, sonra buradan değer aralığını belirledim. Buradaki gibi [önceki çözümünü işaret ederek] bu eksi üç bölü dört küçüktür x 'ten, o zaman ve x de [...] şöyle olması lazım [aralık yazıyor] o zaman böyle değer aralığı olur, x açık eksi üç bölü dört, üç kapalı (gerçekleşme 7).

$$x - 1 \leq 5 - x < 8 + 3x \quad \text{..... Gösterge}$$

$$x - 1 \leq 5 - x \quad \text{..... Gerçekleşme 1}$$

$$2x \leq 6 \quad \text{..... Gerçekleşme 3}$$

$$x \leq 3 \quad \text{..... Gerçekleşme 4}$$

$$5 - x < 8 + 3x \quad \text{..... Gerçekleşme 2}$$

$$-3 < 4x \quad \text{..... Gerçekleşme 5}$$

$$-\frac{3}{4} < x \quad \text{..... Gerçekleşme 6}$$

$$(-\frac{3}{4}, 3] \quad \text{..... Gerçekleşme 7}$$

Oturum 4- Görev Durumu 4: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x^2 + x - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.”

Ne Söylüyor?

Ne yapıyor?

657. E: Tamam [...] burada en başta çarpanlarına ayırmayı denemiştir büyük ihtimalle [denklemi yazıyor] iki x 'e x ayırsam (gerçekleşme 1) ıı üçe bir [...] [kağıdındaki çözümü inceliyor] şöyle olur artı x dediği için [1 in başına – koyarak] (gerçekleşme 2) tamam şu şekilde çarptığımız zaman sağlıyor [çarpı işareti koyarak] iki x artı üç çarpı, x eksi bir eşittir sıfır (gerçekleşme 3).

659. E: ... O zaman iki x artı üç eşittir sıfır (gerçekleşme 4), iki x eşittir eksi üç (gerçekleşme 5), x eşittir buradan ya eksi iki bölü üç gelir (gerçekleşme 6), ya da x eşittir bir gelir (gerçekleşme 7).

661. E: Çözüm kümesini burada tek bir şey içinde yazabilirim ya bir ya da eksi üç bölü iki (gerçekleşme 8).

Handwritten solution for the quadratic equation $2x^2 + x - 3 = 0$. The student uses the cross-multiplication method (çarpma yöntemi). They write $2x^2 + x - 3 = 0$, then cross-multiply to get $(2x+3)(x-1) = 0$. This leads to two cases: $2x+3=0$ and $x-1=0$. Solving these gives $x = -3/2$ and $x = 1$. The final solution set is given as $C.K = \{1, -3/2\}$.

Elif'in görsel araçları incelendiğinde “=” sembolü içeren en az iki cebirsel ifadeyi denklem sistemi, “<, >, ≤, ≥,” sembollerini içeren en az iki cebirsel ifadeyi eşitsizlik sistemi olarak tanımladığı görülmüştür. Denklem ve eşitsizlik tanımlarının aksine Elif, bir cebirsel ifadenin denklem ya da eşitsizlik sistemi olup olmadığını belirlerken çözüm yapması gerekmediğini, “ $x, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{1}{x+2} - 2z = 9$ ve $\frac{x}{x+2} + 4z = -18$ ” cebirsel ifadesi hakkında konuşurken “Kafamda net olan şeyler [...] birincisi eşitlik varsa hani denklem diyorum ama burada x ve z var mesela bunların değerini bulamasam bile bence denklem sistemidir, aynı şekilde büyüktür küçüktür işaretleri sembolleri olduğu zamanda eşitsizlik sistemi diyorum [489]” ifadeleriyle belirtmiştir. Şekil 10'daki gibi kağıdında bir çözüme ulaşamadığı görülen katılımcı ile araştırmacı arasında aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

371. A: Hımm tamam sıradakine geçelim. Sıradaki [$x, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{1}{x+2} - 2z = 9$ ve

$\frac{x}{x+2} + 4z = -18$] ifadesini göstererek] için ne düşünüyorsun?

372. E: Bu da bence bir denklem sistemi.

373. A: Neden öyle düşündün?

374. E: Çünkü işlemleri yaptığımız zaman ... x 'leri ve z 'leri ayrı ayrı götürdüğümüz zaman x ve z 'yi ayrı ayrı bulabiliriz.

...

378. A: Peki şu an burada (*Şekil 10'u göstererek*) bulamamışsın, diyelim ki x 'i bulamadın (*E:*

Hı hı) sadece z 'yi buldun-

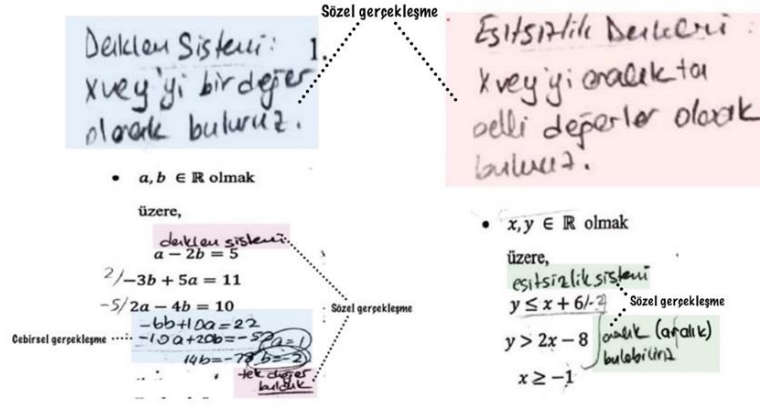
379. E: z 'yi yerine koyarak x 'i bulabilirim.

• $x, z \in \mathbb{R}$ olmak
üzere, $\frac{1}{x+2} - 9 = 2z$
 $\frac{1}{x+2} - 2z = 9$
 $\frac{2}{x+2} - 18 = \frac{-18 - x}{x+2}$
 $\frac{x}{x+2} + 4z = -18$
 $2 - 18x - 36 = -18x - 36 - x$
buladın

Şekil 10. Elif'in " $x, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{1}{x+2} - 2z = 9 \wedge \frac{x}{x+2} + 4z = -18$ " biçimindeki cebirsel ifadesine yönelik görsel araçları

Burada Elif çözüme ulaşamamış fakat işlemleri yapabilmiş olsa x ve z için bir reel sayı karşılığını bulacağını ve bundan dolayı bu cebirsel ifadenin denklem sistemi olduğunu belirtmiştir. Bununla birlikte Elif bir cebirsel ifadenin denklem ya da eşitsizlik sistemi olabilmesi durumunu ifade ederken, "... birden fazla eşitsizlik vermiş ve bunlar [*değişkenleri kastederek*] arasında aslında bir ilişki var, o yüzden bence biz buna eşitsizlik sistemi diyoruz. Ama eşitsizlikte mesela bir tane eşitsizlik verir, o şekilde [413]", "Birden fazla eşitsizlik olmalı ve değişkenleri ilişkili olmalı ki sistem olsun yani [415]" ve "... yani sistem olduğu zaman birden fazla olmalı ve bu işaretler büyüktür küçüktür yine kullanılmalı ve birden fazla olmalı sistem diyebilmemiz için bunlar (*değişkenler*) ilişkili olmalı [493]" şeklinde söylemlerde bulunmuştur. Katılımcı, "... bunlar [*değişkenleri kastederek*] arasında aslında bir ilişki var ...", "... değişkenleri ilişkili olmalı ki sistem olsun ..." ve "... bunlar (*değişkenler*) ilişkili olmalı ..." şeklindeki ifadelerini, aslında denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözümünün varlığından bahsedilebilmesi için kullanmıştır. Bu durumun bir örneğinde Elif, araştırmacının "Denklem ve eşitsizlik sistemi kavramlarından ne anlıyorsun?" sorusunu "... çünkü bir eşitlik var ve iki değişkeni var ve buradan gönderdiğimiz zaman [...] işlemleri yaptığımız zaman x 'i ve y 'yi bir değer olarak bulabiliriz, yani değişkenler ilişkili. Bu yüzden de bence bu bir denklem sistemidir. [331]" ve "Çünkü x ve y 'nin aralıkları var ve farklı sayılar alabilir [...] küçüktür, büyüktür

sembolleri kullanılmış, o yüzden bence eşitsizlik sistemi. [459]" gibi açıklamalar yapmıştır. Elif'in bireysel görüşme öncesi kağıdındaki yanıtları incelendiğinde, bu anlatısını Şekil 11'deki gibi görsel araçlarla onaylamıştır.



Şekil 11. Elif'in denklem ve eşitsizlik sistemi tanımına dair görsel araçları

Katılımcının denklem sistemi çözümleri incelendiğinde ise değişkenlerin birer reel sayı karşılığını bulmak amacıyla taraf tarafa toplama yaparak prosedürünü başlattığı görülmüştür. Elif prosedürünü gerçekleştirirken matematiksel nesneler için işaret zamirlerini ve aynı değişkene ait katsayıların toplamını sıfıra eşitleme işlemi için “götürmek/gitmek” fiilini sıklıkla kullanmıştır:

333. E: İki burada x [...] yani taraf tarafa toplayabilirim, önce mesela x 'leri götürmek için bir bölü beşle çarpsam ve bunları (denklemleri) karşılıklı toplayarsam bunlar (x değişkeni) gider [...] ııı burada şey y 'nin değerini bulurum, aynı şeyi [...] urayı mesela eksi kök üçle çarpsam, burayı da dörtle çarpsam yine y 'ler birbirini götürür (A : *Evet*) ve buradan da x 'leri bulabilirim.

...

341. E: Bunun için de aynı şey götürdüğümüz yani işlemleri yaptığımız zaman b 'yi eksi bulmuşum.

342. A: Götürmekten kastettiğin şey nedir?

343. E: Yani beş a eksi beş a eşittir sıfır [...] yani a 'lar gidiyor [...] yani denklem sistemimde a 'lar gidiyor sadece b 'ler kalıyor. Bu yüzden de a ile b 'yi ayrı ayrı bulabiliriz. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a - 2b = 5 \wedge -3b + 5a = 11 \wedge 2a - 4b = 10$ eşitliklerin çözümü hakkında konuşurken>

...

517. E: Taraf tarafa toplarken birbirlerini götürmesi için.

518. A: Peki birbirini götürmesi ne anlama geliyor?

519. E: Birbirini sıfırlıyor yani y ortadan kalkıyor aslında.

Elif'in denklem sistemi çözümü prosedürüne dair bir örneğe ise Tablo 18'de yer verilmiştir.

Tablo 18

Elif'in Birinci Dereceden İki Değişkenli Denklem Sistemine Dair Prosedürü

Oturum 3- Görev Durumu 2: " $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$5x + 3y = 7$$

$$y - 2x = -5$$

denklem sisteminin çözüm kümesini yok etme metodunu kullanarak bulunuz."

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

511. E: İki taraf tarafa toplayarak [...] yani öncelikle burada [*kâğıdın üzerinde kalemle işaret ederek çözümünü açıklıyor*] ikiyle çarpmışım burası on x oldu burada eksi on x [*gerçekleme 2'yi göstererek*].

513. E: Birbirine [...] eksilisine eşitleyerek topladığım zaman birbirlerini götürmesi için.

515. E: O yüzden de iki ile çarpmışım, beşle çarpmışım [*gerçekleme 1'i göstererek*] burada hani on x eksi on x daha sıfır olduğu için [...] burada y değerini buldum [*gerçekleme 3'ü göstererek*] daha sonra aynı şeyi [...] tekrar yok etme metodunu kullanarak x için yapabilirim. Burayı mesela eksi üçle çarparsam üç y eksi üç y birbirini götürür [*gerçekleme 4'ü göstererek*] toplarken, o şekilde.

525. E: Çözüm kümesi için [...] yine ayrı ayrı demem lazım yani [...] x için çözüm kümesi eşittir x 'i iki bulmuşum [*gerçekleme 5'i göstererek*], y için de yine böyle olması lazım y 'yi de eksi bir [*gerçekleme 3'ü göstererek*] bulmuşum [...] bence çözüm kümesi böyle olmalı [*gerçekleme 6'yı göstererek*] çünkü ikisini de aynı şeye yazarsam, x için hem iki hem eksi bir, y için hem iki hem eksi bir olacağı için olmaz.

Gerçekleşme 1: $2/5x + 3y = 7$ Gösterge

Gerçekleşme 2: $10x + 6y = 14$
 $+ 5y - 10x = -25$
 $11y = -11$

Gerçekleşme 3: $y = -1$

Gerçekleşme 4: $5x + 3y = 7$
 $-3/ -3y + 6x = 15$
 $11x = 22$

Gerçekleşme 5: $x = 2$

Gerçekleşme 6: $x \rightarrow C.K. = \{2\}$
 $y \rightarrow C.K. = \{-1\}$

Katılımcı bir başka denklem sisteminin çözüm kümesini, analitik düzlemde grafik çizimi yoluyla bulması istendiğinde rutini sözel, cebirsel ve grafiksel gerçekleştirmeler aracılığıyla sergilemiş ve bu görsel araçlarla onayladığı anlatılar üretmiştir:

531. E: Çünkü şey [*yazmaya başlıyor*] koordinat sisteminde [*koordinat sistemi çizerek*] x ve y ikilisini yazmaya çalışıyorum [...] doğruyu çizmeye çalışıyorum çünkü [...] o yüzden de x için sıfır verdiğimiz zaman burada y eşittir eksi iki gelir [*kâğıdındaki çözüm üzerinden konuşuyor*] yani sıfıra eksi iki olması lazım [$(0, -2)$ ifadesini yazıyor] o yüzden eksi iki [*y koordinatında*]

işaretliyor] aynı şekilde y 'ye sıfır verdiğimiz zamanda x 'in altı olması lazım [*koordinat düzleminde 6 sayısını temsilen işaretleme yapıyor*].

...

537. E: Çünkü ııı eksenleri kestiği noktayı bilirim ($A: h_1 h_2$) doğruyu çizebilirim.

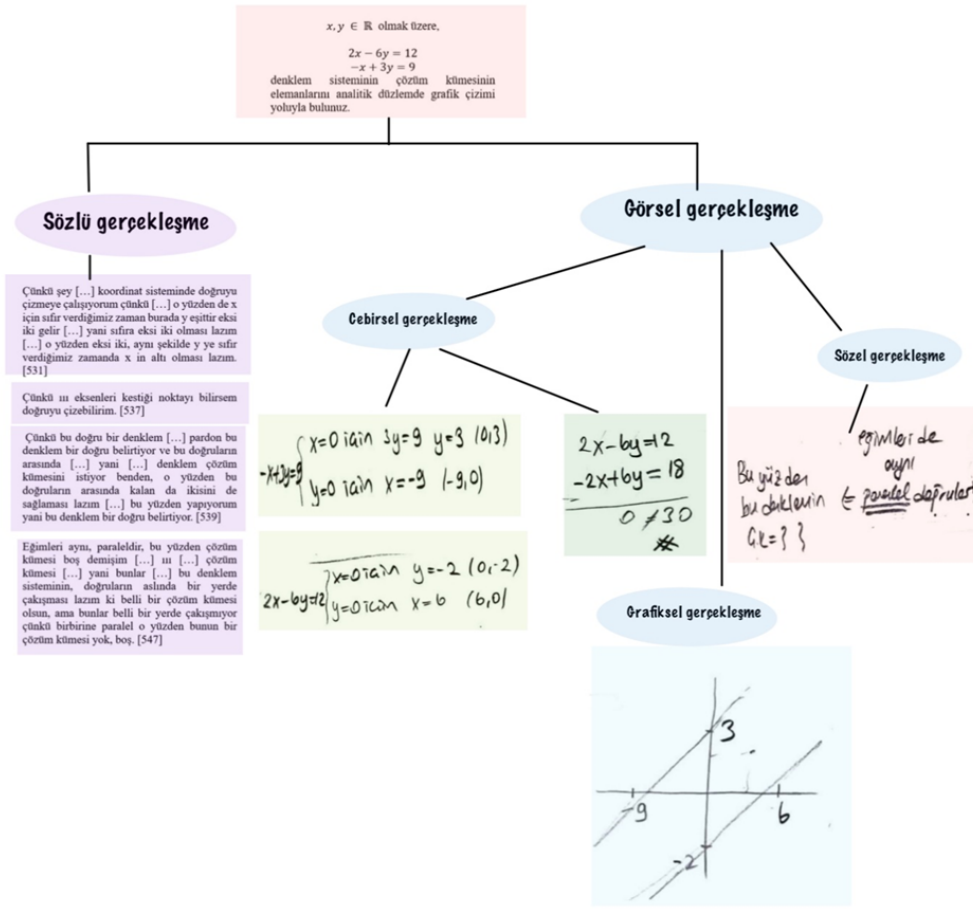
...

539. E: Çünkü bu doğru bir denklem [...] pardon bu denklem [*kalemiyle görev durumundaki denklemleri göstererek*] bir doğru belirtiyor ve bu doğruların arasında [...] yani [...] denklem çözüm kümesini istiyor benden [*“çözüm kümesinin” ifadesinin altını çizerek*] o yüzden bu doğruların arasında kalan da ikisini de sağlaması lazım [...] bu yüzden yapıyorum yani bu denklem bir doğru belirtiyor.

...

547. E: İşte doğruyu çizmişim $[(0, -2)$ ve $(6, 0)$ noktalarından geçen doğruyu çizerek] burada da aynı şekilde x yerine sıfır verip y 'yi bulduğum zaman üç gelmiş [*işaretleyerek*] aynı şeyi diğeri içinde yaptığımda böyle buldum [$(-9, 0)$ ve $(0, 3)$ noktalarından geçen doğruyu çizerek] ııı ve bu ikisi arasında kalan [...] bundan sonrasını bulamadım sanırım [*çözümünü okuyor*] eğimleri aynı, paraleldir, bu yüzden çözüm kümesi boş demişim [...] ııı [...] çözüm kümesi [...] yani bunlar hah tamam [*nasıl yaptığını hatırlayarak*] bu denklem sisteminin, doğruların aslında bir yerde çakışması lazım ki ııı belli bir çözüm kümesi olsun ($A: H_1 H_2$) ama bunlar [*çizdiği doğrulara işaret ederek*] belli bir yerde çakışmıyor çünkü birbirine paralel o yüzden bunun bir çözüm kümesi yok, boş.

Elif'in " $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x - 6y = 12 \wedge -x + 3y = 9$ denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarını analitik düzlemde grafik çizimi yoluyla bulunuz." görev durumuna ait bu söylemlerindeki anlatılarını ve anlatılarını onaylayan görsel araçları içeren gerçekleşme ağacı Şekil 12'de yer almaktadır:



Şekil 12. Elif'in Oturum 3'teki görev durumu 3'e ait gerçekleştirme ağacı

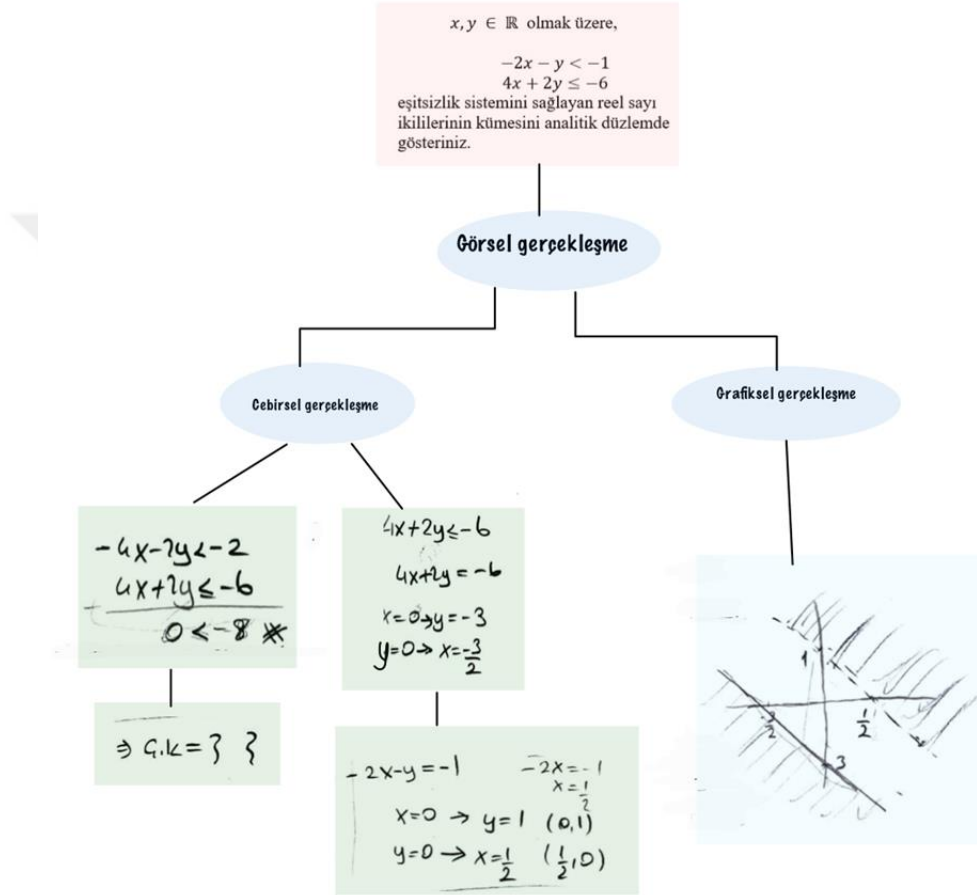
Katılımcı “ $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $-2x - y < -1 \wedge 4x + 2y \leq -6$ eşitsizlik sistemini sağlayan reel sayı ikililerinin kümesini analitik düzlemde gösteriniz.” görev durumunda da yine koordinat sisteminde doğruları çizerek prosedürü uygulamış ve “Burada önce bunu bir doğru olarak kabul ediyorum, sonra x için sıfır yazıp y yi yine bir buluyorum, bildiğimiz hani doğru denklemi yazıyorum [grafikleri göstererek] doğru çizmeye çalışıyorum” [569] söyleminde bulunmuştur. Elif araştırmacının “Peki neden böyle yaptığını biliyor musun?” sorusuna,

571. E: Hayır direkt yani [...] hatta bunu gelmeden önce videoda izlemiştim, direkt bu şekilde yapılmıştı. Yani mesela küçüktür var [$-2x - y < -1$ ifadesini göstererek] küçük-eşittir [$4x + 2y \leq -6$ ifadesini göstererek] olsaydı buradaki gibi düz çizgi çekecektim [$4x + 2y = -6$ doğrusunun üzerinden geçiyor] ama küçük olduğu için hani noktalı noktalı yaptım [$-2x - y = -1$ doğrusunun üzerinden geçiyor]

572. A: Peki ne tarafı tarayacağına nasıl karar veriyorsun?

573. E: Burada orijini sağlıyorsa altı almam gerekiyordu ya da y 'yi [...] pardon y 'yi karşı taraf attığım zaman eksi iki x artı bir küçüktür y olduğu için y 'nin yukarısını alıyorum [$-2x - y = -1$ doğrusunun sağını tarayarak] yani bu şekilde.

yanıtını vermiştir. Şekil 13'te ise katılımcının bu görev durumuna ait kağıdında yer alan çözümün görsel gerçekleştirmelerini içeren gerçekleştirme ağacına yer verilmiştir.

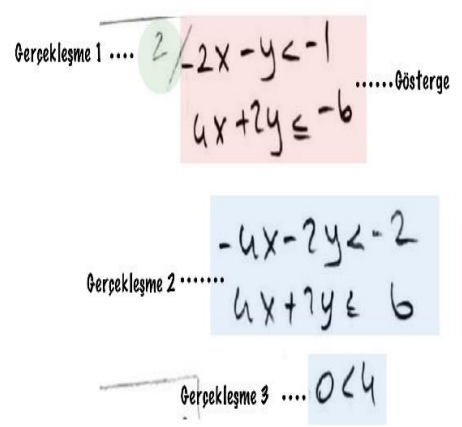


Şekil 13. Elif'in Oturum 3'teki eşitsizlik sistemi çözümüne ait gerçekleştirme ağacı

Katılımcı görev durumunda “çözüm kümesinin analitik düzlemde göstermesi” istendiği için denklemlerin grafikleri olan doğruları çizdiğini aksi takdirde denklem sistemlerinin çözüm metodlarından biri olan yok etme metodunu kullanacağını söylemiştir. Araştırmacının “Mesela burada analitik düzlemde gösterin ifadesi olmasaydı, nasıl bir çözüm yolu kullanırdın?” sorusuna “Burada yok etme metodunu kullanırdım [557]” şeklinde bir yanıt veren Elif, bu söylemini Tablo 19'daki gibi görsel araçlarla onaylamıştır.

Tablo 19

Elif'in Eşitsizlik Sistemini (Yok Etme Metoduyla) Çözme Prosedürü

Ne söylüyor?	Ne yapıyor?
561. E: Şöyle iki ile çarparım (<i>gerçekleşme 1</i>) [...] eksi dört x eksi iki y küçüktür eksi iki [<i>hızlıca gerçekleşme 2'de yer alan eşitsizlikleri yazarak</i>] böyle (<i>gerçekleşme 2</i>) olacağı için birbirini götürecek [<i>kalemiyle</i> $-2y$ ve $2y$ ifadelerinin üzerini çizer gibi yaparak] yani bu da sağlamaz [...] Sıfır küçüktür ııı dört (<i>gerçekleşme 3</i>) hani, olmaz [...] Pardon oluyor, aslında sağlıyor [$0 < 4$ ifadesinin doğrulunu kastederek] ama x ve y'ler birbirini götürdüğü için çözüm kümesini bulamam [...] yani x ve y değerlerini bulamam. ... 565. E: [...] x için bir değer ya da aralık belirtemem ve y içinde aynı şeyi yapamam, bu yüzden boş küme.	

Elif bu görev durumundan önce de karşılaştığı “ $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y > 2x - 8 \wedge x \geq -1$ ” eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulmak için de yok etme metodunu kullanarak değişkenler için reel sayı aralıkları bulmaya çalışmış fakat çözümünü sonlandıramamış ve kararsızlık yaşamıştır:

399. E: Burada x 'in bana değer aralığını verdiği için [$x \geq -1$ ifadesini göstererek] burada [$y > 2x - 8$ ifadesinde x ifadesini göstererek] y için bir şeyler yazmaya çalışıyorum (A: *Hı hı*) [...] ııı yazabilir miyim bilmiyorum [*yazmaya devam etmek istiyor*].

400. A: Neden öyle yapıyorsun?

401. E: ııı şey yani x büyük-eşittir eksi bir olduğu için (A: *Hı hı*) hani dedim ki iki x eksi sekiz ne olur dedim [...] x ve y 'yi karşılaştırmaya çalışıyorum.

402. A: Tamam

...

405. E: Sonra burada y 'yi bulduk, x içinde aynı şeyi yapabilirim [...] ııı bunu nasıl yapabilirim [*düşünüyor, parmaklarını hareket ettiriyor*] ııı [...] şunu [$x \geq -1$ ifadesini göstererek] yerine yazsam yani [...] ııı x artı artı yapsam mesela, x artı altı büyük-eşittir eksi beş olsa [...] ııı bu y mesela yok yine y 'yi bulduk ama [...] burada emin değilim [...] yani bulamadım aslında ama bence bu bir eşitsizlik sistemi.

Katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli denklemlere dair söylemleri incelendiğinde ise denklemin standart cebirsel formuna atıfta bulunduğu görülmüştür. Araştırmacının “Bir cebirsel ifadenin ikinci dereceden denklem olduğunu nasıl belirlersin?” sorusunu Elif “... bir denklemde en büyük derece iki ise biz buna ikinci dereceden denklem deriz [575]” şeklinde bir anlatı üreterek yanıtlamıştır. Elif bu söylemini ikinci dereceden tek değişkenli denklemler üzerine konuşurken sıklıkla tekrarlamıştır:

591. E: Diyebilirim çünkü değişkenin üssü iki [$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a^2 - 4 = 0$ ifadesinde a^2 yi gösteriyor], en büyük derecede bu olduğu için diyebilirim.

...

601. E: İıı bunun için yine bu da olur demişim çünkü yani burada a, x ve b değişken ama en yüksek yine iki olduğu için [$a, b, c, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ax^2 + bx = c$ ifadesinde x^2 ifadesini yuvarlak içine alarak].

...

617. E: Açmışım [...] ama açmama gerek yoktu çünkü zaten yine kare bir ifade var. O yüzden bence bu da bir ikinci dereceden iki değişkenli bir denklem.

Katılımcının “derecesi iki olan” polinom biçimindeki cebirsel ifadeleri ikinci dereceden denklem olarak tanımlama rutinini onayladığı görsel araçların örnekleri Şekil 14’teki gibidir:

The image shows three handwritten mathematical expressions with green annotations:

- $x^2 - 5x + 1 = 0$ with the annotation "2. dereceden 1 değişkenli denklemdir" (quadratic equation with 1 variable).
- $ax^2 + bx - c = 0$ with the annotation "kareli ifade" (quadratic expression).
- $x^2 - 9x + 25 = 0$ with the annotation "kareli ifade" (quadratic expression).

Şekil 14. Elif’in ikinci dereceden tek değişkenli denklem tanımına dair görsel araçları

Elif’in bu rutini “ $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $xy - 4x = 3$ ” cebirsel ifadesi için matematiksel olarak doğru olmayan bir söylemde bulunmasına yol açmış ve katılımcı bu cebirsel ifade için “İkinci dereceden diyemem çünkü [1 yazarak] bu ifadedeki x ve y ’nin üsleri bir olduğu için buna birinci dereceden diyebilirim [585]” ifadesinde bulunmuştur. Bununla birlikte polinom biçiminde olmayan “ $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, $\frac{x^2 - 5}{x} = 3$ ” denklemine x^2 ifadesini içerdiği için Elif, ikinci dereceden bir denklem olduğunu belirtmiştir:

623. E: Açmam hiç gerek yoktu bence ($A: H_1 h_1$) x 'in üssü iki olduğu için direkt diyebilirim yani ikinci dereceden.

624. A: Peki paydada bir x olması etkiler mi?

625. E: Bence etkilemez.

626. A: Neden öyle düşündün?

627. E: Çünkü hani bunu denklemi çözdüğümüz zaman, x çarptığımızda x küplü bir ifade yani daha büyük dereceli bir ifade gelmediği için.

Elif ikinci dereceden polinom biçimindeki tek değişkenli denklemlerin çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken söylemlerinde “denklemin kökü” ifadesini kullanmıştır. Katılımcının Oturum 4'teki kâğıdı incelendiğinde “Bir denklemde derece en büyük ne ise kökler en fazla o kadar olabilir” şeklinde sözel (yazılı) bir anlatıya rastlanmıştır. Şekil 15, Elif'in anlatısındaki sözel gerçekleşmeyi göstermektedir:

Şekil 15. Elif'in ikinci dereceden denklemlere dair anlatısının sözel gerçekleşmesi

Katılımcının birinci dereceden tek değişkenli denklemler hakkında konuşurken birden fazla çözümü olamayacağını belirtmesi ve sonsuz çözüme sahip olan denklemleri (özdeşlikleri) Şekil 8'deki gibi eşitsizlik olarak tanımlaması ve ikinci dereceden denklemler için “... iki farklı kök varsa direkt ikinci dereceden diyebilirim [641]” söylemi Şekil 15'teki anlatısını onaylamaktadır. Bununla birlikte katılımcı, bir cebirsel ifadenin ikinci dereceden tek değişkenli bir denklem olup olmadığına karar vermede güçlük yaşadığı durumlarda denklemin diskriminantını hesaplayarak bir sonuca varmıştır. Katılımcı “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-x(x + 6) = 2$ ” denkleminin bu gösteriminde x^2 terimini göremeyince dağılma işlemi yapmış ve yine denklemin Şekil 16'daki gibi diskriminantını hesaplama ihtiyacı hissetmiştir:

645. E: Derece yine önemli ama [...] burada belirleyememişim en başta o yüzden açtım [...] ııı üçüncü dereceden diyemem çünkü zaten en fazla x kareli bir ifade var hani bunu dağıttığım zaman [...] iki farklı kök var, hani emin olmak için yaptım ben bunu [diskriminantı]

hesaplamayı kastederek] büyük ihtimalle, çünkü burada zaten kareli bir ifade var, bu yüzden de ikinci dereceden diyebilirim.

• $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
 $-x(6+x) = 2$
 $-6x - x^2 = 2$
 $x^2 + 6x + 2 = 0$
 $\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 2$
 $36 - 8 > 0$
 2 tane reel köşü

Şekil 16. Elif’in “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-x(x + 6) = 2$ ” göstergesine dair görsel araçları

Bununla birlikte Elif ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çarpanlara ayırmayı kullanarak çözmüştür. Katılımcının “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x^2 + x - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.” görev durumuna ait prosedürü Tablo 17’de verilmiştir. Elif’in ikinci dereceden denklemleri çarpanlara ayırma yoluyla çözdüğünü onaylayan bir diğer görsel araçlar ise Tablo 20’de yer almaktadır.

Tablo 20

Elif’in İkinci Dereceden Tek Değişkenli Denklemler Çözümüne Ait Cebirsel Gerçekleşmeleri

Gösterge	Cebirsel gerçekleşme
$x^2 - x - 6 = 0$	$\begin{array}{r} x & x & -3 \\ x & & 2 \\ \hline -(x+2) \cdot (x-3) \\ x & -2 & \vee & x=3 \end{array}$
$5x - 10 = x^2 - 3x + 2$	$\begin{array}{r} x^2 - 8x + 12 = 0 \\ x & x & -6 \\ x & & -2 \\ \hline (x-6) \cdot (x-2) \\ \text{G.K.} = \{6, 2\} \text{ olabilir.} \end{array}$
$(x + 5)^2 = x$	$\begin{array}{r} x^2 + 10x + 25 = x \\ x & x & 10 \\ x & & 25 \\ \hline (x+5) \cdot (x+5) \end{array}$

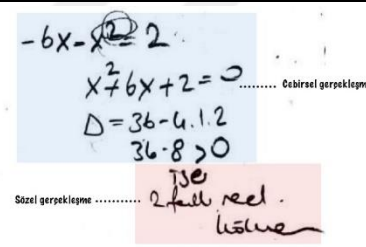
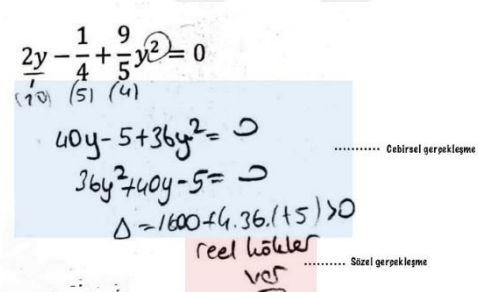
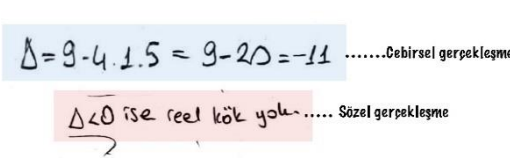
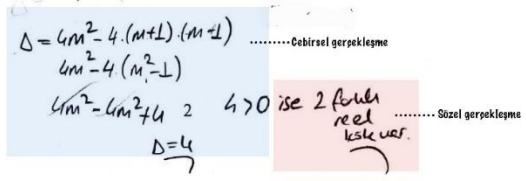
Bireysel görüşmelerde katılımcı ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerin çözüm kümesinin elemanları hakkında çeşitli anlatılar üretmiştir:

665. E: Burada diskriminantı sıfırdan küçük ise kök yok $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x^2 - 3x + 5 = 0$ denklemini sağlayan reel sayıların kümesini bulunuz.” görev durumu hakkında konuşurken>

Denklemin diskriminantı ile çözümleri arasındaki ilişkiye dair “... diskriminantı sıfırdan küçük ise kök yok [665]” anlatısını üreten Elif’in yanıtları incelendiğinde benzer anlatılara rastlanmıştır. Tablo 21’de ise katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli polinom biçimindeki denklemlerin diskriminantı ile çözümleri arasındaki ilişki hakkında ürettiği anlatılarının görsel araçlarına yer verilmiştir.

Tablo 21

Elif’in İkinci Dereceden Tek Değişkenli Denklemlere Dair Görsel Araçları

Görev Durumu	Görsel Araçlar
Aşağıdaki cebirsel ifadelerden “ikinci dereceden bir değişkenli denklem” olanları seçiniz. Seçiminizin gerekçe/lerini açıklayınız. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-x(x + 6) = 2$	
Aşağıdaki cebirsel ifadelerden “ikinci dereceden bir değişkenli denklem” olanları seçiniz. Seçiminizin gerekçe/lerini açıklayınız. $y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2y - \frac{1}{4} + \frac{9}{5}y^2 = 0$	
$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x^2 - 3x + 5 = 0$ denklemini sağlayan reel sayıların kümesini bulunuz.	
$m \in \mathbb{R} - \{-1\}$ olmak üzere $(m + 1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$ denklemi için “çözüm kümesi farklı iki reel sayıyı içerir” ifadesinin doğru olup olmadığını gerekçeleriyle açıklayınız.	

Araştırmacının “Diskriminant nedir?” sorusunu bir örnekle açıklamaya çalışan Elif ile araştırmacı arasında aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

666. A: Diskriminant nedir?

667. E: Diskriminant [...] b kare eksi dört a , c [gülerek].

668. A: Peki b kare eksi dört a , c dediğinde a , b ve c nedir?

669. E: Şey bu b kare yani şey [...] yani şöyle bir denklemde a , x kare artı b , x artı c [$ax^2 + bx + c = 0$ ifadesini yazarak] böyle bir denklemde [$\Delta = b^2 - 4ac$ ifadesini yazıyor]

670. A: Bu nasıl bir denklem, ikinci dereceden dört değişkenli mi?

671.E: [gülerek] ya değil aslında, kendimle çelişmek istemiyorum <Önceki söylemlerinde tüm harflerin kendi tanımına göre değişken olması gerektiğini düşündüğü için söylemde bulunmaya çekiniyor>

672. A: Peki ne öyleyse?

673. E: İkinci dereceden tek değişkenli denklem.

674. A: Burada a , b ve c nedir?

675. E: Bilinmeyen.

676. A: Başka bir adı var mı sence?

677. E: c sabit terim oluyor burada, b ve a da katsayı x 'in.

678. A: Tamam, a 'nın herhangi bir özelliği olması gerekir mi?

679. E: a 'nın sıfır olmaması lazım. [$a \neq 0$ ifadesini yazarak]

Burada katılımcı, ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri değişkenleri bağlama bağı olarak doğru bir şekilde isimlendirmiştir. Bireysel görüşmelerde Elif'in Oturum 5'te yer alan problemleri içeren görev durumlarına ait yanıtları incelendiğinde ise katılımcı sözel ifadeleri cebirsel ifadelere doğru bir şekilde çevirebilmiştir. Katılımcının sözel ifadeleri cebirsel ifadelere çevirirken değişkenleri neye göre atadığı ve bu bağlamda cebirsel gerçekleştirmeleri Tablo 22'de yer almaktadır.

Tablo 22

Elif'in Problem İçeren Görev Durumlarına Ait Cebirsel Gerçekleşmeleri

Görev durumu 1: “Bugünlerde Ankara’da şehir içi taksimetre açılış ücreti 6 TL ve her bir kilometre için ise ücret 4,7 TL’dir. Kilometreye bağlı olarak bir yolcunun vereceği ücreti belirleyen cebirsel ifadeyi yazınız.”

Görev:

Kilometre için x , kilometreye bağlı bir yolcunun vereceği ücreti y değişkeni atayarak denklem kurma

Prosedür:

$$6 + 4,7x = y$$

Görev durumu 2: “Ayşe ile Berfin’ in cebindeki paralar ile ilgili aşağıdakiler bilinmektedir. Ayşe, Berfin’e 50 TL verdiğinde paraları eşit olmaktadır. Berfin, Ayşe’ye 15 TL verdiğinde Ayşe’nin parası Berfin’ in parasının 5 katı olmaktadır. Bu şartlar altında, Ayşe’nin parasını hesaplamada kullanılabilecek cebirsel ifadeyi yazınız.”

Görev:

Ayşe’nin parasına x değişkeni atayarak birinci dereceden tek değişkenli bir denklem kurma

Prosedür:

Ayşe	Berfin
x	$x - 50$
$x + 15$	$x - 15$

$$5(x - 15) = x + 15$$

Görev durumu 3: “Gökhan internet üzerinden tanesi 45 TL olan 32 GB’lık taşınır belleklerden sipariş vermek istiyor. Sipariş için kargo ücreti 10 TL’dir. Gökhan’ın bu sipariş için harcayabileceği en fazla 200 TL’si vardır. Gökhan’ın sipariş edebileceği maksimum taşınır bellek sayısını belirleyen cebirsel ifadeyi yazınız.”

Görev:

Taşınır bellek sayısına x değişkenini atayarak eşitsizlik kurma

Prosedür:

$$200 \geq 10 + 45x$$

Elif’in bireysel görüşmedeki söylemlerinin analiz edilmesi sonucunda denklem ve eşitsizlik kavramına dair katılımcıya ait toplamda 11 farklı rutin gözlemlenmiştir. Bu rutinler “BG-Es” biçiminde kodlanmıştır. Burada BG kısaltması rutinin bireysel görüşmeye, E ise Elif’e ait bir rutin olduğunu betimlemek için kullanılmış ve s yerine rutin numarası yazılmıştır. Bu şekilde kodlanan rutinlerin “ne zaman” ve “nasıl” gerçekleştiği ve Elif’in rutinlerinin bir özeti olan rutin profili Tablo 23’te okuyucuya sunulmuştur. Bu tabloda yer alan “tekrar” terimi katılımcının bir rutini kaç defa farklı anlarda ve farklı

görev durumlarında tekrarladığının sayısını belirtmektedir. Katılımcının rutin tekrarı 10 defa ya da 10 defadan küçük bir doğal sayı ise “tekrarı” kısmına o sayı yazılmıştır. Eğer katılımcının rutini 10 ile 20 arasında ise bu durum “> 10”, 20 defadan fazla ise “> 20” şeklinde ifade edilmiştir.



Tablo 23

Elif'in Bireysel Görüşmedeki Rutin Profili

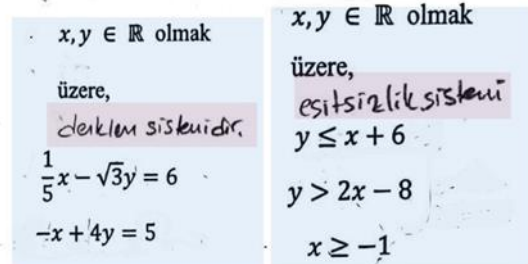
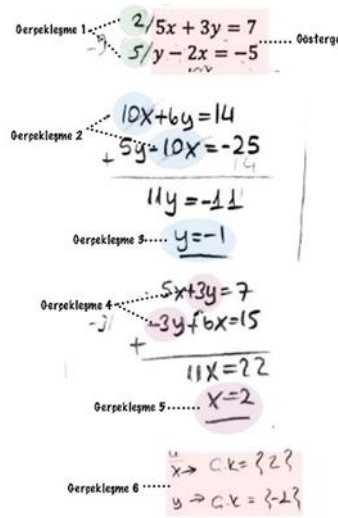
Rutin kodu	Ne zaman?	Görev	Gerçekleşme	Prosedür	Nasıl?	Tekrarı
BG-E1	Denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken ya da herhangi bir cebirsel ifadenin birinci dereceden tek değişkenli bir denklem ya da eşitsizlik olduğunu belirlerken	Denklem ve eşitsizlik kavramlarını; en fazla bir elemanlı çözüm kümesine sahip ise “denklem”, çözüm kümesi bir reel sayı aralığı ise “eşitsizlik” olarak tanımlamak	Sesli	E: [...] denklem dediğimiz şey içinde en az bir bilinmeyen olması gerekiyordu, eşitlik olması gerekiyordu ını eşitsizlik de ını bir denklemin [...] x değeri mesela bir tane değer alabiliyordu çözüm kümesi diyoruz zaten biz buna ama eşitsizlikte ise birden fazla değer alabiliyordu, hatırladığım kadarıyla yani [2] E: Burada zaten x var sadece [kalemiyle göstererek] ını yani karşı tarafa attığımız zaman x 'in tek bir değeri oluyor, o yüzden ben buna denklem demiştim [18] E: ... yani eğer zaten büyüktür küçüktür işaretleri varsa ve birden fazla değer alabiliyorsa eşitsizlik diyoruz [215]		> 10
			Sözel	Hatırladığım kadarıyla denklemde $x \rightarrow$ değişkeni bir değer alıyordu. Eşitsizlik $\rightarrow x$ 'in belli bir değer aralığı vardı. Burada en azından tek bir sonucu yoktu. Denklemi sağlayan birden fazla değer old. Zaten eşitsizlik oluyoruz.		> 10
			Cebirsel-Sözel	Denklem $5x+10=30$ $5x=20$ $x=4$ ↓ tek bir değer var. Eşitsizlikte $-10 \leq 2x-2 \leq 6$ $-8 \leq 2x \leq 8$ $-4 \leq x \leq 4$ [-4,4] birden fazla değer var.		> 10
BG-E2	Değişken tanımlarken ya da değişkenler konuşurken	kavramını ya da hakkında	Evrensel kümedeki her reel sayıyı alabilen harfi (leri) “değişken” olarak tanımlamak	Sesli	E: [...] yani x değişken çünkü her farklı değeri alabiliyor [144] E: hıı hıı, x ve y 'yi bir değer olarak buluruz demişim [...] ını [...] burada mesela bu bir denklem sistemidir, evet [...] çünkü bir eşitlik var ve iki değişkeni var ve buradan gönderdiğimiz zaman [...] işlemleri yaptığımız zaman x 'i ve y 'yi bir değer olarak bulabiliriz, yani değişkenler ilişkili. Bu yüzden de bence bu bir denklem sistemidir. [331]	> 20
			Sözel-Cebirsel	eşitsizlik $x-9 < 8+2x$ $-9 < 8+x$ $-17 < x$ Sonsuza kadar değer alabilir (-17, ∞)	 Cebirsel gerçekleştirme Sözel gerçekleştirme	> 10

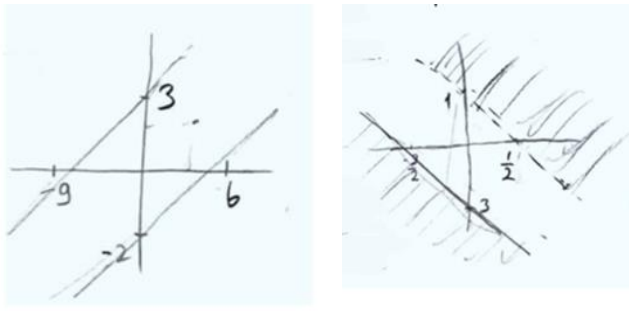
BG-E3	Çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken	Çözüm kümesinin elemanını değişken yerine yazarak eşitlik elde etmek	Sesli	E: x yerine bu değeri yazdığımız zaman bu denklemin iki tarafında da sağlaması lazım. [249] E: Eşitliğin iki tarafında da aynı şeyi bulmam lazım.[251] E: x yerine eksi biri yazınca denklemin sağlaması lazım [...] yani eşitliğin her iki tarafını da aynı şeyi bulmam lazım.[674]	> 10
			Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? E: x yerine eksi biri yazınca denklemin sağlaması lazım [...] yani eşitliğin her iki tarafını da aynı şeyi bulmam lazım. [674] Yazayım [göstergeyi yazarak] x yerine eksi bir yazacağım. Burası m artı bir oldu, o zaman burası eksi iki m , artı m eksi bir eşittir sıfır (gerçekleşme 1) yani bunun sıfıra eşit olması lazım. Bu da şöyle olur şu birler gitti [kalemle üzerini çizer gibi yaparak] m eksi iki m artı m (gerçekleşme 2) sıfır oldu. Yani sıfır eşittir sıfır (gerçekleşme 3) sağladı, o yüzden eksi bir çözüm kümesinin elemanlarından biridir. [676]	Ne yapıyor? > 10
BG-E4	Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken	" x = reel sayı" biçiminde bir sonuç elde etmek	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? E: İki burada şöyle yaptım, direkt parantezlere dokunmuyoruz, ikiyi içeriye dağıttım, üç x eksi [...] eksi ikiyi içeri dağıttım ve dağıtıp çarptığım zaman eksi iki x artı sekiz [...] eşittir bunu içeri dağıtıyorum dördü ($A: Hı hı$) dört x artı dört oldu (gerçekleşme 1) ıı burada iki x 'i karşı tarafa gönderdiğimiz zaman ııı toplama yani artı duruma geçtiği için altı x oldu [...] altı x artı dört eşittir üç x artı sekiz (gerçekleşme 2) ııı burada eksi üç x olarak karşıya geçti, üç x eşittir dört oldu (gerçekleşme 3) bunu da karşıya attım, buradan da x eşittir, yine burada çarpım durumunda olduğu için [gerçekleşme 3'teki 3 ü işaret ederek] bölüm olarak karşıya geçtiğinde x eşittir dört bölü üç (gerçekleşme 4). [243]	Ne yapıyor? > 10
BG-E5	Birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken	Bir reel sayı aralığı elde etmek	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? E: Burada yine önce paydaları eşitleyeceğim [...] burayı üçle burayı ikiyle genişletirsem (gerçekleşme 1), burası da altıyla genişletmem lazım biri [...] o zaman şöyle olur iki x eksi üç parantezinde x eksi dört büyüktür altı oldu ((gerçekleşme 2) iki x eksi üç x artı on iki büyüktür altı (gerçekleşme 3). [297] Eksi üçü içeriye dağıttım, ııı büyüktür altı oldu. Burada eksi x karşı tarafa attığım zaman büyüktür eksi altı (gerçekleşme 4) [...] burada her tarafı eksiyle çarparsam, işaret yön değiştirir x küçüktür altı (gerçekleşme 5). [299] ... yani aslında belli bir değer aralığında olduğu için bana zaten bunu söylemesi gerekiyordu [...] x küçüktür altıymış o zaman şöyle olur [yazmaya başlıyor] eksi sonsuz [...] şöyle(gerçekleşme 6). [301]	Ne yapıyor? > 10

$$\begin{aligned}
 (m+1)x^2 + 2mx + m - 1 &= 0 \quad \dots \text{Gösterge} \\
 m+1 - 2m + m - 1 &= 0 \quad \dots \text{Gerçekleşme 1} \\
 m - 2m + m &= 0 \quad \dots \text{Gerçekleşme 2} \\
 0 &= 0 \quad \dots \text{Gerçekleşme 3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3x - 2(x-4) &= 4(x+1) \quad \dots \text{Gösterge} \\
 3x - 2x + 8 &= 4x + 4 \quad \dots \text{Gerçekleşme 1} \\
 3x + 8 &= 4x + 4 \quad \dots \text{Gerçekleşme 2} \\
 4 &= 3x \rightarrow x = \frac{4}{3} \quad \dots \text{Gerçekleşme 3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} &> 1 \quad \dots \text{Gösterge} \\
 (2) \quad (3) &\dots \text{Gerçekleşme 1} \\
 \Rightarrow 2x - 3(x-4) &> 6 \quad \dots \text{Gerçekleşme 2} \\
 2x - 3x + 12 &> 6 \quad \dots \text{Gerçekleşme 3} \\
 -x &> -6 \quad \dots \text{Gerçekleşme 4} \\
 x &< 6 \quad \dots \text{Gerçekleşme 5} \\
 (-\infty, 6) &\dots \text{Gerçekleşme 6}
 \end{aligned}$$

BG-E6	Denklem ve eşitsizlik sistemi kavramlarını tanımlarken	“=” sembolü içeren birden fazla cebirsel ifadeyi “denklem sistemi” “<, >, ≤, ≥” sembollerini içeren birden fazla cebirsel ifadeyi “eşitsizlik sistemi” olarak tanımlamak	Sesli Sözel	E: “ Birden fazla eşitsizlik olmalı ve değişkenleri ilişkili olmalı ki sistem olsun yani [415]” ... küçüktür, büyüktür sembolleri kullanılmış, o yüzden bence eşitsizlik sistemi [459] E: yani sistem olduğu zaman birden fazla olmalı ve eşittir, büyüktür, küçüktür sembolleri kullanılmalı ve ayrıca sistem diyebilmemiz için bunlar (<i>değişkenler</i>) ilişkili olmalı [493]	7 5	
						
BG-E7	Birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizlik sistemlerini çözerken	Denklem sistemi ise yok etme metodunu kullanarak değişkenler için bir reel sayı karşılığı bulmak	Sesli- Cebirsel	Ne söylüyor? E: ıı taraf tarafa toplayarak [...] yani öncelikle burada ikiyle çarpmışım burası on x oldu burada eksi on x [gerçekleme 2'yi göstererek] [511] Birbirine [...] eksilisine eşitleyerek topladığım zaman birbirlerini götürmesi için. [513] O yüzden de iki ile çarpmışım, beşle çarpmışım [gerçekleme 1'i göstererek] burada hani on x eksi on x daha sıfır olduğu için [...] burada y değerini buldum [gerçekleme 3'ü göstererek] daha sonra aynı şeyi [...] tekrar yok etme metodunu kullanarak x için yapabilirim. Burayı mesela eksi üçle çarparsam üç y eksi üç y birbirini götürür [gerçekleme 4'ü göstererek] toplarken, o şekilde. [515] Çözüm kümesi için [...] yine ayrı ayrı demem lazım yani [...] x için çözüm kümesi eşittir x'i iki bulmuşum [gerçekleme 5'i göstererek], y için de yine böyle olması lazım y'yi de eksi bir [gerçekleme 3'ü göstererek] bulmuşum [...] bence çözüm kümesi böyle olmalı [gerçekleme 6 sayısını göstererek] çünkü ikisini de aynı şeye yazarsam, x için hem iki hem eksi bir, y için hem iki hem eski bir olacağı için olmaz. [525]	Ne yapıyor? 	4

	Eşitsizlik sistemi ise yok etme metodunu kullanarak değişkenler için bir reel sayı aralığı bulmak	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? E: Şöyle iki ile çarparım (gerçekleşme 1) [...] eksi dört x eksi iki y küçüktür eksi iki [hızlıca gerçekleşme 2'de yer alan eşitsizlikleri yazarak] böyle (gerçekleşme 2) olacağı için birbirini götürecek [kalemiyle $-2y$ ve $2y$ ifadelerinin üzerini çizer gibi yaparak] yani bu da sağlamaz [...] Sıfır küçüktür ıı dört (gerçekleşme 3) hani, olmaz [...] Pardon oluyor, aslında sağlıyor [$0 < 4$ ifadesinin doğrulunu kastederek] ama x ve y'ler birbirini götürdüğü için çözüm kümesini bulamam [...] yani x ve y değerlerini bulamam. [561] [...] x için bir değer ya da aralık belirtemem ve y içinde aynı şeyi yapamam, bu yüzden boş küme. [565]	Ne yapıyor? Gerçekleşme 1 $2x - y < -1$ Gösterge $4x + 2y \leq -6$ Gerçekleşme 2 $-4x - 2y < -2$ $4x + 2y \leq 6$ Gerçekleşme 3 $0 < 4$	3
BG-E8	Çözüm kümesini analitik düzlemde grafik çizme yoluyla belirlemesi istendiğinde, denklem ve eşitsizlik sistemlerini çözerken	Denklem ve eşitsizlik sistemi çözümlerini doğru grafikleri çizerek bulmak	Sesli E: [...] koordinat sisteminde [koordinat sistemi çizerek] x ve y ikilisini yazmaya çalışıyorum [...] doğruyu çizmeye çalışıyorum. [531] ... Çünkü ıı eksenleri kestiği noktayı bilirim doğruyu çizebilirim. [537] Çünkü bu bu denklem [kalemiyle görev durumundaki denklemleri göstererek] bir doğru belirtiyor ve bu doğruların arasında [...] yani [...] denklem çözüm kümesini istiyor ... o yüzden bu doğruların arasında kalan da ikisini de sağlaması lazım [...] bu yüzden yapıyorum yani bu denklem bir doğru belirtiyor. [539] E: ... eğimleri aynı, paraleldir, bu yüzden çözüm kümesi boş demişim [...] ıı [...] çözüm kümesi [...] yani bu denklem sisteminin, doğruların aslında bir yerde kesişmesi lazım ki ıı belli bir çözüm kümesi olsun, ama bunlar [çizdiği doğrulara işaret ederek] belli bir yerde kesişmiyor çünkü birbirine paralel o yüzden bunun bir çözüm kümesi yok, boş. [547]	6	
		Cebirsel	$\begin{cases} x=0 \text{ için } 3y=9 & y=3 \text{ (0,3)} \\ -4x+2y=9 & y=0 \text{ için } x=-9 \text{ (-9,0)} \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \text{ için } y=-2 \text{ (0,-2)} \\ 2x-6y=2 & y=0 \text{ için } x=6 \text{ (6,0)} \end{cases}$ $4x+2y \leq -6$ $4x+2y = -6$ $x=0 \Rightarrow y=-3$ $y=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$	2	
		Grafiksel		2	

BG-E9	İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken	Değişkenin derecesi en fazla iki olacak şekilde “ x^2 ” terimini içeren ifadeleri ikinci dereceden tek değişkenli denklem olarak tanımlamak	Sesli	E: İt bunun için yine bu da olur demişim çünkü yani burada a, x ve b değişken ama en yükseği yine iki olduğu için. $[a, b, c, x \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere, } ax^2 + bx = c \text{ ifadesinde } x^2 \text{ ifadesini yuvarlak içine alarak}]$ [601]	9
			Sözel-Cebirsel	$x^2 - 5x + 1 = 0 \text{ 2.dereceden 1.değişkenli denklem}$ $ax^2 + bx - c = 0$ $x^2 \rightarrow \text{kareli ifade}$ $x^2 - 9x + 25 = 0$	7
BG-E10	İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken	Çarpanlarına ayırma yöntemiyle değişken için en fazla iki reel sayı bulmak	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? E: Tamam [...] burada en başta çarpanlarına ayırmayı denemişimdir büyük ihtimalle [denklemi yazıyor] iki x'e x ayırsam (gerçekleşme 1) ıı üçe bir [...] [kağıdındaki çözümü inceliyor] şöyle olur artı x dediği için [1 in başına - koyarak] (gerçekleşme 2) tamam şu şekilde çarptığımız zaman sağlıyor [çarparı işareti koyarak] iki x artı üç çarpı, x eksi bir eşittir sıfır (gerçekleşme 3). [657] O zaman iki x artı üç eşittir sıfır (gerçekleşme 4), iki x eşittir eksi üç (gerçekleşme 5), x eşittir buradan ya eksi iki bölü üç gelir (gerçekleşme 6), ya da x eşittir bir gelir (gerçekleşme 7). [659] Çözüm kümesini burada tek bir şey içinde yazabilirim ya bir ya da eksi üç bölü iki (gerçekleşme 8). [661] Ne yapıyor? $2x^2 + x - 3 = 0 \text{ Gösterge}$ $\begin{array}{r} 2x^2 + x - 3 \\ \underline{2x^2 + 3} \\ x - 3 \end{array}$ $\begin{array}{l} \text{Gerçekleşme 1} \\ \text{Gerçekleşme 2} \end{array}$ $(2x+3) \cdot (x-1) = 0 \text{ Gerçekleşme 3}$ $2x+3 = 0 \text{ Gerçekleşme 4}$ $2x = -3 \text{ Gerçekleşme 5}$ $x = -\frac{3}{2} \text{ Gerçekleşme 6}$ $x = 1 \text{ Gerçekleşme 7}$ $x = \left\{ 1, -\frac{3}{2} \right\} \text{ Gerçekleşme 8}$	5
BG-E11	İkinci dereceden tek değişkenli denklemin çözümlerinin varlığını belirlerken	İkinci dereceden tek değişkenli denklemin diskriminantını hesaplamak	Sesli	E: Burada diskriminantı sıfırdan küçük ise kök yok [665]	2
			Sözel-Cebirsel	$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 9 - 20 = -11 \text{ Cebirsel gerçekleşme}$ $\Delta < 0 \text{ ise reel kök yok Sözel gerçekleşme}$	4

Elif'in rutin profili incelendiğinde, denklem ve eşitsizlikleri tanımlamada kullandığı rutininin (BG-E1) süreç odaklı bir rutin olduğu görülmüştür. Katılımcı bir cebirsel ifadenin denklem ya da eşitsizlik olduğunu belirlerken prosedürün uygulanmasını kendine bir görev olarak görmüş ve cebirsel ifadelerin çözüm kümelerini belirlemiştir. Cebirsel ifadeleri çözüm kümesinin en fazla bir elemanlı olması durumunda “denklem”, çözüm kümesinin bir aralık olması durumunda bir “eşitsizlik” olarak tanımlamıştır. Elif'in bu rutinine dair söylemlerinin çoğunlukla matematiksel bir anlatı üretmekten ziyade prosedürün uygulanması hakkında olduğu görülmüş ve bu nedenle BG-E1 kodlu rutini ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır.

Elif'in “değişken” kavramı hakkında konuşurken söylemlerinde tekrarlayan BG-E2 kodlu rutini ise sonuç odaklı bir rutindir. Katılımcı evrensel kümenin her bir elemanını temsil eden gösterimlerin (x, y, z gibi harflere) değişken olduğunu belirtmiş ve “her farklı değeri alabilen [144]” şeklinde onayladığı bir anlatı üretmiştir. Elif'in bu anlatısı “Bir kümenin tüm elemanlarını aynı anda temsil eden bir simge veya bir sembole *değişken* denilmektedir (Argün vd., 2020)” kanonik anlatısı ile denk olduğu görülmüş ve bu nedenle BG-E2 kodlu rutini keşif rutini olarak kodlanmıştır.

Elif'in “çözüm kümesi” ve “çözüm kümesi elemanları (bilinmeyenler)” hakkında konuşurken söylemlerinde tekrarlayan BG-E3 kodlu rutini ise sonuç odaklıdır. Katılımcının “denklemin iki tarafında da sağlaması lazım [249]” ve “Eşitliğin iki tarafında da aynı şeyi bulmam lazım [251]” şeklindeki onaylanmış anlatıları “Bir evrensel küme üzerinde ifade edilen bir denklem ya da eşitsizlikteki değişkenlerin yerine konulduğunda denklemin ya da eşitsizliğin doğru bir önerme olduğu evrensel kümenin elemanlarının her birine denklemin ya da eşitsizliğin *çözümü* ve çözüm olan bu elemanların oluşturduğu kümeye de denklemin ya da eşitsizliğin *çözüm kümesi* adı verilir.” biçimindeki kanonik anlatıya denk olduğu görülmüş ve bu nedenle katılımcının BG-E3 kodlu rutini bir keşif rutini olarak kodlanmıştır.

Elif'in denklem çözüme sürecindeki söylemlerini (Tablo 17) temsil eden BG-E4 kodlu rutini süreç odaklı bir rutindir. Katılımcı prosedürün performansına odaklı “nasıl ilerlerim?” sorusuna yanıt arayarak işlemlerini tamamlamıştır. Bilinmeyene ulaşmayı kendine görev olarak gören Elif'in söylemleri, matematiksel nesneleri (sayı, sembol ve değişkenleri) birer manipüle edilebilir nesne olarak gördüğünü işaret etmektedir. Bu nedenle Elif'in BG-E4 kodlu bu rutini bir ritüel rutin olarak kodlamıştır. Benzer şekilde Elif'in eşitsizlikleri çözüme sürecindeki söylemleri (Tablo 17) matematiksel nesnelerin manipülasyonu hakkında ve süreç odaklı olduğu için BG-E5 kodlu rutini de bir ritüel rutin olarak kodlanmıştır.

Elif'in denklem ve eşitsizlik sistemlerini tanımlarken kullandığı BG-E6 kodlu rutini sonuç odaklı bir rutindir. Katılımcı “=” sembolü içeren birden fazla cebirsel ifadeyi denklem sistemi olarak tanımlarken “<, >, ≤, ≥” sembollerini içeren birden fazla cebirsel ifadeyi eşitsizlik sistemi olarak tanımlamıştır. Denklem ve eşitsizlik sistemini tanımlarken Elif, “Birden fazla eşitsizlik olmalı ve değişkenleri ilişkili olmalı ki sistem olsun yani [415]”, “... küçüktür, büyüktür sembolleri kullanılmış, o yüzden bence eşitsizlik sistemi [459]” ve “...yani sistem olduğu zaman birden fazla olmalı ve eşittir, büyüktür, küçüktür sembolleri kullanılmalı ve ayrıca sistem diyebilmemiz için bunlar (*değişkenler*) ilişkili olmalı [493]” biçiminde anlatılar üretmiştir. Katılımcının BG-E6 kodlu rutin prosedürü incelendiğinde Elif'in, “bunlar (*değişkenler*) ilişkili olmalı” biçimindeki anlatısının KA20'ye denk olduğu görülmüş ve bu nedenle BG-E6 kodlu rutini keşif rutini olarak kodlanmıştır.

Elif'in denklem ve eşitsizlikleri yok etme metodunu kullanarak çözdüğü söylemlerini (Tablo 18 ve Tablo 19) temsil eden BG-E7 kodlu rutini ise süreç odaklı bir rutindir. Katılımcı denklem sistemlerinin çözüm metodu olan yok etme metodunu matematiksel olarak doğru olmasa da eşitsizlik sistemleri için de kullanmış ve prosedürü performans odaklı olmuştur. Rutin görevi, denklem sisteminde her bir değişken için bir reel sayı, eşitsizlik sisteminde ise her bir değişken için bir reel sayı aralık bulma olan Elif'in prosedürü ise matematiksel nesnelerin manipülasyonu olmuştur. Bu nedenle katılımcının BG-E7 kodlu rutini ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır. Buna rağmen denklem ve eşitsizlik

sistemlerini analitik düzlemde grafik çizimi yardımıyla çözmesi istendiğinde katılımcı onaylanmış anlatılar üretmiş ve BG-E8 kodlu sonuç odaklı rutinini sergilemiştir. Elif'in denklem (eşitsizlik) sistemlerini analitik düzlemde grafik yardımıyla çözerken ki söylemleri incelendiğinde, bu söylemlerin matematiksel nesneler hakkında olduğu görülmüştür. Katılımcı "... bu denklem bir doğru belirtiyor. [539]" ve "... eğimleri aynı, paraleldir, bu yüzden çözüm kümesi boş ... bu denklem sisteminin, doğruların aslında bir yerde kesişmesi lazım ki ııı... belli bir çözüm kümesi olsun, ama bunlar [*çizdiği doğrulara işaret ederek*] belli bir yerde kesişmiyor çünkü birbirine paralel o yüzden bunun bir çözüm kümesi yok, boş. [547]" şeklinde matematiksel anlatılar üretmiştir. Elif'in bu anlatıları KA13 ve KA27'ye denk olarak görülmüş ve bu nedenle katılımcının BG-E8 kodlu rutini bir keşif rutini olarak kodlanmıştır.

Elif'in ikinci dereceden denklemleri tanımlamak için kullandığı BG-E9 kodlu rutini katılımcının sembollere odaklanmasından (Şekil 14) kaynaklı süreç odaklı bir rutin olarak kodlanmıştır. " $x \in \mathbb{R}$, a, b, c birer genelleştirilmiş reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ ifadesine ikinci dereceden tek değişkenli bir denklem denir" matematiksel anlatısında yer alan x^2 terimine odaklanan Elif, bu cebirsel ifadenin bir polinom olduğunun farkında olmamakla birlikte x^2 terimini direkt olarak göremediği için ikinci dereceden denklemleri belirleyememiştir [645]. Bu nedenle katılımcının BG-E9 kodlu rutini bir ritüel rutin olarak kodlanmıştır.

Elif'in ikinci dereceden denklemleri çözerken ki söylemlerini temsil eden BG-E10 kodlu rutini süreç odaklı bir rutindir. Katılımcının rutin görevinin, çarpanlarına ayırma metodunu kullanarak en az iki elemanlı bir çözüm kümesi elde etmek ve prosedürünün ise matematiksel nesneleri manipüle etmek olduğu görülmüştür. Bu nedenle katılımcının BG-E10 kodlu rutini ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır. Buna rağmen Elif'in ikinci dereceden tek değişkenli bir denklemin çözümlerinin varlığını gerekçelendirirken kullandığı BG-E11 kodlu rutinin ise sonuç odaklı olmuştur. Katılımcı hem sesli söylemlerinde hem de sözel ve cebirsel gerçekleştirmelerinde, "Diskriminant sıfırdan küçükse (negatifse) denklemin reel

çözümü yoktur”, “Diskriminant sıfırdan büyükse (pozitifse) denklemin iki farklı reel çözümü vardır” biçimindeki denklemin diskriminantı ve çözümleri arasındaki ilişkileri belirten kanonik anlatıları kullanmıştır. Elif’in bu anlatıları KA33 ve KA34’e denk olarak görülmüş ve bu nedenle katılımcının BG-E11 kodlu rutini bir keşif rutini olarak kodlanmıştır.

Elif’in Tablo 23’teki gibi kodlanan 11 farklı rutininin ritüel ya da keşif rutini olduğu Tablo 24’te okuyucuya sunulmuştur.

Tablo 24

Elif’in Bireysel Görüşmedeki Rutinlerinin Türü

Rutin Kodu	Ritüel	Keşif
BG-E1	X	
BG-E2		X
BG-E3		X
BG-E4	X	
BG-E5	X	
BG-E6		X
BG-E7	X	
BG-E8		X
BG-E9	X	
BG-E10	X	
BG-E11		X

Elif’in bireysel görüşmesinden elde edilen bulgular nesneleştirme yönünden incelendiğinde katılımcı çoğunlukla denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait göstergeleri ve görsel araçları (cebirsel ifadeler, değişkenler, semboller, grafikler vb.) manipüle edilebilen bir nesne olarak görmüştür. Ritüel katılımın bir belirleyicisi olan bu durumun örnekleri katılımcının BG-E4, BG-E5, BG-E7 ve BG-E10 kodlu rutinlerinde sıklıkla ortaya çıkmıştır. Katılımcı süreç odaklı bu rutinlerinde, çözüm prosedürünü uygularken “karşı tarafa attım”, “içeriye dağıttım”, “çaptığım zaman”, “buradan x eşittir ... oldu” gibi insani eylemleri içeren ifadeleri ve “bu, şu, o” gibi işaret zamirlerini sıklıkla kullanmıştır. Bu duruma örnek olarak katılımcının x bir reel sayı olmak üzere “ $3x - 2(x - 4) = 4(x + 1)$ ” biçimindeki denklemi çözerken ki söylemleri verilebilir:

243. E: 111 burada şöyle yaptım, direkt parantezlere dokunmuyoruz, ikiye içeriye dağıttım, üç x eksi [...] eksi ikiye içeri dağıttım ve dağıtıp çarptığım zaman eksi iki x artı sekiz [...] eşittir bunu içeri dağıtıyorum dördü ($A: Hı hı$) dört x artı dört oldu (*gerçekleşme 1*) 111 burada iki x 'i karşı tarafa gönderdiğimiz zaman 111 toplama yani artı duruma geçtiği için altı x oldu [...] altı x artı dört eşittir üç x artı sekiz (*gerçekleşme 2*) 111 burada eksi üç x olarak karşıya geçti, üç x eşittir dört oldu (*gerçekleşme 3*) bunu da karşıya attım, buradan da x eşittir, yine burada çarpım durumunda olduğu için [*gerçekleşme 3'teki 3 ü işaret ederek*] bölüm olarak karşıya geçtiğinde x eşittir dört bölü üç (*gerçekleşme 4*).

$$\begin{aligned}
 & 3x - 2(x - 4) = 4(x + 1) \quad \dots \text{Gösterge} \\
 & 3x - 2x + 8 = 4x + 4 \quad \dots \text{Gerçekleşme 1} \\
 & 3x + 8 = 6x + 4 \quad \dots \text{Gerçekleşme 2} \\
 & 4 = 3x \quad \dots \text{Gerçekleşme 3} \\
 & x = \frac{4}{3} \quad \dots \text{Gerçekleşme 4}
 \end{aligned}$$

Şekil 17. Elif'in " $3x - 2(x - 4) = 4(x + 1)$ " denkleminin ait prosedürü

Bununla birlikte katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken kullandığı BG-E9 kodlu rutini de katılımcının sembolleri matematiksel anlamından bağımsız birer somut bir nesne gibi gördüğünü göstermiştir. Katılımcı cebirsel ifadelerin birer polinom olup olmadığına bakmaksızın sadece x^2 li terime odaklanarak ikinci dereceden denklem olup olmadıklarına karar vermiştir. Bu nedenle katılımcının bu rutini, ritüel katılımın bir belirleyicisi olmuştur. Ayrıca katılımcı rutinlerinde günlük bir dil eşliğinde anahtar kelimeleri kullanmıştır. Hibrit katılımın bir belirleyicisi olan bu durumun örnekleri katılımcının BG-E1, BG-E2, BG-E3 ve BG-E6 kodlu rutinlerinde sıklıkla gözlemlenmiştir. Örneğin, katılımcı denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken kullandığı "[...] denklem dediğimiz şey içinde en az bir bilinmeyen olması gerekiyordu, eşitlik olması gerekiyordu 111 eşitsizlik de 111... bir denklemin [...] x mesela x değeri mesela bir tane değer alabiliyordu çözüm kümesi diyoruz zaten biz buna ama eşitsizlikte ise birden fazla değer alabiliyordu [2]" şeklindeki söylemlerinde anlamına uygun olmayan bir şekilde olsa bile anahtar kelimeleri kullanmıştır. Bu söyleminde Elif, değişken yerine

bilinmeyen kelimesini kullanmış ve x değişkeninin edebileceği reel sayılar yani bilinmeyenler için fonksiyonlara ait bir terim olan “ x değeri” ifadesini kullanmıştır. Bir başka örnekte ise katılımcı, denklem ve eşitsizlik arasındaki ilişkiyi açıklarken “...çözüm kümesi belirli bir aralığın içinde ama denklem de ise tek bir cevabı var. [12]” söyleminde bulunmuş ve anahtar kelime kullanımını eksik bir şekilde yapmıştır. Burada katılımcı “çözüm kümesi belirli bir aralığın içinde” söylemiyle eşitsizliklerin çözüm kümesinin elemanlarının bir reel sayı aralığı belirttiğini ve “denklemde ise tek bir cevabı var” söylemiyle denklemin çözüm kümesinin bir elemanlı olacağını ifade etmek istemiştir. Bununla birlikte Elif, denklem ve eşitsizlik kavramlarına yönelik “[...] denklem dediğimiz şey içinde en az bir bilinmeyen olması gerekiyordu, eşitlik olması gerekiyordu ııı eşitsizlik de ııı ... bir denklemin [...] x mesela x değeri mesela bir tane değer alabiliyordu çözüm kümesi diyoruz zaten biz buna ama eşitsizlikte ise birden fazla değer alabiliyordu [2]” ve “... yani eğer zaten büyüktür küçüktür işaretleri varsa ve birden fazla değer alabiliyorsa eşitsizlik diyoruz [215]” biçimindeki söylemlerinde, kavramların kanonik tanımlarına (Tablo 13) atıf yapan ifadeleri içeren söylemlerde bulunmuştur. Bu nedenle katılımcının BG-E1 kodlu rutiniyle söyleme katılımı, nesneleştirme bağlamında hibrit katılımın bir örneğini teşkil etmiştir. Benzer şekilde Elif “... yani x değişken çünkü her farklı değeri alabiliyor [144]” söylemiyle değişkenin evrensel kümenin her bir elemanını temsil ettiğini “her farklı değeri alabiliyor” şeklinde anlamına uygun olmayan bir kelime kullanımıyla belirttiği fakat katılımcının “... x yani buradaki [*kendi örneğini işaret ederek*] değişken yerine ne yazarsak bu denklemin sağlaması gereken ifade. [241]”, “... x yerine ne yazarsak zaten burada reel sayı olduğunu söylemiş, ben burada x yerine ne yazarsam yazayım sağlayacak ... [289]”, “... burada x eleman reel sayı olduğunu vermiş, x yerine reel sayılar içinde ne yazarsam yazayım sağlıyor çözüm kümesi reel sayılar. [291]” şeklindeki söylemlerinin “değişken evrensel kümenin tüm elemanlarını aynı anda temsil eden bir simge veya bir semboldür” şeklindeki kanonik anlatıya atıf yapmıştır. Katılımcının bu söylemleri aynı zamanda çözüm kümesi ya da çözüm kümesinin elemanları hakkında

anlatılar üretirken, söylemlerini günlük bir dil eşliğinde ifade ettiğini de göstermiştir. Bu nedenle, Elif'in BG-E2 ve BG-E3 kodlu rutinleriyle söyleme katılımı da nesneleştirme açısından hibrit katılımın bir örneğini teşkil etmiştir. Bununla birlikte, katılımcı denklem ve eşitsizlikleri tanımladığı BG-E6 kodlu rutininde de değişkenlerin aynı evrensel kümeye ait olması durumunu "... (*değişkenler*) birbirleriyle ilişkili olmalı" şeklinde matematiksel olmayan günlük bir dil eşliğinde ifade etmiş ve "Birden fazla eşitsizlik olmalı ve değişkenleri ilişkili olmalı ki sistem olsun yani [415]", "... küçüktür, büyüktür sembolleri kullanılmış, o yüzden bence eşitsizlik sistemi [459]" ve "yani sistem olduğu zaman birden fazla olmalı ve eşittir, büyüktür, küçüktür sembolleri kullanılmalı ve ayrıca sistem diyebilmemiz için bunlar (*değişkenler*) ilişkili olmalı [493]" şeklinde günlük bir dil eşliğinde anlatılar üretmiştir. Katılımcının anahtar kelimeleri tam ve doğru bir şekilde kullanmada güçlük yaşadığı söylemlerini içeren BG-E6 kodlu rutini de nesneleştirme açısından hibrit katılımın bir örneği olmuştur.

Katılımcının keşif rutinlerinden BG-E8 ve BG-E11 ise söylemin nesneleştirilmesi yönünden keşifsel katılıma dair örnekler sunmuştur. Elif sonuç odaklı bu rutinlerinde kanonik anlatılar üretmiş ve çoğunlukla insani eylemlerden arındırılmış matematiksel dil kullanmıştır. Prosedürün uygulanmasından ziyade katılımcı matematiksel nesneler hakkında konuşmuş ve bu rutinlerinde anahtar kelimeleri kanonik bir şekilde kullanmıştır. Bu bağlamda katılımcının "diskriminantı sıfırdan küçük ise kök yok [665]", "[...] koordinat sisteminde [*koordinat sistemi çizerek*] x ve y ikilisini yazmaya çalışıyorum [...] doğruyu çizmeye çalışıyorum [531]", "... Çünkü ııı eksenleri kestiği noktayı bilirim doğruyu çizebilirim [537]", "Çünkü bu denklem [*kalemiyle görev durumundaki denklemleri göstererek*] bir doğru belirtiyor [539]", "... eğimleri aynı, paraleldir, bu yüzden çözüm kümesi boş ... çünkü birbirine paralel o yüzden bunun bir çözüm kümesi yok, boş. [547]" şeklindeki söylemlerinde keşifsel katılımın belirleyicilerine rastlanmıştır. Bununla birlikte katılımcı sözel ifadeleri cebirsel ifadelere kanonik bir şekilde dönüştürmüştür (örneğin, Tablo 22).

Elif'in söyleme katılımı esneklik kriteri bağlamında incelendiğinde, katılımcının BG-E1, BG-E4, BG-E5, BG-E7, BG-E9 ve BG-E10 kodlu rutinlerinin ritüel katılıma birer örnek temsil etmiştir. Katılımcı BG-E1 kodlu rutininde denklemi tanımlarken ezbere katı bir prosedür uygulamış ve çözüm kümesi en fazla bir elemanlı olan cebirsel eşitliklere denklem demiştir. Katılımcının rutinindeki katılık onun birer özel denklem olan özdeşliklere Şekil 8'deki gibi eşitsizlik demesine yol açmıştır. Benzer şekilde katılımcı ikinci dereceden denklemleri " x^2 terimini içeren cebirsel ifadeler" olarak tanımladığı BG-E9 kodlu rutininde uyguladığı katı prosedürle polinom olmayan " $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, $\frac{x^2-5}{x} = 3$ " denkleminin x^2 terimini içerdiği için ikinci dereceden bir denklem olduğunu belirtmiştir. Elif'in BG-E4, BG-E5 gibi denklem ve eşitsizlikleri çözme süreçlerinde uyguladığı prosedürler incelendiğinde katılımcının söylemlerinin yalnızca sayı, sembol ve değişken gibi matematiksel nesneleri manipüle etme hakkında olması ezbere bir prosedür uyguladığını göstermektedir. İkinci dereceden tek değişkenli denklemlerin çözümlerinde ise katılımcı bazı denklemler için diskriminantını hesaplamasına rağmen Elif, denklem çözümünde sadece çarpanlara ayırma metodunu uygulamıştır. Bu nedenle BG-E10 kodlu rutini esneklik kriteri bağlamında, ritüel katılımın bir belirleyicisi olarak kodlanmıştır. Bununla birlikte denklem ve eşitsizlik sistemlerini çözme süreçlerine ilişkin BG-E7 kodlu rutini de katılımcının esneklik bağlamında ritüel bir katılım sergilediğini ortaya koyan belirgin bir diğer örnek olmuştur. Katılımcı, denklem sistemlerinde uyguladığı "yok etme" metodunu benzer ve ezbere bir şekilde eşitsizlik sistemleri içinde (örneğin, Tablo 19) uygulamıştır. Buna rağmen denklem ve eşitsizlik sistemlerinin analitik düzlemde grafik yardımıyla çözümü istendiğinde katılımcı birden fazla gerçekleşme ile çözüme (örneğin, Şekil 12 ve Şekil 13) ulaşmıştır. Elif'in bu rutinindeki gerçekleştirmeler kanonik (matematiksel olarak doğru) olduğu için esneklik bağlamında keşifsel katılımın bir örneği olarak verilebilir.

Elif'in söyleme katılımı bağlılık-tutarlılık kriteri bağlamında incelendiğinde, katılımcının denklem ve eşitsizlik çözme prosedüründeki ardışık adımlarının çoğunlukla kanonik bir şekilde bağlantılı olduğu görülmüştür. Katılımcı BG-E4, BG-E5, BG-E8 ve BG-E10 kodlu rutinlerinde olduğu gibi herhangi bir göstergeye ait cebirsel gerçekleştirmelerini birbirine denk önermeler aracılığıyla ilişkili bir şekilde yazarak prosedürünü tamamlamıştır. Bu durumun bir örneği Şekil 18'deki gibi Elif'in " $2x^2 + x - 3 = 0$ " göstergesine dair adımlarında görülmüştür.

Şekil 18, Elif'in " $2x^2 + x - 3 = 0$ " denklemini adım adım çözme sürecini göstermektedir. Adımlar aşağıdaki gibidir:

- $2x^2 + x - 3 = 0$ (Gösterge)
- $2x^2 + x - 3 = 0$ (Görüşme 1)
- $2x^2 + x - 3 = 0$ (Görüşme 2)
- $(2x+3) \cdot (x-1) = 0$ (Görüşme 3)
- $2x+3 = 0$ (Görüşme 4)
- $2x = -3$ (Görüşme 5)
- $x = -\frac{3}{2}$ (Görüşme 6)
- $x = 1$ (Görüşme 7)
- $C.K = \{1, -\frac{3}{2}\}$ (Görüşme 8)

Şekil 18. Elif'in " $2x^2 + x - 3 = 0$ " göstergesine dair gerçekleştirmeleri

Katılımcının her bir gerçekleştirmesi bir önceki gerçekleştirmesinin bir çıktısı olmuş ve Elif birbirine denk açık önermeler yazarak doğru sonuca ulaşmıştır. Bu süreçte katılımcının ulaştığı sonuçlar prosedürle mantıksal olarak ilişkili olduğu görülmüştür. Bununla birlikte katılımcı BG-E3 kodlu keşif rutininde sıklıkla tekrarladığı "...ve x 'i yerine yazdığımız zaman denklemin sağlıyor [24]" ve "... x yerine bu değeri yazdığımız zaman bu denklemin iki tarafında da sağlaması lazım [249]" biçimindeki söylemleriyle işlemsel prosedürü uyguladığı BG-E4, BG-E5, BG-E8 ve BG-E10 kodlu ritüel rutinlerinde prosedür-sonuç ilişkisini kurabilmiştir. Elif'in süreç odaklı işlemsel prosedürlerini içeren BG-E4, BG-E5, BG-E8 ve BG-E10 kodlu denklem ve eşitsizlikleri çözme rutinleriyle birlikte elde ettiği çözümler hakkında konuştuğu sonuç odaklı BG-E3 kodlu anlatı rutini, bağlılık-tutarlılık

kriterini incelemede bir bütünlük oluşturmuş ve katılımcının prosedür-sonuç ilişkisini kurduğunu göstermiştir. Bu nedenle bu bütünlüğü temsilen iki rutin arasında “ $\leftrightarrow$ ” işareti kullanılmış ve bu rutin çifti Tablo 25’te BG-E4 $\leftrightarrow$ BG-E3 biçiminde temsil edilmiştir. Bu bağlamda Elif’in BG-E3 kodlu anlatı rutiniyle tutarlılığı desteklenen BG-E4, BG-E5, BG-E8 ve BG-E10 kodlu rutinleri de bağlılık-tutarlılık kriteri bağlamında keşifsel katılımın bir örneği olmuştur.

Bununla birlikte katılımcının denklem ve eşitsizlik sistemlerini yok etme metodu kullanarak çözdüğü BG-E7 kodlu rutini cebirsel ifadelerin bağlılığı noktasında kanonik olsa da katılımcı, prosedür sonuç ilişkisini kurmada güçlük yaşamıştır. Elif denklem sistemini çözerken yok etme metodunu kullanarak, her bir değişkenin reel sayı karşılığını belirlemiş fakat çözüm kümesini bir sıralı ikili şeklinde yazamamıştır (örneğin, Tablo 18). Bir başka denklem sistemini analitik düzlemde grafik yardımıyla çözen katılımcı, çözüm kümesinin düzlemde bir noktaya karşılık geleceğini belirtmesine rağmen prosedür sonuç ilişkisini kuramamıştır:

531. E: Çünkü şey [yazmaya başlıyor] koordinat sisteminde [koordinat sistemi çizerek] x ve y ikilisini yazmaya çalışıyorum [...] doğruyu çizmeye çalışıyorum çünkü [...] o yüzden de x için sıfır verdiğimiz zaman burada y eşittir eksi iki gelir [kağıdındaki çözüm üzerinden konuşuyor] yani sıfıra eksi iki olması lazım [(0, -2) ifadesini yazıyor] o yüzden eksi iki [y koordinatında işaretliyor] aynı şekilde y ’ye sıfır verdiğimiz zamanda x ’in altı olması lazım [koordinat düzleminde 6 sayısını temsilen işaretleme yapıyor].

...

546. A: Tamam şimdi ikisine de sıfır verdin değil mi? (E: Hı hı) Peki sonra nasıl ilerliyorsun?

...

547. E: İşte doğruyu çizmişim [(0, -2) ve (6,0) noktalarından geçen doğruyu çizerek] burada da aynı şekilde x yerine sıfır verip y ’yi bulduğum zaman üç gelmiş [işaretleyerek] aynı şeyi diğeri içinde yaptığımda böyle buldum [(-9,0) ve (0,3) noktalarından geçen doğruyu çizerek] ııı ve bu ikisi arasında kalan [...] bundan sonrasını bulamadım sanırım [çözümünü okuyor] eğimleri aynı, paraleldir, bu yüzden çözüm kümesi boş demişim [...] ııı [...] çözüm kümesi [...] yani bunlar hah tamam [nasıl yaptığını hatırlayarak] bu denklem sisteminin, doğruların aslında bir yerde kesişmesi lazım ki ııı belli bir çözüm kümesi olsun (A: Hı hı) ama bunlar [çizdiği doğrulara işaret ederek] belli bir yerde kesişmiyor çünkü birbirine paralel o yüzden bunun bir çözüm kümesi yok, boş.

548. Peki bir yerde kesişseydi (E: Hı hı) orada oluşan şey çözüm kümesi miydi?

549. E: a, b ikilisi [...] hani o (a, b) ikilisi x için burada a, y içinde b olurdu.

550. A: Peki (a, b) ikilisini çözüm kümesine nasıl yazarsın?

551. E: Yukarıdaki gibi ayrı ayrı yazarım $[x \rightarrow \zeta. K = \{2\}$ ve $y \rightarrow \zeta. K = \{-1\}$ ifadelerini işaret ederek]

Bu durum aynı zamanda Elif'in bir göstergeye ait farklı gerçekleştirmeleri (cebirsel ve grafiksel) yapabilmesine rağmen, gerçekleştirmeler arasındaki mantıksal ilişkiyi kurmada güçlük yaşadığını göstermiştir. Bu nedenle katılımcının birinci dereceden iki değişkenli denklemlerin çözümüne yönelik olan BG-E7 ve BG-E8 kodlu rutinlerinin oluşturduğu BG-E7 $\leftrightarrow$ BG-E8 kodlu rutin çifti nesneleştirme bağlamında hibrit katılımın belirleyicilerine bir örnektir.

Bununla birlikte katılımcının BG-E7 kodlu rutini bağlılık-tutarlılık bağlamında hibrit katılımın bir örneği olmuştur. Tablo 19'daki gibi eşitsizlik sistemini yok etme metodu kullanarak çözen Elif, adımlarının bağlı olmasına rağmen (doğru önermeleri elde etmesine rağmen) prosedür-sonuç ilişkisini matematiksel (mantıksal) bir şekilde kuramamıştır.

Elif'in söylemleri gerekçelendirme kriteri bağlamında incelendiğinde, katılımcının BG-E1 kodlu rutinini gerekçelendirirken kullandığı söylemler hibrit katılım türü için bir örnek olmuştur. Elif bir cebirsel ifadenin denklem ya da eşitsizlik olup olmadığına karar verirken “değişken”, “bilinmeyen”, “eşitlik” gibi anahtar kelimeleri kullanmasına rağmen kendi argümanını süreç odaklı bir şekilde gerekçelendirmiştir. Bir cebirsel ifadenin “denklem” olduğuna karar verirken “... denklem dediğimiz şey içinde en az bir bilinmeyen olması gerekiyordu, eşitlik olması gerekiyordu [2]” şeklinde bir anlatı ile söylemine başlayan katılımcı söylemlerine “... x değeri mesela bir tane değer alabiliyordu çözüm kümesi diyoruz zaten biz buna [2]” biçiminde devam ederek süreç odaklı bir gerekçelendirme sunmuştur. Benzer şekilde “eşitsizlik” kavramını tanımlarken ya da bir cebirsel ifadenin eşitsizlik olduğuna karar verirken “Bir değişken olacak ve ... yani eğer zaten büyüktür küçüktür işaretleri varsa ve birden fazla değer alabiliyorsa eşitsizlik diyoruz. [215]” ve “Burayı da karşı tarafa atsam, üç y küçüktür eksi on bir [...] Burada y için değer aralığı bulabildim, o yüzden bu bir eşitsizlik. [445]” gibi sonuç ve süreç odaklı prosedürüne

söylemlerinde rastlanmıştır. Bu nedenle katılımcının BG-E1 kodlu rutini gerekçelendirmesi hibrit katılımın bir örneği olarak verilebilir.

Katılımcı değişken kavramı ve bir denklem ya da eşitsizliğin çözüm kümesinin elemanlarının ne anlam ifade ettiğini gerekçelendirirken anlatılar üretmiştir. Araştırmacının bireysel görüşme süresince katılımcının BG-E2 ve BG-E3 kodlu rutinlerine yönelik “Denklemin çözümü ifadesinden ne anlıyorsun? [240]” ve “Ne anlama geliyor çözüm kümesinde bu elemanın bulunması? [248]” gibi sorularına “ x yani... değişken yerine ne yazarsak bu denklemi sağlaması gereken ifade. [241]”, “... x yerine bu değeri yazdığımız zaman bu denklemin iki tarafında da sağlaması lazım. [249]” ve “Eşitliğin iki tarafında da aynı şeyi bulmam lazım. [251]” şeklinde onaylanmış anlatılar üreterek yanıt vermiştir. Bu anlatılarda katılımcının değişkenin ne olduğunu “değişken yerine ne yazarsak ...”, “ x yerine bu değeri yazdığımız” gibi süreçleri vurgulayarak izah ettiği görülmüş ve BG-E2 kodlu rutini gerekçelendirme bağlamında hibrit katılıma bir örnek olmuştur. Buna rağmen çözüm kümesinin elemanları için “denklemi sağlaması gereken ifade” ve “denklemin iki tarafını da sağlaması lazım” gibi anlatılarının sonuç odaklı olduğu görülmüştür. Bu nedenle katılımcının BG-E3 kodlu rutinini anlatı üreterek gerekçelendirmesi keşifsel katılımın bir örneği olmuştur.

Elif’in söyleme katılımı ve rutin prosedürlerini uygularken ki yetkinliği incelendiğinde ise katılımcı rutinlerine aksine örnek oluşturmayan tüm görev durumlarında kendinden emin bir şekilde söyleme katılmıştır. Katılımcı sadece denklem ve eşitsizliği tanımlarken ya da bir cebirsel ifadenin denklem ya da eşitsizlik olduğunu belirlerken kullandığı BG-E1 rutinini uygularken özdeşlik içeren ve değişken bilinmeyen ayrımını yapamadığı görev durumlarında tereddütler yaşamıştır:

156. E: Ama şu an kendimle çelişiyorum, çünkü burada eşitsizlik dedim [...] ama ben a ve b yi bilinmeyen olarak düşündüm [*duraksıyor ve parmaklarını yüzüne dokundurarak düşünüyor*]
[156]” <“ $a, b, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ax - b = bx + a$ ” ifadesi hakkında konuşurken>

...

181. E: Burada da direkt aslında bu sıfırlıyor çünkü yani bu iki kare farkı [$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
 $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ifadesini göstererek] ... x ve y yerine ne yazarsam yazayım sağlıyor, o yüzden aslında eşitsizlik dedim yani benim tanımına göre eşitsizlik oluyor aslında [emin gözükmüyor].
- ...
184. A: Peki sıradaki için ne düşünüyorsun? [$x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x - 3y + z = -1$ ifadesini göstererek]
185. E: Yine burada [...] x, z ve y yerine zaten bunlar üç değişkenli oluyor [...] yerine ne yazarsam farklı değer alabileceği için yine eşitsizlik.
186. A: Üç değişken mi var diyorsun?
187. E: Evet.
188. A: Ama yukarıda a ve b yi değişken olarak görmedin doğru mu hatırlıyorum?
189. E: Evet.
190. A: Burada x, y ve z yi hepsini değişken olarak mı isimlendiriyorsun?
191. E: Evet [gülerek] kendimle çeliştim ama.

Elif denklem ve eşitsizliği çözüm kümesi elemanları üzerinden tanımlama yaptığı BG-E1 kodlu rutinini uygularken sıklıkla kararsızlığa düşmüş ve bu durum ses tonu ve yüz ifadelerine yansımıştır. Bu nedenle katılımcının bu rutini katılımcının yetkinliği bağlamında söyleme katılımın ritüel yönlerine örnek teşkil etmiştir. Buna rağmen çözüme ait prosedürleri uygularken kullandığı BG-E4, BG-E5, BG-E7 ve BG-E10 gibi rutinlerinde katılımcının prosedürü nasıl başlatıp nasıl devam ettireceği ve onu nasıl sonlandıracağı noktasında kendinden emin olduğu görülmüştür. Katılımcı çözüm prosedürlerini uygularken kullandığı bu rutinlerinde prosedürü uygularken bağımsız kararlar almış “...önce paydalarını eşitlememiz lazım [253]”, “... bu yüzden de x ’in çözüm kümesi budur [295]”, “...o zaman şöyle olur ... altı oldu [297]”, “...bu şekilde yaptım, sonra buradan değer aralığını belirledim [319]” ve “burada x [...] yani taraf tarafa toplayabilirim [333]” ifadelerine benzer söylemleri sıklıkla kullanmıştır. Bu nedenle katılımcının kendinden emin bir şekilde adımlar attığı ve bağımsız kararlar aldığı BG-E4, BG-E5, BG-E7 ve BG-E10 kodlu rutinleri katılımcının yetkinliği kriteri bağlamında keşifsel katılımın bir örneği olmuştur.

Katılımcının rutinleri uygulanabilirlik açısından ele alındığında Elif; BG-E2, BG-E3, BG-E4, BG-E5, BG-E8, BG-E10 ve BG-E11 kodlu rutinlerini odak grup görüşmelerinde de benzer ve farklı görev durumlarında uygulamıştır. Elif odak grup görüşmelerinde de uyguladığı bu rutinlerden BG-E2, BG-E3, BG-E4 ve BG-E5 kodlu rutinlerinin türünde değişiklik olmamıştır. Buna rağmen BG-E8, BG-E10 ve BG-E11 kodlu rutinlerinde anlatılarının zenginleştiği görülmüştür. Bu nedenle Elif'in BG-E2, BG-E3, BG-E4, BG-E5, BG-E8, BG-E10 ve BG-E11 kodlu rutinleri uygulanabilirlik açısından keşifsel katılımın birer örneği olmuştur. Buna rağmen Elif, denklem ve eşitsizlikleri çözüm kümesindeki eleman sayısına göre betimlediği BG-E1 kodlu rutini özdeşlik içeren görev durumlarında uygulamada güçlük yaşamıştır. Odak grup görüşmelerinde ise bu katılımcının denklem ve eşitsizlik tanımının değiştiği görülmüş ve BG-E1 kodlu rutinin türü değişmiştir. Katılımcının BG-E1 kodlu rutininin tekrarının 10'dan fazla olmasına rağmen bireysel görüşmelerdeki uygulanabilirliği hibrit katılımın bir örneği olmuştur. Bununla birlikte, denklem ve eşitsizlik sistemlerini yok etme metoduyla çözdüğü BG-E7 kodlu rutini hem katılımcının denklem sisteminin çözüm kümesini hatalı yazması hem de eşitsizlik sistemleri için kanonik olmayan bir prosedürü içerdiği (örneğin, Tablo 19) için hibrit katılımın bir örneği olmuştur.

Bu bağlamda katılımcının kriterler bağlamında hangi rutinlerinin hangi katılım türü için örnek teşkil ettiği Tablo 25'te okuyucuya sunulmuştur.

Tablo 25

Elif'in Rutinleri Aracılığıyla Kriterler Bağlamında Bireysel Görüşmede Söyleme Katılım Türü

Kriterler	Ritüel katılım	Hibrit katılım	Keşifsel katılım
Söylemin Nesneleştirilmesi	BG-E4 BG-E5 BG-E7 BG-E9 BG-E10	BG-E1 BG-E2 BG-E3 BG-E6 BG-E7↔BG-E8	BG-E8 BG-E11
Esneklik	BG-E1 BG-E4 BG-E5 BG-E7 BG-E10		BG-E8
Bağlılık-Tutarlılık		BG-E7	BG-E4↔BG-E3 BG-E5↔BG-E3 BG-E8↔BG-E3 BG-E10↔BG-E3
Gerekçelendirme		BG-E1 BG-E2	BG-E3
Katılımcının yetkinliği	BG-E1		BG-E4 BG-E5 BG-E7 BG-E10
Uygulanabilirlik		BG-E1 BG-E7	BG-E2 BG-E3 BG-E4 BG-E5 BG-E8 BG-E10 BG-E11

Sonuç olarak Elif, bireysel görüşmelere rutinleri aracılığıyla katılımının nesneleştirme ve esneklik bağlamında çoğunlukla ritüel bir katılım göstermesine rağmen, bağlılık-tutarlılık, katılımcının yetkinliği ve uygulanabilirlik bağlamında daha keşifsel bir katılım sergilemiştir.

Elif'in Odak Grup Görüşmelerindeki Rutinleri ve Söyleme Katılımına Yönelik Bulgular

Elif'in araştırmacı dahil altı kişiyle yürütülen ve 26 farklı görev durumu hakkında tartışılan odak grup görüşmelerindeki söylemleri incelenmiş ve katılımcının 11 farklı rutini tespit

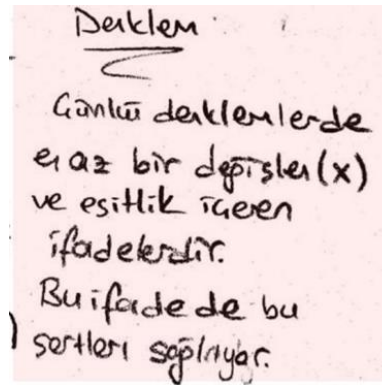
edilmiştir. Katılımcının odak grup görüşmelerinde çoğunlukla sonuç odaklı olduğu ve matematiksel nesneler hakkında anlatılar üretmeyi amaçladığı görülmüştür. Bu nedenle Elif'in odak grup görüşmelerinde tespit edilen rutinlerinin 9'unun keşif, 2'si ise ritüel olarak kodlanmıştır. Katılımcının tespit edilen 11 farklı rutininden 3'ü, bireysel görüşmede de görülen ve rutin türü değişmeden uygulanan BG-E2, BG-E3 ve BG-E5 kodlu rutinleridir. Katılımcının diğer 8 rutininden 5'i, katılımcının bireysel görüşmeden farklı olarak odak grup görüşmelerinde sergilediği OG-E1, OG-E5, OG-E6, OG-E7 ve OG-E8 kodlu rutinleridir. Bu rutinlerden OG-E1 kodlu keşif rutini, bireysel görüşmedeki BG-E1 kodlu ritüel rutin türünün değişmesiyle açığa çıkan bir rutin olmuştur. Katılımcının OG-E2, OG-E3 ve OG-E4 kodlu rutinleri ise sırasıyla BG-E3, BG-E7 ve BG-E8 kodlu bireysel rutinlerindeki anlatılarının zenginleşmesi sonucunda açığa çıkan rutinleri olarak gözlemlenmiştir. Katılımcının denklem ve eşitsizlik kavramlarına yönelik odak grup görüşmelerindeki rutinleri aşağıdaki durumlarda görülmüştür:

- Denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken (keşif rutini)
- Değişken kavramını tanımlarken ya da değişkenler hakkında konuşurken (keşif rutini)
- Çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken (keşif rutini)
- Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken (ritüel rutin)
- Birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken (ritüel rutin)
- Birinci dereceden iki değişkenli denklemleri çözerken (keşif rutini)
- Birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlikleri ve eşitsizlik sistemlerini çözerken (keşif rutini)
- Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken (keşif rutini)
- Birinci dereceden tek değişkenli bağıntıları çözerken (keşif rutini)
- İkinci dereceden tek değişkenli cebirsel ifadelerin alabileceği en büyük ya da en küçük reel sayıyı belirlerken (keşif rutini)

- İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini belirlerken (keşif rutini)

Elif'in bu durumlarda gözlemlenen 11 farklı rutini aracılığıyla söyleme katılım türü incelendiğinde, nesneleştirme bağlamında katılımı hibrit iken bağlılık-tutarlılık, katılımcı yetkinliği ve uygulanabilirlik açısından bireysel görüşmede olduğu gibi keşifsel biçimde olmuştur. Elif rutinlerini gerekçelendirirken ise kimi zaman hibrit, kimi zaman keşifsel bir şekilde katılım sergilemiştir.

Elif'in odak grup görüşmeleri incelendiğinde katılımcının denklem ve eşitsizlik tanımını yaparken kullandığı süreç odaklı BG-E1 kodlu rutininde değişiklikler olmuştur. Bireysel görüşmelerde denklem ve eşitsizliği çözüm kümesindeki eleman sayılarına göre tanımlayan katılımcı, odak grup görüşmelerinde "... denklem içinde en az bir değişken olan ve eşitlik içeren ifadelerdir, eşitsizlikte küçüktür, büyüktür işte büyük-eşittir sembollerini içeren ve içinde bir değişken olan ifadelerdir ve bunlar arasındaki fark ııı [...] sadece şey sembollerden dolayı, sonuçlardan değil. [527-GD3]" şeklinde bir anlatı üretmiştir. Elif bireysel görüşmedeki denklem ve eşitsizliği tanımlama rutininin değiştiğine yönelik bir delil olan bu söylemlerini farklı zamanlarda hem sesli hem de görsel gerçekleştirmelerle onaylamıştır. Bunlardan ilki Şekil 19'da yer alan Elif'in " $11 + 2(x - 3) = 7, \forall x \in \mathbb{R}$ " cebirsel ifadesi için yazılı yanıtı incelendiğinde gözlenmiş ve katılımcı görüşme sürecinde denklemi "eşitlik ve en az bir değişkeni olan ifadelere denir [345-GD1]" şeklinde bir anlatı üreterek tanımlamıştır.



Şekil 19. Elif'in GD1'deki denklem tanımının sözel gerçekleşmesi

Ayrıca GD3’te bir önceki görev durumu olan “ $11 + 2(u - 3) = 2u + 5, u \in \mathbb{R}$ ” özdeşliği hakkında arkadaşı Derya’nın söylemlerinin doğru olmadığını aşağıdaki gibi gerekçelendirmiştir:

520. A: Tamam. Derya sen nasıl bir yorum yaparsın? Denklem nedir, eşitsizlik nedir?

521. D: Denklemden bir değişken olması gerekiyor ve [...] arada eşittir işareti ve eşittir işareti ııı yani ııı kesin bir sonucu olması gerekiyor orada, eşitsizlikte de bir aralık olması gerekiyor yani büyük-eşit, küçük-eşit, küçüktür gibi.

...

527. E: ııı şey denklem içinde en az bir değişken olan ve eşitlik içeren ifadelerdir, eşitsizlikte küçüktür büyüktür işte büyük-eşittir sembollerini içeren ve içinde bir değişken olan ifadelerdir ve bunlar arasındaki fark ııı sadece şey sembollerden dolayı, sonuçlardan değil.

528. A: Tamam. Derya yine dedi ki denklemin kesin bir sonucu olmalı. Bu düşüncen de kararlı mısın? Denklemin mutlaka tek bir sonucu olmalı dedin.

529. D: [...] ııı hayır hocam, yani ııı tam olarak değil. Kararsız kaldım şu an.

530. A: Kararsız kaldın, neden?

531. D: Çünkü hocam konuştuğumuza bakılırsa hani sonuç çıkamayabiliyor hani ikisi özdeş de olabiliyor. Burada kafam karıştı benim.

...

541. E: Hocam bence mesela hani Derya dedi ya kararsız kaldım bir tane olması gerekiyor diye zaten şunu $[11 + 2(u - 3) = 2u + 5, u \in \mathbb{R}]$ cebirsel ifadesini kastederek] çözdüğümüz zaman u elemanıdır reel sayı dedik ve çözüm kümemiz reel sayı oldu yani bir tane sonuç bulmadık.

Burada arkadaşı Derya’nın denklem ve eşitsizliği tanımlama rutini [521-GD3] Elif’in bireysel görüşmedeki rutiniyle benzerlik göstermiş ve Elif arkadaşıyla aynı fikirde olmadığını söylemleriyle belirtmiştir. GD3’te Elif arkadaşıyla aynı fikirde olmadığını hem anlatı üreterek [527-GD3] hem de bir önceki görev durumunda yer alan özdeşliğin çözüm kümesini örnek vererek [541-GD3] gerekçelendirmiştir.

Başka bir örnekte araştırmacı GD5’te tahtaya “ $2x + 3 = 5$ ” denklemini yazmış ve sonrasında araştırmacı ile katılımcılar arasında aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

154. A: [Tahtaya " $2x + 3 = 5$ " ifadesini yazıyor] Şöyle yazdım, bu cebirsel ifade nedir peki?

155. Z: Bu bir denklem.

156. B: Denklem. [...] Değişkeni var, eşitlik de var.

157. Z: Evet, denklem işte bu.

158. A: Denklem mi?

159. <Şule evet anlamında kafa sallıyor>

160. B: Z: Evet.

...

162. A: Herkes katılıyor mu buna?

...

173. E: x 'in ne olduğunu bilmiyoruz o yüzden.

...

184. E: Denklem değil çünkü x 'in ne olduğunu bilmiyoruz, hangi kümeden olduğunu bilmiyoruz, neye göre?

Burada Elif'in denklem tanımının, sadece harf ve sembollere odaklı bir tanım olmadığı görülmüş ve katılımcının değişkenin ait olduğu evrensel kümenin önemine yaptığı vurgu [184-GD5] dikkat çekmiştir. Katılımcı denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduklarını “Çünkü yerine yazdığımız sayıya göre doğruluğu veya yanlışlığı değişiyor [...] bir önerme değil ııı... önerme olmaya açık demiştik. O yüzden böyle ifadelere de açık önerme diyoruz. [70-GD13]” şeklinde belirtmiştir. Bu anlatısını hem GD3'te yer alan “ $11 + 2(y - 3) > 7, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliği için hem de GD13'te yer alan “ $t^2 + 4t = -1, t \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifade için kullandığı sözel gerçekleştirmelerle Şekil 20'deki gibi onaylamıştır:

">, >=, <, <=" işaretlere göre ve sıralama belirten açık önermelerdir.

GD3-Sözel gerçekleştirme

$t^2 + 4t = -1, t \in \mathbb{R}$ cebirsel ifadesine isim vermek gerekirse sence hangi matematiksel

ismi vermek uygun olur? Cevabının gerekçesini/lerini paylaş mısın?

2.dereceden bir değişkenli denklem
2.dereceden bir değişkenli eşitlik taşıyan açık önerme

GD13-Sözel gerçekleştirme

Şekil 20. Elif'in odak grup görüşmelerindeki denklem ve eşitsizlik tanımına yönelik sözel gerçekleştirmeleri

Bireysel görüşmede değişkenin üssü en fazla 2 olacak şekilde x^2 li terim içeren cebirsel ifadelere ikinci dereceden tek değişkenli denklem olarak tanımlayan (BG-E9 kodlu rutin)

Elif'in odak grup görüşmelerinde iki farklı görev durumunda birer açık önerme olarak tanımlaması dikkat çekmiştir. Bu nedenle Elif'in ikinci dereceden denklemleri tanımlama rutini de dahil, denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlama rutininde değişiklik olduğu gözlemlenmiş ve bu yeni rutin OG-E1 olarak kodlanmıştır.

Katılımcı değişken kavramını tanımlarken kullandığı BG-E2 kodlu rutinini odak grup görüşmelerinde sergilemeye devam etmiştir. GD3'te " $11 + 2(y - 3) > 7, y \in \mathbb{R}$ " eşitsizliğinde yer alan " y " gösterimi hakkında konuşurken araştırmacının "Nasıl bir isim atarsınız y için? [68-GD3]" sorusunu Elif "Değişken. [69-GD3] Çünkü daha bu eşitsizliği çözümülemedik ve ne olduğunu bilmiyoruz yani ııı [...] reel sayılardan olduğunu belirtmiş sadece o yüzden değişken [72-GD3]" şeklinde yanıtlamıştır. Değişkenin (y harfinin) " $y \in \mathbb{R}$ " ifadesinden dolayı reel sayıları temsil eden bir gösterim olduğunu belirten katılımcı, değişkenin ait olduğu evrensel kümenin önemini " $2x + 3 = 5$ " cebirsel ifadesinde x harfinin neyi temsil ettiğinin belli olmamasını [184-GD5] vurgulayarak da belirtmiştir. Bununla birlikte GD17'de tahtada çözüm yapan bir arkadaşına " $45 - x$ " için "Kırk beş eksi x 'i bir reel sayı olarak düşün, bir sayıyla çarpıyormuş gibi düşün. [120]" şeklinde bir öneride bulunmuş ve değişkenin bir reel sayıyı temsil ettiğini tekrar ifade etmiştir. Bir başka örnekte ise GD25'te yer alan eşitsizliklerden " $(-t^2 + 4)^2 < 0, t \in \mathbb{R}$ " ifadesinin çözümü için "... şey zaten, burada hani kök bulmaya falan gerek yok [...] hani bir reel sayının karesi sıfırdan küçük olamaz. O yüzden oradan da çözüm kümesi boş diyebiliriz [172-GD25]" söyleminde bulunmuş ve eşitsizliğin solunda yer alan cebirsel ifadenin bir reel sayıyı temsil ettiğini belirtmiştir. Buna rağmen katılımcının odak grup görüşmelerinde de bilinmeyen ayrımının farkında olmadığını görüşmelerin başında "ııı mesela $ax^2 + bx + c$ ifadesinde a, b bilinmeyen, x burada değişken oluyor. [61-GD2]" ve "... deftere baktım küme olarak belirttiğimizde, yani ııı [...] Venn şeması gibi gösterdiğimizde değişkenler mesela bilinmeyenlerin altında pardon bilinmeyenler değişkenlerin altında orayı yazmışım sadece not olarak, oradan aklımda kalmış. [76-GD3]" şeklindeki söylemleriyle belirtmiştir. Katılımcının kafa karışıklığı ilerleyen görüşmelerde de devam etmiş ve GD15'te $ax^2 +$

$bx + c = 0$ ifadesi hakkında konuşurken arkadaşlarının a, b, c harflerinin katsayı olduğunu belirtmesine rağmen Elif, “Ya mesela şey yapıyoruz ya ııı ax kare artı bx artı c [...] orada a, b, c ye bir bilinmeyen diyebilecek miyiz yani? [174-GD15]” şeklinde bir söylemde bulunmuştur.

Odak grup görüşmelerinde çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken katılımcının bireysel görüşmeye kıyasla anlatılarının zenginleştiği görülmüş ve bu nedenle BG-E3 kodlu rutini odak grup görüşmelerinde OG-E2 olarak kodlanmıştır. Çözüm kümesinin elemanlarının her birinin açık önermeyi doğruladığını belirten Elif, “... çözüm kümesi de reel sayılar yani [...] hani yerine her şeyi yazdığımızda, sağlıyor ...[36-GD2]” ve “Burası $(-\frac{3}{2}, \infty)$ aralığını sayı doğrusunda göstererek] yani şu ifadede $-4u - 6 \leq 22$ ifadesini göstererek] onu yerine yazdığımızda bunu doğru yapan değerler. [357-GD8]” şeklinde söylemlerde bulunmuştur. Odak grup görüşmelerinde bireysel görüşmelerden farklı olarak özdeşliklerin özel bir denklem olduğunun farkına varan [541-GD3] Elif, çözüm kümesinin reel sayılar olması durumunda anlatılar üretmiş ve BG-E3 kodlu rutinine ait anlatı kümesini genişletmiştir. Katılımcı işlemleri sonucunda “ $0 = 0$ ” gibi doğru bir önerme elde ettiğinde çözüm kümesinin bir reel sayı olduğunu belirtirmiş ve “Beş eşittir beş olduğu için ııı [...] buradaki u yerine ne yazarsak yazalım doğru olacağı için ve bana da zaten u ’nun reel sayılarda olduğunu söylediği için, o yüzden de u için reel sayılar çözüm kümesi. [107-GD2]” gibi söylemlerde bulunmuştur. Benzer bir durum katılımcının GD4’ teki eşitsizlik çözümünde de görülmüş ve katılımcı bu anlatısını Şekil 21’deki gibi görsel araçlarla da onaylamıştır:

Handwritten mathematical work showing the solution of an equation and an inequality. The left side shows the equation $11 + 2u - 6 = 2u + 5$, which simplifies to $5 = 5$, leading to the solution set $G.K = \{R\}$. The right side shows the inequality $11 + 2v - 6 \leq 2v + 5$, which simplifies to $5 \leq 5$, leading to the solution set $G.K = R$. Both solutions are highlighted in pink boxes.

Şekil 21. Elif’in denklem ve eşitsizlik çözümüne dair görsel araçları

Bununla birlikte Elif, “ $0 = 1$ ” ya da “ $0 > 1$ ” gibi yanlış bir önerme elde ettiğinde ise çözüm kümesinin boş küme olacağını belirtmiş ve bu durumda açık önermenin birer çelişki belirttiğini bir sembolle temsil etmiştir. Bireysel görüşmede Elif’in çözüm kümesi boş küme olan denklem ve eşitsizlik sistemi çözümlerinde Şekil 12’deki gibi “ $0 \neq 30$ ” ve Şekil 13’teki gibi “ $0 < -8$ ” ifadelerinin altına da çelişki durumunu temsil eden “#” sembolünü yazdığı görülmüş fakat katılımcı kurduğu bu ilişkiyi bireysel görüşmelerde sesli bir gerçekleştirmeyle ifade etmemiştir. Buna rağmen odak grup görüşmelerinde “Böyle bir şey doğru değil, böyle bir ifade doğru değil [$28 = 15$ i göstererek] [...] O yüzden bir çelişki < “ $-4(x - 7) = x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesini kastederek> [# sembolünü yazarak] o yüzden çözüm kümesi de boş küme [416-GD5]” söyleminde bulunmuş ve anlatısını Şekil 22’deki görsel araçlarla onaylamıştır:

$$\begin{aligned} \Rightarrow -4x + 28 &= x + 15 - 5x \\ \Rightarrow -4x + 28 &= -4x + 15 \\ &\text{Gösterge} \\ \Rightarrow 28 &= 15 \\ &\text{Gerçekleşme} \\ C.k &= \emptyset \end{aligned}$$

Şekil 22. Elif’in çözüm kümesinin boş küme olduğunu belirten görsel araçları

Elif’in Şekil 23’te ise birinci dereceden denklem ve eşitsizlik çözümlerine yer verilmiş ve bu çözümler incelendiğinde katılımcının çözümlerinin kanonik olduğu ve doğru sonuçlara ulaştığı görülmüştür:

Görev Durumu 1

$11 + 2(x - 3) = 7$ Gösterge

$2(x - 3) = 7 - 11$ Örnekleme 1

$2(x - 3) = -4$ Örnekleme 2

$(x - 3) = -2$ Örnekleme 3

$x = 1$ Örnekleme 4

Görev Durumu 2

$11 + 2(u - 3) = 2u + 5, u \in \mathbb{R}$ Gösterge

$11 + 2u - 6 = 2u + 5$ Örnekleme 1

$11 - 6 = 5$ Örnekleme 2

$5 = 5$ Örnekleme 3

$C.k = \{ \mathbb{R} \}$ Örnekleme 4

Görev Durumu 3

$z - 3 > \frac{4 + z}{5}, z \in \mathbb{R}$ Gösterge

$5z - 15 > 4 + z$ Örnekleme 1

$4z > 19$ Örnekleme 2

$4z > 19$ Örnekleme 3

$z > \frac{19}{4}$ Örnekleme 4

$(\frac{19}{4}, \infty)$ Örnekleme 5

Görev Durumu 4

$11 + 2(v - 3) \leq 2v + 5, v \in \mathbb{R}$ Gösterge

$11 + 2v - 6 \leq 2v + 5$ Örnekleme 1

$11 - 6 \leq 5$ Örnekleme 2

$5 \leq 5$ Örnekleme 3

$5 \leq 5$ Örnekleme 4

$5 \leq 5$ Örnekleme 5

$0 \leq 0$ Örnekleme 6

$C.k = \mathbb{R}$ Örnekleme 7

Şekil 23. Elif'in birinci dereceden denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürü

Diğer taraftan katılımcı, “ $-4(x - 7) = x + 5(3 - x), x \in \mathbb{R}$ ” denkleminin çözümünde atacağın adımları ve bu adımları niçin attığını paylaşır mısın?” şeklindeki beşinci görev durumunda tahtaya kalkarak arkadaşlarıyla çözümünü paylaşma fırsatı bulmuş ve Tablo 26'daki gibi adımları gerçekleştirerek prosedürünü uygulamıştır. Katılımcı bireysel görüşmelerden farklı olarak adımlarını gerekçelendirmek istemesine rağmen söylemlerinde “çarpacağım”, “dağıtarak yazacağım”, “eklersem” gibi insani eylemler içeren ifadeleri yine sıklıkla kullanmıştır.

Tablo 26

Elif'in GD5'te Yer Alan Denklemi Çözme Prosedürü

Görev Durumu 5: “ $-4(x - 7) = x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ denkleminin çözümünde atacağın adımları ve bu adımları niçin attığını paylaşır mısın?”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

324. E: Hocam şimdi ben en başta parantezin içini eksi dörtle çarpacağım, bunu yapmamın sebebi bir teorem olduğu için bunu derste konuşmuştuk ııı [...] içeriye dağıttığımız zaman eksi dört x artı yirmi sekiz eşittir x artı beşi de parantezin içine dağıtarak yazacağım [...] üç kere beş on beş eksi beş x olur (gerçekleşme 1) [...] ııı buradan şurayı düzenlersem şöyle yapayım [işlem adımlarının başına $\Rightarrow$ sembolü ekliyor] [...] eksi dört x artı yirmi sekiz eşittir eksi dört x artı on beş olur (gerçekleşme 2). Her taraftan ııı [...] her tarafa artı dört x eklersem [$-4x$ ifadesinin üzerine çizerek] yirmi sekiz eşittir on beş olur (gerçekleşme 3). Bu da bir çelişkidir (gerçekleşme 4). O yüzden çözüm kümesi boştur (gerçekleşme 5) diyebilirim.

328. E: İçeri dağıttım yani eksi dörtle aslında hem x 'i hem de eksi yediyi çarpım [gerçekleşme 1'i göstererek].

345. E: ıı burada aslında parantezi koymamızın sebebi [$-4(x - 7)$ ifadesini göstererek] de yani bu teorem için önce çarpma hımm [...] işlem önceliğinden dolayı aslında o yüzden onu bize ifade ediyor.

" $-4(x - 7) = x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ " Österge

$\Rightarrow -4x + 28 = x + 15 - 5x$ Gerçekleşme 1

$\Rightarrow -4x + 28 = -4x + 15$ Gerçekleşme 2

$\Rightarrow 28 = 15$ Gerçekleşme 3

$\neq$ Gerçekleşme 4

C.k = $\emptyset$ Gerçekleşme 5

Burada Elif'in prosedürünü "...bunu yapmamın sebebi bir teorem olduğu için bunu derste konuşmuştuk" ifadesinde olduğu gibi geçmiş öğrenme yaşantılarına, "yani bu teorem için önce çarpma hımm [...] işlem önceliğinden dolayı" ifadesinde olduğu gibi otoriteye (ders kaynaklarına) başvurarak ve "İçeri dağıttım yani eksi dörtle aslında hem x 'i hem de eksi yediyi çarpım" gibi eylemlerini açıklayarak gerekçelendirmiştir. Bu durum katılımcının rutin amacının bir anlatı üretmekten ziyade çoğunlukla çözümdeki performansını sergileme amacıyla süreç odaklı olduğunu göstermiştir. Böylece Elif'in bireysel görüşmedeki denklem çözme rutini olan BG-E4 kodlu rutini, prosedürü uygulama açısından değişmeden kalmıştır. Buna rağmen katılımcı bireysel görüşmelerden farklı olarak odak grup

görüşmelerinde birinci dereceden tek değişkenli denklemlerin çözüm kümesinin sonsuz elemanlı olabileceğini belirttiğinden dolayı [541-GD3] denklem çözme sürecinde katılımcının gözünden görev “açık önermeyi (denklemleri) sağlayan reel sayıların kümesini belirlemek” olarak değişmiştir. Bununla birlikte, birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken katılımcının “bir reel sayı aralığı” elde etme göreviyle uyguladığı prosedür, odak grup görüşmelerinde de devam etmiş ve BG-E5 kodlu rutini de değişmeden tekrar (örneğin, Şekil 23’teki GD4 ve GD7’deki cebirsel gerçekleştirmeler) gözlemlenmiştir.

Elif odak grup görüşmelerinde denklem sisteminin çözümü hakkında “...denklem sisteminin ortak bir çözüm kümesi olması gerekiyor. [12-GD9]” söyleminde bulunmuş ve denklem sistemi çözümlerinde bireysel görüşmeden farklı olarak prosedür sonuç ilişkisini kurabilmiştir. Katılımcı bireysel görüşmede denklem sistemlerini yok etme metodu ile kanonik bir şekilde çözmüş fakat çözüm kümesi elemanlarının sıralı ikililerden oluştuğunu fark edememiştir. Buna rağmen odak grup görüşmelerinde bu ilişkinin farkında olduğunu, GD9 da yer alan “ $x - 2y = 4 \wedge y + 2x = 8, x, y \in \mathbb{R}$ ” denklem sisteminin çözüm kümesi hakkında konuşurken “ııı [...] bu da iki denklemin ortak çözümü ve ııı [...] sıralı ikili olarak ifade etmemiz gerekiyor. Yani çözüm kümesi eşittir dörde sıfır [“Ç. $K = \{(4,0)\}$ ” ifadesini yazarak]. [145-GD9]” biçimindeki ifadeleriyle belirtmiştir. Başka bir denklem sisteminin yer aldığı GD22’de de katılımcı, “ $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x^2 - y - 3x = 0 \wedge 3 - x + y = 0$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.” biçimindeki görev durumu için benzer söylemlerde bulunmuştur. Elif ile tahtada prosedürünü uygularken denklem sisteminin çözümünü bulmada güçlük yaşayan arkadaşı Zehra arasında aşağıdaki gibi bir iletişim gerçekleşmiştir:

36. E: Şimdi burada şöyle olması gerekiyor bence [...] burada x ’leri buldun ya.

37. Z: Evet.

38. E: ııı bunlar bir sıralı ikili olmak zorunda [...] o yüzden de x ’i buldun.

39. Z: Hı hı.

40. E: Sıralı ikili olacağından x ’i yerine yazıp y ’yi bulman lazım.

41. Z: Evet.

42. E: x, y sıralı ikilileri olacak çözüm kümesi.

43. Z: Daha mantıklı [...] sanırım ben y nin bir değeri biri sağladığı için ikisini yazınca böyle [...] ikisi denk geldi öyle yaptım ama şimdi yok [...] tamam anladım.

Elif, GD22’de kendi işlemini uygularken kanonik bir çözüm yapmış ve bir “sıralı ikili” elde etmek amacıyla önce “ $x^2 - y - 3x = 0$ ” denkleminde y ’ nin eşiti olan “ $x^2 - 3x$ ” ifadesini “ $3 - x + y = 0$ ” denkleminde yerine yazarak x reel sayıları bulmuştur. Sonrasında her bir x reel sayısına karşılık gelen y reel sayılarını “ $3 - x + y = 0$ ” denklemi aracılığıyla elde ederek sıralı ikililerden oluşan çözüm kümesini yazmıştır. Katılımcının GD22 için kağıdında uyguladığı prosedürün cebirsel gerçekleşmesi Şekil 24’te yer almaktadır.

$$\begin{aligned} & x^2 - 3x = y \\ & 3 - x + y^2 - 3x = 0 \\ & x^2 - 4x + 3 = 0 \\ & \begin{array}{r} x & -3 \\ x & -1 \end{array} \\ & (x-3)(x-1) = 0 \\ & x=3 \vee x=1 \\ & \begin{array}{l} 3-3+y=0 \\ y=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3-1+y=0 \\ y=-2 \end{array} \\ & G.K = \{(3,0), (1,-2)\} \end{aligned}$$

Şekil 24. Elif’in GD22’de yer alan denklem sistemini çözme prosedürü

Odak grup görüşmelerindeki denklem sistemi çözümüne yönelik söylemleri incelendiğinde, katılımcı bireysel görüşmeye kıyasla çoğunlukla anlatı üretmeyi amaçlamış ve ürettiği anlatıları görsel araçlarla onaylamıştır. Bireysel görüşmelerde de analitik düzlemde grafik çizimi yoluyla çözüm kümesine ulaşan Elif, farklı gerçekleştirmeler arasında geçiş yapmakta güçlük yaşamıştır. Buna rağmen odak grup görüşmelerinde prosedür sonuç ilişkisini kurmayı başaran Elif’in anlatıları zenginleşmiştir. Katılımcı “ $x - 2y = 4 \wedge y + 2x = 8, x, y \in \mathbb{R}$ ” denklemlerinin çözüm kümelerini bulunuz. Bu kümeleri düzlemde gösteriniz. Ne gördüğünü paylaşır mısınız?” görev durumunda çözümünü tahtada arkadaşlarıyla paylaşma fırsatı bulmuş ve sıklıkla anlatılar üretmiştir. Elif’in anlatılarını görsel araçlarla onayladığı ve bu süreçte diğer katılımcılarla arasında gerçekleşen iletişimi

Tablo 24’te yer almıştır. Burada Elif, “ $x - 2y = 4 \wedge y + 2x = 8, x, y \in \mathbb{R}$ ” göstergesine ait farklı görsel gerçekleşmeler arasında geçişleri, kanonik bir şekilde yapmış ve bu geçişleri “...şöyle düşünüyorum, mesela orada bir doğru bulduk ya, o doğrunun hepsi [...] yani sonsuz tane nokta var ve reel sayılardayız hepsini yazamayız [...] o doğru aslında direkt çözüm kümesi [157-GD9]”, “Denklemin analitik düzlemdeki çözüm kümesi. [236-GD22] İkisini de doğru yapan değerler [...] iki denklemin yani. [242-GD22]” ve “Açık önermeyi sağlayan, doğru yapan noktalar [250-GD22]” şeklinde anlatılar üreterek gerekçelendirmiştir. Katılımcının farklı gerçekleşmeler arası yaptığı geçişleri görsel araçlarla onayladığı diğer anlatıları da Tablo 27’de italik bir şekilde belirtilmiştir.

Tablo 27

Elif'in GD9'da Yer Alan Denklem Sistemini Çözme Sürecindeki İletişimi

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

55. A: Düzlemde kim gösterecek çözüm kümesini?

56. <Elif el kaldırıyor>

57. A: Gel bakalım Elif.

58. <Elif tahtaya kalkıyor>

...

63. A: Nasıl bulursun Şule? Sen mesela sadece x eksi iki y eşittir dördün çözüm kümesini nasıl bulursun?64. Ş: İki x 'e sıfır verip y 'yi, y 'ye sıfır verip x 'i bulurum ya da [...] mı hani bir yöntem vardı ya mesela [...] sıfır verince ora ne çıkıyor [...] deneyebiliriz de [...] öyle denemeyle de belki olabilir.

65. A: Olabilir belki.

66. E: Hocam ama bunun çözüm kümesi [...] yani hani x ve y reel sayılar ya [...] bir sayı sonsuz tane ve sonsuz tane nokta var. <“ $x - 2y = 4$ ” denkleminin çözüm kümesi hakkında konuşuyor>

...

71. E: Hepsini yazamayız.

72. A: Hepsini yazamayız diyor, katılıyor musunuz?

73. D: Evet.

74. A: Ama bunu göstermenin bir yolu olmalı, sizce bu yol nedir?

75. Z: Yani bunun bence tek başına bence çünkü [...] düzlemde gösterebiliriz ama bence bu çözüm kümesi değil yani düzlemde gösterdiğimiz şey.

76. E: Grafiğini çizmiş oluyoruz.

...

79. Z: Aynen, zaten ikisini birlikte çözmemiz gerekiyor, çözüm kümesine ulaşmamız için, sadece grafiğini çiziyoruz biz şu an.

80. A: Peki tamam [...] haydi devam edelim. Düzlemde gösteriyoruz, nasıl bir yol izlersin?

81. E: Hocam en başta x 'e sıfır verip y 'yi bulurum, bunu yapmamın sebebi aslında eksenleri kestiği noktaları bulup [...] o doğrunun geçtiği yeri göstermek.

82. A: Tamam.

83. E: x sıfır ise [$x = 0$ ifadesini yazarak] mı bir dakika sıfır eksi iki y eşittir dört [$0 - 2y = 4$ yazarak] iki y eksi dört [$2y = -4$ ifadesini yazarak] y eşittir eksi iki [$y = -2$ ifadesini yazarak] Doğru yaptım herhalde? [İşlemimi kontrol ederek] mı sıfıra eksi iki noktası [$(0, -2)$ ifadesini yazarak] bir de y 'ye sıfır vereceğim [$y = 0$ ifadesini yazarak]. O da x eşittir direkt dört olur [$x = 4$ ifadesini yazarak] Bu da dörde sıfır noktası [$(4, 0)$ ifadesini yazarak] bunu da zaten koordinat düzleminde gösterimi şöyle [koordinat sistemini çiziyor ve düzlemde bulunduğu noktaları işaretliyor] şöyle bir doğru olur [$x - 2y = 4$ denkleminin çözüm kümesinin elemanlarının analitik düzlemde belirttiği doğruyu çiziyor]

...

86. A: Bu doğru ile çözüm kümesi arasında nasıl bir ilişki var?

87. D: Çözüm kümesi doğrunun içindeki noktalardan biri olabilir mi? [Gülümsiyor ve tahminde bulunuyor]

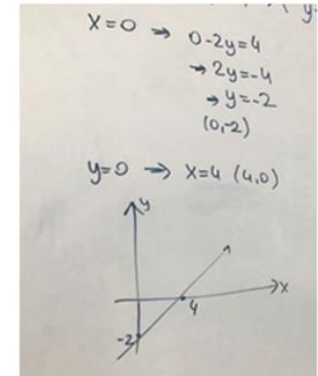
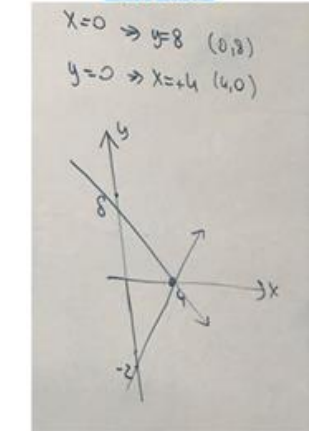
88. E: Hepsini.

...

101. A: Tamam, çizdik. [...] Çizdiğimiz doğru ile çözüm kümesi arasındaki ilişki ne?

102. E: Hocam bu doğru aslında bu denklemin çözüm kümesi yani grafikte gösterilmiş. Buradaki noktaların [$x - 2y = 4$ doğrusunu göstererek] hepsi.

...

116. E: Tamam [...] x sıfır için y işte sekiz olur [$x = 0 \Rightarrow y = 8$ ifadesini yazarak] buradan sıfıra sekiz [$(0, 8)$ ifadesini yazarak] y sıfır için x eksi dört olur [$y = 0 \Rightarrow x = -4$ ifadesini yazarak] yanlış yaptım, dört olur [$+4$ yazarak] mı şey dörde sıfır [$(4, 0)$ ifadesini yazarak] koordinat düzlemi de şöyle olur [koordinat düzlemi çizerek] şurası x noktası şurası y [düzlemde bulunduğu noktaları temsilen işaretliyor ve $y + 2x = 8$ doğrusunu çiziyor] bu şekilde. Tek bir noktada kesişiyorlar.Görsel gerpeklemeler
[83-009]Görsel gerpeklemeler
[116-009]

- ...
117. A: Şimdi yine bu çizmiş olduğun doğru grafiğinin çözüm kümesiyle ilişkisi nedir?
118. <Katılımcılardan yanıt gelmiyor>
119. A: Sen söyle istersen Elif.
120. E: Hocam bence yine *direkt doğrunun kendisi, doğrunun [...] zaten doğru sonsuz noktalardan oluşuyor, bu sonsuz noktaların hepsi bu $y + 2x = 8$ ifadesini göstererek] denklemin çözüm kümesi.*
121. A: O noktalar nasıl ifade ediliyor peki?
122. E: Yani sıralı ikili şeklinde.
- ...
135. A: Peki tamam şimdi bir de yerine koyma metoduyla çözmeye çalış Elif az önce bahsettiğin.
136. E: Evet [...] ıı ben onu aslında ikisinin çözüm kümesi [...] aslında bu noktayı [kesişim yerini göstererek] noktayı bulmak için söylemiştim.
- ...
138. E: İıı şurası x eşittir dört artı iki y olur [...] her tarafa iki y ekledim. [...] ııı sonra burada $y + 2x = 8$ ifadesini göstererek x yerine bu ifadeyi yazacağım. [...] y artı iki çarpı dört artı iki y eşittir sekiz [...] y artı sekiz artı dört y eşittir sekiz [...] şunlar gider [8 sayısının üzerine çizerek] dört y [...] eksi y [...] bir dakika buradan bir şey çıkarmamız gerekiyor [...] yanlış yaptım [tekrar kontrol ederek] dört y artı sekiz eşittir y artı sekiz [ikinci ve üçüncü adımlarını kontrol ediyor]
- ...
143. E: Beş y eşittir sıfır [$5y = 0$ ifadesini yazarak] y buradan sıfır geldi [$y = 0$ ifadesini yazarak] tamam. Doğru tamam, doğru. [Emin olup ilerliyor] y buradan sıfır geldi. y sıfırsa herhangi bir denklemde yerine yazalım. Burada da mesela sıfır artı iki x eşittir sekiz [$0 + 2x = 8$ ifadesini yazarak] x de buradan dört gelir [$x = 4$ ifadesini yazarak]
144. A: Bu ne anlama geliyor?
145. E: İıı bu da iki denklemin ortak çözümü ve [...] ııı sıralı ikili olarak ifade etmemiz gerekiyor. Yani çözüm kümesi eşittir dörde sıfır [$\mathcal{C}.K = \{(4,0)\}$ ifadesini yazarak]
146. Z: Aaaaa! [Hayret ederek]
147. D: Eveet! [Hayret ederek gülümsiyor]
- ...
149. Z: Kesiştikleri nokta zaten ortak çözüm kümeleri oluyormuş [Farkına vararak, hayret ederek]

Görsel gerçekleştirmeler
[138-009]

$$\begin{aligned}x &= 4 + 2y \\ y + 2(4 + 2y) &= 8 \\ y + 8 + 4y &= 8 \\ 4y &= -4\end{aligned}$$

Görsel gerçekleştirmeler
[143-009]

$$\begin{aligned}5y &= 0 \\ y &= 0 \\ 0 + 2x &= 8 \\ x &= 4\end{aligned}$$

Görsel gerçekleştirmeler
[145-009]

$$\mathcal{C}.K = \{(4,0)\}$$

Bireysel görüşmelerde birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlik sistemlerini yok etme metodu kullanarak çözmeye çalışan katılımcı, odak grup görüşmelerinde “Ama sonra ikisi de bir eşitsizlik sistemi ve bence koordinat sisteminde göstermem gerektiğini düşündüm ...[90-GD11]” söyleminde bulunmuş ve sadece analitik düzlemde grafik çizme yoluyla prosedürünü uygulamıştır. Bu süreçte anlatılar üreten Elif, eşitsizliğin “<” ya da “>” bağıntılarını içermesi durumunda analitik düzlemde çizilen doğru grafiğinin kesikli bir şekilde çizilerek temsil edilme sebebini farklı görev durumlarına ait söylemlerinde belirtmiştir:

78. E: Mesela biz burada hani [...] Şule en başta dedi ya bunu bir doğru olarak kabul edelim, bir denklem olarak [...] hani eşitlik olması gerekiyor aslında [...] eşitliğe göre çözdük bir doğru çizdik. Orayı sağlamamasının nedeni orada küçük-eşittir gibi bir ifade yok yani eşitlik olmadığı için o bölgeyi [*eliyle havada doğruyu çiziyor*] almıyoruz [...] o doğruyu sağlamıyor yani. <GD10’da “ $y < 8 - 2x$, $x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğinin çözüm kümesi hakkında konuşurken>

...

105. E: Evet çizgi çizgi yapması gerekiyordu.

...

114. E: Hocam orada büyüktür yani ııı sebebi şu, biz zaten orayı bir eşittir olarak düşündük, aslında o sembolde öyle bir şey içermediği için o çözüm kümesini ifade etmiyor o yüzden.

<GD12’de $8 - 2x - y > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğinin çözüm kümesi hakkında konuşurken>

...

123. E: Doğrunun üzerinde o nokta, o yüzden (eşitsizliği) sağlamıyor <(0,8) sıralı ikilisinin $8 - 2x - y > 0$ doğrulamadığını belirtirken>

GD10’ da yer alan “ $y < 8 - 2x$, $x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğinin çözüm kümesini bulurken $y + 2x - 8 = 0$ doğrusunun ayırdığı ve çözüm kümesinin elemanlarını temsil eden yarı düzlemi belirleyerek, kanonik bir prosedür uygulamış ve anlatılarını onaylamıştır. Benzer prosedürünü GD12’de yer alan “ $x - 2y \geq 4 \wedge y < 8 - 2x$, $x, y \in \mathbb{R}$ ” biçimindeki eşitsizlik sisteminde de uygulayan Elif’in “ $\geq$ ” sembolünü içeren eşitsizlik için $y = \frac{x-4}{2}$ doğrusunu kesikli bir şekilde temsil etmediği görülmüştür. Elif’in anlatılarını onaylayan ve cebirsel-grafiksel gerçekleştirmeleri içeren görsel araçları Şekil 25’teki gibidir:

Görev Durumu 10

Cebirsel gerçeşleşme

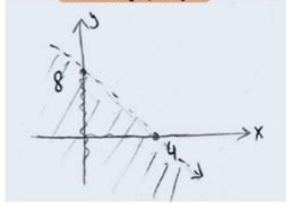
$$y+2x-8 < 0$$

$$y+2x-8 = 0$$

$$y=0 \Rightarrow x=4 \quad (4,0)$$

$$x=0 \Rightarrow y=8 \quad (0,8)$$

Grafiksel gerçeşleşme



Görev Durumu 12

Cebirsel gerçeşleşmeler

$$x-4 \geq 2y$$

$$\frac{x-4}{2} \geq y$$

$$\frac{x-4}{2} = y$$

$$x-4 = 2y$$

$$x=0 \Rightarrow y=-2 \quad (0,-2)$$

$$x=4 \Rightarrow y=0 \quad (4,0)$$

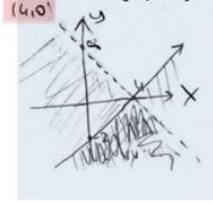
$$y < 8-2x$$

$$y = 8-2x$$

$$x=0 \Rightarrow y=8 \quad (0,8)$$

$$y=0 \Rightarrow x=4 \quad (4,0)$$

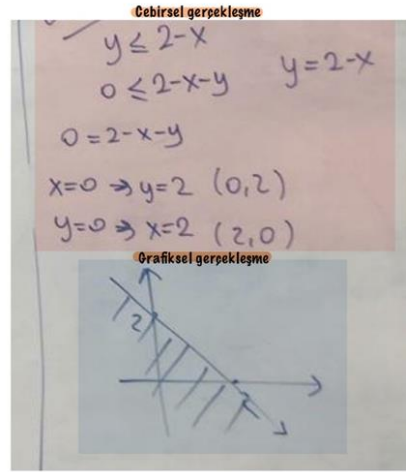
Grafiksel gerçeşleşme



Şekil 25. Elif'in birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sistemi çözme prosedürü

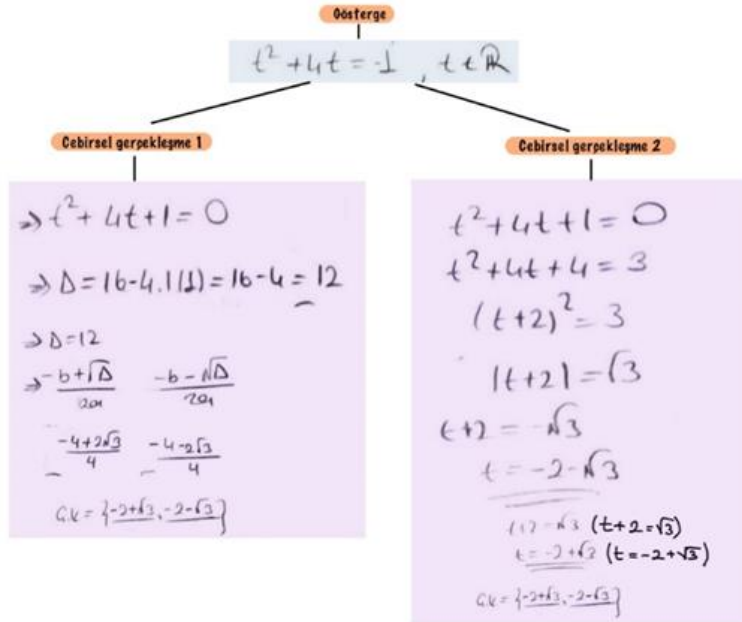
Elif birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sistemlerini çözerken de birinci dereceden iki değişkenli denklemlere dair anlatılarını kullanmış ve eşitsizliklerin çözüm kümelerinin yarı düzlemin bir altkümeleri (bölge) olduğunu "... oradaki aslında bölgenin çözüm kümesi olması gerektiğini düşünüyorum. [249-GD11]" şeklindeki söylemiyle belirtmiştir. GD11'de " $y \leq 2 - x$, $x, y \in \mathbb{R}$ " eşitsizliğini Şekil 26'daki gibi tahtada çözme fırsatı bulan katılımcının söylemleri de prosedürü kanonik bir şekilde uyguladığını göstermiştir:

281. E: İki eksi x eşittir y olur [" $y = 2 - x$ " ifadesini yazarak] buradan x eşit mesela sıfır veririz [...] bir dakika şöyle yazayım [$x = 0$ yazıp siliyor] sıfır eşittir iki eksi x eksi y [" $0 = 2 - x - y$ " ifadesini yazarak] ııı x eşit sıfır ise y iki olur [" $x = 0 \Rightarrow y = 2$ " ifadesini yazarak] y sıfır için yine aynı x iki olur [" $y = 0 \Rightarrow x = 2$ " ifadesini yazarak] [...] ııı ama bu şöyle [...] sıfıra iki, ikiye sıfır [noktaları yazıyor] [koordinat sistemini çizerek noktaları işaretliyor] ikiye iki [...] bu bir doğru belirtecek [doğruyu çizerek] tamam [çizimi tamamlayınca] ııı [eşitsizliğe bakıyor] yani sıfıra sıfır noktasını sağlaması için sıfır veriyorum [...] sıfır küçük-eşittir iki oluyor, o yüzden de aşağıyı tarıyorum [" $y = 2 - x$ " doğrusunun ayırdığı alt yarı düzlemi tarayarak] bu şekilde gösterimi.



Şekil 26. Elif'in " $y \leq 2 - x, x, y \in \mathbb{R}$ " eşitsizliğini çözme prosedürü

Bireysel görüşmelerde ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çarpanlara ayırma yoluyla çözen Elif, odak grup görüşmelerinde iki farklı yol daha kullanarak prosedürünü uygulamıştır. GD13'te " $t^2 + 4t = -1, t \in \mathbb{R}$ " cebirsel ifadesini önce çarpanlarına ayırmaya çalıştığını "...baktım, ayrılmadığını gördüm. [133-GD13]" söylemiyle belirtmiş ve denklemin çözümlerini hem $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formüllerini kullanarak hem de cebirsel ifadeyi bir tam kareye çevirerek Şekil 27'deki gibi çözmüştür:



Şekil 27. Elif'in " $t^2 + 4t = -1, t \in \mathbb{R}$ " biçimindeki ikinci dereceden denklemi çözme prosedürleri

Katılımcı GD13'te prosedürü uygularken $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formüllerini hatırlama da güçlük yaşadığını "... şu an formülü unuttum, biliyorum da [83-GD13] ... İki miydi, bir miydi? Neyse [yazdığını siliyor] [108-GD13]" şeklinde belirtmiş fakat diğer yoldan çözüme ulaşınca "Bunun böyle olduğunu biliyoruz, o zaman burası ikiymiş. [114-GD13]" çıkarımını yaparak formülü doğru bir şekilde yazmayı başarmıştır. Katılımcı benzer şekilde GD14'te " $x^2 - 6x + 2, x \in \mathbb{R}$ " denkleminin çözümünde de kanonik bir şekilde uygulamıştır. Buna rağmen katılımcı GD15'te yer alan " $(m + 1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0, m \in \mathbb{R} - \{-1\}, x \in \mathbb{R}$ " cebirsel ifadesinin ikinci dereceden tek değişkenli denklem olduğunu, Şekil 28'deki gibi kağıdında belirtmiş fakat eşitliği sağlayan x reel sayıları için "bence belirleyemeyiz" ifadesini yazmıştır:

" $(m + 1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0, m \in \mathbb{R} - \{-1\}, x \in \mathbb{R}$ " cebirsel ifadesi için,

- i) Hangi matematiksel ismi uygun gördüğünü gerekçeleriyle açıkla mısın?
2. dereceden tek değişkenli eşitlik taahhütü olark önerme yoldan. 2. der. tek. de. eşitlikli denklem
- ii) m ve x harflerine verilebilecek isim veya isimler neler olabilir? Önerebileceğin isimler var mı? Varsa niçin bu matematiksel isimleri önerdiğini gerekçeleriyle açıkla mısın?
 $m \Rightarrow$ genelleştirilmiş reel sayı ya da bilinmeyen
 $x \Rightarrow$ değişken
- iii) Yukarıdaki eşitliği sağlayan x reel sayılarını belirleyebilir misin? Bu belirlemede attığın adımları gerekçeleriyle paylaşır mısın?
bence belirleyemeyiz

Şekil 28. Elif'in GD15'e yönelik sözel gerçekleştirmeleri

Görüşme sürecinde Elif bu durumu "...ben aslında orada m 'leri falan toparlamaya çalıştım [...] oradan da gelmedi, o yüzden bulamadım. [195-GD15]" biçiminde söylemleriyle ifade etmiştir. Bununla birlikte katılımcı ikinci dereceden denklemin çözüm kümesinin elemanlarını bireysel görüşmede olduğu gibi odak grup görüşmelerinde de farklı görev durumlarında "kök" terimini kullanarak ifade etmiştir. GD15'te tahtada görev durumunu $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülü aracılığıyla prosedürü uygulayarak " $\mathcal{C}.K = \{\frac{-m+1}{m+1}, -1\}$ " şeklinde bir sonuca ulaşan ve bu sonucun m reel sayılarını temsil eden çözüm kümesi olduğunu belirten arkadaşı Burcu'ya "Denklemin çözüm kümesi [256-GD15] ... x yerine bunu yazacağız [258-GD15] bu zaten kökleri [260-GD15]" şeklinde bir öneride bulunmuştur. GD21'de arkadaşı Zehra'ya " $-y = x^2 - 50x - 660$ " bağıntısının grafiği kestiği noktaları

bulurken nasıl bir prosedür uygulayacağını “...bu denklemin bunun kökleri değil aslında bu ifadeyi sıfıra eşitleyip ondan sonra eksiyle çarparsa oradan kökleri bulur. [87-GD21]” şeklinde izah etmiştir. Bir diğer örnek ise GD23’te “ $x^2 - 4x + 3 = 0$ ” göstergesine ait “ $x = 3 \vee x = 1$ ” gerçekleşmesini açıklarken “...önce denklemin köklerini buldum ...[117-GD23]” ifadesinde görülmüştür. Elif ikinci dereceden denklemlerin çözümlerini bulmak için cebirsel ifadenin sıfıra eşitlenmesi gerektiğini vurguladığı bir diğer söylemleri de aşağıdaki gibidir:

144. A: Kök bulurken y ’ye mi eşitleriz? <GD21’de “ $-x^2 + 50x + 600 = -y$ ” cebirsel ifadesi hakkında konuşurken>

145. E: Hayır sıfıra.

...

98. Z: Sonrada buradan [$y(y + 2) = 0$ ifadesini göstererek] acaba eşitsizlikteki kök bulur gibi öyle mi yapacağız? [Araştırmacıya bakarak onay istiyor]

99. E: Hı hı kök bulacağız. [$y(y + 2) = 0$ ifadesini hakkında arkadaşını onaylayarak]

Elif odak grup görüşmelerinde GD22, GD23, GD24 ve GD25’te yer alan görev durumları için prosedürü uygularken eşitsizlikleri sıfıra eşitleyerek ikinci dereceden denklemler elde etmiş ve bu denklemlerin çözümlerini Şekil 29’daki gibi çarpanlara ayırma yöntemiyle yapmıştır:

Görev Durumu 22: $x^2 - 4x + 3 = 0$
 $x \quad -3$
 $x \quad -1$
 $(x-3) \cdot (x-1) = 0$
 $x=3 \vee x=1$

Görev Durumu 24: $y^2 - 5y + 6 = 0$
 $y \quad -3 \quad (y$
 $y \quad -2$
 $(y-3) \cdot (y-2) = 0$
 $y=3 \vee y=2$

Görev Durumu 25: $t^2 - 8t + 16 = 0$
 $t \quad -4$
 $t \quad -4$
 $t=4 \vee t=4$

Şekil 29. Elif’in ikinci dereceden denklemlerin çözümlerini çarpanlarına ayırma yöntemiyle belirleme prosedürü

Odak grup görüşmelerinde bireysel görüşmelerden farklı olarak ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri içeren görev durumlarına yer verilmiş ve Elif’in bireysel görüşmelerde denklemin çözümleri ve diskriminantı arasında kurduğu ilişkiye yönelik BG-E11 kodlu rutinine dair anlatıları zenginleşmiştir. GD25’te “ $t^2 - 2t + 3 > 0$ ” eşitsizliği

hakkında konuşurken araştırmacının Burcu'ya “Bu eşitsizliğin denklem halini yazıp oraya çözüm kümesi boş yazmışsın. Neden?” sorusuyla başlayan iletişimde Elif aşağıdaki söylemlerde bulunmuştur:

97. B: Ben diskriminantına niye bakmadım onu anlamadım çarpanlarına ayıramadım, sonra hemen kök yok dedim ama yanlış bence, diskriminantına bakmam gerekiyordu, ama unutmuşum.

...

100. A: Mesela kök yoksa çözüm kümesi yoktur diyebilir miyiz?

101. Z: Hayır, reel kök yok çünkü.

102. B: Kök bulamadığım için.

103. Z: Her şey çarpanlarına ayrılmıyor yani.

104. E: x eksenini kesmediğini söyleyebilir.

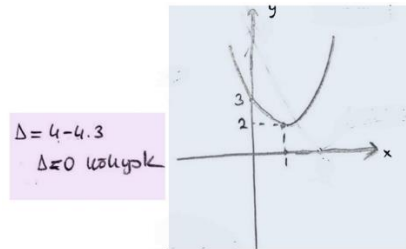
105. A: Reel kök mü yok deriz?

106. Z: Hayır.

107. A: Yoksa?

108. E: Sadece x eksenini kesmediğini söyleriz.

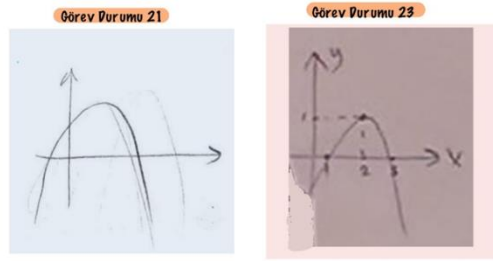
Burada Elif “ $t^2 - 2t + 3 = 0$ ” biçimindeki ikinci dereceden tek değişkenli denklemin çözümünün olmaması durumunu “ $y = x^2 - 2x + 3$ ” bağıntısının grafiğinin x eksenini kesmemesi durumuyla ilişkilendirmiş ve bu söylemlerini Şekil 30'daki görsel araçlarla onaylamıştır:



Şekil 30. Elif'in ikinci dereceden tek değişkenli denklemlere yönelik görsel araçları

Bir başka örnekte ise Elif, GD21'de yer alan problem içeren görev durumunu cebirsel ifadeye çevirerek “ $-x^2 + 50x + 600$ ” şeklinde bir cebirsel ifade elde etmiş ve x eksenini iki farklı noktada kesen temsili bir parabol çizmiştir. Katılımcı söylemlerinde “Sonrada işte diskriminantta falan hiç girmeyeyim dedim <cebirsel ifadenin katsayıları büyük olduğu için> nasıl olsa biri artı da biri eksi de kesiyor diye, öylesine [gülerek] bir şey çizdim.

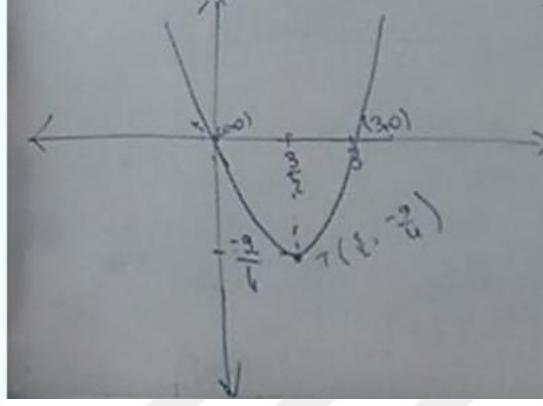
[224-GD21]” şeklinde belirtmiştir. Araştırmacının tahtada prosedürünü uygulayan arkadaşı Burcu’ya yönelttiği “Biz neden kök buluyoruz? [180]” sorusuna arkadaşı sessiz kalınca “Çünkü grafiğin x eksenini kestiği noktaları buluyoruz [182-GD21]” şeklinde yanıtlamıştır. Benzer şekilde katılımcı tahtada GD23’te “ $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ ” eşitsizliğini “ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ” fonksiyonunun grafiğini aracılığıyla çözerken önce “ $x^2 - 4x + 3 = 0$ ” denkleminin çözümlerini bulmuş ve “...önce denklemin köklerini buldum, bunlar parabolde x eksenini kestiği noktalar olacak. [117-GD23]” şeklinde anlatı üretmiştir. Elif’in GD21 ve GD23 için anlatılarını onaylayan grafiksel gerçekleştirmeler Şekil 31’deki gibidir:



Şekil 31. Elif’in GD21 ve GD23 için anlatılarını onaylayan görsel araçları

Bu durum Elif’in birinci dereceden iki değişkenli denklemlerde olduğu gibi ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerin de farklı gerçekleştirmeleri arasında geçişleri yaptığını göstermiştir. Elif, GD25’te tahtada “ $y = x^2 - 2x + 3$ ” bağıntısına yönelik prosedürünü uygulayan ve grafiğini çizen arkadaşı Derya’ya “Çözüm kümemiz parabolün kendisi değil mi? [249-GD25], Yani paraboldeki noktalar, sonsuz nokta var ya. [251-GD25]” şeklinde önerilerde bulunmuştur. Bir başka görev durumu olan GD22’de “ $x^2 - y - 3x = 0$ ” denkleminin çözüm kümesini temsilen çizilen Şekil 32’deki parabolün grafiksel gerçekleşmesi için “İkinci dereceden tek değişkenli denklemin [$x^2 - 3x = y$] cebirsel ifadesini kastederek] analitik düzlemde gösterimi. [186-GD22]” söyleminde bulunmuştur. Araştırmacının “Peki neden bu şekilde bir grafik çıkıyor, denklemle bu grafiğin arasındaki ilişkiyi nasıl yorumlayabiliriz?” sorusunu “Parabolün denklemi ikinci dereceden. [192-GD22] Bunu göstermemizin sebebi de kökleri [...] ve dediğimiz gibi bir

sürü nokta var sonsuz nokta var, hepsini belirleyemeyeceğimiz için belirli noktaları buluyoruz [...] (*parabol*) bu noktalardan geçen temsili gösterimimiz. [194-GD22]” şeklindeki anlatılarıyla yanıtlamıştır:



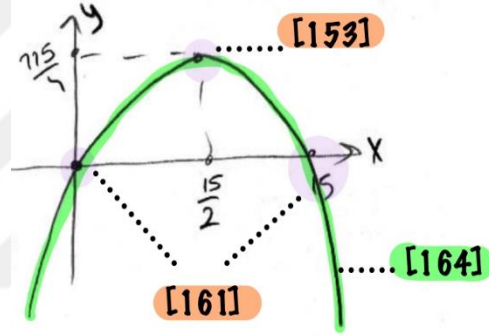
Şekil 32. “ $x^2 - 3x = y$ ” bağıntısının grafiksel bir gerçekleşmesi

GD19’da “İkisi de 3 ten küçük olmayan ve birbirinden farklı iki reel sayının toplamı 15 ise bu iki reel sayının çarpımının alabileceği en küçük ve en büyük reel sayıyı belirleyebilir misin? Bu belirleme sürecinde attığın adımları gerekçeleriyle paylaşır mısın?” görev durumunda tahtada prosedürünü arkadaşlarıyla paylaşma fırsatı bulan Elif, sözel ifadeyi “ $y = x(15 - x)$ ” biçiminde cebirsel bir ifadeye çevirmiş ve parabol eğrisi için “...belirli noktaları buluyoruz [...] (*parabol*) bu noktalardan geçen temsili gösterim [194-GD22]” söylemini onaylayan prosedürünü uygulamıştır. Elif’in bir parabol eğrisi çizmek için söyleminde bahsettiği “belirli noktaların” $f(x) = 15x - x^2$ fonksiyonunun tepe noktası ile “ $x(15 - x) = 0$ ” denkleminin çözümleri olduğu görülmüştür. Bu süreçte katılımcının diğer katılımcılarla arasındaki iletişimi ve prosedürü Tablo 28’ deki gibidir.

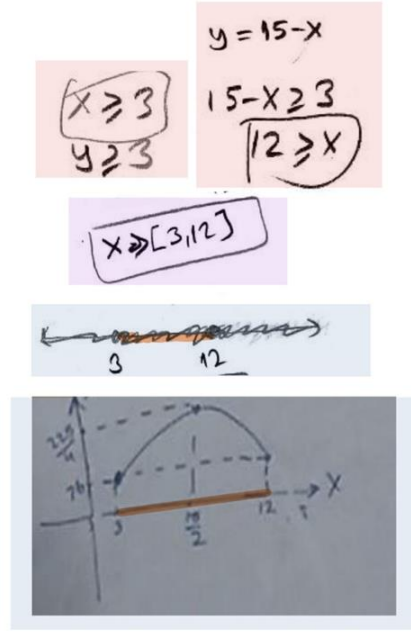
Tablo 28

Elif'in $f(x) = 15x - x^2$ Fonksiyonunun Grafiğini Çizerken Uyguladığı Prosedürü

Ne söylüyor?	Ne yapıyor?
140. E: Bu ifade bir parabol [$y = x(15 - x)$ ifadesini göstererek] belirtir.	$f(x) = 15x - x^2$ [140]
141. A: Evet bize bu parabolü çizebilir misin?	$\frac{15}{2 \cdot 1} = \frac{15}{2}$ [153]
142. <Elif tahtaya $y = 15x - x^2$ ifadesini yazıyor>	$\frac{225}{2} - \frac{225}{4}$ [161]
143. A: Bir parabolü çizmek için hangi adımları izliyorsun Elif?	
144. E: Önce tepe noktasını belirliyorum, sonra köklerini belirliyorum.	
145. Z: Ama tepe noktası burada direkt eski x [...] x değil mi?	
146. E: Tııhh, eksi b bölü iki a. Burası b ya [$15x$ teriminin katsayısını göstererek]	
...	
152. A: Evet tamam devam et bakalım.	
153. E: Burada tepe noktası [...] on beş bölü iki a 'dan [...] iki çarpı eksi birden on beş bölü iki gelecek [...] şurası on beş bölü ikiye [x ekseninde işaretleyerek] iki yüz yirmi beş bölü dörtü galiba [tepe noktasını belirleyerek].	
...	
158. A: Tamam <Elif noktanın yerini belirliyor>	
159. E: Sonra buradan kolları aşağı doğru olacak çünkü x karenin önündeki değer [göstererek] negatif	
160. A: Hı hı.	
161. E: Sonra kökleri de direkt aslında şuradan [$y = x(15 - x)$ ifadesini göstererek] ayrılmış şekilde var [...] x , sıfır ve on beş [işaretleyerek]	
...	
164. E: Sonra buradan şöyle [eğriyi çizerek] bir çizmemiz gerekiyor.	



Burada Elif parabol eğrisini çizdikten sonra x ve y olarak isimlendirdiği birbirinden farklı iki reel sayının 3'ten küçük olmaması durumunu kullanarak, x sayısı için bir aralık belirlemiş ve grafiğini problem durumuna uygun bir şekilde yeniden düzenlemiştir. Katılımcı elde ettiği grafikten yola çıkarak “En büyük değer iki yüz yirmi beş bölü dört, en küçük değerde otuz altı. [211-GD19]” şeklinde prosedürünü sonlandırmıştır. Şekil 33'te katılımcının bu süreçte kullandığı görsel araçlar yer almaktadır:



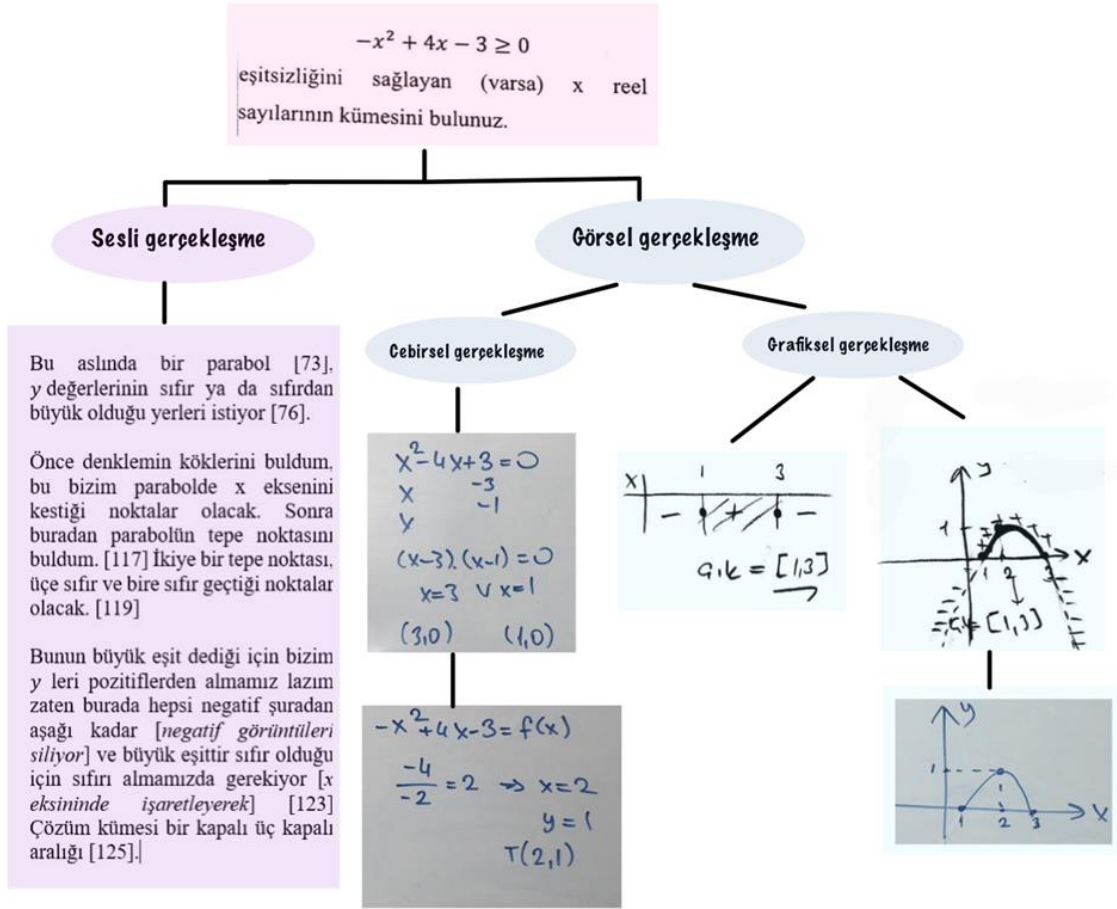
Şekil 33. Elif'in GD19'da için uyguladığı prosedürün görsel gerçekleştirmeleri

Benzer prosedürü GD20'de yer alan “Çevresi 24 birim olan bir dikdörtgensel bölgenin alanının en çok kaç birim kare olacağını tespit edebilir misin? Bu tespit sürecinde attığın adımları gerekçeleriyle paylaşır mısın?” görev durumu için de uygulayan katılımcı sözel ifadeyi “ $a(12 - a)$ ” biçiminde cebirsel ifadeye çevirmiş ve “ $f(x) = 12x - x^2$ ” fonksiyonun en büyük değerini tepe noktası aracılığıyla belirlemiştir. Arkadaşı Burcu'nun tahtada prosedürünü uygularken dikdörtgensel bölgenin alanının en çok 36 olduğunu ve bu noktanın tepe noktasının ordinatına karşılık geldiğini “Otuz altı. Direkt k 'sı yani [138-GD20]” şeklinde ifade etmiştir. Katılımcının GD21'de kağıdındaki çözümler incelendiğinde “satıcının bir günlük satıştan elde edebileceği paranın TL cinsinden en çok ne kadar olabileceğini [GD21]” bulmak için elde ettiği “ $-x^2 + 50x + 600$ ” cebirsel ifadesi için katsayılar “Çok büyük olduğu için [229-GD21]” grafik üzerinde noktaları belirlemeye gerek duymadan Şekil 34'teki gibi tepe noktasının ordinatını hesapladığı görülmüş ve GD20'deki anlatısını onaylamıştır:

$$\begin{aligned}
k &= \frac{4ac - b^2}{4a} \\
&\rightarrow \frac{4 \cdot (-1) \cdot 600 - 2500}{-4} \\
&\rightarrow \frac{-4 \cdot 600 - 2500}{-4} \\
&\rightarrow \frac{-2400 - 2500}{-4} = \frac{-4900}{-4} \\
&\rightarrow \frac{49 \cdot 100}{4} = \frac{49}{25} \cdot 4 \\
&\rightarrow \frac{49 \cdot 100}{4} = \frac{49}{25} \cdot 4 \\
&\rightarrow \frac{49 \cdot 100}{4} = \frac{49}{25} \cdot 4 \\
k &= \underline{\underline{1325}}
\end{aligned}$$

Şekil 34. Elif'in $f(x) = -x^2 + 50x + 600$ fonksiyonunun tepe noktasının ordinatını bulurken kullandığı görsel araçlar

Odak grup görüşmelerinde ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini bulurken de göstergelerin farklı gerçekleştirmelerini kullanan ve bu gerçekleştirmeler arası geçişleri yapabilen Elif'in çözümlerinin kanonik olduğu görülmüştür. Katılımcı ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri ve eşitsizlik sistemlerini hem işaret tablosu oluşturarak hem de analitik düzlemde grafik çizme yoluyla iki farklı prosedür uygulayarak çözmüştür. GD23'te yer alan " $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan (varsa) x reel sayılarının kümesini bulunuz." görev durumunda Elif, " $-x^2 + 4x - 3$ " cebirsel ifadesinin pozitif ya da sıfır yapan x reel sayılarını belirlemek için hem eşitsizlik sistemlerini çözmede sıklıkla kullanılan işaret tablosu yöntemini hem de " $y = -x^2 + 4x - 3$ " bağıntısının grafiğini kullanmıştır. Bu prosedürler arasında geçişi nasıl yaptığını "Bu aslında bir parabol [73-GD23], y değerlerinin sıfır ya da sıfırdan büyük olduğu yerleri istiyor [76-GD23]" ve "Bunun büyük- eşit dediği için bizim y leri pozitiflerden almamız lazım <işaret tablosunda + yazılı aralıkları kastederek>... ve büyük-eşittir sıfır olduğu için sıfır (yapanı) da almamızda gerekiyor [123-GD23]" şeklinde anlatılarla belirtmiştir. Katılımcının " $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan (varsa) x reel sayılarının kümesini bulunuz." göstergesine ait sesli ve görsel gerçekleştirmelerini içeren gerçekleştirme ağacı Şekil 35'teki gibidir:



Şekil 35. Elif'in GD23'e ait gerçekleşme ağacı

Katılımcı GD26'da " $-2x^2 - 4x - 2 \leq 0$ " eşitsizliğini doğru önerme yapan x reel sayılarını belirlerken attığı adımları arkadaşlarıyla paylaşma fırsatı bulmuş ve aşağıdaki söylemlerde bulunmuştur:

339. E: Evet kök buluyorum.

340. $<-2x^2 - 4x - 2$ ifadesindeki her bir terimi 2'ye bölüyor> (gerçekleşme 1)

...

343. E: Eksi x kare eksik iki x eksik küçük-eşit sıfır (gerçekleşme 2). Tamam x kare artı iki x artı bir eşittir sıfır [...] x 'e x , bire bir [çarpanlarına ayırıyor] (gerçekleşme 3).

...

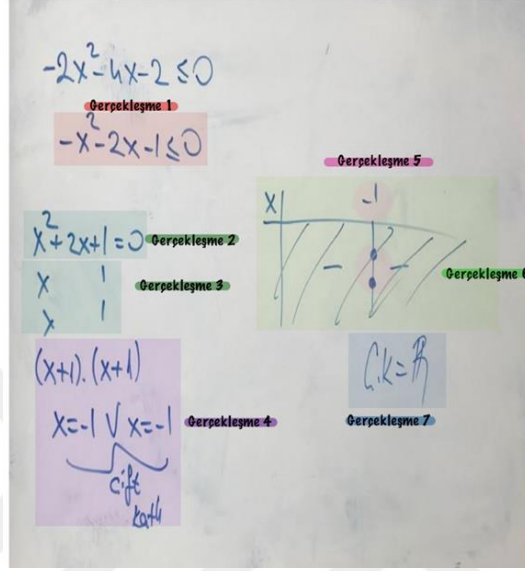
347. $<Elif$ çözüme devam ediyor> (gerçekleşme 4)

...

350. Sonra işte böyle [işaret tablosu çiziyor] sonra eksik birmiş [işaretliyor] sonra küçük-eşittir dediği için bunu da içine alacağım (gerçekleşme 5). Sonra [...] eksiyle başladım [$-x^2$ ifadesini

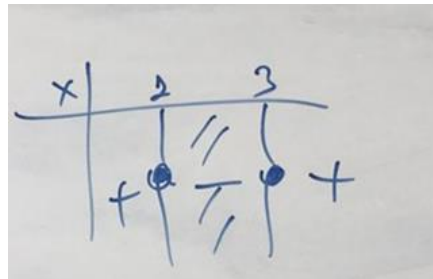
göstererek] eksi, eksi sonra hepsi sağladığı için [karalayarak] (gerçekleşme 6) çözüm kümemiz reel sayılar (gerçekleşme 7) böyle oluyor.

Elif'in GD26'daki söylemlerine karşılık uyguladığı prosedürün görsel gerçekleşmesi Şekil 36'daki gibidir:



Şekil 36. Elif'in “ $-2x^2 - 4x - 2 \leq 0$ ” eşitsizliğine yönelik prosedürün görsel gerçekleşmesi

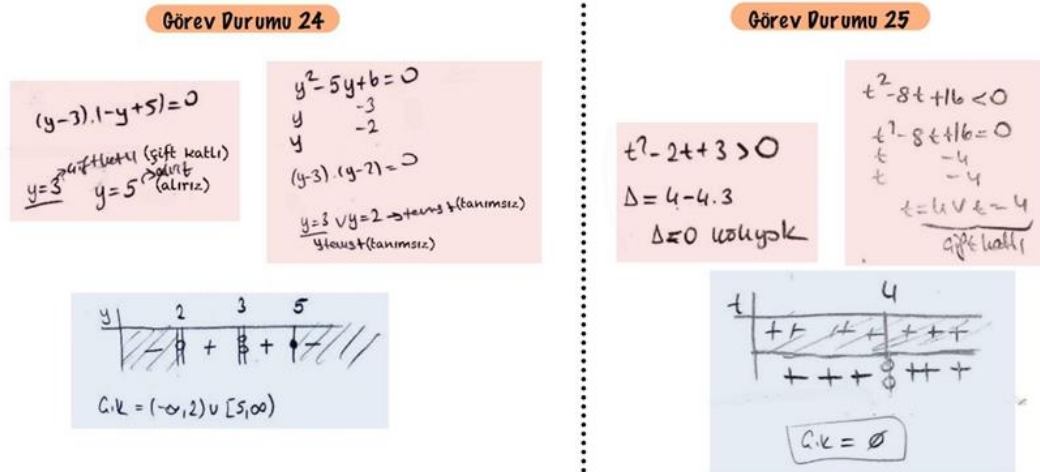
GD23'te arkadaşı Derya “ $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ ” eşitsizliğinin çözüm kümesini bulmak için prosedürünü uygularken Şekil 37'deki gibi işaret tablosu yapmıştır. Araştırmacının “Bu tabloya göre üçün sağına artı yazdı arkadaşınız, bu ne anlama geliyor?[176]” şeklinde yönelttiği soruya Elif “Parabolün üçten sonrası pozitif, kolları yukarı doğru. [177-GD23]” şeklinde yanıtlamıştır.



Şekil 37. “ $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ ” eşitsizliğinin çözümüne yönelik görsel gerçekleşme

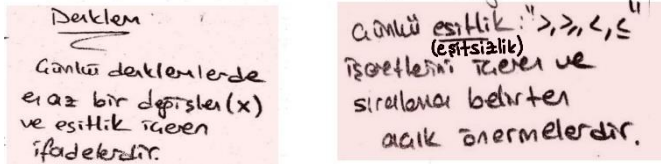
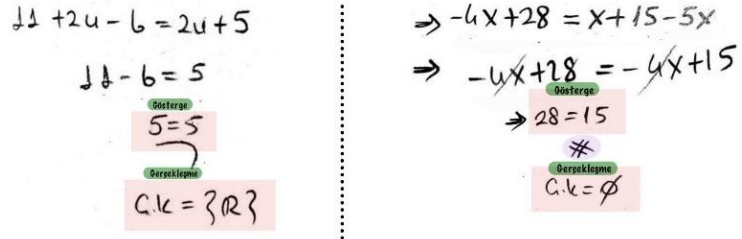
Şekil 38. Elif'in eşitsizlik ve eşitsizlik sistemlerini çözme prosedürü

176

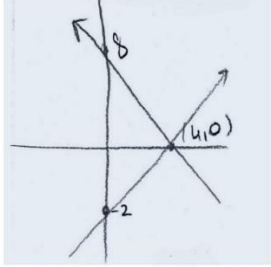


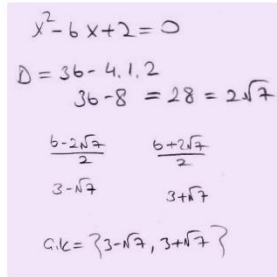
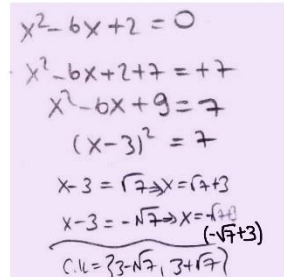
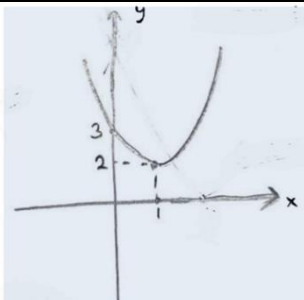
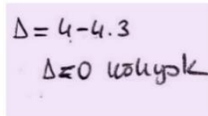
Tablo 29

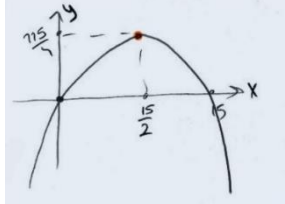
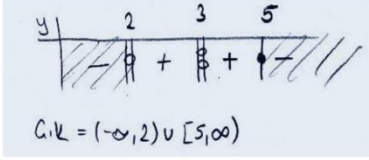
Elif'in Odak Grup Görüşmelerindeki Rutin Profili

Rutin kodu	Ne zaman?	Nasıl? Görev	Gerçekleşme	Prosedür	Tekrarı(Zamanı)
OG-E1	Denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken	Eşitlik bağıntısı içeren açık önermeleri “denklem” sıralama bağıntısı içeren açık önermeleri “eşitsizlik” olarak tanımlamak	Sesli	E: İn şey denklem içinde en az bir değişken olan ve eşitlik içeren ifadelerdir, eşitsizlikte küçüktür büyüktür işte büyük-eşittir sembollerini içeren ve içinde bir değişken olan ifadelerdir ve bunlar arasındaki fark ını sadece şey sembollerden dolayı, sonuçlardan değil. [527-GD3] E: “Eşitlik ve en az bir değişkeni olan ifadelere denir [345-GD1]	8 (GD1, GD2, GD3, GD5, GD21, GD22, GD23, GD25)
			Sözel		4 (GD1, GD3, GD13, GD15)
BG-E2	Değişken kavramını tanımlarken ya da “değişken” kavramı hakkında konuşurken	Evrensel kümedeki her reel sayıyı alabilen harfi (leri) “değişken” olarak tanımlamak	Sesli	E: Değişken. [69-GD3] Çünkü daha bu eşitsizliği çözülmedik ve ne olduğunu bilmiyoruz yani ını reel sayılardan olduğunu belirtmiş sadece o yüzden değişken [72-GD3] E: Kırk beş eksi x'i bir reel sayı olarak düşün [120-GD17]	5 (GD2, GD3, GD15, GD17, GD25)
OG-E2*	Çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken	Çözüm kümesinin elemanını değişken yerine yazarak açık önermeyi doğrulamak (BG-E3) İşlemleri sonucunda doğru bir önerme elde ettiğinde çözüm kümesini reel sayılar, yanlış bir önerme elde ettiğinde boş küme olarak belirlemek	Sesli	E ... çözüm kümesi de reel sayılar yani [...] hani yerine her şeyi yazdığımızda, sağlıyor [36-GD2] E: Beş eşittir beş olduğu için ını buradaki u yerine ne yazarsak yazalım doğru olacağı için ve bana da zaten u'nun reel sayılarda olduğunu söylediği için, o yüzden de u için reel sayılar çözüm kümesi. [107-GD2] E: Böyle bir şey doğru değil, böyle bir ifade doğru değil [28 = 15 i göstererek] [...] O yüzden bir çelişki [# sembolünü yazarak] o yüzden çözüm kümesi de boş küme [416-GD5] E: İkisini de doğru yapan değerler [...] iki denklemi yani. [242-GD22] E: E: Açık önermeyi sağlayan, doğru yapan noktalar [250-GD22] E: ... hepsi sağladığı için [...] çözüm kümemiz reel sayılar [350-GD26]	10 (GD2, GD5, GD8, GD12, GD14, GD15, GD18, GD22, GD26)
			Cebirsel		3 (GD2, GD4, GD5)

BG-E4	Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken	Denklemleri sağlayan reel sayıların kümesini belirlemek*	Sözel-Cebirsel	Ne söylüyor? E: Hocam şimdi ben en başta parantezin içini eksi dörtle çarpacağım, bunu yapmamın sebebi bir teorem olduğu için bunu derste konuşmuştuk ııı [...] içeriye dağıttığımız zaman eksi dört x artı yirmi sekiz eşittir x artı beşi de parantezin içine dağıtarak yazacağım [...] üç kere beş on beş eksi beş x olur (<i>gerçekleşme 1</i>) [...] ııı buradan şurayı düzenlersem şöyle yapayım [<i>işlem adımlarının başına</i> $\Rightarrow$ <i>sembolü ekliyor</i>] [...] eksi dört x artı yirmi sekiz eşittir eksi dört x artı on beş olur (<i>gerçekleşme 2</i>). Her taraftan ııı [...] her tarafa artı dört x eklersem [$-4x$ ifadesinin üzerini çizerek] yirmi sekiz eşittir on beş olur (<i>gerçekleşme 3</i>). Bu da bir çelişkidir (<i>gerçekleşme 4</i>). O yüzden çözüm kümesi boştur (<i>gerçekleşme 5</i>) diyebilirim. [324-GD5]	Ne yapıyor? "$-4(x-7) = x+5(3-x), x \in \mathbb{R}$" Ööstege $\Rightarrow -4x+28 = x+15-5x$ Gerçekleşme 1 $\Rightarrow -4x+28 = -4x+15$ Gerçekleşme 2 $\Rightarrow 28=15$ Gerçekleşme 3 $\neq$ Gerçekleşme 4 C.k = $\emptyset$ Gerçekleşme 5	6 (GD1, GD2, GD5, GD6, GD16, GD17)
BG-E5	Birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken	Bir reel sayı aralığı elde etmek	Cebirsel	"$z-3 > \frac{4+z}{5}, z \in \mathbb{R}$" Ööstege $5z-15 > 4+z$ Gerçekleşme 1 $4z > 15+4$ Gerçekleşme 2 $4z > 19$ Gerçekleşme 3 $z > \frac{19}{4}$ Gerçekleşme 4 $(\frac{19}{4}, \infty)$ Gerçekleşme 5	4 (GD3, GD4, GD7, GD8)	
OG-E3*	Birinci dereceden denklemleri çözerken	Denklemleri doğrulayan elemanları (sıralı ikililer) belirlemek	Sesli	E: ...bu doğru aslında bu denklemin çözüm kümesi yani grafikte gösterilmiş. Buradaki noktaların [$x-2y=4$ doğrularını göstererek] hepsi [102-GD9] E: Hocam bence yine direkt doğrunun kendisi, doğrunun [...] zaten doğru sonsuz noktalardan oluşuyor, bu sonsuz noktaların hepsi bu [$y+2x=8$ ifadesini göstererek] denklemin çözüm kümesi. [120-GD9] Sonsuz tane nokta varsa bunlar hep bu şekilde olacak ve bunlar doğru belirtmek zorunda [$x-2y=4$ denkleminin çözüm kümesinin elemanlarının analitik düzlemde oluşturduğu grafiğe doğrusal noktalar ekleyerek] [251-GD9] E: Denklemin analitik düzlemdeki çözüm kümesi [236-GD22] Açık önermeyi sağlayan, doğru yapan noktalar [250-GD22]	> 10 (GD9, GD10, GD12, GD22)	

				Cebirsel	$x-2y=4$ $x-4=2y$ $y=\frac{x-4}{2}$ $y=8-2x$ $(0,-2), (4,0)$ $(0,8), (4,0)$ $C.K=\{(4,0)\}$	3 (GD9, GD22)
				Grafiksel		2 (GD9)
OG-E4*	Birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlikleri ve eşitsizlik sistemlerini çözerken	Eşitsizlik ve eşitsizlik sistemlerini elemanları belirlemek doğrulayan	Sesli	E: ...bunu bir doğru olarak kabul edelim, bir denklem olarak [...] hani eşitlik olması gerekiyor aslında [...] eşitliğe göre çözdük bir doğru çizdik, orayı sağlamamasının nedeni orada küçük-eşittir gibi bir ifade yok yani eşitlik olmadığı için o bölgeyi [eliyle havada doğruyu çiziyor] almıyoruz [...] o doğruyu sağlamıyor yani. <GD10'da "$y < 8 - 2x, x, y \in \mathbb{R}$" eşitsizliğinin çözüm kümesi hakkında konuşurken> [78-GD10] Evet çizgi çizgi yapması gerekiyordu. [105-GD12] ... orada büyüktür yani mı sebebi şu, biz zaten orayı bir eşittir olarak düşündük, aslında o sembolde öyle bir şey içermediği için o çözüm kümesini ifade etmiyor o yüzden. <GD12'de $8 - 2x - y > 0, x, y \in \mathbb{R}$" eşitsizliğinin çözüm kümesi hakkında konuşurken> [114-GD12] Doğrunun üzerinde o yüzden sağlamıyor <(0,8) sıralı ikilisinin $8 - 2x - y > 0$ doğrulamadığını belirtirken> [123-GD12]		3 (GD10, GD11, GD12)
				Cebirsel	$y+2x-8 < 0$ $y+2x-8 = 0$ $y=0 \Rightarrow x=4 \quad (4,0)$ $x=0 \Rightarrow y=8 \quad (0,8)$	3 (GD10, GD11, GD12)

			Grafiksel		3 (GD10, GD11, GD12)
OG-E5	İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken	Denklemleri sıfıra eşitleyen x reel sayılarını (çözümleri) çarpanlarına ayırma yöntemiyle, $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülü aracılığıyla ya da tam kare ifadelerle dönüştürerek bulmak	Sesli Cebirsel	E:...bu denklemin bunun kökleri değil aslında bu ifadeyi sıfıra eşitleyip ondan sonra eksiyle çarparsa oradan kökleri bulur. [87-GD21] <“-y = x ² - 50x - 660 ifadesi hakkında konuşurken”>  	3 (GD15, GD21, GD23) 6 (GD13, GD14, GD22, GD23, GD24, GD25)
OG-E6	İkinci dereceden tek değişkenli bağıntıları çözerken	Bağıntının grafiğinin x eksenini kesip kesmediğini çözümleri (bağıntıyı sıfır yapan x reel sayıları) aracılığıyla belirlemek	Sesli Cebirsel- Grafiksel	E: Bu aslında bir parabol [73-GD23] ...önce denklemin köklerini buldum, bunlar parabolde x eksenini kestiği noktalar olacak. [117-GD23] E: Çünkü grafiğin x eksenini kestiği noktaları buluyoruz [182-GD21] E: Bunu göstermemizin sebebi de kökleri [...] ve dediğimiz gibi bir sürü nokta var sonsuz nokta var, hepsini belirleyemeyeceğimiz için belirli noktaları buluyoruz [...] (parabol) bu noktalardan geçen temsili gösterimimiz. [192-GD22]  	3 (GD21, GD23, GD25) 3 (GD21, GD23, GD25)

OG-E7	İkinci dereceden tek değişkenli cebirsel ifadelerin alabileceği en büyük ya da en küçük reel sayıyı belirlerken	İkinci dereceden tek değişkenli cebirsel ifadenin temsil ettiği fonksiyonu tepe noktasını belirlemek	Sesli	E: Otuz altı. Direkt k sı yani [138-GD20]	2 (GD20, GD21)
			Cebirsel	$f(x) = 15x - x^2$ $\frac{+15}{2 \cdot (-1)} = \frac{15}{-2}$ $\frac{225}{4} - \frac{225}{4}$	3 (GD19, GD20, GD21)
			Grafiksel		3 (GD19, GD20, GD21)
OG-E8	İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini belirlerken	Eşitsizliği doğrulayan x reel sayı kümesini belirlemek	Sesli	E: Bunun büyük-eşit dediği için bizim y leri pozitiflerden almamız lazım <işaret tablosunda + yazılı aralıkları kastederek>... ve büyük-eşittir sıfır olduğu için sıfır (yapanı) da almamızda gerekiyor [123-GD23]" E: Sonra işte böyle [işaret tablosu çiziyor] sonra eksi birmiş [işaretliyor] sonra küçük-eşittir dediği için bunu da içine alacağım. Sonra [...] eksiyle başladım [$-x^2$ ifadesini göstererek] eksi, eksi sonra hepsi sağladığı için [karalayarak] çözüm kümemiz reel sayılar böyle oluyor. [350-GD26] <"$-2x^2 - 4x - 2 \leq 0$" eşitsizliğinin işaret tablosu yöntemiyle çözüm kümesini belirlerken>	4 (GD23, GD24, GD25, GD26)
			Cebirsel	$(y-3) \cdot (-y+5) = 0$ $y=3 \text{ (sıfırdan farklı) (sıfır katlı)}$ $y=5 \text{ (sıfırdan farklı) (sıfır katlı)}$ $y^2 - 5y + 6 = 0$ $y = -3$ $y = -2$ $(y-3) \cdot (y-2) = 0$ $y=3 \vee y=2 \rightarrow \text{teknik f (tanımsız)}$ $y \leq 3 \vee y \leq 2 \rightarrow \text{teknik f (tanımsız)}$	4 (GD23, GD24, GD25, GD26)
			Grafiksel	 	3 (GD23, GD24, GD25, GD26)

Elif'in denklem ve eşitsizlikleri tanımlarken kullandığı OG-E1 kodlu rutini katılımcının kanonik anlatılar ürettiği keşif rutinidir. Bu rutin bireysel görüşmelerde yer alan BG-E1 kodlu süreç odaklı rutinin dönüşen bir hali olarak odak grup görüşmelerinde gözlemlenmiştir. Bireysel görüşmede katılımcı “denklemin [...] x değeri mesela bir tane değer alabiliyordu, çözüm kümesi diyoruz zaten biz buna [...] ama eşitsizlikte ise birden fazla değer alabiliyordu [2]” şeklindeki süreç odaklı söylemleri kullanırken odak grup görüşmesinde “denklem içinde en az bir değişken olan ve eşitlik içeren ifadelerdir, eşitsizlikte küçüktür büyüktür işte büyük-eşittir sembollerini içeren ve içinde bir değişken olan ifadelerdir [527-GD3]” şeklinde kanonik anlatıları içeren söylemleri kullanmıştır. Bununla birlikte katılımcı denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduğunu “Çünkü yerine yazdığımız sayıya göre doğruluğu veya yanlışlığı değişiyor [...] bir önerme değil ııı [...] önerme olmaya açık demiştik. O yüzden böyle ifadelere de açık önerme diyoruz. [70-GD13]” şeklinde ifade ederek sözel gerçekleştirmelerinde (örneğin, Şekil 20) de belirtmiştir. Odak grup görüşmelerindeki sözel gerçekleştirmeler, katılımcının ikinci dereceden denklemleri tanımladığı süreç odaklı BG-E9 kodlu rutinin de matematiksel nesneler hakkında anlatı ürettiği bir rutine dönüştüğünü göstermiştir. Elif'in görsel araçlarıyla onayladığı bu anlatıları denklem ve eşitsizlik kavramlarının matematiksel tanımlarına (Tablo 13) denk olduğu için bir keşif rutini olarak kodlanmıştır.

Katılımcının hem bireysel görüşmede gerçekleşen hem de odak grup görüşmelerinde gerçekleşmeye devam eden BG-E2 kodlu rutini bireysel görüşmelere benzer nedenlerden dolayı keşif rutinidir. Bu durum ayrıca BG-E2 kodlu rutinin farklı ortam ve görev durumlarında uygulanabilirliğini göstermiştir.

Katılımcının çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken sergilediği OG-E2 kodlu rutin ise Elif'in bireysel görüşme rutinlerinden BG-E3 kodlu rutininin tekrarı olan bir rutindir. Fakat odak grup görüşmelerinde katılımcının özdeşlikleri birer denklem olarak tanımlaması ve denklemlerin de sonsuz çözümü olacağını fark etmesinden [541-GD3]

dolayı çözüm kümesi hakkında anlatıları zenginleşmiştir. Burada katılımcının BG-E3 kodlu rutini de içerecek şekilde çözüm kümesinin reel sayılar ya da boş küme olması durumunda yeni anlatılar üretmesi nedeniyle rutin OG-E2 biçiminde farklı kodlanmıştır. Elif'in çözüm kümesi hakkında konuşurken kullandığı OG-E3 kodlu rutinde yer alan onaylanmış anlatıları, hem çözüm kümesinin matematiksel tanımına (Argün, vd., 2020) hem de KA4 ile KA6'ya denk anlatıları içerdiğinden bir keşif rutini.

Bireysel görüşmede Elif'in birinci dereceden denklemleri çözme rutini olan BG-E4 kodlu rutinde, odak grup görüşmelerinde katılımcının denklem tanımının sonuç odaklı olmasından dolayı katılımcının gözünden görev "açık önermeyi (denklemi) sağlayan reel sayıların kümesini belirlemek" şeklinde tanımlanmıştır. Buna rağmen katılımcının uyguladığı prosedürün çoğunlukla performans odaklı olduğu görülmüştür. Odak grup görüşmelerinde bireysel görüşmeden farklı olarak katılımcı prosedüründeki adımları gerekçelendirmiş fakat bu gerekçelendirmelerde geçmiş öğrenme yaşantılarına yaptığı atıfla araştırmacıyı memnun etmeyi amaçlamıştır. Bu amaç bağlamında ve süreç odaklı olması sebebiyle BG-E4 kodlu rutin ritüel bir rutin olarak odak grup görüşmelerinde de katılımcı tarafından uygulanmaya devam etmiştir.

Elif'in birinci dereceden eşitsizlikleri çözerken kullandığı BG-E5 kodlu rutinin ise odak grup görüşmelerinde sadece cebirsel gerçekleştirmelerine dair yeterli bulgular elde edilmiştir. Bu durumun katılımcının prosedür adımlarının birbirine bağlı ve kanonik olmasından dolayı (örneğin, Şekil 23) tahtada söylemlerini paylaşma fırsatı bulamamış olmasından kaynaklı olduğu düşünülmüştür. Buna rağmen Elif; GD3, GD4, GD7 ve GD8'de eşitsizlikleri çözme prosedürünü tahtada paylaşma fırsatı bulan arkadaşlarına cebirsel ifadeler ya da çözüm kümeleri hakkında anlatılar üreterek (OG-E2 kodlu rutin) önerilerde bulunmuştur. Fakat katılımcının birinci dereceden eşitsizlikleri çözme prosedürüne yönelik sesli bir gerçekleştirmeye rastlanılmaması ve bu nedenle katılımcının rutinin keşif rutini olduğuna dair yeterli bulgunun olmamasından dolayı gözlemlenen cebirsel gerçekleştirmeler

bireysel görüşmedeki rutinin tekrarı olarak düşünülmüştür. Bu nedenle BG-E5 kodlu rutini bireysel görüşmedeki benzer nedenlerden dolayı ritüel olarak kodlanmıştır.

Odak grup görüşmelerinde birinci dereceden denklem sistemlerini çözerken kullandığı OG-E3 kodlu rutinin de katılımcının söylemleri prosedürün nasıl olacağından ziyade matematiksel nesneler hakkında olmuştur. Elif denklem sistemlerini çözerken çoğunlukla sonuç odaklı anlatılar üreterek denklem sistemini sağlayan sıralı ikililer hakkında söylemlerde bulunmuş ve görsel araçlarla anlatılarını (örneğin, Tablo 27) onaylamıştır. Bu süreçte yine yok etme metoduyla çözümünü yapan katılımcının bireysel görüşmeden farklı olarak, odak grup görüşmelerinde prosedür-sonuç ilişkisini de kurduğu (örneğin, [145-GD9]) gözlemlenmiş ve Elif farklı gerçekleştirmeler arasında geçişleri kanonik bir şekilde yapabilmektedir. Bireysel görüşmelerde prosedürün performansına yönelik söylemleri içeren süreç odaklı BG-E7 kodlu rutin, odak grup görüşmelerinde prosedür-sonuç ilişkisine yönelik anlatıların üretildiği OG-E3 kodlu rutine dönüşmüştür. Bu prosedür-sonuç ilişkisinin kurulduğunu gösteren OG-E3 kodlu rutin aynı zamanda BG-E8 kodlu keşif rutininin de bir tekrarıdır. Bireysel görüşmede birinci dereceden denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini analitik düzlemde grafik çizme yoluyla belirleyen Elif, anlatılar üretmiş (BG-E8) ve bu anlatılarını odak grup görüşmelerinde zenginleştirerek tekrar üretmiştir. Elif'in birinci dereceden denklemleri çözerken ürettiği anlatıları KA13, KA20, KA25 ve KA28'e denk anlatıları içermesinden dolayı OG-E3 kodlu rutin bir keşif rutini olarak kodlanmıştır.

Bireysel görüşmede birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlik sistemlerini denklem sisteminde olduğu gibi yok etme metoduyla çözmeye çalışan Elif'in bu prosedürüne yönelik bulgulara odak grup görüşmelerinde rastlanmamıştır. Odak grup görüşmelerinde eşitsizliklerin çözüm kümelerinin yarı düzlemin bir altkümesi (bölge) olduğunu fark ettiğini "... oradaki aslında bölgenin çözüm kümesi olması gerektiğini düşünüyorum. [249-GD11]" söylemleriyle belirten Elif prosedür-sonuç ilişkisini de kurabilmektedir. Bununla birlikte OG-E4 kodlu birinci dereceden eşitsizlikleri çözme rutinin de hem BG-E8 kodlu

keşif rutininin de bir tekrarı olduğu hem de prosedür-sonuç ilişkisi kurularak üretilen anlatıların (örneğin, [78-GD10]) zenginleştiği görülmüştür. Elif'in OG-E4 kodlu rutininde ürettiği anlatılar; KA13, KA15, KA16, KA17 ve KA18'e denk anlatıları içermesinden dolayı bir keşif rutini olarak kodlanmıştır.

Elif odak grup görüşmelerinde ikinci dereceden denklemin çözüm kümesi elemanları için “kök” terimini sıklıkla kullanmış ve ikinci dereceden denklemleri çözerken uyguladığı rutini sonuç odaklı olmuştur. Katılımcı ikinci dereceden denklemlerin çözümleri hakkında konuşurken, rutin amacının “denklemin çözümlerini bulmak” olduğunu söylemlerinde belirtmiş (örneğin, [117-GD23]) ve ikinci dereceden cebirsel ifadeleri (polinomları) sıfıra eşitleyerek “kök” kavramının matematiksel tanımına uygun bir şekilde prosedürünü uygulamıştır. Bireysel görüşmelerde sadece çarpanlara ayırma yoluyla çözüm yapan Elif odak grup görüşmelerinde, çözüm için farklı prosedürleri de uygulamıştır (örneğin, Şekil 27). Katılımcının uyguladığı prosedürünün sonuç odaklı olması ve ilgili prosedürü “kök” tanımına uygun bir şekilde uygulaması OG-E5 kodlu rutinin bir keşif rutini olarak kodlanması için birer delil olmuştur. Katılımcı OG-E5 kodlu rutinini, ikinci dereceden tek değişkenli bağıntıların (örneğin, $y = x^2 - 3x + 4$) çözüm kümesini bulurken uyguladığı OG-E6 kodlu rutininin prosedürünü başlatırken de (örneğin, Şekil 29) kullanmıştır. Katılımcı bu bağıntıların grafiğinin, düzlemde bir parabol belirttiğini sıklıkla ifade etmiş (örneğin, 192 ve [194-GD22]) ve “ a, b, c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, $y = ax^2 + bx + c$ ile verilen bağıntının elamanları analitik düzlemde bir parabol ile temsil edilir. (KA36)” anlatısına denk anlatılar üretmiştir. Katılımcının OG-E6 kodlu rutinine dair sesli ve görsel araçları incelendiğinde “ a, b, c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, eğer $y = ax^2 + bx + c$ denkleminde $y = 0$ için $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin $\mathbb{R}$ de çözümleri varsa o zaman bu çözümler $y = ax^2 + bx + c$ ile verilen bağıntıyı temsil eden parabolün x eksenini kestiği noktaların apsisleridir. (KA40)” biçimindeki kanonik anlatıya denk “...önce denklemin köklerini buldum, bunlar parabolde x eksenini kestiği noktalar olacak. [117-GD23]” gibi anlatılarına rastlanmıştır. Bununla birlikte Şekil 30'daki gibi

katılımcının “ ... eğer $\Delta = 0$ ise o zaman bu parabol x eksenine teğettir (tek noktada keser, çözümler çakışiktır) ve eğer $\Delta < 0$ ise o zaman bu parabol x eksenini kesmez. (KA40)” biçimindeki kanonik anlatıyı onaylayan görsel gerçekleştirmelerinin olduğu görülmüştür. Bu nedenle Elif’in anlatı üretmeyi amaçladığı OG-E6 kodlu rutini, bir keşif rutini olarak kodlanmıştır. Bununla birlikte Elif’in ikinci dereceden tek değişkenli cebirsel ifadelerin alabileceği en büyük ya da en küçük reel sayıyı belirlerken kullandığı rutininde “ a, b, c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, $y = ax^2 + bx + c$ ile verilen bağıntının grafiğinin (parabolün) en küçük ya da en büyük ordinata sahip olan noktasına *tepe noktası* denir. (KA37)” şeklindeki kanonik anlatıyı onaylayan sesli ve görsel gerçekleştirmeleri OG-E7 rutinin de keşif rutini olduğunu göstermiştir. Elif, ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini belirlerken de OG-E8 kodlu rutin prosedürünü OG-E5 kodlu rutini aracılığıyla cebirsel bir gerçekleştirme ile başlatmış ve rutinini grafiksel gerçekleştirmelerle (işaret tablosu, parabol grafiği vb.) devam ettirmiştir. Elif rutin prosedüründe kullandığı grafiksel gerçekleştirmeleri yorumlayarak çözüm kümesini belirlemiş (örneğin, [350-GD26]) ve grafiksel gerçekleştirmeler aracılığıyla eşitsizliğin çözümüne dair “Bu aslında bir parabol [73-GD23], y değerlerinin sıfır ya da sıfırdan büyük olduğu yerleri istiyor [76-GD23]” şeklinde anlatılar üretmiştir. Bir başka söyleminde ise elde ettiği işaret tablosundan yola çıkarak “Bunun büyük-eşit dediği için bizim y leri pozitiflerden almamız lazım <işaret tablosunda + yazılı aralıkları kastederek>... ve büyük-eşit sıfır olduğu için sıfır (*yapanı*) da almamızda gerekiyor [123-GD23]” şeklindeki anlatısını paylaşmıştır. Katılımcının “ $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ ” eşitsizliğinin çözüm kümesini belirlerken kullandığı bu onaylanmış anlatılarının “ $ax^2 + bx + c \geq 0$ eşitsizliği için $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun pozitif veya sıfır değer aldığı en geniş kümeye bu *eşitsizliğin çözüm kümesi* denir. (KA43)” anlatısına denk olmuştur. Bu nedenle OG-E8 kodlu rutini bir keşif rutini olarak kodlanmıştır.

Elif’in Tablo 29’daki gibi kodlanan 11 farklı rutininin ritüel ya da keşif rutini olduğu Tablo 30’da yer almaktadır.

Tablo 30

Elif'in Odak Grup Görüşmelerindeki Rutinlerinin Türü

Rutin kodu	Ritüel	Keşif
OG-E1		X
BG-E2		X
OG-E2		X
BG-E4	X	
BG-E5	X	
OG-E3		X
OG-E4		X
OG-E5		X
OG-E6		X
OG-E7		X
OG-E8		X

Elif'in odak grup görüşmelerindeki 11 farklı rutini göz önüne alındığında katılımcının rutinleri, söylemin nesneleştirilmesi açısından hibrit ya da keşifsel katılıma birer örnek teşkil etmiştir. Katılımcının OG-E1 kodlu keşif rutini, söylemin nesneleştirilmesi açısından keşifsel katılımın bir örneğidir. Elif bu rutinde denklem ve eşitsizlik tanımını (örneğin, [527-GD3]) kavramın matematiksel tanımına (Tablo 13) uygun bir şekilde yapmış ve anahtar sözcükleri insani eylemlerden arındırılmış matematiksel bir dil eşliğinde kanonik bir şekilde kullanmıştır. Benzer şekilde katılımcının bireysel görüşmedeki BG-E3 rutininin dönüşen bir hali olan OG-E2 kodlu rutinde de söylemlerinin giderek nesneleştiği görülmüş ve katılımcı “O yüzden bir çelişki, o yüzden çözüm kümesi de boş küme [416-GD5]” ve “... hepsi sağladığı için [...] çözüm kümemiz reel sayılar [350-GD26]” şeklinde anlatılar üretmiştir. Ayrıca Elif, odak grup görüşmelerinde denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduğuna dair farkındalığını “Açık önermeyi sağlayan, doğru yapan noktalar [250-GD22]” şeklinde OG-E2 kodlu rutinde anlatılar üreterek sergilemiştir. Bu nedenle Elif'in çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken, odak grup görüşmelerinde sergilediği OG-E2 kodlu rutini söylemin nesneleştirilmesi bağlamında keşifsel katılımın bir örneğini sunmuştur. Elif'in birinci dereceden denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümesinin elemanları olan sıralı ikililer hakkındaki OG-E3 kodlu

rutini ise keşifsel katılımın bir örneği olmuştur. Katılımcı çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşmasına rağmen süreç odaklı değil sonuç odaklı bir rutin sergilemiş ve prosedürün uygulanmasına değil prosedürün ürününe (sonuca) odaklanmıştır. Ayrıca katılımcı çözüm kümesinin elemanları olan sıralı ikililer için “Denklemin analitik düzlemdeki çözüm kümesi [236-GD22]. Açık önermeyi sağlayan, doğru yapan noktalar [250-GD22]” şeklindeki söylemlerinde matematiksel bir dili, kanonik bir şekilde kullanmıştır. Görsel araçlarla onayladığı anlatılarının nadiren “bu, bunlar” gibi zamirleri içerdiği görülse de çoğunlukla matematiksel nesneleri isimlendirmede ve anlamlandırmada anahtar kelimeleri doğru bir şekilde kullanmıştır. Buna rağmen Elif, birinci dereceden eşitsizlik ve eşitsizlik sistemlerinin çözümleri hakkında konuşurken kullandığı OG-E4 kodlu rutini ise günlük bir dil eşliğinde anahtar kelimeleri kullanmıştır:

E: ...bunu bir doğru olarak kabul edelim, bir denklem olarak [...] hani eşitlik olması gerekiyor aslında [...] eşitliğe göre çözdük bir doğru çizdik, orayı sağlamamasının nedeni orada küçük-eşittir gibi bir ifade yok yani eşitlik olmadığı için o bölgeyi [*eliyle havada doğruyu çiziyor*] almıyoruz [...] o doğruyu sağlamıyor yani. <GD10'da “ $y < 8 - 2x$, $x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğinin çözüm kümesi hakkında konuşurken> [78-GD10]

...

E: Evet çizgi çizgi yapması gerekiyordu. [105-GD12] ... orada büyüktür yani ııı sebebi şu, biz zaten orayı bir eşittir olarak düşündük, aslında o sembolde öyle bir şey içermediği için o çözüm kümesini ifade etmiyor o yüzden. <GD12'de $8 - 2x - y > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğinin çözüm kümesi hakkında konuşurken> [114-GD12] Doğrunun üzerinde o yüzden sağlamıyor <(0,8) sıralı ikilisinin $8 - 2x - y > 0$ doğrulamadığını belirtirken> [123-GD12]

OG-E4 kodlu rutini kimi zaman “çizgi çizgi <kesikli doğruyu kastederek> yapması gerekiyordu”, “eşitliğe göre çözdük bir doğru çizdik” gibi matematiksel nesneleri manipüle etme hakkında olsa bile katılımcı söylemlerinde anlatılar üretmeyi amaçlamıştır (örneğin, [78-GD10]). Bu nedenle söylemin nesneleştirilmesi açısından OG-E4 rutini hibrit katılımın bir örneği olarak ele alınmıştır. Elif’in değişken kavramına yönelik BG-E2 kodlu rutini ise bireysel görüşmedekine benzer sebeplerden dolayı söylemin nesneleştirilmesinde hibrit katılımın birer örneği olmuştur. Bununla birlikte katılımcının matematiksel nesneleri manipüle etmeye yönelik söylemlerini gerektiğinde anlatılar üretmek sergilediği OG-E5 ve

OG-E6 kodlu keşif rutinleri söyleme katılımı hibrit katılıma birer örnek olmuştur. Elif'in ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerin çözüm kümesini bulurken kullandığı OG-E5 kodlu rutini de hibrit katılımın bir örneği olmuştur. Katılımcının "...bu ifadeyi sıfıra eşitleyip ... oradan kökleri bulur. [87-GD21]" şeklinde eylemleri manipüle etme hakkında olmasına rağmen bu söylemleri "kök" kavramının tanımına yönelik bir izahı olarak ele alınmıştır. Ayrıca katılımcının OG-E5 kodlu rutinine ait "Denklemin çözüm kümesi [256] ... x yerine bunu yazacağız [258-GD15] bu zaten kökleri [260-GD15]" şeklindeki görsel araçlarla onaylanmış anlatıları da bu keşif rutiniyle söyleme katılım türünün hibrit olduğunu göstermiştir. Yine benzer şekilde katılımcının OG-E6 kodlu rutininde de hibrit katılımın bir örneğidir çünkü katılımcının söylemleri kimi zaman matematiksel nesneleri manipüle etme hakkında olmasına rağmen (örneğin, Tablo 28) Elif, bu söylemlerini istendiğinde anlatılar üretmek gerekçelendirmiştir:

E: Bu aslında bir parabol [73-GD23] ...önce denklemin köklerini buldum, bunlar parabolde x eksenini kestiği noktalar olacak. [117-GD23] Çünkü grafiğin x eksenini kestiği noktaları buluyoruz [182-GD21] Bunu göstermemizin sebebi de kökleri [...] ve dediğimiz gibi bir sürü nokta var sonsuz nokta var, hepsini belirleyemeyeceğimiz için belirli noktaları buluyoruz [...] (*parabol*) bu noktalardan geçen temsili gösterimimiz. [192-GD22]

Buna rağmen OG-E5 rutinini de kapsayan OG-E8 kodlu rutininde katılımcı göstergenin farklı gerçekleştirmeleri arasındaki geçişi onaylanmış anlatılar üretmek kanonik bir şekilde yaptığı için bu rutin keşif katılımın bir örneği olarak ele alınmıştır.

Katılımcının rutinleri aracılığıyla söyleme katılımı esneklik açısından incelendiğinde Elif'in OG-E3, OG-E5, OG-E7 ve OG-E8 kodlu rutinlerinde çözüm için birden fazla yol kullandığı ve bu çözüm yollarını kanonik bir şekilde uygulayarak prosedürünü gerçekleştirdiği görülmüştür. Elif, OG-E3 kodlu rutininde birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini hem yok etme metodu hem de düzlemde grafik çizme yoluyla (örneğin, Tablo 27) belirlemiştir. İkinci dereceden denklemlerin çözümlerinde (OG-E5) ise polinomu çarpanlarına ayırma (örneğin, Şekil 29), cebirsel

ifadeyi tam kare ifadeye dönüştürme ve $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülleriyle prosedürünü kanonik bir şekilde (örneğin, Şekil 27) uygulamıştır. İkinci dereceden tek değişkenli cebirsel ifadelerin alabileceği en büyük ya da en küçük reel sayıyı belirlerken kullandığı OG-E7 kodlu rutininde de tepe noktasının ordinatını hem $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$ eşitliğini kullanarak (örneğin, Şekil 34) hem de cebirsel ifadeye karşılık gelen fonksiyonda tepe noktasının apsisini yerine yazarak (örneğin, Tablo 28) belirlemiştir. İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini belirlerken kullandığı OG-E8 kodlu rutinin de ise çözüm kümesinin elemanlarını işaret tablosu ve grafik çizme yoluyla iki farklı şekilde (örneğin, Şekil 35) belirlemiştir. Bu nedenle Elif'in OG-E3, OG-E5, OG-E7 ve OG-E8 kodlu rutinlerindeki prosedürü esneklik bağlamında katılımcının söyleme katılımının keşifsel olduğunu göstermiştir. Bununla birlikte BG-E4, BG-E5 ve OG-E4 kodlu rutinlerinde prosedürünü tek bir çözüm yoluyla gerçekleştirdiği ve katılımcının farklı yolların farkında olduğuna dair bulgu olmadığı için bu rutinlerinde söyleme katılımı esneklik açısından ritüel katılımın birer örneğidir. Hatta BG-E5 kodlu rutinini “ $y \leq 2 - x$, $x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliği için kullanırken katılımcının uyguladığı prosedürde ezbere bir yol izlediğini “ikisi de bir eşitsizlik ... ve bence koordinat sisteminde göstermem gerektiğini düşündüm ııı o yüzden de şöyle [90-GD11]” ve “önce ben zaten şeyden yaptığı gibi [...] denklem [...] eşitlik olarak düşündüm. [276-GD11]” şeklinde prosedürünü (Şekil 26) başlattığı ifadelerinde görülmüştür. Ayrıca katılımcı eşitsizliklerin çözüm kümesini analitik düzlemde gösterirken ezbere bir yol izlediğini, GD12’de yer alan eşitsizlik sistemindeki prosedürünün doğruluğunu “...bir önceki aslında ııı [...] görüşmede, en son soru o işte <GD10’u kastederek> ... ama ondan öncekilerde zaten böyle çözmüştük, o yüzden de zaten oradan aklımda kaldı.” şeklinde belirttiği ifadesinde de dile getirmiştir.

Elif'in odak grup görüşmelerindeki prosedürleri bağlılık açısından ele alındığında, katılımcı söyleme çoğunlukla keşifsel bir şekilde katılmıştır. Katılımcının rutinlerinin tamamında prosedüründe yer alan adımların bağlantılı olduğu görülmüş ve Elif herhangi

bir cebirsel ifadeye denk (açık) önermeleri kanonik bir şekilde yazarak çözümlerini doğru bir şekilde (örneğin, Şekil 21, Şekil 23, Şekil 24, Şekil 27, Şekil 29 vb.) tamamladığı tespit edilmiştir. Prosedür adımlarıyla ulaştığı sonuçların ilişkisini ifade eden anlatıları da (örneğin, [107-GD2], [145-GD9], [242-GD22], [117-GD23], [416-GD25]) prosedürünün tutarlı olduğunu göstermiştir. Ayrıca prosedürünü grafiksel gerçekleştirmelerle de kanonik bir şekilde uygulayan (örneğin, Tablo 24, Şekil 25, Şekil 31, Şekil 33, Şekil 35) Elif'in grafiksel gerçekleştirmeler aracılığıyla ulaştığı sonuçları anlatılar üretmek ifade etmesi de (örneğin, [120-GD9], [249-GD11], [211-GD15], [194-GD22]) prosedür-sonuç ilişkisini mantıklı bir şekilde kurabildiğini göstermiştir. Bu nedenle katılımcının BG-E4, OG-E3, OG-E4, OG-E5, OG-E7 ve OG-E8 kodlu rutinleri bağıllık-tutarlılık açısından söyleme keşifsel katılımın birer örneğidir.

Gerekçelendirme bağlamında katılımcının söyleme katılımı incelendiğinde rutinlerine sunduğu argümanlarında, hibrit ve keşifsel katılımın örnekleri gözlemlenmiştir. Elif'in rutinlerinden BG-E2, OG-E3, OG-E5 ve OG-E8 kodlu rutinleri söyleme katılımının hibrit, OG-E1, OG-E2, OG-E4 ve OG-E6 kodlu rutinleri ise söyleme katılımın keşifsel belirleyicilerinin birer örneğini sunmuştur. Elif denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutini olan OG-E1 kodlu keşif rutinini gerekçelendirirken de söyleme keşifsel bir şekilde katılmıştır. GD1'de Elif denklem için "Eşitlik ve en az bir değişkeni olan ifadelere denir [345-GD1]" şeklindeki anlatısını, " $11 + 2(x - 3) = 7, x \in \mathbb{R}$ " biçimindeki cebirsel ifadesine yönelik bir sözel gerçekleşmesinde (Şekil 19) rutinini yine anlatı üretmek gerekçelendirmiştir. Bununla birlikte katılımcı denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olarak tanımladığı OG-E1 kodlu rutinini "Çünkü yerine yazdığımız sayıya göre doğruluğu veya yanlışlığı değişiyor [...] bir önerme değil ıı [...] önerme olmaya açık demiştik. O yüzden böyle ifadelere de açık önerme diyoruz. [70-GD13]" şeklinde gerekçelendirmiştir. Elif'in bu gerekçelendirmesi "Eğer hüküm verici ifade, (i) bir veya daha fazla değişken içeriyorsa, (ii) bir önerme değilse fakat (iii) değişkenler yerine izin verilebilen/uygun seçimler yazıldığında bir önerme oluyorsa bu ifadeye bir *açık önerme* denir." kanonik

anlatısına denk olduğu için katılımcı “böyle ifadeler de (*denklem ve eşitsizlik*) açık önerme diyoruz” şeklindeki kendi argümanını onaylanmış (kanonik) anlatılarla gerekçelendirmiştir. Bu kanonik anlatısını ([70-GD13]) görsel araçlarla da onaylayan (örneğin, Şekil 20) Elif’in OG-E1 kodlu rutinini gerekçelendirmesi keşifsel katılımın bir örneği olmuştur.

Elif’in değişken kavramı hakkında konuşurken kullandığı BG-E2 kodlu rutini hibrit katılımın bir örneği olmuş ve katılımcı x, y, z, t, u gibi gösterimleri değişken olarak isimlendirmesini “Değişken. Çünkü daha bu eşitsizliği çözümlemedik ve ne olduğunu bilmiyoruz yani ıı reel sayılardan olduğunu belirtmiş sadece o yüzden değişken [72-GD3]” şeklinde yanıtlamıştır. “ $11 + 2(y - 3) > 7, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliği hakkında konuşan Elif değişkenin (y harfinin) “ $y \in \mathbb{R}$ ” ifadesinden dolayı reel sayıları temsil eden bir gösterim olduğunu gerekçelendirirken “...bu eşitsizliği çözümlemedik ve ne olduğunu bilmiyoruz ...” şeklinde eylemleri ve süreçleri vurgulamıştır. Bununla birlikte “ $11 + 2(u - 3) = 2u + 5, u \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesi için araştırmacının “ u bir değişken olabilir mi? [27-GD2]” sorusunu Elif, “Yok çünkü zaten çözüm kümesi de reel sayılar yani [...] hani her şeyi yazdığımızda yerine, sağlıyor, bence değişken [39-GD2]” ve “Bence değişkenler [...] yani her şeyi verdiğimizde yani her şeyi yerine yazabiliriz ...[59-GD2]” şeklinde prosedür süreçlerini vurgulayarak gerekçelendirmiştir. Bu nedenle katılımcının BG-E2 kodlu rutini gerekçelendirme açısından söyleme katılımında hibrit katılımın bir örneği olmuştur.

Çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken kullandığı OG-E2 kodlu sonuç odaklı rutinini gerekçelendirirken ulaştığı sonuçlardan mantıksal çıkarımlar yapmış ve anlatı üretmiştir. GD5’te “ $-4(x - 7) = x + 5(3 - x), x \in \mathbb{R}$ ” denkleminin çözüm kümesi hakkında konuşurken “ $28 = 15$ ” şeklinde ulaştığı sonuçtan mantıksal “Böyle bir şey doğru değil [$28 = 15$ i göstererek] [...] O yüzden bir çelişki, o yüzden çözüm kümesi de boş küme.” şeklinde görsel araçlarla onayladığı ve KA4’e denk bir anlatı üretmiştir. Bununla birlikte bireysel görüşmede olduğu gibi katılımcının çözüm kümesinin elemanlarının her

birinin “denklem ya da eşitsizlikleri (açık önermeleri) doğru bir önermeye (amaca göre yanlış önermeye de olabilir) dönüştüren evrensel kümenin elemanlar” olduğunu belirten “çözüm kümesi de reel sayılar yani [...] hani her şeyi yazdığımızda yerine, sağlıyor ...[36-GD2]” ve “Yerine koyalım, mesela eksi yediyi yerine koyalım [...] sağlıyor [...] yani oluyor. [127-GD8]” şeklindeki ifadelerine odak grup görüşmelerinde de rastlanmıştır. Bir başka örnekte ise GD9’da yer alan “ $x - 2y = 4$ ” denkleminin çözüm kümesinin elemanlarını belirlemek için “hani bir yöntem vardı ya mesela [...] sıfır verince ora ne çıkıyor [...] deneyebiliriz de [...] öyle denemeyle de belki olabilir [64-GD9]” şeklinde öneride bulunan arkadaşına söyleminin çözüm için uygun olmadığını “...ama bunun çözüm kümesi [...] yani hani x ve y reel sayılar ya [...] bir sayı sonsuz tane ve sonsuz tane nokta var” şeklinde bir gerekçelendirme sunarak belirtmiştir. Burada Elif’in birinci dereceden iki değişkenli denklemlerin çözüm kümelerinin sonsuz çoklukta olduğunu belirten söylemi KA25’e denk olmuştur. Bu nedenle katılımcı, çözüm kümesi hakkında konuşurken kullandığı sonuç odaklı OG-E2 kodlu rutiniyle söyleme katılımında gerekçelendirme bağlamında keşifsel bir katılım sergilediğini göstermiştir.

Katılımcı birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerini çözerken uyguladığı sonuç odaklı OG-E3 kodlu rutinini gerekçelendirirken süreçleri ve eylemleri vurgulamış ve katılımının hibrit katılıma bir örnek temsil ettiğine dair bulgular sunmuştur. Elif GD9’da yer alan “ $x - 2y = 4$ ” denkleminin çözüm kümesinin eleman sayısının sonsuz çoklukta olduğunu “Çünkü bizim kümemiz reel sayılar, ben bu reel sayılardan x için sonsuz tane değer yazarım o zaman y için sonsuz tane değer bulurum [214-GD9]” biçiminde süreçleri vurgulayarak gerekçelendirmiştir. Doğru grafiğinin çözüm kümesiyle (sıralı ikililerle) ilişkisi hakkında “... doğrunun kendisi, [...] zaten doğru sonsuz noktalardan oluşuyor, bu sonsuz noktaların hepsi bu [$y + 2x = 8$ ifadesini göstererek] denklemin çözüm kümesi.” şeklinde anlatılar üreten Elif, bu anlatısının gerekçesini “Sonsuz tane nokta varsa bunlar hep bu şekilde olacak [Derya’nın grafiğine doğrusal noktalar ekleyerek] ve bunlar doğru belirtmek zorunda [251-GD9]” şeklindeki söylemiyle ifade etmiştir. Bu nedenle Elif’in

keşif anlatılarını gerekçelendirmesi söyleme katılım yönünden hibrit katılıma bir örnek olmuştur. Buna rağmen birinci dereceden iki değişkenli eşitsizliklerin çözümü hakkında konuşurken kullandığı OG-E4 rutinin de doğrunun grafiğini kesikli olup olmaması durumunu süreçleri ve eylemleri vurgulamadan ve KA17'ye denk söylemlerde bulunduğu görülmüştür. Elif doğruların kesikli bir şekilde çizilmesini "...orayı <doğru üzerindeki noktaları kastederek> sağlamamasının nedeni orada küçük-eşittir gibi bir ifade yok yani eşitlik olmadığı için o bölgeyi [*eliyle havada doğruyu çiziyor*] almıyoruz [...]" ve "...büyüktür ($>$) yani ııı sebebi... o sembolde ($>$) öyle bir şey içermediği için <“=” sembolünü kast ederek> o çözüm kümesini ifade etmiyor o yüzden." şeklinde gerekçelendirmiştir. Bu nedenle katılımcı OG-E4 rutiniyle söylemini gerekçelendirme açısından keşifsel bir katılım örneği göstermiştir. Bununla birlikte Elif'in bu söylemleri hem KA17'ye denk hem de eşitsizliğin çözüm kümesi hakkında olması sebebiyle gerekçelendirme açısından OG-E2 kodlu rutinin keşifsel katılımın bir örneği olduğuna delil olmuştur.

İkinci dereceden denklemlerin çözüm kümesinin elemanlarını bulurken kullandığı sonuç odaklı OG-E5 kodlu rutinde Elif, ulaştığı sonuçların denklemin birer çözümü olduğunu gerekçelendirirken sıklıkla prosedür sürecine başvurmuştur. Katılımcı "... x yerine bunu yazacağız [258-GD15] bu zaten kökleri [260-GD15]" ve "...bu denklemin bunun kökleri değil aslında bu ifadeyi sıfıra eşitleyip ... oradan kökleri bulur. [87-GD21]" şeklinde söylemlerde bulunmuştur. Elif'in ikinci dereceden tek değişkenli bağıntıları çözerken kullandığı OG-E6 kodlu rutini gerekçelendirmesi ise keşifsel katılımın bir örneği olmuştur. Bağıntının grafiğinin x eksenini kesip kesmediğini ikinci dereceden tek değişkenli denklemin çözümleri (bağıntıyı sıfır yapan x reel sayıları) aracılığıyla belirleyen Elif bu rutini neden sergilediğini "Bu aslında bir parabol [73-GD23] ...önce denklemin köklerini buldum, bunlar parabolde x eksenini kestiği noktalar olacak. [117-GD23]", "Çünkü grafiğin x eksenini kestiği noktaları buluyoruz [182-GD21]" şeklindeki onaylanmış anlatılarla açıklamıştır. Bununla birlikte araştırmacının "Mesela kök yoksa

çözüm kümesi yoktur diyebilir miyiz? [100-GD25]” şeklindeki sorusunu “Sadece x eksenini kesmediğini söyleriz [108-GD25]” şeklindeki görsel araçlarla (örneğin, Şekil 30) onaylanmış anlatısıyla gerekçelendirmiştir. Elif’in OG-E6 kodlu rutinini gerekçelendirmede kullandığı bu anlatıların KA40’a denk olduğu görülmüş ve OG-E6 kodlu rutin gerekçelendirme açısından keşifsel katılımın bir örneği olmuştur.

Elif’in ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sistemlerini çözerken kullandığı OG-E8 kodlu rutininde kullandığı görsel gerçekleştirmelerden biri olan işaret tablosu oluşturmak için eşitsizlikte yer alan cebirsel ifadenin sıfıra eşitlenmesini farklı görev durumlarında,

43. E: Onu yapmamızın sebebi ama orada biz çözüm kümesini [...] şey yapmıyoruz yani ııı sıfıra eşitlediğimiz de ... o bulduğumuz kökler olmuyor ki zaten, biz orada sadece sıfıra göre bakıyorduk, işaret belirlemek için. [GD23]

...

52. E: Hocam burada şey yapıyoruz ya ııı bu cebirsel ifadenin mesela üstteki cebirsel ifadeyi sıfıra eşitlememizin sebebi hani sıfırdan büyük olanlar pozitif küçük olanlar negatif olduğu için sıfıra eşitliyor ki [...] ııı y ’nin işte üçten sonrası için ... işaretini belirlemek için yapıyoruz. [GD24]

...

140. E: Hani sayı doğrusunda tablo yapıyoruz ya sıfıra eşitlememizin sebebi o [...] artı eksi yani hangi tarafı alacağımızı belirlememiz için yapıyoruz köklerde işaret değiştiği için. [GD25]

şeklindeki ifadeleriyle süreçleri vurgulayarak gerekçelendirmiştir. Bu nedenle OG-E8 rutinine yönelik katılımı gerekçelendirme bağlamında hibrit bir katılımın örneği olmuştur.

Elif’in katılımcının yetkinliği açısından söyleme katılım biçimi incelendiğinde, katılımcı söylemde deneyimli katılımcı bir rol üstlenmiş ve bu nedenle arkadaşları tarafından bir otorite olarak görülmüştür. Bununla birlikte Elif uyguladığı prosedürlerde, prosedürünü ne zaman başlatıp, nasıl devam ettireceği ve ne zaman bitireceği konusunda bağımsız kararlar alabilmiştir. Katılımcı tahtada prosedürünü matematiksel olarak doğru uygulayamayan ya da uygulamada güçlük çeken arkadaşlarına da mantıksal çıkarımlar yapmalarını sağlayan öneriler sunmuştur. Ayrıca Elif, zorlayıcı görev durumlarında yaptığı mantıksal çıkarımlarla doğru çözüme ulaştıran prosedürleri fark ederek katılımcının yetkinliği

bağlamında keşifsel katılımın örneklerini sunmuştur. GD8’ de yer alan “ $\frac{-1}{22} \leq \frac{1}{4u+6}$, $u \in \mathbb{R}$ ” biçimindeki eşitsizliği sağlayan u reel sayılarının kümesini belirlemede katılımcılar “içler-dışlar çarpımı” yapmak istemiş ve çözüm kümesini bulmada güçlük yaşamıştır. Elif’in görüşme sürecinde “...burada u ’nun eksi olması yine değiştiriyor, yani sadece u ’nun eksi olmasına bağlı değil, dört u eksi altının pozitif ya da negatif olmasına bağlı [266-GD8]” biçimindeki önerisi çapraz çarpımda yapılan hatanın fark edilmesini ve doğru bir prosedür uygulanmasını sağlamıştır. Benzer şekilde GD18’de “toplamları 18’den büyük olmayan ardışık iki pozitif reel sayı ikililerini” belirlerken doğru çözüme ulaştıran cebirsel ifade için “Hımm [...] Hocam şey yapabilir miyiz, bir denklem [...] bir eşitsizlikten oluşan bir sistem gibi olabilir mi? [131-GD18]” şeklinde bir öneride bulunmuştur. Katılımcının geçmiş öğrenme yaşantılarında ya da ders kitaplarında aşına olmadığı bir prosedürü önermesi, söyleme katılımı katılımcı yetkinliğinin keşifsel olduğunun bir örneğini sunmuştur. Tablo 31’de Elif’in söyleme katılımının, katılımcı yetkinliği bağlamında keşifsel olduğuna dair örneklere yer verilmiştir.

Tablo 31

Elif'in Odak Grup Görüşmelerindeki Yetkinliğine Yönelik İletişim Örnekleri

Keşifsel katılımın iletişimsel belirleyicisi	İletişim örneği	Görev Durumu	Rutin kodu
	Elif'in ve diğer katılımcıların matematiksel ve kişisel söylemleri		
Kendisi dışında hiç kimseyi otorite olarak görmez. Arkadaşları tarafından bir otorite olarak kabul edilir.	258. <Öğrenciler görev durumunun çözümüyle uğraşüyor ve görev durumu zorlayıcı geliyor> 259. B: Elif [...] yardım et bize. [Elif'i bir otorite olarak görüyor] 260. <Öğrenciler görev durumunun çözümüyle uğraşıyor> 261. A: u pozitif bir reel sayı iken nasıl bir sonuca ulaşırız, u negatif bir reel sayı iken nasıl bir çözüm kümesine ulaşırız [...] şu an sizin yaptığınız yani tahtadaki yaptığınız adımlara göre siz u'yu nasıl bir sayı olarak düşünüyorsunuz? 262. E: Pozitif olarak düşünüyoruz. 263. A: Pozitif olarak düşünüyorsunuz o zaman o kısım tamam, negatif inceleyebilirsiniz. [...] Çünkü işaret değişikliği yapmıyorsunuz değil mi çarparken yanılmıyorum değil mi, o zaman pozitif olarak düşünüyorsunuz. 264. <Öğrenciler görev durumunun çözümüyle uğraşıyor, Elif tahtaya bakıp duruyor> 265. A: Elif ne düşünüyorsun? 266. E: Hocam bizim burada u'nun eksi olması yine değiştiriyor yani sadece u'nun eksi olmasına bağlı değil, dört u eksi altının pozitif ya da negatif olmasına bağlı. <GD8'de yer alan eşitsizlik için doğru çözüme ulaştıran öneriyi paylaşıyor>	GD8	BG-E5
	32. A: Herkes konuşmak istiyor, acaba kimle başlasam? 34. Z: Bence Elif'ten başlayın. Elif çok hevesli. 35. A: Hadi Elif başlayalım. 36. E: Şimdi burada şöyle olması gerekiyor bence [...] burada x'leri buldun ya. 37. Z: Evet. 38. E: Hı bunlar bir sıralı ikili olmak zorunda [...] o yüzden de x'i buldun. 39. Z: Hı hı. 40. E: Sıralı ikili olacağından x'i yerine yazıp y'yi bulman lazım. 41. Z: Evet. 42. E: x, y sıralı ikilileri olacak çözüm kümesi. 43. Z: Daha mantıklı [...] sanırım ben y'nin bir değeri biri sağladığı için ikisini yazınca böyle [...] ikisi denk geldi öyle yaptım ama şimdi yok [...] tamam anladım.	GD22	OG-E3
	98. Z: Sonrada buradan acaba eşitsizlikteki kök bulur gibi öyle mi yapacağız? [Araştırmacıya bakarak onay istiyor] 99. E: Hı hı kök bulacağız. [GD22-OG-E5]	GD22	OG-E5
Katılımcı görev durumunda prosedürü uygularken bağımsız kararlar alır.	398. A: Senin yaptığın işlem çarpmamı oluyor orada Elif? 399. E: Yani evet aslında burada [$5(3 - x)$ ifadesini göstererek] arada bir 111 çarpma işareti var, yani üç eksi x'in beş katını almamızı söylüyor burada. 400. A: Evet. 401. E: O yüzden dağılmayı kullanarak beşle üçü çarptım sonra işte eksi x ile beşi çarptım. 410. E: Şey yaptım hocam burada [$x + 15 - 5x$ i göstererek] eksi beş x artı x'in toplamı eksi dört x artı on beş 411. A: Hı hı. 412. E: Eşittir burayı aynı şekilde yazdım [denklemin sol tarafını göstererek]. 413. A: Evet	GD5	OG-E2

	414. E: Sonra her iki tarafa artı dört x ekledim, yirmi sekiz eşittir on beş çıktı. 415. A: Hı hı. 416. E: Böyle bir şey doğru değil, böyle bir ifade doğru değil [$28 = 15$ i göstererek] [...] O yüzden bir çelişki < “ $-4(x - 7) = x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesini kastederek>, o yüzden çözüm kümesi de boş küme.		
	35. A: Doğru bir şekilde böldüğünü düşünüyor musunuz? [Zehra'nın “ $\frac{y-3}{2} + 1 = 3y - 5$, $y \in \mathbb{R}$ ” denklemini çözerken yaptığı hata üzerine konuşurken] 36. E: Hayır. 39. A: İı Elif sen ne düşünüyorsun? 40. E: Hocam ben de aynı şeyi düşünüyorum zaten bölmede hata yaptı işlem hatası yaptığı için sonuç bulamadı. 41. Z: Evet. [Düşünerek] 42. E: Altiya tam [...] doğru bölemediği için ıı boş küme dedi ama altıyı y eksi dokuz bölü altı yapması lazımdı ama o sadece y yi böldü altıya.	GD6	BG-E4
	135. A: Peki tamam şimdi bir de yerine koyma metoduyla çözmeye çalış Elif az önce bahsettiğin. 136. E: Evet [...] ıı ben onu aslında ikisinin çözüm kümesi [...] aslında bu noktayı [kesişim yerini göstererek] noktayı bulmak için söylemişim. 137. A: Tamam yap bakalım. 138. E: İı şurası x eşittir dört artı iki y olur [...] her tarafa iki y ekledim. [...] ıı sonra burada [$y + 2x = 8$ ifadesini göstererek] x yerine bu ifadeyi yazacağım. [...] y artı iki çarpı dört artı iki y eşittir sekiz [...] y artı sekiz artı dört y eşittir sekiz [...] şunlar gider [8 sayısının üzerini çizerek] dört y [...] eksi y [...] bir dakika buradan bir şey çıkarmamız gerekiyor [...] yanlış yaptım [tekrar kontrol ederek] dört y artı sekiz eşittir y artı sekiz [ikinci ve üçüncü adımlarını kontrol ediyor] 143. E: Beş y eşittir sıfır [$5y = 0$ ifadesini yazarak] y buradan sıfır geldi [$y = 0$ ifadesini yazarak] tamam. Doğru tamam, doğru. [Emin olup ilerliyor] y buradan sıfır geldi. y sıfırsa herhangi bir denklemden yerine yazarım. Burada da mesela sıfır artı iki x eşittir sekiz [$0 + 2x = 8$ ifadesini yazarak] x de buradan dört gelir [$x = 4$ ifadesini yazarak] 144. A: Bu ne anlama geliyor? 145. E: İı bu da iki denklemin ortak çözümü ve [...] ıı sıralı ikili olarak ifade etmemiz gerekiyor. Yani çözüm kümesi eşittir dörde sıfır [$\mathcal{C}.K = \{(4,0)\}$ ifadesini yazarak] 146. Z: Aaaaa! [Hayret ederek] 147. D: Eveet! [Hayret ederek gülümsüyor] 149. Z: Kesişimleri nokta zaten ortak çözüm kümeleri oluyormuş [Farkına vararak, hayret ederek]	GD9	OG-E3
Söylemlerinde kendinden emindir. Prosedürü uygularken deneyimli katılımcı rolündedir ve söylemlerinde “yaparım, çözerim, haydi şöyle yapalım” gibi ifadeler kullanır.	91. A: Peki bunu [$11 + 2(x - 3) = 7$, $x \in \mathbb{R}$ ifadesini göstererek] cümleye çevirmenizi istesem nasıl çevirirsiniz? ... 96. E: Yani bir sayının diye başlayabiliriz. Bir sayı ya da bir sayının üç eksiğinin iki katı ve on bir fazlası yediye eşittir. 41. D: Sonra şöyle yaptım [koordinat sistemini çizerek] y 'si eksi iki [...] yani ilk başta direkt doğruları çizmiştim hani dün şey yapmıştık ya şu şekilde [$y = 2$ doğrusunu çiziyor] sonra şöyle yapmıştım [x eksenine dik bir doğru çiziyor pozitif tarafta] sonra ben buradan ilerleyemedim. 42. A: Neden? Neden sence Derya buradan ilerleyememiş olabilir Elif? 43. E: Çünkü x ve y [...] oradan aslında bir tane doğrunun ıı aslında şeyini buldu [...] sıralı ikilisini bulması gerekirdi.	GD1	BG-E2
	132. A: O zaman bu grafiğe göre bu alanın alabileceği en büyük değer neymiş? 133. E: Otuz altı. 134. A: Grafiği çizmeden peki bulabilir miydik? 135. Ş: Hı hı. 136. A: Nasıl buluruz Şule?	GD12	OG-E4
		GD20	OG-E7

	137. Ş: Zaten parabol olduğunu anladığımızda maksimum ya da minimum değerleri bulmak için r 'sine bulup yerine koyup k 'sını buluyorduk, yani tepe noktasını buluyoruz. 138. E: Direkt k 'sı yani [<i>emin bir şekilde</i>] 139. Z: Aynen [...] Çizmesek de oluyormuş.		
Anlatılar üretir ve mantıksal çıkarımlarda bulunur. Başkalarının mantıksal çıkarımlar yapmasına katkıda bulunur ve söylemlerden mantıksal çıkarımlar yapar.	331. A: Tamam. Zehra neden denklem diyorsun? 332. Z: ... çünkü denklem dediğimiz şey bir değişkeni bulunan bir çözümü bulunan ııı cebirsel ifadeler oluyor. 335. A: Bir denklem için bunlar yeterli mi? 336. E: Z: Hayır <Elif elini hayır anlamında yana kaldırıyor> 337. Z: Yeterli değil. 338. A: Neden? 339. Z: Bir dakika şimdi düşünüyorum. [...] [<i>Parmaklarına dokunuyor</i>] 340. A: Tamam. Elif'i dinleyelim mi? 341. Z: Olur. 342. A: Elif [<i>söz hakkı veriyor</i>] 343. E: Hocam ben Zehra'ya katılıyorum ama bir de eşitlik içermesi gerekiyor. 344. Z: Evet. <Aradığı cevabı bulmuşçasına arkadaşını işaret ediyor> 345. E: Eşitlik ve en az bir değişkeni olan ifadelere denir.	GD1	OG-E1
	225. A: Bunlar birer denklem midir? [...] Sıfır eşittir sıfır, beş eşittir beş. 226. Z:E:B: Hayır <Elif hayır anlamında kafa sallıyor> 227. A: Neden? 228. E: Çünkü değişken yok. 229. A: Değişken yok diyorsun, ama eşittir var. 230. Z: E: Ama iki şartı da sağlaması lazım. 231. Ş: Ama bir bilinmeyenli denklem olması için x olması gerekiyor burada bilinmeyen değil sadece denklem dediği için 232. E: O zaman bilinmeyen olmayan denklem mi var? [<i>Şule'ye soruyu yöneltiyor, Zehra bu soruya gülüyor</i>] 233. Ş: Ama sıfır eşittir sıfır bence (denklem) olur. 234. A: Bilinmeyen mi kullanmalıyız denklem için. 245. Ş: Bence [...] yani eğer bir bilinmeyenliyse ya da iki bilinmeyenli olabilir, ama bunda ($0 = 0$ da denklem) olabilir bence 246. A: Elif bilinmeyen olmayan denklem mi var diye sordu? 247. E: Değişken [...] onun (<i>Şule</i>) ifadesine karşılık söyledim, değişken. 248. A: Anladım, evet değişken içermeyen denklemler var mı diye soruyor 250. Ş: Yok ama [...] orada da eşitlik olduğu için [<i>gülerek</i>] bilmiyorum olmayabilir de. 252. A: İsim vermemiz gerekirse ne diyebiliriz peki? 253. E: Eşitlik.	GD2	OG-E1
	125. A: Buradaki geçişte Zehra'yı böyle olmayacağına [$\leq$ <i>sembolünü yön değiştirip > yapmasını kastederek</i>] nasıl ikna edersiniz? 126. Z: Ben ikna olamıyorum şu an [<i>gülerek</i>] 127. E: Yerine koyalım, mesela eksi yediye yerine koyalım [...] sağlıyor [...] yani oluyor. 128. A: Hah, güzel. 129. E: Mesela hocam, çözüm kümesine dedik ya işte, u büyük-eşittir eksi yedi dedik, eğer Zehra'nın dediğine göre hani [...] ııı u büyüktür eksi yedi olması lazım, eksi yedinin olmaması lazım ama eksi yediye yerine koyunca denklemi sağlıyor, eşitsizliği sağlıyor.	GD8	OG-E2

51. A: Neyin işaretini belirliyor ki Şule? 52. E: Hocam burada şey yapıyoruz ya mı bu cebirsel ifadenin mesela üstteki cebirsel ifadeyi sıfıra eşitlememizin sebebi hani sıfırdan büyük olanlar pozitif küçük olanlar negatif olduğu için sıfıra eşitliyor ki [...] ı y nin işte üçten sonrası için [...] işaret belirlemek için yapıyoruz. [<i>Öneride bulunuyor</i>] 53. Ş: Evet aslında kritik noktaları buluyorum, ona göre grafikte işaret belirliyorum. A: Başka nasıl çözebiliriz? 59. Ş: Şimdi küçük-eşit sıfır dediği için yukarısının pozitif, aşağısının negatif ya da yukarısının negatif aşağısının pozitif olduğu durumları inceleyebiliriz. 60. A: Güzel. 62. E: Sonra da sıfıra eşit olduğu durumu inceleriz. [<i>Şule'nin söylemlerinden doğru bir çıkarım yapıyor</i>]	GD24	OG-E8
201. A: Peki bu üstteki $x^2 - 3x = y$ denklemini kast ederek] denklemin çözüm kümesi ile ilgili ne söylersin? 202. [...] ıı denklemin çözüm kümesi [...] sıfır ve üç [...] hayır sıfıra sıfır ve üçe sıfır [<i>koordinat düzlemine bakarak</i>] 203. A: İki tane sıralı ikiliden oluşan bir küme mi? 204. B: Evet sadece bu denklemin öyle $x(x - 3) = 0$ ifadesini göstererek] 205. A: Peki tepe noktası bu denklemi sağlıyor mu? 206. B: Aaa [...] sağlıyor hatta bunların hepsi sağlıyor [<i>grafiği göstererek</i>] o yüzden iki elemanlı diyemem [...] 207. A: Hum 208. E: Hocam? 209. B: Şimdi kafam karıştı. 210. E: Şeyi mi soruyorsunuz? Yani x çarpı x eksi üç eşittir sıfırı mı $x(x - 3) = 0$ ifadesini göstererek] yoksa x kare eksi üç x eşittir y'nin mi $x^2 - 3x = y$ denklemini kastederek] çözüm kümesini soruyorsunuz? 211. A: İkincisinin. 212. B: Bunların hepsi sağlar ama [<i>grafiği göstererek</i>] bizim çözüm kümesi böyle değil mi [<i>düzlemi göstererek</i>] bunu böyle bırakamaz mıyız? [<i>Onay için soruyor</i>] Öyle çünkü çözüm kümesini yazamam ki. 213. E: Evet çözüm kümesi o zaten.	GD22	OG-E6

Elif'in rutinleri uygulanabilirlik bağlamında ele alındığında katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerin çözümüne yönelik olan OG-E5 kodlu rutini dışında diğer rutinleri keşifsel katılımın bir örneğini sunmuştur. Katılımcı OG-E5 kodlu rutinini benzer 3 farklı görev durumunda sesli gerçekleştirme ve 6 farklı görev durumunda (örneğin, GD13, GD14, GD22) ise cebirsel gerçekleştirme şeklinde uygulamıştır. Katılımcının rutinini cebirsel gerçekleştirmelerle uyguladığı görev durumlarından ikisi (GD13 ve GD14) ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerin kazanımlarına yönelik iken diğer 4'ü ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sistemlerine aittir. Bu katılımcının rutinini hem aşına olduğu görev durumlarında hem de farklı görev durumlarında uygulayabildiğini göstermiştir. Buna rağmen Elif, ikinci dereceden tek değişkenli denklem kazanımlarına yönelik bir görev durumunu içeren GD15'te OG-E5 kodlu rutinini uygulamada güçlük yaşamıştır. GD15'te yer alan " $(m + 1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0, m \in \mathbb{R} - \{-1\}, x \in \mathbb{R}$ " cebirsel ifadede m reel sayısının belirli olmaması katılımcının rutinini uygulamada güçlük yaşamasına sebep olmuştur. Buna rağmen Elif, katsayıları belli olan ikinci dereceden denklemlerin çözüm kümesini bulurken OG-E5 kodlu rutinini hem benzer hem de farklı görev durumlarında kanonik bir şekilde uygulamıştır. Bu nedenle OG-E5 kodlu rutini uygulanabilirlik açısından hibrit katılımın bir örneği olarak kodlanmıştır. Katılımcı bunun dışındaki tüm rutinlerini benzer ve farklı görev durumlarında ya da bağlamlarda farklı gerçekleştirmelerle kanonik bir şekilde uygulamıştır. Katılımcının rutinlerini hangi görev durumunda hangi gerçekleştirme ile uyguladığı Tablo 32'de okuyucuya sunulmuştur.

Tablo 32

Elif'in Rutinlerinin Görev Durumlarındaki Uygulanabilirliği

	OG-E1	BG-E2	OG-E2	OG-E3	BG-E4	BG-E5	OG-E4	OG-E5	OG-E6	OG-E7	OG-E8
GD1	Sesli- Sözel				Sözel- Cebirsel						
GD2	Sesli	Sesli	Sesli- Cebirsel		Sözel- Cebirsel						
GD3	Sesli- Sözel	Sesli				Cebirsel					
GD4			Cebirsel			Cebirsel					
GD5	Sesli		Sesli- Cebirsel		Sözel- Cebirsel						
GD6					Sözel- Cebirsel						
GD7						Cebirsel					
GD8			Sesli			Cebirsel					
GD9				Sesli- Cebirsel- Grafiksel							
GD10				Sesli			Sesli- Cebirsel- Grafiksel				
GD11							Sesli- Cebirsel- Grafiksel				
GD12			Sesli	Sesli			Sesli- Cebirsel- Grafiksel				

	OG-E1	BG-E2	OG-E2	OG-E3	BG-E4	BG-E5	OG-E4	OG-E5	OG-E6	OG-E7	OG-E8
GD13	Sözel							Cebirsel			
GD14			Sesli					Cebirsel			
GD15	Sözel	Sesli	Sesli					Sesli			
GD16					Sözel- Cebirsel						
GD17		Sesli			Sözel- Cebirsel						
GD18			Sesli								
GD19										Cebirsel- Grafiksel	
GD20										Sesli- Cebirsel- Grafiksel	
GD21	Sesli							Sesli	Sesli- Cebirsel- Grafiksel	Sesli- Cebirsel- Grafiksel	
GD22	Sesli		Sesli	Sesli- Cebirsel				Cebirsel			
GD23	Sesli							Sesli- Cebirsel	Sesli- Cebirsel- Grafiksel		Sesli- Cebirsel- Grafiksel
GD24								Cebirsel			Sesli- Cebirsel- Grafiksel
GD25	Sesli	Sesli						Cebirsel	Sesli- Cebirsel- Grafiksel		Sesli- Cebirsel- Grafiksel
GD26			Sesli								Cebirsel- Grafiksel

Elif'in odak grup görüşmelerindeki bulgularından elde edilen 11 farklı rutini aracılığıyla kriterler bağlamında söyleme katılım türü ise Tablo 33'teki gibidir.

Tablo 33

Elif'in Rutinleri Aracılığıyla Kriterler Bağlamında Odak Grup Görüşmelerindeki Söyleme Katılım Türü

Kriterler	Ritüel katılım	Hibrit katılım	Keşifsel katılım
Söylemin Nesneleştirilmesi		BG-E2 OG-E4 OG-E5 OG-E6	OG-E1 OG-E2 OG-E3 OG-E8
Esneklik	BG-E4 BG-E5 OG-E4		OG-E3 OG-E5 OG-E7 OG-E8
Bağlılık-Tutarlılık			BG-E4 OG-E3 OG-E4 OG-E5 OG-E7 OG-E8
Gerekçelendirme		BG-E2 OG-E3 OG-E5 OG-E8	OG-E1 OG-E2 OG-E4 OG-E6
Katılımcının yetkinliği			OG-E1 OG-E2 OG-E3 OG-E4 OG-E5 OG-E6 OG-E7 OG-E8 BG-E2 BG-E4 BG-E5
Uygulanabilirlik		OG-E5	OG-E1 OG-E2 OG-E3 OG-E4 OG-E6 OG-E7 OG-E8 BG-E2 BG-E4 BG-E5

Sonuç olarak, Elif'in söyleme katılımı, nesneleştirme bağlamında hibrit iken bağlılık-tutarlılık, katılımcı yetkinliği ve uygulanabilirlik açısından bireysel görüşmede olduğu gibi keşifsel biçimde olmuştur. Katılımcının rutinlerini gerekçelendirme sürecinde ise söyleme hem hibrit hem de keşifsel bir şekilde katılım göstermiştir.

Burcu'nun Bireysel Görüşmedeki Rutinleri ve Söyleme Katılımına Yönelik Bulgular

Burcu'nun 26 farklı görev durumunu içeren ve beş farklı oturumda uygulanan yazılı verileri üzerine katılımcı ile yaklaşık 110 dakika süren bireysel bir görüşme yapılmıştır. Bu bireysel görüşmenin söylemsel analizi sonucunda katılımcıya ait 12 farklı rutin elde edilmiştir. Burcu'nun denklem ve eşitsizlik içeren 26 farklı görev durumu için sergilediği rutinlerinden 10'unun ritüel, 2'sinin ise keşif rutini olduğu görülmüştür. Katılımcının denklem ve eşitsizlik kavramlarına yönelik rutinleri aşağıdaki durumlarda gözlemlenmiştir:

- Denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken ya da herhangi bir cebirsel ifadenin birinci dereceden tek değişkenli bir denklem ya da eşitsizlik olduğunu belirlerken (ritüel rutin)
- Denklem ve eşitsizlik kavramları arasındaki ilişkiyi açıklarken (ritüel rutin)
- Çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken (keşif rutini)
- Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken (ritüel rutin)
- Birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken (ritüel rutin)
- Denklem ve eşitsizlik sistemi kavramlarını tanımlarken (ritüel rutin)
- Birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerini çözerken (ritüel rutin)
- Çözüm kümesini analitik düzlemde grafik çizme yoluyla belirlemesi istendiğinde, denklem sistemlerini çözerken (ritüel rutin)
- İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken (ritüel rutin)
- İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken (ritüel rutin)

- İkinci dereceden tek değişkenli denklemin çözümlerinin varlığını belirlerken (keşif rutini)
- Çözümleri verilen ikinci dereceden denklemleri yazarken (ritüel rutin)

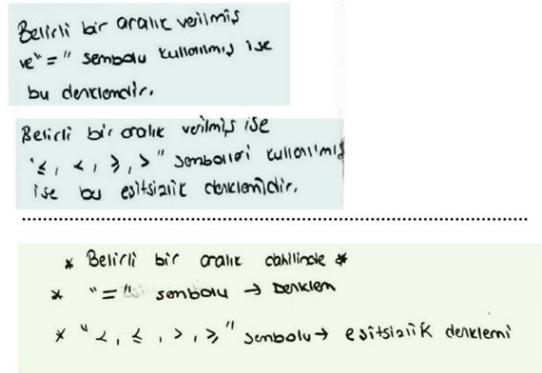
Burcu'nun bu durumlarda gözlemlenen 12 farklı rutini aracılığıyla söyleme katılım türü incelendiğinde; nesneleştirme, esneklik, gerekçelendirme ve katılımcının yetkinliği bağlamında çoğunlukla ritüel bir katılım göstermesine rağmen, bağlılık-tutarlılık ve uygulanabilirlik bağlamında daha keşifsel bir katılım sergilediği görülmüştür.

Odak grup görüşmeleri öncesinde, beş farklı oturumda yazılı olarak toplanan veriler üzerine yapılan bireysel görüşmede Burcu'dan görev durumlarını nasıl yanıtladığını detaylı bir şekilde paylaşması istenmiştir. Araştırmacının “Denklem ve eşitsizliği nasıl tanımlarsın?” sorusu üzerine Burcu ile araştırmacı arasında aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

1. A: Denklem ve eşitsizliği nasıl tanımlarsın?
2. B: Denklemi mi yani [...] eşitlik işareti [...] mesela onun adını şey yapamadım ama eşittir konulduğunda ve sonucu da varsa eğer [...] onu denklem diye tanımlıyorum.
3. A: Yani eşittir işareti olacak.
4. B: Evet eşittir işareti olacak.
5. A: Eşittir işareti yeterli mi?
6. B: Öyle ama şimdi tanım aralıkları önemli yani hani mesela sayıların olması gerekiyor [...] tanım aralığını da verirse ona göre.
7. A: Peki eşitsizlik kavramından ne anlıyorsun?
8. B: Eşitsizlik de [...] aslında her eşitsizlik bir denklem oluyor [...] eşittir işareti, büyük-eşittir, büyüktür küçüktür, küçük-eşittir işaretleriyle olan yine dediğim gibi tanım aralıklarıyla olan şey birbirine eşit [...] şimdi nasıl söyleyeyim sayılarla yaptığımız ve o işaretleri kullanarak yaptığımız [...] matematiksel bir [...]
9. A: Ne diyebiliriz?
10. B: Gelmedi şu an aklıma.

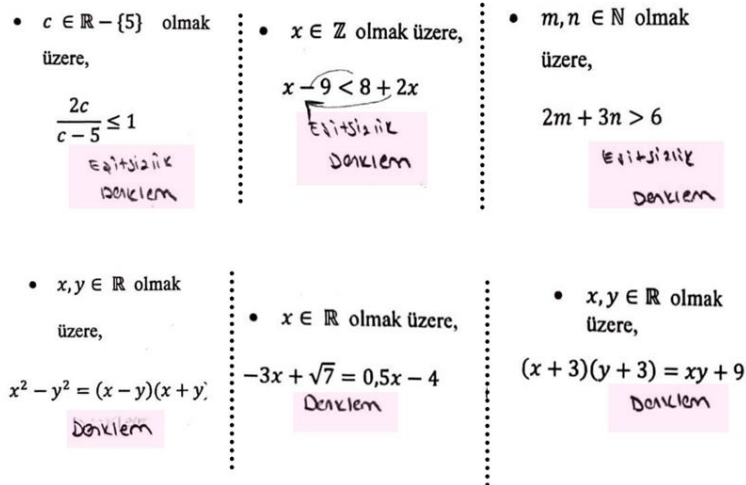
Burada ve görüşme sürecinde Burcu, “tanım aralıkları [6]”, “eleman aralığı [98]”, “belirli bir aralık verilmişse” ve “belirli bir aralık dahilinde” şeklindeki ifadeleriyle (örneğin, Şekil 39) denklem ve eşitsizliklerde yer alan değişkenin ait olduğu evrensel kümeyi kastetmiş ve sembollere göre kavramları tanımlamıştır. Katılımcı “=” sembolü içeren ifadeleri “denklem”, “>, <, ≤, ≥” sembollerini içeren ifadeleri ise kendi söylemiyle “eşitsizlik

denklemleri” olarak tanımlamış ve bu söylemini farklı zamanlarda Şekil 39’daki sözel gerçekleştirmelerle onaylamıştır:



Şekil 39. Burcu’nun denklem ve eşitsizlik tanımlarına yönelik sözel gerçekleştirmeleri

Bununla birlikte katılımcının Şekil 40’taki gibi yazılı yanıtları incelendiğinde de bir cebirsel ifadenin denklem ya da eşitsizlik olduğunu belirlemede sembollere baktığı görülmüştür. Katılımcı burada “=” sembolü içeren ifadeleri “denklem”, “>, <, ≤, ≥” sembollerini içeren ifadeleri ise kendi söylemiyle “eşitsizlik denklemleri” olarak tanımlamış ve rutinini tekrarlamıştır.



Şekil 40. Burcu’nun denklem ve eşitsizliklere yönelik sözel gerçekleştirmeleri

Burcu’nun Oturum 1’de yer alan “Denklem ve eşitsizlik kavramlarından anladıklarınızı paylaşınız” sorusuna yazdığı diğer sözel gerçekleştirmeler üzerine konuşurken, araştırmacı katılımcıya “Peki “en az bir bilinmeyen bulunan ve sonunda eşittir olan matematiksel ifadeye denklem denir” demişsin. Denklemde bilinmeyen olmak zorunda mı?” şeklinde bir

soru yöneltmiştir. Bunun üzerine Burcu ile arasında aşağıdaki şekilde bir iletişim gerçekleşmiştir:

20. B: Evet bence olmak zorunda [*onay bekliyor*] hayır bence değil [*kararsız*] iki artı üç denklem mi [*araştırmacıya soruyor*]
21. A: Evet iki artı üç eşittir beş bir denklem mi?
22. B: Denklem aslında ama [...] şu an mantıklı geliyor ama bence mantıksız [...] yani evet bu denklem [*“2 + 3 = 5” eşitliğini göstererek*] şu anda buna karar verdim orada yanlış düşünmüşüm sanırım [*kendinden bir türlü emin olamıyor*]

Katılımcı burada “ $2 + 3 = 5$ ” gibi eşitliklerin de birer denklem olabileceğini düşünmüş ve kararsızlık yaşamıştır. Fakat iletişiminin devamında “Evet ya evet şu anda fikrim öyle [...] ben bunu o zamanda nasıl düşündüm [...] sanırım baştaki bir bilinmeyenli denklem dediği için öyle yazdım ama direkt denklem denince eşittir işareti olması gerektiğini düşünüyorum. [26]” ve “... ama iki artı üç eşittir beş için denklem diyorum [...] yani şey bilinmeyen olmasının gerekmediğini düşünüyorum. [207]” söylemleriyle “=” sembolünü içeren eşitliklerin tümünü birer denklem olarak tanımladığını belirtmiştir. Bununla birlikte değişken içeren eşitlikler içinde “Tanım aralığı da önemli bence [28]” ifadesinde bulunmuş ve değişkenin ait olduğu evrensel kümenin belirtilmesinin, çözüm kümesini belirlemedeki önemine vurgu yapmıştır. Araştırmacı Burcu’nun söyleminden yola çıkarak “Peki tanıma aralığı neden gerekli sence? [29]” şeklinde katılımcıya bir soru yöneltmiş ve Burcu,

30. B: Yani nasıl söyleyeyim [...] şey sayı olması çok önemli [...] harflerle falan olduğunda da olur ama tanım aralığının önemli [...] tanım aralığında [...] nedenim [...] düşünüyim biraz [...] şimdi aslında tanım aralığı nasıl söyleyeyim bu bir denklem [...] ama bizim verdiğimiz tanım aralığına uygun olmuyorsa denklemi sağlamaz [...] ama tanım aralığı olmadan denklem olabilir ama denklemin sağlanması tanım aralığına bağlı.

şeklinde söylemlerde bulunmuştur. Denklem ya da eşitsizliklerin çözüm kümesini belirlerken değişkenin ait olduğu kümenin önemli olduğunu kendi örneklerinde de belirten Burcu, bu söylemini Şekil 41’ deki görsel araçlarla da onaylamış ve “ $x \in \mathbb{N}$ ” ve “ $x \in \mathbb{R}$ ” şeklindeki görsel araçları sıklıkla kullanarak çözüm kümelerini yazmıştır.

$$\begin{array}{ll}
 x \in \mathbb{N} \text{ ise} & 2x-4=0 \\
 & 2x=4 \\
 & x=2 \\
 & \{2\} \\
 x \in \mathbb{N} \text{ ise} & 2x-4 \leq 0 \\
 & 2x \leq 4 \\
 & x \leq 2 \\
 & \{0,1,2\}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 6 \leq \frac{3x+9}{2} \leq 9 \\
 12 \leq 3x+9 \leq 18 \\
 3 \leq 3x \leq 27 \\
 1 \leq x \leq 9 \\
 x \in \mathbb{N} \quad \{7,8,9\} \\
 x \in \mathbb{R} \quad [7,9]
 \end{array}$$

Şekil 41. Burcu’nun denklem ve eşitsizlik örneklerine yönelik görsel araçları

Bununla birlikte Burcu, eşitsizlikleri tanımlarken “her eşitsizlik bir denklemdir” şeklinde kanonik olmayan bir anlatı üretmiş ve bu anlatısını “Eşitsizlik de [...] aslında her eşitsizlik bir denklem oluyor ... [8]”, “...aslında evet her eşitsizlik bir denklemdir mesela... [12]” ve “Çünkü dediğim gibi her eşitsizlik bir denklemdir. [48]” gibi söylemleriyle farklı zamanlarda sıklıkla tekrarlamıştır. Bu anlatısını hem sesli hem de görsel araçlarla onaylayan Burcu, “her eşitsizlik bir denklemdir” şeklindeki anlatısından yola çıkarak, eşitsizlikler için Şekil 39’daki gibi “eşitsizlik denklemi” ifadesini kullanmıştır.

Bununla birlikte katılımcının oturumlarda verdiği yazılı yanıtlar incelendiğinde, denklem ve eşitsizlik kavramı arasındaki ilişkiyi açıklamak için kağıdında “Eşitsizlikler denklemden daha geniş kapsamlıdır”, “Denklemden sonucu sağlayan elemanlar seçilirken eşitsizlikte belirli aralıktaki elemanlar seçilir”, “Eşitsizliğin aralığındaki elemanlar denklem kümesi elemanlarından fazladır.”, “Denklemden ifade sonucu birebir sağlar fakat eşitsizlikte yazılan bir ifade denklemi birebir sağlamaz sadece verilen aralıktaki eşitsizliği sağlar” ve “Aslında eşitsizlik denklemi sağlayan eleman ve aralığı sağlayan elemanları da aldığı için her eşitsizlik bir denklemdir” şeklinde Şekil 42’de yer alan sözel gerçekleştirmelere de rastlanmıştır.

* Eşitsizlikler denklemlerden daha geniş kapsamlıdır.
 * Denklemlerde sonucu sağlayan elemanlar seçilirken eşitsizlikte belirli aralıktaki elemanlar seçilir.
 * Eşitsizliğin aralığındaki elemanlar denklem kümesi elemanlarından fazladır.
 Denklemlerde yazılan ifade sonucu birebirdir fakat eşitsizlikte yazılan bir ifade denkleme birebirdir sadece verilen aralıktaki eşitsizliği sağlar.
 Aslında eşitsizlik denklemleri sağlayan eleman ve aralığı sağlayan elemanlarıda aldığı için her eşitsizlik bir denklemdir.

Şekil 42. Burcu'nun denklem ve eşitsizlik kavramları arasındaki ilişkiye dair sözel gerçekleştirmeleri

Bireysel görüşmede araştırmacı Burcu'dan bu sözel gerçekleştirmelerinin nedenini sesli olarak da paylaşmasını istemiştir. Katılımcının “Eşitsizlikler denklemden daha geniş kapsamlıdır” ve “Eşitsizliğin aralığındaki elemanlar denklem kümesi elemanlarından fazladır.” biçimindeki sözel gerçekleştirmelerini,

12. B: Şöyle demek istedim ama demiştim ya [...] aslında evet her eşitsizlik bir denklemdir mesela ben örneklerde verdim (Şekil 41'deki örneği kastederek) buralarda iki x eksi dört eşittir sıfırda [...] iki x eşittir dört [...] x eşittir iki oluyor [...] yani burada hani farklı bir sonuç çıkmıyor [...] ama burada iki x eksi küçük dört eşit sıfır dediğimizde dördü karşı tarafa attığımızda iki x den büyük oluyor [...] yani x iki de olabilir o yüzden tanım kümemizde ben doğal sayılar verdiğim için sıfır, bir, iki olabiliyor yani hani aynı sayıları kullanırsak [...] orada daha fazla çözüm kümesindeki eleman sayısı [...] öyle düşündüm yani ben.

şeklinde sesli bir gerçekleştirmeye ile ifade etmiştir. Ayrıca “Denklemlerde sonucu sağlayan elemanlar seçilirken eşitsizlikte belirli aralıktaki elemanlar seçilir” ve “Denklemlerde ifade sonucu birebirdir sağlar fakat eşitsizlikte yazılan bir ifade denkleme birebirdir sağlamaz sadece verilen aralıktaki eşitsizliği sağlar” şeklindeki sözel gerçekleştirmelerini de,

16. B: Yine aynı şey hani denklemlerde sadece 111 x 'i yerine yazdığım da sadece sağlayan bir sayı oluyor genelde [...] kümenizi verdiğimiz ama burada (Şekil 41'deki örneği kastederek) dediğim gibi sıfır, bir, iki iken direk sonucu yazdığımızda eşitlik olmadığından küçüklüğüne büyüklüğüne göre birkaç sayı sağlayabiliyor.

biçimindeki sesli bir gerçekleşmeyle ifade etmiştir. Burcu burada, Şekil 41’de yer alan x doğal sayısı için “ $2x - 4 = 0$ ” denklemi ve “ $2x - 4 \leq 0$ ” eşitsizliğinin çözüm kümeleri üzerinden verdiği örneklerdeki sözel gerçekleştirmelerini sesli bir şekilde onaylamıştır. Bireysel görüşmenin ilerleyen zamanlarında “Aslında eşitsizlik, denklemi sağlayan eleman ve aralığı sağlayan elemanları da aldığı için her eşitsizlik bir denklemdir” sözel gerçekleşmesini de sesli bir gerçekleşme ile açıklayan Burcu, eşitsizlikler için “eşitsizlik denklemi” ifadesini kullanmasının gerekçesinin çözüm kümesindeki elemanlarla ilgili olduğunu [36] belirtmiştir:

34. B: Şey her eşitsizlik bir denklemdir dedim çünkü dediğim gibi sağlıyor yukarıda ben örnek verdim (Şekil 43) [...] buradan ben hani ikisi arasındaki şeyi en önemli bağı bu buldum [...] yani her eşitsizliğin bir denklem olması (A: *Hımm*) öyle düşündüm.
35. A: Eşitsizlikte bir denklem diyorsun, böyle düşünmenin nedeni çözüm kümesindeki elemanlarla ilgili miydi?
36. B: Evet onunla ilgili [...] örneklerde öyle düşünmüştüm [...] önceki örnekte olduğu gibi.

Şekil 43’te ise Burcu’nun bu anlatılarını onaylayan ve Şekil 41’dekine benzer diğer bir örneğini içeren görsel araçlar yer almaktadır.

Şekil 43. Burcu’nun denklem ve eşitsizlik kavramları arasındaki ilişkiye dair görsel araçları

Araştırmacı, görüşme sürecinde katılımcıdan Şekil 43’teki çözümünü sesli bir şekilde paylaşmasını istemiş ve Burcu, denklem ve eşitsizlik kavramları arasında kurduğu ilişkiyi örneği üzerinden bir kere daha Tablo 34’teki gibi prosedürünü uygulayarak açıklamıştır. Prosedürünü “...çünkü yediyi sağlıyor” ifadesiyle bitiren katılımcı burada, eşitsizliğin

çözüm kümesinin bir elemanı olan 7'nin aynı zamanda denklemin de bir çözümü olduğunu vurgulayarak “her eşitsizlik bir denklemdir” anlatısının gerekçesine atıf yapmıştır.

Tablo 34

Burcu'nun “Her Eşitsizlik Bir Denklemdir” Anlatısına Dair Prosedürü

Ne söylüyor?	Ne yapıyor?
B: [Gösterge 1'i yazıyor] ııı paydadaki ikiyi karşıya attım [...] on iki dedim (gerçekleşme 1) sonra dokuzu karşıya atıp eşittir işareti [...] üç x eşittir yirmi bir çıkıyor (gerçekleşme 2) [...] ise x eşittir yedi (gerçekleşme 3) dedim öyle yani [...] evet sonrasında yine aynı [.] bu kez ben aralık verdim altı küçük-eşit üç x artı dokuz bölü iki küçük-eşit dokuz dedim [gösterge 2'yi yazarak] [...] bu kez ben paydadaki ikiyi x 'i yalnız bırakmak için ikiyi karşı taraflara yolladım yani [...] ııı altıyla çarptığımda on iki [...] üç x artı dokuz kalıyor küçük-eşit on sekiz (gerçekleşme 4) dokuzları yolladım karşılıklı sıfırlamak amacıyla ııı bura yirmi bir oluyor [...] büyük-eşit yirmi yedi (gerçekleşme 5) yine x 'i yalnız bırakmak için böleceğim bu kez [...] yedi küçük-eşit x [...] küçük-eşit dokuz (gerçekleşme 6) bu kez de kümeme elemanlar [...] yedi, sekiz ve dokuz (gerçekleşme 7) çünkü yediye sağlıyor. [38]	$\frac{3x-9}{2} = 6 \dots\dots \text{Gösterge 1}$ $\Rightarrow 3x - 9 = 12 \dots\dots \text{Gerçekleşme 1}$ $\Rightarrow 3x = 21 \dots\dots \text{Gerçekleşme 2}$ $x \in \mathbb{N} \dots\dots \text{Gerçekleşme 3}$ $\Rightarrow x = 7$ $6 \leq \frac{3x+9}{2} \leq 9 \dots\dots \text{Gösterge 2}$ $12 \leq 3x+9 \leq 18 \dots\dots \text{Gerçekleşme 4}$ $21 \leq 3x \leq 27 \dots\dots \text{Gerçekleşme 5}$ $7 \leq x \leq 9 \dots\dots \text{Gerçekleşme 6}$ $x \in \mathbb{N} : \text{Cik } \{7, 8, 9\} \dots\dots \text{Gerçekleşme 7}$

Bireysel görüşmede Burcu'nun “değişken”, “bilinmeyen” ve “katsayı” kavramlarına dair herhangi bir onaylanmış anlatısını rastlanmamıştır. Katılımcı “değişken” ve “bilinmeyen” kelimelerini anlamına uygun olmayan bir şekilde tutarsız söylemlerde bulunarak kullanmıştır. Katılımcı, “ $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{a}{2} - 20 = a + 1$ ” ifadesi için “...burada bence a 'yı, a 'nın yerine yazdığımızda bence bunu sabit sayı yapıyor o yüzden bence bir değişken değil. [60]” şeklinde bir söylemde bulunurken, “ $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a^2 - 4 = 0$ ” ifadesindeki a gösterimi için “...burada zaten bir değişken olarak a yı vermiş ... [221]” şeklinde bir söylemde bulunmuştur. Bununla birlikte “ $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x - 3y + z = -1$ ” cebirsel ifadesi için “Denklem [...] burada iki tane değişken var, x ve y

[...] bir tane de z sabit terim [...] derece olarak birinci dereceden iki bilinmeyenli. [94]” biçiminde söylemde bulunan katılımcının x ve y harflerinin temsil ettiği terimi kimi zaman “değişken” kimi zaman “bilinmeyen” olarak isimlendirdiği de görülmüştür.

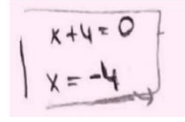
223. B: Ben burada x ’lerin değişken olacağını düşünüyorum [...] öbürlerinin de [...] öbürleri de değişebilir ama bence burada bilinmeyen x öbürleri değişken [*karar veremiyor*] söylüyorum en son [...] x bilinmeyen öbürleri değişken [...] yani ben a yerine beş de yazabilirim, altı da yazabilirim. $\langle a, b, c, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ax^2 + bx = c$ ifadesi hakkında konuşurken $\rangle$

Ayrıca denklem ve eşitsizliklerde yer alan değişkenler için “tanım aralıkları önemli ...” şeklindeki ifadesi hem açık önerme bağlamında doğru bir kelime kullanımı olmamış hem de katılımcı bu söylemini ifadenin bir açık önerme belirtmesi için değil de sadece çözüm kümesine karar vermesi için gerekli olduğunu [30] belirtmiştir. Bu nedenle katılımcının bağlama bağlı olarak, cebirsel ifadelerde yer alan harfli gösterimlerin cebirsel ayrımını yapamadığı sonucuna varılmıştır. Buna rağmen Burcu çözüm kümesi hakkında konuşurken onaylanmış anlatılar da üretmiştir. Katılımcı Tablo 31’de yer alan örneğinin reel sayılarda çözüm kümesi olan “ $7 \leq x \leq 9$ ” kapalı aralığı için “Yerine koyduğumuzda burayı sağlayan yani [...] yediden büyük olup dokuzdan da küçük olan sayılar. [40]” söyleminde bulunmuştur. Araştırmacının “Denklemin çözümü ifadesinden anladıklarını örneklerle açıklar mısın?” sorusunu,

98. B: Yani bize verilen denklemde eleman aralığı [...] eleman aralığı da önemli [...] çünkü onu sağlaması lazım [...] sağlayan eleman kümesine [...] elemanları sağlayan kümeye çözüm kümesine denklemin çözümü denir.

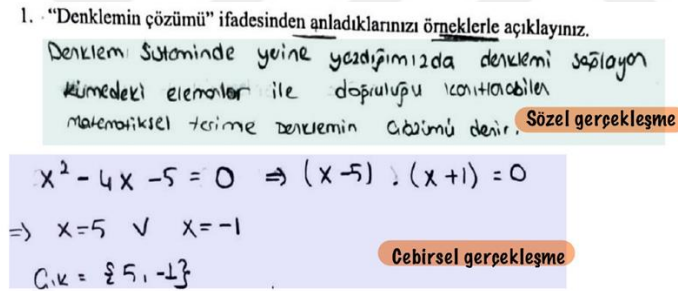
şeklinde yanıtlayan Burcu, “ $x + 4 = 0$ ” biçiminde Şekil 44’teki örneği vermiş ve “ $x = -4$ ” eşitliği için “Evet [...] yani denklem çözümü bize verilen o eşitliği [...] eşitlik olmak zorunda zaten denklem olması için bizim o eşitlikte yerine yazdığımızda [...] yani mesela x artı dört eşittir sıfırsa [...] x yerine eksi dört vermemiz lazım [...] yani eksi dört bunu (denklemini) sağlıyor [...] bu yüzden bu bir denklemin çözümü [...] eksi dört de çözen eleman yani [...] kümedeki eleman. [106]” ve “... bu da sağlayan eleman [...] yani çözüm

kümesindeki eleman oluyor ya ben bunu denklemin çözümü olarak görüyorum [110]” söylemlerinde bulunmuştur.


$$\begin{array}{l} x+4=0 \\ x=-4 \end{array}$$

Şekil 44. Burcu’nun denklemin çözümüne yönelik örneği

Çözüm kümesinin elemanlarının, değişkenin ait olduğu evrensel kümede olan ve denklemi sağlayan elemanların bir kümesi olduğunu “denklem sisteminde yerine yazdığımızda denklemi sağlayan kümedeki elemanlar ile doğruluğu kanıtlanabilen matematiksel terime denklemin çözümü denir” şeklindeki sözel gerçekleşmesiyle de onaylayan katılımcı, bu anlatısını cebirsel gerçekleştirmeleriyle de örneklendirmeye çalışmıştır. Şekil 45’te katılımcının denklemin çözümüne yönelik görsel araçları yer almaktadır.



1. “Denklemin çözümü” ifadesinden anladıklarınızı örneklerle açıklayınız.

Denklem Sisteminde yerine yazdığımızda denklemi sağlayan kümedeki elemanlar ile doğruluğu kanıtlanabilen matematiksel terime denklemin çözümü denir. **Sözel gerçekleşme**

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow x=5 \vee x=-1$$
$$C.K = \{5, -1\}$$

Cebirsel gerçekleşme

Şekil 45. Burcu’nun denklemin çözümüne yönelik görsel araçları

Bununla birlikte denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürünü uygularken söylemlerinde “ x yazdığımında hepsi sağlayabilir, hani böyle olduğunda çözüm kümesi sonsuz ... yani x elemanıdır reel sayı [...] her x elemanı sağlayabilir. [122]”, “... boş küme olacağını düşünüyorum yani hiçbir eleman sağlamıyorsa ... [124]”, “... x yerine bunu koyacağım [2 sayısını kastederek] sonra bu denklemi sağlayacak $<5x + 3y = 7$ ifadesinde y ’yi belirlerken> [169]” ve “... (çözüm kümeleri) aynı elemanları vermiyor [...] sağlayan elemanları farklı. [241]” gibi ifadelerle sıklıkla rastlanmıştır. Katılımcı “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x - 1 \leq 5 - x < 8 + 3x$ ” eşitsizliğinin çözüm kümesi olan $\left[-\frac{3}{4}, 3\right]$ aralığı için de benzer söylemlerde bulunmuştur:

152. B: Çünkü yani bunu sağlayan tek bir [...] birkaç [...] nasıl söyleyeyim [...] bunlar sağlamıyor sadece [...] bulduğum sonuçlar sağlamıyor bu üçle eksi üç bölü dört sağlamıyor sadece $[-\frac{3}{4}$ ve 3'ü göstererek] bunların aralıkları sağlıyor, böyle yazdığımda bunun aralıkta olacağını düşünüyorum çözüm kümesinin.

Bununla birlikte katılımcı, Şekil 42'de yer alan “Denklemden sonucu sağlayan elemanlar seçilirken eşitsizlikte belirli aralıktaki elemanlar seçilir” ve “Denklemden ifade sonucu birebir sağlar fakat eşitsizlikte yazılan bir ifade denklemi birebir sağlamaz sadece verilen aralıktaki eşitsizliği sağlar” şeklindeki sözel gerçekleştirmeleriyle de kanonik bir şekilde ifade edemese de çözüm kümesinin elemanlarının denklemi ya da eşitsizliğini sağlayacağını belirtmiştir. Başka bir örnekte ise oturum 4'te yer alan “Çözüm kümesi $\{-2, 3\}$ olan ikinci dereceden denklemi yazınız.” şeklindeki görev durumunda denklemi kanonik bir şekilde yazabilen Burcu'dan çözümünü sesli bir şekilde paylaşması istendiğinde araştırmacı ile arasında aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

249. B: Ben yani şey diye düşündüm ikinci dereceden dediği için zaten kuvvetimiz iki olacak ve bir tane değişken kullanmamız gerekiyor [...] bir de ben hani şey diye düşündüm [...] x yerine yazdığımızda bunlar olacaklar yani hani ikisini de [çözüm kümesinin elemanlarını kastederek] yazdığımızda denklemi sağlayacaklar.

250. A: Neden.

251. B: [...] çünkü çözüm kümesindeki elemanlar denklemi sağlayan terimler oluyor.

252. A: Denklemi sağlaması ne demek?

253. B: Yerine yazdığımızda eşitliği sağlayan.

Bir başka örnekte de yine oturum 4'te yer alan “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{3x}{x-5} = 3 + \frac{15}{x-5}$ ve $3x - 15 = 3x - 15$ denklemlerinin çözüm kümelerini karşılaştırınız. Ne gördüğünüzü açıklayınız.” şeklindeki 4. görev durumunda uyguladığı prosedürünü açıklarken katılımcı, çözüm kümesi hakkında “... üç x eşittir üç x [...] oldu yani böyle bir eşitlik çıktı yani ben x yerine ne yazarsam aynı şeyi sağlayacak [...] o yüzden bir de reel sayı dediğimiz için her şeyi yazabiliriz, o yüzden kümemiz sonsuz elemanlı ... [116]” şeklinde bir söylemde bulunmuş ve görsel araçlarla Şekil 46'daki gibi onaylamıştır.

116. B: İy ben direkt payda geçişi yapacağım [...] üçü x eksi beşle çarpacağım [...] üç x eksi on beş [...] artı on beş bölü x eksi beş (gerçekleşme 1) zaten altlarımız aynı olduğu için

üstlerimizin aynı gerekiyor [...] bunları böyle [paydanın üzerini çizerek] görmezden geliyorum (gerçekleşme 2) üç x eşittir üç x oldu (gerçekleşme 3) yani böyle bir eşitlik çıktı yani ben x yerine ne yazarsam aynı şeyi sağlayacak [...] o yüzden bir de reel sayı dediğimiz için her şeyi yazabiliriz, o yüzden kümemiz sonsuz elemanlı [...] bu [...] [çözüm kümesini yazarken tereddüt ediyor ve “Ç. K “ ∞ ” ifadesini yazıyor] (gerçekleşme 4) şu an bu doğru sanırım [emin değil] çelişkiydim ama [...] böyle olduğunu düşünüyorum [...] sonsuz işaretini çözüm kümesinde aralıkta kullanabileceğimi düşünüyorum sadece.

The image shows four panels of handwritten mathematical work, labeled Gerçekleşme 1 through Gerçekleşme 4, illustrating the steps of solving the equation $\frac{3x}{x-5} = 3 + \frac{15}{x-5}$.

- Gerçekleşme 1:** The equation is written as $\frac{3x}{x-5} = 3 + \frac{15}{x-5}$. A note says "Österge" (likely a typo for "Österge" or "Österge").
- Gerçekleşme 2:** The equation is simplified to $\frac{3x}{x-5} = \frac{3x-15+15}{x-5}$. A note says "Gerçekleşme 1".
- Gerçekleşme 3:** The equation is simplified to $3x = 3x$. A note says "Gerçekleşme 2".
- Gerçekleşme 4:** The solution set is given as $C.K = \mathbb{R}$. A note says "Gerçekleşme 3".

Additional notes in the panels include "Sözel gerçekleşme", "Burada da x her reel sayı için doğru sonucu verir bu yüzden küme sonsuz elemanlıdır", and "Ç.K = $\mathbb{R}$ ".

Şekil 46. Burcu'nun oturum 4'te yer alan 4. görev durumu için kullandığı görsel araçları

Burcu'nun bireysel görüşmede birinci dereceden denklem ve eşitsizlikleri çözerken uyguladığı prosedürler incelendiğinde katılımcı, dağılma işlemini uygularken “parantezleri dağıtacağım”, ters işlemleri uygularken “karşı tarafa atacağım/yollayacağım”, paydaları eşitlerken “payda geçişi yapacağım, genişleteceğim” ve işlemlerini yaparken “ile çarpacağım, çıkartmış olacağım” gibi eylem içeren ifadelerle birlikte matematiksel nesneler için “bu”, “bunlar” gibi zamirleri ve reel sayıları belirtmek için “her şey” edatını sıklıkla kullanmıştır. Katılımcının bireysel görüşmede denklem ve eşitsizlikleri çözerken uyguladığı prosedürün örnekleri Tablo 35'te yer almaktadır.

Tablo 35

Burcu'nun Denklemleri ve Eşitsizlikleri Çözme Prosedürü

Oturum 2- Görev Durumu 2: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $3x - 2(x - 4) = 4(x + 1)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

112. B: Tamam şimdi parantezleri dağıtacağım [...] üç x eksi iki artı sekiz eşittir dört x artı dört (*gerçekleşme 1*) şimdi ben bu taraftaki üç x i karşı tarafa atacağım ve dört x ten çıkartmış olacağım yani işaret değişikliği için burada [...] pardon burayı önce bir sadeleştiriyim [...] üç x eksi iki x ten x kalıyor [...] artı sekiz var burada [...] karşı tarafta dört x artı dörttü (*gerçekleşme 2*) x 'i karşı tarafa attığımda [...] bu tarafta üç x oluyor [...] dördü bu tarafa attığımda [...] bu tarafta da dört olmuş oluyor (*gerçekleşme 3*) buradan da dört eşittir üç x ise x eşittir dört bölü üç (*gerçekleşme 4-5*).

$$3x - 2(x - 4) = 4(x + 1) \dots\dots \text{Gösterge}$$

$$3x - 2x + 8 = 4x + 4 \dots\dots \text{Gerçekleşme 1}$$

$$x + 8 = 4x + 4 \dots\dots \text{Gerçekleşme 2}$$

$$4 = 3x \dots\dots \text{Gerçekleşme 3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{3} \dots\dots \text{Gerçekleşme 4}$$

$$C_k = \left\{ \frac{4}{3} \right\} \dots\dots \text{Gerçekleşme 5}$$

Oturum 2- Görev Durumu 3: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $2(x - 5) + \frac{x-1}{3} = -3x + 4$ denklemini sağlayan reel sayıları belirleyiniz.”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

114. B: Önce iki ile genişletiyorum x eksi on artı x eksi bir bölü üç [...] eşittir eksi üç x artı dört (*gerçekleşme 1*) şöyle yapayım ben hepsini üçle çarpacaktım yani altı x eksi otuz artı x eksi bir bölü üç [...] eksi üç x artı dört (*gerçekleşme 2*) ıı üçü de karşı tarafa yollayacağım [...] altı x artı eksi otuz artı x eksi eşittir eksi dokuz x artı on iki (*gerçekleşme 3*) yedi x eksi otuz bir oldu [...] bu tarafta eksi dokuz artı on iki olur (*gerçekleşme 4*) otuz biri karşı tarafa [...] eksi dokuzu ise karşı tarafa yolluyorum [...] toplam on altı x oluyor bu taraf [...] bu tarafta eşittir kırk üç oluyor (*gerçekleşme 5*) x eşittir kırk üç bölü on altı (*gerçekleşme 6*) buradan da çözüm kümemiz sadece kırk üç bölü on altı (*gerçekleşme 7*).

$$2(x - 5) + \frac{x-1}{3} = -3x + 4 \dots\dots \text{Gösterge}$$

$$2x - 10 + \frac{x-1}{3} = -3x + 4 \dots\dots \text{Gerçekleşme 1}$$

$$\Rightarrow \frac{6x - 30 + x - 1}{3} = -3x + 4 \dots\dots \text{Gerçekleşme 2}$$

$$6x - 30 + x - 1 = -9x + 12 \dots\dots \text{Gerçekleşme 3}$$

$$7x - 31 = -9x + 12 \dots\dots \text{Gerçekleşme 4}$$

$$16x = 43 \dots\dots \text{Gerçekleşme 5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{43}{16} \dots\dots \text{Gerçekleşme 6}$$

$$C_k = \left\{ \frac{43}{16} \right\} \dots\dots \text{Gerçekleşme 7}$$

Oturum 2- Görev Durumu 5: “ $2x - 3 \geq 7$ eşitsizliği sağlayan reel sayıların kümesi olan aralığı oluşturunuz.”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

126. B: Eksi üçü karşı tarafa yolladığımda [...] iki x büyük-eşit on oluyor (*gerçekleşme 1*) bu durumda da x büyük-eşit beş (*gerçekleşme 2*) yani reel sayı olduğu için çözüm kümesi beş kapalı sonsuz (*gerçekleşme 3*).

$$\begin{aligned} 2x - 3 &\geq 7 && \text{Gösterge} \\ \Rightarrow 2x &\geq 10 && \text{Gerçekleşme 1} \\ \Rightarrow x &\geq 5 && \text{Gerçekleşme 2} \\ \Rightarrow \text{C.K. } [5, \infty) &&& \text{Gerçekleşme 3} \\ &&& x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Oturum 2- Görev Durumu 6: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} > 1$ eşitsizliğinin çözümlerini belirleyiniz.”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

130. B: Payda eşitleyeceğim ilk başta [...] x bölü üçü ikiyle genişleteceğim [...] iki x bölü altı oluyor [...] burayı da üçte genişlettiğimde [...] üç x eksi on iki bölü altı büyüktür bir (*gerçekleşme 1*) bunları ortak paydada yazıyorum [...] iki x eksi üç x [...] eksiye dağıtarak deneyeceğim [...] on iki bölü altı büyüktü bir (*gerçekleşme 2*) altıyı karşı tarafa yolluyorum [...] iki x eksi üç x artı on iki büyüktür altı (*gerçekleşme 3*) eksi x artı on iki büyüktür altı (*gerçekleşme 4*) altı büyüktür x oldu (*gerçekleşme 5*) reel sayılar değil mi [x 'in ait olduğu kümeyi kontrol ederek] evet reel sayılarda olduğu için de [...] çözüm kümemiz [...] ııı eksi sonsuz ve altı (*gerçekleşme 6*).

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} &> 1 && \text{Gösterge} \\ \Rightarrow \frac{2x}{6} - \frac{3x-12}{6} &> 1 && \text{Gerçekleşme 1} \\ \frac{2x - 3x + 12}{6} &> 1 && \text{Gerçekleşme 2} \\ \Rightarrow 2x - 3x + 12 &> 6 && \text{Gerçekleşme 3} \\ -x + 12 &> 6 && \text{Gerçekleşme 4} \\ 6 &> x && \text{Gerçekleşme 5} \\ \text{C.K. } (-\infty, 6) &&& \text{Gerçekleşme 6} \end{aligned}$$

Oturum 2- Görev Durumu 7: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x - 1 \leq 5 - x < 8 + 3x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini aralık olarak ifade ediniz.”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

150. B: İlk başta şu ikisini alacağım [...] sonra şu ikisini alacağım [...] x eksi bir küçük-eşit beş (*gerçekleşme 1*) buradan biri bu tarafa yollayıp [...] x 'i de bu tarafa yolladığımda iki x küçük-eşit altı (*gerçekleşme 2*) x küçük-eşit üç (*gerçekleşme 3*) buradan böyle geliyor [...] bu kez de şunu anlıyorum (*gerçekleşme 4*) sekizi bu tarafa yolladığımda eksi x 'i de bu tarafa yolladığımda [...] eksi üç küçüktür dört x oluyor (*gerçekleşme 5*) şöyle yapacağım x burada kalıyorken [...] eksi üç bölü dört küçüktür x (*gerçekleşme 6*) buradan da ben yaptığımda [...] şöyle oluyor eksi üç bölü dört ııı küçüktür x [...] o da küçük-eşittir üç (*gerçekleşme 7*) yani burada çözüm kümesini yazıyorum [...] aralık kullanacağım ben [...] açık aralık eksi üç bölü dört [...] üçte kapalı aralık (*gerçekleşme 8*).

$$\begin{aligned} x - 1 &\leq 5 - x < 8 + 3x && \text{Gösterge} \\ x - 1 &\leq 5 - x && \text{Gerçekleşme 1} \\ 2x &\leq 6 && \text{Gerçekleşme 2} \\ x &\leq 3 && \text{Gerçekleşme 3} \\ 5 - x &< 8 + 3x && \text{Gerçekleşme 4} \\ -3 &< 4x && \text{Gerçekleşme 5} \\ -\frac{3}{4} &< x && \text{Gerçekleşme 6} \\ -\frac{3}{4} &< x \leq 3 && \text{Gerçekleşme 7} \\ \text{C.K. } [-\frac{3}{4}, 3] &&& \text{Gerçekleşme 8} \end{aligned}$$

Çözüm kümesi bir elemanlı olan denklem çözümlerinde prosedürünü Tablo 35’teki gibi kanonik bir şekilde uygulayan Burcu, “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $3x - 15 = 3x - 15$ ” biçimindeki denklemin (özdeşliğin) çözüm kümesini belirlemede güçlük yaşamıştır. Katılımcının Oturum 4’teki yazılı yanıtı incelendiğinde “ $3x - 15 = 3x - 15$ ” cebirsel ifadesinin altına “Burada da x her reel sayı için doğru sonucu sağlar bu yüzden küme sonsuz elemanlıdır” şeklinde sözel bir gerçekleşme yazdığı ve çözüm kümesini “ $\mathbb{C}.K = \{\infty\}$ ” şeklinde ifade etmiştir (Şekil 46). Bireysel görüşmede çözümünü sesli bir şekilde paylaşması istendiğinde ise,

120. B: ııı aynı şeyler [...] her ikisi de [...] sadece biz öncekinde payda genişlettik yani [...] aynı şeyler yine ben on beşi karşı tarafa yolluyorum [...] bu kez sıfır eşittir sıfır oluyor [...] bu yüzden çözüm kümesi yani boş küme [...] hani bir şey yok, tanımsız [...] ııı [...] boş küme diyeceğim.

söyleminde bulunmuş ve bu kez Şekil 47’de yer alan birinci prosedüründeki gibi “ $0 = 0$ ” sonucuna ulaşmıştır. Prosedürü tamamladığında değişkenin olmadığı bir eşitlik elde edince “hani bir şey yok, tanımsız” şeklinde bir söylemde bulunarak çözüm kümesinin boş küme olduğunu belirtmiştir. İletişiminin devamında katılımcının kafasının karışık olduğu ve çözümden emin olmadığı gözlemlenmiştir:

121. A: Sıfır eşittir sıfır gelince boş küme diyorsun yani?

122. B: Evet [...] ama böyle olduğunda da [$3x - 15 = 3x - 15$ ifadesini kastederek] x yazdığım da hepsi sağlayabilir [kafası karışık] hani böyle olduğunda çözüm kümesi sonsuz mu oluyor [...] çelişkili bir şey bence [...] şöyle de olabilir [...] üç x eksi on beş eşittir üç x eksi on beş [...] dediğimiz de ben buraya bir yazsam burada zaten eksi iki eşittir eksi iki bulacağım ve sağlayacak [...] bence bu çelişkili biraz [...] [yazıyor] yani x elemanıdır reel sayı [...] her x elemanı sağlayabilir.

Şekil 47’deki gibi iki farklı sonuca ulaşan Burcu “ $3x - 15 = 3x - 15$ ” eşitliğinin reel sayılarda cevaplanamayacağı sonucuna varmıştır:

124. B: Bu [...] yani eşitliğin [...] karşı tarafa falan atarsam [...] boş küme olacağını düşünüyorum yani hiçbir eleman sağlamıyorsa sıfır eşittir sıfır oluyor [...] ama eğer böyle bırakırsam [$3x - 15 = 3x - 15$ şeklinde] ııı x eleman yani reel sayılar için x her elemanı sağlıyor o yüzden bence bu denklemde bir şey yanlış [...] önceki gibi olması gerekiyor [...] yani bunun cevabı bence yok.

Prosedür 1

$$3x - 15 = 3x - 15$$

$$0 = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \checkmark \quad \emptyset$$

Prosedür 2

$$3x - 15 = 3x - 15$$

$x \in \mathbb{R}$ ise x her elemanı sağlar.

Şekil 47. Burcu'nun " $3x - 15 = 3x - 15, x \in \mathbb{R}$ " özdeşliğine yönelik farklı prosedürlerinin görsel gerçekleştirmeleri

Araştırmacının "Denklem sistemi ve eşitsizlik sistemi kavramları sence nedir? [135]" sorusunu Burcu, "Şimdi şöyle ııı denklem sistemi dediğim gibi eşitlik bulunacak ama tek bir tanesi denklem sistemi olmuyor tek bir taneyle, bizim onun çözdüğümüzde yani ikili mesela [...] ııı koordinatta bulmada falan hep genelde [...] x ve y 'yi yok ederiz [136]" şeklinde yanıtlamıştır. Denklem sistemlerinin en az iki tane denklem ve eşitsizlik sistemlerinin de en az iki tane eşitsizlik içermesi gerektiğini "Denklem sisteminde birden fazla olmalı [140]" ve "(eşitsizlik sisteminde) eşitsizlik işaretlerini kullanacağız ve en az iki tane olması diye düşünüyorum. [142]" şeklinde söylemleriyle belirtmiştir. Burcu bir cebirsel ifadenin denklem ve eşitsizlik sistemi olduğunu belirlerken, denklem ve eşitsizliklerde olduğu gibi değişkenlerden bağımsız bir şekilde sadece sembollere odaklandığı ve en az iki denklem ya da eşitsizlik içermesi durumunda cebirsel ifadeleri denklem ya da eşitsizlik sistemi olarak belirlemiştir. Şekil 48'de katılımcının denklem ve eşitsizlik sistemi kavramlarına dair sesli gerçekleştirmelerini onaylayan görsel araçları olan sözel gerçekleştirmeleri yer almaktadır. Şekil 48'de yer alan ve " $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $-2 \leq x + y \wedge x + y \leq 2$ " şeklindeki eşitsizlik sistemine denk olan " $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $|x + y| \leq 2$ " biçimindeki ifade de tek bir " $\leq$ " sembolü gören katılımcının "eşitsizlik sistemi değil sadece eşitsizlik" şeklindeki gerçekleşmesi dikkat çekmiştir. Bu gerçekleşme eşitsizlik sisteminde en az iki eşitsizlik olması gerektiğini ifade ettiği söylemini [142] onaylamıştır. Bununla birlikte denklem sisteminde değişkenlerden bağımsız bir şekilde " $=$ " sembolüne ve denklem sayısına odaklanmış ve "İki tane denklem olduğu için ve eşittir var. [158]" ve "... iki tane eşitlik var. [160]" şeklinde ifadelerde bulunmuştur.

"=" sembolü bulundurarak en az iki tane denklem bulunduran sisteme denklem sistemi denir.

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{1}{5}x - \sqrt{3}y = 6$ $-x + 4y = 5$ Denklem Sistemi	$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a - 2b = 5$ $-3b + 5a = 11$ $2a - 4b = 10$ Denklem Sistemi	$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x - 4 = 6$ $x - 3 = 12 - 2x$ Denklem Sistemi	$x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $xz = 3$ $y^2 + 3z^2 = 12$ Denklem Sistemi

">, "<,">,"≤" sembolünü bulundurarak en az ikili eşitsizlik içeren sisteme eşitsizlik sistemi denir.

$y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $3y - 4 \leq -y \leq 11 + 2y$ İkili Eşitsizlik Sistemi alınabilir.	$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ x + y \leq 2$ Eşitsizlik Sistemi değil sadece eşitsizlik	$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $-1 < x \leq 3$ $-5 \leq y < 2$ Eşitsizlik Sistemi

Şekil 48. Burcu'nun denklem ve eşitsizlik sistemi tanımına dair sözel gerçekleştirmeleri

Bununla birlikte Burcu denklem sistemlerini yok etme metoduyla ve düzlemde grafik çizme yoluyla çözdüğü gözlenmiş fakat ezbere ve katı bir prosedür uygulamıştır. Katılımcının " $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $5x + 3y = 7 \wedge y - 2x = -5$ " biçimindeki denklem sisteminin çözme prosedürü Tablo 36'daki gibidir.

Tablo 36

*Burcu'nun Birinci Dereceden İki Değişkenli Denklem Sistemine Dair Prosedürü*Oturum 3- Görev Durumu 2: " $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$5x + 3y = 7$$

$$y - 2x = -5$$

denklem sisteminin çözüm kümesini yok etme metodunu kullanarak bulunuz.

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

167. B: Burayı eksi üçle çarpıyorum [göstergedeki " $y - 2x = -5$ " ifadesini kastederek] beş x artı üç y eşittir yedi [...] ııı sonra eksi üç y artı altı x eşittir on beş oldu (gerçekleşme 1) üç y ve eksi üç y taraf tarafa topladığım için gitti (gerçekleşme 2) on bir x eşittir yirmi iki (gerçekleşme 3) x eşittir iki (gerçekleşme 4) şimdi burada beş x artı üç y eşittir yedi denkleminde (gerçekleşme 5) yerine yazdığım da beş çarpı iki artı üç y eşittir yediden (gerçekleşme 6) on artı üç y eşittir yedi geliyor (gerçekleşme 7) üç y eşittir eksi üç (gerçekleşme 8) y de eşittir eksi bir (gerçekleşme 9) çözüm kümemiz ııı şey iki ve eksi bir (gerçekleşme 10).

Handwritten steps for solving the system:

- Step 1: $5x + 3y = 7$, $y - 2x = -5$
- Step 2: $5x + 3y = 7$, $-3y + 6x = 15$
- Step 3: $11x = 22$
- Step 4: $x = 2$
- Step 5: $5x + 3y = 7$
- Step 6: $5(2) + 3y = 7$
- Step 7: $10 + 3y = 7$
- Step 8: $3y = -3$
- Step 9: $y = -1$
- Step 10: Çık = $\{2, -1\}$

Burada Burcu denklem sisteminin çözüm kümesini kanonik olarak doğru bir şekilde yazamamıştır. Bununla birlikte birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerinin çözümünde kullandığı yok etme metodunu bir denklem sistemi olduğunu belirttiği (Şekil 48) " $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x - 4 = 6 \wedge x - 3 = 12 - 2x$ " cebirsel ifadesine dair prosedüründe de uygulamıştır. Burcu, " $x - 3 = 12 - 2x$ " açık önermesine denk olan " $3x = 15$ " açık önermesini " $3x - 15 = 0$ " biçiminde yazarak "...bunu sistem yapabilmek için" söyleminde bulunmuş ve " $2x - 4 = 6 \wedge 3x - 15 = 0$ " denklemleri için yok etme metodunu kullanarak katı bir prosedür uygulamıştır. Katılımcı, bu cebirsel ifadeye yönelik prosedürü sonucunda " $-18 = -18$ " eşitliğine ulaşmış ve Şekil 47'de yer alan prosedür 1'dekine benzer nedenden dolayı çözüm kümesi için "...taraf tarafa topladığım da eksi altı x ile artı altı x yok etti [...] eski on sekiz eşittir eksi on sekiz geliyor [...] bu da boş küme. [163]" şeklinde söylemde bulunmuştur. Bu cebirsel ifadenin ortak çözümü " $x = 5$ "

olmasına rağmen prosedür sonuç ilişkisini kuramayan Burcu, iki değişkenli denklem sistemlerinde uyguladığı prosedürü ezbere bir şekilde uygulamış ve taraf tarafa toplama işlemi yaparak yanlış bir sonuca varmıştır. Bir başka örnekte ise yok etme metodunu eşitsizlik sisteminde de uygulayan katılımcı prosedürünü “ $0 < -8$ ” ifadesi ile bitirmiş ve “sıfır küçüktür eksi sekiz oluyor, o yüzden bu yanlış, bu yüzden çözüm kümesi [...] bence [...] bunun çözüm kümesi yok. [199]” söyleminde bulunmuştur. Burcu’nun prosedür sonuç ilişkisini kurmada güçlük yaşadığı görev durumları ve uyguladığı prosedürü Tablo 37’de yer almaktadır.

Tablo 37

Burcu’nun Yok Etme Metodunu Ezbere (Katı) Bir Şekilde Uyguladığı Prosedürleri

Oturum 3- Görev durumu 1: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x - 4 = 6 \wedge x - 3 = 12 - 2x$ ” denklem sisteminin çözümünü bulunuz.”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

163. B: Taraf tarafa [...] iki x eksi dört eşittir altı [gösterge 1’i yazarak] x eksi üç eşittir on iki eksi x [gösterge 2’yi yazarak] ilk başta x eksi üç eşittir on iki eksi x ’i çözeyim [...] ıı [yutkunarak] üçü karşıya atıp iki x ’i de bu taraf yolladığımda [...] üç x eşittir on beş oluyor (gerçekleşme 1) burada [...] şöyle yapacağım ıı bir dakika [...] üç x eşittir on beş oluyor (gerçekleşme 1) ama ben bunu sistem yapabilmek için bunu üç x eksi on beş eşittir sıfır yapacağım (gerçekleşme 2) böyle yapacağım sonra taraf tarafa toplama yapacağım [...] iki x eksi dört eşittir altı [...] üç x eksi on beş sıfır (gerçekleşme 3) ıı ben yukarıyı eksi üçle çarpayım aşağıyı da iki ile (gerçekleşme 4) yok etmeye çalışıyorum [...] eksi altı x artı on iki eşittir eksi on sekiz [...] altı x eksi otuza eşittir ıı sıfır (gerçekleşme 5) taraf tarafa topladığımda eksi altı x ile artı altı x yok etti (gerçekleşme 6) eski on sekiz eşittir eksi on sekiz geliyor (gerçekleşme 7) bu da boş küme (gerçekleşme 8).

Handwritten work showing the steps of the elimination method:

- $2x - 4 = 6$ Gösterge 1
- $x - 3 = 12 - 2x$ Gösterge 2
- $3x = 15$ Gerçekleşme 1
- $\rightarrow 3x - 15 = 0$ Gerçekleşme 2
- $\begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} 2x - 4 = 6 \\ 3x - 15 = 0 \end{matrix}$ Gerçekleşme 3
- $\begin{matrix} -6x + 12 = -18 \\ 6x - 30 = 0 \end{matrix}$ Gerçekleşme 5
- $-18 = -18$ Gerçekleşme 7
- $C.K. = \emptyset$ Gerçekleşme 8

Oturum 3-Görev durumu 4: “ $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $-2x - y < -1 \wedge 4x + 2y \leq -6$ eşitsizlik sistemini sağlayan reel sayı ikililerinin kümesini analitik düzlemde gösteriniz.”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

199. B: Ben yukarıya ikiyle çarparak yazacağım (gerçekleşme 1) şöyle yapayım [...] eksi dört x eksi iki y küçüktür eksi iki (gerçekleşme 2) dört x artı iki y küçüktür eksi altı (gerçekleşme 3) eksi dört x 'le dört x 'i taraf tarafa topluyorum (gerçekleşme 4) [...] eksi iki y ile artı iki y de gidiyor (gerçekleşme 5) burada sıfır kalıyor [...] sıfır küçüktür eksi sekiz oluyor (gerçekleşme 6) [...] o yüzden bu yanlış [...] bu yüzden çözüm kümesi [...] bence [...] bunun çözüm kümesi yok, yanlış böyle bir şey yok bence bu (gerçekleşme 6) yanlış bir terim.

Gerçekleşme 1 2 Gösterge

$$\begin{aligned} -2x - y &< -1 \\ 4x + 2y &< -6 \end{aligned}$$

Gerçekleşme 2 Gösterge 2

$$-4x - 2y < -2$$

Gerçekleşme 4 Gerçekleşme 3

$$4x + 2y < -6$$

Gerçekleşme 5

$$0 < -8$$

Gerçekleşme 6

Bununla birlikte katılımcıdan birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerinin çözüm kümesinin elemanlarını analitik düzlemde göstermesi istendiğinde de ezbere bir yol izlediği görülmüş ve bu süreçte araştırmacı ile arasında Tablo 38'deki iletişim gerçekleşmiştir.

Tablo 38

Burcu'nun Birinci Dereceden İki Değişkenli Denklem Sistemlerinin Analitik Düzlemdeki Çözümüne Yönelik İletişimi

Oturum 3-Görev durumu 3: “ $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$2x - 6y = 12$$

$$-x + 3y = 9$$

denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarını analitik düzlemde grafik çizimi yoluyla bulunuz.”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

170. A: Evet analitik düzlemde grafik çizimi yoluyla bu denklem sistemin çözüm kümesinin elemanlarını nasıl belirlediğini sesli bir şekilde paylaş bakalım.

171. B: Burada iki x eksi altı y eşittir on iki denkleminde (gerçekleşme 1) x 'e sıfır verip [...] x eşittir sıfır ise y 'yi bulacağım [...] y eşittir eksi iki (gerçekleşme 2).

172. A: Neden böyle yapıyorsun?

173. B: Yani [...] ını her zaman böyle yapıyorum yani böyle x 'e sıfır verip y 'yi buluyoruz.

174. A: Neden yaptığını peki biliyor musun?

175. B: Bilmiyorum hep böyle yapıyoruz.

176. A: Tamam devam edelim.

177. B: Bu kez y 'ye sıfır vereceğim [...] y 'ye sıfır verdiğimiz de de x eşittir altı (gerçekleşme 3) ını en son grafik çizerim [...] bir de şu denklemimiz var [...] eksi

Gerçekleşme 1 Gerçekleşme 2

$$2x - 6y = 12$$

Gerçekleşme 2 Gerçekleşme 3

$$x = 0 \Rightarrow y = -2$$

x artı üç y eşittir dokuz (gerçekleşme 4) [...] x 'e sıfır veririm y eşittir üç (gerçekleşme 5) y 'ye sıfır veririm x eşittir eksi dokuz (gerçekleşme 6). Şimdi bunların grafiklerini çizeceğim.

178. A: Peki buldukların ne anlama geliyor?

179. B: Şey yani x 'imiz eksi dokuz (gerçekleşme 6) yani bu denklemde yerine yazacağız [...] burada da y 'yi üç bulduk [...] yazacağız da bunları [eliyle doğru çizer gibi yaparak] nokta gibi değil ama doğru gibi [...] çünkü bunlar bir doğru belirtiyor, bir nokta belirtmiyor.

180. A: Ne doğru belirtiyor?

181. B: Şey bunlar [...] denklemler. Bir nokta belirtmiyor mesela eksi dokuzu üç değil [...] o noktalar değil doğru denklemler olacak yani ben şöyle kesiş [ellerini buluşturarak] bunu çizmeden anlatamayacağım [analitik düzlemi ve doğruları çiziyor] birinci de x 'i altı buldum [işaretleyerek] y miz eksi iki (gerçekleşme 7). [...] böyle çiziyorum (gerçekleşme 9). [...] y burada üç x de eksi dokuz [işaretleyerek] (gerçekleşme 8) böyle çizdim (gerçekleşme 9).

182. A: Tamam peki şimdi denklem sisteminin çözüm kümesi elemanlarını analitik düzlemde grafik çizimi yoluyla bulunuz dedik böyle bir şey yaptın, şimdi çözüm kümesi için ne söyleyeceksin?

183. B: Çözüm kümesi elemanları bunlar [...] yani bulduğum değerler.

184. A: Nasıl yazarız?

185. <Burcu çözüm kümesini $\{6, -2, 3, 9\}$ biçiminde yazıyor>

186. A: Tamam sıradaki eşitsizlik sisteminde-

187. B: [Aklına bir fikir geliyor] ben bunu böyle yazmayacağım [silerek]

188. A: Nasıl olacak?

189. B: Şu an aklıma bir şey yani emin değilim ama hani bunu tek yazdığım da sağlayabilecek mi? [...] Eksi ikiyle altıyı nokta olarak yazsam mı diye düşündüm ama [...] çünkü tek tek hani [...] zaten tek yazdığım da tekrar y 'yi bulmuş oluyorum ama yani mesela bunu ben başka biri olarak görsem altıyı buradaki eksi ikiyi x yerine yazabilirim [...] o yüzden değiştiriyorum kararımı ve çözüm kümemi böyle nokta olarak yazıyorum (gerçekleşme 10).

190. A: Tamam [...] az önce burada bulduklarım nokta değil falan derken ne demek istedin?

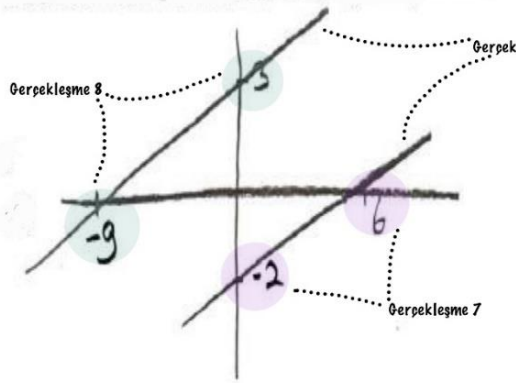
191. B: Yani şimdi şöyle demek istiyorum [gülerek] nokta ve doğruyu [...] şu an kafam çok karıştı ama böyle çizeceğimizi [çizimini göstererek] düşünüyorum çünkü x noktasını kesiyor [...] oradan geçtiği için yani noktada kesiyor [...] kesmesi konusunda hâlâ doğru olduğunu düşünüyorum yani doğru ile çizeriz hepsini ama [...] böyle yazdığımızda doğru gibi yazsak yanlış olur, o yüzden bunun nokta değil aslında bu koordinat olarak yazıyoruz [...] burada nokta demeyeceğim ben [...] koordinat diyeceğim (gerçekleşme 10).

$$y = 0 \Rightarrow x = 6 \quad \dots\dots \text{Gerçekleşme 3}$$

$$-x + 3y = 9 \quad \dots\dots \text{Gerçekleşme 4}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 3 \quad \dots\dots \text{Gerçekleşme 5}$$

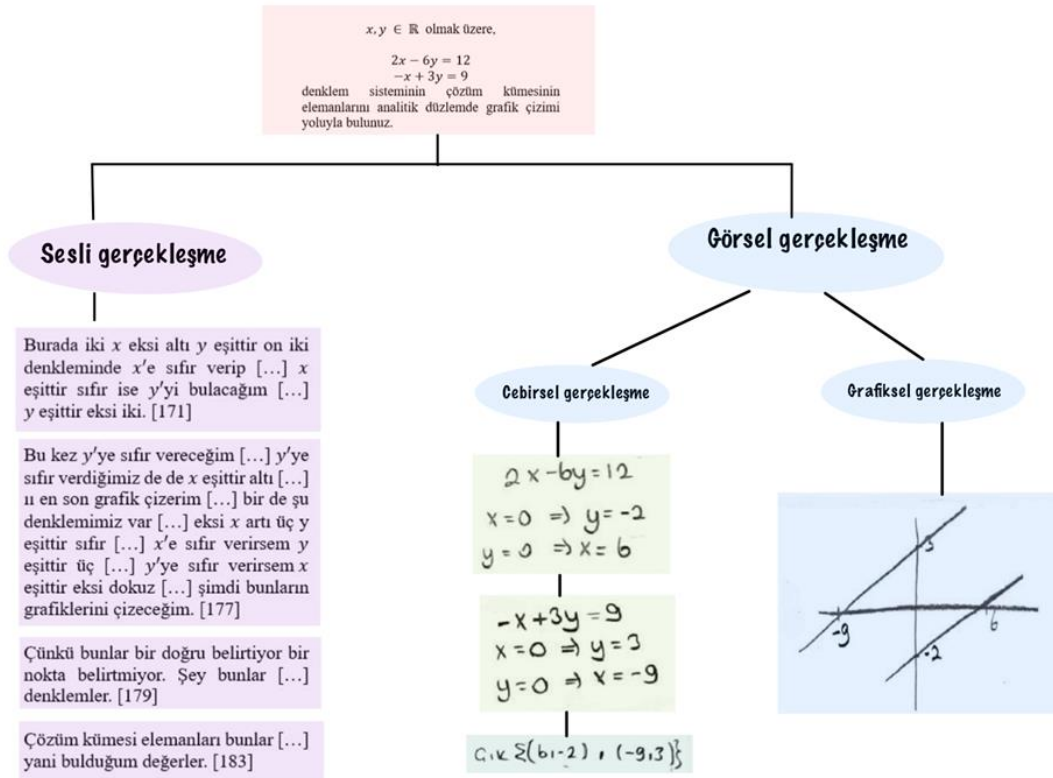
$$y = 0 \Rightarrow x = -9 \quad \dots\dots \text{Gerçekleşme 6}$$



$$G.K. \{ (6, -2), (-9, 3) \} \quad \dots\dots \text{Gerçekleşme 10}$$

Burada katılımcı ezbere bir prosedür uyguladığını "...her zaman böyle yapıyorum yani böyle x e sıfır verip y yi buluyoruz. [173]" ve "(Nedenini) bilmiyorum hep böyle

yapıyoruz. [175]” söylemleriyle belirtmiştir. Ayrıca denklem sisteminin çözüm kümesini grafik çizimi yoluyla belirlerken prosedür sonuç ilişkisini kurmada güçlük yaşamış çözüm kümesini hatalı bir şekilde (örneğin, [185] ve gerçekleşme 10) yazmıştır. Katılımcı “ $2x - 6y = 12$ ” ve “ $-x + 3y = 9$ ” cebirsel ifadelerinin düzlemde bir doğru belirttiğini ifade etse de [179], denklem sisteminin çözüm kümesinin sadece bu doğruların eksenleri kestiği noktalar olacağını “Çözüm kümesi elemanları bunlar [...] yani bulduğum değerler [183]” söylemiyle belirtmiştir. Burcu’nun birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerine yönelik gerçekleşme ağacı ise Şekil 49’daki gibidir.



Şekil 49. Burcu’nun Oturum 3’teki görev durumu 3’te yer alan denklem sistemi çözümüne ait gerçekleşme ağacı

Bununla birlikte katılımcı birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesinin elemanlarını analitik düzlemde göstermede güçlük yaşamış ve bu durumu “Orada grafik çizmek için x yerine ve y yerine sıfır yazdım [...] değerlerini buldum [...] ama bu kez nasıl bir grafik çizeceğimi bilemedim. [209]” şeklinde ifade etmiştir.

Katılımcının Şekil 50'deki gibi kağıdında yer alan görsel gerçekleştirmeler incelendiğinde denklem sistemlerine benzer bir prosedür uyguladığı görülmüş ve bireysel görüşmede araştırmacı ile arasında aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

210. A: Evet şimdi çizmeyi denemek ister misin?

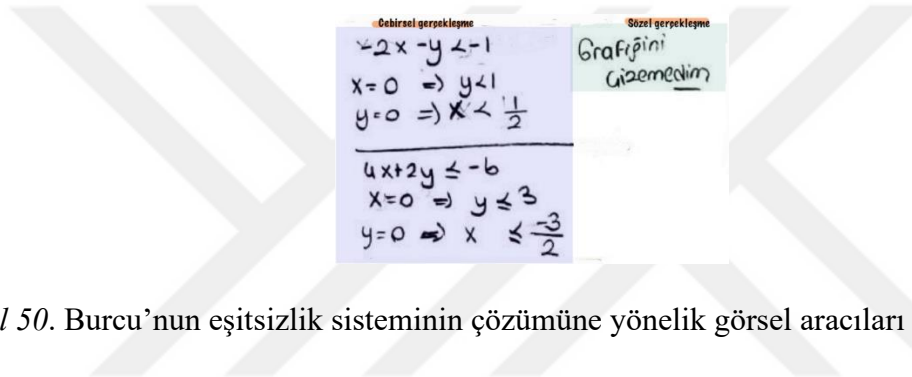
211. B: Yani şimdi şöyle [...] bu eşitsizlikten çizemedim [...] nedeni şöyle tam bilemedim yani sayıları.

212. A: Nereyi kestiğini mi bilemedin doğruların?

213. B: Evet nereyi keseceğini bilemedim.

214. A: Denklemde nereyi keseceğini bildiğin için mi çizebiliyorsun?

215. B: Evet tam o noktaları da sağladığı için çizebiliyorum [...] eşitsizlik biraz daha geniş bir küme olduğu için tam nerede olacağını bilmiyorum o nedenle çizemedim.



Şekil 50. Burcu'nun eşitsizlik sisteminin çözümüne yönelik görsel araçları

Katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken de yine sembollere odaklandığı görülmüş ve derecesi en fazla iki olacak şekilde kareli bir terim (örneğin, x^2, y^2, a^2) içeren cebirsel ifadeleri ikinci dereceden tek değişkenli bir denklem olarak isimlendirmiştir. Oturum 4'te yer alan “Aşağıdaki cebirsel ifadelerden “ikinci dereceden bir değişkenli denklem” olanları seçiniz. Seçiminizin gerekçe/lerini açıklayınız.” şeklindeki görev durumunda gerekçesini “En büyük kuvvet x^2 olmak şartıyla 1 bilinmeyenli denklemlere “ikinci dereceden bir değişkenli denklem denir.” biçiminde sunmuştur. Bireysel görüşme sürecinde ise “ $a^2 - 4 = 0$ ” eşitliğinin ikinci dereceden bir değişkenli bir denklem olduğunu “Olur çünkü burada zaten bir değişken olarak a'yı vermiş ve bunun da kuvveti iki [221]” biçiminde belirtmiştir. Bununla birlikte “ $2y - \frac{1}{4} + \frac{9}{5}y^2 = 0$ ” denklemi için “Olur bu da neden, çünkü y bilinmeyen ve kuvveti iki olduğu için olacağını düşündüm [...] benim için önemli olan bilinmeyenin kuvvetinin iki olması.

[237]" şeklinde bir söylemde bulunmuş ve bu söylemini kağıdına yazarak Şekil 51'deki gibi sözel bir gerçekleştmeyle de onaylamıştır:

Önemli kriter bilinmeyen kuvvetinin en büyük 2 olmalıdır. x 2 olmalıdır 2 den büyük olmalıdır.

Şekil 51. Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli denklem tanımına yönelik sözel gerçekleşmesi

Bununla birlikte kareli bir terim olmadığı için aslında ikinci dereceden bir denklem olan " $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $xy - 4x = 3$ " ifadesi için katılımcı, "Onun üssü bir [...] burada ikisi de değişken ama kuvvetleri bir olduğu için ben ikinci dereceden bir denklem değildir dedim [219]" şeklinde bir söylemde bulunmuştur. Ayrıca polinom biçiminde olmayan " $\frac{x^2-5}{x} = 3$ " cebirsel ifadesi içinde ikinci dereceden bir denklem olduğunu,

233. B: Olur dedim çünkü ben bunu açtım buraya da açayım [...] üçü karşı tarafa yolladığım da x kare eksi beş eşittir üç x [...] buradan ben hani bir eşitlik oluşturmak istediğim için [...] x kare eksi üç x eksi beş eşittir sıfır yapıyor [...] buradan da yine kuvvetimiz iki olduğu için [yuvarlak içine alarak]

ifadeleriyle belirtirken, bir başka örnekte ise " $-x(6 + x) = 2$ " cebirsel ifadesinde dağılma işlemleri sonucunda " x^2 " terimini elde ettiğinden dolayı ikinci dereceden bir değişkenli denklem olduğunu belirtmiştir:

235. B: İy yine ben bunu açtım [...] eksi altı x eksi x kare eşittir iki [...] bunu da ben yine denklem olarak sıfıra eşitleyeyim [...] eksi altı x eksi x kare eksi iki eşittir sıfır [...] yine x kareli bir terim olduğu için.

Katılımcının bu söylemlerini onaylayan görsel araçları ise Şekil 52'deki gibidir:

$$\frac{x^2-5}{x} = 3 \Rightarrow x^2-5=3x$$

$$x^2-3x-5=0$$

$$-x(b+x)=2$$

$$-bx-x^2=2 \Rightarrow -bx-x^2-2=0$$

Şekil 52. Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli denklem tanımına yönelik cebirsel gerçekleştmelemleri

Burcu'nun oturum 4'te yer alan ““Aşağıdaki cebirsel ifadelerden “ikinci dereceden bir değişkenli denklem” olanları seçiniz. Seçiminizin gerekçe/lerini açıklayınız.” şeklindeki görev durumu için katılımcının kağıdında bulunan ikinci dereceden denklem tanımına yönelik diğer sözel gerçekleştirmeleri ise Şekil 53'teki gibidir.

En büyük kuvvet x^2 olmak şartıyla $\downarrow$ bilinmeyenli denklemler “ikinci dereceden bir değişkenli denklem” denir.	$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(x+5)^2 = x$ Denklem çünkü en büyük değişken x^2 dir.	$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $xy - 4x = 3$ Değildir çünkü en büyük değişkenin kuvveti x dir.
$x, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\left(\frac{1}{2}x - z\right)^2 = 2,5$ (aştığımızda olur aldığımızda x^2 olur.)	$z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $z^6 - 3z^3 - 4 = 0$ Olmaz 1. kuvvü ve 6. kuvvet olduğu için değildir.	$y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2y - \frac{1}{4} + \frac{9}{5}y^2 = 0$ y^2 olduğu için 2. dereceden denklemdir.
$a, b, c, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ax^2 + bx = c$ Olur en büyük x^2 bulunur.	$x \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, $\frac{x^2 - 5}{x} = 3$ $x^2 - 5 = 3x$ $x^2 - 3x - 5$ olur denklemdir	$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a^2 - 4 = 0$ 2. dereceden denklem olur

Şekil 53. Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli denklem tanımına yönelik yazılı yanıtlarında yer alan sözel gerçekleştirmeleri

Burcu ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken iki farklı prosedür kullanmış ve farklı cebirsel gerçekleştirmelerle çözüm kümesinin elemanlarını belirlemiştir. Katılımcı çarpanlarına ayırma metodu ile $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülünü kullanarak prosedürünü uygulamış ve diskriminantı sıfır olması durumunda reel çözümlerin olmayacağını sözel bir gerçekleştirmesinde paylaşmıştır. Tablo 39'da katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerin çözümlerini çarpanlarına ayırma metodu ve $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülü aracılığıyla belirlediği iki farklı prosedürü yer almaktadır.

Tablo 39

Burcu'nun İkinci Dereceden Tek Değişkenli Denklemlerin Çözümlerini Belirlerken Uyguladığı Prosedürleri

Oturum 4- Görev durumu 2: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x^2 - 3x + 2 = 5x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.”

Prosedür: “Çarpanlarına ayırma metodu ile çözüm kümesinin elemanlarını belirleme”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

241. B: 11 x kare eksi üç x [$x^2 - 3x$] ifadesini yazıyor ben direkt karşı tarafa yollayarak yapayım [$x^2 - 3x$] ifadesini silerek gerçeğeşme 1'i yazıyor burada x kare kalıyor on'u ben bu tarafa alıyorum beşi de bu tarafa alıyorum yine aynı sonuç çıkıyor x kare eksi sekiz x artı on iki eşittir sıfır (gerçeğeşme 2) [...] buradan yine dediğim gibi x eksi altıya x eksi iki diye ayrılıyor çarpanlarına (gerçeğeşme 3) [gerçeğeşme 4'ü yazıyor] x eşittir altı olabilir veya x eşittir iki (gerçeğeşme 5) [...] ama buradan çözüm kümesi iki ve altı (gerçeğeşme 6).

$$x^2 - 3x + 2 = 5x - 10 \dots\dots\text{Österge}$$

$$x^2 + 12 = 8x \dots\dots\text{Gerçeğeşme 1}$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \dots\dots\text{Gerçeğeşme 2}$$

$$\begin{array}{c} x \quad -6 \\ x \quad -2 \end{array} \dots\dots\text{Gerçeğeşme 3}$$

$$(x-6)(x-2) = 0 \dots\dots\text{Gerçeğeşme 4}$$

$$x = 6 \vee x = 2 \dots\dots\text{Gerçeğeşme 5}$$

$$C.k = \{6, 2\} \dots\dots\text{Gerçeğeşme 6}$$

Oturum 4-Görev durumu 4: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x^2 + x - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.”

Prosedür: “ $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülü aracılığıyla çözüm kümesinin elemanlarını belirleme”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

245. B: Ben burada ilk başta çarpanlara ayırma yapacaktım [...] ama o biraz zor geldi [...] o yüzden diskriminant dedim, onunla hepsi çıkar diye [...] diskriminant b kare eksi dört a, c (gerçeğeşme 1) şimdi şöyle [...] denklemden a, x kareli terimin katsayısı [...] b, x 'li terimin katsayısı, c de sabit sayı oluyor. Yani burada o zaman yerine yazalım [...] birin karesi eksi dört çarpı iki çarpı eksi üç (gerçeğeşme 2) buradan yirmi beş oldu (gerçeğeşme 3) [...] yani diskriminant büyüktür sıfır oluyor (gerçeğeşme 4) yani [...] buradan bizim o zaman iki tane farklı şeyimiz var sağlayan [...] bunu da ben yani tam hatırlayamadım, emin değilim [kağıdına bakıyor formülü hatırlamak için] ama onunla yapacağım [...] şu eksi b den pek emin değilim ama öbürlerinden eminim [...] böyle bir formül vardı sanırım [gerçeğeşme 5'i yazıyor] 11 yerine yazarsam de bir eksi kökün içine attığımızda diskriminantı beş oluyor [...] bir eksi beş bölü dörtten eksi bir geldi (gerçeğeşme 6) altı bölü dörtten üç bölü iki geliyor (gerçeğeşme 7) [...] çözüm kümemiz eksi bire üç bölü iki (gerçeğeşme 8).

$$x \in \mathbb{R} \quad 2x^2 + x - 3 = 0 \dots\dots\text{Österge}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \dots\dots\text{Gerçeğeşme 1}$$

$$1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 \dots\dots\text{Gerçeğeşme 2}$$

$$= 1 + 24 = 25 \dots\dots\text{Gerçeğeşme 3}$$

$$\Delta > 0 \dots\dots\text{Gerçeğeşme 4}$$

$$\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \dots\dots\text{Gerçeğeşme 5}$$

$$\frac{1 - 5}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \dots\dots\text{Gerçeğeşme 6}$$

$$\frac{1 + 5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \dots\dots\text{Gerçeğeşme 7}$$

$$C.k = \left\{ -1, \frac{3}{2} \right\} \dots\dots\text{Gerçeğeşme 8}$$

Burada Burcu “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x^2 + x - 3 = 0$ ” denklemini çarpanlarına ayırmada güçlük yaşadığını “...ilk başta çarpanlara ayırma yapacaktım [...] ama o biraz zor geldi ... [245]” şeklinde belirtmiş ve denklemin diskriminantını hesapladığında çözüme ulaşacağını “... o yüzden diskriminant denedim, onunla hepsi çıkar diye [...] diskriminant b kare eksi dört a, c (gerçekleşme 1) [245]” biçiminde ifade etmiştir. İletişiminin devamında “...yani diskriminant büyüktür sıfır oluyor (gerçekleşme 4) yani [...] buradan bizim o zaman iki tane farklı şeyimiz var sağlayan ... [245]” şeklinde bir söylemde bulunmuş ve denklemin diskriminantı ile çözüm kümesinin elemanları arasındaki ilişkiyi ifade etmiştir. Bununla birlikte katılımcının kağıdındaki yanıtları incelendiğinde “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x^2 - 3x + 5 = 0$ denklemini sağlayan reel sayıların kümesini bulunuz.” şeklindeki görev durumunda ikinci dereceden tek değişkenli denklemin diskriminantını belirlediği ve “ $\Delta < 0$ olduğu için reel sayılarda Ç.K yoktur.” şeklinde bir açıklama yazdığı görülmüştür. Burcu’nun bu sözel gerçekleşmesini de içeren görsel araçları Şekil 54’teki gibidir:

$$b^2 - 4ac = \Delta$$

$$9 - 4 \cdot 1 \cdot 5 =$$

$$9 - 20 = (-11)$$

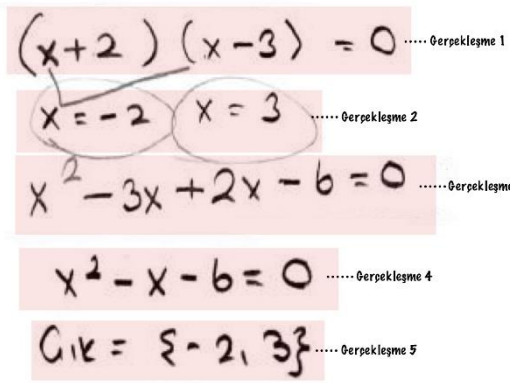
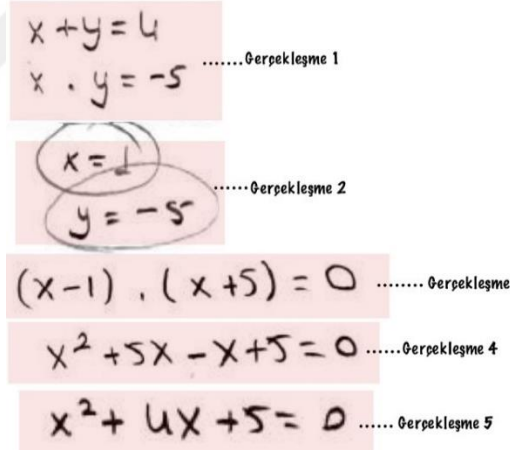
$\Delta < 0$ olduğu için
Reel sayılarda Ç.K yoktur.

Şekil 54. Burcu’nun ikinci dereceden tek değişkenli denklemin diskriminantı ile çözüm kümesi arasındaki ilişkiye yönelik görsel araçları

Burcu’dan çözüm kümesi bilinen ikinci dereceden denklemleri yazması istendiğinde çarpanlarına ayırma metodundaki prosedürünü ters yönde uygulayarak ikinci dereceden tek değişkenli bir denklem elde etmiştir. Katılımcının bu şekilde prosedürünü uyguladığı söylemleri ve görsel araçları Tablo 40’ta yer almaktadır.

Tablo 40

Burcu'nun Çözümü Verilen İkinci Dereceden Tek Değişkenli Denklemi Yazma Prosedürü

Oturum 4-Görev durumu 6: “Çözüm kümesi $\{-2, 3\}$ olan ikinci dereceden denklemi yazınız.”	
Ne söylüyor?	Ne yapıyor?
255. B: İlk x artı iki [...] direk sıfıra eşitleme olarak düşündüm bir de x eksi üç sıfır diye (gerçekleşme 1) düşündüm hani burada x yerine eksi iki oluyor sıfırlayacağımız için çarpanlara ayırma diye düşündüm [...] bundan da x üç olabilir (gerçekleşme 2) [...] hani bununla da denklem ve yazmamız gerekiyor [...] o yüzden şimdi onları çarpanlarına ayırma yaptım o yüzden şimdi düzgünce bir şey yazıyorum denklem yazıyorum [...] x ile x çarparsam x kare, eksi üç x artı iki x eksi altı eşittir sıfır (gerçekleşme 4) [...] buradan x kare eksi x eksi altı oluyor (gerçekleşme 5) [...] yani bunun çözüm kümesi ikiye üç (gerçekleşme 6).	 Gerçekleşme 1 Gerçekleşme 2 Gerçekleşme 3 Gerçekleşme 4 Gerçekleşme 5
Oturum 4-Görev durumu 7: “Çözüm kümesindeki elemanların toplamı 4 ve çarpımı -5 olan ikinci dereceden bir değişkenli denklemi yazınız.”	
Ne söylüyor?	Ne yapıyor?
257. B: İlk başta biri x olsun biri y olsun dedim [...] bunlar farklı sayılar [...] x artı y dört ve x çarpı y eksi beş (gerçekleşme 1) direkt kafamdan uydurarak yaptım [gülerek] x'e bir y'ye beş dersem (gerçekleşme 2) [...] ama tam tersi de olabilir [...] bu kez x'imiz bir olacak y'mizde eksi beş olacak [...] bunlar bizim çözüm kümemizin elemanları [...] yani ben yine şöyle düşünüyorum x eksi bir olabilir bir de x artı beş olabilir [...] yine aynı çarpanlara ayırmaya gibi yaparsam x kare artı beş x eksi x artı beş eşittir sıfır (gerçekleşme 3) [...] bundan sonra da şuraya düzenleyeyim [gerçekleşme 4'ü yazarak] x kare atı dört x artı beş eşittir sıfır (gerçekleşme 5).	 Gerçekleşme 1 Gerçekleşme 2 Gerçekleşme 3 Gerçekleşme 4 Gerçekleşme 5

Bireysel görüşmede Burcu'nun Oturum 5'te yer alan problemleri içeren görev durumlarına ait yanıtları incelendiğinde ise katılımcı sözel ifadeleri cebirsel ifadelere doğru bir şekilde çevirmede güçlük yaşamıştır. Oturum 5'te yer alan görev durumu 2'de kilometreye bağlı olarak bir yolcunun vereceği ücreti belirleyen cebirsel ifadeyi yazarken eşitliğin sağ tarafına ücreti temsil eden bir değişken yerine (örneğin, y) katılımcı “0” yazmıştır. Görev durumu 3'te ise iki farklı değişken kullanmak isteyen Burcu, “Ayşe, Berfin'e 50 TL

verdiğinde paraları eşit olmaktadır. Berfin, Ayşe'ye 15 TL verdiğinde Ayşe'nin parası Berfin'in parasının 5 katı olmaktadır.” şeklindeki sözel ifadeleri cebirsel ifadelere doğru bir şekilde çevirmede güçlük yaşamıştır. Bununla birlikte görev durumu 4'te atadığı değişkene göre cebirsel ifadeyi doğru bir şekilde yazan katılımcı, “ $\leq$ ” sembolü yerine “ $<$ ” sembolünü yazmış ve sözel ifadeyi cebirsel ifadeye eksik bir şekilde çevirebilmiştir. Katılımcının sözel ifadeleri cebirsel ifadelere çevirirken değişkenleri neye göre atadığı ve bu bağlamda cebirsel gerçekleştirmeleri ise Tablo 41'de yer almaktadır.

Tablo 41

Burcu'nun Problem İçeren Görev Durumlarına Ait Cebirsel Gerçekleşmeleri

Oturum 5-Görev durumu 1: “Bugünlerde Ankara'da şehir içi taksimetre açılış ücreti 6 TL ve her bir kilometre için ise ücret 4,7 TL'dir. Kilometreye bağlı olarak bir yolcunun vereceği ücreti belirleyen cebirsel ifadeyi yazınız.”

Görev:

Kilometre için x değişkeni atayarak denklem kurma

Prosedür:

$$x \in \mathbb{R}$$

$$(4,7)x + 6 = 0$$

Oturum 5-Görev durumu 2: “Ayşe ile Berfin'in cebindeki paralar ile ilgili aşağıdakiler bilinmektedir. Ayşe, Berfin'e 50 TL verdiğinde paraları eşit olmaktadır. Berfin, Ayşe'ye 15 TL verdiğinde Ayşe'nin parası Berfin'in parasının 5 katı olmaktadır. Bu şartlar altında, Ayşe'nin parasını hesaplamada kullanılabilecek cebirsel ifadeyi yazınız.”

Görev:

Ayşe'nin parasına x değişkenini Berfin'in parasına y değişkenini atayarak birinci dereceden iki değişkenli bir denklem kurma

Prosedür:

Ayşe	Berfin
x	y

$$x - 50 = y + 50$$

$$x - 50 + 15 = y + 35$$

Oturum 5-Görev durumu 3: “Gökhan internet üzerinden tanesi 45 TL olan 32 GB'lık taşınır belleklerden sipariş vermek istiyor. Sipariş için kargo ücreti 10 TL'dir. Gökhan'ın bu sipariş için harcayabileceği en fazla 200 TL'si vardır. Gökhan'ın sipariş edebileceği maksimum taşınır bellek sayısını belirleyen cebirsel ifadeyi yazınız.”

Görev:

Taşınır bellek sayısına x değişkenini atayarak eşitsizlik kurma

Prosedür:

$$x \leq 4$$

Gökhan'ın alabileceği bellek sayısı

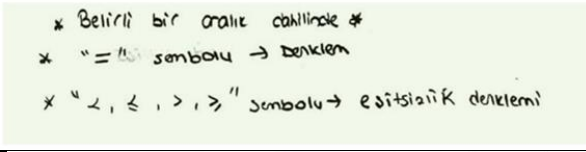
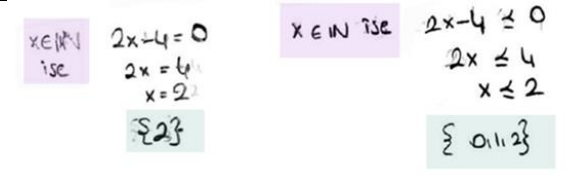
$$15x + 10 \leq 200$$

cebirsel ifade

Burcu'nun bireysel görüşmedeki söylemlerinin analiz edilmesi sonucunda denklem ve eşitsizlik kavramına dair katılımcıya ait toplamda 12 farklı rutin gözlemlenmiştir. Bu rutinler “BG-Bs” biçiminde kodlanmıştır. Burada BG kısaltması rutinin bireysel görüşmeye, B ise Burcu'ya ait bir rutin olduğunu betimlemek için kullanılmış ve s yerine rutin numarası yazılmıştır. Bu şekilde kodlanan rutinlerin “ne zaman” ve “nasıl” gerçekleştiği ve Burcu'nun rutinlerinin bir özeti olan rutin profili Tablo 38'de okuyucuya sunulmuştur. Bu tabloda yer alan “tekrar” terimi katılımcının bir rutini kaç defa farklı anlarda ve farklı görev durumlarında tekrarladığının sayısını belirtmektedir. Katılımcının rutin tekrarı 10 defa ya da 10 defadan küçük bir doğal sayı ise “tekrarı” kısmına o sayı yazılmıştır. Eğer katılımcının rutini 10 ile 20 arasında ise bu durum “> 10”, 20 defadan fazla ise “> 20” şeklinde ifade edilmiştir.

Tablo 42

Burcu'nun Bireysel Görüşmedeki Rutin Profili

Rutin kodu	Ne zaman?	Nasıl?				Tekrarı
		Görev	Gerçekleşme	Prosedür		
BG-B1	Denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken ya da herhangi bir cebirsel ifadenin birinci dereceden tek değişkenli bir denklem ya da eşitsizlik olduğunu belirlerken	“=” sembolü içeren ifadeleri “denklem”, “>”, “<”, “≤”, “≥” sembollerini içeren ifadeleri “eşitsizlik denklemi” olarak tanımlamak	Sesli	B: Denklemi mi yani [...] eşitlik işareti [...] mesela onun adını şey yapamadım ama eşittir konulduğunda ve sonucu da varsa eğer [...] onu denklem diye tanımlıyorum. [2] ... eşittir işareti olacak. [4] [...] eşittir işareti, büyük-eşittir, büyüktür küçüktür, küçük-eşittir işaretleriyle olan yine dediğim gibi tanım aralıklarıyla olan şey birbirine eşit [...] şimdi nasıl söyleyeyim sayılarla yaptığımız ve o işaretleri kullanarak yaptığımız [...] matematiksel bir [8] denklem denince eşittir işareti olması gerektiğini düşünüyorum. [26]		8
			Sözel		> 10	
			Cebirsel			3
BG-B2	Denklem ve eşitsizlik kavramları arasındaki ilişkiyi açıklarken	Çözüm kümesinin eleman sayılarını karşılaştırmak	Sesli	B: Şöyle demek istedim ama demiştim ya [...] aslında evet her eşitsizlik bir denklemdir mesela ben örneklerde verdim (Şekil 41'deki örneği kastederek) buralarda iki x eksi dört eşittir sıfırda [...] iki x eşittir dört [...] x eşittir iki oluyor [...] yani burada hani farklı bir sonuç çıkmıyor [...] ama burada iki x eksi küçük dört eşit sıfır dediğimizde dördü karşı tarafa attığımızda iki x den büyük oluyor [...] yani x iki de olabilir o yüzden tanım kümemizde ben doğal sayılar verdiğim için sıfır, bir, iki olabiliyor yani hani aynı sayıları kullanırsak [...] orada daha fazla çözüm kümesindeki eleman sayısı [...] öyle düşündüm yani ben. [12] Yine aynı şey hani denklemde sadece m x i yerine yazdığımızda sadece sağlayan bir sayı oluyor genelde [...] kümenizi verdiğimiz ama burada (Şekil 41'deki örneği kastederek) dediğim gibi sıfır, bir, iki iken direk sonucu yazdığımızda eşitlik olmadığından küçüklüğüne büyüklüğüne göre birkaç sayı sağlayabiliyor. [16]		4

Sözel

7

* Eşitsizlikler denklemler daha geniş kapsamlıdır.
 * Denklemler sonucu sağlayan elementler seçilirken eşitsizlikte belirli aralıktaki elementler seçilir.
 * Eşitsizliğin aralıktaki elementler denklemler kümesi elementlerinden farklıdır.
 Denklemlerde yolların ifade sonucu belirli sınırlar için eşitsizlikte yazılan bir ifade denklemler belirli sınırlar sadece verilen aralıktaki eşitsizliğin sınırlarında eşitsizlik denklemler sağlayan element ve aralığı sağlayan elementlerdir. Olduğu için her eşitsizlik bir denklemdir.

Cebirsel

2

$$\begin{array}{l} \text{KEM} \\ \text{ise} \\ \frac{3x-9}{2} = 6 \\ 3x-9=12 \\ 3x=21 \\ x=7 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{KEM} \\ \text{ise} \\ 6 \leq \frac{3x-9}{2} \leq 9 \\ 12 \leq 3x-9 \leq 18 \\ 12+9 \leq 3x \leq 18+9 \\ 21 \leq 3x \leq 27 \\ \frac{21}{3} \leq x \leq \frac{27}{3} \\ 7 \leq x \leq 9 \\ \{7,8,9\} \end{array}$$

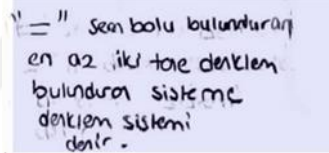
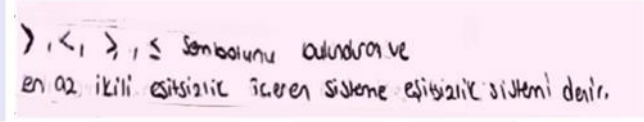
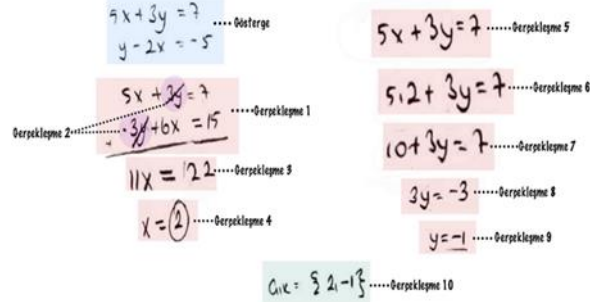
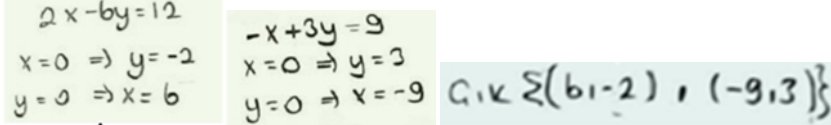
BG-B3	Çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken	Çözüm kümesinin elemanlarını evrensel kümede olan ve denklemler ya da eşitsizliğin elemanları olduğunu belirtmek	Sesli	B: Yine aynı şey hani denklemlerde sadece 111 x'i yerine yazdığımızda sadece sağlayan bir sayı oluyor genelde [...] kümenizi verdiğimiz ama burada dediğim gibi sıfır, bir, iki iken direk sonucu yazdığımızda eşitlik olmadığından küçüklüğüne büyüklüğüne göre birkaç sayı sağlayabiliyor. [16] B: ... bu da sağlayan eleman [...] yani çözüm kümesindeki eleman oluyor ya ben bunu denklemin çözümü olarak görüyorum [110] B: Çünkü yani bunu sağlayan tek bir [...] birkaç [...] nasıl söyleyeyim [...] bunlar sağlamıyor sadece [...] bulduğum sonuçlar sağlamıyor bu üçle eksi üç bölü dört sağlamıyor sadece $[-\frac{3}{4}]$ ve 3 'ü göstererek bunların aralıkları sağlıyor, böyle yazdığımızda bunun aralıkta olacağını düşünüyorum çözüm kümesinin. [152] B: [...] çünkü çözüm kümesindeki elemanlar denklemler sağlayan terimler oluyor. [251] Yerine yazdığımızda eşitliği sağlayan. [253]	> 20

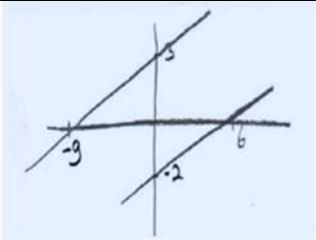
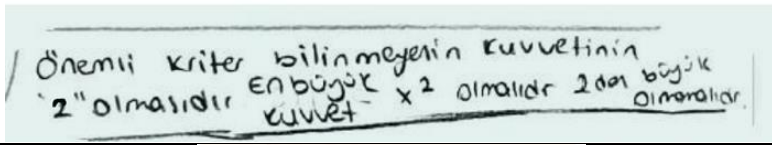
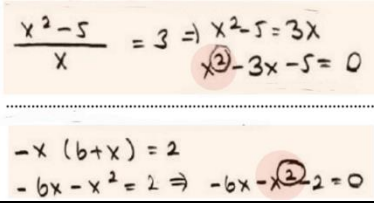
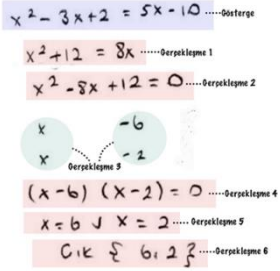
Sözel

7

Denklemler Sütununda yine yazdığımızda denklemler sağlayan kümedeki elementler ile doğruluğu kontrol edilebilir matematiksel terimle denklemler çözümünü denir.

				Cebirsel	$x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) = 0$ $\Rightarrow x=5 \vee x=-1$ $C_k = \{5, -1\}$	> 10
BG-B4	Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken	"x=reel biçiminde bir sonuç elde etmek	sayı"	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? B: Önce iki ile genişletiyorum x eksi on artı x eksi bir bölü üç [...] eşittir eksi üç x artı dört (gerçekleşme 1) şöyle yapayım ben hepsini üçle çarpacaktım yani altı x eksi otuz artı x eksi bir bölü üç [...] eksi üç x artı dört (gerçekleşme 2) ını üçü de karşı tarafa yollayacağım [...] altı x artı eksi otuz artı x eksi eşittir eksi dokuz x artı on iki (gerçekleşme 3) yedi x eksi otuz bir oldu [...] bu tarafta eksi dokuz artı on iki olur (gerçekleşme 4) otuz biri karşı tarafa [...] eksi dokuzu ise karşı tarafa yolluyorum [...] toplam on altı x oluyor bu taraf [...] bu tarafta eşittir kırk üç oluyor (gerçekleşme 5) x eşittir kırk üç bölü on altı (gerçekleşme 6) buradan da çözüm kümemiz sadece kırk üç bölü on altı (gerçekleşme 7). [114] Ne yapıyor? $2(x-5) + \frac{x-1}{3} = -3x+4 \dots\dots \text{Österge}$ $2x-10 + \frac{x-1}{3} = -3x+4 \dots\dots \text{Gerçekleşme 1}$ $\Rightarrow \frac{6x-30+x-1}{3} = -3x+4 \dots\dots \text{Gerçekleşme 2}$ $6x-30+x-1 = -9x+12 \dots\dots \text{Gerçekleşme 3}$ $7x-31 = -9x+12 \dots\dots \text{Gerçekleşme 4}$ $16x = 43 \dots\dots \text{Gerçekleşme 5}$ $\Rightarrow x = \frac{43}{16} \dots\dots \text{Gerçekleşme 6}$ $C_k = \left\{ \frac{43}{16} \right\} \dots\dots \text{Gerçekleşme 7}$	5
BG-B5	Birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken	Bir reel sayı aralığı elde etmek		Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? B: Payda eşitleyeceğim ilk başta [...] x bölü üçü ikiyle genişleteceğim [...] iki x bölü altı oluyor [...] burayı da üçte genişlettiğimde [...] üç x eksi on iki bölü altı büyüktür bir (gerçekleşme 1) bunları ortak paydada yazıyorum [...] iki x eksi üç x [...] eksiye dağıtarak deneyeceğim [...] on iki bölü altı büyüktü bir (gerçekleşme 2) altıyı karşı tarafa yolluyorum [...] iki x eksi üç x artı on iki büyüktür altı (gerçekleşme 3) eksi x artı on iki büyüktür altı (gerçekleşme 4) altı büyüktür x oldu (gerçekleşme 5) reel sayılar değil mi [x'in ait olduğu kümeyi kontrol ederek] evet reel sayılarda olduğu için de [...] çözüm kümemiz [...] ını eksi sonsuz ve altı (gerçekleşme 6). [130] Ne yapıyor? $\frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} > 1 \dots\dots \text{Österge}$ $\Rightarrow \frac{2x}{6} - \frac{3x-12}{6} > 1 \dots\dots \text{Gerçekleşme 1}$ $\frac{2x-3x+12}{6} > 1 \dots\dots \text{Gerçekleşme 2}$ $\Rightarrow 2x-3x+12 > 6 \dots\dots \text{Gerçekleşme 3}$ $-x+12 > 6 \dots\dots \text{Gerçekleşme 4}$ $6 > x \dots\dots \text{Gerçekleşme 5}$ $C_k = (-\infty, 6) \dots\dots \text{Gerçekleşme 6}$	7

BG-B6	Denklem ve eşitsizlik sistemi kavramlarını tanımlarken	“=” sembolü içeren birden fazla cebirsel ifadeyi “denklem sistemi” “<, >, ≤, ≥” sembollerini içeren birden fazla cebirsel ifadeyi “eşitsizlik sistemi” olarak tanımlamak	Sesli	B: Şimdi şöyle mı denklem sistemi dediğim gibi eşitlik bulunacak ama tek bir tanesi denklem sistemi olmuyor tek bir taneyle, bizim onun çözdüğümüzde yani ikili mesela [...] mı koordinatta bulmada falan hep genelde [...] x ve y yi yok ederiz [136] Denklem sisteminde birden fazla olmalı [140] ... (eşitsizlik sisteminde) eşitsizlik işaretlerini kullanacağız ve en az iki tane olması diye düşünüyorum. [142]	5
			Sözel	 	>10
BG-B7	Birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerini çözerken	Yok etme metodunu kullanarak değişkenler için (x ve y gibi) birer reel sayı karşılığı bulmak	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? Ne yapıyor? B: Burayı eksi üçle çarpıyorum [göstergedeki “$y - 2x = -5$” ifadesini kast ederek] beş x artı üç y eşittir yedi [...] mı sonra eksi üç y artı altı x eşittir on beş oldu (gerçekleşme 1) üç y ve eksi üç y taraf tarafa topladığım için gitti (gerçekleşme 2) on bir x eşittir yirmi iki (gerçekleşme 3) x eşittir iki (gerçekleşme 4) şimdi burada beş x artı üç y eşittir yedi denklemde (gerçekleşme 5) yerine yazdığım da beş çarpı iki artı üç y eşittir yediden (gerçekleşme 6) on artı üç y eşittir yedi geliyor (gerçekleşme 7) üç y eşittir eksi üç (gerçekleşme 8) y de eşittir eksi bir (gerçekleşme 9) çözüm kümemiz mı şey iki ve eksi bir (gerçekleşme 10). [167] 	2
BG-B8	Çözüm kümesini analitik düzlemde grafik çizme yoluyla belirlemesi istendiğinde, denklem sistemlerini çözerken	Doğrunun eksenleri kestiği noktaları belirleyip çözüm kümesine sıralı ikili olarak yazmak	Sesli	B: Burada iki x eksi altı y eşittir on iki denkleminde, x'e sıfır verip [...]x eşittir sıfır ise y'yi bulacağım [...] y eşittir eksi iki [171] Bu kez y'ye sıfır vereceğim [...] y'ye sıfır verdiğimiz de de x eşittir altı [...] mı en son grafik çizerim [...] bir de şu denklemimiz var [...] eksi x artı üç y eşittir dokuz [...]x'e sıfır veririm y eşittir üç (gerçekleşme 5) y'ye sıfır veririm x eşittir eksi dokuz. Şimdi bunların grafiklerini çizeceğim. [177] Şey yani x'imiz eksi dokuz yani bu denklemde yerine yazacağız [...] burada da y'yi üç bulduk [...] yazacağız da bunları [eliyle doğru çizer gibi yaparak] nokta gibi değil ama doğru gibi [...] çünkü bunlar bir doğru belirtiyor, bir nokta belirtmiyor. [179] Şey bunlar [...] denklemler. Bir nokta belirtmiyor mesela eksi dokuz üç değil [...] o noktalar değil doğru denklemler olacak yani ben şöyle keşiş [ellerini buluşturarak] bunu çizmeden anlatamayacağım [analitik düzlemi ve doğruları çiziyor] birinci de x'i altı buldum [işaretleyerek] y'miz eksi iki [...] böyle çiziyorum [181] Çözüm kümesi elemanları bunlar [...] yani bulduğum değerler. [183]	3
			Cebirsel		3

			Grafiksel			2
BG-B9	İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken	Değişkenin derecesi en fazla iki olacak şekilde " x^2 " terimini içeren ifadeleri ikinci dereceden tek değişkenli denklem olarak tanımlamak	Sesli	B: Olmayacağını düşünüyorum çünkü en büyük kuvvetimiz burada hani kuvvetlerimiz iki den büyük o yüzden olmaz. [231] ıı yine ben bunu açtım [...] eksi altı x eksi x kare eşittir iki [...] bunu da ben yine denklem olarak sıfıra eşitleyeyim [...] eksi altı x eksi x kare eksi iki eşittir sıfır [...] yine x kareli bir terim olduğu için. [235] Olur bu da neden çünkü y bilinmeyen ve kuvveti iki olduğu için olacağını düşündüm [...] benim için önemli olan bilinmeyenin kuvvetinin iki olması. [237]	10	
			Sözel		>10	
			Cebirsel		4	
BG-B10	İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken	Çarpanlarına ayırma ya da $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ formülü aracılığıyla kümesinin elemanlarını belirlemek	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? B: İlk x kare eksi üç x [" $x^2 - 3x$ " ifadesini yazıyor] ben direkt karşı tarafa yollayarak yapayım [" $x^2 - 3x$ " ifadesini silerek gerçeğeşme 1'i yazıyor] burada x kare kalıyor on'u ben bu tarafa alıyorum beşi de bu tarafa alıyorum yine aynı sonuç çıkıyor x kare eksi sekiz x artı on iki eşittir sıfır (gerçeğeşme 2) [...] buradan yine dediğim gibi x eksi altıya x eksi iki diye ayrılıyor çarpanlarına (gerçeğeşme 3) [gerçeğeşme 4'ü yazıyor] x eşittir altı olabilir veya x eşittir iki (gerçeğeşme 5) [...] ama buradan çözüm kümesi iki ve altı (gerçeğeşme 6). [241] Ne yapıyor? 	4	
BG-B11	İkinci dereceden tek	İkinci dereceden tek	Sesli	B: ...yani diskriminant büyüktür sıfır oluyor, yani [...] buradan bizim o zaman iki tane farklı şeyimiz var sağlayan [245]	1	

	değişkenli çözümlerinin belirlerken	denklemin varlığını	değişkenli denklemin diskriminantını hesaplamak	Sözel- Cebirsel		2
					$b^2 - 4ac = \Delta$ $9 - 4 \cdot 1,5 =$ $9 - 20 = (-11)$ $\Delta < 0$ olduğu için Reel sayılarda çık yoktur.	
BG-B12	Çözümleri ikinci denklemleri yazarken	verilen dereceden	Cebirsel çarpanları denklemleri yazmak	ifadenin aracılığıyla	Sözlü- Cebirsel	2
					Ne söylüyor? B: İn x artı iki [...] direk sıfıra eşitleme olarak düşündüm bir de x eksi üç sıfır diye (gerçekleşme 1) düşündüm hani burada x yerine eksi iki oluyor sıfırlayacağımız için çarpanlara ayırma diye düşündüm [...] bundan da x üç olabilir (gerçekleşme 2) [...] hani bununla da denklem ve yazmamız gerekiyor [...] o yüzden şimdi onları çarpanlarına ayırma yaptım o yüzden şimdi düzgünce bir şey yazıyorum denklem yazıyorum [...] x ile x çarparsam x kare, eksi üç x artı iki x eksi altı eşittir sıfır (gerçekleşme 4) [...] buradan x kare eksi x eksi altı oluyor (gerçekleşme 5) [...] yani bunun çözüm kümesi ikiye üç (gerçekleşme 6). [255] Ne yapıyor? $(x+2)(x-3) = 0 \dots\dots \text{Gerçekleşme 1}$ $x = -2 \quad x = 3 \dots\dots \text{Gerçekleşme 2}$ $x^2 - 3x + 2x - 6 = 0 \dots\dots \text{Gerçekleşme 3}$ $x^2 - x - 6 = 0 \dots\dots \text{Gerçekleşme 4}$ $Çık = \{-2, 3\} \dots\dots \text{Gerçekleşme 5}$	

Burcu'nun bireysel görüşmedeki rutin profili incelendiğinde denklem ve eşitsizliklere ilişkin tanımlama yaptığı BG-B1, BG-B6 ve BG-B9 kodlu rutinlerinde sembollere odaklandığı ve denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduğunun farkında olmadığı gözlemlenmiştir. Katılımcı söylemlerinde denklemlerin değişken içermesi gerekmediğini [207] ve “=” işareti içeren tüm eşitliklerin birer denklem olduğunu [26] belirtmiştir. Her ne kadar katılımcı “tanım aralıkları [6]”, “eleman aralığı [98]”, “belirli bir aralık verilmişse” ve “belirli bir aralık dahilinde” şeklindeki ifadeleriyle (örneğin, Şekil 39) denklem ve eşitsizliklerde yer alan değişkenin ait olduğu evrensel kümeyi kastetmiş olsa da bağlama bağlı olarak kelime kullanımının doğru olmaması ve katılımcının değişkenin ait olduğu evrensel kümenin sadece çözüm kümesini belirlemedeki önemine vurgu yapması [30] Burcu'nun denklem kavramını bir açık önerme olarak tanımlamadığını göstermiştir. Katılımcının değişken, bilinmeyen gibi kavramların bağlama bağlı olarak cebirsel ayrımını yapmada güçlük yaşaması (örneğin, [221], [223]) da Burcu'nun denklem ve eşitsizlikleri birer semboller dizisi olarak gördüğünü göstermiştir. Burcu, eşitsizlikleri tanımlarken de “ $>$, $<$, $\leq$, $\geq$ ” sembollerini içeren cebirsel ifadelere kendi söylemiyle “eşitsizlik denklemi” şeklinde (örneğin, Şekil 39) matematiksel olarak doğru olmayan bir kelime kullanımında bulunmuştur. Aynı zamanda Burcu BG-B1 kodlu rutinine ait söylemlerinde (örneğin, [2], [8] ve [30]) anlatı üretmekten ziyade iletişimi sürdürmeyi amaçlamıştır. Bu nedenle katılımcının denklem ve eşitsizlikleri tanımlarken kullandığı BG-B1 kodlu rutini ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır. Benzer şekilde Burcu'nun denklem ve eşitsizlik sistemlerini tanımlarken kullandığı BG-B6 kodlu rutininde de sadece sembollere odaklandığı görülmüş ve “Şimdi şöyle ııı denklem sistemi dediğim gibi eşitlik bulunacak ama tek bir tanesi denklem sistemi olmuyor tek bir taneyle, bizim onun çözdüğümüzde yani ikili mesela [...] ııı koordinatta bulmada falan hep genelde [...] x ve y 'yi yok ederiz [136]” şeklinde süreç odaklı bir tanım yapmıştır. Bununla birlikte katılımcı, ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken kullandığı BG-B9 kodlu rutinin de sadece sembollere odaklanmış ve derecesi en fazla iki olacak şekilde kareli bir terim

(örneğin, x^2, y^2, a^2) içeren cebirsel ifadeleri (polinom olmasa bile) ikinci dereceden tek değişkenli bir denklem olarak isimlendirdiğini (örneğin, Şekil 51) belirtmiştir. Burcu'nun ikinci dereceden denklemleri tanımlamak için kullandığı BG-B9 kodlu rutini katılımcının sembollere odaklanmasından (Şekil 53) dolayı süreç odaklı bir rutin olarak ele alınmıştır. Bu nedenle katılımcının BG-B9 kodlu rutini bir ritüel rutin olarak kodlanmıştır.

Denklem ve eşitsizlikler arasındaki ilişkiyi çözüm kümesindeki eleman sayılarını karşılaştırarak (örneğin, Şekil 43) “her eşitsizlik bir denklemdir [34]” şeklinde kuran ve kanonik olmayan bir anlatı üreten Burcu'nun BG-B2 kodlu rutininin ritüel olduğu görülmüştür. Eşitsizliklerin çözüm kümesinin, denklemin çözüm kümesindeki elemanı da içerdiğini “Eşitsizliğin aralığındaki elemanlar denklem kümesi elemanlarından fazladır.” ve “Aslında eşitsizlik, denkleme sağlayan eleman ve aralığı sağlayan elemanları da aldığı için her eşitsizlik bir denklemdir” şeklinde belirten ve örneklerle açıklayan katılımcının söylemleri çoğunlukla prosedür hakkında ve süreç odaklı olmuştur. Bu nedenle denklem ve eşitsizlikler arasındaki ilişkiyi açıklarken kullandığı BG-B2 kodlu rutininin ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır.

Burcu'nun “çözüm kümesi” ve “çözüm kümesi elemanları (bilinmeyenler)” hakkında konuşurken söylemlerinde tekrarlayan BG-B3 kodlu rutini ise sonuç odaklıdır. Katılımcının çözüm kümesinin elemanlarının denkleme ya da eşitsizliği sağlayan elemanlar olduğunu “... çünkü onu sağlaması lazım [...] sağlayan eleman kümesine [...] elemanları sağlayan kümeye çözüm kümesine denklemin çözümü denir. [98]”, “... bu da sağlayan eleman [...] yani çözüm kümesindeki eleman oluyor ya ben bunu denklemin çözümü olarak görüyorum [110]”, “...çünkü çözüm kümesindeki elemanlar denkleme sağlayan terimler oluyor. [251]” ve “Yerine yazdığımızda eşitliği sağlayan. [253]” şeklindeki onaylanmış anlatılarıyla sıklıkla belirtmiştir. Burcu'nun bireysel görüşme sürecinde ürettiği onaylanmış anlatılarının “Bir evrensel küme üzerinde ifade edilen bir denklem ya da eşitsizlikteki değişkenlerin yerine konulduğunda denklemin ya da eşitsizliğin doğru bir önerme olduğu evrensel kümenin elemanlarının her birine denklemin ya da eşitsizliğin

çözümü ve çözüm olan bu elemanların oluşturduğu kümeye de denklemin ya da eşitsizliğin çözüm kümesi adı verilir.” biçimindeki kanonik anlatıya denk olduğu görülmüş ve bu nedenle katılımcının BG-B3 kodlu rutini bir keşif rutini olarak kodlanmıştır.

Burcu’nun denklem ve eşitsizlikleri çözme rutinlerini içeren BG-B4, BG-B5, BG-B7, BG-B8 ve BG-B10 kodlu rutinlerinin süreç odaklı birer ritüel rutin olduğu görülmüştür. Katılımcının denklem ve eşitsizlikleri çözme süreçlerinde (Tablo 35) kullandığı BG-B4 ve BG-B5 kodlu rutinleri süreç odaklı olmuştur. Katılımcı prosedürün performansına odaklı “nasıl ilerlerim?” sorusuna yanıt arayarak işlemlerini tamamlamıştır. Çözüm kümesinin elemanlarına ulaşmayı kendine görev olarak gören Burcu’nun söylemleri matematiksel nesneleri (sayı, sembol ve değişkenleri) manipüle etme hakkında olmuştur. Bu nedenle Burcu’nun BG-B4 ve BG-B5 kodlu rutinleri birer ritüel rutin olarak kodlanmıştır. Benzer şekilde katılımcının denklem sistemlerinin çözüm kümesini hem yok etme metodu ile hem de analitik düzlemde grafik çizme yoluyla belirlerken kullandığı BG-B7 ve BG-B8 kodlu rutinleri de ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır. Burcu bu rutinlerini uygularken kullandığı prosedür ile ulaştığı sonuç arasında mantıksal bir ilişki kurmada güçlük yaşamıştır (örneğin, Tablo 38). Katılımcı düzlemde çözüm kümesinin elemanlarını belirlemesi istendiğinde denklemlerin temsil ettiği doğruları kanonik bir şekilde çizmiş fakat uyguladığı prosedürün ezbere bir yol olduğunu “(nedenini) bilmiyorum hep böyle yapıyoruz. [175]” şeklinde belirtmiştir. Bununla birlikte çözüm kümesinin elemanlarının doğruların düzlemi kestiği noktalar olduğunu belirten [183] Burcu’nun sadece prosedürün performansına odaklandığı için prosedür sonuç ilişkisini kuramadığı görülmüş ve “nasıl ilerlerim?” sorusuna yanıt arayarak sergilediği BG-B7 ve BG-B8 kodlu rutinleri birer ritüel rutin olarak kodlanmıştır. Bununla birlikte katılımcı ikinci dereceden denklemlerin çözüm kümesini iki farklı prosedürle (Tablo 39) belirleyebilmesine rağmen yine katılımcının söylemleri prosedürün performansı hakkında olmuştur. Bu nedenle Burcu’nun “nasıl ilerlerim?” sorusuna yanıt arayarak sergilediği BG-B10 kodlu rutini süreç odaklı bir ritüel rutin olarak kodlanmıştır. Buna rağmen Burcu’nun ikinci dereceden tek değişkenli bir

denklemin çözümlerinin varlığını belirlerken kullandığı BG-B11 kodlu rutini ise sonuç odaklı olmuştur. Katılımcı hem “diskriminant büyüktür sıfır oluyor yani [...] buradan bizim o zaman iki tane farklı şeyimiz (çözüm) var sağlayan ... [245]” söyleminde hem de görsel araçlarla (Şekil 54) denklemin diskriminantı ve çözümleri arasındaki ilişkileri belirten kanonik anlatıları kullanmıştır. Burcu’nun bu anlatıları KA33 ve KA35’e denk olarak görülmüş ve bu nedenle katılımcının BG-B11 kodlu rutini bir keşif rutini olarak kodlanmıştır.

Katılımcının çözümleri verilen ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri yazarken kullandığı BG-B12 kodlu rutini ise Burcu’nun söylemlerinin prosedür hakkında olmasından dolayı (Tablo 39) süreç odaklı bir ritüel rutin olarak kodlanmıştır. Burcu’nun Tablo 42’deki gibi kodlanan 12 farklı rutininin ritüel ya da keşif rutini olduğu Tablo 43’te okuyucuya sunulmuştur.

Tablo 43

Burcu’nun Bireysel Görüşmedeki Rutinlerinin Türü

Rutin Kodu	Ritüel	Keşif
BG-B1	X	
BG-B2	X	
BG-B3		X
BG-B4	X	
BG-B5	X	
BG-B6	X	
BG-B7	X	
BG-B8	X	
BG-B9	X	
BG-B10		
BG-B11		X
BG-B12	X	

Katılımcının bireysel görüşmesinden elde edilen bulguları söylemin nesneleştirilmesi açısından incelendiğinde, Burcu’nun söyleme katılım biçimi çoğunlukla ritüel olmuştur. Burcu’nun söylemleri çoğunlukla prosedürün süreci hakkında olmuş ve katılımcı matematiksel nesneleri manipüle edilebilen birer sembol dizisi olarak görmüştür. Ritüel katılımın bir belirleyicisi olan bu durumun örnekleri katılımcının BG-B1, BG-B2, BG-B4,

BG-B5, BG-B6, BG-B7, BG-B8, BG-B9, BG-B10 ve BG-B12 kodlu ritüel rutinlerinde sıklıkla gözlemlenmiştir. Söylemlerinde kavramlar, göstergeler ve görsel araçlar için anahtar sözcükleri doğru bir şekilde kullanmada güçlük yaşamış ve çoğunlukla anlamlı olmayan günlük bir dil eşliğinde matematiksel terimleri kullanmıştır. Bununla birlikte katılımcı bağlama bağlı olarak cebirsel ifadelerin ve sembollerin ayrımında ve isimlendirilmesinde güçlük yaşamış ve sözel ifadeleri cebirsel ifadelere dönüştürmede zorlanmıştır (Tablo 41). Denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedüründe matematiksel nesneler yerine zamirleri, edatları ve insani eylem içeren ifadeleri sıklıkla kullanmıştır. Söylemin nesneleştirilmesinde katılımcının ritüel bir katılım sergilediğinin iletişimsel belirleyiciler bağlamında örnekleri Tablo 44’te yer almaktadır.

Tablo 44

Burcu'nun Söylemini Nesneleştirmede Ritüel Bir Katılım Sergilediği İletişimsel Örnekleri

Ritüel katılımın iletişimsel belirleyicisi	İletişim örneği	Rutin kodu
Katılımcı denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait göstergeleri (signifiers) ve görsel araçları (cebirsel ifadeler, değişkenler, semboller, grafikler vb.) manipüle edilebilen bir nesne olarak görür. Katılımcı prosedürün uygulanması sürecine odaklanır ve söylemleri matematiksel nesneleri manipüle etme hakkındadır.	11. A: Tamam şimdi burada demişsin ki “eşitsizlikler denklemden daha geniş kapsamlıdır” ne demek istedin? 12. B: Şöyle demek istedim ama demiştim ya [...] aslında evet her eşitsizlik bir denklemdir mesela ben örneklerde verdim buralarda iki x eksi dört eşittir sıfıra [...] iki x eşittir dört [...] x eşittir iki oluyor [...] yani burada hani farklı bir sonuç çıkmıyor [...] ama burada iki x eksi küçük dört eşit sıfır dediğimizde dördü karşı tarafa attığımızda iki x den büyük oluyor [...] yani x iki de olabilir o yüzden tanım kümemizde ben doğal sayılar verdiğim için sıfır, bir, iki olabiliyor yani hani aynı sayıları kullanırsak [...] orada daha fazla çözüm kümesindeki eleman sayısı [...] öyle düşündüm yani ben.	BG-B2
	135. A: Tamam sıradakine geçelim [...] şimdi denklem sistemi ve eşitlik sistemi kavramları sence nedir? 136. B: Şimdi şöyle ııı denklem sistemi dediğim gibi eşitlik bulunacak ama tek bir tanesi denklem sistemi [...] şimdi denklem sistemi olmuyor tek bir taneyle [<i>önceki söylemiyle çelişiyor</i>] bizim onun çözdüğümüzde yani ikili mesela [...] ııı koordinatta bulmada falan hep genelde [...] x ve y 'yi yok ederiz.	BG-B6
	216. A: Tamam evet ikinci dereceden bir değişkenli denklemlere bakalım, neye göre karar vermişsin? En büyük kuvvet x kare olmak şartıyla bir bilinmeyenli denklemlere ikinci dereceden bir değişkenli denklem denir demişsin, güzel [...] şimdi birinci ifadeye bu nedenden dolayı ikinci dereceden tek değişkenli denklem dedin [<i>Burcu kafasını sallıyor</i>] peki ama burada x kareli bir ifade yok nasıl karar verdin? 217. B: Açayım [<i>yazmaya başlayarak</i>] açtım ben onları [...] yani x kare artı on x artı yirmi beş eşittir x [...] hani en büyük kuvvetimiz x [...] x 'in kuvveti iki [...] o yüzden söyledim.	BG-B9
	245. B: Ben burada ilk başta çarpanlara ayırma yapacaktım [...] ama o biraz zor geldi [...] o yüzden diskriminant denedim, onunla hepsi çıkar diye [...] diskriminant b kare eksi dört a, c [...] şimdi şöyle denklemde [...] denklem sistemi değil bu [...] denklemde a x kareli terimin katsayısı [...] bx 'li terimin katsayısı, c de sabit sayı oluyor. Yani burada o zaman yerine yazalım [...] birin karesi eksi dört çarpı iki çarpı eksi üç [...] buradan yirmi beş oldu [...] yani diskriminant büyüktür sıfır oluyor yani [...] bundan bizim o zaman iki tane farklı şeyimiz var sağlayan [...] bunu da ben yani tam hatırlayamadım, emin değilim [<i>kağıdına bakıyor hatırlamak için</i>] ama onunla yapacağım.	BG-B10
Prosedürü uygularken kavramlara ait göstergeleri isimlendirmede (anlamlandırmada) zamirleri (bu, şu, o, bunlar, şunlar, onlar) ve iyelik eklerini kullanır. Söylemleri insani eylemleri içeren ifadeleri (ekliyorum, yapıyorum, çarpıyorum, karşı tarafa atıyorum, buradan şöyle oluyor vb.) içerir.	111. A: Tamam şimdi bunu sesli olarak çözmeni istiyorum. 112. B: Tamam şimdi parantezleri dağıtacağım [...] üç x eksi iki artı sekiz eşittir dört x artı dört [...] şimdi ben bu taraftaki üç x 'i karşı tarafa atacam ve dört x 'ten çıkartmış olacağım yani işaret değişikliği için burada [...] pardon burayı önce bir sadeleştireyim [...] üç x eksi iki x 'ten x kalıyor [...] artı sekiz var burada [...] karşı tarafta dört x artı dördü [...] x 'i karşı tarafa attığımda [...] bu tarafta üç x oluyor [...] dördü bu tarafa attığımda [...] bu tarafta da dört olmuş oluyor [...] buradan da dört eşittir üç x ise x eşittir dört bölü üç.	BG-B4
	113. A: Tamamdır şimdi sıradakini sesli olarak çözer misin? 114. B: Önce iki ile genişletiyorum x eksi on artı x eksi bir bölü üç [...] eşittir eksi üç x artı dört [...] şöyle yapayım ben hepsini üçle çarpacaktım yani altı x eksi otuz artı x eksi bir bölü üç [...] eksi üç artı dört [...] ıı üçü	BG-B5

	de karşı tarafa yollayacağım [...] altı x artı eksi otuz artı x eksi eşittir eksi dokuz x artı on iki [...] yedi x eksi otuz bir oldu [...] bu tarafta eksi dokuz artı on iki olur [...] otuz biri karşı tarafa [...] eksi dokuzu ise karşı tarafa yolluyorum [...] toplam on altı x oluyor bu taraf [...] bu tarafta eşittir kırk üç oluyor [...] x eşittir kırk üç bölü on altı [...] buradan da çözüm kümemiz sadece kırk üç bölü on altı.	
	162. A: Peki bu denklem sistemini çözer misin? 163. B: Taraf tarafa [...] iki x eksi dört eşittir altı [...] x eksi üç eşittir on iki eksi x [...] ilk başta x eksi üç eşittir on iki eksi x 'i çözeyim [...] ıı [yutkunarak] üçü karşıya atıp iki x 'i de bu taraf yolladığımda [...] üç x eşittir on beş oluyor [...] burada [...] şöyle yapacağım ıı bir dakika [...] üç x eşittir on beş oluyor ama ben bunu sistem yapabilmek için bunu üç x eksi on beş eşittir sıfır yapacağım [...] böyle yapacağım sonra taraf tarafa toplama yapacağım [...] iki x eksi dört eşittir altı [...] üç x eksi on beş sıfır [...] ıı ben yukarıyı eksi üçle çarpayım [...] aşağıyı da iki ile [...] yok etmeye çalışıyorum [...] eksi altı x artı on iki eşittir eksi on sekiz [...] altı x eksi otuza eşittir ıı sıfır [...] taraf tarafa topladığımda eksi altı x ile artı altı x yok etti [...] eski on sekiz eşittir eksi on sekiz geliyor [...] bu da boş küme.	BG-B6
Göstergeleri ve görsel araçları isimlendirme ve ifade etmede çoğunlukla (anlamli olmayan) günlük bir dil kullanır. Söylemlerinde kavramlar, göstergeler ve görsel araçlar için anahtar sözcükleri doğru bir şekilde kullanmada güçlük yaşar.	1.A: Denklem ve eşitsizliği nasıl tanımlarsın? 2. B: Denklemi mi yani [...] eşitlik işareti [...] mesela onun adını şey yapamadım ama eşittir konulduğunda ve sonucu da varsa eğer [...] onu denklem diye tanımlıyorum. 3. A: Yani eşittir işareti olacak. 4. B: Evet eşittir işareti olacak. 5. A: Eşittir işareti yeterli mi? 6. B: Öyle ama şimdi tanım aralıkları önemli yani hani mesela sayıların olması gerekiyor [...] tanım aralığını da verirse ona göre. 7. A: Peki eşitsizlik kavramından ne anlıyorsun? 8. B: Eşitsizlik de [...] aslında her eşitsizlik bir denklem oluyor [...] eşittir işareti, büyük-eşittir, büyüktür küçüktür, küçük-eşittir işaretleriyle olan yine dediğim gibi tanım aralıklarıyla olan şey birbirine eşit [...] şimdi nasıl söyleyeyim sayılarla yaptığımız ve o işaretleri kullanarak yaptığımız [...] matematiksel bir [...] 9. A: Ne diyebiliriz? 10. B: Gelmedi şu an aklıma.	BG-B1
	178. A: Peki buldukların ne anlama geliyor? 179. B: Şey yani x 'imiz eksi dokuz yani bu denklemde yerine yazacağız [...] burada da y 'yi üç bulduk [...] yazacağız da bunları [eliyle doğru çizer gibi yaparak] nokta gibi değil ama doğru gibi [...] çünkü bunlar bir doğru belirtiyor bir nokta belirtmiyor. 180. A: Ne doğru belirtiyor? 181. B: Şey bunlar [...] denklemler. Bir nokta belirtmiyor mesela eksi dokuza üç değil [...] o noktalar değil doğru denklemler olacak yani ben şöyle kesiş [ellerini buluşturarak] bunu çizmeden anlatamayacağım [analitik düzlemi ve doğruları çiziyor] birinci de x 'i altı buldum [işaretleyerek] y 'miz eksi iki [...] böyle çiziyorum [...] y burada üç x de eksi dokuz [işaretleyerek] böyle çizdim.	BG-B8
	255. B: ıı x artı iki [...] direkt sıfıra eşitleme olarak düşündüm bir de x eksi üç sıfır diye düşündüm hani burada x yerine eksi iki oluyor sıfırlayacağımız için çarpanlara ayırma diye düşündüm [...] bundan da x üç olabilir [...] hani bununla da denklem ve yazmamız gerekiyor [...] o yüzden şimdi onları çarpanlarına ayırma yaptım o yüzden şimdi düzgünce bir şey yazıyorum denklem yazıyorum [...] x ile x çarparsam x kare, eksi üç x artı iki x	BG-B12

	eksi altı eşittir sıfır [...] buradan x kare eksi x eksi altı oluyor [...] yani bunun çözüm kümesi ikiye üç.	
Katılımcı bağlama bağlı olarak cebirsel ifadelerin ve sembollerin ayırımında ve isimlendirilmesinde güçlük yaşar.	61. A: Değişken olup olmadığını neye göre belirliyorsun? 62. B: [...] şu an biraz [...] neye göre karar veriyoruz [...] [<i>açıklama yapmakta güçlük çekiyor</i>] 63. A: Evet devam edelim istersen? 64. B: Yani şöyle burada bence a'yı a'nın yerine yazdığımızda bence bunu sabit sayı yapıyor o yüzden bence bir değişken değil. $\langle a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{a}{2} - 20 = a + 1$ eşitliği hakkında konuşurken $\rangle$... 94. B: Denklem [...] burada iki tane değişken var, x ve y [...] bir tane de z sabit terim [...] derece olarak birinci dereceden iki bilinmeyenli. $\langle x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x - 3y + z = -1$ denklemi hakkında konuşurken $\rangle$	BG-B1
	222. A: Tamam aşağıdakine [$a, b, c, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx = c$] ifadesini göstererek] bakalım [...] a, b ve c için ne düşünüyorsun? x için? 223. B: Ben burada x'lerin değişken olacağını düşünüyorum [...] öbürlerinin de [...] öbürleri de değişebilir ama bence burada bilinmeyen x öbürleri değişken [<i>karar veremiyor</i>] söylüyorum en son [...] x bilemeyen öbürleri değişken [...] yani ben a yerine beş de yazabilirim, altı da yazabilirim.	BG-B9
Katılımcı göstergelerin gerçekleşmeleri arasında geçiş yapmada güçlük yaşar. Aynı göstergeye ait farklı gerçekleşmeler arasında ilişkiyi kurmada güçlük yaşar.	170. A: Evet güzel analitik düzlemde grafik çizimi yoluyla bu denklem sistemin çözüm kümesinin elemanlarını nasıl belirlediğini sesli bir şekilde paylaş bakalım. 171. B: Burada iki x eksi altı y eşittir on iki denkleminde x'e sıfır verip [...] x eşittir sıfır ise y'yi bulacağım [...] y eşittir eksi iki. 172. A: Neden böyle yapıyorsun? 173. B: Yani [...] ını her zaman böyle yapıyorum yani böyle x'e sıfır verip y'yi buluyoruz. 174. A: Neden yaptığını peki biliyor musun? 175. B: Bilmiyorum hep böyle yapıyoruz. 176. A: Tamam devam edelim. 177. B: Bu kez y'ye sıfır vereceğim [...] y'ye sıfır verdiğimiz de de x eşittir altı [...] ını en son grafik çizerim [...] bir de şu denklemimiz var [...] eksi x artı üç y eşittir sıfır [...] x'e sıfır veririm y eşittir üç [...] y'ye sıfır veririm x eşittir eksi dokuz [...] şimdi bunların grafiklerini çizeceğim.	BG-B8

Katılımcının çözüm kümesi hakkında konuşurken uyguladığı BG-B3 kodlu rutini ise söylemin nesneleştirilmesi açısından hibrit katılımın bir örneği olmuştur. Katılımcının söylemleri kimi zaman matematiksel nesneleri manipüle etme hakkında (örneğin, [106] ve [249]) olsa bile rutinini onaylanmış anlatılarla sonlandırmıştır (örneğin, [110], [251] ve [253]). Bununla birlikte Burcu BG-B3 kodlu rutini sergilerken söylemlerinde matematiksel nesneler için anahtar kelimeleri bağlamına uygun olmayan bir şekilde kullanmıştır. Bu durum bir örneğinde çözüm kümesinin elemanlarının, değişkenin ait olduğu evrensel kümede olan ve denklemi sağlayan elemanların bir kümesi olduğunu “denklem sisteminde yerine yazdığımızda denklemi sağlayan kümedeki elemanlar ile doğruluğu kanıtlanabilen matematiksel terime denklemin çözümü denir” şeklinde belirttiği sözel gerçekleşmesinde görülmüştür. Denklem yerine “denklem sistemi”, bilinmeyen ya da reel sayı yerine “matematiksel terim” sözcüklerini kullanan katılımcı, “çözüm kümesindeki elemanın açık önermeyi sağlamasını” ifade etmek içinse “denklemi sağlayan kümedeki elemanlar ile doğruluğu kanıtlanabilen” şeklinde bir söylemde bulunmuştur. Bununla birlikte reel sayılarda tanımlı özdeşliklerin çözüm kümelerinin sonsuz elemanlı olması durumunu “... x her reel sayı için doğru sonucu sağlar bu yüzden küme sonsuz elemanlıdır (Şekil 49)” şeklinde belirtmesine rağmen katılımcının çözüm kümesini yazarken kullandığı “ $\mathbb{C}.K. = \{\infty\}$ ” ve “ $\mathbb{C}.K. = \infty$ ” şeklindeki gösterimlerin yine bağlama uygun olmayan bir şekilde olduğu görülmüştür. Bu nedenle BG-B3 kodlu rutini ile söyleme katılımı nesneleştirme açısından hibrit bir katılımın örneği olarak gözlemlenmiştir. Benzer şekilde anlatı üretmeyi hedeflediği BG-B11 kodlu rutininde de “diskriminantı büyüktür sıfır oluyor yani [...] buradan bizim o zaman iki tane farklı şeyimiz (çözüm) var sağlayan ... [245]” ifadesinde anlatısını günlük bir dil eşlinde ifade ettiği için söyleme katılımı nesneleştirme açısından hibrit katılımın birer örneğini teşkil etmiştir.

Burcu’nun rutinleriyle söyleme katılımı esneklik açısından ele alındığında ise katılımcının söyleme katılım biçimi çoğunlukla ritüel olmuştur. Katılımcının değişkenden bağımsız bir şekilde sadece sembollere odaklanarak tanımlamalar yaptığı BG-B1, BG-B6 ve BG-B9

kodlu rutinleri prosedürün esnekliği açısından ritüel katılımın birer örnekleri olmuştur. Katılımcının “=” sembolü içeren her eşitliği denklem olarak tanımlaması [26] ve “ $\leq, \geq$ ” gibi sembollerde yer alan eşitlik durumundan dolayı eşitsizlikleri “eşitsizlik denklemi” şeklinde tanımlaması (Şekil 39) katılımcının kanonik olmayan söylemlerde bulunmasına sebep olmuş ve BG-B1 kodlu rutine dair prosedürünün katı (rigid) olduğunu göstermiştir. Benzer şekilde denklem ve eşitsizlik sistemlerini tanımlarken kullandığı BG-B6 kodlu rutininde sembolere odaklanan (Şekil 48) ve birden fazla denklem ya da eşitsizlik olması gerektiğini belirten (örneğin, [140] ve [142]) katılımcı yine katı bir prosedür uygulamıştır. Prosedüründeki bu katılık sebebiyle katılımcının, “ $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $-2 \leq x + y \wedge x + y \leq 2$ ” şeklindeki eşitsizlik sistemine denk olan “ $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $|x + y| \leq 2$ ” biçimindeki ifadenin tek bir “ $\leq$ ” sembolü içermesinden dolayı sistem olarak görmediği (Şekil 48) gözlemlenmiştir. Başka bir benzer durum ise ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlama rutini olan BG-B9 kodlu rutin prosedüründe görülmüştür. Burcu, “ x^2, y^2, a^2 ” gibi terimleri içeren polinom biçiminde olmayan eşitliklerin de (örneğin, $x, a \in \mathbb{R}$ olmak üzere “ $\frac{x^2-5}{x} = 3$ ” ve “ $a^2 - 4 = 0$ ”) birer ikinci dereceden tek değişkenli bir denklem olduğunu belirtmiştir. Bu nedenle katılımcının BG-B1, BG-B6 ve BG-B9 kodlu ritüel rutinleri esneklik açısından Burcu’nun söyleme katılımının ritüel olduğunun birer örneği olmuştur. Katılımcının denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürlerini içeren BG-B4, BG-B5, BG-B7, BG-B8 ve BG-B12 kodlu rutinleri de esneklik açısından ritüel katılımın birer örneği olarak kodlanmıştır. Katılımcı BG-B4, BG-B5 ve BG-B12 kodlu rutinlerinde uyguladığı prosedürlerde sayı, sembol ve değişken gibi matematiksel nesneleri manipüle etme yoluyla (örneğin, Tablo 35 ve Tablo 39) ezbere bir yol izleyerek prosedürünü tamamlamıştır. Bununla birlikte katılımcının denklem sistemlerini yok etme metodu ile çözme rutini olan BG-B7 kodlu rutinini tek değişkenli iki denklem ve eşitsizlik sistemleri için de kanonik olmayan bir şekilde uygulaması da (Tablo 37) ezbere bir prosedür yürüttüğünü göstermiştir. Benzer şekilde denklem sistemlerinin analitik düzlemde çözüm kümelerini belirlerken kullandığı BG-B8 kodlu rutinin de ezbere bir prosedür

uyguladığı görülmüş (Tablo 38) ve katılımcı “Yani [...] ıı her zaman böyle yapıyorum yani böyle x ’e sıfır verip y ’yi buluyoruz. [173] ... hep böyle yapıyoruz. [175]” söylemlerinde bulunmuştur. Ayrıca bu prosedürünü eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini belirlerken kullanan (Şekil 50) katılımcı grafiği çizemediğini belirtmiş [215] ve katı bir prosedür izlemesinden dolayı sonuca ulaşmada güçlük yaşamıştır. Buna rağmen katılımcı ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme rutini olan BG-B10 kodlu rutinin de iki farklı prosedürle kanonik bir şekilde çözüm yaptığı gözlemlenmiş (Tablo 39) ve bu rutini esneklik bağlamında keşifsel katılımın bir örneği olmuştur.

Burcu’nun rutinleri aracılığıyla söyleme katılımı bağlılık-tutarlılık bağlamında incelendiğinde katılımcının katılım biçimi kimi zaman hibrit ve kimi zaman keşifsel olmuştur. Burcu, BG-B4, BG-B7 ve BG-B8 kodlu rutinlerinde bağlılık-tutarlılık bağlamında söyleme hibrit biçimde katılırken, BG-B5, BG-B10 ve BG-B12 kodlu rutinlerinde keşifsel bir biçimde katılmıştır. Katılımcının çözüm kümesi bir elemanlı olan birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken ardışık adımları birbiriyle bağlantılı olmuş (Tablo 35) ve katılımcı prosedür-sonuç ilişkisini kurabilmiştir (örneğin, [110]). Buna rağmen katılımcı çözüm kümesi reel sayılar olan denklemleri (özdeşlikleri) çözerken prosedür sonuç ilişkisini kurmakta (örneğin, [120] ve [122]) zorlanmıştır. Bu nedenle Burcu’nun BG-B4 kodlu rutini bağlılık tutarlılık bağlamında hibrit katılımın bir örneği olarak kodlanmıştır. Benzer şekilde katılımcının denklem sistemlerinin çözüm kümelerini belirlerken kullandığı BG-B7 ve BG-B8 kodlu rutinlerinde yer alan ardışık adımlarının da birbiriyle bağlantılı olduğu görülmüş (Tablo 36 ve Tablo 38) fakat katılımcının çözüm kümesini kanonik bir şekilde yazmada güçlük yaşamıştır. Şekil 55’te yer alan prosedüründe Burcu, denk önermeler aracılığıyla bağlantılı bir şekilde ilerleyerek x ve y reel sayılarını doğru bir şekilde belirlemeyi başarmış fakat çözüm kümesinin bir sıralı ikili içereceğini fark edememiş ve prosedür sonuç ilişkisini kuramamıştır.

$5x + 3y = 7$ Österge
 $y - 2x = -5$ Gerçekleşme 2
 $5x + 3y = 7$ Gerçekleşme 1
 $3y + 6x = 15$ Gerçekleşme 3
 $11x = 122$ Gerçekleşme 3
 $x = 2$ Gerçekleşme 4
 $C_{1,2} = \{2, -1\}$ Gerçekleşme 10

$5x + 3y = 7$ Gerçekleşme 5
 $5.2 + 3y = 7$ Gerçekleşme 6
 $10 + 3y = 7$ Gerçekleşme 7
 $3y = -3$ Gerçekleşme 8
 $y = -1$ Gerçekleşme 9
 $C_{1,2} = \{2, -1\}$ Gerçekleşme 10

Şekil 55. Burcu'nun denklem sistemi çözümlerinde prosedür-sonuç ilişkisini kuramadığına yönelik görsel araçları (BG-B7 kodlu rutin)

Benzer şekilde analitik düzlemde çözümleri belirlediği BG-B8 kodlu rutininde de düzlemde grafikleri kanonik bir şekilde çizen (Tablo 38) katılımcı çözüm kümesini kanonik bir şekilde yazmada güçlük yaşamıştır:

183. B: Çözüm kümesi elemanları bunlar [...] yani bulduğum değerler.

184. A: Nasıl yazarız?

185. <Burcu çözüm kümesini $\{6, -2, 3, 9\}$ biçiminde yazıyor>

...

187. B: [Aklıma bir fikir geliyor] ben bunu böyle yazmayacağım [silerek]

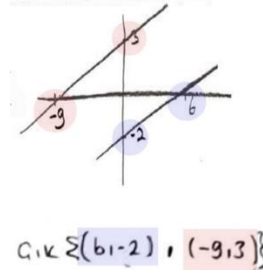
188. A: Nasıl olacak?

189. B: Şu an aklıma bir şey yani emin değilim ama hani bunu tek yazdığımda sağlayabilecek mi? [...] Eksi ikiyle altıyı nokta olarak yazsam mı diye düşündüm ama [...] çünkü tek tek hani [...] zaten tek yazdığımda da tekrar y'yı bulmuş oluyorum ama yani mesela bunu ben başka biri olarak görsem altıyı buradaki eksi ikiyi x yerine yazabilirim [...] o yüzden değiştiriyorum kararımı ve çözüm kümemi böyle nokta olarak yazıyorum (gerçekleşme 10).

190. A: Tamam [...] az önce burada bulduklarım nokta değil falan derken ne demek istedin?

191. B: Yani şimdi şöyle demek istiyorum [gülerek] nokta ve doğruyu [...] şu an kafam çok karıştı ama böyle çizeceğimizi [çizimini göstererek] düşünüyorum çünkü x noktasını kesiyor [...] oradan geçtiği için yani noktada kesiyor [...] kesmesi konusunda hâlâ doğru olduğunu düşünüyorum yani doğru ile çizeriz hepsini ama [...] böyle yazdığımızda doğru gibi yazsak yanlış olur, o yüzden bunun nokta değil aslında bu koordinat olarak yazıyoruz [...] burada nokta demeyeceğim ben [...] koordinat diyeceğim (gerçekleşme 10).

Denklem sisteminde yer alan denklemlerin düzlemde temsil ettiği doğruların ortak çözümlerine değil de doğruların eksenleri kestiği noktalara odaklanarak Şekil 56'daki gibi çözüm kümesini belirleyen Burcu prosedür-sonuç ilişkisini kuramamıştır.



Şekil 56. Burcu'nun denklem sistemi çözümlerinde prosedür-sonuç ilişkisini kuramadığına yönelik görsel araçları (BG-B8 kodlu rutin)

Bu nedenle Burcu'nun BG-B7 ve BG-B8 kodlu denklem sistemlerini çözme rutinleriyle söyleme katılımı, katılımcının prosedür-sonuç ilişkisini kanonik bir şekilde kuramamasından dolayı bağlılık-tutarlılık açısından hibrit katılımın birer örneği olarak görülmüştür.

Katılımcı BG-B5 kodlu rutininde ise prosedüründe yer alan ardışık adımlarının birbiriyle bağlantılı olduğu ve Şekil 57'deki gibi prosedürün kanonik bir şekilde tamamlamıştır. Burcu'nun çözüm kümesi hakkında konuşurken kullandığı BG-B3 kodlu rutini ise katılımcının uyguladığı prosedürle ulaştığı sonuç arasında mantıksal bir ilişki kurabildiğini göstermiştir:

150. B: ... yani burada çözüm kümesini yazıyorum [...] aralık kullanacağım ben [...] açık aralık eksi üç bölü dört [...] üçte kapalı aralık.

151. A: Neden aralık kullandın?

152. B: Çünkü yani bunu sağlayan tek bir [...] birkaç [...] nasıl söyleyeyim [...] bunlar sağlamıyor sadece [...] bulduğum sonuçlar sağlamıyor [...] bu üçte eksi üç bölü dört sağlamıyor sadece [...] bunların aralıkları sağlıyor, böyle yazdığımda bunun aralıkta olacağını düşünüyorum çözüm kümesinin.

$$\begin{array}{l}
 x - 1 \leq 5 - x < 8 + 3x \dots \text{Önferge} \\
 x - 1 \leq 5 - x \dots \text{Örpekleşme 1} \\
 2x \leq 6 \dots \text{Örpekleşme 2} \\
 x \leq 3 \dots \text{Örpekleşme 3} \\
 5 - x < 8 + 3x \dots \text{Örpekleşme 4} \\
 -3 < 4x \dots \text{Örpekleşme 5} \\
 -\frac{3}{4} < x \dots \text{Örpekleşme 6} \\
 -\frac{3}{4} < x \leq 3 \dots \text{Örpekleşme 7} \\
 \text{Cik } [-\frac{3}{4}, 3] \dots \text{Örpekleşme 8}
 \end{array}$$

Şekil 57. Burcu'nun BG-B5 kodlu rutin prosedüründe ardışık adımlarının bağılılığına dair görsel araçları

Benzer durum katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme prosedürünü içeren BG-B10 rutinde görülmüş ve denklemin çözümleri için "... bir de ben hani şey diye düşündüm [...] x yerine yazdığımızda bunlar olacaklar yani hani ikisini de [çözüm kümesinin elemanlarını kastederek] yazdığımızda denklemini sağlayacaklar. [249]" söyleminde bulunmuştur. Burada süreç odaklı olan BG-B5 ve BG-B10 kodlu rutinleriyle katılımcının prosedür-sonuç ilişkisini kurduğunu gösteren sonuç odaklı BG-B3 kodlu keşif rutini bağıllık-tutarlılık kriterini incelemede bir bütünlük oluşturmuştur. Bu bağlamda Burcu'nun BG-B3 kodlu anlatı rutiniyle tutarlılığı desteklenen BG-B5 ve BG-B10 kodlu rutinleri de bağıllık-tutarlılık kriteri bağlamında keşifsel katılımın bir örneği olarak görülmüş ve Tablo 41'de BG-B5↔BG-B3 ve BG-B10↔BG-B3 biçiminde temsil edilmiştir. Bununla birlikte katılımcının çözümlerinden yola çıkarak kanonik bir şekilde denklemleri elde ettiği prosedürünü (Tablo 39) içeren BG-B12 kodlu rutini de bağıllık-tutarlılık açısından keşifsel katılımın bir örneği olmuştur.

Burcu'nun herhangi bir prosedürünü gerekçelendirmede söyleme katılım türü incelendiğinde katılımcının söylemlerinde ritüel, hibrit ve keşifsel katılımın örnekleri gözlemlenmiştir. Denklem ve eşitsizlik sistemleri arasında "Çünkü dediğim gibi her eşitsizlik bir denklemdir. [48]" şeklindeki anlatısını gerekçelendirirken süreç odaklı

argümanlar sunmuş (örneğin, [12], [16] ve [34]) ve cebirsel örnekler içeren görsel araçları (örneğin, Şekil 41 ve Şekil 43) kullanmıştır. Bu nedenle katılımcının denklem ve eşitsizlik arasındaki ilişkiyi açıklarken kullandığı BG-B2 kodlu rutini gerekçelendirme açısından hibrit katılımın birer örneğini teşkil etmiştir. Benzer şekilde katılımcı bir cebirsel ifadenin ikinci dereceden tek değişkenli bir denklem olduğunu gerekçelendirirken de (örneğin, Şekil 51) süreç odaklı argümanlar (örneğin, Şekil 51) sunmuş ve Şekil 58'deki görsel araçlarla da onaylamıştır:

227. B: Olur [...] açayım ben bunu [...] bir bölü iki x 'in karesi 111 eksi z çarpı [...] şöyle [...] eksi iki çarpı bir bölü x çarpı z [...] artı z kare [...] eşittir iki virgül beş [...] burada da [...] 111 kuvvetimiz üssü yani iki oluyor [...] o yüzden ikinci dereceden. <Şekil 58- [227] hakkında konuşurken>

...

231. B: Olmayacağını düşünüyorum çünkü en büyük kuvvetimiz burada hani kuvvetlerimiz iki den büyük o yüzden olmaz. <Şekil 58- [231] hakkında konuşurken>

...

233. B: Olur dedim çünkü ben bunu açtım buraya da açayım [...] üçü karşı tarafa yolladığım da x kare eksi beş eşittir üç x [...] buradan ben hani bir eşitlik oluşturmak istediğim için [...] x kare eksi üç x eksi beş eşittir sıfır yapıyor [...] buradan da yine kuvvetimiz iki olduğu için [yuvarlak içine alarak] <Şekil 58- [233] hakkında konuşurken>

...

235. B: 111 yine ben bunu açtım [...] eksi altı x eksi x kare eşittir iki [...] bunu da ben yine denklem olarak sıfıra eşitleyeyim [...] eksi altı x eksi x kare eksi iki eşittir sıfır [...] yine x kareli bir terim olduğu için. <Şekil 58- [235] hakkında konuşurken>

...

237. B: Olur bu da neden çünkü y bilinmeyen ve kuvveti iki olduğu için olacağını düşündüm [...] benim için önemli olan bilinmeyenin kuvvetinin iki olması. <Şekil 58- [237] hakkında konuşurken>

[227] $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 = 2,5$
 $\frac{1}{2}x - 2 = \pm \sqrt{2,5}$
 $\frac{1}{2}x - 2 = \pm 1,5$

[231] $z \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
 $z^6 - 3z^3 - 4 = 0$
 Olma 1. köprü
 ve 6. kuvveti olduğu için değildir.

[233] $\frac{x^2-5}{x} = 3 \Rightarrow x^2-5=3x$
 $x^2-3x-5=0$

[235] $-x(b+x) = 2$
 $-bx - x^2 = 2 \Rightarrow -bx - x^2 - 2 = 0$

[237] $2y - \frac{1}{4} + \frac{9}{5}y^2 = 0$
 y^2 olduğu için 2. dereceden denklemdir.

Şekil 58. Burcu'nun BG-B9 kodlu rutin prosedürünü gerekçelendirmesine yönelik görsel araçları

Bu nedenle katılımcının BG-B9 kodlu rutinini gerekçelendirmesine yönelik bulguları hibrit katılımın birer örneğini sunmuştur. Burcu'nun birinci dereceden iki değişkenli denklemleri çözme prosedürlerini içeren BG-B7 ve BG-B8 kodlu rutinlerinde uyguladığı prosedürünü gerekçelendirmesi ise ritüel katılımın birer örneklerini sunmuştur. Katılımcı uyguladığı prosedürlerin (örneğin, Tablo 36, Tablo 37 ve Tablo 38) nedenini açıklarken,

172. A: Neden böyle yapıyorsun?
173. B: Yani [...] ıı her zaman böyle yapıyorum yani böyle x 'e sıfır verip y 'yi buluyoruz.
174. A: Neden yaptığını peki biliyor musun?
175. B: Bilmiyorum hep böyle yapıyoruz.
- ...
192. A: Tamam o zaman sıradakini nasıl çözdüğünü açıklar mısın?
193. B: Bunu ben taraf tarafa toplayıp yok etme metodu kullanmışım [yazmaya başlıyor]
194. A: Neden böyle çözmeyi tercih ettin?
195. B: Yani yine her zaman böyle çözüyorum daha kolay geliyor ya da alışkanlık olabilir direkt gördüğümde öyle çözeceğimi düşündüm.

şeklinde söylemlerde bulunmuştur. Burada katılımcı uyguladığı prosedürün nedenini bilmediğini ve geçmiş öğrenme yaşantılarından yola çıkarak prosedürünü uyguladığını belirtmiştir. Tablo 38'de yer alan görsel araçlar da katılımcının prosedürünü mantıksal olarak doğruluğunu düşünmeden ve ezbere bir yol izleyerek uyguladığını göstermiştir. Bu nedenle Burcu'nun BG-B7 ve BG-B8 kodlu rutinlerinde yer alan prosedürlerini gerekçelendirmesi ritüel katılımın birer örnekleri olmuştur. Benzer şekilde katılımcı ikinci

dereceden denklemleri çözerken de (örneğin, Tablo 39 ve Tablo 40) prosedürünü uygularken hafızaya, geçmiş öğrenme yaşantılarına başvurduğunu “o yüzden diskriminantı denedim, onunla hepsi çıkar diye ... yani tam hatırlayamadım [*kağıdına bakıyor hatırlamak için*] ama onunla yapacağım ... böyle bir formül vardı sanırım ... öyle bir şey hatırlıyorum [245]” ve “...direkt sıfıra eşitleme olarak düşündüm ... çarpanlara ayırma diye düşündüm ... o yüzden şimdi onları çarpanlarına ayırma yaptım ... [255]” şeklindeki söylemleriyle belirtmiştir. Bu nedenle katılımcının BG-B10 kodlu rutininde yer alan prosedürleri için sunduğu argümanları ritüel katılımın birer örnekleri olmuştur. Buna rağmen Burcu uyguladığı prosedürler sonucunda ulaştığı sonuçların (çözüm kümesinin elemanları) ne anlam ifade ettiğini “Yerine koyduğumuzda burayı (eşitsizliği) sağlayan ... [40]”, “...sağlayan eleman kümesine [...] elemanları sağlayan kümeye çözüm kümesine denklemleri çözümü denir. [98]”, “... denklemin çözümü [...] bu da eksi dört de çözen eleman yani [...] kümedeki eleman. [106]”, “...çözümü, bu da sağlayan eleman [...] yani çözüm kümesindeki eleman oluyor. [110]”, “Çünkü çözüm kümesindeki elemanlar denklemleri sağlayan terimler oluyor. [251]” ve “Yerine yazdığımızda eşitliği sağlayan. [253]” şeklindeki onaylanmış anlatılar üreterek gerekçelendirmiştir. Bu nedenle katılımcının çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken kullandığı BG-B3 kodlu rutini gerekçelendirme açısından keşifsel katılımın birer örneği olmuştur.

Burcu’nun söyleme katılımı yetkinliği açısından incelendiğinde, katılımcının çoğunlukla söyleme ritüel bir şekilde katıldığı gözlemlenmiş ve Burcu’nun bireysel görüşme bulguları ritüel katılımın iletişimsel belirleyicilerine yönelik örnekler sunmuştur. Söylemlerinde sıklıkla duraksamalar yaşayan Burcu kendini ifade etmede güçlük yaşamıştır. Denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutini olan BG-B1 kodlu rutine yönelik “Denklemleri mi yani [...] eşitlik işareti [...] mesela onun adını şey yapamadım ... [2]”, “... eşittir işareti, büyük-eşittir, büyüktür küçüktür, küçük-eşittir işaretleriyle olan yine dediğim gibi tanım aralıklarıyla olan şey birbirine eşit [...] şimdi nasıl söyleyeyim sayılarla yaptığımız ve o

işaretleri kullanarak yaptığımız [...] matematiksel bir [...] [8] Gelmedi şu an aklıma. [10]” ve “Yani nasıl söyleyeyim [...] şey sayı olması çok önemli [...] harflerle falan olduğunda da olur ama tanım aralığının önemi [...] tanım aralığında [...] nedenim [...] düşünüyüm biraz [...] şimdi aslında tanım aralığı nasıl söyleyeyim ... [30]” şeklindeki söylemleriyle katılımcı kendini ifade etmede yaşadığı güçlüğü ortaya koymuştur. BG-B1 kodlu rutinine yönelik prosedürünü kendinden emin olmayan bir şekilde uygulayan katılımcı söylemlerinde tereddüt yaşamış ve zaman zaman bir otorite olarak gördüğü araştırmacıdan söylemlerinin doğruluğu için onay istemiştir:

17. A: Anladım peki en az bir bilinmeyen bulunan ve sonunda eşittir olan matematiksel ifadeye denklem denir demişsin.

18. B: Evet.

19. A: Bilinmeyen olmak zorunda mı?

20. B: Evet bence olmak zorunda [*onay bekliyor*] hayır bence değil [*kararsız*] iki artı üç denklem mi [*araştırmacıya soruyor*]

21. A: Evet iki artı üç eşittir beş bir denklem mi?

22. B: Denklem aslında ama [...] şu an mantıklı geliyor ama bence mantıksız [...] yani evet bu denklem [*“2 + 3 = 5” eşitliğini göstererek*] şu anda buna karar verdim orada yanlış düşünmüşüm sanırım [*kendinden bir türlü emin olamıyor*]

...

26. B: Evet ya evet şu anda fikrim öyle [...] ben bunu o zamanda nasıl düşündüm [...] sanırım baştaki bir bilinmeyenli denklem dediği için öyle yazdım ama direkt denklem denince eşittir işareti olması gerektiğini düşünüyorum.

...

203.B: Sıfır küçük eksi sekiz [...] doğru olmadığı için ve eşitsizlik değil [...] zaten bilinmeyen de yok.

204. A: O zaman denklem ve eşitsizlik de bilinmeyen mi olmalı?

205. B: [*gülerek*] [*kendi söylemiyle çeliştiğini fark ediyor*] olur [*emin olamıyor*] olmaması [...] ha o mesela iki artı üç eşittir de beşe denklem demiştim [*düşünüyor*]

206. A: Şu an ne düşünüyorsun çok merak ediyorum bilinmeyen olmalı mı olmamalı? Mesela bu iki küçüktür üç olsaydı bir eşitsizlik miydi?

207. B: İı şöyle söyleyeyim eşitsizlik diyeceği eşitsizlik ama yanlış böyle bir şey yok bence bu yanlış bir terim [...] ama iki artı üç eşittir beş için denklem diyorum [...] yani şey bilinmeyen olmasının gerekmediğini düşünüyorum.

Burcu’nun ritüel katılımın iletişimsel belirleyicilerinin örneklerinin sıklıkla görüldüğü BG-B1 kodlu rutini, söyleme katılımında yetkinliğin ritüel bir örneğini sunmuştur. Benzer

şekilde katılımcının ikinci dereceden denklemleri tanımlarken kullandığı BG-B9 kodlu rutin prosedürünü uygularken de söylemlerinden emin olmada güçlük yaşadığı ve zihninde soru işaretleri olduğu gözlemlenmiştir. İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken derecesi en fazla iki olacak şekilde kareli bir terim içeren cebirsel ifadeler (örneğin, x^2, y^2, a^2) odaklanan katılımcının polinomun derecesini belirlemede yaşadığı güçlük katılımcı yetkinliği açısından ritüel katılımın birer örneğini sunmuştur:

77. A: Tamam bu bir denklem mi? [$x^3 - 4x^2 + 4x + 10 = 0$ *cebirsel ifadesini göstererek*]
78. B: Denklem [...] şu an üçüncü dereceden bir denklem oldu.
79. A: Peki.
80. B: Ha pardon bu ikinci dereceden bir denklem [...] en büyük katsayılı terime göre [*kafası karışıyor, duraksayıp düşünüyor*]
81. A: Dereceyi neye göre belirliyorsun?
82. B: Polinomlardan düşünerek bence [...] yanlış düşünüyor olabilirim bir dakika [...]
83. A: Polinoma benziyor mu bu ifade?
84. B: Benziyor.
85. A: Tamam polinomlarda dereceyi neye göre belirliyorsun?
86. B: En büyük katsayılı terime göre [...] yani eksi dört x kare oluyor o yüzden x küpü almalı mıyım şu an tereddüt ettim [...] ama polinomla denklem ilişkisi kurmaya çalışıyorum [...] şu an ben en büyük katsayılı terime göre hareket etmeyi mantıklı buluyorum [...]
87. A: Peki bunun derecesi nedir? [$y^5 - 3y + 1 = 0$ *cebirsel ifadesini göstererek*]
88. B: Bir [...] katsayısı eksi üç olan, en büyüğe göre.
89. A: En büyük katsayı üç mü?
90. B: Hayır [...] sanırım ben sayının eksisine bakmıyorum [...] şu an en son kararımı veriyorum bence sadece değişkeninin üzerindeki üsse bakıyoruz [...] şu an katsayısını önemli bulmuyorum [...] bu [$x^3 - 4x^2 + 4x + 10 = 0$ *cebirsel ifadesini göstererek*] şu an üçüncü dereceden oluyor [...] buradaki [$y^5 - 3y + 1 = 0$ *cebirsel ifadesini göstererek*] beşinci dereceden.

Katılımcının özdeşlikleri çözerken prosedürünü nasıl sonlandıracağına dair bağımsız kararlar almada güçlük yaşadığı gözlemlenmiş (örneğin, [116] ve Şekil 46- [116]) ve katılımcının yüzünde kararsızlık ifadesi gözlemlenmiştir. Bu süreçte katılımcı kendinden emin olmayan söylemlerde bulunmuş ve çözüm kümesini kanonik bir şekilde belirleyemeyen Burcu'nun söylemlerinin tutarsız olduğu görülmüştür:

117. A: Peki bu kullanım [*Ç. K "∞" ifadesini göstererek*] doğru mu? <Şekil 46- [116]'da yer alan gerçekleşme 4'ü kastederek>

118. B: O böyle değil de şöyle [*küme işareti yapıyor ve $\{\infty\}$ şeklinde yazıyor*] yapsam ya da olmasa da olabilir [*$\{\}$ sembollerini silerek*] ama ben o [*" ∞ " gösterimini göstererek*] aralığa girer mi emin değilim.

119. A: Peki diğeri [*" $3x - 15 = 3x - 15$ " ifadesini göstererek*] için ne düşünüyorsun?

120. B: İki aynı şeyler [...] her ikisi de [...] sadece biz öncekinde payda genişlettik yani [...] aynı şeyler yine ben on beşi karşı tarafa yolluyorum [...] bu kez sıfır eşittir sıfır oluyor [...] bu yüzden çözüm kümesi yani boş küme [...] hani bir şey yok tanımsız [...] ııı [...] boş küme diyeceğim.

121. A: Sıfır eşittir sıfır gelince [*" $0 = 0$ " şeklindeki sonucunu kastederek*] boş küme diyorsun yani?

122. B: Evet [...] ama böyle olduğunda da [...] x yazdığımda hepsi sağlayabilir [*kafası karışık*] hani böyle olduğunda çözüm kümesi sonsuz mu oluyor? [...] Çelişkili bir şey bence [...] şöyle de olabilir [...] üç x eksi on beş eşittir üç x eksi on beş [...] dediğimiz de ben buraya bir yazsam burada zaten eksi iki eşittir eksi iki bulacağım ve sağlayacak [...] bence bu çelişkili biraz [...] [*" $x \in \mathbb{R}$ ise x her elemanı sağlar" ifadesini yazıyor*] yani x elemanıdır reel sayı [...] her x elemanı sağlayabilir.

123. A: Ne düşünüyorsun şimdi bu denklemin çözümü kümesiyle ilgili, boş küme mi yoksa reel sayılar mı?

124. B: Bu [...] yani eşitliğin [...] karşı tarafa falan atarsam [...] boş küme olacağını düşünüyorum yani hiçbir eleman sağlamıyorsa sıfır eşittir sıfır oluyor [...] ama eğer böyle bırakırsam [*$3x - 15 = 3x - 15$ şeklinde*] ııı x eleman yani reel sayılar için x her elemanı sağlıyor o yüzden bence bu denklemden bir şey yanlış [...] önceki gibi olması gerekiyor [...] yani bunun cevabı bence yok. <Şekil 47'de söylemini onaylayan görsel araçlar yer almaktadır.>

Söylemlerinde sıklıkla duraksamalar yaşayan Burcu'nun söylemlerinden tereddüt ettiği ve zihninde soru işaretleri olduğu gözlemlenmiştir. Bu nedenle BG-B4 kodlu birinci dereceden tek değişkenli çözme rutinine yönelik bu söylemleri katılımcının yetkinliğinin ritüel olduğuna yönelik bulgular sunmuştur. Benzer şekilde birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerini çözerken kullandığı BG-B7 ve BG-B8 kodlu rutinlerinde de prosedürünü nasıl sonlandıracağı konusunda güçlük yaşayan (örneğin, Tablo 36, Tablo 37 ve Tablo 38) Burcu bu durumu Tablo 38'de yer alan söylemlerinde de (örneğin, [181], [187], [189], [191]) sıklıkla belirtmiştir. Bu nedenle katılımcının BG-B7 ve BG-B8 kodlu rutinleri aracılığıyla söyleme katılımı da katılımcının yetkinliği açısından ritüel olduğunun birer örneği olmuştur.

Katılımcının rutinleri uygulanabilirlik açısından incelendiğinde, Burcu BG-B12 kodlu rutinini odak grup görüşmelerinde benzer görev durumlarına uygulamada güçlük yaşamıştır. Denklemin çözümlerinin birer tamsayı olması durumunda rutinini kolaylıkla uygulayan katılımcının denklemin çözümleri birer irrasyonel sayı olduğunda rutinini uygulamada güçlük yaşadığı (Şekil 74) ve bu durumu söylemlerinde belirttiği (örneğin, [42-GD14], [47-GD14]) görülmüştür. Bu nedenle katılımcının BG-B12 kodlu rutini uygulanabilirlik açısından söyleme katılımı ritüel katılımın bir örneğini temsil etmiştir. Buna rağmen katılımcı birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözme rutini olan BG-B5 kodlu rutinini odak grup görüşmelerinde farklı görev durumlarında kanonik bir şekilde uygulamıştır (Tablo 35). Bu nedenle katılımcının BG-B5 kodlu rutini uygulanabilirlik açısından söyleme katılımı keşifsel katılımın bir örneğini sunmuştur. Benzer şekilde katılımcının odak grup görüşmelerinde kullanmaya devam ettiği BG-B1, BG-B2, BG-B3, BG-B4, BG-B9, BG-B10 ve BG-B11 kodlu rutinleri ise uygulanabilirliği açısından keşifsel katılımın birer örneklerini sunmuştur. Bu rutinlerden denklem ve eşitsizlik tanımlama rutini olan BG-B1 kodlu rutin, katılımcının tanımına “değişken” terimini de eklemesiyle OG-B1 şeklinde kodlanırken ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme rutini olan BG-B10 kodlu rutini katılımcının alternatif bir yol daha kullanmasından dolayı OG-B3 şeklinde kodlanmıştır. Burcu’nun prosedürünü eksik ve hatalı bir şekilde uyguladığı BG-B8 kodlu rutini ise yine odak grup görüşmelerinde de benzer şekilde eksik ve hatalı bir şekilde tekrarlanmaya devam etmesinden ve kriter listesinde yer alan iletişimsel belirleyicilerin kapsamı dışında bir örnek sunduğu için herhangi bir katılım türüne dahil edilmemiştir. Ayrıca BG-B7 kodlu rutininin odak grup görüşmelerinde kullanımına rastlanmadığı için uygulanabilirliği konusunda yorum yapılamamıştır.

Bu bağlamda katılımcının kriterler bağlamında hangi rutinlerinin hangi katılım türü için örnek teşkil ettiği Tablo 45’te okuyucuya sunulmuştur.

Tablo 45

Burcu'nun Rutinleri Aracılığıyla Kriterler Bağlamında Bireysel Görüşmede Söyleme Katılım Türü

Kriterler	Ritüel katılım	Hibrit katılım	Keşifsel katılım
Söylemin Nesneleştirilmesi	BG-B1 BG-B2 BG-B4 BG-B5 BG-B6 BG-B7 BG-B8 BG-B9 BG-B10 BG-B12	BG-B3 BG-B11	
Esneklik	BG-B1 BG-B4 BG-B5 BG-B6 BG-B7 BG-B8 BG-B9 BG-B12		BG-B10
Bağlılık-Tutarlılık		BG-B4 BG-B7 BG-B8	BG-B5↔BG-B3 BG-B10↔BG-B3 BG-B12
Gerekçelendirme	BG-B7 BG-B8 BG-B10	BG-B2 BG-B9	BG-B3
Katılımcının yetkinliği	BG-B1 BG-B4 BG-B7 BG-B8 BG-B9		
Uygulanabilirlik	BG-B12		BG-B1 BG-B2 BG-B3 BG-B4 BG-B5 BG-B9 BG-B10 BG-B11

Sonuç olarak Burcu bireysel görüşmelere rutinleri aracılığıyla nesneleştirme, esneklik, gerekçelendirme ve katılımcının yetkinliği bağlamında çoğunlukla ritüel bir katılım

göstermesine rağmen, bağlılık-tutarlılık ve uygulanabilirlik bağlamında daha keşifsel bir katılım sergilemiştir.

Burcu'nun Odak Grup Görüşmelerindeki Rutinleri ve Söyleme Katılımına Yönelik Bulgular

Burcu'nun araştırmacı dahil altı kişiyle yürütülen ve 26 farklı görev durumu hakkında tartışılan odak grup görüşmelerindeki söylemleri incelenmiş ve katılımcının 11 farklı rutini tespit edilmiştir. Katılımcının odak grup görüşmelerinde söylemleri çoğunlukla matematiksel nesneleri manipüle etme hakkında ve süreç odaklı olmuştur. Burcu matematiksel iletişimini sıklıkla diğer katılımcılarla sosyal bir bağ kurmayı amaçlayarak sürdürmüştür. Bu nedenle katılımcının odak grup görüşmelerinde tespit edilen rutinlerinin 9'u ritüel, 2'si ise keşif olarak kodlanmıştır. Katılımcının tespit edilen 11 farklı rutininden 6'sı bireysel görüşmede de görülen ve rutin türü değişmeden uygulanan BG-B2, BG-B3, BG-B4, BG-B5, BG-B9 ve BG-B11 kodlu rutinleridir. Katılımcının diğer 5 rutininden 2'si katılımcının bireysel görüşmeden farklı olarak odak grup görüşmelerinde sergilediği OG-B4 ve OG-B5 kodlu rutinleridir. Diğer OG-B1, OG-B2 ve OG-B3 kodlu rutinleri ise sırasıyla bireysel görüşmede görülen BG-B1, BG-B8 ve BG-B10 rutinlerinin devamı niteliğinde olan ve rutinin türünü değiştirmeyecek şekilde farklılıklar içeren rutinleridir. Katılımcının denklem ve eşitsizlik kavramlarına yönelik odak grup görüşmelerindeki rutinleri aşağıdaki durumlarda görülmüştür:

- Denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken (ritüel rutin)
- Denklem ve eşitsizlik arasındaki ilişkiyi açıklarken (ritüel rutin)
- Çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken (keşif rutini)
- Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken (ritüel rutin)
- Birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken (ritüel rutin)

- Birinci dereceden iki değişkenli denklem (sistemi) ya da eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesinin elemanlarını belirlerken (ritüel rutin)
- İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken (ritüel rutin)
- İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken (ritüel rutin)
- İkinci dereceden tek değişkenli denklemin çözümlerinin varlığını belirlerken (keşif rutini)
- İkinci dereceden tek değişkenli bağıntıların grafiklerini çizerken (ritüel rutin)
- İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ya da eşitsizlik sistemlerini çözerken (ritüel rutin)

Burcu'nun bu durumlarda gözlemlenen 11 farklı rutini aracılığıyla söyleme katılım türü incelendiğinde, söyleme katılımı bireysel görüşmedekine benzer şekilde nesneleştirme, esneklik ve katılımcının yetkinliği bağlamında ritüel bir biçimde olmuştur. Katılımcının söyleme katılımı uygulanabilirlik açısından daha keşifsel iken, bağlılık-tutarlılık bağlamında üç farklı katılım biçiminin örnekleri eşit sıklıkta gözlemlenmiştir.

Burcu'nun odak grup görüşmeleri incelendiğinde katılımcının denklem ve eşitsizlik tanımını yaparken kullandığı BG-B1 kodlu ritüel rutininde değişikliklere rastlanılmıştır. Bireysel görüşmelerde denklem ve eşitsizliği değişkenden bağımsız bir şekilde sadece sembollere göre tanımlayan katılımcı odak grup görüşmelerinde "... ikisinde de bilinmeyen olması gerekiyor bu ikisinde de ortak, 111 denklemde eşittir sembolü olması gerekiyor. Eşitsizlikte de büyük-eşit, küçük-eşit, büyüktür veya küçüktür işaretlerinin olması gerekiyor yani ben böyle anlıyorum. [525-GD3]" şeklinde bir tanımlama yapmıştır. Bu söylemini GD1'de Şekil 59'daki gibi sözel bir gerçekleşme ile onaylayan katılımcı, " $2x + 3 = 5$ " cebirsel ifadesi için "Denklem [...] Değişkeni var, eşitlik de var. [156-GD5]" şeklinde bir söylemde bulunmuştur.

Cünkü "=" işareti var bir bilinmeyen de bulunduğu için denklemdir.

Şekil 59. Burcu'nun odak grup görüşmelerindeki denklem tanımına yönelik sözel gerçekleşmesi

Bununla birlikte katılımcının GD5'te " $-4(x - 7) = x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ " cebirsel ifadesi için kağıdına Şekil 60'taki gibi "açık önerme" yazdığı da görülmüş fakat katılımcı "açık önerme" şeklindeki sözcük kullanımını farkında olarak değil de önceki görev durumlarında arkadaşlarının söylemlerinden etkilenecek şekilde kullanmıştır. Araştırmacının "Burcu sen buraya açık önerme yazmışsın, neden böyle yazdın? [26]" sorusu üzerine aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

27. B: Çünkü [...] hani söyleyeyim [...] tüm veya bazı kelimeleri kullanılmamış, ters A ($\forall$) ve E ($\exists$) yani, şu an şey yapamadım [*gülmüşüyor*] sadece değişkenimizin reel [...] sayılardan olduğunu belirtmiş ben o yüzden açık önerme dedim.
28. A: Bu bir açık önerme mi?
29. B: Çünkü kesin (Z:Evet) bir sonuç çıkmıyor. Bize ne verirse ona göre yapıyoruz. [...] sonucumuzu ona göre, yani doğruluğu yanlışlığı bilemiyoruz ilk başta, ondan sonra biliyoruz.
30. A: Anladım, peki bu bir denklem midir?
31. B: Evet [...] denklem [*tedirgin*]

" $-4(x - 7) = x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ "
denkleminin çözümünde atacağın adımları
ve bu adımları niçin attığını paylaşır mısın?
Açık önerme

Şekil 60. Burcu'nun " $-4(x - 7) = x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ " cebirsel ifadesi için sözel gerçekleşmesi

Burada Burcu'nun denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduğunun farkında olmadığı [31] katılımcının ses tonu ve yüz ifadesinde gözlemlenmiştir. Odak grup görüşmesi sürecinde de sıklıkla arkadaşlarının söylemlerinden etkilenen katılımcının tutarsız söylemlerde bulunduğu ve arkadaşlarının söylemlerine güvendiği görülmüştür. Katılımcı arkadaşı Elif'i sıklıkla bir otorite olarak görse de mantıksal çıkarımlar yaptığını düşündüğü zamanlarda Zehra'yı da bir otorite olarak benimsemiştir. GD5'te açık önermelerin sadece "=" sembolünü içerdiğine yönelik fikrini arkadaşı Zehra'nın "Eşitsizlik içeremez mi? <Elif bir an şaşırıyor ve düşünüyor> [...] eşitsizlik de olabilir. [38]" şeklindeki önerisi üzerine değiştirdiğini,

70. B: “[gölerek] ya ben kafam karıştı yani bir eşitlik olmasını düşünüyordum ama ifadeyi böyle yazınca $-4(x-7) < x+5(3-x)$, $x \in \mathbb{R}$ eşitsizliğini kastediyor> bu da bir açık önerme olabilir diye düşündüm [gölerek] sözel olarak [...] Elif’e katılıyordum ama <Elif’i otorite olarak görüyor>

72. B: Böyle görünce ben de bir fark olmadığını düşündüm yani [gölerek] ama kafam karışık cevap veremeyeceğim.

...

96. A: Peki bunların her biri [tahtadaki $-4(x-7) \neq x+5(3-x)$, $x \in \mathbb{R}$, $-4(x-7) = x+5(3-x)$, $x \in \mathbb{R}$ ve $-4(x-7) < x+5(3-x)$, $x \in \mathbb{R}$ ifadelerini kastederek] birer açık önerme mi, Burcu?

97. B: [...] mmm yine açık önerme diyeceğim artık.

98. A: Neden?

99. B: Çünkü denklem açık önermeyse eşitsizlik neden olmasın [...] aynı hani nasıl söyleyeyim [...] çözümleyebiliyoruz bunları da [...] ikisinde de kesin bir hüküm belirtmiyoruz. <Zehra’nın söyleminden etkileniyor>

100. A: Zehra’nın söylediklerinden mi etkilendin yoksa?

101. B: Evet [gölerek] Elif’in dedikleri mantıksız geliyor şu an [gölerek]. <Elif hariç diğer katılımcılar gülüşüyor>

102. A: Zehra’nın dediklerine katılıyorsun, Elif’in dedikleri mantıklı gelmiyor diyorsun.

103. B: Yani tam şey yapamadım Elif’in dediklerini oturtamadım, o yüzden Zehra’ya katılıyorum.

104. A: Hım.

105. B: Ya Zehra böyle ikna edici konuşuyor.

şeklindeki söylemleriyle belirtmiştir. Bununla birlikte GD5’te odak grup görüşmesinin ilerleyen sürecinde denklem ve eşitsizlik kavramlarıyla açık önerme kavramı arasındaki ilişkiyi kurmada güçlük yaşayan katılımcı tutarsız söylemlerde bulunmuştur:

121. B: Yani her açık önerme denklem veya eşitsizliktir falan gibi bir şey olabilir mi? [tahmin ediyor, emin değil]

...

145. B: Bence her denklem bir açık önerme değil ki.

...

149. B: Çünkü x eleman reel sayı [tahtayı göstererek] o bir açık önerme [...] önerme, her denklem bir önerme bence ama açık önerme değil.

...

154. A: Doğrudur ya da yanlıştır diyebiliyor musun? [Tahtaya $2x+3=5$ ifadesini yazıyor] Şöyle yazdım, bu cebirsel ifade nedir peki?

156. B: Denklem. [...] Değişkeni var, eşitlik de var.

...

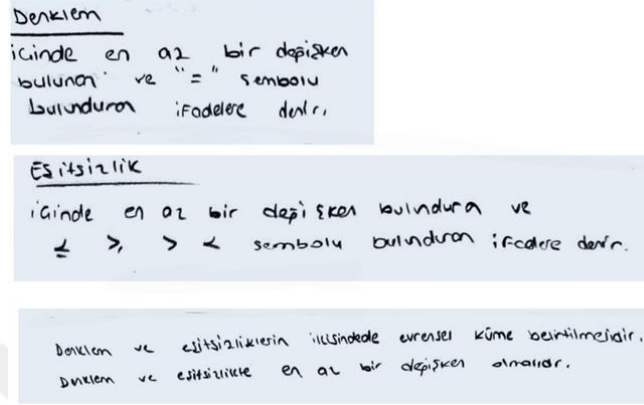
213. A: Böyle yazınca [$2x + 3 = 5$ ifadesine $x \in \mathbb{R}$ ifadesini ekliyor] [...] açık önerme mi?
214. B: Evet.
215. A: Ama az önce <Şule gülüyor> neler diyordun az önce [gülerek] Burcu?
216. B: Ben ne dedim? [Arkadaşlarına bakıyor, arkadaşları gülüyor] [...] ama hocam [...]
217. A: Burcu sen az önce denklem bir önermedir dedin hatta. <Şule gülüyor>
218. B: Hayır dedim ki her denklem önerme değildir [dediğinden emin değil]
- ...
221. A: O zaman her denklem açık önerme değilse, bazı denklemler önerme olabilir.
222. B: Evet onu demek istedim.
- ...
224. A: Bize önerme olan bir denklem söyle.
225. B: Tamam [...] söyleyeyim. Eh şimdi hocam o yukarıda yazılanı [görev durumunu göstererek] [...] o x elemanı R yazanın başına A harfi getirelim [...] şu ters A oluyor ya, ben söyleyemiyorum, her ($\forall$).
226. A: Ha, onu tabi getirsen önerme olur ama (Z : Denklem mi?) o haliyle bir denklem midir?
227. B: Evet hocam!
- ...
230. B: Neden olmasın ya! [Arkadaşlarına kızarak] <Derya gülümsüyor arkadaşına>
231. A: Neden olmasın diyor.
232. Z: Ama! [...] şey ya o haliyle [...] sonuçta o hocanın kastı şeydi, denklemin o kısmına o eşitlik içeren iki x artı üç eşittir beş kısmına bir şey yap ki o [...] normal önerme olsun diyor. Sen bu sefer bunun o küme belirttiği kısmına bir şey yaptın.
233. B: Tamam çünkü o bir denklem zaten [gülerek] ben zaten [iki eliyle yüzünü kapatarak]
234. A: Buraya [görev durumunda x in başına $\forall$ yazıyor] her koyduğunda bu hala bir denklem olur diyor, katılıyor musunuz?
- ...
236. B: Denk [...] önermeli denklem, denklem önermesi <arkadaşları bu cevaba gülüşüyor>
237. A: Denklem önermesi diyor [gülerek]
238. E: Yeni bir şey duyacağız yeni bir kavram [alay edermişçesine gülerek]
239. B: Yaa offff yaa [...] ama beni zorluyorlar, anlamadılar mı dediğimi yani siz [kızarak] [...] kızlar yani geçen ders biz buna önerme demiştik [sinirli] [...] yani gerçekten [kızarak]
242. A: Önerme denklem midir [...] yani-
- ...
245. B: Evet denklem yani neden olmasın [gülerek]
246. A: Sana göre denklem.
247. B: Evet hocam neden olmasın, eşitlik var, değişken var, değişkenin nerede olduğunu söylemiş. <“ $2x + 3 = 5, \forall x \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesi hakkında konuşurken>

Burada Burcu bireysel görüşmedeki gibi kavramı süreç odaklı tanımladığı bireysel görüşmeden farklı olarak değişkenin de var olması gerektiğini vurgulamıştır [247-GD5].

Bireysel görüşmesinde Burcu, “tanım aralıkları [6]”, “eleman aralığı [98]”, “belirli bir aralık verilmişse” ve “belirli bir aralık dahilinde” şeklindeki ifadeleriyle (örneğin, Şekil 39) denklem ve eşitsizliklerde yer alan değişkenin ait olduğu evrensel kümeyi kastetmiş olmasına rağmen bu ifadelerin değişkeni temsil ettiğine dair katılımcının herhangi bir söylemine rastlanmamıştır. Buna rağmen odak grup görüşmesinde denklem ve eşitsizliklerin değişken içermesi gerektiğini belirten (örneğin, Şekil 61) Burcu’nun “...değişken hani yerine yazdığımızda hani istediğimiz sonuç çıkıyor ya o değişken [68-GD2]” şeklindeki değişken tanımına rastlanmıştır. Bununla birlikte GD5’te yer alan cebirsel ifade “ $x \in \mathbb{R}$ ” ifadesinin olması gerektiğine yönelik “... çözüm kümesinde bir şey bulamayız ki hani ya da hangi kümede olduğunu bilmediğimiz için işe yaramaz yani. [385-GD5]” ve “Söylenemezse anlayamayız ki hani çözüm kümesindeki eleman onu (*denklem ya da eşitsizliği*) sağlar mı sağlamaz mı bilemeyiz. [388-GD5] şeklinde söylemlerde bulunmuştur. Burcu’nun bireysel görüşmedeki gibi değişkenin ait olduğu kümenin çözüm kümesindeki elemanlar için önemli olduğuna vurgu yapan süreç odaklı söylemleri dikkat çekmiştir. Bu nedenle katılımcının bu söylemleri, Burcu’nun denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olmasında kaynaklı değişken içerdiğinin farkında olmadığını göstermiştir. Bununla birlikte Burcu zaman zaman denklem ve eşitsizlikler için “açık önerme” terimini kullansa da katılımcının görüşmeler sürecindeki söylemleri sembollere odaklı bir tanım yaptığını göstermiştir. GD23’te araştırmacı ile arasında aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

15. A: Burcu tahtada gördüğün ifade nedir? <“ $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ ” ifadesini kastederek>
16. B: Eşitsizlik.
17. A: Nereden anlıyorsun eşitsizlik olduğunu?
18. B: Evet çünkü şöyle bir tane değişkenimiz var [...] bir de direkt sembolden anladım zaten.
19. A: Peki bu bir açık önerme midir?
20. B: Evet açık önerme.

Katılımcının tüm odak grup görüşmeleri sonunda denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımladığı Şekil 61'deki sözel gerçekleşmesi de rutininin süreç odaklı olduğunu onaylamıştır:



Şekil 61. Burcu'nun denklem ve eşitsizlik kavram tanımına yönelik sözel gerçekleşmesi

Burcu'nun odak grup görüşmesindeki söylemleri değişken ve bilinmeyen kavramları arasında cebirsel ayrımı yapmaya başladığını göstermiş ve katılımcı GD2'de evrensel kümenin temsil ettiği gösterimler için değişken kavramını kullanırken, çözüm kümesinin elemanlarını temsilen bilinmeyen kavramını kullanmıştır:

68.B: Hocam u orada değişken hani yerine yazdığımızda hani istediğimiz sonuç çıkıyor ya o değişken, bilinmeyen de u 'yu [...] sağlayan hani. < “ $11 + 2(u - 3) = 2u + 5, u \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesi hakkında konuşurken>

69. A: u 'nun karşılığı olan mı?

70. B: u 'nun karşılığı olan.

Arkadaşı Şule'nin “Şimdi burada [...] $ax^2 + bx + c$ de c de bilinmeyen olmaz mı? Çünkü c çarpı x üzeri sıfır sonuçta. [73-GD2]” önerisi üzerine Derya'nın a, b 'nin katsayı olduğunu düşünüyorum [...] x 'in değişken olduğunu [...] c , sabit terim. [83-GD2]” söylemine katıldığını “Ben Derya ile aynı fikirdeyim, a ve b katsayı bilinmeyen değil [85-GD2]. Ben bilinmeyeni u [...] yani u 'nun yerine koyduğumuzda sağlayabilen değerler diye düşünüyorum [91-GD2].” şeklinde belirtmiştir. Benzer şekilde GD3'te “ $11 + 2(y - 3) > 7, y \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesinde yer alan y gösterimi için “Değişken [70-GD3]” diye isim atayacağını belirterek “... ve sonuçlar bilinmeyen oluyor herhâlde, yani y 'yi sağlayan

değerler bilinmeyen oluyor [77-GD3]” şeklindeki söylemleriyle bilinmeyen kavramını tanımlamıştır. Her ne kadar katılımcının “bilinmeyen” tanımı kanonik olsa da bu söylemlerin devamının olmaması, “...diye düşünüyorum”, “...oluyor herhalde” gibi kendinden emin olmayan ifadeleri içermesi ve görsel araçlarla onaylanmamasından dolayı bir rutin olarak kodlanmamıştır. Rutin olarak kodlanmamasına başka bir sebepse, ilerleyen görüşmelerde GD15’te Burcu’nun “ $(m + 1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0, m \in \mathbb{R} - \{-1\}, x \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesinde yer alan m gösteriminin “bilinmeyen” i temsil ettiğini belirtmesi olmuştur.

Katılımcı denklem ve eşitsizlik kavramları arasındaki ilişkiyi açıklarken kullandığı BG-B2 kodlu rutinini uygulamaya devam etmiştir. Bireysel görüşmede çözüm kümesindeki eleman sayılarını kıyaslayarak “... her eşitsizlik bir denklemdir [12]” şeklinde kanonik olmayan anlatılar üreten katılımcı, odak grup görüşmelerinde arkadaşlarıyla olan iletişimlerine rağmen yine çözüm kümesindeki elemanları kıyaslayarak “...küçük-eşit ya da büyük-eşit olanların içinde denklem bulundurduğunu düşünüyorum [128-GD23]” şeklinde kanonik olmayan anlatılar üretmiştir. GD23’te “ $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan (varsa) x reel sayılarının kümesini bulunuz.” şeklindeki görev durumu hakkında konuşurken araştırmacı, Burcu’nun bireysel görüşmesini hatırlatarak “Önceki görüşmelerimizde şey diyordun hep, eşitsizlik bir denklemdir. [21-GD23]” şeklinde bir söylemde bulunmuştur. Bunun üzerine Burcu, “Evet çünkü şöyle, 111 denklemini [...] denklemini yazdığımızda mesela bir tane denklem sağlıyor [...] mesela o sıfır olsun [...] ama eşitsizlik yazdığımızda mesela eksi birle bir arasında oluyor ve zaten sıfırı sağlıyor [zihninden örnek vererek açıklama yapıyor] aslında her eşitsizlik bir denklem oluyor. [22-GD23]” ve “Evet hala bu fikirdeyim ve eşitsizlik denklemden daha fazla bir alan kapsıyor. [24-GD23]” şeklinde bireysel görüşmedekine benzer söylemlerde bulunmuştur. Arkadaşlarının Burcu’ya katılmadıklarını belirtmesi üzerine katılımcı kendi düşüncesini savunmaya devam etmiş ve diğer katılımcılarla arasında aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

25. A: Katılıyor musunuz bu fikre? <Burcu'nun "Her eşitsizlik bir denklemdir" şeklindeki anlatısını kastederek>
26. Z: Hayır.
27. E: Ama sonuçta denklemin tanımında eşitlik içeren diyor o yüzden diyemeyiz.
28. Z: Evet başta tanımdan dolayı [...] eşitlik içeren [...] diyor ve o yüzden bu eşitsizlik.
29. B: Ben o kısmı savunuyorum şu an. Çünkü dediğim gibi eşitsizlikte bir aralık belirtiyoruz ve o mesela sıfır dersem, [arkadaşlarına dönüyor ve parmağıyla onları gösteriyor] aslında siz de eminim böyle düşünüyorsunuz. Çünkü köklerini neden buluyoruz, denklemi sağlayan diye [...] sıfır bul- [...] ayy konuşamadım [...] denklem olarak düşünseydik eğer köklerini zaten buluyorduk, bunda da bulmak zorundayız ki aralığını belirleyelim. O yüzden bence her eşitsizlik bir denklem oluyor [ifade etmekte güçlük yaşasa da arkadaşlarına heyecanla açıklamaya yapıyor]
30. Z: Her eşitsizlik bir denklem mi? [Şaşıracak]
- ...
33. A: Burcu'ya göre eşitsizlikler birer denklem.
34. B: Evet arkadaşlar, hala şu an öyle düşünüyorum.
35. A: Katılıyor musunuz, değilse Burcu'yu olmadığına ikna edin.
36. Z: Şimdi Burcu karşıda ne görüyorsun [görev durumunda yer alan $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ ifadesini göstererek] ifadeye bak iyi bak, orada şimdi bir de denklem ve eşitsizliğin tanımlarını hatırlayalım. Denklemin tanımında diyor ki en az bir değişken ve bir eşitlik içeren ifade diyor [...] ve eşitlik dediğimiz şey eşittir işareti zaten [...] ve bu eşitsizliğin tanımında da diyor ki bir değişken ve eşitsizlik içeren diyor [...] eşitsizlikte bu dört tane sembolümüz var onlar eşitsizlik zaten-
37. B: Tamam da bak sıfıra eşit diyorsunuz zaten [$\geq$ sembolündeki eşit durumunu kastederek] niye diyorsunuz?
38. E: Sıfıra eşit ya da büyük diyoruz yani sıfıra eşit olmak zorunda değil.
39. Z: Tamam bak onu düşünmeyelim. Şimdi o eşitliği silsek o da mı bir denklem mi? [Burcu'ya soruyor]
40. B: Tamam da bak o zaman şöyle düşün biz neden bu eşitsizlikte siz direkt köklerini bulacaksınız değil mi, x, x diye ayıracaksınız eksi üçe eksi bir. $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulmak için $-x^2 + 4x - 3 = 0$ denkleminin köklerini bulacağını belirtiyor>
41. Z: evet, evet.
42. B: Sonra x üç gelecek ve x [...] bir gelecek [...] tamam da niye bunları buluyorsunuz?
43. E: Onu yapmamızın sebebi ama orada biz çözüm kümesini [...] şey yapmıyoruz yani ıı sıfıra eşitlediğimiz de çözüm kümesi o bulduğumuz o bulduğumuz kökler olmuyor ki zaten, biz orada sadece sıfıra göre bakıyorduk, işaret belirlemek için.
44. B: Tamam olmuyor ama onları bazen kapsıyor.
- ...

49.B: Bilmiyorum hala ikna olmadım çünkü dediğimin doğru olduğunu düşünüyorum, bence yanlış değil, bilmiyorum şu an kafam karıştı. <Zehra ve Derya bu sırada aralarında bir şeyler konuşuyor>

50. E: Ya da şöyle düşün orada sadece büyük-eşittir değil de büyüktür olsaydı ne diyecektik ki?

51. Z: Yani senin dediğine göre bütün eşitsizliklerde hep büyük-eşit ya da küçük-eşit olmalı ve büyüktür ve küçüktür olan eşitsizlikler de var.

52. B: Tamam da ben birkaç tane örnek yazdığımı hatırlıyorum yani, düşündüm öyle mantıklı gelmişti. Mesela eşitsizlik yazdığımızda bir aralık belirtiyor <arkadaşları kafa sallayarak onaylıyor> ama denklemde sadece bir [...] ını onu sağlayan değerleri buluyoruz.

53. A: Hem denklemin hem de eşitsizliğin çözüm kümesi boş küme olamaz mı?

54. Z: Olabilir.

55. B: Olur [...] Ama o zaman yine sağlanmış olmuyor mu?

Burada Burcu arkadaşlarının eşitsizliklerin birer denklem olmadığını ifade eden tüm önerilerine ve gerekçelerine (örneğin, [36-GD23], [39-GD23], [43-GD23], [50-GD23] ve [51-GD23]) rağmen bireysel görüşmede verdiği örneklerle (örneğin, Şekil 43) atıf yaparak [52-GD23] kafa karışıklığına rağmen rutinin değişmediğini [49-GD23] belirtmiştir. Bununla birlikte katılımcının çözüm kümelerini kıyaslayarak (örneğin, [22-GD23]) her eşitsizliğin bir denklem olduğunu belirtmesinde, bireysel görüşmede Şekil 41 ve Şekil 43'te verdiği örnekleri " $\leq, \geq$ " gibi sembolleri içeren örneklerin etkili olmuştur. Çünkü Burcu arkadaşlarının GD23'teki açıklamalarından sonra GD25'te sadece " $\leq, \geq$ " sembollerini içeren eşitsizliklerin birer denklem olacağına dair söylemlerine devam etmiştir:

123. A: Şimdi dünkü fikrinde değişim var mı yoksa aynı mı düşünüyorsun?

124. B: Var artık değişimler beni ikna ettiler yavaş yavaş [gülerek] ben kendim biraz daha kendimce örnekler yaptım ama dediğim şey sanırım sadece küçük-eşittir, büyük-eşittir olanlarda oluyor.

125. A: Peki onlar sence denklem midir? [$\leq, \geq$ sembollerini içeren eşitsizlikleri kastederek]

126. B: Bence onlar denklem ama hepsini genelleyemem [...] ama bence hala-

127. Z: Hepsini genelleyemezsen denklem değildir zaten.

128. B: Hayır, küçük-eşit ya da büyük-eşit olanların içinde denklem bulundurduğunu düşünüyorum o zaman niye küçük-eşittir [eşittir ifadesini vurgulayarak] diyoruz.

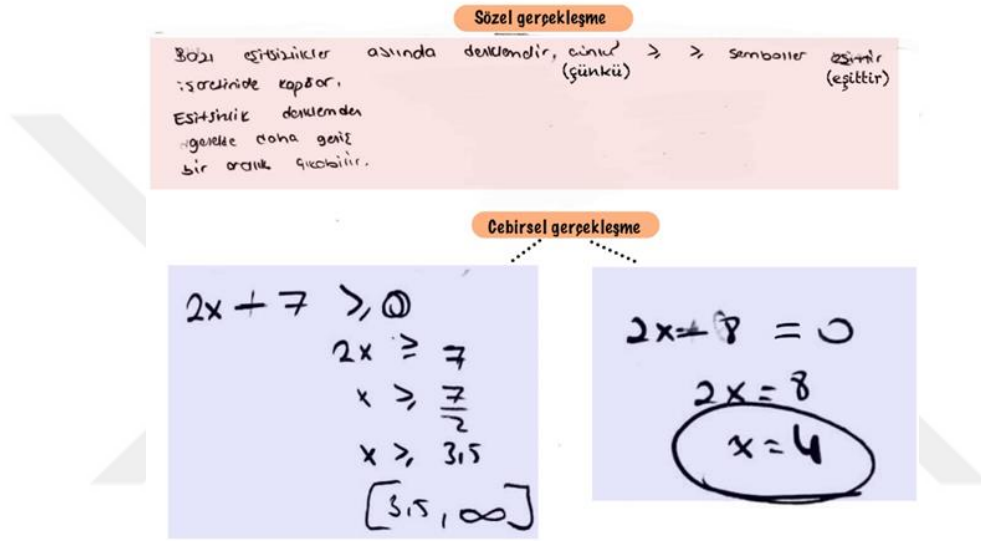
...

130. D: O sadece çözüm kümemize dahil edebilmemiz için.

131. B: Eee tamam da bak küçük-eşittir diyoruz ki-

132. Z: Denklem ve eşitsizlik farklı kavramlar hocanın dediği gibi tanımlara bakmamız gerekiyor.

Burcu'nun oturumlar sonrasında da “Denklem ve eşitsizlik kavramları arasında sizce bir ilişki var mıdır? Var olduğunu düşünüyorsanız bu ilişkiyi/ilişkileri örnek vererek açıklayınız.” sorusunu tekrar yazılı olarak yanıtlaması istendiğinde katılımcı BG-B2 kodlu rutinini sergilemiştir. Burcu'nun oturumlar sonrasında BG-B2 kodlu rutinine yönelik sözel ve cebirsel gerçekleşmesi Şekil 62'deki gibidir:



Şekil 62. Burcu'nun denklem ve eşitsizlik arasındaki ilişkiyi ifade eden görsel araçları

Burcu'nun bireysel görüşmede olduğu gibi odak grup görüşmelerinde de en sık kullandığı rutini BG-B3 kodlu keşif rutini olmuştur. Katılımcı rutinini çözüm kümesi veya çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken farklı görev durumlarında sıklıkla kullanmıştır. Burcu, GD2'de “ $11 + 2(u - 3) = 2u + 4$, $u \in \mathbb{R}$ ” denkleminin çözüm kümesi hakkında konuşurken “... u 'nun yerine ne yazarsak yazalım hiçbir sonuç doğru çıkmıyor yani sağlamıyor, u elemanı olarak hiçbirini sağlamadığı için bizim hiç elemanımız kalmadığı için boş küme diyoruz. [424-GD2]” şeklinde bir söylemde bulunurken GD5 için çözüm kümesinin boş olması durumunu “ x yerine bir yazsak da iki yazsak da [...] eşit olmuyor hiçbir türlü. [435-GD5]” şeklinde bir söylemde bulunmuştur. Başka bir örnekte ise GD15'te ikinci dereceden tek değişkenli bir denklemin çözüm kümesi hakkında

konuşurken “...denklemin kökü onu sağlayan oluyor [283-GD15]” biçiminde bir söylemde bulunmuştur. Bununla birlikte, GD7’de “ $z - 3 > \frac{4+z}{5}, z \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğine dair prosedürünü tahtada arkadaşlarıyla paylaşma fırsatı bulan katılımcının Şekil 63’teki prosedürü sonucunda elde ettiği $(\frac{19}{4}, \infty)$ aralığı için “Çözüm kümesini belirten elemanların bulunduğu aralık [101-GD7]”, “Bunun $[(\frac{19}{4}, \infty)$ ifadesini göstererek] içindeki elemanlar çözüm kümesinin elemanları. [108-GD7]”, “O yüzden bu bir çözüm kümesi [110-GD7]”, “...bunun $[(\frac{19}{4}, \infty)$ ifadesini göstererek] içindeki elemanların hepsi çözüm kümesinin elemanları [112-GD7]” ve “Altı bunu sağlıyor ya o çözüm kümesinin elemanı. [118-GD7]” şeklinde söylemleri sıklıkla kullanmıştır. Katılımcı “ $z - 3 > \frac{4+z}{5}, z \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğinde z ’nin değişkeni temsil ettiğini ve çözüm kümesinin elemanlarını z yerine yazdığında sağlayacağını “Yerine yazdığımda doğru çıkar. [124-GD7] ... değişkenimizde z ’de [126-GD7]” şeklinde tekrar belirtmiştir. Benzer şekilde GD3’te “ $11 + 2(y - 3) > 7, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğine dair prosedürünü tahtada paylaşan Burcu, “ $y > 1$ ” gerçekleşmesi ile prosedürünü sonlandırmış ve “... y ’den büyük sayılar ııı yani y büyüktür bir [...] birden büyük olan sayılar ıııı eşitsizliğimizde yerine yazıldığında bu eşitsizliği sağlar [196-GD3]” söyleminde bulunmuştur. Katılımcının prosedür sonuç ilişkisini kanonik bir şekilde kurduğu söylemlerini içeren eşitsizlik çözme prosedürü ise Tablo 46’da yer almaktadır.

Tablo 46

Burcu'nun Eşitsizlikleri Çözme Prosedürü

Görev durumu 3: " $11 + 2(y - 3) > 7, y \in \mathbb{R}$ " eşitsizliğinin çözüm kümesini belirlerken attığın adımları paylaşır mısın?"

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

171. B: Evet, her taraftan on bir çıkaracağım (gerçekleşme 1).

178. B: Tamam ıı bu tarafımızda [eşitsizliğin sol tarafını gösteriyor] sıfır artı parantez için iki çarpı y eksi üç büyüktür eksi dört kaldı (gerçekleşme 2).

183. B: Her tarafı ikiye böldükten sonra şöyle yapayım (gerçekleşme 3).

186. B: Bu tarafta y eksi üç büyüktür eksi iki kaldı (gerçekleşme 4).

188. B: Böyle yani [gerçekleşme 4'ü işaret ediyor] Sonra ben şu parantezi kaldırdım (gerçekleşme 5). Her tarafa üç ekleyeceğim bu kez. Bu tarafta y kalıyor [...] ıı öbür tarafta da bir kalıyor (gerçekleşme 6).

196. B: Ne oldu? [...] ıı y'den büyük sayılar ıı yani y büyüktür bir [...] birden büyük olan sayılar ııı eşitsizliğimizde yerine yazıldığında bu eşitsizliği sağlar.

215. B: Evet, aralık belirteyim mi isterseniz? (Gerçekleşme 6'yı yazıyor).

217. B: ıı olabilecek yani yerine yazdığımızda sağlayabilecek ıı sayılar [...] reel sayılar.

$$11 + 2(y - 3) > 7 \quad \dots \text{Gösterge}$$

$$11 - 11 + 2(y - 3) > 7 - 11 \quad \dots \text{Gerçekleşme 1}$$

$$2(y - 3) > -4 \quad \dots \text{Gerçekleşme 2}$$

$$\frac{2(y - 3)}{2} > \frac{-4}{2} \quad \dots \text{Gerçekleşme 3}$$

$$(y - 3) > -2 \quad \dots \text{Gerçekleşme 4}$$

$$y - 3 > -2 \quad \dots \text{Gerçekleşme 5}$$

$$y > 1 \quad \dots \text{Gerçekleşme 6}$$

$$(1, \infty) \quad \dots \text{Gerçekleşme 7}$$

Görev durumu 7: " $z - 3 > \frac{4+z}{5}, z \in \mathbb{R}$ " eşitsizliğinin çözüm kümesini belirlerken attığın adımları paylaşır mısın? Bu çözüm kümesi bir aralık mıdır? Cevabının gerekçesini/lerini açıklar mısın?"

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

45. B: Şimdi [...] beş çarpı [...] ben bunu $[z - 3]$ ifadesini göstererek parantez içinde yazıyorum çünkü öyle dağıtacağım, z eksi üç büyüktür beş çarpı dört artı z bölü beş (gerçekleşme 1). Hocam bunu $[5'i kastederek]$ buraya dağıttığımda $[(4 + z)$ ifadesini kastederek] tekrar buradan aynı şey çıkacak. O yüzden direkt hani beş bölü bir. [...] Böyle yazarsam birbirini götürür [gerçekleşme 1'deki pay ve paydadaki 5 sayısının üzerini çizerek] [...] bölündüğünde sadeleşiyor.

73. B: Şimdi ben parantezi dağıtıyorum. Yani her elemanı beş ile çarpacağım

79. B: Beş z eksi on beş büyüktür (gerçekleşme 2) ıı dediğim gibi böldüğümüzde çarptık şunları [...] uzun uzun yapayım mı, gerek var mı?

81. B: Hı hım, tamam [...] dört artı z (gerçekleşme 2) [...] ıı ben her tarafa [...] her tarafa eksi z ekleyeceğim [...] z çıkartacağım, her taraftan z çıkartacağım (gerçekleşme 3).

89. B: Tamam. Beş z eksi z eksi on beş büyüktür dört art z eksi z (gerçekleşme 3) [...] çıkarttım [eşitsizliğin sağ tarafındaki z yi göstererek] ıı bura dört z eksi on beş büyüktür dört [...] dört (gerçekleşme 4). [...] Ben bu kez de her tarafa on beş ekleyeceğim (gerçekleşme 5) ıı ondan sonra yani dört z ıı büyüktür on dokuz oldu (gerçekleşme 6)

$$z - 3 > \frac{4+z}{5}, z \in \mathbb{R} \quad \dots \text{Gösterge}$$

$$5 \cdot (z - 3) > 5 \cdot \frac{(4+z)}{5} \quad \dots \text{Gerçekleşme 1}$$

$$5z - 15 > 4 + z \quad \dots \text{Gerçekleşme 2}$$

$$5z - 2 - 15 > 4 + z - 2 \quad \dots \text{Gerçekleşme 3}$$

$$4z - 15 > 4 \quad \dots \text{Gerçekleşme 4}$$

$$4z + 15 - 15 > 4 + 15 \quad \dots \text{Gerçekleşme 5}$$

$$4z > 19 \quad \dots \text{Gerçekleşme 6}$$

[...] her tarafı da dörde böleceğim (gerçekleşme 7) [...] evet dörde böleceğim [...] ya da bir bölü dört ile çarpacağım. 11 [yazmaya devam ediyor] <Sonrasında hiç konuşmadan gerçekleşme 8'i yazıyor ve işlemini tamamlayıp gerçekleşme 9'u yazıyor>

91. B: Aralık belirtiyor bu da $[(\frac{19}{4}, \infty)$ ifadesini göstererek]

101. B: Çözüm kümesini belirten elemanların bulunduğu aralık [gölerek].

108. B: Ben bunun çözüm kümesi $[(\frac{19}{4}, \infty)$ ifadesini göstererek] daha doğrusu şöyle söylemek istiyorum. Hani bunun [...] burada $[(\frac{19}{4}, \infty)$ ifadesini göstererek] bir sürü eleman var, biz şu ana bunun hepsini yazmamıza gerek yok. O yüzden zaten bu aralığı belirttik. Bunun içindeki elemanlar çözüm kümesinin elemanları.

110. B: O yüzden bu bir çözüm kümesi ya [...] çözüm kümesi.

.....Gerçekleşme 7

.....Gerçekleşme 8

.....Gerçekleşme 9

Bununla birlikte katılımcı çözüm kümesi sonsuz elemanlı olan birinci dereceden tek değişkenli denklemlerin çözüm kümesi için bireysel görüşmedekine benzer şekilde görsel araçları kullanmıştır. GD2’de odak grup görüşmesinde arkadaşlarının prosedürlerini paylaşmasından sonra kendi gösteriminin doğru olmadığını,

135. B: Ben de başta parantezi dağıttım, on bir artı iki u eksi altı eşittir iki u artı beş oldu (gerçekleşme 1) sonra on bir 111 şu taraftaki işlemi yapıyorum [eşitliğin sol tarafını göstererek] on bir eksi altıdan beş artı iki u kaldı öbür tarafta da iki artı beş kaldı (gerçekleşme 2) yani ikisi birbirine eşit [...] eee ben bir şey eklemedim. (A:hı hı) aynı oldukları için u yerine ne yazarsam yazayım [araştırmacıya onay istercesine bakıyor, tane tane konuşuyor] (A:Hı hı) 111 tüm sayılar sağladığı için [duraksıyor] [...] normalde her reel sayıyı sağlar yazdım (sözel gerçekleşme) ama buraya (gerçekleşme 3’ü kastederek) unuttum $\mathbb{R}$ yazmayı sonsuz (gerçekleşme 3) yazdım ama bu gösterimin (gerçekleşme 3’ü kastederek) doğru olduğunu düşünmüyorum.

şeklinde belirtmiştir. Katılımcının GD2 için kağıdında yer alan görsel araçları ise Şekil 63’teki gibidir:

"11 + 2(u - 3) = 2u + 5, u ∈ ℝ" ... Gösterge

11 + 2u - 6 = 2u + 5 Gerçekleşme 1

5 + 2u = 2u + 5 Gerçekleşme 2

C.K = {∞} Gerçekleşme 3

Her ∈ ℝ sayı Sözel gerçekleşme

Şekil 63. Burcu'nun GD2 için uyguladığı prosedür ve kullandığı görsel araçları

Kendi gösteriminin doğru olmadığını belirten Burcu, sonsuz elemanlı çözüm kümesi gösteriminde arkadaşlarının kullandığı görsel araçlardan hem $\mathbb{R}$ hem de $\{\mathbb{R}\}$ gösteriminin denk olduğunu "ııı ben köşeli parantez içindeki R'yi doğru buluyorum, öbür R'yi de doğru buluyorum. [216-GD2]" şeklinde ifade etmiştir. Burada katılımcı arkadaşlarının söylemlerinden etkilenecek sosyal bir bağ kurma amacıyla söylemlerde bulunmuştur.

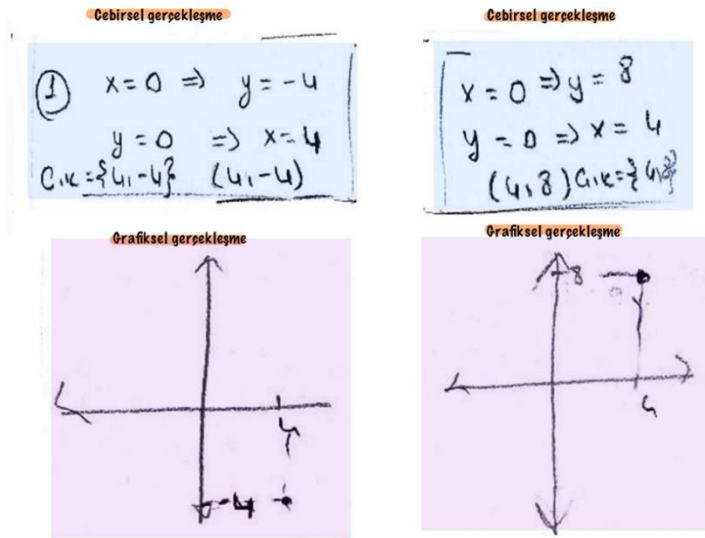
Burcu'nun birinci dereceden denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürü (örneğin, [135-GD2], Tablo 46 ve Tablo 47) incelendiğinde ise katılımcı bireysel görüşmedeki gibi insani eylem içeren ifadeleri, zamirleri ve zarfları sıklıkla kullanmıştır. Denklem ya da eşitsizliklerde yer alan " $=, >, <, \leq, \geq$ " gibi sembollerin sağ ve sol tarafında yer alan cebirsel ifadeleri temsilen "her taraf", "şu taraf", "öbür taraf" ifadelerini kullanırken dağılma özelliği için sıklıkla "parantezleri dağıtmak", sadeleşme özelliği için "birbirini götürmek" şeklinde eylem içeren ifadeleri kullanmıştır. Bununla birlikte matematiksel nesneleri temsilen "bu, şu, o" gibi zamirleri kullanan Burcu, "ekleyeceğim", "çıkaracağım", "çarpacağım" gibi insani eylem içeren ifadeler eşliğinde prosedürünü uygulamıştır. Burcu'nun bu söylemlerini içeren prosedürleri için Tablo 46'ya ek olarak katılımcının GD1'de yer alan " $11 + 2(x - 3) = 7, x \in \mathbb{R}$ " biçimindeki birinci dereceden denklem çözme prosedürü ise Tablo 47'de yer almaktadır.

Tablo 47

Burcu'nun Birinci Dereceden Tek Değişkenli Denklem Çözme Prosedürü

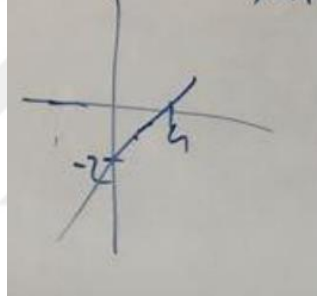
Ne söylüyor?	Ne yapıyor?
185. B: Ben parantezi dağıtmadan yaptım.	$11 + 2(x-3) = 7$... Gösterge
187. B: On bir artı iki parantez içinde x eksi üç eşittir yedi (<i>göstergeyi yazarak</i>) İlk başta on biri karşıya attım (<i>gerçekleşme 1</i>).	$2(x-3) = 7-11$... Gerçekleşme 1
189. B: Hıı hıımm, sesim gitti [<i>hafif öksürüyor</i>] iki çarpı parantez içinde x eksi üç eşittir eksi dört oldu (<i>gerçekleşme 2</i>).	$2(x-3) = -4$... Gerçekleşme 2
191. B: [...] o zaman ikiye karşıya atıyorum [...] x eksi üç eşittir eksi iki (<i>gerçekleşme 3</i>) x de bir geliyor (<i>gerçekleşme 4</i>).	$x-3 = -2$... Gerçekleşme 3 $x = 1$... Gerçekleşme 4

Burcu birinci dereceden iki değişkenli denklemlerin çözüm kümesini analitik düzlemde belirlerken de bireysel görüşmedeki BG-B8 kodlu rutinini uygulamıştır. Bireysel görüşmede denklemlerin düzlemde belirttiği doğruları çizmesine rağmen Burcu, doğruların eksenleri kestiği noktaları sıralı ikili şeklinde yazmış ve bu noktaların denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanları olduğunu belirtmiştir (örneğin, Tablo 38, [189] ve [191]). Katılımcı odak grup görüşmelerinde de GD9'da yer alan " $x - 2y = 4 \wedge y + 2x = 8$, $x, y \in \mathbb{R}$ " denklemlerinin çözüm kümesini belirlemek için Şekil 64'teki gibi benzer bir prosedür uygulamıştır.



Şekil 64. Burcu'nun GD9'a yönelik prosedürünün görsel araçları

Burcu odak grup görüşmesinde bu kez doğruları çizmeden, doğruların eksenleri kestiği apsis ve ordinattan oluşan sıralı ikilileri çözüm kümesinin elemanı olarak yazmıştır. Katılımcı uyguladığı prosedürü “Şöyle [...] şimdi x ve y ’nin ayrı ayrı sağlayan değerlerini bulacağız. [21-GD9] Nokta olarak bunları bulacağız. [23-GD9]” şeklinde söylemleriyle de belirtmiştir. Arkadaşı Derya’nın “ $x - 2y = 4$ ” denkleminin çözüm kümesinin elemanlarını belirlemek için Şekil 65’teki gibi analitik düzlemde çizdiği doğruya yönelik “Ben bunu yapmam yani [140-GD9] Ben sadece noktalarını yazarım çözüm kümesi içine ama bu analitik düzlemde doğruyu çizmem [142-GD9]”, “Evet hani sadece x ’e sıfır verip y ’yi bulurum, y ’ye sıfır verip x ’i bulurum [113-GD9]” ve “Ayrı ayrı nokta olarak düşünüyorum ben bunları [...] evet nokta olarak düşünüyorum. [178-GD9]” şeklinde prosedürünü ortaya koyan söylemlerde bulunmuştur.



Şekil 65. “ $x - 2y = 4$ ” denklemine dair görsel aracı

Görüşme sürecinde katılımcı görev durumunda yer alan denklemlerin bir denklem sistemi oluşturduğunun farkına sonradan varmış ve bu durumda izleyeceği prosedürü,

27. B: O noktalar mesela yani bir nokta olacak, ikisini de sağlamak zorunda [...] ben onu bulmadım, sadece ayrı ayrı buldum. Ama sonradan bulmamız gerektiğini fark ettim “ve” ($\wedge$ bağlacını kastederek) dediği için.

...

29. B: İkisini de sağlatmamız gerekiyor, evet. [...] x ve y değerleri ikisinde de sağlamak zorunda, ayrı ayrı bulduktan sonra bir de kesiştirecektik.

...

176. B: Çünkü ayrı ayrı düşündüm ben doğru olarak düşünmedim. Sonra kesişimlerindeki ((4,0) noktasını kastederek) ben şey yapacaktım. [...] Nasıl söyleyeyim kesişimlerindeki şöyle [eliyle havada doğru çiziyor] çizecektim [...] anlarsınız ya birleştirecektim noktaları. <Belirlediği noktalardan geçen doğru çizmesi gerektiğini ifade ediyor>

şeklindeki söylemleriyle ifade etmiştir. Bununla birlikte Burcu görüşme sürecinde diğer katılımcılarla kurduğu iletişim sürecinde kafa karışıklığı yaşamış ve bir otorite olarak gördüğü Elif'in söylemlerine güvenip sıklıkla arkadaşını taklit eden söylemlerde bulunmuştur. Katılımcı arkadaşı Derya'ya katılmadığını belirtmiş [140-GD9] ve Şekil 65'teki doğru çiziminden yola çıkarak " $x - 2y = 4$ " denkleminin çözüm kümesini " $\mathbb{C}.K = \{(0, -2), (4, 0)\}$ " biçiminde olacağını [142-GD9] belirtmiştir. Görüşme sürecinde arkadaş Elif'in söylemleri Burcu'nun kafa karışıklığı yaşamasına sebep olmuş ve Burcu ile diğer katılımcılar arasında aşağıdaki gibi bir iletişim gerçekleşmiştir. Şekil 66'da ise bu iletişim sürecinde gerçekleşen görsel araçlar yer almaktadır.

146. B: Hocam şu [*Derya'nın yazdığı* $(0, -2)$ sıralı ikilisini göstererek] bunlara göre yazacağım.

147. A: Bu tarafa yazabilirsin.

148. <*Burcu sessizce Şekil 66- [148]'deki " $\mathbb{C}.K = \{(0, -2), (4, 0)\}$ " ifadesini tahtaya yazıyor*>

149. E: Böyle sonsuza kadar gider ki ama.

150. A: Yeterli mi?

151. <*Burcu bir süre sessiz kalıyor, tahtaya bakıyor, araştırmacıya dönüyor*>

152. D: Çık değil. [*Burcu'ya bakarak*]

153. B: Yeterli.

...

157. E: Hocam ben de şöyle düşünüyorum, mesela orada bir doğru bulduk ya, o doğrunun hepsi [...] yani sonsuz tane nokta var ve reel sayılardayız hepsini yazamayız. [...] o doğru aslında bizim direkt çözüm kümemizi belirtmez mi? Yani bence çözüm kümesini bu şekilde yazamayız.

158. B: Çözüm kümesini böyle [*" $\mathbb{C}.K = \{(0, -2), (4, 0)\}$ " ifadesini göstererek*] verselerdi ben bunu (*doğruyu*) böyle çizerdim. [*Şekil 65'teki grafiği göstererek*] sen de [*Elif'e söyleyerek*] buradan anlardın ki bunları [*kesim noktalarını göstererek*].

159. A: Bu [...] hah güzel güzel, bu çözüm kümesinin [*Burcu'nun yazdığı*] grafiğini çizmek isteyen var mı? [...] Bunu mu çizerdiniz başka bir şey mi olurdu?

160. B: Yani çizin [*kendinden emin*] çizmek istiyor musunuz?

162. E: Haa! [*Gülerek*] hocam [*Ayağa kalkıyor ve tahtaya geliyor*]

163. A: Gel gel. Hiç ortada denklem olmasın böyle bir çözüm kümesi var. Bu çözüm kümesinin grafiğini çizelim.

164. <*Elif koordinat sistemini çiziyor*>

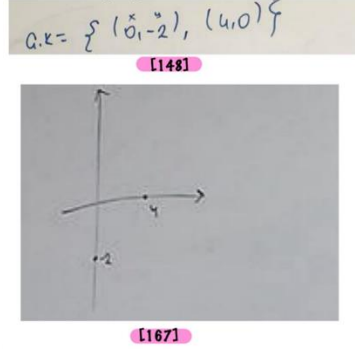
165. E: Hocam ben anladım sizi [*gülerek*] [...] Burada mesela o zaman ben sadece şunu anlarım.

167. E: Sadece bu noktayı belirttiğini [*y ekseninde aşağı tarafa bir nokta koyup -2 yazıyor*] bir de buradaki [*x ekseninin sağ tarafına bir nokta koyup 4 yazıyor*] bu noktayı belirttiğini anlarım. [*Şekil 66- [167]'teki görsel aracıyı gerçekleştiriyor*]

169. E: Ama burada sonsuz tane nokta var. [*Şekil 65'teki grafiği göstererek*]

170. A: Burcu ne diyorsun bu duruma?

171. B: Doğru, benim de kafamı karıştırdı şu an. Ben kendi kağıdıma nokta olarak çizdim. [...]
Ama!



Şekil 66. Ç. $K = \{(0, -2), (4, 0)\}$ ifadesine ait görsel araçlar

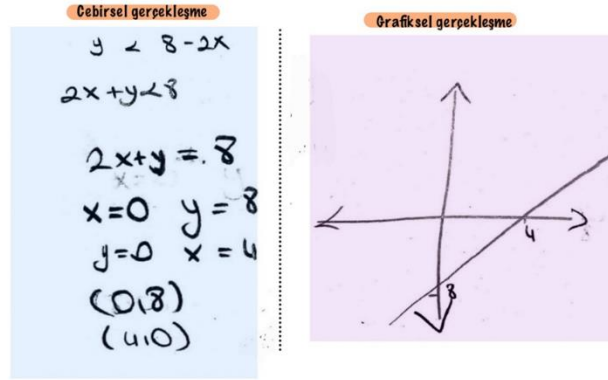
Burada Burcu, sadece doğrunun eksenleri kestiği noktaların çözüm kümesinin elemanlarını oluşturduğunu belirtmiş [158-GD9] fakat arkadaşı Elif'in sonsuz çoklukta nokta içereceğini söylemesi ([149], [157], [169]) üzerine kafa karışıklığı yaşamıştır. Katılımcının arkadaşı Elif'in söylemlerine güvendiği ve Elif'i kendine bir otorite olarak gördüğü gözlemlenmiş ve bu durum görüşme sürecinde katılımcının Tablo 48'deki gibi Burcu'nun Elif'i taklit eden söylemlerinde görülmüştür.

Tablo 48

Burcu'nun Elif'in Söylemlerini Tekrar Eden Benzer Söylemleri

Elif'in söylemleri	Burcu'nun söylemleri
157. E: ...mesela orada bir doğru bulduk ya, o doğrunun hepsi [...] yani sonsuz tane nokta var ve reel sayılardayız hepsini yazamayız. [...] o doğru aslında bizim direkt çözüm kümemizi belirtmez mi? Yani bence çözüm kümesini bu şekilde yazamayız.	222. B: Biz şimdi bunu kanıtladık, o zaman nokta nokta diye çizmeyiz, doğru diye çizeriz [<i>biraz kızgın gibi</i>] siz bunu anlarsınız.
169. E: Ama burada sonsuz tane nokta var.	224. B: Bir sürü değer var noktalar sonsuz.
214. E: Çünkü bizim kümemiz reel sayılar, ben bu reel sayılardan x için sonsuz tane değer yazarım o zaman y için sonsuz tane değer bulurum.	238. B: Ona göre (<i>doğru</i>) çizilebilir bence, nokta olarak çizmeyiz bence.
251. E: Sonsuz tane nokta varsa bunlar hep bu şekilde olacak ve bunlar doğru belirtmek zorunda.	252. B: Onların her biri nokta [...] ve doğru belirtiyor, bence çok mantıklı. [<i>Gülümseyerek</i>]
43. E: Doğru denklemi.	48. B: Doğru denklemi olabilir [<i>emin gözükmüyor</i>]
102. E: Hocam bu doğru aslında bu denklemin çözüm kümesi yani grafikte gösterilmiş. Buradaki noktaların [<i>grafiği göstererek</i>] hepsi.	234. B: Denklem [...] ve doğru belirten bir denklem.
	316. B: Çünkü ıı ben onun doğru denklemi olduğuna inanıyorum.
308. E: Hocam bence şey [...] Burcu'nun dediği aslında bizim o hep yaptığımız şey [...] x için sıfır verip y 'yi buluyoruz ya, bu aslında direkt ıı Öklid'in postulatlarından dolayı yani iki noktadan bir doğru geçer, daha kolay kesim noktaları, yoksa tek tek bulup da [...] hepsini yazabiliriz yani [...] aynı şeye çıkıyor.	100. B: Hocam sanırım beşinci postulattan yararlanıyoruz, hani iki noktadan bir doğru geçer [...] çünkü onun zorluğu [...] hani o çok zor olduğu için oradaki noktaları yazmak çok zor olacak [...] o yüzden ikisi belirtip [...] onları da hani böyle < <i>eliyle doğrular çiziyor</i> > [<i>Elif'ten söyleminden sonraki oturumda söylüyor</i>]
	236. B: Evet. [...] Hani iki tane nokta bir araya gelince bir doğru belirtir ya en az.
136. E: Evet [...] ıı ben onu aslında ikisinin çözüm kümesi [...] aslında bu noktayı [<i>kesişim yerini göstererek</i>] noktayı bulmak için söylemiştim.	161. B: Hocam ben ayrı ayrı yapardım [...] hani x 'e sıfır verip y 'yi bulurdum hani bunların zaten [...] o denklem sisteminden şey anlamadım, ikisini bir çözüm kümesini bulacağımı düşünmedim o yüzden hani [...] böyle de ikisinin kesiştiği noktayı bulduk.

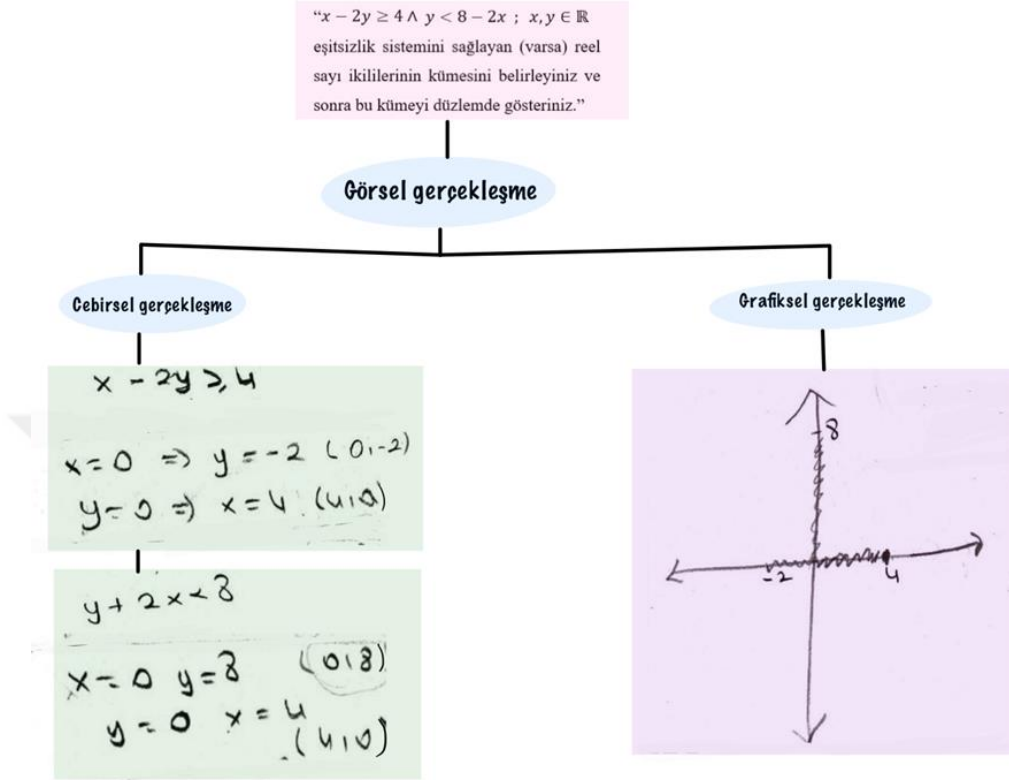
Bununla birlikte katılımcı GD10’da yer alan “ $y < 8 - 2x$, $x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğinin çözüm kümesini oluşturan reel sayı ikililerini belirlerken “ $2x + y = 8$ ” denkleminin düzlemde belirttiği doğruyu çizerek Şekil 67’deki gibi prosedürünü sonlandırmıştır:



Şekil 67. Burcu’nun “ $y < 8 - 2x$, $x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğine yönelik görsel araçları

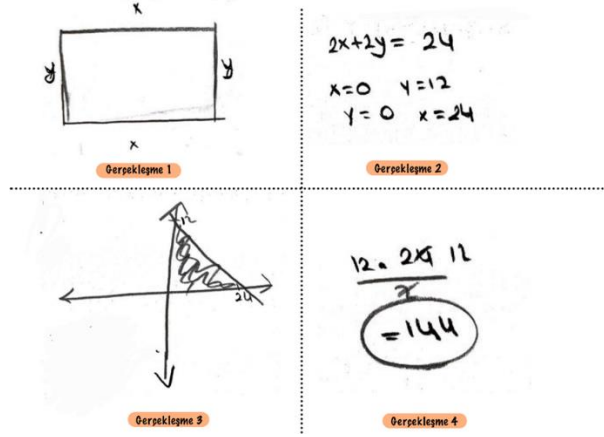
Burcu’nun bu prosedürünün bir önceki oturumda arkadaşlarının GD9 için uyguladıkları prosedürlerin (örneğin, Tablo 27’de yer alan Elif’in prosedürü) bir taklidi olmuştur. Çünkü katılımcı GD12’de “ $y < 8 - 2x$ ” eşitsizliğini de içeren “ $x - 2y \geq 4 \wedge y < 8 - 2x$; $x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizlik sistemini sağlayan reel sayı ikililerinin kümesini belirlerken rutinine tekrar dönmüş ve doğruların eksenleri kestiği noktaları belirlemiştir. Katılımcı “ $x - 2y = 4 \wedge y = 8 - 2x$ ” denklemlerinin düzlemde belirttiği doğruların ortak noktası olan (4,0) noktasının eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinin elemanı olduğunu “Şu noktayı belirtmedim ama [(4,0) ifadesini göstererek] yapacaktım da yapamadım. [...] şu ikisinde de aynı nokta çıkıyor. [21-GD12]” şeklinde ifade etmiş ve çözüm kümesini düzlemde göstermede yaşadığı güçlüğü “Gösteremedim [...] anladım da. [23-GD12]” biçiminde belirtmiştir. Fakat katılımcı GD9’da denklem sisteminin ortak çözümünü analitik düzlemde gerçekleştirmede zorlandığı gibi GD12’de de güçlük yaşamış ve görev durumunda yer alan “...sonra bu kümeyi düzlemde gösteriniz ...” biçimindeki ifadeden dolayı düzlemde temsili bir gösterim yapmıştır. Katılımcının “ $x - 2y \geq 4 \wedge y < 8 - 2x$; $x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizlik sistemini sağlayan (varsa) reel sayı ikililerinin kümesini belirleyiniz ve sonra bu

kümeyi düzlemde gösteriniz.” görev durumu için uyguladığı prosedürü içeren gerçekleşme ağacı Şekil 68’deki gibidir:



Şekil 68. Burcu’nun birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlik sistemine yönelik gerçekleşme ağacı

Katılımcının birinci dereceden iki değişkenli denklemlerin düzlemde bir doğru belirttiğine yönelik farkındalığı olmadığı gözlemlenmiş ve katılımcı bireysel görüşmede belirttiği gibi (Tablo 38-[175]) prosedür süreç ilişkisini kurmadan ezbere ve katı bir prosedür uygulayarak doğru grafiklerini çizmiştir. GD20’de yer alan “Çevresi 24 birim olan bir dikdörtgensel bölgenin alanının en çok kaç birim kare olacağını tespit edebilir misin? Bu tespit sürecinde attığın adımları gerekçeleriyle paylaşır mısın?” şeklindeki problem durumu için uyguladığı prosedüründe dikdörtgenin çevresini cebirsel karşılığı olan “ $2x + 2y = 24$ ” denklemin düzlemde grafiğini çizen Burcu, dikdörtgensel bölgenin alanını “ $2x + 2y = 24$ ” doğrusu ile eksenler arasında kalan üçgensel bölgenin alanıyla eş görerek Şekil 69’daki hesaplamayı yapmıştır.



Şekil 69. Burcu'nun GD20'ye ait kağıdında yer alan görsel araçları

Katılımcı ikinci dereceden denklemleri tanımlarken kullandığı BG-B9 kodlu rutinini odak grup görüşmelerinde de uygulamış ve GD13'te yer alan " $t^2 + 4t = -1$ " cebirsel ifadesi için "... neden ikinci dereceden dediğimi anlatayım, çünkü t karenin kuvveti iki [...] yani üssü. O yüzden bizim derecemiz iki. [20-GD13]" şeklinde sembollere odaklı bir tanımlama yapmıştır. Bu söylemini Şekil 70'teki gibi görsel araçlarla da onaylayan katılımcının bireysel görüşmedeki rutinini devam ettirmiştir:

ikinci dereceden bir değişkenli denklem
 t^2 'nin kuvveti 2 "=" sembolü var.

Şekil 70. Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli denklem tanımına yönelik sözel gerçekleşmesi

Katılımcı ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerde x^2, y^2, t^2 gibi terimlerin varlığının önemini GD15'te yer alan " $(m+1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0, m \in \mathbb{R} - \{-1\}, x \in \mathbb{R}$ " şeklindeki cebirsel ifadesi için kullandığı,

88. B: İy hani biz bunun ne olduğunu ııı matematiksel olarak ne olduğunu şey yapmak için aslında oradaki $\mathbb{R}$ fark eksi birçok önemli bence [...] çünkü hani eksi biri vermeseydi ben m 'ye bir sürü [...] orayı sıfırlayabilirdim.

89. A: Hımm.

90. B: Tek [...] değişkenli hani ikinci dereceden değil birinci dereceden yapabilirdim.

91. A: Güzel.

92. B: İşte o yüzden x 'in değişken ve ikinci dereceden olduğunu m eleman $\mathbb{R}$ fark eksi birden anladım, orayı sıfırlamaması için.

...

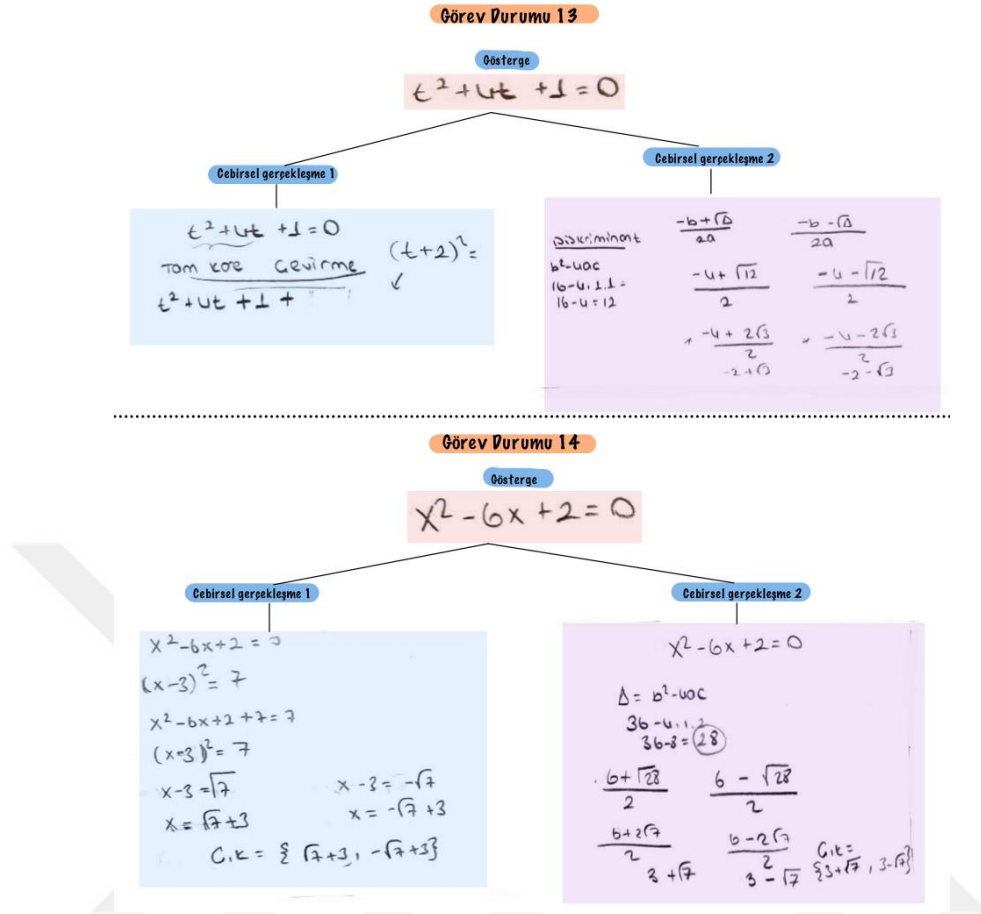
107. B: m eleman $\mathbb{R}$ den [...] eksi bir verip sıfır yapardık, x kare giderdi [...] birinci dereceden olurdu.

...

196. A: Şimdi bu nasıl bir denklem?

197. B: İkinci dereceden tek değişkenli bir denklem.

biçimindeki söylemleriyle odak grup görüşmelerinde de belirtmiştir. Bununla birlikte bireysel görüşmede ikinci dereceden denklemlerin iki farklı prosedürle çözüm kümesini kanonik bir şekilde belirleyen katılımcı odak grup görüşmelerinde farklı ve yeni bir prosedür daha uygulamıştır. İkinci dereceden tek değişkenli denklemlerde, ikinci dereceden tek değişkenli cebirsel ifadeleri tam kareye çevirme yoluyla denklemin çözümlerini belirleyen katılımcının GD13'te prosedürü nasıl uygulayacağını hatırlamada güçlük yaşadığı görülmüş ve katılımcı “Hocam ben iki yol biliyorum da [*kağıdında göstererek*] birinciye yapamadım adını yazayım bari. [*“Tam kare çevirme” ifadesini yazıyor*] [77-GD13]”, “Ya biliyorum da yapamıyorum şu an. Ama adını biliyorum da [...] deneyeceğim [79-GD13]” ve “Ben yapamadım diğer yolu [102-GD13] Bir yol daha var ama çözemiyorum emin olamıyorum [106-GD13]” şeklinde söylemlerde bulunmuştur. Fakat arkadaşı Şule'nin prosedürünü paylaşması üzerine “İçime de oturdu yani yapamamak [*gülerek*] [306-GD13] Oraya ben aslında ne ekleyeceğimi bilemedim. [314-GD13]” söylemleriyle prosedüründeki eksikliği fark ederek pişmanlık yaşayan katılımcının bir sonraki görev durumunda prosedürü kanonik bir şekilde uygulamıştır. Burcu'nun ikinci dereceden denklemleri cebirsel ifadeyi tam kareye çevirme ve denklemin diskriminantı aracılığıyla çözdüğü iki farklı prosedürüne yönelik görsel araçları ise Şekil 71'deki gibidir. Katılımcı ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini belirlerken çarpanlarına ayırma metoduyla da denklemlerin çözümlerini belirleyebilmiştir (örneğin, Şekil 76).



Şekil 71. Burcu'nun odak grup görüşmelerinde ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme prosedürleri

Katılımcı GD13'te prosedürünü tahtada arkadaşlarıyla paylaşma fırsatı bulmuş ve aşağıdaki gibi söylemlerde bulunmuştur:

159. B: Bu diskriminantımız sıfırdan büyükse bizim iki tane reel kökümüz olması gerekiyor [arkadaşlarına bakarak tane tane açıklıyor] ını reel köklerimizin formülünü yazıyorum şimdi

$\left[\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right]$ ifadesini yazıyor]

...

161. B: Bir de eksi b bölü kök delta bölü iki a var $\left[\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right]$ ifadesini yazıyor]

...

169. B: Geçen sene bunları test kitaplarında çözüyorduk [gülerek]

...

184. B: Şöyle, bizim şöyle bir şeyimiz vardı a, x kare, b, x artı c [$ax^2 + bx + c$ ifadesini yazıyor]

...

186. B: Buradaki b , x 'mizin başındaki [...] yani yenisine göre $[t^2 + 4t + 1 = 0]$ ifadesini göstererek] t 'nin başındaki oluyor. Eksi dört artı diskriminantımızı yazıyoruz [...] kök on iki

bölü iki çarpı bir $[\frac{-4+\sqrt{12}}{2.1}]$ ifadesini yazıyor] çünkü t karemizin başında bir var. [...] Ondan

sonra bunu da yazayım [...] eksi dört eksi kök on iki $[\frac{-4-\sqrt{12}}{2.1}]$ ifadesini yazıyor] [...] Şimdi ben

bunları [...] eksi dört artı [...] şimdi ben bunu iki kök üç diye çıkarttım $[\sqrt{12}]$ ifadesini işaret ederek] <Onay almak için araştırmacıya bakıyor> (A:Hı hı) [...] Buradan kök şey yaptım [...]

bölü iki $[\frac{-4+2\sqrt{3}}{2.1}]$ ifadesini yazıyor] Burada eksi dört eksi iki kök üç bölü iki. $[\frac{-4-2\sqrt{3}}{2.1}]$ ifadesini yazıyor] Sonra da ben kolay olsun diye ayrı ayrı yazdım hani şöyle paydalarını şey yaptım.

...

190. B: Dağılma mıydı ki? [Hatırlayamadığı için kötü hissederek]

...

192. B: Ben vallahi bilmiyorum da yani.

...

200. B: Öyleymiş [ortak paydada yazılan ifadeyi ayrı bir şekilde yazmayı kastederek] [...] yani

ben yapıyorum ama adını bilmiyorum $[-\frac{4}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2}]$ ifadesini yazıyor]

...

225. A: Çözüm kümesini yazıyor Burcu? Çözüm kümesinde dört tane eleman mı var?

226. B: Hayır hocam neden öyle olsun, iki tane. $[\mathbb{C}.K = \{-2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}\}]$ ifadesini yazarak prosedürünü tamamlıyor].

...

235. B: Çok da güzel yazmışım.

Burada Burcu'nun söylemleri, katılımcının katı bir prosedür uygulayarak çözüm yaptığını (örneğin, [169-GD13], [189-GD13], [200-GD13]) ve bu süreçte sosyal bir bağ kurma amacıyla iletişimini sürdürdüğü göstermiştir. Ayrıca burada katılımcı bireysel görüşmede ikinci dereceden tek değişkenli bir denklemin çözümlerinin varlığını belirlerken kullandığı BG-B11 kodlu rutinini de tekrarlamıştır. İkinci dereceden tek değişkenli denklemin diskriminantının pozitif olması durumunda denklemin iki farklı reel çözümü olduğunu "...diskriminantımız sıfırdan büyükse bizim iki tane reel kökümüz olması gerekiyor [159-GD13]" şeklinde ifade etmiştir. Benzer şekilde GD15'te " $(m + 1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $x \in \mathbb{R}$ " denkleminin çözümünü diskriminantı aracılığıyla belirlediği

prosedürünü tahtada arkadaşlarıyla paylaşma fırsatı bulan katılımcı denklemin diskriminantını 4 olarak hesaplamış ve “İki kökümüz olduğu anlamına gelir [...] çünkü delta büyük sıfır [$\Delta > 0$ ifadesini yazarak] [234-GD15]” biçiminde söylemde bulunmuştur. Burcu’nun anlatısını onaylayan görsel araçlar ise Şekil 72’deki gibidir:

$$\begin{aligned}
 \Delta &= b^2 - 4ac & \Delta &= b^2 - 4ac \\
 (2m)^2 - 4(m+1)(m-1) &= & (2m)^2 - 4(m+1)(m-1) &= \\
 4m^2 - 4(m^2 - 1) &= & 4m^2 - 4(m^2 - 1) &= \\
 4m^2 - 4m^2 + 4 &= & 4m^2 - 4m^2 + 4 &= \\
 4 &= & 4 &=
 \end{aligned}$$

Şekil 72. Burcu’nun BG-B11 kodlu keşif rutinindeki anlatısını onaylayan görsel araçları

Bununla birlikte katılımcı GD26’da yer alan eşitsizliğin çözüm kümesinin elemanlarını işaret tablosunu aracılığıyla belirlerken tabloda işaret değişikliği olmaması için denklemin çözümleri olmaması gerektiğini “ııı şey olacak [...] şimdi şöyle [...] eşitsizliği her reel sayı için sağlanıyorsa (denklemin) diskriminantı küçüktür sıfır olması gerekiyor [128-GD26]” şeklinde belirtmiş ve kağıdında “ $\Delta < 0$ olmalıdır” biçiminde Şekil 73’teki sözel gerçeklemeye yer vermiştir:

$$\Delta < 0 \text{ olmalıdır.}$$

Şekil 73. Burcu’nun BG-B11 kodlu rutinine yönelik GD26’da yer alan sözel gerçekleşmesi

Çözüm kümesinin elemanlarının toplamı ve çarpımı verilen ikinci dereceden denklemi yazması istendiğinde katılımcı BG-B12 kodlu rutinini odak grup görüşmesinde uygulamada güçlük yaşamıştır. Odak grup görüşmesinde çözüm kümesinin elemanlarının toplamlarından ve çarpımlarında yola çıkarak çözümlerini belirlemede güçlük yaşayan Burcu, “Tükendim, bittim [10-GD14]”, “Niye olmuyor ya [yazdığını silerek] [28-GD14]”, “Hocam ben birinci görüşmede deneme yanılmayla bulmuştum bir tane şak diye [...] şimdi olmadı [...] neyse [kağıdını silerek] [42-GD14]” ve “Formülleri yazdım da çıkmadı da

<Burcu kağıdını araştırmacıya uzatıyor> [...] hep böyle oluyor bir şeyleri biliyorum devamı gelmiyor [47-GD14]” şeklinde kişisel (kendine yönelik) söylemlerde bulunmuştur. Bireysel görüşmede yer alan görev durumlarında çözümlerin birer tamsayı olması sebebiyle zorluk yaşamadan prosedürünü uygulayan katılımcı, odak grup görüşmesinde irrasyonel çözümlere sahip bir denklemi yazmada yaşadığı güçlük Burcu’nun Şekil 74’te yer alan prosedüründe de gözlemlenmiştir.

Görev Durumu 14

Çözüm kümesindeki elemanların toplamı 6 ve çarpımı 2 olan ikinci dereceden tek değişkenli denklemi yazabilir misin? Nasıl bir yol izlediğini açıkla mısın? Bu denklemi yazmanın başka bir yolu mu biliyor musun? Biliyorsan paylaşır mısın?

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$x_1 \cdot x_2 = 2$$
$$a=2 \quad b=6 \quad c=2$$
$$\frac{b}{a} = 3 \quad -\frac{b}{a} = -3$$
$$2x^2 + 6x + 2 = 0$$

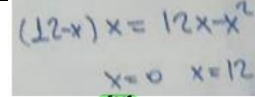
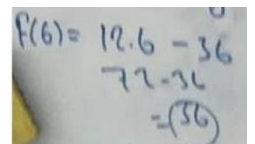
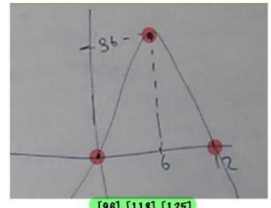
(12)

Şekil 74. GD14 ve Burcu’nun GD14 için uyguladığı prosedürü

Burcu odak grup görüşmelerinde sıklıkla diğer katılımcılarla sosyal bir kurmak amacıyla prosedürünü uygulamış ve bu şekilde matematiksel iletişimini sürdürmeye çalışmıştır. Bu durum katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli bağıntıların grafiklerini çizerken kullandığı rutinine dair söylemlerinde de sıklıkla görülmüştür. İkinci dereceden tek değişkenli bağıntıların grafiklerini çizerken sadece prosedürünü nasıl devam ettireceğine odaklanan katılımcı parabol eğrisini, eksenleri kestiği noktaları ve tepe noktasını bularak çizmiştir. Burcu, GD20, GD21 ve GD22’de prosedürünü tahtada Tablo 49’daki gibi arkadaşlarıyla paylaşıırken, önceki görev durumlarında arkadaşlarının uyguladığı prosedürleri taklit ettiğini belirtmiş (Tablo 49’da [116-GD20]) ve prosedürünü uygularken sıklıkla diğer katılımcılardan prosedürünün doğruluğuna dair onay istemiştir (örneğin, Tablo 49’da [114-GD20], [216-GD21], [269-GD21], [272-GD21], [281-GD21], [160-GD22], [178-GD22]).

Tablo 49

Burcu'nun GD20, GD21 ve GD22'ye Yönelik Prosedürü ve Söylemsel İletişimleri

Ne zaman?	Nasıl?	Ne yapıyor?
GD20'de “ $y = 12x - x^2$ ” bağıntısının grafiğini çizerken	Ne söylüyor? 96. B: Başlıyorum arkadaşlar [<i>koordinat sistemi çizerek</i>] <Burcu çözüme devam ederek $x = 0$, $x = 12$ yazıyor ve sonra koordinat düzleminde işaretliyor> ... 103. B: Eksi on iki bölü iki a dan eksi iki [...] herhalde evet [...] altı. Üstün matematiksel yeteneklerimle bunu da yaptım [<i>y ekseninde 6'yı işaretleyerek</i>] evet. ... 106. Z: Hayır tepe noktasının r'si o. 107. Ş: x ekseninde olan. 108. B: Bir dakika ben bir tekrardan bakayım [<i>çözümlerini kontrol ediyor</i>] ... 111. Z: Sonra f altı yazacak. 112. B: Evet öyle yapacağım [<i>$f(6)$ ifadesini yazıyor</i>] heyecanlandım [<i>koordinat sisteminde x ekseninde altıyı işaretleyerek</i>] [<i>hala emin değil yaptıklarına bakıyor</i>] 113. Z: Altı olacak. 114. B: Hah, tamam. [<i>Zehra'nın onayıyla devam ediyor</i>] 115. A: Bu metotla çözmem gerektiğini bir öncekinden dolayı yaptığını düşünüyorum, öyle mi? 116. B: Evet [<i>araştırmacıya dönerek itiraf eder gibi bakıyor</i>] 117. A: Tamam <arkadaşları gülüşüyor> 118. B: On iki ile altıyı çarpıyorum [...] altmış [...] yetmiş iki [...] eksi otuz altı [...] hep de otuz altı çıkıyor ya [<i>(6,36) noktası işaretleyerek</i>] ... 120. B: Arkadaşlar kollar aşağı 121. Z: Sıfırdan geçecek. 122. B: Evet çünkü birinci kök sıfır. ... 125. B: Ne olur güzel çizeyim [<i>grafiği çizerken</i>] [<i>çizdikten sonra gülüyor</i>]. ... 128. A: Bu neyin grafiği? 129. B: Parabolün [<i>$(12 - x)x = 12x - x^2$ ifadesini göstererek</i>]	[96]  [106]  [118]  [96], [118], [125]

GD21'de
“ $y = x^2 - 50x - 600$ ”
bağıntısının
grafliğini çizerken

204. B: Şimdi anlatıyorum arkadaşlar ını şimdi şöyle x 'e x , eksi altmışa on diye ayırdım [göstererek] x eksi altmış çarpı, x artı on eşittir sıfır.
...
211. A: Tamam, sonra bu buldukları nedir?
212. B: Köklerimiz bizim. [...] x eksenini kestiği yerler.
213. A: Tamam.
214. B: Yerine yazınca sıfırı sağlıyor arkadaşlar [koordinat sistemi çiziyor] çiziyorum.
215. A: Çiz bakalım. <Burcu x ekseninin sağında 10 ve 60 için yer işaretliyor ve y ekseninde 60'i işaretliyor> Köklerini kaç kaç buldu, doğru mu ilerliyor?
216. <Burcu yazmayı bırakarak arkadaşlarına dönüyor> B: Arkadaşlar bir doğru deyin [onay bekliyor] oldu yani bakın burada [Zehra'nın yazdığı] $(60 - x)(x + 10) = y$ ifadesini göstererek]
217. Ş: D: Eksi on [...] eksi on olacak [Burcu'yu uyarıyorlar]
218. <Burcu duraksıyor ve arkadaşlarına kulak veriyor>
219. Z: Burcu eksi on'a altmış.
220. B: Haaa, evet eksi on yazmışım da arkadaşlar [eksende 10 nu silerek] şeyini yapamadım [düzeltiyor]
...
228. <Burcu tepe noktasının koordinatlarını bulmaya çalışıyor>
234. B: Arkadaşlar bakın [Arkadaşlarını susturarak onu dinlemelerini istiyor] Burayı ben anlatıyorum şimdi [...] ben bu y 'yi kestiği noktayı buldum [...] x 'e sıfır verdim hemen y 'yi buldum. [...] Ben y 'yi kestiği noktayı bulmak için x 'e sıfır verdim. [Grafığı siliyor]
...
259. B: O zaman direkt f yirmi beşe bakayım [...] oradan bakarak [Zehra'nın çözümünü kastederek].
...
263. B: Kestiği nokta [...] bu altı yüz oldu [y ekseninde işaretleyerek] çünkü burada x 'e sıfır verirsem [$-x^2 + 50x + 600 = 0$ ifadesini göstererek] [...] bu da yukarıda bir noktamız [y eksenini uzatarak noktayı işaretliyor] bin iki yüz yirmi beş [yazarak] şimdi çiziyorum, ben eksi onun yerini değiştiriyorum [grafığı çizmeye çalışıyor] nasıl çiziyordum ya <arkadaşları gülüşüyor> olmuyor [-10 'dan geçecek şekilde çiziyor fakat tamamlayamadan bırakıyor]
264. E: Burcu ters yerden başla [gülerek]
265. Ş: Burcu tam ortadan [600 ile 1225'i kastederek] geçme, bir de yirmi beşten geçecek ya.
266. B: Evet doğru [çizdiğini de silerek] kafam karıştı [1225 ile 25'i buluşturan kesikli çizgileri çiziyor]
267. Z: Yardımcı oluyoruz Burcu.
268. A: Burcu destek ekibi ister misin?
269. B: Etmiyorlar ki [sitem ediyor]
270. Z:D: Ediyoruz ya [itiraz ederek]
272. B: Böyle mi çezeceğim? [Çizim yapmadan kalemle arkadaşlarına gösteriyor]

$$(x-60)(x+10)=0$$

$x=60$ $x=-10$

[204]

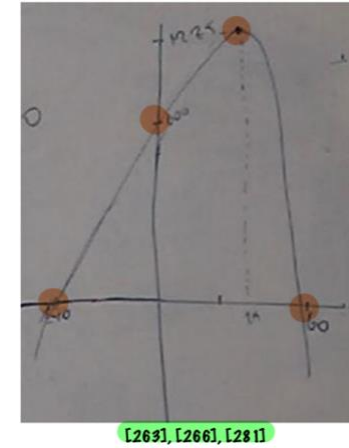
$$\frac{-b}{2a} = \frac{50}{2} = 25$$

$f(25) =$
 $(25)^2 - 50 \cdot 25 - 600 = 0$
 $625 - 1250 - 600 = 0$
 $625 - 1850 = 0$

[228]

$$f(25) = 1225$$

[259]



273. Z: D: E: Evet. <Şule tahtaya geliyor>

274. B: Tamam [arkadaşlarından onayı aldı]

...

281. B: Böyle mi? [Tepe noktasından başlayarak çizim yapıyor]

282. E: Aynen.

283. B: Bunu niye daha önceden [...] ama siz anladınız değil mi? [Çizimini tamamlıyor]

GD22'de " $y = x^2 - 3x$ " bağıntısının grafiğini çizerken

160. B: Şimdi ben ilk başta parabolümü çizeceğim [...] parabolü çizeceğim yani [koordinat düzlemi çiziyor] ıı ben ilk başta tepe noktası buldum, sonradan kök bulacağım. Tepe noktasını bulmak için eksi b bölü iki a yapacağız [...] ıı buradan üç bölü iki geliyor bunu da yerine yazdığımızda [...] f üç bölü ikiyi, üç bölü ikinin karesi ıı üç çarpı üç bölü iki [...] buradan da sanırım ama yine yapayım [işlemi yapıyor] buradan da (Ş: Eksi dokuz bölü dört) dokuz bölü dört eksi dokuz bölü iki ıı buradan da eksi dokuz bölü dört geliyordu değil mi?

...

162. B: Yazayım şöyle [eksenlerde noktaları işaretliyor] eksi dokuz bölü dört [y ekseninde işaretliyor] üç bölü iki [x ekseninde işaretliyor] böyle oluyor.

...

164. B: Ben parabolün köklerini bulacağım, y 'yi ayıracağım çarpanlarına x çarpı x eksi üç diye [...] sıfır. Buradan x eşittir sıfır veya x eşittir üç. Bizim köklerimiz bunlar.

...

174. B: Şimdi çizeyim [çizmeye başlıyor] bu zor benim için [güzel çizemeyeceğini düşünüyor]

175. <Zehra gülüyor>

176. B: Ya ama! [Çizemiyor, siliyor]

177. Z: Ortadan başlayınca daha güzel çiziliyor Burcu.

178. B: Şöyle mi [tepe noktasından orijine doğru çizerken] [...] [çizimini tamamlıyor]

...

180. B: Parabol kolları yukarı doğru zaten x karenin [göstererek] işaretinden dolayı [...] işaretinden dolayı evet [durup doğruluğunu düşünüyor] evet. Artı olduğundan dolayı kolları yukarı

...

196. B: Ben x 'i kesen noktaları buldum ve bizim parabolümüzün alabileceği minimum değeri buldum.

197. A: O noktanın özel bir adı var mı?

198. B: Tepe noktası. <Grafikte noktaları sıralı ikili olarak yazıyor>

199. A: Üç tane noktayı belirleyerek parabolü çizebiliyorsun sanırım.

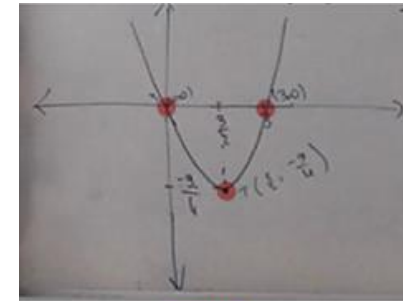
200. B: Evet y noktasını da kesmiyor zaten x 'e sıfır verip y 'yi bulsam da sıfır oluyor, o yüzden yazmaya gerek duymadım.

$$-\frac{b}{2a} \quad \frac{3}{2}$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)$$
$$\frac{9}{4} - \frac{9}{2}$$
$$-\frac{9}{4}$$

[160]

$$x = 0 \vee x = 3$$
$$x(x-3) = 0$$

[164]

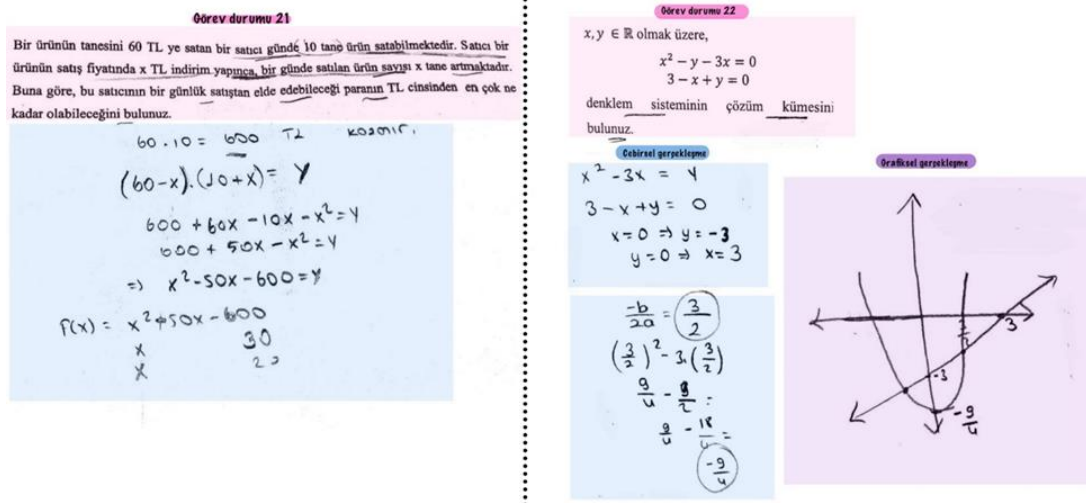


[162], [178]

GD20’de problem durumunu cebirsel ifadeye çevirmede güçlük yaşayan Burcu, tahtada prosedürünü paylaşırken diğer katılımcılarında önerileriyle “ $12x - x^2$ ” şeklinde bir cebirsel ifade elde etmiş ve “[*Araştırmacıya dönerek ve gülümseyerek*] Parabol. [89-GD20] [*Eliyle hayali bir parabol çizerek*] Bir maksimum noktası var evet [93-GD20]” şeklinde bir söylemde bulunmuştur. Katılımcı bir önceki oturumda “İkisi de 3 ten küçük olmayan ve birbirinden farklı iki reel sayının toplamı 15 ise bu iki reel sayının çarpımının alabileceği en küçük ve en büyük reel sayıyı belirleyebilir misin?” şeklindeki görev durumunda Elif’in tahtada arkadaşlarıyla paylaştığı prosedürün adımlarını taklit ederek prosedürünü uygulamaya çalışmıştır. Bu süreçte kendinden emin olmayan bir şekilde prosedürünü uygulayan katılımcıya arkadaşları önerilerde ve yönlendirmede bulunmuş (örneğin, [106-GD20], [107-GD20], [111-GD20], [121-GD20]) ve Burcu prosedürü arkadaşlarının yardımıyla kanonik bir şekilde tamamlamıştır. GD21’de ise katılımcı kağıdında problem durumunu bu kez Şekil 75’teki gibi cebirsel ifadeye çevirebilmiş fakat denklemin çözümlerini belirleyemediği için grafiği çizememiştir. “ $(60 - x)(10 + x) = y$ ” bağıntısının “ $f(x) = x^2 - 50x - 600$ ” eşitliğine denk olduğunun farkında olmayan Burcu ile diğer katılımcılar arasında aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

158. B: Ben parabol çizecektim, o yüzden kök bulmaya çalıştım, o yüzden eksiyle çarptım aslında da ama kök falan bulamadım.
160. Ş: Aslında [...] şey-
161. B: Yani daha doğrusu uğraşacaktım ama eksi altı yüz oluyordu, diskriminanta giriyordum.
162. Ş: Şey <*söze girmeye çalışıyor, Burcu’ya nasıl ilerleyeceğini söylemek istiyor*>
163. A: Hı hı.
164. B: Ben de geri döndüm [*gülerek*]
165. Ş: Orada zaten çarpanlarına ayrılmış şekliyle var ya altmış eksi x , on artı x diye
166. <*Burcu gülüyor, eliyle ağzını kapatıyor, bunu nasıl fark etmediğine şaşırıyor*>
167. <*Arkadaşları gülüşüyor*>
169. B: Evet ağlayacağım ya [*nasıl fark etmediğine üzülüyor*] neyse.
170. <<*Arkadaşları gülüşüyor*>>
171. B: Çok kötü oldum şu an [*tahtaya dönüyor yüzünü, kendine gülüyor*].
172. A: Katılıyor musun Şule’ye? [*Gülerek*]
173. B: Katılıyorum da şu an üzgünüm [*gülüyor sonra duruluyor*].

Katılımcı GD22’de yer alan $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere “ $x^2 - y - 3x = 0 \wedge 3 - x + y = 0$ ” denklem sisteminin çözüm kümesini belirlemek için grafik yardımıyla çözmeye çalıştığı prosedürünü kağıdında uygularken parabol eğrisini sadece tepe noktasını belirlemiş ve Şekil 75’teki gibi kanonik olmayan bir grafik çizimi yapmıştır:



Şekil 75. Burcu’nun kağıdında yer alan GD21 ve GD22 için uyguladığı prosedürün görsel araçları

Bununla birlikte katılımcının odak grup görüşmeleri sürecinde prosedürlerinde gözlemlenen eksiklik ya da hataların tekrarı dikkat çekmiştir. Katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ya da eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesinin elemanlarını işaret tablosu aracılığıyla belirlerken kullandığı rutininde de zaman zaman eksiklik ya da hatalar olmuştur (Şekil 76). Burcu GD23’te yer alan “ $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ ” eşitsizliğini sağlayan reel sayıları kanonik bir şekilde belirlerken, GD24’te yer alan “ $\frac{(y-3)(-y+5)}{y^2-5y+6} \leq 0$ ” eşitsizliğini sağlayan reel sayıların kümesini, 3’ün çift katlı çözüm olduğunu fark edemediği için hatalı bir şekilde belirlemiştir. GD24’te prosedürüne başlarken görev durumu hakkında “Zor görünüyor [3-GD23]”, “Böyle bir soru sınavda vardı [9-GD23]” şeklinde söylemlerde bulunan Burcu, arkadaşlarıyla kurduğu iletişim sonrasında “Ben yanlış çözmüş olabilirim [29-GD23]” şeklindeki söylemiyle prosedüründen emin olmadığını da belirtmiştir. GD25’te “ $t^2 - 2t + 3 > 0 \wedge (-t + 4)^2 < 0$ ” eşitsizlik

sisteminin çözüm kümesini belirlerken kağıdında prosedürünü hatalı bir şekilde uygulayan katılımcı, “ $t^2 - 2t + 3 = 0$ ” denklemini çarpanlarına ayıramadığı için çözüm kümesinin boş küme olacağını düşünmüş ve bu durumu “Yanlış yaptım, şu an öyle düşünüyorum. Ben diskriminantına niye bakmadım, onu anlamadım, çarpanlarına ayıramadım sonra hemen kök yok dedim ama yanlış bence diskriminanta bakmam gerekiyordu ama unutmuşum. [97-GD25]” şeklindeki ifadeleriyle belirtmiştir. Katılımcı GD26’da yer alan “ a bir genelleştirilmiş reel sayı ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ax^2 - 4x + a \leq 0$ eşitsizliği her x reel sayısı için sağlandığına göre a reel sayılarının kümesini bulunuz.” şeklindeki görev durumunda ise “ $\Delta \leq 0 \wedge a < 0$ ” eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini belirlemek yerine “ $\Delta < 0 \wedge a < 0$ ” olması gerektiğini fark etmiş fakat $\Delta = 0$ eşitliğinden elde ettiği negatif a reel sayısını yerine yazarak elde ettiği “ $2x^2 + 4x + 2 \geq 0$ ” eşitsizliğinin çözüm kümesini belirlemiştir. GD26’da prosedürünü arkadaşlarıyla paylaşma fırsatı bulan Burcu’nun diğer katılımcılarla arasında gerçekleşen iletişimi ise aşağıdaki gibidir:

128. B: İki şey olacak [...] şimdi şöyle [...] eşitsizliği her reel sayı için sağlanıyorsa diskriminant küçüktür sıfır olması gerekiyor.

...

131. A: Bunu ezbere mi söylüyorsun, bir şey hatırladığı için mi söylüyorsun yoksa yorum mu yapıyorsun?

132. E: Niye, sıfıra da eşit olabilir.

133. B: Ama ben öyle düşündüm. Nedeni şöyle hani [...] ıı biz eğer kök bulamıyorsak [...] o zaman işaret değiştirmemize de gerek kalmayacak.

134. D: Çift katlı olabilir.

135. <Burcu duraksıyor, kafası karışıyor ve arkadaşlarına kızgın bir şekilde bakıyor>

...

140. B: Öyle oluyor da [...] ben ilk başta [...] hani [...] sıfıra eşitliğini düşünmeden küçük sıfır dedim [...] o yüzden hani hiç işaret değiştirmeden gidiyor [*işaret tablosunu kastederek*] ve her reel sayıyı sağlıyor.

...

144. [*işaret tablosu yapıp ++ sembollerini yazıyor, sonra eşitsizlikte yer alan küçük-eşittir sembolünü göstererek*] B: Bu küçük-eşit sıfır dediği için [*++ sembollerini siliyor*] böyle eksi olacak [*tabloya birden fazla – sembolü yazıyor*] [...] Tüm reel sayılar sağlıyor, küçük-eşit sıfır olması [...] burada [...] kök olduğunu [...] benim de kafama karıştı tabi ki, sonra ben denedim yanlış çıktığı için hani bıraktım.

...

146. B: Çözüm kümem boş küme çıktı o yüzden bıraktım. Devam ettiremedim bir de ben a 'yı bulmamışım. Şunun $[ax^2 - 4x + a \leq 0 \text{ ifadesini göstererek}]$ çözüm kümesini yapmaya çalışmışım, o da yanlış çıkınca bıraktım. Ama ben delta küçüktür sıfır hani böyle $[tablodaki birden fazla - sembolünü göstererek]$ düşündüğüm için.

147. A: Ha kök olmaması gerekiyor ki böyle olsun.

148. B: Evet hani hep aynı şekilde gitsin $[işaret tablosundaki sembolleri kastederek]$ ve her reel sayı $(eşitsizliği)$ sağlasın.

...

159. Ş: Böyle de olabilir çift katlı da olabilir.

160. D: Evet.

161. E: Yani diskriminant küçük-eşit sıfır incelememiz gerekiyor.

...

164. B: Oradan diskriminant küçük-eşit sıfır yapıp a 'yı bulacağız, ona göre deneyeceğiz yani.

...

172. B: Ama ilk başta bence sıfıra bakmalıyız sonra reel kök buluyorsak yani sıfıra eşit buluyorsak öyle eklememiz gerektiğini düşünüyorum yani hepsinde çıkmayabilir belki de $[küçüktür sembolünü neden tercih ettiğini açıklıyor]$

...

189. E: Diskriminant küçük-eşittir sıfır eşitsizliğini incelememiz lazım.

190. A: Tamam, güzel. Burcu sen de ikna oldun mu, katılıyor musun?

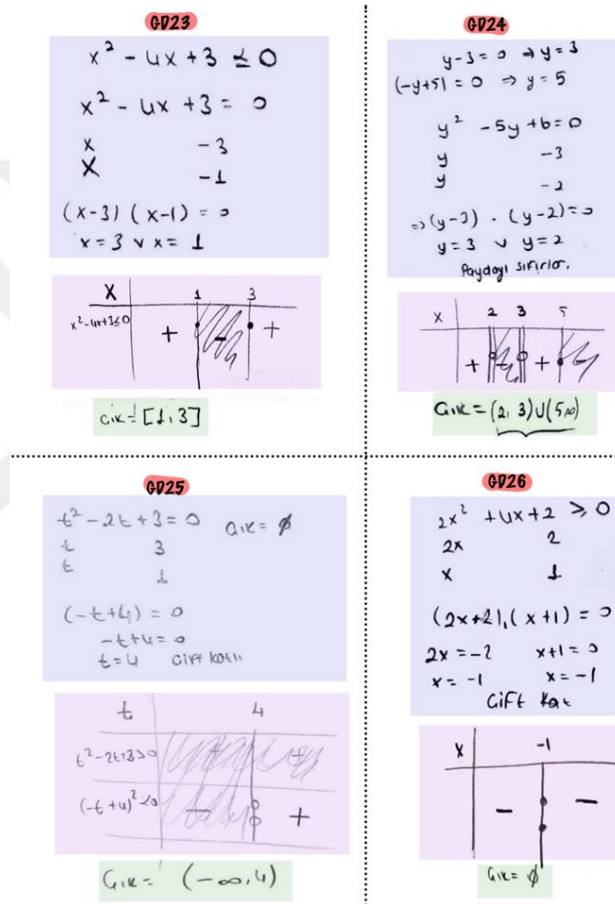
191. B: Evet benim de kafamı karıştırdı o çift katlı kök olayı sonra da kızların yorumlarına katıldığım için $[tahtaya $\Delta \leq 0$ ifadesini yazıyor]$

...

193. B: Sonra şöyle [...] ııı [...] küçük-eşit olduğu için ve x reel sayısını sağladığı için negatif olarak alacağımız için hepsinin nasıl olsa eksi olması gerekiyor. Bunu da [...] eksiyle başladığını biz şeyden anlıyoruz işaret değiştirmedeği için $[ax^2 - 4x + a \leq 0 \text{ ifadesinde baş katsayı } a \text{'yı göstererek}]$ en büyük dereceli terimimizin katsayısının başının negatif [...] yani negatif değerlerle başladığını anlıyoruz [...] bu yüzden a 'nın sıfırdan küçük olması gerekiyor.

Burada arkadaşlarının önerileri üzerine (örneğin, [132], [134], [159], [161] ve [189]) “ $ax^2 - 4x + a \leq 0$ ” eşitsizliği her x reel sayısı için sağlanması için “ $\Delta \leq 0$ ” durumu incelenmesi gerektiğinin farkına varan katılımcı, “...eşitsizliği her reel sayı için sağlanıyorsa diskriminant küçüktür sıfır olması gerekiyor [128-GD26]” şeklindeki anlatısına rastlansa da söylemlerinin çoğunlukla süreç odaklı olmuştur (örneğin, [133-GD26], [140-GD26], [144-GD26], [148-GD26] ve [193-GD26]). Bununla birlikte Burcu, ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri içeren görev durumlarında (GD23, GD24 ve GD25) prosedürünü diğer katılımcılarla paylaşma fırsatı bulamamıştır. Fakat katılımcını

Şekil 76'daki gibi kağıdında yer alan görsel araçları incelendiğinde Burcu işaret tablosu oluşturma yoluyla eşitsizliklerin çözüm kümelerini belirlemeye çalışmıştır. Prosedürüne yönelik GD26'daki söylemleri dışında sesli gerçekleştirmeleri olmasa da katılımcının görsel araçlarının tekrarlı bir şekilde benzer adımları içermesinden dolayı Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözme prosedürü katılımcının bir rutini olarak kodlanmıştır.



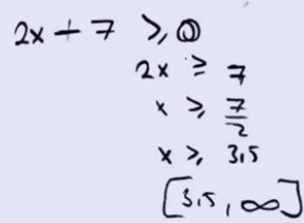
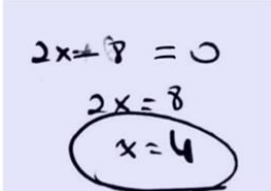
Şekil 76. Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sistemi çözme prosedürü

Burcu'nun 11 farklı oturumda 26 farklı görev durumdan elde edilen bulguları analiz edildiğinde toplamda 11 farklı rutin gözlenmiş ve katılımcının odak grup görüşmelerine dair rutinleri Tablo 50'deki gibi kodlanmıştır.

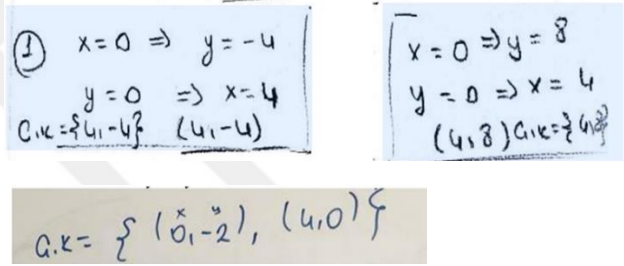
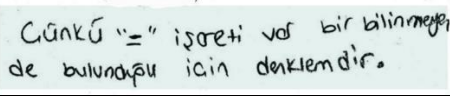
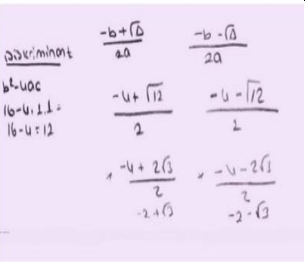
Tablo 50

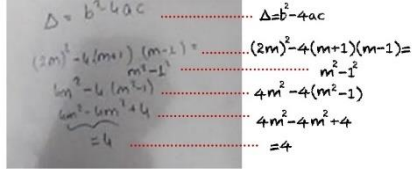
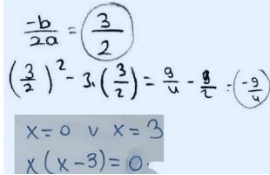
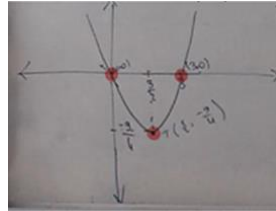
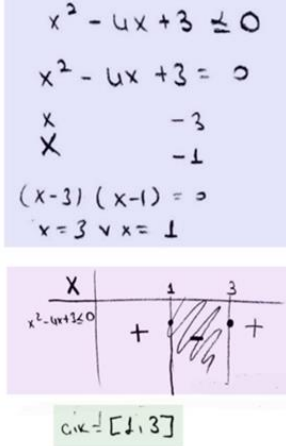
Burcu'nun Odak Grup Görüşmelerindeki Rutin Profili

Rutin kodu	Ne zaman?	Nasıl?		Prosedür	Tekrarı (Zamanı)
		Görev	Gerçekleşme		
OG-B1	Denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken	En az bir değişken ve “=” sembolü içeren cebirsel ifadeleri denklem, en az bir değişken ve “<,>,<=,>=” sembollerini içeren cebirsel ifadeleri eşitsizlik olarak tanımlamak	Sesli	B: ... ikisinde de bilinmeyen olması gerekiyor bu ikisinde de ortak, ıı denklemde eşittir sembolü olması gerekiyor. Eşitsizlikte de büyük-eşit, küçük-eşit, büyüktür veya küçüktür işaretlerinin olması gerekiyor yani ben böyle anlıyorum. [525-GD3] B: Denklem [...] Değişkeni var, eşitlik de var. [156-GD5]	4 (GD3, GD5, GD23)
			Sözel	Denklem içinde en az bir değişken bulunan ve “=” sembolü bulunduran ifadeler denlr. Eşitsizlik içinde en az bir değişken bulunduran ve < > >= <= sembolleri bulunduran ifadeler denlr.	3 (GD1, GDS)
BG-B2	Denklem ve eşitsizlik kavramları arasındaki ilişkiyi açıklarken	Çözüm kümesindeki eleman sayılarını karşılaştırmak ve $\geq, \leq$ sembollerini içeren eşitsizlikleri denklem olarak tanımlamak*	Sesli	B: Evet çünkü şöyle, ıı denklemi [...] denklemi yazdığımızda mesela bir tane denklem sağlıyor [...] mesela o sıfır olsun [...] ama eşitsizlik yazdığımızda mesela eksi birle bir arasında oluyor ve zaten sıfırı sağlıyor [zihninden örnek vererek açıklama yapıyor] aslında her eşitsizlik bir denklem oluyor. [22-GD23] ...eşitsizlik denklemden daha fazla bir alan kapsıyor. [24-GD23] ... Çünkü dediğim gibi eşitsizlikte bir aralık belirtiyoruz ve o mesela sıfır dersem, [arkadaşlarına dönüyor ve parmağıyla onları gösteriyor] aslında siz de eminim böyle düşünüyorsunuz. Çünkü köklerini neden buluyoruz, denklemi sağlayan diye [...] sıfır bul- [...] ayy konuşamadım [...] denklem olarak düşünseydik eğer köklerini zaten buluyorduk, bunda da bulmak zorundayız ki aralığını belirleyelim. O yüzden bence her eşitsizlik bir denklem oluyor [29-GD23]	7 (GD23, GD25)
			Sözel	Böyle eşitsizlikler aslında denklemdir, çünkü > >= sembolleri eşittir (eşittir) :sıcaklık kaplar. Eşitsizlik denklemden genelde daha geniş bir aralık gösterir.	1 (GDS)

			Cebirsel	 	1 (GDS)
BG-B3	Çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken	Çözüm kümesinin elemanlarının evrensel kümede olan ve denklemleri ya da eşitsizlikleri sağlayan elemanlar olduğunu belirtmek	Sesli	B: ...u'nun yerine ne yazarsak yazalım hiçbir sonuç doğru çıkmıyor yani sağlamıyor, u elemanı olarak hiçbirini sağlamadığı için bizim hiç elemanımız kalmadığı için boş küme diyoruz. [424-GD2] B: ...denklemin kökü onu sağlayan oluyor [283-GD15] B: Ben bunun çözüm kümesi $[(\frac{19}{4}, \infty)$ ifadesini göstererek] daha doğrusu şöyle söylemek istiyorum. Hani bunun [...] burada $[(\frac{19}{4}, \infty)$ ifadesini göstererek] bir sürü eleman var, biz şu ana bunun hepsini yazmamıza gerek yok. (A: Hı hı) o yüzden zaten bu aralığı belirttik. Bunun içindeki elemanlar çözüm kümesinin elemanları [108-GD7]	> 10 (GD2, GD3, GD4, GD5, GD7, GD8, GD9, GD10, GD12, GD15, GD22)
			Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? Ne yapıyor? 171. B: Evet, her taraftan on bir çıkaracağım (gerçekleşme 1). 178. B: Tamam ını bu tarafımızda [eşitsizliğin sol tarafını gösteriyor] sıfır artı parantez için iki çarpı y eksi üç büyüktür eksi dört kaldı (gerçekleşme 2). 183. B: Her tarafı ikiye böldükten sonra şöyle yapayım (gerçekleşme 3). 186. B: Bu tarafta y eksi üç büyüktür eksi iki kaldı (gerçekleşme 4). 188. B: Böyle yani [gerçekleşme 4'ü işaret ediyor] Sonra ben şu parantezi kaldırdım (gerçekleşme 5). Her tarafa üç ekleyeceğim bu kez. Bu tarafta y kalıyor [...] ını öbür tarafta da bir kalıyor (gerçekleşme 6). 196. B: Ne oldu? [...] ını y'den büyük sayılar ını yani y büyüktür bir [...] birden büyük olan sayılar ını eşitsizliğimizde yerine yazıldığında bu eşitsizliği sağlar. 215. B: Evet, aralık belirtiyim mi isterseniz? (Gerçekleşme 6'yı yazıyor). 217. B: ını olabilecek yani yerine yazdığımızda sağlayabilecek ını sayılar [...] reel sayılar.	4 (GD2, GD3, GD5, GD7)

BG-B4	Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken	"x = reel sayı" biçiminde bir sonuç elde etmek	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? 185. B: Ben parantezi dağıtmadan yaptım. 187. B: On bir artı iki parantez içinde x eksi üç eşittir yedi (<i>göstergeyi yazarak</i>) İlk başta on biri karşıya attım (<i>gerçekleşme 1</i>). 189. B: Hı hımmm, sesim gitti [<i>hafif öksürüyor</i>] iki çarpı parantez içinde x eksi üç eşittir eksi dört oldu (<i>gerçekleşme 2</i>). 191. B: [...] o zaman ikiyi karşıya atıyorum [...]x eksi üç eşittir eksi iki (<i>gerçekleşme 3</i>) x de bir geliyor (<i>gerçekleşme 4</i>).	Ne yapıyor? $11 + 2(x-3) = 7$...Gösterge $2(x-3) = 7-11$...Gerçekleşme 1 $2 \cdot (x-3) = -4$...Gerçekleşme 2 $x-3 = -2$...Gerçekleşme 3 $x = 1$...Gerçekleşme 4	2 (GD1, GD6)
BG-B5	Birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken	Bir reel sayı aralığı elde etmek	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? 45. B: Şimdi [...] beş çarpı [...] ben bunu [$z - 3$ ifadesini <i>göstererek</i>] parantez içinde yazıyorum çünkü öyle dağıtacağım, z eksi üç büyüktür beş çarpı dört artı z bölü beş (<i>gerçekleşme 1</i>). Hocam bunu [5'i <i>kastederek</i>] buraya dağıttığımda [$(4 + z)$ ifadesini <i>kastederek</i>] tekrar buradan aynı şey çıkacak. O yüzden direkt hani beş bölü bir. [...] Böyle yazarsam birbirini götürür [<i>gerçekleşme 1</i>'deki pay ve paydadaki 5 sayısının üzerini çizerek] [...] bölündüğünde sadeleşiyor. 73. B: Şimdi ben parantezi dağıtıyorum. Yani her elemanı beş ile çarpacağım 79. B: Beş z eksi on beş büyüktür (<i>gerçekleşme 2</i>) ıı dediğim gibi böldüğümüzde çarptık şunları [...] 81. B: Hı hım, tamam [...] dört artı z (<i>gerçekleşme 2</i>) [...] ıı ben her tarafa [...] her tarafa eksi z ekleyeceğim [...]z çıkartacağım, her taraftan z çıkartacağım (<i>gerçekleşme 3</i>). 89. B: Tamam. Beş z eksi z eksi on beş büyüktür dört art z eksi z (<i>gerçekleşme 3</i>) [...] çıkarttım [<i>eşitsizliğin sağ tarafındaki z yi göstererek</i>] ıı bura dört z eksi on beş büyüktür dört [...] dört (<i>gerçekleşme 4</i>). [...] Ben bu kez de her tarafa on beş ekleyeceğim (<i>gerçekleşme 5</i>) ıı ondan sonra yani dört z ıı büyüktür on dokuz oldu (<i>gerçekleşme 6</i>) [...] her tarafı da dörde böleceğim (<i>gerçekleşme 7</i>) [...] evet dörde böleceğim [...] ya da bir bölü dört ile çarpacağım. ıı [<i>yazmaya devam ediyor</i>] <Sonrasında hiç konuşmadan <i>gerçekleşme 8</i>'i yazıyor ve işlemini tamamlayıp <i>gerçekleşme 9</i>'u yazıyor> 91. B: Aralık belirtiyor bu da [$(\frac{19}{4}, \infty)$ ifadesini <i>göstererek</i>]	Ne yapıyor? $z - 3 > \frac{4+z}{5}, z \in \mathbb{R}$ Gösterge $5 \cdot (z-3) > 5 \cdot \frac{4+z}{5}$ Gerçekleşme 1 $5z-15 > 4+z$ Gerçekleşme 2 $5z-2-15 > 4+z-2$ Gerçekleşme 3 $4z-15 > 4$ Gerçekleşme 4 $4z+15-15 > 4+15$ Gerçekleşme 5 $4z > 19$ Gerçekleşme 6 $\frac{4z}{4} > \frac{19}{4}$ Gerçekleşme 7 $\Rightarrow z > \frac{19}{4}$ Gerçekleşme 8 $(\frac{19}{4}, \infty)$ Gerçekleşme 9	2 (GD3, GD7)

OG-B2	Birinci dereceden iki değişkenli denklem (sistemi) ya da eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesinin elemanlarını belirlerken	Denklemlerin düzlemde belirttiği doğruların eksenleri kestiği noktaları belirlemek	Sesli	B: Şöyle [...] şimdi x ve y 'nin ayrı ayrı sağlayan değerlerini bulacağız. [21-GD9] Nokta olarak bunları bulacağız. [23-GD9] İkisini de sağlamamız gerekiyor, evet. [...] x ve y değerleri ikisinde de sağlamak zorunda, ayrı ayrı bulduktan sonra bir de keşştirecektik. [29-GD9] Evet hani sadece x 'e sıfır verip y 'yi bulurum, y 'ye sıfır verip x 'i bulurum [113-GD9].	10 (GD9, GD12)
			Cebirsel		3 (GD9, GD10, GD12)
BG-B9	İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken		Sesli	B: ... neden ikinci dereceden dediğimi anlatayım, çünkü t karenin kuvveti iki [...] yani üssü. O yüzden bizim derecemiz iki. [20-GD13]	4 (GD13, GD15)
			Sözel		2 (GD13, GD15)
OG-B3	İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken	Çarpanlarına ayırma, cebirsel ifadeleri tam kare ifadelerle çevirme yöntemiyle ya da $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülü aracılığıyla çözüm kümesinin elemanlarını belirlemek	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? 186. B: Buradaki b, x'mizin başındaki [...] yani yenisine göre $[t^2 + 4t + 1 = 0]$ ifadesini göstererek t'nin başındaki oluyor. Eksi dört artı diskriminantımızı yazıyoruz [...] kök on iki bölü iki çarpı bir $[\frac{-4 + \sqrt{12}}{2.1}]$ ifadesini yazıyor çünkü t karemizin başında bir var. [...] Ondan sonra bunu da yazayım [...] eksisi dört eksisi kök on iki $[\frac{-4 - \sqrt{12}}{2.1}]$ ifadesini yazıyor [...] Şimdi ben bunları [...] eksisi dört artı [...] şimdi ben bunu iki kök üç diye çıkarttım $[\sqrt{12}]$ ifadesini işaret ederek <Onay almak için araştırmacıya bakıyor> (A: Hı hı) [...] Buradan kök şey yaptım [...] bölü iki $[\frac{-4 + 2\sqrt{3}}{2.1}]$ ifadesini yazıyor Burada eksisi dört eksisi iki kök üç bölü iki $[\frac{-4 - 2\sqrt{3}}{2.1}]$ ifadesini yazıyor] Sonra da ben kolay olsun diye ayrı ayrı yazdım hani şöyle paydalarını şey yaptım. Ne yapıyor? 	3 (GD13, GD14, GD15)
BG-B11	İkinci dereceden tek değişkenli denklemin çözümünün varlığını belirlerken	İkinci dereceden tek değişkenli denklemin diskriminantını hesaplamak	Sesli	B:...diskriminantımız sıfırdan büyükse bizim iki tane reel kökümüz olması gerekiyor [159-GD13]" B: İki kökümüz olduğu anlamına gelir [...] çünkü delta büyük sıfır $[\Delta > 0]$ ifadesini yazarak [234-GD15]"	5 (GD13, GD15, GD25, GD26)

			Cebirsel		2 (GD15, GD26)
OG-B4	İkinci dereceden tek değişkenli bağıntıların grafiklerini çizerken	İkinci dereceden tek değişkenli denklem aracılığıyla grafiğin eksenleri kestiği noktayı ve tepe noktasını belirleyerek grafiği çizmek	Sesli-Cebirsel-Grafiksel	Ne söylüyor? B:Şimdi ben ilk başta parabolümü çizeceğim [...] parabolü çizeceğim yani [koordinat düzlemi çiziyor] ını ben ilk başta tepe noktası buldum, sonradan kök bulacağım. Tepe noktasını bulmak için eksi b bölü iki a yapacağız [...] ını buradan üç bölü iki geliyor bunu da yerine yazdığımızda [...] f, üç bölü ikiyi, üç bölü ikinin karesi ını üç çarpı üç bölü iki [...] buradan da sanırım ama yine yapayım [işlemi yapıyor] buradan da (S: Eksi dokuz bölü dört) dokuz bölü dört eksi dokuz bölü iki ını buradan da eksi dokuz bölü dört geliyordu değil mi? [160-GD22] B: Ben parabolün köklerini bulacağım, y'yi ayıracağım çarpanlarına x çarpı x eksi üç diye [...] sıfır. Buradan x eşittir sıfır veya x eşittir üç. Bizim köklerimiz bunlar. [164-GD22] B:Parabol kolları yukarı doğru zaten x karenin [göstererek] işaretinden dolayı [180-GD22]. Ne yapıyor?  	3 (GD20, GD21, GD22)
OG-B5	İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ya da eşitsizlik sistemlerini çözerken	Eşitsizliklerin çözüm kümesini işaret tablosu aracılığıyla belirlemek	Cebirsel-Grafiksel		4 (GD23, GD24, GD25, GD26)

Burcu'nun odak grup görüşmesindeki 11 farklı rutini ele alındığında bu rutinlerden 6'sının bireysel görüşmedeki rutinlerinin bir tekrarı olduğu görülmüş ve bu rutinlerin türünde herhangi bir değişiklik gözlemlenmemiştir. Bu bağlamda, katılımcının bireysel görüşmede sergilediği BG-B2, BG-B4, BG-B5 ve BG-B9 kodlu ritüel rutinleri bireysel görüşmede sunulan benzer nedenlerden dolayı ritüel bir rutin olarak kodlanırken, yine bireysel görüşmede sergilediği BG-B3 ve BG-B11 kodlu keşif rutinleri de bireysel görüşmede sunulan benzer nedenlerden dolayı keşif rutini olarak kodlanmıştır.

Bu rutinlerden dışında kalan ve odak grup görüşmelerinde gözlemlenen 5 rutinin tamamının ritüel rutin olduğu gözlemlenmiştir. Burcu'nun odak grup görüşmelerinde denklem ve eşitsizlikleri tanımlarken kullandığı OG-B1 kodlu rutini bireysel görüşmedeki BG-B1 kodlu rutininin bir devamı olması nedeniyle ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır. Katılımcı odak grup görüşmelerinde bireysel görüşmeden farklı olarak denklem ve eşitsizliklerin değişken içermesi gerektiğini belirtmesine (örneğin, [525-GD3] ve Şekil 59) rağmen Burcu'nun kavramların birer açık önerme olduğunun farkında olmadığı (örneğin, [149-GD5]) ve söylemlerinin sembol odaklı olduğu (örneğin, [525-GD3], [156-GD5] ve [18-GD23]) görülmüştür. Bu nedenle katılımcının OG-B1 kodlu denklem ve eşitsizlik tanımlama rutini bireysel görüşmeye de benzer nedenlerden dolayı ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır.

Burcu'nun birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemi ya da eşitsizlik sistemlerini çözerken kullandığı OG-B2 kodlu rutini de bireysel görüşmedeki BG-B8 kodlu rutininin devamı niteliğinde süreç odaklı ritüel bir rutin olarak gözlemlenmiştir. Katılımcı denklem ya da eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini elemanlarını belirlerken kanonik olmayan bir prosedür uygulamış (örneğin, Şekil 64) ve çözüm kümesinin sadece doğruların eksenleri kestiği noktaları içerdiğini belirtmiştir (örneğin, [142-GD9], Şekil 66- [148]). Burcu'nun birinci dereceden iki değişkenli denklemlerin (eşitsizliklerin) düzlemde bir doğru (bölge) belirttiğinin farkında olmadığı (örneğin, Şekil 66, Şekil 67, Şekil 68 ve Şekil 69) ve

prosedürünü matematiksel iletişimi sürdürmek ve sosyal bir bağ kurmak amacıyla arkadaşlarını taklit ederek (örneğin, Tablo 48) uygulamaya çalıştığı gözlemlenmiştir. Bununla birlikte katılımcının OG-B2 kodlu rutininde söylemlerinde anlatı üretmeyi hedeflemediği aksine prosedürünü ifade etmede güçlük yaşadığı (örneğin, [21-GD12], [23-GD12] ve [176-GD9]) ve sıklıkla süreç odaklı söylemlerde bulunduğu görülmüştür (örneğin, [113-GD9], [176-GD9] ve [158-GD9]). Bu nedenle katılımcının OG-B2 kodlu rutini ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır.

Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme prosedürlerini içeren OG-B3 kodlu rutini ise bireysel görüşmedeki BG-B10 kodlu rutininin bir devamı olmuştur. Katılımcı bireysel görüşmeden farklı olarak ikinci dereceden denklemlerin çözüm kümelerini belirlemede yeni bir yol daha kullandığı için rutin kodu değiştirilmiştir. Fakat katılımcı bu yeni prosedürünü başlangıçta uygulamada güçlük yaşamış (örneğin, [77-GD13] ve [106-GD13]) sonrasında ise arkadaşlarının çözüm prosedürlerini taklit ederek kanonik bir şekilde uygulayabilmiştir (Şekil 73). Burcu rutin prosedürünü ezbere ve katı bir şekilde uygulamış (örneğin, [169-GD13] ve [200-GD13]) ve katılımcının söylemleri süreç odaklı olmuştur (örneğin, [186-GD13]). Bu nedenle katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme prosedürünü içeren OG-B3 kodlu rutini ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır.

Burcu'nun odak grup görüşmelerinde arkadaşlarının öneri ve yönlendirmeleriyle uyguladığı OG-B4 kodlu ikinci dereceden tek değişkenli bağıntıların grafiklerini çizerken uyguladığı rutini ise ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır. İkinci dereceden tek değişkenli bağıntıların grafiklerini çizerken grafiğin eksenleri kestiği noktaları ve tepe noktasını belirleyerek prosedürünü uygulamaya çalışan (örneğin, [200-GD22]) katılımcı prosedürünü nasıl devam ettireceği konusunda tereddütler yaşamış (örneğin, [108-GD20] ve sıklıkla arkadaşlarının onayına başvurmuştur (örneğin, [272-GD21], [281-GD21] ve [178-GD22]). Bu süreçte arkadaşlarıyla sosyal bir bağ kurmayı amaçlayarak matematiksel iletişimini sürdürdüğünü gösteren kişisel söylemlerini (örneğin, [103-GD20], [125-GD20]

ve [112-GD20]) sıklıkla kullanan katılımcı, zaman zaman işlemsel hatalar yapmış (örneğin, [220-GD21] ve [228-GD21]) ve arkadaşlarının yönlendirmelerine hissettiği ihtiyacı dile getirmiştir (örneğin, [216-GD21], [218-GD21] ve [269-GD21]). Bu nedenle katılımcının diğer katılımcıların öneri, yönlendirme ve onaylarına ihtiyaç hissederek uyguladığı ve sosyal bir bağ kurmayı amaçlayan prosedürlerini içeren OG-B4 kodlu rutini ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır. Bununla birlikte Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ya da eşitsizlik sistemlerini çözerken kağıdında sıklıkla uyguladığı prosedürleri (Şekil 76) içeren OG-B5 kodlu rutinine dair yeterli sesli gerçekleşmesi bulunmamasına rağmen katılımcının rutin prosedürlerinde eksiklik ya da hatalar bulunmasından ve GD26'da yer alan ilgili söylemlerinin (örneğin, [133-GD26], [140-GD26], [144-GD26], [148-GD26] ve [193-GD26]) süreç odaklı olmasından dolayı OG-B5 kodlu rutini ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır.

Burcu'nun Tablo 50'deki gibi kodlanan 11 farklı rutininin ritüel ya da keşif rutini olduğu Tablo 51'de yer almaktadır.

Tablo 51

Burcu'nun Odak Grup Görüşmelerindeki Rutinlerinin Türü

Rutin kodu	Ritüel	Keşif
OG-B1	X	
BG-B2	X	
BG-B3		X
BG-B4	X	
BG-B5	X	
OG-B2	X	
BG-B9	X	
OG-B3	X	
BG-B11		X
OG-B4	X	
OG-B5	X	

Burcu'nun rutinleri aracılığıyla matematiksel söyleme katılımı nesneleştirme bağlamında incelendiğinde katılımcı çoğunlukla ritüel bir katılım sergilemiştir. Katılımcının BG-B3 ve BG-B11 kodlu keşif rutinleri bireysel görüşmedekine benzer şekilde söylemin

nesneleştirilmesi açısından hibrit katılımın birer örneğini temsil ederken katılımcının diğer tüm rutinlerine yönelik söylemleri ritüel katılımın birer örneğini sunmuştur. Burcu'nun söylemleri incelendiğinde matematiksel nesneleri manipüle edilebilen somut birer nesne olarak gördüğü ve söylemlerinde “çözüm kümem/kümemiz (örneğin, [146-GD26])”, “bizim elemanımız (örneğin, [424-GD2])”, bizim derecemiz (örneğin, [20-GD13]), “bizim parabolümüz (örneğin, [196-GD22])”, “değişkenimiz (örneğin, [126-GD7])”, “eşitsizliğimiz (örneğin [126-GD7])”, “diskriminantımız (örneğin [159-GD13])” ve “kökümüz (örneğin, 234-GD15))” gibi anahtar kelimelere “-(i)m” ve “-(i)miz” gibi iyelik eklerini sıklıkla eklediği gözlemlenmiştir. Bununla birlikte Burcu söylemlerinde matematiksel nesneleri birer sembol dizisi olarak görmüş ve anahtar sözcükleri de doğru bir şekilde kullanmada güçlük yaşamıştır. Katılımcının tanımlama rutinlerini içeren OG-B1 ve BG-B9 kodlu rutin prosedüründe yer alan “...eşitlik var, değişken var, değişkenin nerede olduğunu söylemiş [247-GD5]”, “Evet çünkü şöyle bir tane değişkenimiz var [...] bir de direkt sembolden (eşitsizlik olduğunu) anladım zaten. [18-GD23]”, “... çünkü t karenin kuvveti iki [...] yani üssü. O yüzden bizim derecemiz iki. [20-GD13]” ve “Bizim şöyle bir şeyimiz vardı a, x kare, b, x artı c [$ax^2 + bx + c$ ifadesini yazıyor] [184-GD13]” şeklindeki söylemleri matematiksel nesneleri birer sembol dizisi olarak gördüğünü göstermiştir. Bununla birlikte Burcu, anahtar kelimeleri de kanonik bir şekilde kullanmada güçlük yaşamış ve “denklemleri sağlayan çözüm kümesinin elemanları” ifadesini temsilen “ y 'yi sağlayan değerler (örneğin, [77-GD3])” ifadesini, “eşitsizliğin çözüm kümesinin eleman sayısı denklemlerin çözüm kümesinin eleman sayısından fazladır” ifadesini temsilen “...eşitsizlik denklemden daha fazla bir alan kapsıyor. [24-GD23]” ifadesini kullanmıştır. Başka bir örnekte OG-B4 kodlu rutinini uygularken kullandığı “Ben parabolün köklerini bulacağım, y 'yi ayıracağım çarpanlarına ... [164-GD22]” söyleminde “ $x^2 - 3x = 0$ denkleminin çözümleri” ifadesini yerine “parabolün kökleri” ifadesini kullanmış ve “ $x^2 - 3x$ cebirsel ifadesini çarpanlarına ayırma” işlemini “ y 'yi ayıracağım çarpanlarına” şeklinde ifade etmiştir. GD2'de yer alan Şekil 63'teki “Her $\in \mathbb{R}$ sayı sağlar”

şeklindeki sözel gerçekleşmesinde de katılımcının anahtar kelime kullanımında yaşadığı güçlüğü gösteren başka bir örnek olmuştur. Katılımcının denklem ve eşitsizlik çözme prosedürlerini içeren BG-B4, BG-B5, OG-B3, OG-B4 ve OG-B5 kodlu rutin prosedürüne ait söylemleri matematiksel nesneleri manipüle etme hakkında ve süreç odaklı olmuştur. Burcu, denklem ya da eşitsizliklerde yer alan “ $=, >, <, \leq, \geq$ ” gibi sembollerin sağ ve sol tarafında yer alan cebirsel ifadeleri temsilen “her taraf”, “şu taraf”, “öbür taraf” ifadelerini kullanırken dağılma özelliği için sıklıkla “parantezleri dağıtmak”, sadeleşme özelliği için “birbirini götürmek” şeklinde eylem içeren ifadeleri kullanmıştır. Bununla birlikte katılımcı matematiksel nesnelere “- (i)m” ve “-(i)miz” gibi iyelik eklerini ekleyerek matematiksel nesneleri “bu, şu, o” gibi zamirlerle temsil ettiği ve “ekleyeceğim”, “çıkaracağım”, “çarpacağım” gibi insani eylem içeren ifadeler eşliğinde prosedürünü uygulamıştır. Ayrıca katılımcı birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizliklere yönelik OG-B4 kodlu rutininde kavramın farklı gerçekleşmeleri arasında geçişleri yapmada güçlük yaşamıştır (örneğin, Şekil 64, Şekil 67, Şekil 68). Bu bağlamda söylemin nesneleştirilmesi açısından ritüel katılımın iletişimsel belirleyicilerine örnekler sunan OG-B1, BG-B2, BG-B4, BG-B5, OG-B2, BG-B9, OG-B3 ve OG-B4 kodlu rutinleri Tablo 52’de ritüel katılımın bir örneği olarak kodlanmıştır.

Bununla birlikte katılımcı çözüm kümesi veya çözüm kümesinin elamanları hakkında konuştuğu BG-B3 kodlu keşif rutininde söylemlerinde anahtar kelimeleri günlük bir dil eşliğinde kullanmıştır (örneğin, [424-GD2], [435-GD5] ve [122-GD7]). Bununla birlikte Burcu’nun anlatı üretmeyi hedeflediği keşif rutininde de söylemleri kimi zaman matematiksel nesneleri manipüle etme hakkında olmuştur (örneğin, [424-GD2], [435-GD5], [118-GD7] ve [122-GD7]). Benzer durum ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerinin çözümlerinin varlığını belirlerken kullandığı BG-B11 kodlu rutin de görülmüştür. Katılımcı “diskriminantımız”, “bizim ... kökümüz” ve “kökümüz” gibi iyelik eki eklediği anahtar kelimelerle günlük bir dil eşliğinde söylemlerini ifade etmiştir. Bu

nedenle Burcu'nun BG-B3 ve BG-B11 kodlu rutinleriyle söyleme katılımı nesnelleştirme açısından hibrit katılımın bir örneği olarak kodlanmıştır.

Katılımcının rutin prosedürleri esneklik açısından ele alındığında katılımcı yeni bir çözüm yolunun daha farkına vardığı OG-B3 kodlu rutin prosedürü dışındaki BG-B4, BG-B5, OG-B2, OG-B4 ve OG-B5 kodlu rutin prosedürlerinde ezbere ve katı bir prosedür uygulamıştır. İkinci dereceden tek değişkenli denklemlerin çözüm kümesini iki farklı prosedürle kanonik bir şekilde belirleyen katılımcı odak grup görüşmelerinde alternatif bir yol daha uygulayacağını fark etmiştir. Çözüm kümesini belirlemede alternatif bir yol olarak gördüğü cebirsel ifadeyi “tam kareye çevirme” metoduyla denklemin çözümlerini belirlerken prosedüründe eksiklikler olmuş (örneğin, Şekil 71) ve prosedürünü uygulamada güçlük yaşamıştır (örneğin, [106-GD13]). Bu nedenle katılımcının OG-B3 kodlu rutin prosedürü esneklik açısından hibrit katılımın bir örneğini olarak kodlamıştır. Katılımcının birinci dereceden tek değişkenli denklem ya da eşitsizlikleri çözme rutinleri olan BG-B4 ve BG-B5 kodlu rutin prosedürleri ise bireysel görüşmedekine benzer şekilde esneklik açısından ritüel katılıma birer örnek sunmuştur. Burcu'nun OG-B2, OG-B4 ve OG-B5 kodlu rutinlerinde ise katılımcı prosedürünü uygulamada güçlük yaşamış (örneğin, OG-B4 rutini için Tablo 49'da yer alan söylemleri) ve bu nedenle prosedüründe sıklıkla eksiklik ya da hataların olmuştur (örneğin, OG-B2 kodlu rutini için Şekil 64, Şekil 67 ve Şekil 68'deki prosedürleri; OG-B4 rutini için Şekil 75' deki prosedürleri, OG-B5 kodlu rutini için Şekil 76'daki prosedürleri). Bu nedenle katılımcının OG-B2, OG-B4 ve OG-B5 kodlu rutinleri aracılığıyla söyleme katılımı esneklik açısından ritüel olmuştur.

Burcu'nun denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürleri bağlılık ve tutarlılık bağlamında incelendiğinde bireysel görüşmedeki benzer nedenlerden dolayı katılımcının BG-B4 kodlu rutini hibrit katılıma bir örnek teşkil ederken BG-B5↔BG-B3 rutin çifti keşifsel katılımın birer örneği olarak gözlemlenmiştir. Burcu'nun ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme rutini olan OG-B3 kodlu rutininde de denklemin çözüm kümesinin elemanlarını belirlemedeki gerçekleştirmelerinin birbirleriyle bağlantılı olduğu (örneğin, Şekil 71) ve

katılımcının ulaştığı sonucun prosedür süreciyle ilişkili olduğu gözlemlenmiştir. Bu nedenle OG-B3 kodlu rutin prosedürü de bağlılık-tutarlılık açısından söyleme katılımında keşifsel olarak kodlanmıştır. Bununla birlikte katılımcının denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümeleri belirlemede kullandığı OG-B2 kodlu rutini ise bağlılık-tutarlılık bağlamında ritüel bir katılımın örneğini sunmuştur. Katılımcı çözüm kümesinin elemanlarını belirlemek için başlattığı rutinini eksik ve kanonik olmayan bir şekilde uygulamış (örneğin, Şekil 64, Şekil 67 ve Şekil 68) ve sadece doğruların eksenleri kestiği noktaların çözüm kümesinin elemanlarını oluşturduğunu ifade etmiştir (örneğin, [113-GD9] ve [142-GD9]). Katılımcı "... sadece x 'e sıfır verip y 'yi bulurum, y 'ye sıfır verip x 'i bulurum [113-GD9]" şeklindeki söyleminde de belirttiği gibi prosedürünü eksik bir şekilde uygulamış ve kimi zaman sıralı ikilileri hatalı bir şekilde yazarak (örneğin, Şekil 64) bağlantıları kuramamıştır. Burcu'nun prosedüründe ulaştığı sonuçların doğru olmaması ve prosedüründeki adımlarının eksiklik ya da hatalar içermesi sebebiyle katılımcı OG-B2 kodlu rutiniyle bağlılık-tutarlılık açısından ritüel bir katılım sergilemiştir. Benzer şekilde ikinci dereceden tek değişkenli bağıntıların grafiklerini çizerken kullandığı OG-B4 kodlu rutin prosedüründe de eksiklik ve hatalar olduğu (örneğin, Şekil 75) gözlemlenmiştir. Katılımcının OG-B4 kodlu rutin prosedürünün performansında (Tablo 49) sıklıkla diğer katılımcıların öneri, yönlendirme ve onaylarına ihtiyaç hissetmesi, prosedüründe hatalar yapması ve prosedürünü tam ve doğru bir şekilde uygulamada güçlük yaşaması Burcu'nun adımlar arasındaki bağlantıları kuramadığını göstermiştir. Bu nedenle katılımcının OG-B4 kodlu rutini de bağlılık-tutarlılık bağlamında ritüel katılımın bir örneğini teşkil etmiştir. Bununla birlikte ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ya da eşitsizlik sistemlerini çözme prosedürünü içeren OG-B5 kodlu rutini ise katılımcının prosedürü kimi zaman hatalar içermesine rağmen hibrit katılımın bir örneğini sunmuştur. Katılımcının Şekil 76'daki gibi uyguladığı prosedüründe yer alan ardışık adımların çoğunlukla bağlantılı olduğu gözlemlenmiş ve Burcu'nun dikkatsizlikten kaynaklı hatalarının farkında olduğu gözlemlenmiştir. Katılımcı prosedüründeki eksiklik ya da hataların farkında olduğunu

“Ben yanlış çözmüş olabilirim [29-GD24]”, “Yanlış yaptım, şu an öyle düşünüyorum. Ben diskriminantına niye bakmadım, onu anlamadım, çarpanlarına ayıramadım sonra hemen kök yok dedim ama yanlış bence diskriminanta bakmam gerekiyordu ama unutmuşum. [97-GD25]” ve “Çözüm kümem boş küme çıktı o yüzden bıraktım. Devam ettiremedim, bir de ben a' yı bulmamışım [146-GD26]” şeklindeki kişisel söylemleriyle ifade etmiştir. Bu nedenle Burcu’nun OG-B5 kodlu rutini bağlılık-tutarlılık açısından hibrit katılımın bir örneği olmuştur.

Burcu’nun odak grup görüşmesindeki bulguları katılımcının söylemlerini gerekçelendirmesi açısından ele alındığında bireysel görüşmedekine benzer katılım örnekleri gözlemlenmiştir. Burcu’nun çözüm kümesi veya çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken kullandığı BG-B3 kodlu rutinine yönelik söylemleri incelendiğinde katılımcı evrensel kümedeki elemanın (elemanların) neden çözüm kümesine ait olduğunu bireysel görüşmedeki gibi anlatılar üreterek (örneğin, [101-GD7], [108-GD7] ve [124-GD7]) gerekçelendirmiştir:

91. B: Aralık belirtiyor bu da $[(\frac{19}{4}, \infty)$ ifadesini göstererek]

...

101. B: Çözüm kümesini belirten elemanların bulunduğu aralık.

...

108. B: Ben bunun çözüm kümesi $[(\frac{19}{4}, \infty)$ ifadesini göstererek] daha doğrusu şöyle söylemek

istiyorum. Hani bunun [...] burada $[(\frac{19}{4}, \infty)$ ifadesini göstererek] bir sürü eleman var, biz şu ana bunun hepsini yazmamıza gerek yok, o yüzden zaten bu aralığı belirttik. Bunun içindeki elemanlar çözüm kümesinin elemanları.

...

118. B: Mesela buraya altı yazsam, altı bunu sağlıyor ya o çözüm kümesinin elemanı.

...

122. B: Altı sağlıyor bunu, yedi sağlar, dokuz da sağlar [...] ya sonsuz her şey sağlar. Bundan $[\frac{19}{4}$ reel sayısını göstererek] öncekiler sağlamaz.

123. A: Sağlar ne demek?

124. B: Yerine yazdığımda doğru çıkar.

125. A: Nerede yerine yazdığında?

126. B: Hocam değişkenimizde [gülerək] z' de.

Bu nedenle katılımcının BG-B3 kodlu keşif rutinini gerekçelendirmesi de keşifsel katılımın bir örneğini sunmuştur. Bireysel görüşmeye benzer şekilde katılımcının BG-B2 ve BG-B9 kodlu rutinlerini matematiksel örnekler üzerinden süreç odaklı bir şekilde (örneğin, BG-B2 kodlu rutin için [22-GD23], [29-GD23], [40-GD23] ve Şekil 62; BG-B9 kodlu rutin için [88-GD15] ve [107-GD15]) gerekçelendirdiği için katılımcının bu rutinleri gerekçelendirme bağlamında hibrit katılım örneklerini sunmuştur. Bununla birlikte katılımcı ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme prosedürünü içeren OG-B3 kodlu rutininde prosedürünü neden öyle uyguladığına dair "...reel köklerimiz formülünü yazıyorum ...[159-GD13]", "Bir de eksi b bölü kök delta bölü iki a var [161-GD13]", "...bizim şöyle bir şeyimiz vardı ...[184-GD13]" ve "Geçen sene bunları test kitaplarında çözüyorduk [169-GD13]" şeklindeki söylemlerinde geçmiş öğrenme yaşantılarına ve hafızaya başvurmuştur. Bu nedenle katılımcının OG-B3 kodlu rutin prosedürünü gerekçelendirmesi ritüel katılımın bir örneği olarak kodlanmıştır.

Burcu'nun rutinleri aracılığıyla söyleme katılımı yetkinliği açısından ele alındığında ise katılımcı çoğunlukla ritüel bir katılım sergilemiştir. Odak grup görüşmeleri süresince katılımcının yetkinliği yönünden söyleme katılımının ritüel olduğuna dair bulgulara sıklıkla rastlanmıştır. Katılımcının odak grup görüşmesindeki bulguları, Burcu'nun prosedürünü uygularken bağımsız kararlar almada güçlük yaşadığını (örneğin, [216-GD2], [106-GD13], [47-GD14], [49-GD23] ve Tablo 49'daki prosedürleri) bir dış otoriteye güvendiğini (örneğin, [70-GD5], [103-GD5], [105-GD5], [124-GD25] ve Tablo 48) ve diğer katılımcılardan prosedürünün doğruluğu için onay istediğini (örneğin, [135-GD2] ve Tablo 49'da yer alan [114-GD20], [216-GD21], [269-GD21], [272-GD21], [281-GD21], [160-GD22] ve [178-GD22] söylemleri) göstermiştir. Bununla birlikte görüşme sürecinde katılımcının söylemlerinde tereddüt ederek duraksamalar yaşadığı (örneğin, [218-GD5]) ses tonundaki kısılmalarda (örneğin, [189-GD1] ve [29-GD23]) ve yüz ifadelerinde

(örneğin, [31-GD5]) gözlemlenmiştir. Burcu'nun OG-B1, BG-B2, OG-B2, BG-B4 ve OG-B4 kodlu rutinleri bu durumların sıklıkla yaşandığı ve katılımcının yetkinliği açısından ritüel katılımın iletişimsel belirleyicilerine örnekler sunan rutinleri olmuştur. Bu nedenle Burcu'nun OG-B1, BG-B2, OG-B2, BG-B4 ve OG-B4 kodlu rutinleriyle söyleme katılımı yetkinliği açısından ritüel katılımın birer örneği olarak kodlanmıştır. Bununla birlikte Burcu'nun BG-B5 ve BG-B11 kodlu rutinlerinde cebirsel gerçekleştirmelerini içeren prosedürlerini nasıl uygulayacağı noktasında bağımsız kararlar aldığı ve (nadir olsa da) söylemlerinde kendinden emin olduğu (örneğin, [128-GD26], [133-GD26] ve [193-GD26]) görülmüştür. Katılımcının bu rutinleriyle söyleme katılımı yetkinliği açısından keşifsel katılımın örnekleri olarak kodlanmıştır.

Katılımcının rutinleri uygulanabilirlik açısından incelendiğinde ikinci dereceden tek değişkenli bağıntıların grafiklerini çizerken kullandığı OG-B4 kodlu rutin prosedürü ritüel bir katılımın örneği olmuştur. Katılımcı GD20, GD21 ve GD22'de tahtada prosedürünü uygulama fırsatı bulmasına rağmen ardışık görev durumlarında kağıdında (Şekil 75) ikinci dereceden tek değişkenli bağıntıların grafiklerini çizmede ve prosedürünü uygulamada güçlük yaşamıştır. Buna rağmen katılımcının çözüm kümesi veya çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken kullandığı BG-B3 kodlu rutini 11 farklı görev durumunda uyguladığı gözlemlenmiş ve Burcu'nun bu rutiniyle uygulanabilirlik açısından söyleme katılımı keşifsel olmuştur. Benzer şekilde katılımcının bireysel görüşmelerde de uyguladığı BG-B4, BG-B5, BG-B9 ve BG-B11 kodlu rutinlerini de farklı görev durumlarında uygulayabildiği gözlemlenmiştir. Bununla birlikte katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri ya da eşitsizlik sistemlerini çözme prosedürlerini içeren OG-B5 kodlu rutini ise uygulanabilirlik bağlamında hibrit katılıma bir örnek olmuştur. Katılımcı prosedürünü GD23'te kanonik bir şekilde uygularken GD24, GD25 ve GD26 prosedürlerini eksik ya da hatalı bir şekilde uygulamıştır (Şekil 76).

Burcu'nun odak grup görüşmelerindeki bulgularından elde edilen 11 farklı rutini aracılığıyla kriterler bağlamında söyleme katılım türü ise Tablo 52'deki gibidir.

Tablo 52

Burcu'nun Rutinleri Aracılığıyla Kriterler Bağlamında Odak Grup Görüşmelerinde Söyleme Katılım Türü

Kriterler	Ritüel katılım	Hibrit katılım	Keşifsel katılım
Söylemin Nesneleştirilmesi	OG-B1 BG-B2 BG-B4 BG-B5 OG-B2 BG-B9 OG-B3 OG-B4	BG-B3 BG-B11	
Esneklik	BG-B4 BG-B5 OG-B2 OG-B4 OG-B5	OG-B3	
Bağlılık-Tutarlılık	OG-B2 OG-B4	BG-B4 OG-B5	BG-B5↔BG-B3 OG-B3
Gerekçeleştirme	OG-B3	BG-B2 BG-B9	BG-B3
Katılımcının yetkinliği	OG-B1 BG-B2 OG-B2 BG-B4 OG-B4		BG-B5 BG-B11
Uygulanabilirlik	OG-B4	OG-B5	BG-B3 BG-B4 BG-B5 BG-B9 BG-B10

Sonuç olarak Burcu'nun söyleme katılımı bireysel görüşmedekine benzer şekilde nesneleştirme, esneklik ve katılımcının yetkinliği bağlamında ritüel bir biçimde olmuştur. Katılımcının söyleme katılımı uygulanabilirlik açısından daha keşifsel iken, bağlılık-tutarlılık bağlamında üç farklı katılım biçiminin örnekleri eşit sıklıkta gözlemlenmiştir.

Zehra'nın Bireysel Görüşmedeki Rutinleri ve Söyleme Katılımına Yönelik Bulgular

Zehra'nın 26 farklı görev durumunu içeren ve beş farklı oturumda uygulanan yazılı verileri üzerine katılımcı ile yaklaşık 105 dakika süren bireysel bir görüşme yapılmıştır. Bu bireysel görüşmenin söylemsel analizi sonucunda katılımcıya ait 10 farklı rutin elde

edilmiştir. Zehra'nın denklem ve eşitsizlik içeren 26 farklı görev durumu için sergilediği rutinlerinden 9'unun ritüel, 1'inin ise keşif rutini olduğunu görülmüştür. Katılımcının denklem ve eşitsizlik kavramlarına yönelik rutinleri aşağıdaki durumlarda gözlemlenmiştir:

- Denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken ya da herhangi bir cebirsel ifadenin birinci dereceden tek değişkenli bir denklem ya da eşitsizlik olduğunu belirlerken (ritüel rutin)
- Denklem ve eşitsizlik kavramları arasındaki ilişkiyi (ilişkileri) açıklarken (ritüel rutin)
- Çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken (keşif rutini)
- Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken (ritüel rutin)
- Birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken (ritüel rutin)
- Denklem ve eşitsizlik sistemi kavramlarını tanımlarken (ritüel rutin)
- Birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerini çözerken (ritüel rutin)
- Çözüm kümesini analitik düzlemde grafik çizme yoluyla belirlemesi istendiğinde, denklem sistemlerini çözerken (ritüel rutin)
- İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken (ritüel rutin)
- İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken (ritüel rutin)

Zehra'nın bu durumlarda gözlemlenen 10 farklı rutini aracılığıyla söyleme katılım türü incelendiğinde; katılımcı nesneleştirme, esneklik ve gerekçelendirme bağlamında çoğunlukla ritüel bir katılım göstermesine rağmen, katılımcının yetkinliği bağlamında daha keşifsel bir katılım sergilemiştir. Bununla birlikte Zehra'nın rutinlerinin uygulanabilirliği incelendiğinde her üç katılım türüne dair örneklerle rastlanmıştır.

Odak grup görüşmeleri öncesinde, beş farklı oturumda yazılı olarak toplanan veriler üzerine yapılan bireysel görüşmede, Zehra'dan görev durumlarını nasıl yanıtladığını detaylı bir şekilde paylaşması istenmiştir. Araştırmacının “Denklem ve eşitsizlik kavramlarından anladıklarını paylaşır mısın?” sorusu üzerine Zehra ile araştırmacı arasında aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

2. Z: En az bir bilinmeyen ve [...] bir tane bilinmeyen içeren ve bir çözüm kümesi olan olduğunu düşünüyorum ben yani [...] çözüm kümesi olan şey cebirsel ifadelerdir.
3. A: Eşitsizlik için ne düşünüyorsun?
4. Z: Eşitsizlik de yine bir tane bilinmeyen mutlaka olması gerekiyor [...] sabit terimin de olması gerekiyor mu [...] emin değilim olabilir de [gülerek].
5. A: Hı hı.
6. Z: İki yine bu şekilde bunlar [...] bunların da çözüm kümesi olması gerekiyor. Bunlar işte denklem gibi değil çünkü bir şeye eşit değiller [...] bir tane değerleri olmuyor.

Burada Zehra, denklem ve eşitsizliklerin değişken içermesi gerektiğini “... bir tane bilinmeyen mutlaka olması gerekiyor [4]” şeklinde belirtmiş ve katılımcının “... çözüm kümesi olan ... cebirsel ifadelerdir. [2]” ve “...çözüm kümesi olması gerekiyor. Bunlar işte (eşitsizlikler) işte denklem gibi değil çünkü bir şeye eşit değiller [...] bir tane değerleri olmuyor [6]” şeklinde ifadeleriyle süreç odaklı bir tanımlama yapmıştır. Bireysel görüşmenin devamında da “... eşitsizlikler bir çözüm kümesi şeklinde veya bir aralık şeklinde yazılıyor ını burada da gösterdiğim gibi zaten [$x \geq 1$ ifadesini göstererek] ama denklemin sonucu oluyor [...] tek belirli bir sonucu oluyor, eşitsizliğin sonucu farklı, fazla olabiliyor yani bir aralık şeklinde. [18]” ve “Denklem bir bilinmeyeni bulunacak çözüm kümesi olması gerekiyordu. [351]” şeklinde rutinini tekrarlayan Zehra, bu söylemlerini Şekil 77’deki sözel gerçekleştirmeleri ile de onaylamıştır:

En az bir bilinmeyen, sabit terimi ve çözüm kümesi bulunan cebirsel ifadeler bütünü	
$x+2=4$ bir denklemdir	$x+2=4$ bir denklemdir
$x+2 \leq 4$ bir eşitsizliktir	$x+2 \leq 4$ bir eşitsizliktir
$x=4$ dersek bir denklem ifade etmez bilinmeyen yoktur	$x=4$ dersek bir denklem ifade etmez bilinmeyen yoktur

Şekil 77. Zehra’nın denklem ve eşitsizlik tanımına yönelik sözel gerçekleşmesi

Burada katılımcı “ $x = 4$ dersek bir denklem ifade etmez bilinmeyen yoktur” şeklinde doğru olmayan bir örnek sunsa da denklem ve eşitsizliklerin değişken içermesi gerektiğini

bireysel görüşme süresince tekrarlayarak ifadelerinde belirtmiştir. Katılımcı “ $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\frac{a}{2} - 20 = a + 1$ ” cebirsel ifadesinin bir denklem olduğuna dair verdiği kararı, “Denklem olduğunda yine [...] bir tane bilinmeyeni var ve [...] çözmedim [...] birinci dereceden tek bir tane bilinmeyen a burada [...] o yüzden denklem olduğuna karar verdim yani. [41]” şeklindeki söylemleriyle belirtmiştir. Denklem ve eşitsizliklerin değişken içermesi gerektiğini belirten katılımcı, değişkenin elemanı olduğu evrensel kümenin çözüm kümesini belirlemede önem teşkil ettiğini Şekil 78’deki sözel gerçekleşmesinde belirtmiştir. Ayrıca bu durumu Zehra, “ $\frac{3x}{x-5} = 3 + \frac{15}{x-5}$ ” denkleminin çözüm kümesi hakkında konuşurken “(çözüm kümesi) tüm reel sayılar [128] ııı buradaki aralığı [$x \in \mathbb{R}$ ifadesini kastederek] reel sayılar olarak vermişsiniz o yüzden. [130]” şeklinde sesli bir şekilde de belirtmiştir.

Denklemi çözmek için gerekli bazı şeyler olması gerekiyor
hangi sayı kümesinde olduğu gibi. Hangi kümede çalıştığımızı
bilmezsek işlem yapamayız.

Denklemi çözmek için gerekli bazı şeyler olması
gerekiyor
hangi sayı kümesinde olduğu gibi. Hangi kümede
çalıştığımızı bilmezsek işlem yapamayız.

Şekil 78. Zehra’nın denklem çözümüne ilişkin sözel gerçekleşmesi

Katılımcının denklem ve eşitsizlik hakkındaki söylemleri, kavramları tanımlamada eşitlik ve sıralama bağıntılarını da dikkate aldığını ortaya koymuştur. Bireysel görüşmede araştırmacı ile katılımcı arasında aşağıdaki gibi iletişimler gerçekleşmiştir:

19. A: Evet sence bu bir denklem mi? [$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $-3x + \sqrt{7} = 0,5x - 4$ ” cebirsel ifadesini göstererek]

20. Z: Bence denklem.

21. A: Nasıl karar verdin?

...

26. Z: Şey diye düşündüm, çözüm kümesine bakmadım ama eşitsizlik olması için sonuçta eşitsizlikte eşittir kavramı yerine büyük-eşittir, büyüktür, küçüktür, küçük-eşittir kullanıyoruz.

27. A: Eşittir kavramı hangisi?

28. Z: Buradaki eşitlik [$=$] *sembolünü yuvarlak içine alarak*] o yüzden ben bunun bir denklem olduğunu düşündüm yani.

...

42. A: Mesela şu sence nedir? [$x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $x - 9 < 8 + 2x$] *cebirsel ifadesini göstererek*]

43. Z: Bu eşitsizlik.

44. A: Peki ona nasıl karar veriyorsun?

45. Z: Hem eşitsizliğin olması gereken ifadelerden bir tanesi var o şekilde karar verdim.

46. A: O zaman denklem için de tek baktığın şey değişken değil o zaman doğru mu anlıyorum?

47. Z: Nasıl yani?

48. A: Mesela bu [$-3x + \sqrt{7} = 0,5x - 4$] *cebirsel ifadesini göstererek*] bunun denklem olduğuna nasıl karar verdin diyorum, bir değişken var diyorsun ama değişken burada da [$x - 9 < 8 + 2x$ *cebirsel ifadesini göstererek*] var ve bu niye denklem değil?

49. Z: İki şeyden dolayı bu işaret şey burada eşittir ifadesi var [$-3x + \sqrt{7} = 0,5x - 4$] *cebirsel ifadesini göstererek*], eşittir ifadesi olunca denklem oluyor burada [$x - 9 < 8 + 2x$] *cebirsel ifadesini göstererek*] küçüktür işareti var.

50. A: O şekilde ayırabiliyorsun?

51. Z: Yani buna da küçük-eşittir koysak [$-3x + \sqrt{7} = 0,5x - 4$] *cebirsel ifadesini göstererek*] bu da bir eşitsizlik olur.

Burada Zehra, değişken içeren bir cebirsel ifadenin “=” sembolünü içermesi durumunda denklem (örneğin, [28], [49]) “<, ≤, >, ≥” gibi sembollerden birini içermesi durumunda eşitsizlik olduğunu (örneğin, [45], [51]) belirtmiştir. Bu durumun bir başka örneğinde ise katılımcı “ $c \in \mathbb{R} - \{5\}$ olmak üzere, $\frac{2c}{c-5} \leq 1$ ” ifadesi için “Bunun da yine birinci dereceden bir değişkenli eşitsizlik olduğunu düşünüyorum [...] tek değişken c burada [...] ve küçük-eşittir işareti var. [53]” şeklindeki söylemiyle belirtmiştir. Katılımcıya ait Şekil 77’deki “ $x + 2 = 4$ ” ve “ $x + 2 \leq 4$ ” biçimindeki denklem ve eşitsizlik için örneklerini içeren görsel araçları da Zehra’nın denklem ve eşitsizlik tanımlama rutinlerini onaylamıştır. Denklem ve eşitsizlikleri birbirinden içerdikleri semboller aracılığıyla ayırt ettiğini belirten [49] katılımcı, araştırmacının “Peki o zaman denklem eşitsizlik arasında sence bir ilişki var mıdır, var olduğunu düşünüyorsan örnek verebilir misin?” şeklindeki sorusunu da “Bence var orada da söyledim zaten çünkü bunların çözüm metotları vesaire benzer aynı şekilde çözüyoruz denklemlerini falan o yüzden ııı bir ilişki var aralarında benzerlik var yani. [8]” şeklinde yanıtlamıştır. Katılımcı Şekil 79’daki görsel araçlarıyla

da söylemlerini onaylamış ve “çözüm metotlarının aynı olmasından” kastettiği durumu Şekil 79’daki gibi cebirsel ve sözel gerçekleştirmeleriyle de açıklamıştır. Ayrıca Şekil 78’deki “ $2x + 4 = 6$ ” ve “ $5x + 5 < 0$ ” şeklindeki denklem ve eşitsizlik örnekleri de yine katılımcının tanımlama rutinini onaylayan görsel araçlarına örnek olarak rastlanılmıştır:

Sözel gerçeğeleşme

Bence var. Çözüm metodlarının aynı olduğunu düşünüyorum. Bu yüzden birbirleriyle bağlantılıdır. Matematiksel olarak da benziyorlar zaten.

Bence var. Çözüm metodlarının aynı olduğunu düşünüyorum. Bu yüzden birbirleriyle bağlantılıdır. Matematiksel olarak da benziyorlar zaten.

Sözel gerçeğeleşme

$2x + 4 = 6$

*Çözerken ilk önce sabit terimi işaret değiştirerek karşıya atıyoruz (toplama durumunda olduğu için toplamaya göre tersi). Sonra x'in katsayısını (çarpma durumunda) bölme şeklinde karşıya atıyoruz ve cevabımızı bulmuş oluyoruz.

$2x = 6 - 4$
 $2x = 2$
 $x = \frac{2}{2}$
 $x = 1$

Cebirsel gerçeğeleşme

Sözel gerçeğeleşme

$5x + 5 < 0$

*Çözerken ilk önce sabit terimi işaret değiştirerek karşıya atıyoruz (toplama durumunda olduğu için toplamaya göre tersi). Sonra x'in katsayısını (çarpma durumunda) bölme şeklinde karşıya atıyoruz ve cevabımızı bulmuş oluyoruz.

$5x < 0 - 5$
 $5x < -5$
 $x < \frac{-5}{5}$
 $x < -1$

Cebirsel gerçeğeleşme

Şekil 79. Zehra'nın denklem ve eşitsizlik arasındaki ilişkiyi açıklarken kullandığı görsel araçları

Zehra'nın denklem ve eşitsizlik kavramları arasındaki ilişkiyi açıklarken kullandığı sözel gerçekleştirmeleri aynı zamanda katılımcının denklem ve eşitsizlik çözme prosedüründe yer

alan sesli gerçekleştirmelerini (örneğin, Tablo 54) onaylayan görsel araçları olmuştur. Katılımcı bireysel görüşmede denklem ve eşitsizlik kavramları arasında kurduğu ilişkiyi farklı bir örnek içinde benzer söylemler de bulunarak ifade etmiştir:

12. Z: <Şekil 80'deki Gösterge 1 ve gösterge 2'yi yazıyor> şimdi bunların çözüm metotları zaten [...] önce bu ikiye tersi şeklinde yani toplamaya göre tersi olur artılı olduğu için eksi olarak karşı tarafa atıyoruz [...] iki x eşittir iki geliyor (gerçekleşme 1) eksi iki yaptığımız için [...] sonra bu da x burada çarpım durumunda olduğu için bölüm durumuna getiriyoruz, burada da x iki bölü ikiden bir geliyor (gerçekleşme 2) burada da yine aynı şekilde burada eşittir demiyor, büyük-eşittir diyor [...] ama yine aynı şekilde çözüyoruz [...] buradaki iki x büyük-eşittir iki yapıyoruz (gerçekleşme 3) sonra x eşit iki bölü ikiden (gerçekleşme 4) bir [...] x büyük-eşittir bir (gerçekleşme 5). Burada [gösterge 1'i göstererek] sadece bir tane cevap var x eşittir bir [gerçekleşme 2'yi göstererek] ama burada [gösterge 2'yi göstererek] x birden büyük ya da bire eşit tüm sayılar [gerçekleşme 5'i göstererek].

Burada Zehra kavramlar arasında kurduğu ilişkiyi "... aynı şekilde burada eşittir demiyor, büyük-eşittir diyor [...] ama yine aynı şekilde çözüyoruz ... [12]" söylemiyle sesli olarak da vurgulamış ve Şekil 80'deki görsel araçları eşliğinde rutini tekrarlamıştır:

Şekil 80. Zehra'nın denklem ve eşitsizlik arasındaki ilişkiye yönelik söylemlerine ait cebirsel gerçekleştirmeleri

Bireysel görüşme sürecinde katılımcının değişken ve bilinmeyen kavramlarını birbirini yerine sıklıkla kullandığı gözlemlenmiş (örneğin, [41] ve [53]) ve söylemlerinde Zehra, " x, y, z, a, b, c " gibi harf gösterimlerinin tümünün değişkeni temsil ettiğini belirtmiştir:

247. A: Burada [$a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ax + 2by = c$ ve $-2ax - 3c = 4by$ cebirsel ifadelerini göstererek] sence değişken(ler) hangisi?

248. Z: Ya burayı derste de konuşmuştuk [...] ben dersten sonra bayağı düşündüm bunu [...] şimdi bence ııı bu x ve y değişken ama ben bunu kanıtlamıyorum yani çünkü a da değişebilir [...] ama a şeyden dolayı böyle a bu şey gibi geliyor bize x 'in katsayısı [...] hep böyle çıkıyor ama a 'nın değişken olmaması için bir sebep yok bence.

249. A: Anladım peki c 'ye hangi gözle bakıyorsun?

250. Z: İki c sabit terim [...] ama c değişken olabilir çünkü hepsi değişebilir yani [...] bunu kanıtlayamıyorum ben.

...

372. A: Bu cebirsel ifade [$a, b, c, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ax^2 + bx = c$] ifadesini göstererek] için ne düşünürsün?

373. Z: Burada ikinci dereceden tek değişkenli demişim çünkü tek değişkenli, değişken üssü demişim evet değişken üssü iki olduğu için yani.

374. A: Değişken nedir burada?

373. Z: x .

374. A: a , b ve c sence nedir?

375. Z: İşte demiştim ya a ve b [...] değişken de olabilir ama bunlar genellikle katsayı gözüyle bakıyoruz a ve b 'ye, c 'ye de sabit terim gözüyle bakıyoruz ama bunlar değişken de olabilir.

Burada Zehra'nın cebirsel ifadelerde yer alan harfli gösterimlerin bağlama bağlı cebirsel ayrımına dair kendinden emin olmayan söylemlerde bulunduğu görülmüş ve katılımcının değişkenler için "... değişebilir" şeklindeki ifadesi dışında, kavram tanımı hakkında herhangi bir anlatısına rastlanmamıştır. Bununla birlikte katılımcı denklemleri ya da eşitsizlikleri doğrulayan reel sayıları (bilinmeyenler) temsilen "cevap" ve "sonuç" gibi terimleri de kullanmıştır (örneğin, [12] ve [18]). Buna rağmen Zehra'nın çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken, çözüm kümesinin elemanlarının denklem ya da eşitsizlikleri sağladığını (doğruladığını) belirten anlatılarına rastlanmıştır. Katılımcı " $2x - 3 \geq 7$ " eşitsizliği sağlayan reel sayıların kümesini belirlerken " $[5, \infty)$ " aralığını elde etmiş ve araştırmacının "Şimdi bu senin için ne ifade ediyor?" sorusu üzerine aralarında aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

142. Z: Bu bir aralık [...] bu eşitsizliğin alabileceği reel sayı değerlerini gösteren aralık [...] burada iki x eksi üç yazıyor [$2x - 3 \geq 7$] eşitsizliğini göstererek] buna göre alabileceği yani.

143. A: Tamam mesela buradan bir eleman söyle bana bu kümenin içinde yer alan.

144. Z: Altı.

145. A: Altı [...] ne anlam ifade ediyor bu eşitsizlik için?

146. Z: Altı bu eşitsizliği sağlar [...] yani x yerine, değişkenimiz yerine altı yazdığımızda eşitsizliğimiz doğru çıkar.

Burada Zehra, çözüm kümesinin elemanlarının eşitsizliği doğrulayan elemanlar olduğunu "... değişkenimiz yerine altı yazdığımızda eşitsizliğimiz doğru çıkar. [146]" şeklinde ifade etmiştir. Benzer şekilde " $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x - 1 \leq 5 - x < 8 + 3x$ " eşitsizliği için

uyguladığı prosedür sonucunda elde ettiği $(-\frac{3}{4}, 3]$ aralığı için “Yani mesela burada değişken yerine üç yazabiliriz ama eksi üç bölü dört yazamayız, o dahil olmayacak, üç yazarsak eğer cevabımız doğru çıkarmış çünkü burada dahil olabileceğini bize söylemiş. [186]” şeklinde açıklamalarda bulunmuştur. Bir başka örnekte ise katılımcı, “ $c \in \mathbb{R} - \{5\}$ olmak üzere, $\frac{2c}{c-5} \leq 1$ ” ifadesinde uyguladığı hatalı prosedür sonucunda çözüm kümesini “ $(-\infty, -5]$ ” aralığı şeklinde yazmış ve araştırmacının “Ne ifade ediyor peki bu?” sorusunu “Bu ifadeyi doğrulayan $[\frac{2c}{c-5} \leq 1]$ ifadesini göstererek] tüm reel sayıların aralığı. [67]” şeklinde yanıtlamıştır. Zehra “ $x^2 - 3x + 2 = 5x - 10$ ” biçimindeki ikinci dereceden tek değişkenli denklemin çözümüne dair prosedüründe yer alan “ $x = 6$ ” ve “ $x = 2$ ” biçimindeki gerçekleştirmeleri için ise “Bu denklemin kökleri [...] x ’in alabileceği değerler [...] öyle olması gerekiyor. [404]” şeklinde bir söylemde de bulunmuştur. Ayrıca katılımcı birinci dereceden iki değişkenli “ $2x - 6y = 12$ ” denkleminde, denklemin analitik düzlemde temsil ettiği doğrunun eksenleri kestiği noktalar için “... x ve y eksenindeki noktalar [...] mesela bu doğruyu bu denklemi sağlayan noktalar [305]” söyleminde de bulunmuştur. Değişkenin ait olduğu evrensel kümedeki her elemanın denklemi sağlamasını “... tüm x değerlerinde cevabımız doğru çıkar [126]” ve “... (çözüm kümesi) tüm reel sayılar [128]” anlatılarıyla ifade eden Zehra bu anlatılarını Oturum 2’de yer alan “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{x^2-3x+2}{x-2} = 5$ ve $x^2 - 3x + 2 = 5x - 10$ denklemlerinin çözüm kümelerini karşılaştırınız. Ne gördüğünüzü açıklayınız.” şeklindeki görev durumuna dair görsel araçlarıyla Şekil 81’deki gibi onaylamıştır:

The image shows handwritten mathematical work on a grid background. It consists of several colored boxes containing text and equations:

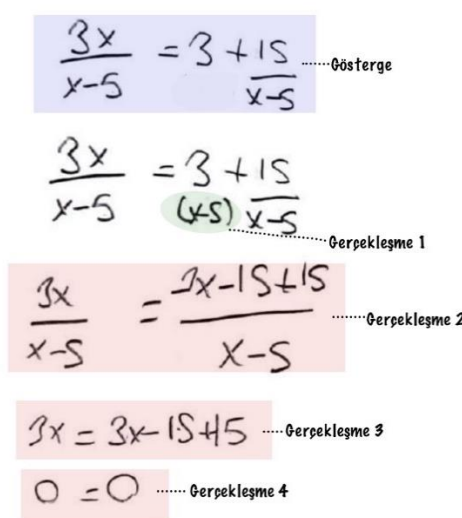
- A blue box at the top left contains the equation: $\frac{3x}{x-5} = \frac{3x-18+5}{x-5}$
- A light blue box at the top right contains the equation: $3x-18=3x-15$ and $0=0$
- A green box at the bottom left contains the text: "totooloji yani çözüm kümesi" and "tüm reel sayılar".
- An orange box at the bottom right contains the text: "totooloji yani çözüm kümesi tüm reel sayılar".
- A green box at the bottom right contains the text: "her x değerinde sonuç doğru çıkar. Yani diğer denklemlerle aynı şekilde."

Şekil 81. Zehra’nın Oturum 2’de yer alan görev durumu 4’e ait görsel araçları

Zehra'nın " $\frac{3x}{x-5} = 3 + \frac{15}{x-5}$ " denkleminin reel sayılarda çözüm kümesini belirlerken uyguladığı prosedürü ise Tablo 53'te yer almaktadır.

Tablo 53

Zehra'nın Denklem Çözme Prosedürü

Ne söylüyor?	Ne yapıyor?
122. Z: x eksi beşle şuranın [<i>gerçekleşme 1'de 3 sayısını göstererek</i>] paydasını eşitleyeceğiz yani buradaki üçü x eksi beşle çarpacağız (<i>gerçekleşme 1</i>) [...] şurası aynı geliyor zaten [...] paydalar zaten iki tarafa eşit olduğu için yazmamıza gerek yok [...] paydalar birbirlerini çünkü bu paydaları şey yapınca birbirini götürüyor ama yine de yazayım [...] üç x eksi on beş artı on beş [...] üç x bölü x eksi beş (<i>gerçekleşme 2</i>).	
124. Z: Bunun (<i>sadeleştirme işleminin</i>) bir sebebi var ben bunu öğrenmiştim ama şu an hatırlayamadım.	
126. Z: Ben tam hatırlayamadım o yüzden burada bu paydaları saymazsak işte üç x eşittir üç x eksi on beş artı on beş (<i>gerçekleşme 3</i>) [...] üç x bu tarafa geçse zaten burası sıfır geliyor [...] eksi on beş ve artı on beş de sıfır [...] sıfır eşittir sıfır geliyor (<i>gerçekleşme 4</i>) [...] yani bu doğru bir ifade [...] sıfır eşittir sıfır. O yüzden tüm x değerlerinde cevabımız doğru çıkar.	
128. Z: (<i>çözüm kümesi</i>) tüm reel sayılar.	

Burada Zehra'nın "... beşle şuranın [*gerçekleşme 1'de 3 sayısını göstererek*] paydasını eşitleyeceğiz ... [122]", "... buradaki üçü x eksi beşle çarpacağız ... [122]", "... bu paydaları şey yapınca birbirini götürüyor... [122]", "... üç x bu tarafa geçse zaten burası sıfır geliyor [126]" şeklindeki söylemleri, katılımcının matematiksel nesneleri manipüle edilebilir somut nesneler olarak ele aldığını göstermiştir. Katılımcının birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürlerine yönelik söylemleri incelendiğinde de Tablo 53'tekine benzer şekilde Zehra'nın matematiksel nesneleri manipüle edilebilen nesneler gibi gördüğünü ortaya koyan ifadelerine sıklıkla rastlanmıştır. Katılımcı söylemlerinde dağılma özelliğini uyguladığını belirtmek için "... dördü/burayı

dağıtacağım...”, “... şu kısmı dağıtıyoruz ...” ve “... bu tarafı dağıtıp”; sadeleştirme özelliğini uyguladığını belirtmek için “... birbirini götürmek” ve paydaları eşitlemek için genişletme işlemi uyguladığını belirtmek için “ortak paydada buluşturmak” gibi insani eylem içeren ifadelerle yer vermiştir. Bununla birlikte katılımcı; ters işlemleri uyguladığını söylemlerinde “buradaki ... buraya/karşı tarafa atıyorum”, “çıkarma durumunda karşı tarafa artılı halini atacağız”, “ x ’i yalnız bırakmamız gerektiği için buradaki (ikiyi) bölüm olarak karşı tarafa attım”, “buradaki bölüm durumunda olduğu için karşı tarafa çarpım durumunda gönderiyoruz” ve “buradaki eksi (artı) x ’imizde bu tarafa artı (eksi) x olarak geçiyor” şeklindeki ifadeleri eşliğinde belirtmiştir. Ayrıca Zehra, rutininde görevi ne olarak gördüğünü “... x ’i yalnız bırakmamız gerektiği için ... [132]”, “Bir çözüm kümesine ulaşabilmek için x ’i yalnız bırakmamız gerekiyor çünkü biz eğer bu iki x olarak kalırsa istediğimiz cevaba ulaşamamış oluruz. [134]” ve “... burada yine x ’in yalnız kalması gerekiyor çözümüne ulaşabilmek için ... [148]” şeklindeki söylemleriyle belirtmiştir. Katılımcının “... denklemin sonucu oluyor [...] tek belirli bir sonucu oluyor, eşitsizliğin sonucu farklı, fazla olabiliyor yani bir aralık şeklinde [18]” şeklindeki söylemi de dikkate alınarak Zehra, birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizlikleri çözme rutininde (katılımcı gözünden) görevi, değişkenin eşit olduğu reel sayı(ları) belirlemek olarak görmüş ve bu doğrultuda prosedürünü uygulamıştır. Katılımcının bireysel görüşmede birinci dereceden denklem ve eşitsizlikleri çözerken uyguladığı prosedürler ise Tablo 54’te yer almaktadır.

Tablo 54

Zehra'nın Birinci Dereceden Tek Değişkenli Denklem ve Eşitsizlik Çözme Prosedürü

Görev Durumu: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $4(x - 5) + 2x = -x + 3(x + 1)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

105. Z: Burada ilk önce buradaki dördü dağıtacağım [...] dört x eksi yirmi artı iki x eşittir (gerçekleşme 1) [...] ııı yine aynı kaldım [gülerek] [...] burada [...] sanırım sadece şu kısmı $[+3 \text{ ifadesinin altını çizerek}]$ dağıtıyoruz ama nedenini bilmiyorum [gülerek] ve nedenini kestiremiyorum şu an emin değilim [...] ama bu tarafı dağıtıp çözersem eğer bu eksi x dursun [...] burada üç x artı üç oluyor (gerçekleşme 1) [...] sonra burası da altı x eksi yirmi eşittir iki x artı üç oluyor (gerçekleşme 2) [...] sonra buradaki iki x buraya [...] dört x eşittir yirmi üç oldu (gerçekleşme 3) [...] x eşittir yirmi üç bölü dört geldi (gerçekleşme 4).

$$4(x-5) + 2x = -x + 3(x+1) \dots \text{Österge}$$

$$4x - 20 + 2x = -x + 3x + 3 \dots \text{Gerçekleşme 1}$$

$$6x - 20 = 2x + 3 \dots \text{Gerçekleşme 2}$$

$$4x = 23 \dots \text{Gerçekleşme 3}$$

$$x = \frac{23}{4} \dots \text{Gerçekleşme 4}$$

Oturum 2- Görev Durumu 3: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $2(x - 5) + \frac{x-1}{3} = -3x + 4$ denklemini sağlayan reel sayıları belirleyiniz.”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

107. Z: Burayı yine dağıtacağım [...] iki x eksi on [...] x eksi bir bölü üç [...] eksi üç x artı dört (gerçekleşme 1) paydayı eşitlemeden bir çözüm bulamayız [...] ııı şurayı üçle çarpacağız [...] üç kere iki x altı x [...] eksi altmış [...] eksi on çarpı üç eksi otuz [...] burada da zaten artı x eksi bir var eksi üç x artı dört (gerçekleşme 2) [...] sonra buradaki bölümde buradaki üçü karşı taraf atıyorum [...] bu tarafa aynı kalıyor altı x eksi otuz [...] zaten şurayı da şöyle yazalım kolay olsun [...] altı x artı x yedi x [...] eksi otuz bir [...] üçü çarpım durumunda diğer tarafa atıyoruz [...] eksi dokuz x artı on iki oluyor (gerçekleşme 3) [...] buradan sonra bu dokuz x 'i artı dokuz x olarak bu taraf alsak [...] on altı x eşittir [...] otuz biri de bu tarafa alsak yine artı olarak bu eksi olduğu için [...] on altı x eşittir kırk üç oluyor (gerçekleşme 4) [...] x eşittir kırk üç bölü on altı (gerçekleşme 5) evet çözümü [gerçekleşme 6'yi yazıyor] bu olmuş oluyor.

$$2(x-5) + \frac{x-1}{3} = -3x+4 \dots \text{Österge}$$

$$2x-10 + \frac{x-1}{3} = -3x+4 \dots \text{Gerçekleşme 1}$$

$$\frac{6x-30+x-1}{3} = -3x+4 \dots \text{Gerçekleşme 2}$$

$$7x-31 = -9x+12 \dots \text{Gerçekleşme 3}$$

$$16x = 43 \dots \text{Gerçekleşme 4}$$

$$x = \frac{43}{16} \dots \text{Gerçekleşme 5}$$

$$4x = \frac{43}{4} \dots \text{Gerçekleşme 6}$$

Oturum 2- Görev Durumu 5: “ $2x - 3 \geq 7$ eşitsizliği sağlayan reel sayıların kümesi olan aralığı oluşturunuz.”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

132. Z: Bu bir eşitsizlik [...] buradaki üç yine çıkarma durumunda olduğu için artılı şekilde iki x büyük-eşittir on oluyor (gerçekleşme 1) [...] x büyük-eşittir beş oluyor (gerçekleşme 2) [...] burada iki x büyük-eşittir on dedim sonra bu x burada bu x ile iki çarpım durumunda [...] x 'i yalnız bırakmamız gerektiği için buradaki x 'i bölüm olarak karşı tarafa attım [...] hayır x 'i değil ikiyi bölüm olarak karşı tarafa attım x yalnız kalması gerektiği için.

$$2x-3 \geq 7 \dots \text{Österge}$$

$$2x \geq 10 \dots \text{Gerçekleşme 1}$$

$$x \geq 5 \dots \text{Gerçekleşme 2}$$

$$[5, \infty) \dots \text{Gerçekleşme 3}$$

140. Z: Beşten büyük ya da beşe eşit tüm reel sayılar [...] beş kapalı olacak [...] sonsuz açık olur (gerçekleşme 3).

Oturum 2- Görev Durumu 6: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} > 1$ eşitsizliğinin çözümlerini belirleyiniz.”

Ne söylüyor?

148. Z: Burada da yine paydayı eşitlememiz gerekiyor [...] bunu iki ile bunu üçle çarpacağız (gerçekleşme 1) [...] ortak paydada buluşup altı olacak (A: Evet) altı yazalım şuraya iki x eksi üç x eksi on iki büyüktür bir (gerçekleşme 2) [...] buradaki payda bölme durumunda çarpım şeklinde iki x eksi üç x eksi on iki büyüktür altı yapacağız [...] buradaki bölüm durumunda olduğu için karşı tarafa çarpım durumunda gönderiyoruz [...] altı çarpı birden altı geliyor (gerçekleşme 3) daha sonra eksi x eksi on iki büyüktür altı yapıyor (gerçekleşme 4) [...] bu on iki burada çıkarma durumunda karşı tarafa artılı halini alır [...] pozitif [...] evet karşı taraf artı halini atacağız [...] eksi x büyüktür on sekiz (gerçekleşme 5) burada yine x 'in yalnız kalması gerekiyor çözümüne ulaşabilmek için ııı x diyeceğiz [...] ama eksi ile çarptığımızda eşitsizlik yön değiştirir [...] o yüzden x , eksi on sekizden küçüktür (gerçekleşme 6).

Ne yapıyor?

$\frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} > 1$ Gösterge
(2) (3)
Gerçekleşme 1
 $2x - 3x - 12 > 6$ Gerçekleşme 2
 $-x - 12 > 6$ Gerçekleşme 3
 $-x > 18$ Gerçekleşme 4
 $-x > 18$ Gerçekleşme 5
 $x < -18$ Gerçekleşme 6

Oturum 2- Görev Durumu 7: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x - 1 \leq 5 - x < 8 + 3x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini aralık olarak ifade ediniz.”

Ne söylüyor?

172. Z: Ben bunu ilk önce x eksi bir küçük-eşittir beş eksi x demişim (gerçekleşme 1'i yazıyor) [...] sonra beş eksi x küçüktür sekiz artı üç x demişim (gerçekleşme 5'i yazıyor) önce bu tarafa çözelim ııı x [...] bir dakika beş eksi x (gerçekleşme 1) [...] tamam buradaki eksi bir var burada çıkarma durumunda olduğu için artı olarak gidiyor x bu tarafa gönderiyoruz [...] beş eksi x oluyor buradaki eksi x 'imizde bu tarafa artı x olarak geçiyor [...] altı eksi x oldu yine büyük-eşittir x (gerçekleşme 2) bu tarafa [...] burada da [gerçekleşme 3'ü yazıyor] x 'imizi yalnız bırakacağız [...] buradaki iki [gerçekleşme 3'ü göstererek] bölüm halinde bu tarafa alacağız altı bölü ikiden üç geliyor (gerçekleşme 4).

174. Z: Bu tarafa da (gerçekleşme 5'i göstererek) aynı işlemleri yapınca eksi x 'imizi artı x olarak karşıya atıyoruz [...] sekiz artı dört x oluyor [...] beş [...] sonra buradaki sekizi [...] bir dakika tamam [...] ııı sekiz bu tarafa eksi olarak geçer, eksi üç oluyor [...] eksi üç eksi x küçüktür [...] üç x [...] eksi x 'imiz artı x olur (gerçekleşme 6) [...] eksi üç küçüktür dört x oluyor (gerçekleşme 7) buradan [...] sonra burada [...] burada şey yapalım x 'imizi yalnız bırakalım çünkü tamamlamamış olur işlemimiz [gümlere] eksi üç bölü [...] bölüm şeklinde eksi üç bölü dört küçüktür x oluyor (gerçekleşme 8).

176. Z: Sonra bunları ııı birleştiriyoruz yani yazıyoruz. Eksi üç bölü dört küçüktür işareti x [$\leq$ sembolünü yazıyor] üç (gerçekleşme 9).

178. Z: ıııı bunu ya çözdüğüm sıraya göre yazdım [...] ve zaten burada mesela ben bunu diğer tarafa yazsaydım eğer ifade hatalı çıkıyor [...] eksi üç bölü dört, üçten büyük değil.

182. Z: Bunu bir aralık olarak ifade etmem gerekirse (gerçekleşme 10) ııı burası dahil [...] burası dahil değil.

Ne yapıyor?

$x - 1 \leq 5 - x < 8 + 3x$ Göster
 $x - 1 \leq 5 - x$ Gerçekleşme 1
 $x \leq 6 - x$ Gerçekleşme 2
 $2x \leq 6$ Gerçekleşme 3
 $x \leq 3$ Gerçekleşme 4
 $5 - x < 8 + 3x$ Gerçekleşme 5
 $-3 - x < 3x$ Gerçekleşme 6
 $-3 < 4x$ Gerçekleşme 7
 $-\frac{3}{4} < x$ Gerçekleşme 8
 $-\frac{3}{4} < x \leq 3$ Gerçekleşme 9
 $(-\frac{3}{4}, 3]$ Gerçekleşme 10

Burada Zehra'nın prosedürünü uygularken kullandığı "... yine aynı kaldım [*gülerek*] [...]" burada [...] sanırım sadece şu kısmı [*+3 ifadesinin altını çizerek*] dağıtıyoruz ama nedenini bilmiyorum [*gülerek*] ve nedenini kestiremiyorum şu an emin değilim [105]", "... paydayı eşitlemeden bir çözüm bulamayız... [107]" ve "... burada yine x 'in yalnız kalması gerekiyor çözümüne ulaşabilmek için ... [148]" şeklindeki söylemleri, katılımcının ezbere ve katı bir prosedür uyguladığını göstermiştir. Bununla birlikte katılımcının dağılma özelliğini kullanırken çarpma işlemini nasıl uygulayacağı konusunda aşağıdaki alıntıda görüldüğü gibi güçlük yaşadığı gözlemlenmiş,

94. Z: ... bunu ayrı ayrı dağıtmayı düşündüm ben az önce üç x eksi iki olarak düşünüyorum ama burada yine şey [...] üç x eksi ikiyi x eksi dörde dağıtırsak üç x kare olmuyor mu? [*Onay bekliyor*] bence öyle olması gerekiyor o yüzden burada yanlış çözmüşüm <*kağıdındaki çözümünü doğru olmasına rağmen*> ikinci dereceden bir denklem olabilir. <*" $3x - 2(x - 4)$ " cebirsel ifadesinde 2 ile $(x - 4)$ ifadesini çarpmak yerine $(3x - 2)$ ifadesi ile $(x - 4)$ ifadesini çarpması gerektiğini belirtmiştir*>

ve bu nedenle oturumlarda yer almayan Tablo 54'teki " $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $4(x - 5) + 2x = -x + 3(x + 1)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz." şeklindeki görev durumu araştırmacı tarafından katılımcıya yöneltilmiştir. Ayrıca katılımcı " $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} > 1$ eşitsizliğinin çözümlerini belirleyiniz." görev durumunda paydaları eşitlerken $-\frac{x-4}{2}$ cebirsel ifadesini 3 ile hatalı bir şekilde genişletmiş (Tablo 54'te Oturum 2-Görev Durumu 6 için gerçekleşme 2) ve bu nedenle çözüm kümesini doğru olmayan bir şekilde belirlemiştir.

Zehra, denklem ve eşitsizlik sistemlerini tanımlarken "Birden fazla denklem ya da birden fazla eşitsizlik içeren cebirsel ifadeler [188]" şeklinde bir anlatı üreterek sistemde yer alan denklemlerin aynı (ortak) değişkenleri içermesi gerektiğini "Şimdi değişkenler aynı olmasaydı denklem sistemi olmaz [...] evet yani bu bir denklem sistemi değil [*kağıdındaki " $x + 1 = 2$ ve $y + 2 = 3$ " eşitliklerini göstererek*] çünkü bunu hiçbir şekilde çözemeyiz. [194]" ve "Evet çünkü çözemediğimiz zaman yani burada dediğim gibi x artı bir eşittir iki

y artı iki eşittir üç olduğu zaman hani bu birbiriyle bağlantısı olmuyor ki iki farklı denklem oluyor [...] birbiriyle bağlantılı şeklinde çözemeyiz. [200]” şeklindeki süreç odaklı söylemleriyle belirtmiştir. Katılımcı denklem ya da eşitsizlik sisteminin çözülebilmesi için sistemde yer alan denklemlerin aynı (ortak) değişkenleri içermesi gerektiğini örneklerle belirtmiş ve “ $x + y = 2 \wedge 2x = 4$ ” cebirsel ifadesinin bir denklem sistemi olduğunu “Bu çözülür. Çünkü burada x ’ler var x ’leri bulup çözebiliriz. [206]” şeklindeki söylemleriyle ifade etmiştir. Katılımcıdan denklem sistemi belirtmeyen bir örnek vermesi istendiğinde ise “ $2x + 1 = 3$ ” ve “ $2y + 1 = 4$ ” şeklinde “Şimdi değişkenler aynı olmasaydı denklem sistemi olmaz [194]” biçimindeki anlatısını onaylayan bir örnek (Şekil 82) vererek “Bu denklem sistemi değil, çünkü ortak bir şeylerin olması gerekiyor ki sistem olmasının bir mantığı olsun yani bu sistem olursa bu bizim ne işimize yarayacak ki? [226]” şeklinde söylemde bulunmuştur. Zehra’nın denklem ve eşitsizlik sistemlerine yönelik söylemlerini onaylayan görsel araçlarına ise Şekil 82’de yer verilmiştir:

*eğer denklem ya da eşitsizlik sisteminde ki değişkenler aynı olmuyorsa biri x biri y yani $x+1=2$ $y+2=3$ gibi olsa denklem sistemi olmazdı

*eğer denklem ya da eşitsizlik sistemindeki değişkenler aynı olmasaydı biri x biri y yani $x+1=2$ $y+2=3$ gibi olsa denklem sistemi olmazdı

Aksine örnek

$$\begin{cases} 2x+1=3 \\ 2y+1=4 \end{cases}$$

$\frac{1}{5}x - \sqrt{3}y = 6$
 $-x + 4y = 5$

denklem sistemi
çözüm tarafı
toplayarak vs ç.K bulabiliyoruz

denklem sistemi çünkü
taraf tarafa toplayarak
vs ç.K (çözüm kümesi)
bulabiliyoruz

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak
üzere,
 $a - 2b = 5$
 $3b + 5a = 11$
 $2a - 4b = 10$

denklem sistemi
birden fazla değişken
var

Denklem sistemi
birden fazla
denklem
var
değişkenler
aynı

$y \in \mathbb{R}$ olmak
üzere,
 $3y - 4 \leq -y < 11 + 2y$

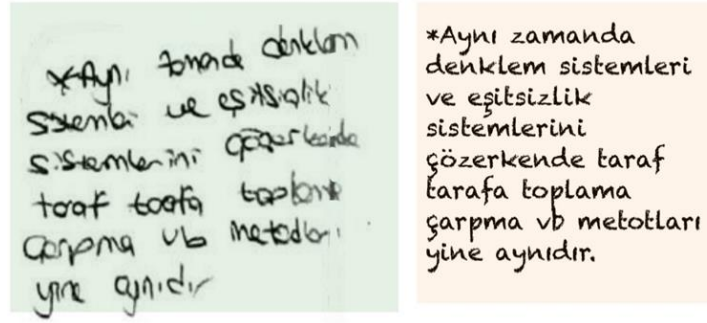
*bu şekilde ayrı ayrı düşünerek çözünce birden fazla eşitsizlik oluyor o yüzden eşitsizlik sistemi

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak
üzere,
 $y \leq x + 6$
 $y > 2x - 8$
 $x \geq -1$

birden fazla eşitsizlik
içeriyor eşitsizlik
sistemi

Şekil 82. Zehra'nın denklem ve eşitsizlik sistemi tanımına yönelik görsel araçları

Denklem ve eşitsizlikler arasındaki ilişkiyi "... çünkü bunların çözüm metotları vesaire benzer aynı şekilde çözüyoruz [8]" şeklindeki söylemiyle açıklayan katılımcının denklem ve eşitsizlik sistemleri için de aynı fikirde olduğu Şekil 83'teki sözel gerçekleşmesinde görülmüştür. Zehra'nın denklem ve eşitsizlik sistemlerini çözme prosedürü incelendiğinde ise katılımcı hem denklem hem de eşitsizlik sistemleri için benzer bir prosedür uygulamış ve yok etme metodunu kullanarak çözüm kümesini belirlemiştir.



Şekil 83. Zehra'nın denklem ve eşitsizlik sistemleri prosedürüne yönelik sözel gerçekleşmesi

Bunun bir örneği, oturumlarda yer almayan ve araştırmacının bireysel görüşmede katılımcıya yönelttiği " $x + y = 2 \wedge 2x = -4 - 2y$ " şeklindeki denklem sistemi ile oturumlarda yer alan " $-2x - y < -1 \wedge 4x + 2y \leq -6$ " şeklindeki eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini belirlerken Zehra'nın uyguladığı benzer prosedürlerinde gözlemlenmiştir. Katılımcının denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümelerini belirlemede uyguladığı benzer adımları içeren prosedürleri ise Tablo 55'te yer almaktadır.

Zehra'nın Denklem ve Eşitsizlik Sistemlerinin Çözüm Kümelerini Belirlemede Uyguladığı Benzer Adımları İçeren Prosedürleri

Görev durumu: " $x + y = 2 \wedge 2x = -4 - 2y$ denklem sisteminin reel sayılarda çözüm kümesini belirleyiniz."

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

216. Z: İıı bunu [göstergeyi göstererek] x' lerden kurtulabilmek için [...] x' lerimiz gitsin ki bir sonuca [...] bir sonuç bulabilelim diye eksi iki ile çarpıyoruz (gerçekleşme 1) eksi iki x eksi iki y [...] eşittir eksi dört olur (gerçekleşme 2). Burada önce çarpmadan önce bu y 'yi eksi ikiyi bu tarafa atsak artı şeklinde, iki x artı iki y eşittir eksi dört oldu (gerçekleşme 3) [...] sonra burası zaten eksi iki ile çarpmıştık [...] buradaki artı iki x eksi iki x birbirini götürdü (gerçekleşme 4) eksi iki y ve artı iki y geldi buradan bunlar da gitti o zaman (gerçekleşme 5) taraf tarafa topladım. Evet burada sıfır eşittir eksi sekiz kaldı (gerçekleşme 6) [...] demek ki yanlış, yani şey olarak bu çelişki. Çözüm kümesi boş küme (gerçekleşme 7).

$$\begin{array}{l}
 x+y=2 \quad \dots \text{Österge} \\
 2x=-4-2y \\
 -2 \quad \dots \text{Gerçekleşme 1} \\
 x+y=2 \\
 2x=-4-2y \\
 -2x-2y=+4 \quad \dots \text{Gerçekleşme 2} \\
 2x+2y=-4 \quad \dots \text{Gerçekleşme 3} \\
 -2x-2y=+4 \quad \dots \text{Gerçekleşme 4} \\
 2x+2y=-4 \quad \dots \text{Gerçekleşme 5} \\
 0=-8 \quad \dots \text{Gerçekleşme 6} \\
 \emptyset \quad \dots \text{Gerçekleşme 7}
 \end{array}$$

Oturum 3- Görev durumu 4: " $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $-2x - y < -1 \wedge 4x + 2y \leq -6$ eşitsizlik sistemini sağlayan reel sayı ikililerinin kümesini analitik düzlemde gösteriniz."

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

325. Z: İıı ilk önce yok etme metodu kullanmak için bu y yok etmeye çalışmışım [...] ikiyle çarpıyoruz (gerçekleşme 1) eksi dört x eksi iki y küçük eksi iki (gerçekleşme 2) [...] dört x eksi iki y [...] eksi altı (gerçekleşme 3) tamam buradaki içindeki artı iki y eksi iki y gitti (gerçekleşme 4) ııı eksi dört x artı dört x oldu [...] sıfır şey eksi sekiz oldu (gerçekleşme 5) [...] bu da yanlış bir ifade o yüzden boş küme (gerçekleşme 6) yani bunun bir çözüm kümesi olduğunu düşünmüyorum.

$$\begin{array}{l}
 -2x-y<-1 \\
 4x+2y\leq 6 \quad \dots \text{Österge} \\
 2 \quad \dots \text{Gerçekleşme 1} \\
 -2x-y<-1 \\
 4x+2y\leq 6 \\
 -4x-2y<-2 \quad \dots \text{Gerçekleşme 2} \\
 4x+2y\leq 6 \quad \dots \text{Gerçekleşme 3} \\
 -4x-2y<-2 \\
 4x+2y\leq 6 \quad \dots \text{Gerçekleşme 4} \\
 0<-8 \quad \dots \text{Gerçekleşme 5} \\
 \emptyset \quad \dots \text{Gerçekleşme 6}
 \end{array}$$

Burada Zehra, “ $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $-2x - y < -1 \wedge 4x + 2y \leq -6$ ” eşitsizlik sistemini sağlayan reel sayı ikililerini analitik düzlemde göstermesi istenmesine rağmen kanonik olmayan bir şekilde yok etme metodunu kullanmış ve analitik düzlemde gösterirken nasıl bir yol izleyeceği sorulduğunda ise “Analitik düzlemde gösteremeyiz çünkü çözüm kümesi yok. [327]” şeklinde bir söylemde bulunmuştur. Buna rağmen çözüm kümesinin “boş küme” olması durumunu söylemlerinde “çözüm kümesi yok (örneğin, [325], [327])” şeklinde ifade eden ve bu durumda analitik düzlemde gösterimi olmadığını belirten [327] katılımcı, çözüm kümesi boş olan “ $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x - 6y = 12 \wedge -x + 3y = 9$ ” biçimindeki denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarını analitik düzlemde belirlerken grafik çizmiştir. Fakat Zehra görev durumunda yer alan “... analitik düzlemde grafik çizimi yoluyla bulunuz” ifadesinden dolayı “ $2x - 6y = 12 \wedge -x + 3y = 9$ ” denklem sistemlerinin temsil ettiği doğruları çizmiş ve uyguladığı bu prosedürünün çözüm kümesini belirlemede uygun olup olmadığından emin olmadığı belirtmiştir:

302. Z: Ben burada ilk önce x 'i bulmak için y 'lere sıfır verdim [...] y 'yi bulmak için x 'e sıfır verdim [...] burada analitik düzlemde grafik çizimi çözüm kümesi bu oluyor ama orada da düşünmüştüm zaten bunu emin olun, çünkü x 'leri bulmak için yani [...] kural mı desem evet x 'i bulmak için y 'ye sıfır veriyoruz ki bulabilelim yani [...] y 'ye sıfır vermeden bulamayız ama bu buradaki sizin dediğiniz grafik çizimi yolu yani grafik çizimi yoluyla çözüm kümesine böyle mi buluyoruz bundan emin değilim. Sadece benim aklıma bu yol geldiği için onu yazdım.

...

316. A: Anladım peki neden x 'e sıfır verip y 'yi buluyorsun, y 'ye sıfır verip x 'i buluyorsun?

317. Z: İıı [...]

318. A: Yoksa öyle yapıldığı için mi yapıyorsun bunu?

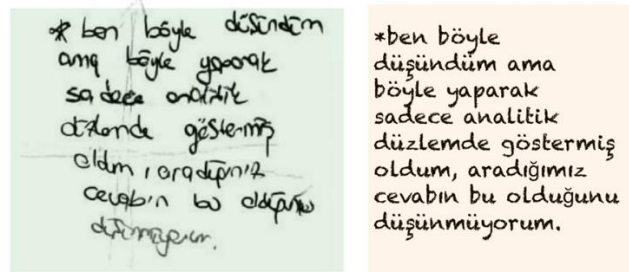
319. Z: Öyle yapıldığı için değil ben bunu yine biliyordum ama hatırlamıyorum çünkü bir şeyi vardı bunun eğer [...] üstündeki noktayı bulmaya çalışıyoruz biz mesela bunu x eksenini üzerindeki noktayı bulmaya çalıştığımız için y 'nin bir değeri olmaması gerekiyor çünkü y 'nin de bir değeri olursa bu x eksenini üzerinde bir nokta olmaz [...] öyle düşünüyorum.

Burada Zehra'nın söylemleri (örneğin, [302] ve [319]) katılımcının denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarının ne olduğuna ve nasıl belirleneceğine dair bir fikri olmadığını ve sadece denklemlerin düzlemde belirttiği doğruların grafiğini çizdiğini göstermiştir. Denklemlerin düzlemde belirttiği doğruların grafiğini çizdiğini sesli bir

şekilde de belirten (örneğin, [307] ve [311]) Zehra'nın prosedürünün denklem sisteminin çözüm kümesi ile olan ilişkisini kurmada yaşadığı güçlüğü “Buradan bir çözüm kümesi belirleyemedim yani çünkü bilemedim [321]” ve “...benzetemedim neden çözüm kümesi [...] çözüm kümesi bulabileceğimiz hakkında. [323]” söylemlerinde görülmüştür:

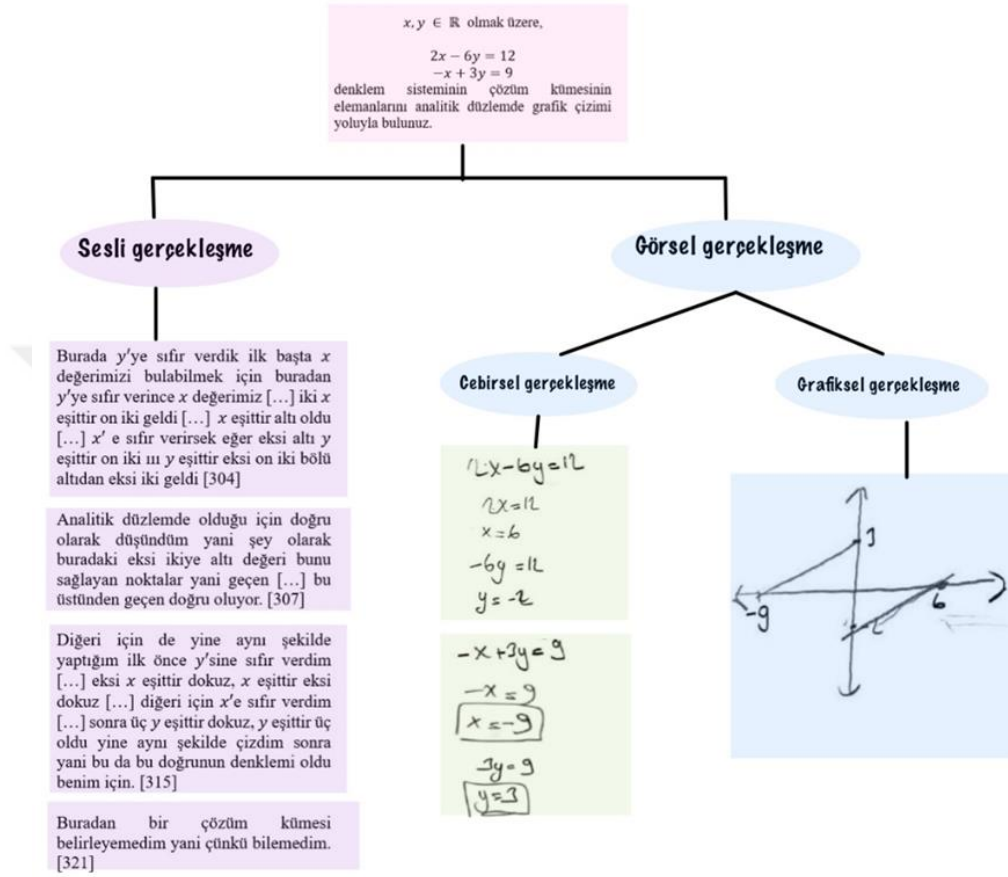
303. A: Evet bu bulduğun x ve y ne anlama geliyor?
305. Z: x ve y eksenindeki noktalar [...] mesela bu doğruyu bu denklemi sağlayan noktalar.
306. A: Evet buraya neden bir doğru çizdin biliyor musun?
307. Z: İki analitik düzlemde olduğu için doğru olarak düşündüm yani şey olarak buradaki eksi ikiye altı değeri bunu sağlayan noktalar yani geçen [...] bu üstünden geçen doğru oluyor.
308. A: Doğru olan hangisi?
309. Z: Doğru şu üstteki [*denklemi göstererek*].
310. A: Şimdi bu doğru mu oluyor?
311. Z: Bu bir doğruyu belirtiyor [...] bu bir doğrunun denklemi.
312. A: Tamam [...] eğer o zaman bu şekildeki ifadeler bir doğru denklemi oluyor, doğru mu anladım?
313. Z: Analitik düzlem için düşünürsek evet.
- ...
320. A: Tamam diyelim ki bu noktaları buldun [...] bunun çözüm kümesini çizerek belirleyin demiştik değil mi (Z: *Hı hı*) çizmişsin burada bir çözüm kümesi belirleyebilir misin? Yorumun nedir?
321. Z: Buradan bir çözüm kümesi belirleyemedim yani çünkü bilemedim.
322. A: Fikir vermedi mi sana?
323. Z: Vermedi yani benzetemedim neden çözüm kümesi [...] çözüm kümesi bulabileceğimiz hakkında.

Bu durumu katılımcı kağıdında yer alan Şekil 84'teki sözel gerçekleşmesiyle de onaylamıştır.



Şekil 84. Zehra'nın denklem sistemi çözümünde prosedür sonuç ilişkisini kuramadığına yönelik sözel gerçekleşmesi

Katılımcının “ $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x - 6y = 12 \wedge -x + 3y = 9$ denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarını analitik düzlemde grafik çizimi yoluyla bulunuz.” görev durumuna ait gerçekleştirme ağacı ise Şekil 85’teki gibidir:



Şekil 85. Zehra'nın Oturum 3'teki görev durumu 3'e ait gerçekleştirme ağacı

Katılımcı yok etme metoduyla denklem sistemlerini çözerken de sistemin çözüm kümesini yazmada güçlük yaşamış ve “Bu denklem sisteminin çözüm kümesini [düşünüyor] x ve y olarak sıralı ikili değil mi? [Onay isteyerek] hani böyle olmaz [...] denklem sistemi çözüm kümesi [...] bilmiyorum [...] x ve y var [...] o yüzden emin değilim yani nasıl yapacağımı bilemiyorum. [300]” söyleminde bulunmuştur. Zehra'nın denklem sisteminin çözüm kümesini belirlemesi istendiğinde yok etme metodunu değişkenlerin reel sayı karşılığını bulma göreviyle uyguladığı prosedürü ise Tablo 56'daki gibidir:

Tablo 56

Zehra'nın Birinci Dereceden İki Değişkenli Denklem Sistemine Dair Prosedürü

Oturum 3- Görev Durumu 2: “ $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$5x + 3y = 7$$

$$y - 2x = -5$$

denklem sisteminin çözüm kümesini yok etme metodunu kullanarak bulunuz.”

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

292. Z: Burada ilk önce burayı [$y - 2x = -5$ cebirsel ifadesini göstererek] eksi üçle çarpabilirim (gerçekleşme 1) [...] y 'yi yok edeceğim yani o yüzden bunu yok etmek için [sessizce gerçekleşme 2'de yer alan ve göstergedeki denklemlere denk ifadeleri yazıyor] eksi üç y altı x eşittir artı on beş (gerçekleşme 2) [...] şimdi hani buradaki y 'ler gitti (gerçekleşme 3) beş x altı x daha on bir x [...] burada bir hata mı yaptım [emin olamıyor] on beşle yediye toplarsak yirmi iki [...] buradaki on bir x eşittir yirmi iki (gerçekleşme 4) [...] yok etme metodunu kullanarak [gerçekleşme 5'i yazarak] başta y 'leri yok ettim sonra x 'i buldum (gerçekleşme 6).

298. Z: Herhangi bir denklemde gidip x yerine iki yazacağız [...] ben üstteki denklemi tercih ediyorum bir farkı yok bunun [...] ııı x 'e iki yazdık beş çarpı iki artı üç y eşittir yedi (gerçekleşme 7) [...] on artı üç y eşittir yediyse (gerçekleşme 8) [...] on eksi on olarak diğer tarafa geçecek eksi üç oldu burası (gerçekleşme 9) [...] üç y eşittir eksi üç ise y 'de buradan eksi bir (gerçekleşme 10).

Gerçekleşme 1 $5x + 3y = 7$
 $y - 2x = -5$

Gerçekleşme 3 $5x + 3y = 7$
 $-3y + 6x = -15$ Gerçekleşme 2

Gerçekleşme 4 $11x = 12$

Gerçekleşme 5 $x = \frac{12}{11}$

Gerçekleşme 6 $x = 2$

Gerçekleşme 7 $5 \cdot 2 + 3y = 7$

Gerçekleşme 8 $10 + 3y = 7$

Gerçekleşme 9 $3y = -3$

Gerçekleşme 10 $y = -1$

Katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli denklemlere yönelik söylemleri incelendiğinde ise Zehra'nın ikinci dereceden tek değişkenli denklem tanımının sembol odaklı olduğu görülmüş ve katılımcı söylemlerinde “ $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ ve a ve b sıfırdan farklı olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ ” biçiminde yazılabilen cebirsel ifadelerin ikinci dereceden bir denklem olduğunu belirtmiştir. Araştırmacının “ $x^2 + 10y + 25 = 0$ ” biçimindeki cebirsel ifade için “Bu denklem nasıl bir denklem?” sorusunu,

339. Z: Bu ikinci dereceden [...] ama şöyle bir şey de var şimdi ikinci dereceden olması için x karenin yerinde x kare artı on y dedik ya [...] bu ikinci dereceden olması için şu şekilde olması gerekiyor diye biliyorum [$x^2 + 10x + 25 = 0$ ifadesini yazarak] yani x kare [...] hem x kare olacak hem x olacak [...] ama bunun nedenini bilmiyorum.

şeklinde yanıtlamıştır. Benzer şekilde “ $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a^2 - 4 = 0$ ” biçimindeki cebirsel ifade için “Değil ya ikinci dereceden bir değişkenli [357] a kare artı ya da eksi fark etmez [...] eksi a artı dört eşittir sıfır deseydi [$a^2 - a + 4 = 0$ ifadesini yazarak] bu [$a^2 - a + 4 = 0$ ifadesini göstererek] ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem bence. [359]” söyleminde bulunmuştur. Ayrıca “ $x^2 + 10x + 25 = x$ ” biçimindeki cebirsel ifadesi için araştırmacı ile arasında,

362. A: Bu da senin dediğin biçime benzemiyor bu peki bir ikinci dereceden mi?

363. Z: Evet bu bir değişkenli denklem.

364. A: Bunun niye olacağını düşünüyorsun?

365. Z: Biçimsel olarak dediğim şeye [...]

366. A: Ama burada sıfır var mesela.

367. Z: İki bu [...] illa buranın sıfır olması gerekmez ki yani mesela biz buradaki x 'i bu tarafa verebiliriz ya da buradaki yirmi beşi eksi olarak yirmi beş yazabiliriz [...] x kare artı dokuz x eşittir eksi yirmi beş olarak yazabiliriz.

368. A: Sadece x kareli ve x 'li bir ifade olmalı mı diyorsun?

369. Z: Bence öyle yani [...] öyle biliyorum.

Burada Zehra “ $x^2 + 10x + 25 = x$ ” şeklindeki cebirsel ifadesinin “ $x^2 + 9x + 25 = 0$ ” ya da “ $x^2 + 9x = -25$ ” gibi cebirsel ifadelere denk olduğunu söyleyerek x^2 ve x içeren terimlerin katsayılarının sıfırdan farklı olması gerektiğini ifade etmiştir. Bununla birlikte en büyük dereceli terimin ikinci dereceden olması gerektiğini “Üs [...] yani değişkenin ikinci dereceden olması için üssü iki olması gerekiyor [329]”, “... çünkü x 'in üssü zaten iki [...] ikinci dereceden bir denklem bir değişkenli. [343]” ve “çünkü tek değişkenli ve değişken üssü iki olduğu için yani. [373]” şeklindeki söylemleriyle tekrarlamıştır. Benzer bir durum katılımcı “ $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ax^2 + bx = c$ ” biçimindeki cebirsel ifade hakkında konuşurken de yaşanmış ve Zehra, “ a sıfır olsa bu denklem ikinci dereceden bir denklem olmaz. [379]” ve “Evet ifade eksikliği var yani burada eğer a için sıfırdan farklı olan sayı deseydi bu sefer doğru olabilirdi ikinci dereceden bir denklem olabilirdi ama a 'yı tüm reel

sayılar dediği için burada bir eksiklik oluyor. [381]” şeklindeki söylemlerde bulunmuştur. Katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli söylemlerine yönelik görsel araçları ise Şekil 86’daki gibidir:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$q^2 - q + 4 = 0$$

$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

Şekil 86. Zehra’nın ikinci dereceden tek değişkenli denklem örneklerini içeren görsel araçları

Zehra’nın ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme prosedürleri incelendiğinde de katılımcı sadece baş katsayısı 1 ve çözümleri birer tamsayı olan ikinci dereceden denklemleri çarpanlarına ayırma yöntemiyle çözebilmiştir. Çünkü Zehra “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x^2 + x - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.” şeklindeki görev durumunda prosedürünü uygulamada yaşadığı güçlüğü “Çünkü iki x kare dediği [$2x^2$ ’li terimi işaret ederek] zaman denklem çözümü [...] yani x kare deseydi olabilirdi ama nasıl yapacağımı hatırlayamadım. [410]” şeklinde belirtirken, irrasyonel çözümlere sahip bir denklemi içeren “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x^2 - 3x + 5 = 0$ denklemini sağlayan reel sayıların kümesini bulunuz.” görev durumunda yaşadığı güçlüğü “İki bence şey ııı [...] çarpanlara ayırma yapınca buradaki hiçbir sayı toplamları eksi üç ve çarpımı eksi beş gelmedi, bulamadım. [414]” şeklinde ifade etmiştir. Katılımcının söylemlerini onaylayan görsel araçları ise Şekil 87’deki gibidir:

4. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
 $2x^2 + x - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
 $2x^2 + x - 3 = 0$

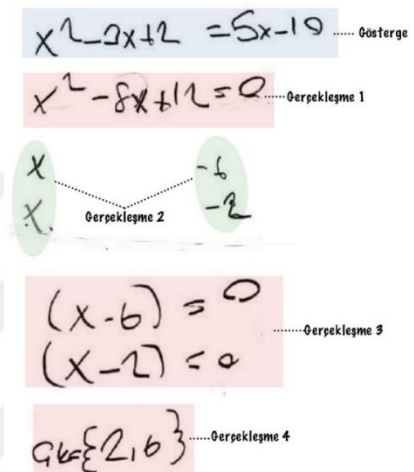
5. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
 $x^2 - 3x + 5 = 0$ denklemini sağlayan (varsa) reel sayıların kümesini bulunuz.
 x
 x
 tam sayılarda yok reel sayılarda olabilir ama bulamadım

Şekil 87. Zehra’nın ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerin çözümünde yaşadığı güçlüğü gösteren görsel araçları

Bununla birlikte Zehra'nın baş katsayısı 1 ve çözümleri birer tamsayı olan ikinci dereceden denklemleri çarpanlarına ayırma yöntemiyle çözme prosedürüne ise Tablo 57'de yer verilmiştir.

Tablo 57

Zehra'nın İkinci Dereceden Tek Değişkenli Denklemleri Çözme Prosedürü

Ne söylüyor?	Ne yapıyor?
402. Z: Şimdi şey yapsak x kare eksi üç x [...] artı iki eşittir beş x eksi on [göstergeyi yazarak] 111 evet x kare eksi sekiz x artı on iki eşittir sıfır (gerçekleşme 1) [...] sonra burada çarpanlarına ayırsak [...] 111 çarpımları artı on iki olacak toplamaları eksi sekiz olacak (gerçekleşme 2) buradan sonrası da x eksi altı [...] x eksi iki [...] sıfır yapıyorum (gerçekleşme 3) [...] denklemin bu tarafını sıfıra eşitledik ya değerleri bulmak için çözüm kümesi x altı ya da x iki (gerçekleşme 4).	 $x^2 - 2x + 2 = 5x - 10$ Gösterge $x^2 - 7x + 12 = 0$ Gerçekleşme 1 x -6 x -2 Gerçekleşme 2 $(x-6) = 0$ $(x-2) = 0$ Gerçekleşme 3 $Gb = \{2, 6\}$ Gerçekleşme 4

Bireysel görüşmelerde Zehra'nın Oturum 5'te yer alan problemleri içeren görev durumlarına ait yanıtları incelendiğinde ise sözel ifadeleri cebirsel ifadelere doğru bir şekilde çevirmede zorlandığı ve Tablo 58'de görev durumu 2 ve görev durumu 3'e ait prosedürlerinde hatalar olduğu gözlemlenmiştir. Katılımcının sözel ifadeleri cebirsel ifadelere çevirirken değişkenleri neye göre atadığı ve bu bağlamda cebirsel gerçekleştirmeleri Tablo 58'de yer almaktadır.

Zehra'nın Problem İçeren Görev Durumlarına Ait Cebirsel Gerçekleşmeleri

Görev durumu 1: “Bugünlerde Ankara’da şehir içi taksimetre açılış ücreti 6 TL ve her bir kilometre için ise ücret 4,7 TL’dir. Kilometreye bağlı olarak bir yolcunun vereceği ücreti belirleyen cebirsel ifadeyi yazınız.”

Görev:

Kilometre için x , kilometreye bağlı bir yolcunun vereceği ücreti y değişkeni atayarak denklem kurma

Prosedür:

$$4,7x + 6 = y \rightarrow \text{çevre}$$

x km

Görev durumu 2: “Ayşe ile Berfin’ in cebindeki paralar ile ilgili aşağıdakiler bilinmektedir. Ayşe, Berfin’e 50 TL verdiğinde paraları eşit olmaktadır. Berfin, Ayşe’ye 15 TL verdiğinde Ayşe’nin parası Berfin’ in parasının 5 katı olmaktadır. Bu şartlar altında, Ayşe’nin parasını hesaplamada kullanılacak cebirsel ifadeyi yazınız.”

Görev:

Ayşe’nin parasına x değişkeni Berfin’in parasını y değişkeni ile temsil edecek şekilde birinci dereceden iki değişkenli bir denklem sistemi kurma

Prosedür:

$$\begin{aligned} x - 50 &= y + 50 \\ y - 15 &= 5(x + 15) \end{aligned}$$

Görev durumu 3: “Gökhan internet üzerinden tanesi 45 TL olan 32 GB’lık taşınır belleklerden sipariş vermek istiyor. Sipariş için kargo ücreti 10 TL’dir. Gökhan’ın bu sipariş için harcayabileceği en fazla 200 TL’si vardır. Gökhan’ın sipariş edebileceği maksimum taşınır bellek sayısını belirleyen cebirsel ifadeyi yazınız.

Görev:

Taşınır bellek sayısına x değişkenini atayarak eşitsizlik kurma

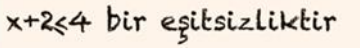
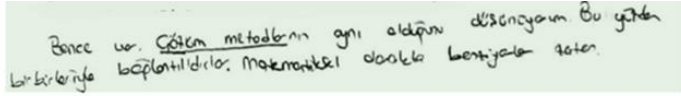
Prosedür:

$$45x + 10 \leq 200$$

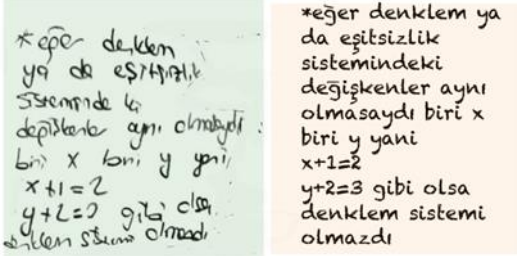
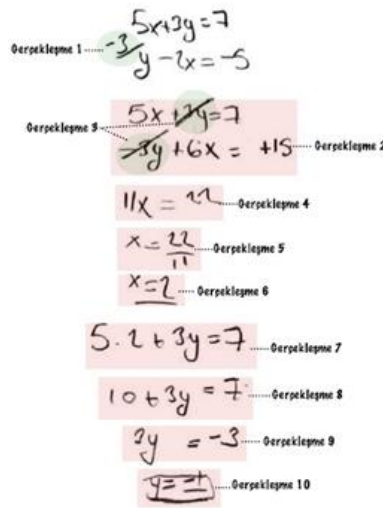
Zehra’nın bireysel görüşmedeki söylemlerinin analiz edilmesi sonucunda denklem ve eşitsizlik kavramına dair katılımcıya ait toplamda 10 farklı rutin gözlemlenmiştir. Bu rutinler “BG-Zs” biçiminde kodlanmıştır. Burada BG kısaltması rutinin bireysel görüşmeye, Z ise Zehra’ya ait bir rutin olduğunu betimlemek için kullanılmış ve s yerine rutin numarası yazılmıştır. Bu şekilde kodlanan rutinlerin “ne zaman” ve “nasıl” gerçekleştiği ve Zehra’nın rutinlerinin bir özeti olan rutin profili Tablo 59’da okuyucuya sunulmuştur. Bu tabloda yer alan “tekrar” terimi katılımcının bir rutini kaç defa farklı anlarda ve farklı görev durumlarında tekrarladığının sayısını belirtmektedir. Katılımcının rutin tekrarı 10 defa ya da 10 defadan küçük bir doğal sayı ise “tekrarı” kısmına o sayı yazılmıştır. Eğer katılımcının rutini 10 ile 20 arasında ise bu durum “> 10”, 20 defadan fazla ise “> 20” şeklinde ifade edilmiştir.

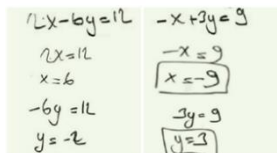
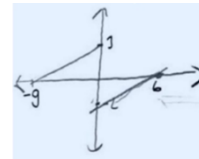
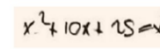
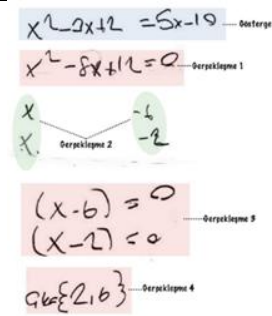
Tablo 59

Zehra'nın Bireysel Görüşmedeki Rutin Profili

Rutin kodu	Ne zaman?	Nasıl?		Gerçekleşme	Prosedür	Tekrarı
		Görev				
BG-Z1	Denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken ya da herhangi bir cebirsel ifadenin denklem ya da eşitsizlik olduğunu belirlerken	Değişken ve “=” sembolü içeren cebirsel ifadeleri denklem, değişken ve “<,” “≤,” “≥” sembollerinden herhangi birini içeren cebirsel ifadeleri eşitsizlik olarak tanımlamak	Sesli		Z: En az bir bilinmeyen ve [...] bir tane bilinmeyen içeren ve bir çözüm kümesi olan olduğunu düşünüyorum ben yani [...] çözüm kümesi olan şey cebirsel ifadelerdir. [2] Eşitsizlik de yine bir tane bilinmeyen mutlaka olması gerekiyor [...] sabit terimin de olması gerekiyor mu [...] emin değilim olabilir de [4] Z: Şey diye düşündüm, çözüm kümesine bakmadım ama eşitsizlik olması için sonuçta eşitsizlikte eşittir kavramı yerine büyük-eşittir, büyüktür, küçüktür, küçük-eşittir kullanıyoruz. [26] Z: İn şeyden dolayı bu işaret şey burada eşittir ifadesi var, eşittir ifadesi olunca denklem oluyor ... [49]	> 10
			Sözel		 En az bir bilinmeyeni, sabit terimi ve çözüm kümesi bulunan cebirsel ifadeler bütünü	4
			Cebirsel		   	3
BG-Z2	Denklem ve eşitsizlik arasındaki ilişkiyi (ilişkileri) açıklarken	Denklem ve eşitsizlik çözme prosedürlerini kıyaslamak	Sesli		Z: Bence var orada da söyledim zaten çünkü bunların çözüm metotları vesaire benzer aynı şekilde çözüyoruz denklemlerini falan o yüzden in bir ilişki var aralarında benzerlik var yani. [8] Z: <Gösterge 1 ve gösterge 2'yi yazıyor> şimdi bunların çözüm metotları zaten [...] önce bu ikiye tersi şeklinde yani toplamaya göre tersi olur artılı olduğu için eksi olarak karşı tarafa atıyoruz [...] iki x eşittir iki geliyor (gerçekleşme 1) eksi iki yaptığımız için [...] sonra bu da x burada çarpım durumunda olduğu için bölüm durumuna getiriyoruz, burada da x iki bölü ikiden bir geliyor (gerçekleşme 2) burada da yine aynı şekilde burada eşittir demiyor, büyük-eşittir diyor [...] ama yine aynı şekilde çözüyoruz [...] buradaki iki x büyük-eşittir iki yapıyoruz (gerçekleşme 3) sonra x eşit iki bölü ikiden (gerçekleşme 4) bir [...] x büyük-eşittir bir (gerçekleşme 5). Burada [gösterge 1'i göstererek] sadece bir tane cevap var x eşittir bir [gerçekleşme 2'yi göstererek] ama burada [gösterge 2'yi göstererek] x birden büyük ya da bire eşit tüm sayılar [gerçekleşme 5'i göstererek] [12]	2
			Sözel		 Bence var. Çözüm metodlarının aynı olduğunu düşünüyorum. Bu yüzden birbirleriyle bağlantılıdır. Matematiksel olarak da benziyorlar zaten.	2

			Cebirsel	$2x+2=4 \dots\dots \text{Österge 1}$ $2x=2 \dots\dots \text{Österge 1}$ $x=\frac{2}{2} \dots\dots \text{Österge 2}$ $2x+2 \geq 4 \dots\dots \text{Österge 1}$ $2x \geq 2 \dots\dots \text{Österge 3}$ $x \geq \frac{2}{2} \dots\dots \text{Österge 4}$ $x \geq 1 \dots\dots \text{Österge 5}$	> 10
BG-Z3	Çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken	Çözüm kümesinin elemanlarını denkleme ya da eşitsizliği sağlayan elemanlar olduğunu belirtmek	Sesli	Z: ...değişkenimiz yerine altı yazdığımızda eşitsizliğin doğru çıkar. [146] Z: Yani mesela burada değişken yerine üç yazabiliriz ama eksi üç bölü dört yazamayız, o dahil olmayacak, üç yazarsak eğer cevabımız doğru çıkarmış çünkü burada dahil olabileceğini bize söylemiş. [186]	5
BG-Z4	Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken	"x = reel sayı" biçiminde bir sonuç elde etmek	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? Ne yapıyor? Z: Burayı yine dağıtacağım [...] iki x eksi on [...] x eksi bir bölü üç [...] eksi üç x artı dört (<i>gerçekleşme 1</i>) paydayı eşitlemeden bir çözüm bulamayız [...] ıı şurayı üçle çarpacağız [...] üç kere iki x altı x [...] eksi altmış [...] eksi on çarpı üç eksi otuz [...] burada da zaten artı x eksi bir var eksi üç x artı dört (<i>gerçekleşme 2</i>) [...] sonra buradaki bölümde buradaki üçü karşı taraf atıyorum [...] bu tarafa aynı kalıyor altı x eksi otuz [...] zaten şurayı da şöyle yazalım kolay olsun [...] altı x artı x yedi x [...] eksi otuz bir [...] üçü çarpım durumunda diğer tarafa atıyoruz [...] eksi dokuz x artı on iki oluyor (<i>gerçekleşme 3</i>) [...] buradan sonra bu dokuz x'i artı dokuz x olarak bu taraf alsak [...] on altı x eşittir [...] otuz biri de bu tarafa alsak yine artı olarak bu eksi olduğu için [...] on altı x eşittir kırk üç oluyor (<i>gerçekleşme 4</i>) [...] x eşittir kırk üç bölü on altı (<i>gerçekleşme 5</i>) evet çözümü [<i>gerçekleşme 6</i>'yi yazıyor] bu olmuş oluyor. [107]	9
BG-Z5	Birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken	Bir reel sayı aralığı elde etmek	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? Ne yapıyor? Z: Bu bir eşitsizlik [...] buradaki üç yine çıkarma durumunda olduğu için artılı şekilde iki x büyük-eşittir on oluyor (<i>gerçekleşme 1</i>) [...] x büyük-eşittir beş oluyor (<i>gerçekleşme 2</i>) [...] burada iki x büyük-eşittir on dedim sonra bu x burada bu x ile iki çarpım durumunda [...] x'i yalnız bırakmamız gerektiği için buradaki x'i bölüm olarak karşı tarafa attım [...] hayır x'i değil ikiyi bölüm olarak karşı tarafa attım x yalnız kalması gerektiği için. 140. Z: Beşten büyük ya da beşe eşit tüm reel sayılar [...] beş kapalı olacak [...] sonsuz açık olur (<i>gerçekleşme 3</i>).	7

[132]					
BG-Z6	Denklem ve eşitsizlik sistemi kavramlarını tanımlarken	“=” sembolü ve ortak değişken içeren birden fazla cebirsel ifadeyi “denklem sistemi” “<, >, ≤, ≥” sembollerini ve ortak değişken içeren birden fazla cebirsel ifadeyi “eşitsizlik sistemi” olarak tanımlamak	Sesli	Z: Birden fazla denklem ya da birden fazla eşitsizlik içeren cebirsel ifadeler [188] Z: Şimdi değişkenler aynı olmasaydı denklem sistemi olmaz [...] evet yani bu bir denklem sistemi değil [kağıdındaki “$x + 1 = 2$ ve $y + 2 = 3$” eşitliklerini göstererek] çünkü bunu hiçbir şekilde çözemeyiz. [194] Z: Evet çünkü çözemediğimiz zaman yani burada dediğim gibi x artı bir eşittir iki y artı iki eşittir üç olduğu zaman hani bu birbiriyle bağlantısı olmuyor ki iki farklı denklem oluyor [...] birbiriyle bağlantılı şeklinde çözemeyiz. [200]”	>10
			Sözel-Cebirsel		>10
BG-Z7	Birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerini çözerken	Yok etme metodunu kullanarak değişkenler için (x ve y gibi) birer reel sayı karşılığı bulmak	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? Z: Burada ilk önce burayı [$y - 2x = -5$ cebirsel ifadesini göstererek] eksi üçle çarpabilirim (gerçekleşme 1) [...] y'yi yok edeceğim yani o yüzden bunu yok etmek için [sessizce gerçekleşme 2'de yer alan ve göstergedeki denklemlere denk ifadeleri yazıyor] eksi üç y altı x eşittir artı on beş (gerçekleşme 2) [...] şimdi hani buradaki y'ler gitti (gerçekleşme 3) beş x altı x daha on bir x [...] burada bir hata mı yaptım [emin olamıyor] on beşle yedi toplarsak yirmi iki [...] buradaki on bir x eşittir yirmi iki (gerçekleşme 4) [...] yok etme metodunu kullanarak [gerçekleşme 5'i yazarak] başta y'leri yok ettim sonra x'i buldum (gerçekleşme 6). 298. Z: Herhangi bir denklemde gidip x yerine iki yazacağız [...] ben üstteki denklemi tercih ediyorum bir farkı yok bunun [...] 11 x'e iki yazdık beş çarpı iki artı üç y eşittir yedi (gerçekleşme 7) [...] on artı üç y eşittir yediyse (gerçekleşme 8) [...] on eksi on olarak diğer tarafa geçecek eksi üç oldu burası (gerçekleşme 9) [...] üç y eşittir eksi üç ise y'de buradan eksi bir (gerçekleşme 10). [292] Ne yapıyor? 	5
BG-Z8	Çözüm kümesini analitik düzlemde grafik çizme yoluyla belirlemesi istendiğinde, denklem sistemlerini çözerken	Denklemlerin düzlemde belirttiği doğruların grafiklerini çizmek	Sesli	Z: Burada y'ye sıfır verdik ilk başta x değerimizi bulabilmek için buradan y'ye sıfır verince x değerimiz [...] iki x eşittir on iki geldi [...] x eşittir altı oldu [...] x'e sıfır verirsek eğer eksi altı y eşittir on iki 11 y eşittir eksi on iki bölü altıdan eksi iki geldi. [304] Z: Analitik düzlemde olduğu için doğru olarak düşündüm yani şey olarak buradaki eksi ikiye altı değeri	5

				bunu sağlayan noktalar yani geçen [...] bu üstünden geçen doğru oluyor. [307] Z: Diğeri için de yine aynı şekilde yaptığım ilk önce y'sine sıfır verdim [...] eksi x eşittir dokuz, x eşittir eksi dokuz [...] diğeri için x'e sıfır verdim [...] sonra üç y eşittir dokuz, y eşittir üç oldu yine aynı şekilde çizdim sonra yani bu da bu doğrunun denklemi oldu benim için. [315]	
	Cebirsel		1		
	Grafiksel		1		
BG-Z9	İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken	"a, b, c, x ∈ ℝ ve a ve b sıfırdan farklı olmak üzere ax² + bx + c = 0" biçiminde yazılabilen cebirsel ifadelerin ikinci dereceden bir denklem olarak tanımlamak	Sesli	Z: Bu ikinci dereceden [...] ama şöyle bir şey de var şimdi ikinci dereceden olması için x karenin yerinde x kare artı on y dedik ya [...] bu ikinci dereceden olması için şu şekilde olması gerekiyor diye biliyorum [x² + 10x + 25 = 0 ifadesini yazarak] yani x kare [...] hem x kare olacak hem x olacak [...] ama bunun nedenini bilmiyorum. [339] Z: a kare artı ya da eksi fark etmez [...] eksi a artı dört eşittir sıfır deseydi [a² - a + 4 = 0 ifadesini yazarak] bu [a² - a + 4 = 0 ifadesini göstererek] ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem bence. [359]	8
	Cebirsel		3		
BG-Z10	İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken	Çarpanlarına ayırma yöntemiyle denklemin ayırma denklemin çözümlerini belirlemek	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? Z: Şimdi şey yapsak x kare eksi üç x [...] artı iki eşittir beş x eksi on [göstergeyi yazarak] ııı evet x kare eksi sekiz x artı on iki eşittir sıfır (gerçekleşme 1) [...] sonra burada çarpanlarına ayırsak [...] ııı çarpımları artı on iki olacak toplamları eksi sekiz olacak (gerçekleşme 2) buradan sonrası da x eksi altı [...] x eksi iki [...] sıfır yapıyorum (gerçekleşme 3) [...] denklemin bu tarafını sıfıra eşitledik ya değerleri bulmak için çözüm kümesi x altı ya da x iki (gerçekleşme 4). [402]	2
	Ne yapıyor?				

Zehra'nın bireysel görüşmede sergilediği 10 farklı rutini incelendiğinde BG-Z3 kodlu rutininde katılımcı anlatı üretmeyi amaçlamıştır. Katılımcının bu rutinleri dışında kalan 9 rutinin ise süreç odaklı ritüel rutinler olduğu gözlemlenmiştir. Zehra çözüm kümesi ya da çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken kullandığı BG-Z3 kodlu rutin prosedüründe "... değişkenimiz yerine altı yazdığımızda eşitsizliğimiz doğru çıkar. [146]", "Bu ifadeyi doğrulayan $[\frac{2c}{c-5} \leq 1]$ ifadesini göstererek] tüm reel sayıların aralığı. [67]" ve "... tüm x değerlerinde cevabımız doğru çıkar [126]" şeklinde anlatılar üretmeyi hedeflemiştir. Katılımcının bireysel görüşme sürecinde ürettiği onaylanmış anlatılarının "Bir evrensel küme üzerinde ifade edilen bir denklem ya da eşitsizlikteki değişkenlerin yerine konulduğunda denklemin ya da eşitsizliğin doğru bir önerme olduğu evrensel kümenin elemanlarının her birine denklemin ya da eşitsizliğin *çözümü* ve çözüm olan bu elemanların oluşturduğu kümeye de denklemin ya da eşitsizliğin *çözüm kümesi* adı verilir." biçimindeki kanonik anlatıya denk olduğu görülmüş ve bu nedenle katılımcının BG-Z3 kodlu rutini bir keşif rutini olarak kodlanmıştır.

Katılımcının denklem ve eşitsizlik kavramlarına yönelik tanımlarını içeren söylemleri incelendiğinde, Zehra'nın denklem ve eşitsizlikleri birer açık önerme olarak görmekten ziyade birer sembol dizi olarak ele aldığı gözlemlenmiştir. Denklem ve eşitsizlik tanımlarında katılımcı cebirsel ifadeyi betimlemiş (örneğin, Şekil 77) ve "... bir tane bilinmeyen içeren ... [2]", "... çözüm kümesi olan ... [2]", "...sabit terimin de olması gerekiyor mu emin değilim olabilir de [4]", "... eşittir ifadesi olunca denklem oluyor ... [49]" ve "(eşitsizlikte) eşitsizliğin olması gereken ifadelerden [$<, \leq, >, \geq$ sembollerini *kastederek*] bir tanesi var ... [45]" şeklinde söylemlerde bulunmuştur. Bununla birlikte Zehra'nın BG-Z1 kodlu rutin prosedüründe denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümeleri üzerinden "... eşitsizlikler bir çözüm kümesi şeklinde veya bir aralık şeklinde yazılıyor ıı burada da gösterdiğim gibi zaten $[x \geq 1]$ ifadesini göstererek] ama denklemin sonucu oluyor [...] tek belirli bir sonucu oluyor, eşitsizliğin sonucu farklı, fazla olabiliyor yani bir

aralık şeklinde. [18]” şeklinde süreç odaklı söylemlerde de bulunmasından dolayı katılımcının BG-Z1 kodlu rutini ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır. Benzer durum katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken kullandığı BG-Z9 kodlu rutinde de gözlemlenmiş ve Zehra söylemlerinde cebirsel ifadelerin “ $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ ve a ve b sıfırdan farklı olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ ” biçiminde olduğu zaman bir ikinci dereceden denklem olacağını (örneğin, [339] ve [359]) belirtmiştir. Bu nedenle katılımcının sembol odaklı ve kanonik olmayan söylemlerini içeren BG-Z9 kodlu rutini ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır.

Zehra’nın denklem ve eşitsizlikler arasındaki ilişkiyi açıklarken kullandığı BG-Z2 kodlu rutinde sesli gerçekleştirmeleri (örneğin, [12]) ve Şekil 79’daki gibi hem sözel hem de cebirsel gerçekleştirmeleri süreç odaklı olmuştur. Katılımcının söylemleri anlatı üretmekten ziyade prosedürün adımlarını açıklamaya yönelik olmuş ve bu nedenle BG-Z2 kodlu rutinin ritüel olarak kodlanmıştır. Benzer şekilde denklem ve eşitsizlik sistemlerini tanımlarken kullandığı BG-Z6 kodlu rutinde de süreç odaklı olduğu görülen katılımcının açık önermelerde yer alan değişkenlerin bir evrensel kümeye ait olduğunun farkında olmadığı gözlemlenmiştir. Zehra, “ $x + 1 = 2 \wedge y + 2 = 3$ ” denklemleri için “... evet yani bu bir denklem sistemi değil [*kağıdındaki “ $x + 1 = 2$ ve $y + 2 = 3$ ” eşitliklerini göstererek*] çünkü bunu hiçbir şekilde çözemeyiz. [194]” şeklinde süreç odaklı söylemlerde bulunmuştur. Katılımcı, “ $x + y = 2 \wedge 2x = 4$ ” denklemleri içinse “Bu çözülür. Çünkü burada x ’ler var x ’leri bulup çözebiliriz. [206]” şeklinde yine süreç odaklı bir söylemde bulunmuş ve sadece ortak değişkenleri içeren denklemlerin bir sistem oluşturduğunu ifade etmiştir (örneğin, [194], [200] ve [226]). Bu durum yine denklem sistemine yönelik söylemlerinin süreç odaklı olduğunu ortaya koymuştur. Bununla birlikte katılımcının denklem ve eşitsizlik sistemlerine yönelik “Birden fazla denklem ya da birden fazla eşitsizlik içeren cebirsel ifadeler [188]” şeklindeki anlatısında da değişkenlere dair herhangi bir söyleme rastlanmamıştır. Bu nedenle Zehra’nın denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutini (BG-Z6) ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır.

Zehra'nın birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşıtsizlikleri çözme prosedürlerini içeren BG-Z4 ve BG-Z5 kodlu rutinlerinde prosedürün performansına odaklandığı ve katılımcının söylemlerinin matematiksel nesnelerin manipölasyonu hakkında olduğu (örneğin, Tablo 53, Tablo 54) gözlemlenmiştir. Zehra, BG-Z4 ve BG-Z5 kodlu rutin prosedüründeki söylemlerinde dağılma özelliğini uyguladığını belirtmek için "...dördü/burayı dağıtacağım...", "...şu kısmı dağıtıyoruz..." ve "...bu tarafı dağıtıp"; sadeleştirme özelliğini uyguladığını belirtmek için "...birbirini götürmek" ve paydaları eşitlemek için genişletme işlemi uyguladığını belirtmek için "ortak paydada buluşmak" gibi insani eylem içeren ifadeleri kullanmıştır. Katılımcı uyguladığı ters işlemleri ise "buradaki ... buraya/karşı tarafa atıyorum", "çıkarma durumunda karşı tarafa artılı halini atacağız", " x 'i yalnız bırakmamız gerektiğı için buradaki (ikiyi) bölüm olarak karşı tarafa attım", "buradaki bölüm durumunda olduğı için karşı tarafa çarpım durumunda gönderiyoruz" ve "buradaki eksi (artı) x 'imizde bu tarafa artı (eksi) x olarak geçiyor" şeklindeki söylemleriyle belirtmiştir. Zehra'nın matematiksel nesnelerin manipölasyonu hakkındaki süreç odaklı BG-Z4 ve BG-Z5 kodlu rutinlerinin ritüel bir rutin olmuştur. Bununla birlikte katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme rutini olan BG-Z10 kodlu rutinine de prosedürün hem süreç odaklı hem de sadece baş katsayısı 1 ve çözümleri tamsayı olan denklemler için uygulanabilir olmasından (örneğin, Şekil 87 ve Tablo 57) dolayı ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır. Benzer şekilde katılımcı uyguladığı prosedürle ulaştığı sonuç arasında ilişki kurmada güçlük yaşamış (örneğin, [321] ve [323]) ve katı bir prosedür izlediğini belirtmiştir (örneğin, [302] ve [319]). Bu nedenle BG-Z8 kodlu rutini de ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır. Ayrıca Zehra'nın birinci dereceden denklem ve eşıtsizlik sistemlerini çözerken yok etme metodunu kullandığı BG-Z7 kodlu rutininde denklem ve eşıtsizlikleri benzer şekilde çözmeye çalışmış (Tablo 55 ve Şekil 84) ve prosedürünü "nasıl ilerlerim?" sorusuna yanıt arayarak uygulamıştır (Tablo 55 ve Tablo 56). Katılımcının BG-Z7 kodlu rutin prosedürünün eşıtsizlik sistemleri için kanonik olmaması ve Zehra'nın denklem sistemlerinin çözüm kümesini yazmada güçlük

yaşamısından (örneğin, [300]) dolayı BG-Z7 kodlu rutin ritüel bir rutin olarak kodlanmıştır.

Zehra'nın Tablo 59'daki gibi kodlanan 10 farklı rutininin ritüel ya da keşif rutini olduğu Tablo 60'ta okuyucuya sunulmuştur.

Tablo 60

Zehra'nın Bireysel Görüşmedeki Rutinlerinin Türü

Rutin Kodu	Ritüel	Keşif
BG-Z1	X	
BG-Z2	X	
BG-Z3		X
BG-Z4	X	
BG-Z5	X	
BG-Z6	X	
BG-Z7	X	
BG-Z8	X	
BG-Z9	X	
BG-Z10	X	

Zehra'nın rutinleri aracılığıyla söyleme katılımı nesneleştirme bağlamında incelendiğinde, katılımcı çoğunlukla ritüel bir katılım sergilemiştir. Katılımcı nesneleştirme açısından söyleme BG-Z1 ve BG-Z3 kodlu rutinleriyle hibrit bir şekilde katılım gösterirken; diğer ritüel rutinlerinin tümü aracılığıyla söyleme ritüel bir şekilde katılmıştır. Zehra'nın denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutini olan BG-Z1 kodlu rutinindeki söylemleri, kimi zaman nesneleri manipüle etme hakkında olsa da katılımcının söylemleri denklem ve eşitsizlik kavramlarının kanonik tanımlarına (Tablo 13) atıf yapmıştır. Örneğin, "...yine bu şekilde bunlar [...] bunların da çözüm kümesi olması gerekiyor. Bunlar işte denklem gibi değil çünkü bir şeye eşit değiller [...] bir tane değerleri olmuyor. [6]" şeklindeki tanımında "eşitsizlikleri" somut manipüle edilebilir birer nesne gibi görerek eşitsizlikleri temsilen "bunlar" zamirini kullansa da denklem ve eşitsizlik tanımına yönelik kullandığı "En az bir bilinmeyen ... içeren çözüm kümesi olan şey cebirsel ifadelerdir. [2]", "En az bir bilinmeyeni, sabit terimi ve çözüm kümesi bulunan cebirsel ifadeler bütünü (Şekil 77)",

“... eşitsizlikte eşittir kavramı yerine büyük-eşittir, büyüktür, küçüktür, küçük-eşittir kullanıyoruz [26]”, “ eşitlik [$=$] *sembolünü yuvarlak içine alarak*] o yüzden ben bunun bir denklem olduğunu düşündüm [28]”, “... eşittir ifadesi olunca denklem oluyor ... [49]” ve “(eşitsizlikte) eşitsizliğin olması gereken ifadelerden [$<, \leq, >, \geq$ *sembollerini kastederek*] bir tanesi var ... [45]” gibi söylemleri denklem ve eşitsizlik kavramlarının kanonik tanımlarına denk olmuştur. Buna rağmen katılımcı, bu söylemlerinde kavramları, birer “açık önerme” yerine birer “sembol dizisi” olarak gördüğünü “...bir tane bilinmeyen içeren ... [2]”, “...çözüm kümesi olan ... [2]”, “...sabit terimin de olması gerekiyor mu emin değilim olabilir de [4]”, “... eşittir ifadesi olunca denklem oluyor ... [49]” ve “(eşitsizlikte) eşitsizliğin olması gereken ifadelerden [$<, \leq, >, \geq$ *sembollerini kastederek*] bir tanesi var ... [45]” gibi ifadeleriyle de ortaya koymuştur. Bu nedenle Zehra’nın BG-Z1 kodlu rutiniyle söyleme katılımı hibrit katılımın birer örneğini teşkil etmiştir. Zehra anlatı üretmeyi hedeflediği BG-Z3 kodlu keşif rutininde ise anahtar sözcüklere “-(i)miz” gibi iyelik eklerini ekleyerek günlük bir dil eşliğinde kullanmış ve “Altı bu eşitsizliği sağlar [...] yani x yerine, değişkenimiz yerine altı yazdığımızda eşitsizliğimiz doğru çıkar. [146]” ve “Yani mesela burada değişken yerine üç yazabiliriz ama eksi üç bölü dört yazamayız, o dahil olmayacak, üç yazarsak eğer cevabımız doğru çıkarmış çünkü burada dahil olabileceğini bize söylemiş. [186]” gibi söylemlerde bulunmuştur. Katılımcının söylemleri kimi zaman matematiksel nesneleri manipüle etme hakkında olsa da Zehra’nın rutin amacının anlatılar üretmek olduğu (örneğin, [67], [126] ve Şekil 81) gözlemlenmiştir. Bu nedenle katılımcının hibrit katılımın iletişimsel belirleyicilerinin gözlemlendiği BG-Z3 kodlu rutiniyle söyleme katılımı nesneleştirme bağlamında hibrit olarak kodlanmıştır. Zehra’nın BG-Z1 ve BG-Z3 kodlu keşif rutini dışında kalan ritüel rutinleriyle söyleme katılımı nesneleştirme bağlamında incelendiğinde katılımcının denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait göstergeleri ve görsel araçları (cebirsal ifadeler, değişkenler, semboller, grafikler vb.) manipüle edilebilen bir nesne olarak gördüğüne dair bulgulara rastlanmıştır. Katılımcı; matematiksel nesneleri temsilen “bu, şu, o, bunlar” gibi zamirlere, “burası,

burada, vb.” gibi yer ve yön zarflarına ve anahtar sözcüklere “(i)miz” iyelik eklerini eklediği “değişkenimiz”, “ x ’imiz”, “ x değerimiz” ve “eşitliğimiz” gibi ifadelerle sıklıkla söylemlerinde yer vererek rutinlerini sergilemiştir. Katılımcı, BG-Z2 kodlu rutin prosedüründe denklem ve eşitsizlikler arasındaki ilişkiyi açıklarken kullandığı “...çünkü bunların çözüm metotları vesaire benzer aynı şekilde çözüyoruz ... [8]” şeklindeki ifadesinde kavramları temsilen “bunlar” zamirini kullanmıştır. Zehra, ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken kullandığı BG-Z9 kodlu rutininde de kavramı birer sembol dizisi olarak gördüğünü, cebirsel ifadede yer alan terimleri “Üs [...] yani değişkenin ikinci dereceden olması için üssü iki olması gerekiyor [329]”, “... çünkü x ’in üssü zaten iki [...] ikinci dereceden bir denklem bir değişkenli. [343]”, “ikinci dereceden olması için şu şekilde olması gerekiyor ... hem x kare olacak hem x olacak [339]” şeklinde betimleyerek ortaya koymuştur. Bununla birlikte katılımcı cebirsel ifadede yer alan harf gösterimler için “değişken” ve “bilinmeyen” kelimelerini birbirini yerine kullanmış (örneğin [41] ve [53]) ve harfli gösterimlerin bağlama bağlı cebirsel ayrımına dair kendinden emin olmayan söylemlerde bulunmuştur (örneğin, [248] ve [375]). Aynı zamanda katılımcı sözel ifadeleri cebirsel ifadelere çevirmede güçlük yaşamıştır (Tablo 59). Katılımcı, denklem ve eşitsizlikler arasındaki ilişkiyi açıkladığı BG-Z2 kodlu rutinini ve denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürlerini içeren BG-Z4, BG-Z5, BG-Z7, BG-Z8 ve BG-Z10 kodlu rutinlerini kullanırken söylemlerinde çoğunlukla prosedürün uygulanması sürecine odaklanmıştır. Bu süreçte matematiksel söylemleri matematiksel nesnelerin manipülasyonu hakkında olan Zehra çoğunlukla günlük bir dil eşliğinde prosedürünü uygulamıştır (örneğin, Tablo 53, Tablo 54, Tablo 55, Tablo 56 ve Tablo 57). Zehra’nın denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürlerini içeren BG-Z4, BG-Z5, BG-Z7, BG-Z8 ve BG-Z10 kodlu rutinlerine dair prosedürlerinde söyleme katılımının nesneleştirme bağlamında ritüel olduğunu ortaya koyan bulgulara sıklıkla rastlanılmıştır. Katılımcının Tablo 53’te yer alan “...beşle şuranın [3 sayısını göstererek] paydasını eşitleyeceğiz ... buradaki üçü x eksi beşle çarpacağız ... bu paydaları şey yapınca birbirini

götürüyor... [122]”, “...üç x bu tarafa geçse zaten burası sıfır geliyor [126]” şeklindeki söylemleri; Tablo 50’de yer alan “...dördü dağıtacağım ...bu tarafı dağıtıp çözersem ...buradaki iki x buraya ... [105]”, “...buradaki bölümde buradaki üçü karşı tarafa atıyorum ... çözümü bu olmuş oluyor [107]”, “...buradaki x ’i bölüm olarak karşı tarafa attım ... [132]”, “Sonra bunları ını birleştiriyoruz ... [176]” biçimindeki söylemleri; Tablo 55’te yer alan “buradaki artı x , eksi x birbirini götürdü ... buradan bunlar da gitti ... [216]” şeklindeki söylemleri; Tablo 56’da yer alan “... y ’yi yok edeceğim ... buradaki y ’ler gitti [292]” biçimindeki söylemleri ve Tablo 53’te yer alan “... x eksi altı, x eksi iki sıfır yapıyorum ...[402]” şeklindeki söylemleri bu duruma örnekler olarak sunulabilir. Bununla birlikte katılımcının BG-Z6 kodlu denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutininde de Zehra’nın kavramların birer açık önerme olduğunun farkında olmadığı ve kavramları manipüle edilebilir birer nesne olarak gördüğüne dair bulgulara (örneğin, [194], [200] ve [206]) rastlanmıştır. Bu nedenle Zehra’nın BG-Z6 kodlu rutiniyle söyleme katılımı ritüel katılımın bir örneği olarak kodlanmıştır.

Zehra’nın rutinleriyle söyleme katılımı esneklik açısından incelendiğinde, katılımcı rutinlerinin tamamında katı bir prosedür uygulamış ve ritüel bir katılım göstermiştir. Katılımcının denklem ve eşitsizlikleri çözerken kullandığı BG-Z4, BG-Z5, BG-Z7, BG-Z8 ve BG-Z10 kodlu rutin prosedürleri incelendiğinde Zehra’nın “Bunun (*sadeleştirme özelliği*) bir sebebi var ben bunu öğrenmiştim ama şu an hatırlayamadım. [124]”, “burada [...] sanırım sadece şu kısmı [+3 *ifadesinin altını çizerek*] dağıtıyoruz ama nedenini bilmiyorum [*gülerek*] ve nedenini kestiremiyorum şu an emin değilim [105]”, “grafik çizimi yoluyla çözüm kümesine böyle mi buluyoruz bundan emin değilim. Sadece benim aklıma bu yol geldiği için onu yazdım. [302]”, “Buradan bir çözüm kümesi belirleyemedim yani çünkü bilemedim [321]”, “...yok etme metodu kullanmak için bu y yok etmeye çalışmışım ... [325]” ve “... yani x kare deseydi olabilirdi ama nasıl yapacağımı hatırlayamadım. [410]” biçimindeki kişisel söylemleri ile “...paydayı eşitlemeden bir çözüm bulamayız ... [107]”, “Bir çözüm kümesine ulaşabilmek için x ’i yalnız bırakmamız

gerekiyor çünkü biz eğer bu iki x olarak kalırsa istediğimiz cevaba ulaşamamış oluruz. [134]”, “... kural mı desem evet x ’i bulmak için y ’ye sıfır veriyoruz ki bulabilelim yani [...] y ’ye sıfır vermeden bulamayız ... [302]” biçimindeki matematiksel söylemleri katılımcının esneklik açısından ritüel bir katılım gösterdiğini ortaya koymuştur.

Zehra’nın rutinleri aracılığıyla söyleme katılımı bağlılık-tutarlılık bağlamında incelendiğinde; BG-Z8 ve BG-Z10 kodlu rutinleriyle söyleme katılımının ritüel olduğu görülürken, Zehra’nın BG-Z4, BG-Z5 ve BG-Z7 kodlu rutinleriyle söyleme katılımında hibrit katılımın örnekleri görülmüştür. İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çarpanlarına ayırma yöntemiyle çözerken kullandığı BG-Z10 kodlu rutininde ise katılımcı sadece baş katsayısı 1 ve çözümleri birer tamsayı olan denklemleri kanonik bir şekilde prosedürünü uygulamıştır (örneğin, Tablo 57). Zehra, baş katsayısı 1 ve çözümleri birer tamsayı olan denklemler dışındaki ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çarpanlarına ayırmada güçlük yaşamış (örneğin, Şekil 87) ve bu durumu sesli (örneğin, [410] ve [414]) ve sözel gerçeklemeleriyle (örneğin, Şekil 87) belirtmiştir. Bu nedenle katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli denklemler denk açık önermeleri yazmada yaşadığı güçlük, söyleme katılımında bağlılık-tutarlılık bağlamında ritüel bir katılımın bir örneğini sunmuştur. Katılımcının bağlılık-tutarlılık bağlamında söyleme katılımının ritüel olduğunu gösteren bir başka rutini ise BG-Z8 kodlu rutini olmuştur. Çünkü katılımcı birinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerinin çözümlerinin analitik düzlemde gösterimine yönelik prosedür ve sonuç arasındaki mantıksal ilişkiyi kurmada zorlanmış (örneğin, [321] ve [323]) ve sadece görev durumunun “analitik düzlem” ifadesini içermesinden dolayı denklemlerin düzlemde belirttiği doğruları çizdiğini (örneğin, Şekil 84) belirtmiştir. Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken kullandığı BG-Z4 kodlu rutin prosedürlerini incelendiğinde, bazı görev durumlarında katılımcı yaptığı kısmi hatalardan dolayı çözüm kümesinin elemanlarını doğru bir şekilde belirleyememiştir. Bunun bir örneği Zehra’nın “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2(x - 5) + \frac{x-1}{3} = -3x + 4$ ” denklemini

sağlayan reel sayıları belirleyiniz.” şeklindeki görev durumunda kağıdında uyguladığı prosedüründe görülmüştür. Katılımcı Şekil 88’de yer alan prosedüründe -30 ile -1 reel sayılarının toplamını -29 olarak hesapladığını için denklemini sağlayan reel sayıyı $“\frac{43}{16}”$ yerine $“\frac{41}{16}”$ olarak belirlemiştir. Fakat bireysel görüşmede aynı görev durumunda uyguladığı prosedüründe (Tablo 54’te Oturum 2- Görev durumu 3) katılımcı doğru sonucu elde etmiştir:

3. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
 $2(x-5) + \frac{x-1}{3} = -3x+4$ denklemini sağlayan (varsa) reel sayıları belirleyiniz.

$$2x-10 + \frac{x-1}{3} = -3x+4$$

$$\frac{6x-30+x-1}{3} = -3x+4$$

$$7x-29 = -9x+12$$

$$16x = \frac{41}{16}$$

$$x = \frac{41}{16}$$

Şekil 88. Zehra’nın Oturum 2- Görev durumu 3 için görüşme öncesi kağıdında yer alan görsel araçları

Bununla birlikte katılımcının “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $3x - 2(x - 4) = 4(x + 1)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.” şeklindeki görev durumunda doğru bir prosedür uygulamasına rağmen dağılma özelliğini kullanırken çarpma işlemini nasıl uygulayacağı konusunda güçlük yaşaması (örneğin, [94]) ve benzer bir görev durumunda da bu durumu tekrarlayarak “...yine aynı kaldım [gülerek] [...] burada [...] sanırım sadece şu kısmı [+3 ifadesinin altını çizerek] dağıtıyoruz ama nedenini bilmiyorum [gülerek] ve nedenini kestiremiyorum şu an emin değilim [105]” söyleminde bulunması dikkat çekmiştir. Ayrıca katılımcının “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $3x - 2(x - 4) = 4(x + 1)$ ” denkleminin çözüm kümesini belirlerken Şekil 89’daki gibi kanonik bir çözüm yapmayı başardığı fakat kağıdında yer alan sözel gerçeklemesinden ulaştığı reel sayının çözüm kümesinin elemanını temsil ettiği konusunda emin olmadığı gözlemlenmiştir.

2. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$3x - 2(x - 4) = 4(x + 1)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Gebirsel gerçeleşme

$$\begin{aligned} 3x - 2x + 8 &= 4x + 4 \\ x + 8 &= 4x + 4 \\ 3x &= 4 \quad x = \frac{4}{3} \\ G_k &= \left\{ \frac{4}{3} \right\} \end{aligned}$$

Sözel gerçeleşme

*reel sayılar dediğinde
başka bir şey yapıyorduk
ama ne olduğunu
hatırlamıyorum. :)

*reel sayılar dediğinde
başka bir şey yapıyorduk
ama ne olduğunu
hatırlamıyorum.

Şekil 89. Zehra'nın Oturum 2- Görev durumu 2 için görüşme öncesi kağıdında yer alan görsel araçları

Zehra'nın birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözme rutini olan BG-Z5 kodlu rutin prosedürünün de bazı görev durumlarında kısmi hatalar içerdiği ve katılımcı çoğunlukla birbirine denk açık önermeler yazmayı başarmasına rağmen kısmi hatalarından kaynaklı doğru çözüme ulaşamamıştır (örneğin, Tablo 54'te Oturum 2- Görev durumu 6). Katılımcının kısmi hatalarının kaynağının ne olduğuna dair herhangi bir bulgu olmamasıyla birlikte Zehra'nın birinci dereceden denklem ve eşitsizlik çözme prosedürlerini içeren BG-Z4 ve BG-Z5 kodlu rutinleriyle söyleme katılımı bağlılık-tutarlılık bağlamında hibrit katılımın birer örneği olarak kodlanmıştır. Bununla birlikte denklem ve eşitsizlik sistemlerini yok etme metoduyla çözdüğü prosedürlerini (örneğin, Tablo 55 ve Tablo 56) içeren BG-Z7 kodlu rutini de hem katılımcının denklem sisteminin çözüm kümesini yazmada güçlük yaşaması (örneğin, [300]) hem de eşitsizlik sistemleri için kanonik olmayan bir prosedürü içerdiği (örneğin, Tablo 55'te Oturum 3- Görev durumu 4) için hibrit katılımın bir örneği olmuştur.

Katılımcının söyleme katılımı gerekçelendirme bağlamında ele alındığında ise ritüel, hibrit ve keşifsel katılımın belirleyicilerine yönelik bulgulara rastlanmıştır. Katılımcı BG-Z4, BG-Z8 ve BG-Z10 kodlu denklem ve denklem sistemi çözme prosedürlerini uygularken performansını argüman inşa etmede güçlük yaşamış ve söylemlerinde “bilmiyorum”, “hatırlayamadım”, “bilemedim”, “benzetemedim” ve “öyle düşünüyorum” gibi ifadelerle

yer vermiştir. Bu nedenle katılımcının bu rutinleriyle söyleme katılımı gerekçelendirme bağlamında ritüel katılımın birer örneklerini sunmuştur. Zehra'nın BG-Z4, BG-Z8 ve BG-Z10 kodlu rutinlerinde performansını gerekçelendirmede yaşadığı güçlüğü gösteren iletişimsel örneklere ise Tablo 61'de yer verilmiştir.

Tablo 61

Zehra'nın BG-Z4, BG-Z8 ve BG-Z10 Kodlu Rutinlerinde Performansını Gerekçelendirmesinin İletişimsel Örnekleri

Rutin kodu	İletişimsel örnekler
BG-Z4	Görev Durumu: "$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $3x - 2(x - 4) = 4(x + 1)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz." 97. A: Peki üç x eksi ikiyi dağıtman için cebirsel ifadenin böyle yazılması sence doğru mu? 98. <Zehra, $(3x - 2)$ ifadesini $(x - 4)$ ifadesiyle çarpmaya çalışarak prosedürünü uyguluyor> 99. Z: Üç x kare [$3x^2$ ifadesini yazarak] bir yerlerde hata yapıyorum [$3x^2$ ifadesini silerek] ama şu an nerede nasıl yapacağımı çıkartamadım burada üç x eksi iki x artı sekiz yapmışım [<i>kağıdındaki çözüme bakarak</i>] üç x'i dağıtmamışım [...] sadece eksi ikiyi dağıtmıştım [<i>gülerek, kafası karışık</i>] böyle mi yapmam gerekiyor bilmiyorum. 100. A: Neden böyle yaptığını biliyor musun, sence neden böyle yapmışsındır? 101. Z: İıı [...]. 102. A: Bu tip soruları böyle çözdüğün için mi, yoksa böyle olması gerektiğini düşündüğün için mi? 103. Z: <i>Öyle olmasını düşündüğüm için sanırım</i> yani üç x çarpım durumunda ya ben direk onu dağıtmayayım <i>diye düşünmüş olabilirim</i> [...] sadece eksi ikiyi dağıttım [...] üç x kendi içinde çarpım durumunda sanırım [...] evet çarpım durumunda [...] bu yüzden şu anda doğrusu o mu <i>diye düşünüyorum</i> [...] <i>kararsız kaldım</i>. Görev Durumu: "$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $4(x - 5) + 2x = -x + 3(x + 1)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz." 105. Z: Burada ilk önce buradaki dördü dağıtacağım [...] dört x eksi yirmi artı iki x eşittir (<i>gerçekleşme 1</i>) [...] ııı yine aynı kaldım [<i>gülerek</i>] [...] burada [...] sanırım sadece şu kısmı [$+3$ ifadesini altını çizerek] dağıtıyoruz ama nedenini bilmiyorum [<i>gülerek</i>] ve nedenini kestiremiyorum şu an emin değilim [...] ama bu tarafı dağıtıp çözersem eğer bu eksi x dursun [...] burada üç x artı üç oluyor (<i>gerçekleşme 1</i>) [...] sonra burası da altı x eksi yirmi eşittir iki x artı üç oluyor (<i>gerçekleşme 2</i>) [...] sonra buradaki iki x x buraya [...] dört x eşittir yirmi üç oldu (<i>gerçekleşme 3</i>) [...] x eşittir yirmi üç bölü dört geldi (<i>gerçekleşme 4</i>).
BG-Z8	Görev Durumu: "$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x - 6y = 12 \wedge -x + 3y = 9$ denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarını analitik düzlemde grafik

çizimi yoluyla bulunuz.”

301. A: Denklem sistemini analitik düzlemde grafik yardımıyla bulunuz demişim sen nasıl bir yol izlediğini açıklar mısın?

302. Z: Ben burada ilk önce x 'i bulmak için y 'lere sıfır verdim [...] y 'yi bulmak için x 'e sıfır verdim [...] burada analitik düzlemde grafik çizimi çözüm kümesi bu oluyor ama orada da düşünmüştüm zaten bunu emin olun, çünkü x 'leri bulmak için yani [...] *kural mı desem* evet x 'i bulmak için y 'ye sıfır veriyoruz ki bulabilelim yani [...] y 'ye sıfır vermeden bulamayız ama *bu buradaki sizin dediğiniz grafik çizimi yolu yani grafik çizimi yoluyla çözüm kümesine böyle mi buluyoruz bundan emin değilim. Sadece benim aklıma bu yol geldiği için onu yazdım.*

...

316. A: Anladım peki neden x 'e sıfır verip y 'yi buluyorsun, y 'ye sıfır verip x 'i buluyorsun?

317. z: Iıı [...].

318. A: Yoksa öyle yapıldığı için mi yapıyorsun bunu?

319. Z: Öyle yapıldığı için değil *ben bunu yine biliyordum ama hatırlamıyorum* çünkü bir şeyi vardı bunun eğer [...] üstündeki noktayı bulmaya çalışıyoruz biz mesela bunu x eksenini üzerindeki noktayı bulmaya çalıştığımız için y 'nin bir değeri olmaması gerekiyor çünkü y 'nin de bir değeri olursa bu x eksenini üzerinde bir nokta olmaz [...] *öyle düşünüyorum.*

320. A: Tamam diyelim ki bu noktaları buldun [...] bunun çözüm kümesini çizerek belirleyin demiştik değil mi, (Z: *Hı hı*) çizmişsin. Burada bir çözüm kümesi belirleyebilir misin? Yorumun nedir?

321. Z: Buradan bir çözüm kümesi *belirleyemedim yani çünkü bilemedim.*

322. A: Fikir vermedi mi sana?

323. Z: *Vermedi yani benzetemedim neden çözüm kümesi [...] çözüm kümesi bulabileceğimiz hakkında.*

BG-Z10 Görev Durumu: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2x^2 + x - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.”

409. A: Tamam bakalım. Sen orada çözüm yapamamışsın neden zorlandın?

410. Z: Çünkü iki x kare dediği [...] zaman denklem çözümü yani x kare deseydi, olabilirdi *ama nasıl yapacağımı hatırlayamadım.*

Görev Durumu: “ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x^2 - 3x + 5 = 0$ denklemini sağlayan reel sayıların kümesini bulunuz.”

411. A: Tamam burada ne yaptın?

412. Z: Burada da yine tam sayılarda kökünün olmadığını bulmuşum.

413. A: $Hı hı$ [...] tam sayılarda kökü olmadığına nasıl karar verdin peki?

414. Z: Iıı bence şey ıııı [...] çarpanlara ayırma yapınca buradaki hiçbir sayı toplamları eksi üç ve çarpımı eksi beş *gelmedi, bulamadım.*

415. A: Bulamadığın için öyle olmayacağını düşündün.

416. Z: Evet.

417. Tamamdır.

Katılımcının denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutini olan BG-Z1 kodlu rutiniyle söyleme katılımı gerekçelendirme bağlamında incelendiğinde ise hibrit katılımın iletişimsel belirleyicilerine rastlanılmıştır. Zehra cebirsel bir ifadenin denklem ya da eşitsizlik olup olmadığını gerekçelendirirken; cebirsel ifadeyi betimlemiş (örneğin, Şekil 77) ve “... bir tane bilinmeyen içeren ... [2]”, “... çözüm kümesi olan ... [2]”, “...sabit terimin de olması gerekiyor mu emin değilim olabilir de [4]”, “... eşittir ifadesi olunca denklem oluyor ... [49]” ve “(eşitsizlikte) eşitsizliğin olması gereken ifadelerden [$<$, $\leq$, $>$, $\geq$ sembollerini kastederek] bir tanesi var ... [45]” biçiminde söylemlerde bulunmuştur. Ayrıca katılımcının bulgularında, denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümeleri üzerinden “... eşitsizlikler bir çözüm kümesi şeklinde veya bir aralık şeklinde yazılıyor ııı burada da gösterdiğim gibi zaten [$x \geq 1$ ifadesini göstererek] ama denklemin sonucu oluyor [...] tek belirli bir sonucu oluyor, eşitsizliğin sonucu farklı, fazla olabiliyor yani bir aralık şeklinde. [18]” şeklinde süreç odaklı argümanlar sunduğu söylemlerine de rastlanılmıştır. Bu nedenle Zehra’nın BG-Z1 kodlu rutiniyle söyleme katılımı gerekçelendirme bağlamında hibrit katılımın bir örneğini teşkil etmiştir. Bununla birlikte Zehra’nın söylemlerini matematiksel örneklere başvurarak ve eylemleri veya süreçleri vurgulayarak gerekçelendirdiği BG-Z2, BG-Z6 ve BG-Z9 kodlu rutinleriyle söyleme katılımı da gerekçelendirme açısından hibrit katılımın örnekleri olarak gözlemlenmiştir. Katılımcı denklem ve eşitsizlik arasında kurduğu “... bunların çözüm metotları vesaire benzer aynı şekilde çözüyoruz denklemlerini falan o yüzden ııı bir ilişki var aralarında benzerlik var yani. [8]” biçimindeki ilişkiyi açıkladığı BG-Z2 kodlu rutininde söylemini matematiksel örnekler sunarak gerekçelendirmiştir. Zehra bu süreçte Şekil 79 ve Şekil 80’deki gibi denklem ve eşitsizliklere birer örnek vermiş ve eylemleri ve süreçleri vurgulayan söylemleriyle (örneğin, Şekil 79’da sözel gerçekleştirmeler ve [12]) argümanını inşa etmiştir. Buna rağmen katılımcının çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken kullandığı BG-Z3 kodlu rutininde söylemlerini, anlatılar üreterek (örneğin, [67], [146] ve

[404]) gerekçelendirdiği görülmüş ve BG-Z3 kodlu rutini söyleme katılımı keşifsel katılımın bir örneği olarak kodlanmıştır.

Zehra'nın söyleme katılımı, katılımcının yetkinliği bağlamında incelendiğinde ise ritüel ve hibrit katılımın örneklerine rastlanılmıştır. Zehra birinci dereceden iki değişkenli denklemlerin çözüm kümesini belirlemesi istendiğinde ve baş katsayısı 1'den farklı ve çözümleri irrasyonel sayı olan ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken prosedürünü nasıl uygulayacağı noktasında kararsızlıklar yaşamış (örneğin, BG-Z8 kodlu rutin için [302], [319], [321], [323] ve Şekil 84; BG-Z10 kodlu rutin için [410], [414] ve Şekil 87) ve doğru çözüme ulaşamamıştır. Bu nedenle Zehra'nın BG-Z8 ve BG-Z10 kodlu rutin prosedürleri yetkinliğinin ritüel katılıma birer örnek teşkil etmiştir. Bununla birlikte katılımcı, birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizlikleri çözme rutinlerinde çoğunlukla bağımsız kararlar alarak söylemlerinde kendinden emin bir şekilde prosedürlerini uygulamış ve sadece işlemsel hatalar yaptığı anlarda nadiren prosedüründen emin olmadığını belirtmiştir (örneğin, [105]). Bu nedenle Zehra'nın BG-Z4 ve BG-Z5 kodlu rutinleriyle söyleme katılımı, yetkinliği açısından hibrit katılımın bir örneği olmuştur. Benzer şekilde Zehra birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizlik sistemlerini yok etme metoduyla çözerken de prosedürünü (her ne kadar eşitsizlik sistemleri için kanonik bir metot olmasa da) kendinden emin bir şekilde uygulamış fakat denklem sistemlerinin çözüm kümesini nasıl yazacağı noktasında kararsız kalmış ve araştırmacıdan onay istemiştir (örneğin, [300]). Bu nedenle katılımcının BG-Z7 kodlu denklem ve eşitsizlik sistemlerini yok etme metoduyla çözme prosedürünü içeren rutin performansı katılımcının yetkinliği bağlamında hibrit katılımın bir örneğini sunmuştur.

Katılımcının uyguladığı prosedürleri sonucunda elde ettiği çözüm kümesi ya da çözüm kümesi elemanları hakkında çoğunlukla kendinden emin bir şekilde söylemde bulunduğu (örneğin, [146] ve [186]) görülürken, katılımcı kimi zaman çözüm kümesinin gösterimini nasıl yapacağı (örneğin, Tablo 56) ya da çözümleri nasıl belirleyeceği konusunda kendinden emin olamadığı söylemlerde bulunmuştur (örneğin, Şekil 84 ve Şekil 89). Bu

nedenle Zehra'nın BG-Z3 kodlu keşif rutiniyle söyleme katılımı da hibrit olmuştur. Bununla birlikte denklem ve eşitsizlikleri tanımlarken çoğunlukla kendinden emin söylemlerde bulunmasına rağmen denklem ve cebirsel ifadelerin sabit terim içerip içermemesi konusunda kararsız kalan Zehra'nın BG-Z1 kodlu rutiniyle söyleme katılımı da yetkinlik açısından hibrit bir katılımın örneği olmuştur.

Katılımcının rutinleri uygulanabilirlik açısından incelendiğinde ise katılımcı BG-Z1 kodlu denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutinini odak grup görüşmelerinde farklı görev durumlarında da kullanmaya devam etmiş ve Zehra'nın rutin türü ritüelden keşfe dönüşmüştür. Bununla birlikte Zehra, BG-Z3 kodlu çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken kullandığı rutinine dair anlatılarını zenginleştirerek (OG-Z2 kodlu rutin) odak grup görüşmelerinde de sergilemeye devam etmiştir. Bu nedenle katılımcının BG-Z1 ve BG-Z3 kodlu rutinleri uygulanabilirlik açısından keşifsel katılıma bir örnek teşkil etmiştir. Ayrıca katılımcının odak grup görüşmelerinde denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduğunu ve ikisi arasındaki farklılığın içerdikleri bağıntılardan kaynaklandığını fark etmesinden dolayı BG-Z2 kodlu rutini odak grup görüşmelerinde gözlemlenmemiş ve bu nedenle rutinin uygulanabilirliğine yönelik yorum yapılamamıştır.

Zehra'nın birinci dereceden tek değişkenli denklem ya da eşitsizlikleri çözme prosedürlerini içeren BG-Z4 ve BG-Z5 kodlu rutinleri odak grup görüşmelerinde de devam etmiş fakat hem bireysel de hem de odak grup görüşmelerinde katılımcı prosedürünü kimi zaman eksik ya da hatalı bir şekilde uygulamıştır. Bu nedenle Zehra'nın BG-Z4 ve BG-Z5 kodlu rutinleri uygulanabilirlik açısından hibrit katılımın bir örneğini sunmuştur. Katılımcının denklem sistemlerini yok etme metodu ile çözme prosedürünü içeren BG-Z7 kodlu rutiniyle çözüm kümesinin elemanlarını analitik düzlemde gösterimi istendiğinde sergilediği BG-Z8 kodlu rutinini odak grup görüşmelerinde uygulamada güçlük yaşadığı gözlemlenmiş ve Zehra'nın bu rutinleri uygulanabilirlik açısından söyleme katılımı ritüel katılımın bir örneği olmuştur. Bununla birlikte Zehra'nın bireysel görüşmede ikinci

dereceden tek değişkenli denklemleri çarpanlarına ayırma yöntemiyle çözme prosedürünü farklı görev durumlarında uygulamada güçlük yaşadığı gözlemlenmiş ve bu nedenle BG-Z10 kodlu rutiniyle söyleme katılımı ritüel olarak kodlanmıştır.

Bu bağlamda katılımcının kriterler bağlamında hangi rutinlerinin hangi katılım türü için örnek teşkil ettiği Tablo 62’de okuyucuya sunulmuştur.

Tablo 62

Zehra’nın Rutinleri Aracılığıyla Kriterler Bağlamında Bireysel Görüşmede Söyleme Katılım Türü

Kriterler	Ritüel katılım	Hibrit katılım	Keşifsel katılım
Söylemin Nesneleştirilmesi	BG-Z2 BG-Z4 BG-Z5 BG-Z6 BG-Z7 BG-Z8 BG-Z9 BG-Z10	BG-Z1 BG-Z3	
Esneklik	BG-Z4 BG-Z5 BG-Z7 BG-Z8 BG-Z10		
Bağlılık-Tutarlılık	BG-Z8 BG-Z10	BG-Z4 BG-Z5 BG-Z7	
Gerekçelendirme	BG-Z4 BG-Z8 BG-Z10	BG-Z1 BG-Z2	BG-Z3
Katılımcının yetkinliği	BG-Z8 BG-Z10	BG-Z1 BG-Z3 BG-Z4 BG-Z5 BG-Z7	
Uygulanabilirlik	BG-Z7 BG-Z8 BG-Z10	BG-Z4 BG-Z5	BG-Z1 BG-Z3

Sonuç olarak, katılımcı nesneleştirme, esneklik ve gerekçelendirme bağlamında çoğunlukla ritüel bir katılım göstermesine rağmen, yetkinlik bağlamında daha keşifsel bir katılım sergilemiştir. Bununla birlikte Zehra’nın rutinlerinin uygulanabilirliği incelendiğinde her üç katılım türüne dair örneklerle rastlanmıştır.

Zehra'nın Odak Grup Görüşmelerindeki Rutinleri ve Söyleme Katılımına Yönelik Bulgular

Zehra'nın araştırmacı dahil altı kişiyle yürütülen ve 26 farklı görev durumu hakkında tartışılan odak grup görüşmelerindeki söylemleri incelenmiş ve katılımcının 8 farklı rutini tespit edilmiştir. Katılımcının bireysel görüşmelere göre odak grup görüşmelerinde çoğunlukla sonuç odaklı olduğu ve matematiksel nesneler hakkında anlatılar üretmeye çalıştığı gözlemlenmiş ve bu nedenle 8 farklı rutinin 4'ünün keşif rutini olduğu görülmüştür. Odak grup görüşme bulguları, Zehra'nın diğer katılımcıların söylemlerinden sıklıkla mantıksal çıkarımlar yaptığını ve böylece bazı rutin türlerinde değişiklikler meydana geldiğini göstermiştir. Örneğin, bireysel görüşmede denklem ve eşitsizlikleri tanımlamada kullandığı BG-Z1 kodlu ritüel rutini, katılımcının odak grup görüşmelerinde kavramların birer açık önerme olduğunu fark etmesiyle keşif rutinine dönüşmüş ve OG-Z1 şeklinde kodlanmıştır. Bununla birlikte çözüm kümesi ve çözüm kümesi elemanları hakkında konuşurken kullandığı keşif rutini BG-Z3 için Zehra'nın prosedüründe anlatılarının zenginleştiği gözlemlenmiş ve bu rutini de OG-Z2 şekilde kodlanmıştır. Katılımcının diğer OG-Z3 ve OG-Z5 kodlu keşif rutinleri ise Zehra'nın sadece odak grup görüşmelerinde rastlanılan rutinleri olmuştur. Buna rağmen Zehra işlemsel prosedürleri uyguladığı diğer 4 ritüel rutinlerinde prosedürünü uygulamada güçlük yaşamış ve geçmiş öğrenme yaşantılarına (emsal olaylara) sıklıkla başvurarak rutin prosedürlerini uygulamaya çalışmıştır. Bu rutinlerden ikisini katılımcının bireysel görüşmede de birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizlikleri çözerken kullandığı BG-Z4 ve BG-Z5 kodlu rutinleri oluşturmaktadır. Bununla birlikte bireysel görüşmede sadece baş katsayısı 1 ve çözümleri tamsayı olan ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözebilen Zehra'nın, odak grup görüşmelerinde ikinci dereceden tek değişkenli tek değişkenli denklemleri iki farklı yöntem ile çözmeye çalıştığı görülmüş ve bu rutini de OG-Z4 şeklinde kodlanmıştır. Katılımcının bir diğer ritüel rutini ise ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ya da eşitsizlik sistemlerini çözerken kullandığı OG-Z6 kodlu rutini olmuştur. Katılımcının

denklem ve eşitsizlik kavramlarına yönelik odak grup görüşmelerindeki rutinleri aşağıdaki durumlarda görülmüştür:

- Denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken (keşif rutin)
- Çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken (keşif rutini)
- Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken (ritüel rutin)
- Birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken (ritüel rutin)
- İkinci dereceden tek değişkenli denklemin çözümlerinin varlığını belirlerken (keşif rutini)
- İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken (ritüel rutin)
- İkinci dereceden tek değişkenli bağıntıların alabileceği en büyük ya da en küçük değeri belirlerken (keşif rutini)
- İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ya da eşitsizlik sistemlerini çözerken (ritüel rutin)

Zehra'nın bu durumlarda gözlemlenen 8 farklı rutini aracılığıyla söyleme katılım türü incelendiğinde, söyleme katılımı esneklik ve gerekçelendirme bağlamında bireysel görüşmedeki gibi ritüel formda olmuştur. Katılımcının söyleme katılımı, bağlılık-tutarlılık ve katılımcının yetkinliği bağlamında hibrit iken uygulanabilirlik bağlamında hibrit ve keşifsel katılımın örnekleri eşit sıklıkta gözlemlenmiştir.

Zehra'nın odak grup görüşmesindeki söylemleri incelendiğinde, katılımcının denklem ve eşitsizlikleri tanımlarken kullandığı BG-Z1 kodlu rutininde değişiklikler olmuştur. Odak grup görüşmelerinde “önerme” ve “açık önerme” kavramları hakkında yapılan konuşmalarda söyleme katılmaya ve mantıksal çıkarımlar yapmaya çalışan Zehra'nın süreç içerisinde tanımında farklılıklar olduğu gözlemlenmiştir. Bireysel görüşmede “bilinmeyen” ve “değişken” sözcüklerini birbirini yerine kullanan katılımcı odak grup görüşmelerinde yaptığı tanımlarda evrensel kümenin temsil ettiği harf gösterimleri için sadece “değişken” terimini kullanmıştır. Katılımcı en az bir değişken ve eşitlik içeren cebirsel ifadeleri denklem, en az bir değişken ve “ $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ ” eşitsizlik sembollerinden birini içeren ifadeleri

de eşitsizlik olarak tanımlamaya odak grup görüşmelerinde de devam etmiş ve bireysel görüşmeden farklı olarak çözüm kümeleri üzerinde yaptığı tanımlamanın (örneğin, [6] ve [18]) uygun olmadığının farkına varmıştır. Zehra, GD3'te bireysel görüşmedeki tanımına benzer “Birinde eşittir işareti var birinde büyüktür işareti var [...] yani büyüktür olduğu için ııı mesela bunda sonuç buluyoruz yukarıdaki $[“11 + 2(x - 3) = 7, x \in \mathbb{R}”$ ifadesini kastederek] tek bir sonuç buluyoruz aşağıdaki $[11 + 2(y - 3) > 7, y \in \mathbb{R}”$ ifadesini kastederek] bir aralık ya da çözüm kümesi buluyoruz [462-GD3]” şeklinde bir tanım yapmıştır. Fakat Zehra, görüşmenin devamında arkadaşı Derya ve Şule'nin de denklemlerin tek bir çözümü olacağına dair söylemleri üzerine bir önceki görev durumu olan $“11 + 2(u - 3) = 2u + 5, u \in \mathbb{R}”$ özdeşliğinin çözüm kümesini hatırlamış ve denklemlerin sonsuz çözüme de sahip olabileceğine dair mantıksal bir çıkarım yapmıştır:

466. Z: Birden büyük tüm reel sayılar dedik mesela. $<11 + 2(y - 3) > 7, y \in \mathbb{R}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi hakkında konuşuyor>

467. A: Hı hı.

468. Z: Orada $[11 + 2(x - 3) = 7, x \in \mathbb{R}$ ifadesini kastederek] sadece tek bir sonuç.

469. D: Evet hocam ben de öyle düşünüyorum yani y burada birden büyük tüm sayılar olabilirken x sadece bir sayıyı temsil ediyor.

470. A: Tamam Şule, sen ne düşünüyorsun?

471. Ş: Ben de onu diyecektim hocam [...] yani x için bir değer bulurken y için bir aralık buluyoruz.

...

474. A: x için bir reel sayı, sadece bir reel sayı mı buluyoruz?

475. Z: Ama o şeydi totolojiydi bütün değerler sağlıyordu onu $<“11 + 2(u - 3) = 2u + 5, u \in \mathbb{R}”$ şeklindeki bir önceki görev durumunu hatırlıyor>

476. D: Hah evet!

477. E: Doğru.

478. A: Demek ki bu ikisini birbirinden ayıran şey bulduğunuz reel sayılar-

479. Z: Değilmiş, demek ki aradaki işaretlermiş. Aradaki işaret işte! [Gülerek] <Kendinden emin ve mutlu gözüküyor>.

Bu iletişimsel süreçten sonra Zehra'nın denklem ve eşitsizlik için yaptığı tanımlarda çözüm kümesi ile ilgili herhangi bir söyleme rastlanmamış ve katılımcı konuşmalar sonrasında “Denklem ııı bir değişken bir eşitsizlik içeren ifade, eşitsizlik yine bir değişken

ve bir eşitsizlik içeren yani bu sefer büyüktür büyük-eşittir küçüktür küçük-eşittir gibi ifadeler içeren ifadelerdir ve bunların arasındaki fark da denklem de arada eşitlik var mutlaka. Ve yine eşitsizlikte her ikisinde değişken var eşitsizlikte de o büyüktür, büyük-eşittir, küçüktür, küçük-eşittir işaretlerinden bir tanesi var. [519-GD3]” şeklinde bir tanım yapmıştır. Benzer şekilde GD5’te “ $-4(x - 7) = x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesi için “Çünkü denklem şartı eşitlik bulundurması ve değişkeni olmasıydı. Burada eşitlik bulunuyor ve değişkeni de var, o yüzden denklem [23-GD5]” şeklinde söylemde bulunmuştur. Bununla birlikte GD5’te yaşanan söylemsel süreç, Zehra’nın diğer katılımcılarla olan iletişimlerinden yola çıkarak yaptığı mantıksal çıkarımlarla denklem ve eşitsizlik kavramlarının birer açık önerme olduğunun farkına vardığını göstermiştir. Zehra’nın bu süreçte diğer katılımcılarla olan iletişimsel örnekleri ve bulgulara yönelik yorumlar Tablo 63’te yer almaktadır.

Tablo 63

Zehra’nın GD5’te Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarının Tanımına Yönelik İletişimsel Örnekleri ve Yorumlar

İletişimsel örnekler	Yorum
20. A: Bu ifade [$-4(x - 7) = x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$] ifadesini kastederek] bir denklem midir?	Bu alıntıda Zehra, en az bir değişken ve eşitlik içeren ifadeleri denklem olarak tanımladığını tekrarlamıştır.
21. Z: E: Evet.	
22. A: Neden?	
23. Z: Çünkü denklem şartı eşitlik bulundurması ve değişkeni olmasıydı. Burada eşitlik bulunuyor ve değişkeni de var, o yüzden denklem.	Fakat arkadaşı Elif gibi değişkenin ait olduğu bir evrensel kümenin varlığından bahsetmemiştir. Zehra’nın görüşme devamındaki söylemleri katılımcının henüz bu durumun farkında olmadığını göstermiştir.
24. A: Başka bir şekilde açıklama yapmak isteyen var mı?	
25. E: Ve değişkenin kümesini de belirtmiş yani bize değişkenin ne olduğunu da vermiş (A:Hı hı) o yüzden de denklem diyebiliriz.	
26. A: Burada Burcu sen buraya açık önerme yazmışsın, neden böyle yazdın? <“ $-4(x - 7) = x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesi hakkında konuşurken>	Bu alıntıda Zehra, arkadaşı Burcu’nun “ $-4(x - 7) = x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesi için “açık önerme” söyleminden sonra bu cebirsel ifade için “denklem içeren bir açık önerme” şeklinde bir söylemde bulunmuştur.
27. B: Çünkü [...] hani söyleyeyim [...] tüm veya bazı kelimeleri kullanılmamış, ters A ve E yani, şu an şey yapamadım [gülmüşüyor] sadece değişkenimizin reel [...] sayılardan olduğunu belirtmiş ben o yüzden açık önerme dedim.	Katılımcının burada Burcu’nun söylemlerinden bir çıkarım yaptığı fakat bu
28. A: Bu bir açık önerme mi?	
29. B: Çünkü kesin (Z:Evet) bir sonuç çıkmıyor. Bize ne verirse ona göre yapıyoruz. [...] sonucumuzu ona göre, yani doğruluğu yanlışlığı bilemiyoruz ilk başta, ondan sonra biliyoruz.	

30. A: Anladım, peki bu bir denklem midir?	söyleminde kendinden emin olmadığı ve şaşkın olduğu gözlemlenmiştir. Zehra'nın bu andan itibaren, denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olabileceğine dair farkındalığının oluşmaya başladığı görülmüş ve katılımcı mantıksal çıkarımlar yapmaya (örneğin, [36] ve [38]) devam etmiştir.
31. B: Evet [...] denklem [tedirgin]	
32. Z: İy şey denklem içeren bir açık önerme. [<i>Şaşkın, emin değil</i>]	
33. A: Denklem içeren bir açık önerme?	
34. <Öğrenciler bu söylem üzerine düşünüyor>	
35. A: Denklem içermeyen açık önermeler de mi var?	
36. Z: Eşitsizlik içerebilir.	
37. E: Açık önermelerde hep eşitlik içeriyor [...] diye biliyorum.	
38. Z: Eşitsizlik içerebilir mi? <Elif bir an şaşırıyor ve düşünüyor> [...] eşitsizlik de olabilir.	
83. A: Zehra seni de dinleyelim bir kere daha. <“ $-4(x - 7) = x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesi hakkında konuşmasını istiyor>	Bu alıntıda Zehra'nın söylemleri, katılımcının açık önerme ve denklem arasında bir ilişki olduğuna dair farkındalığını ortaya koymuştur. Katılımcı burada tahmin yürüterek denklem ve açık önerme arasında kendince kurduğu ilişkiyi ifade etmeye çalışmıştır.
84. Z: Ya ben açık önerme olduğunu düşünüyorum, çünkü açık önermenin tanımını tam olarak hatırlamıyorum, bizim ne yazdığımızı, ama büyük ihtimal eşitlik veya eşitsizlik içeren ifadeler, sonuçta açık önerme neydi, bizim kesin hüküm bildiremediklerimizdi ve bu eşitsizlik içeren ifadeye baktığımızda yine kesin hüküm bildiremiyoruz, zaten açık önermeler önerme değildi, o yüzden bence bu da açık önerme, öyle düşünüyorum.	
85. A: Evet. [Tahtaya “ $-4(x - 7) \neq x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ ” yazarak]	
86. Z: Bence bu da açık önerme.	
87. A: Bu bir açık önerme mi?	
88. Z: Bence öyle.	
109. A: Şimdi bunlara denklem diyorsunuz, eşitsizlik diyorsunuz, bir yandan da açık önerme diyorsunuz. Bir ilişki kurabiliyor musunuz arasında?	Bu alıntıda Zehra, denklemlerin değişken içermesinden yola çıkarak “Demek ki açık önermeler değişken içeriyor [111]” şeklinde bir çıkarım yapmış ve aynı söylem içinde (örneğin, [119]) “denklem” ve “açık önerme” sözcüklerine bir arada yer vermiştir. Fakat katılımcı bu iki kavram arasında bir ilişki olduğuna dair farkındalığını ifade etmede güçlük yaşamaya devam etmiştir. Bu süreçte Zehra yapmış olduğu mantıksal çıkarımların da arkadaşları tarafından da takdir edilip onaylanmıştır (örneğin, [115] ve [117]).
110. <Şule yani anlamında kafasını sağa sola sallıyor, güler>	
111. Z: Demek ki açık önermeler değişken içeriyor [güler]	
112. A: Demek ki açık önermeler değişken içeriyor.	
113. Z: Evet değişken olması gerekiyor, değişken olmayan açık önerme görmedik şu ana kadar. <Şule gülüyor> Zaten değişken olmazsa bir şeye bağlı olmuyor ki?	
114. A: Şule, Zehra bir şeyler söylüyor [güler] ne düşünüyorsun Zehra'nın söyledikleri hakkında Şule? [Zehra, Şule, Derya gülüşüyor]	
115. Ş: Hocam doğru söylüyor bence [güler] güzel yerlerden yakalıyor [güler].	
116. A: Güzel yerleri yakalıyor diyorsun [güler].	
117. D: İkna olduk hocam.	
118. A: İkna oldunuz. [...] Evet, bir açık önermenin tanımına tekrar bakalım. Değişken içeriyor diyor Zehra, [...] ııı güzel. Peki, denklem ve eşitsizlikler hakkında, her ikisi de açık önermedir diyebilir misiniz?	
119. Z: Şey yaparsa mesela, bir denklem verse ama buradaki [tahtada yer alan “ $x \in \mathbb{R}$ ” ifadesini işaret ederek] x elemanıdır reel sayı yerine x ikiye eşittir dese (A: Hı hı) onu belirtse bize bence o açık önerme olmaz, çünkü kesin hüküm verebileceğiz o zaman.	
...	

122. A: Sizce bu ikisi arasında [denklem ve açık önerme kavramlarını kastederek] bir ilişki var mı yoksa yok mu?

...

124. Z: Bence bir bağlantısı var ama şu an nasıl ifade edeceğimi bilmiyorum.

129. A: Dersimizi geçtiğimiz dersi hatırlıyor musunuz? Tanım yazmıştık tahtaya.

132. D: Ş: Z: Evet.

133. A: Orada cebirsel ifadeyi verdikten sonra o tanımın devamında açık önermesine diye devam etmişim.

134. Z: Demek ki her denklem bir açık önerme.

135. Ş: Evet.

136. A: Öyle mi? <Derya gülümsüyor> Her denklem bir açık önerme [...] her açık önerme bir denklem mi?

137. Z: E: B: Hayır.

e138. Z: Eşitsizlik de olabilir.

139. A: O zaman bazı açık önermeleri bazı açık önermelere göre ayırıp [...] bir şeye göre denklem bir şeye göre eşitsizlik diyorsunuz.

140. Z: Evet.

141. A: Neye göre?

142. Z: Aradaki işaret.

Bu alıntıda araştırmacının geçmiş öğrenme yaşantılarını hatırlatması üzerine Zehra, denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduğunu belirtmiş ve bu açık önermelerin içerdikleri sembollere (eşitlik ya da sıralama bağıntılarına) göre birbirinden ayırt edildiğini ifade etmiştir.

190. <Araştırmacı tahtaya $2x + 3 = 5$ ifadesinin yanına $x \in \mathbb{R}$ yazıyor>

191. A: Şimdi bu nedir?

192. Z: D:Ş: Denklem.

193. A: Peki bir açık önerme mi?

194. Z: Ama denklemin tanımında da şey yazmıyor ki?

195. A: Ne?

196. Z: Küme belirten bir ifade yok ki yani (B: Evet) x eleman-

197. A: Neymiş denklemin tanımı Zehra?

...

201. Z: Denklemin tanımı [...] ıı bir değişken en az bir değişken ve eşitlik içeren ifadeler [...] denklem diyoruz biz bunlara.

202. A: En az bir değişken ve eşitlik içeren ifadelere (Z: Denklem) denklem diyorsun, peki bu değişkenler?

203. E: Ne olduğunu bilmezsek-

204. Z: Değişkenler derken?

205. [...] A: Şimdi [$x \in \mathbb{R}$ ifadesini siliyor] bu [$2x$ ifadesindeki x 'i kastederek] bir değişken mi?

206. Z: Aaa burada [...] [kendinden emin değil, kafası karışık]

207. E: Ne olduğunu bilmeden hiçbir şey diyemeyiz.

208. Z: Evet.

209. A: x nedir burada?

210. Z: Bilemiyoruz, ikna oldum ben tamam.

Bu alıntıda Zehra " $x \in \mathbb{R}$ " gibi ifadelerin denklemlerde yer almadığına dair düşüncesini "... denklemin tanımında da şey yazmıyor ki? Küme belirten bir ifade yok ki yani" söylemiyle belirtmiştir. Arkadaşı Elif'in söylemlerinden sonra Zehra'nın değişkenin ait olduğu evrensel kümenin varlığına dair farkındalığı oluşmaya başladığı gözlemlenmiştir.

Zehra'nın GD5'te diğer katılımcılarla yaşadığı iletişimsel süreçlerin sonrasında katılımcı BG-Z1 kodlu rutin prosedürünün değiştiği ve farklı görev durumlarında kavramların tanımı hakkında kendinden emin söylemlerde bulunmuştur. Örneğin, GD10'da araştırmacının

“Evet bu açık önerme $[y = 8 - 2x]$ ile bu açık önermeyi $[y < 8 - 2x]$ kıyaslayınız, aradaki fark nedir?” sorusunu Zehra, “İşareti [...] yani birinde eşittir var birinde küçüktür, yani biri denklem biri eşitsizlik. [104-GD10]” şeklinde yanıtlamıştır. GD13’te yer alan “ $t^2 + 4t = -1, t \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesiyle GD15’te yer alan “ $(m + 1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0, m \in \mathbb{R} - \{-1\}, x \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesinin birer açık önerme belirttiğini “Ben sadece oraya yazmadım. Ama ben de öyle düşünüyorum. [64-GD13]” ve “Ya evet ben böyle olduğunu biliyorum [...] ben mesela bunun açık önerme olduğunu biliyorum ama yazma gereği duymadım [82-GD15]” şeklindeki söylemleriyle belirtmiştir. Ayrıca GD22’de araştırmacının “Denklem nedir?” sorusunu “Açık önerme [247-GD22]” şeklinde yanıtlayan Zehra GD23’te arkadaşı Burcu’nun “her eşitsizlik bir denklemdir” şeklindeki söyleminin neden hatalı olduğuna dair kendinden emin bir şekilde öneriler (örneğin, [36-GD23], [39-GD23], [45-GD23] ve [51-GD23]) sunmuştur:

22. B: Evet çünkü şöyle, ıı denklemini [...] denklemini yazdığımızda mesela bir tane denklem sağlıyor [...] mesela o sıfır olsun [...] ama eşitsizlik yazdığımızda mesela eksi birle bir arasında oluyor ve zaten sıfırı sağlıyor *[zihninden örnek vererek açıklama yapıyor]* aslında her eşitsizlik bir denklem oluyor.

23. A: Hala bu fikir de misin?

24. B: Evet hala bu fikirdeyim ve eşitsizlik denklemden daha fazla bir alan kapsıyor.

25. A: Katılıyor musunuz bu fikre?

26. Z: Hayır!

...

29. B: Ben o kısmı savunuyorum şu an. Çünkü dediğim gibi eşitsizlikte bir aralık belirtiyoruz ve o mesela sıfır dersem, *[arkadaşlarına dönüyor ve parmağıyla onları gösteriyor]* aslında siz de eminim böyle düşünüyorsunuz. Çünkü köklerini neden buluyoruz, denklemini sağlayan diye [...] sıfır bul- ayy konuşamadım [...] denklem olarak düşünseydik eğer köklerini zaten buluyorduk, bunda da bulmak zorundayız ki aralığını belirleyelim. O yüzden bence her eşitsizlik bir denklem oluyor *[ifade etmekte güçlük yaşasa da arkadaşlarına açıklamaya yapıyor]*

30. Z: Her eşitsizlik bir denklem mi? *[Şaşıyor]*

31. B: Ya da her denklem bir eşitsizlik mi oluyor *[gülerek, emin değil]*

...

35. A: Katılıyor musunuz, değilse Burcu’yu olmadığına ikna edin.

36. Z: Şimdi Burcu karşıda ne görüyorsun “ $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ ” *eşitsizliğini işaret ederek* ifadeye bak iyi bak, orada şimdi bir de denklem ve eşitsizliğin tanımlarını hatırlayalım.

Denklemin tanımında diyor ki en az bir değişken ve bir eşitlik içeren ifade diyor [...] ve eşitlik dediğimiz şey eşittir işareti zaten [...] ve bu eşitsizliğin tanımında da diyor ki bir değişken ve eşitsizlik içeren diyor [...] eşitsizlikte bu dört tane sembolümüz var onlar eşitsizlik zaten-

37. B: Tamam da bak sıfıra eşit diyorsunuz zaten [$\geq$ sembolündeki eşit durumunu kastederek] niye diyorsunuz?

...

39. Z: Tamam bak onu düşünmeyelim. Şimdi o eşitliği silsek o da mı bir denklem? [Burcu'ya sorarak]

40. B: Tamam da bak o zaman şöyle düşün biz neden bu eşitsizlikte siz direkt köklerini bulacaksınız değil mi, x , x diye ayıracaksınız eksi üçe eksi bir.

41. Z: Evet, evet.

42. B: Sonra x üç gelecek ve x [...] bir gelecek [...] tamam da niye bunları buluyorsunuz?

...

45. Z: Hayır sadece denklemse köklerine bakıyoruz, eşitsizlik çözerken zaten kök bulmakla eşitsizliği çözmek ayrı ifade, hatta yazıyorduk bir kenarda eksi x kare artı dört x eksi üç eşittir sıfır yazıyorduk bir kenara yazıyorduk, yani buna bir denklem gözüyle bakıp köklerini bulup [...] kritik noktaları belirliyorduk.

...

49. B: Bilmiyorum hala ikna olmadım çünkü dediğimin doğru olduğunu düşünüyorum, bence yanlış değil, bilmiyorum şu an kafam karıştı.

...

51. Z: Yani senin dediğine göre bütün eşitsizliklerde hep büyük-eşit ya da küçük-eşit olmalı ve büyüktür ve küçüktür olan eşitsizlikler de var.

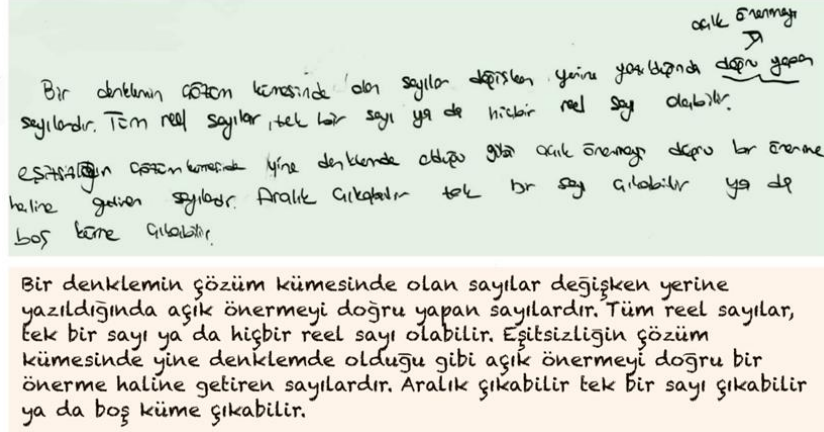
Katılımcının tüm görev durumlarına ait görüşmelerin bitiminde, denklem ve eşitsizlik kavramlarının tanıma yönelik Şekil 90'daki sözel gerçekleşmesi de Zehra'nın BG-Z1 kodlu rutininin değiştiğini ve anlatılarının genişlediğini gösteren bulgular olarak gözlemlenmiştir.

Denklem : En az bir değişken (x, y, z vb.) ve bir eşitlik içeren açık önermeler.
Eşitsizlik : En az bir değişken (x, y, z vb.) ve bir eşitsizlik ($>, >=, <, <=$) içeren açık önermeler.
Denklem : En az bir değişken (x, y, z vb.) ve bir eşitlik içeren açık önermeler.
Eşitsizlik : En az bir değişken (x, y, z vb.) ve bir eşitsizlik ($>, >=, <, <=$) içeren açık önermeler.

Şekil 90. Zehra'nın odak grup görüşmelerindeki denklem ve eşitsizlik kavramı tanımlarına yönelik sözel gerçekleşmeleri

Burada denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduğunu tanımında belirten Zehra'nın değişkenin ait olduğu kümenin önemine dair farkındalığının oluştuğu (örneğin, [210-

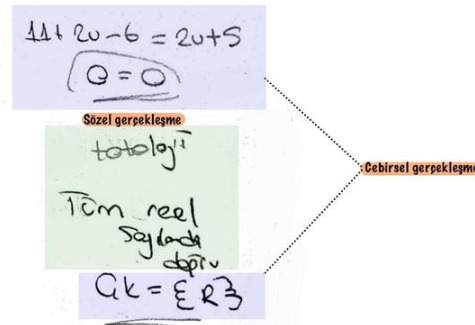
GD5]) görev durumlarına dair oturumların bitiminde kağıdında yer alan Şekil 91'deki gibi “denklemler ve eşitsizliklerin çözümleri” hakkındaki sözel gerçekleşmesinde de görülmüştür:



Şekil 91. Zehra'nın denklem ve eşitsizliklerin çözümleri hakkındaki sözel gerçekleşmesi

Burada aynı zamanda katılımcının çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken kullandığı BG-Z3 kodlu keşif rutinine dair anlatılarının zenginleştiği de gözlemlenmiştir. Katılımcının denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduğuna dair farkındalığı, Zehra'nın çözüm kümesi elemanları hakkında “...değişken yerine yazıldığında açık önermeyi doğru yapan sayılardır ... açık önermeyi doğru önerme bir önerme haline getiren sayılardır ...” şeklinde kanonik anlatılar üretmesini sağlamıştır. Bununla birlikte Zehra'nın odak grup görüşmelerinde en sık kullandığı rutini, çözüm kümesi ve çözüm kümesi elemanları hakkında konuşurken kullandığı rutini olmuştur. Katılımcı GD1'de yer alan “ $11 + 2(x - 3) = 7, \forall x \in \mathbb{R}$ ” biçiminde cebirsel ifade için “Ama bu denklem bütün değerleri sağlamaz ki. [61-GD1] Yanlış (önerme). Çünkü her x değeri yani bütün reel sayılar denklemi sağlamıyor. [77-GD1] Bu yanlış bir önerme [85-GD1]” şeklinde anlatılar üreterek söylemlerde bulunmuştur. Katılımcı GD2'de “ $11 + 2(u - 3) = 2u + 5, u \in \mathbb{R}$ ” şeklindeki denkleme (özdeşliğe) yönelik prosedürünü arkadaşlarıyla paylaşma fırsatı bulmuş ve uyguladığı prosedüründe elde ettiği “ $0 = 0$ ” gerçekleşmesi sonrasında “... bu şekilde buradan da sıfır eşittir sıfır geldi [...] bu da demek oluyor ki tüm reel sayılar için geçerli, ama biz böyle yaptığımız için mesela Elif de beş eşittir beş yapmış o da doğru, çünkü çözüm kümesi tüm reel sayılar, bu denklem tüm

reel sayıları sağlıyor. Yani bir eşittir bir geldiği zamanda biz buna, ben totoloji yazdım buraya [...] bütün değerleri sağlıyor oluyor [119-GD2]” ve “Aynen eşitliğin iki tarafı da eşit geldiği için çözüm kümesi tüm reel sayılar [127-GD2]” şeklinde anlatılar üretmiştir. Katılımcı, “ $11 + 2(u - 3) = 2u + 5, u \in \mathbb{R}$ ” açık önermesinin bir totoloji olduğundan dolayı tüm reel sayılar için doğru olacağını belirten söylemlerini Şekil 92’deki görsel araçlarla da onaylamıştır.



Şekil 92. Zehra’nın sonsuz elemana sahip denklemlerin çözüm kümesine dair cebirsel ve sözel gerçeğeşmesi

Burada katılımcının çözüm kümesini temsilen “ $\mathbb{C}.K = \{\mathbb{R}\}$ ” biçimindeki gösteriminin kanonik olmadığı görülmüştür. Fakat Zehra, görüşme devamında diğer katılımcılarla yaşadığı iletişimsel süreçlerde mantıksal çıkarımlar yaparak kanonik gösterimin “ $\mathbb{R}$ ” biçiminde olacağını belirtmiş ve GD4’te tek değişkenli denklem ve eşitsizlikler için çözüm kümesini temsilen “ $\mathbb{R}$ ” gösterimini (örneğin, Şekil 93) kullanarak “Yani bu demek oluyor ki bütün reel sayılarda [$\mathbb{R}$ ifadesini yazarak] doğru yani. [115-GD4] Çünkü bu işaret [$v \leq v$ ifadesini işaret ederek] v büyük ya da eşittir v ’ye demek. Burada da yani doğru [gülümseyerek] çünkü bu sayılar aynı. Buraya v ’ye bir dersek, bir büyük ya da eşittir bir olacak. Bir zaten bire eşit. O yüzden bu ifade [$v \leq v$ ifadesini işaret ediyor] doğru oluyor. [117-GD4]” şeklinde anlatılar üretmiştir. Zehra’nın tek değişkenli denklem ve eşitsizlikler için sonsuz elemanlı çözüm kümesini temsilen “ $\mathbb{R}$ ” gösteriminin uygunluğuna karar verirken GD2’de diğer katılımcılarla yaşadığı iletişimsel süreç ve bu süreçte yaptığı çıkarımlar ise aşağıdaki gibidir:

171. A: Bu gösterimlerden hangileri doğru? Gösterim nasıl olsa en doğru şekilde olur?
[Katılımcıların yanıtlarında yer alan $\{R\}$, $\{\mathbb{R}\}$, R , $\{\infty\}$ biçimindeki gösterimleri kastederek]
172. Z: Şimdi [...] bence bu üçü doğru zaten ikisi aynı, üçünün doğru olduğunu düşünüyorum
<Burcu'nun $\{\infty\}$ biçimindeki gösterimi hariç> bunun doğru olmasıyla alakalı < R gösterimi üzerine konuşuyor> bir açıklamam yok sadece test kitaplarında sorularda sadece R yazıyor.
173. Ş: Belki de reel sayılar çok sayıyı kapsadığı için şeyin içinde $\{ \}$ küme parantezini kastediyor jest yapıyor> yazmamız doğru olur mu bilemedim.
174. A: Bilemediniz.
175. Z: Yani şey gibi bu aslında mesela boş kümede hem bu küme parantezini açıp içeri boş bırakıyoruz ya da sıfır gibi [*boş küme gösterimini temsilen ikonik jest yapıyor*] bir şey yapıyoruz ya onunla alakalı (*A: hıhı*) bence bu da [*R şeklindeki gösterimi göstererek*] doğru yani. <Kendi gösterimi olan $\{R\}$ ile R gösterimini doğru buluyor>
176. Ş: O sıfırda tüm reel sayıları kapsadığı için- <sessizce söylüyor, sözlerini tamamlamıyor, söyledikleri anlaşılmıyor>
177. A: Peki şunu yazıyor musun [$\{\emptyset\}$ ifadesini yazarak] boş kümeyi temsil için?
178. Z: Hayır, çünkü bu bir tek elemanlı küme.
179. A: Tamam, sizce bununla bunun arasında da [R ile $\{R\}$ arasındaki farkı sorarak] bir farklılık olabilir mi?
- ...
182. Z: evet aaa olabilir burada [*gülerek*] aydınlandım [...] olabilir ama emin değilim.
- ...
184. A: Burcu'nun sonsuz gösteriminin [$\{\infty\}$ gösterimini kastederek] doğru olduğunu düşünüyor musunuz?
185. Z: [...] Hayır.
186. Ş: Öyle olunca da belki de artı sonsuz eksi sonsuz şeklinde göstermesi gerekebilirdi, sadece sonsuz değil [$\{(-\infty, \infty)\}$ ifadesini yazıyor]
- ...
203. Z: Bence yani [...] eğer şey olarak şu Şule nin şu gösterimi [$\{(-\infty, \infty)\}$ ifadesini kastederek] bana şu an en mantıklısı gibi geldi sonsuz şeklinde yazacaksak bile ııı şu eğer sonsuz şeklinde yazacaksak eğer eksi sonsuz artı sonsuz bu şekilde yazmalıyız [$(-\infty, \infty)$ ifadesini yazarak].
- ...
212. Z: Bence direkt böyle R yazabiliriz ya.
213. A: Direkt R yazabiliriz diyor. Küme içinde R den vazgeçtik mi yoksa?
214. Z: Evet ben vazgeçtim.

Burada Zehra, boş kümeyi temsilen “ $\{\emptyset\}$ ” gösteriminin uygun olmadığını “Hayır, çünkü bu bir tek elemanlı küme [178-GD2] belirtmiş ve buradan yola çıkarak diğer katılımcılarla yaşadığı iletişimsel süreç sonrasında sonsuz çözüme sahip tek değişkenli denklemlerin

çözüm kümesinin “R” biçiminde olması yönünde [212-GD2] karar vermiştir. Ayrıca katılımcı herhangi bir çözüme sahip olmayan denklem ya da eşitsizlikler için bireysel görüşmede olduğu gibi “ $\emptyset$ ” gösterimini kullanmaya devam etmiş ve “ $11 + 2(u - 3) = 2u + 4, u \in \mathbb{R}$ ” denkleminin çözüm kümesi için “Evet buna da çelişki deniyor [402-GD2] ve sağlamıyor yani ııı herhangi reel sayıyı yazarsak yazalım değişkenimiz yerine herhangi reel sayıyı yazarsak yazalım eşitlik sağlanmıyor, doğrulamıyor [404-GD2] Yani şöyle bir eşittir sıfır geldiği zaman zaten bu bir çelişki, çelişkilerde ııı çelişkilerde denklemlerdeki çözüm kümeleri boş küme oluyor direkt [408-GD2]” ve “Sonuçta denklemin çözümünü yapıyoruz. Denklemin çözümünde de bir eşittir sıfır oluyor. Yani bu doğru bir ifade olmadığı için denklemde de hiçbir ifade [...] hiçbir hangi reel sayıyı yazarsak yazalım doğru çıkmıyor. [418-GD2]” şeklinde anlatılar üretmiştir. Benzer şekilde GD5’te çözüm kümesinin boş küme olmasını durumunu “Çünkü hiçbir x değeri için doğru çıkmıyor sonuç [434-GD5]” anlatısı ile ifade etmiştir. Katılımcının çözüm kümesinin sonsuz elemanlı ya da boş küme olduğuna yönelik anlatılarını onaylayan görsel araçları ise Şekil 93’teki gibidir:

Görev durumu 4

“ $11 + 2(v - 3) \leq 2v + 5, v \in \mathbb{R}$ ”
 cebirsel ifadesini doğrulayan (varsa) reel sayıları
 nasıl belirlersin? Bu belirlemede gerçekleştirdiğin
 aşamaları yazabilir misin?

$$11 + 2(u-3) \leq 2u+5$$

$$11 + 2u - 6 \leq 2u + 5$$

$$0 \leq 0$$

$\mathbb{R}$

Görev durumu 5

“ $-4(x - 7) = x + 5(3 - x), x \in \mathbb{R}$ ”
 denkleminin çözümünde atacağın adımları
 ve bu adımları niçin attığını paylaşır mısın?

$$-4x + 28 = x + 15 - 5x$$

$$-4x + 28 = -4x + 15$$

$$28 = 15$$

$\emptyset$

Şekil 93. Zehra’nın denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümesi gösterimine yönelik görsel araçları

Odak grup görüşmelerinde çözüm ve çözüm kümesi elemanlarına yönelik anlatılarının zenginleştiği görülen katılımcı, çözüm kümesini doğru bir şekilde belirlemede güçlük yaşadığı görev durumlarında bile anlatılar üretebilmiştir. Örneğin, GD9’da yer alan “ $x -$

$2y = 4 \wedge y + 2x = 8, x, y \in \mathbb{R}$ denklem sisteminin çözümünü hatalı bir şekilde belirlemesine rağmen katılımcı “Ve [$\wedge$] gösterimini kastederek] dediği için ikisinin de kesişim kümesini bulmamız gerekiyor [28-GD9]” söyleminde bulunmuştur. Bununla birlikte GD11’de yer alan “ $-1 < x \leq 4 \wedge 2 \geq y > -3; x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizlik sistemini sağlayan reel sayı ikililerinin kümesini analitik düzlemde belirlemede güçlük yaşamış fakat eşitsizlik sisteminin çözümüne yönelik “Biri sağlamayınca ortak çözüm kümesi olmaz ki [372-GD11]” söylemine rastlanılmıştır. Benzer şekilde Zehra, eksik bir prosedür uyguladığı (Şekil 95’te görev durumu 9) GD12’nin çözümüne yönelik arkadaşı Elif’in prosedüründe “ $0 = 8 - 2x - y$ ” doğrusunun grafiğini kesikli bir şekilde çizmesini “Çözüm sağlamıyor [...] o eşitsizlikte [$0 < 8 - 2x - y$] ifadesini kastederek] yerine yazdığımız zaman sağlamıyor. [117-GD12] aşağıda [$0 < 8 - 2x - y$] ifadesini kastederek] eksi üç ve dört [$(-3,4)$] sıralı ikilisini kastederek] mesela sağlar. [137-GD12]” şeklindeki söylemleriyle açıklamıştır.

Katılımcının birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini belirlerken uyguladığı prosedürler incelendiğinde, bireysel görüşmedekine benzer şekilde Zehra işlemsel hatalarından dolayı bazı görev durumlarında doğru çözüme ulaşmada güçlük yaşamıştır. Aynı zamanda Zehra’nın odak grup görüşmelerindeki prosedürleri çoğunlukla eksik ya da hatalı olmuştur. Katılımcının prosedürünü diğer katılımcılarla paylaşma fırsatını bulduğu denklem ve eşitsizlik çözme prosedürlerine ise Tablo 64’te yer verilmiştir.

Zehra'nın Birinci Dereceden Tek Değişkenli Denklem ve Eşitsizlikleri Çözme Prosedürü

Görev Durumu 4: " $11 + 2(v - 3) \leq 2v + 5, v \in \mathbb{R}$ " cebirsel ifadesini doğrulayan (varsa) reel sayıları nasıl belirlersin? Bu belirlemede gerçekleştirdiğin aşamaları yazabilir misin?

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

113. Z: İlk önce ben bu ikiye parantezin içine dağıttım (gerçekleşme 1) ııı sonra iki tarafa altı ekledim (gerçekleşme 2) sonra iki taraftan on bir çıkarttım (gerçekleşme 3) sonra iki tarafı da ikiye böldüm (gerçekleşme 4). Buradan böyle bir sonuç geldi [$v \leq v$ ifadesini işaret ederek]

115. Z: Yani bu demek oluyor ki bütün reel sayılarda doğru yani.

117. Z: Çünkü bu işaret [" $v \leq v$ " ifadesini işaret ederek] v büyük ya da eşittir v 'ye demek. Burada da yani doğru [gülümseyerek] çünkü bu sayılar aynı. Buraya v 'ye bir dersek, bir büyük ya da eşittir bir olacak. Bir zaten bire eşit. O yüzden bu ifade [$v \leq v$ ifadesini işaret ediyor] doğru oluyor.

Görev Durumu 6: " $\frac{y-3}{2} + 1 = 3y - 5, y \in \mathbb{R}$ " denklemini sağlayan (varsa) reel sayıları nasıl belirlersin? Bu belirlemede gerçekleştirdiğin aşamaları paylaşır mısın?"

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

25. Z: İlk ben ilk önce iki taraftan bir çıkardım.

27. Z: [...] üç y eksi altı oldu (gerçekleşme 1). Sonra iki tarafı da ikiye çarptım [gerçekleşme 2'yi yazarak] [...] ııı ondan sonra iki tarafa [...] beş değil burası ya [kafası karışıyor, silgiye uzanıyor] ha tamam doğru [silmekten vazgeçiyor] ııı ben iki tarafa üç ekledim (gerçekleşme 3). [...] ııııı sonra da şey yaptım [...] zaten bu [...] yani bu haliyle de bir çelişki [$y = 6y - 9$ ifadesinde bırakarak] ama ben yine de şey yaptım çünkü [...] ııı şey yaptım. Bu tarafı altıya böldüm. [...]y bölü altı eşittir y eksi dokuz gibi bir şey geldi (gerçekleşme 4) [...] yani ben burada bir çelişki olduğunu düşündüm (gerçekleşme 5) [...] çözüm kümesine de boş küme dedim (gerçekleşme 6).

" $\frac{y-3}{2} + 1 = 3y - 5, y \in \mathbb{R}$ " Gösterge

$\frac{y-3}{2} = 3y - 6$ Gerçekleşme 1

$y-3 = 6y-12$ Gerçekleşme 2

$y = 6y-9$ Gerçekleşme 3

$\frac{y}{6} = y-9$ Gerçekleşme 4

$\cancel{y} = 6\cancel{y} - 9$ Gerçekleşme 5

$0K = \emptyset$ Gerçekleşme 6

Görev Durumu: " $3 - 2(x + 5) = -(3x + 1) + 7, x \in \mathbb{R}$ " denklemini sağlayan (varsa) reel sayıları nasıl belirlersin? Bu belirlemede gerçekleştirdiğin aşamaları paylaşır mısın?"

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

70. Z: Buradaki eksi ikiye içeriye dağıtıyorum az önce [...] sonra burada eksi ifadesi var eksiyle çarpmam gerekiyor parantezin içindeki ifadeyi yine içeri dağıtıyorum, denir herhalde.

72. Z: Evet eksiye, çünkü arada yine çarpma var. [...] Sonra burayı düzenliyorum, eksi iki x , artı üç eksi on artı

[...] evet eksi yedi ııı sonra [= *sembolünü yazarak*] eksi üç x , eksi bir artı yedi (*gerçekleşme 1*) burası artı altı ediyor [*gerçekleşme 2'yi yazarken*]. ıııı sonra [...] iki taraftan [...] altı çıkartabilirim. (*gerçekleşme 3*) [...] Sonra dur yazayım [$\Rightarrow$ *bağlaçlarını ekliyor*] [...] burası böyle olur [$-2x - 13$ yazarak] burası da böyle olur [$-3x$ yazarak] direkt eksi üç x (*gerçekleşme 4*). Sonra iki tarafa da on üç eklesem. [...] ııı ondan sonra (*gerçekleşme 6*) [*Durup yazdıklarını bir süre düşünüyor*] ııı yine aynı yerde takıldım. Şimdi [...] ııı

74. Z: Burada önce bir on üçten [...] yok her tarafa şimdi bir şey yapsam [...] tamam şey her tarafı eksi ikiye bölsem [*kararsız*]. Tamam [...] eksi iki x eşittir eksi üç x artı on üç bölü eksi iki (*gerçekleşme 7*).

82. Z: ııı burası x oluyor [$x = \frac{-3x+13}{-2}$ yazıyor] ııı ondan sonrada [$x =$ yazıyor] [...] buradaki eksi bölü eksi artı ediyor (*gerçekleşme 8*) yani bundan sonra [...] böyle kalır, kalmazdım ben ama [...] <Çözüme devam etmede güçlük yaşıyor>

84. Z: [...] yani ikiyle çarpınca aynı şey oluyor ama bilemedim şu an Kafam karışıyor da benim yani.

$$3 - 2(x+5) = -(3x+1)+7, x$$

$$\Rightarrow 3 - 2x - 10 = -3x - 1 + 7 \dots \text{Gerçekleşme}$$

$$\Rightarrow -2x - 7 = -3x + 6 \dots \text{Gerçekleşme}$$

$$\Rightarrow -2x - 7 + 6 = -3x + 6 + 6 \dots \text{Gerçekleşme}$$

$$-2x - 13 = -3x \dots \text{Gerçekleşme 4}$$

$$-2x - 13 + 13 = -3x + 13 \dots \text{Gerçekleşme}$$

$$-2x = -3x + 13 \dots \text{Gerçekleşme 6}$$

$$x = \frac{3+13}{-2} \dots \text{Gerçekleşme 7}$$

$$x = \frac{3+13}{2} \dots \text{Gerçekleşme 8}$$

Burada Zehra GD6'da değişkeni içeren terimleri eşitliğin herhangi bir tarafında toparlamada güçlük yaşamış ve bu nedenle değişkenin karşılığı olan reel sayıyı belirleyememiştir. Benzer durum GD6'da araştırmacının Zehra'ya yönelttiği " $3 - 2(x + 5) = -(3x + 1) + 7, x \in \mathbb{R}$ " denklemini içeren bir diğer görev durumunda da yaşanmış ve katılımcı prosedürünü tamamlamada güçlük yaşadığını (örneğin, [82-GD6]) belirtmiştir. Bununla birlikte katılımcı "...parantezin içine dağıttım...", "içeriye dağıtıyorum", "iki tarafa ...ekledim", "iki taraftan ...çıkarttım", "iki tarafı ... bölsem" gibi insani eylem içeren ifadeler eşliğinde prosedürünü uygulamıştır. Ayrıca katılımcı GD7'de yer alan " $z - 3 > \frac{4+z}{5}, z \in \mathbb{R}$ " eşitsizliğinin çözüm kümesini de Şekil 94'teki gibi kanonik bir şekilde belirlemiştir:

Görsel gerçekleştirme:

$$2x - 3 > \frac{4x + 2}{5}$$

$$5(2x - 3) > 4x + 2$$

$$10x - 15 > 4x + 2$$

$$6x > 17$$

$$x > \frac{17}{6} \quad \left(\frac{17}{6}, \infty\right)$$

Sözel gerçekleştirme:
 orantılar, oranlar x $\frac{17}{6}$ 'den büyük
 tüm reel sayılar olabilir

Şekil 94. Zehra'nın GD7'ye yönelik prosedürüne ait görsel araçları

Zehra'nın odak grup görüşmelerinde birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini belirlerken rutin olarak kodlanabilecek şekilde kanonik matematiksel bir rutine ya da katılımcıya ait tekrarlı bir prosedürüne rastlanılmamıştır. Bununla birlikte bireysel görüşmedeki gibi birinci dereceden iki değişkenli denklemlerin düzlemde bir doğru belirttiğini “İşte doğru denklemleri de birinci dereceden iki değişkenli denklemlerdi zaten [49-GD9]” söylemiyle belirtmesine rağmen denklem (eşitsizlik) sisteminin çözüm kümesinin analitik düzlemde gösterimine dair matematiksel ilişkiyi kurmada zorlandığı görülmüş ve Zehra, “Ben düzlemde gösteremedim [8-GD9] Hala bir de işlem hatası yapıyorum ben [17-GD9]”, “Ya ben yanlış yaptığımı düşünüyorum şu an. Dediğim gibi Elif şey dedi ama x 'e sıfır verip y 'ye sıfır verip sadece çizebiliriz, çözüm kümesi belirleyemeyiz ama. [66-GD9]”, “Hocam ben birinci dereceden iki değişkenli eşitsizliklerin bu şekilde çözüm kümesini yaptığımı unutmuşum. İşte ben de bir kısmına kadar gelebildim. [185-GD10]”, “Geçen çözdüklerimize benziyor ama ben ne yaptığımı unuttum şu an [yazdıklarını da silerek] görsem [...] şu an hatırlarım [...] o yüzden yapamıyorum [...] ben hatırlamıyorum [10-GD12]” ve “Ben ne düşündüğümü bilmiyorum ama böyle düşünmüyorum [Diğer katılımcıların düzlemde çizilen doğruların çözüm kümesinin elemanlarını temsil ettiği” söylemlerine katılmayarak] ben az önce sizin söylediğiniz gibi düşünmüyorum, orada bir sıkıntı var ama ne olduğunu çözemedim [...] yani benim aklımda öyle canlanmıyor. [249-GD9]” şeklindeki söylemleriyle bu durumu sıklıkla ifade etmiştir. Zehra'nın GD9, GD10 ve GD12 için eksik ve hatalı bir şekilde uyguladığı prosedürleri ise Şekil 95'te yer almaktadır:

Öğrev durumu 9

$$x - 2y = 4 \quad \vee \quad y + 2x = 8$$

$$-2y = 4 - x$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$x - 2(-\frac{1}{2}x + 2) = 4$$

$$x + 1 - 2x = 4$$

$$-x = 3$$

$$x = -3$$

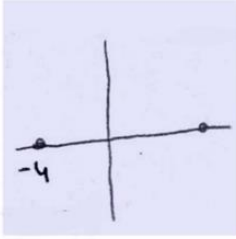
$$y = 0$$

$$y = 8 - 2x$$

$$8 - 2x + 2x = 8$$

$$8 = 8$$

$$\mathbb{R}$$



Öğrev durumu 10

$$y < 8 - 2x \quad 2x + y < 8$$

$$2x + y - 8 < 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y < 8 \quad (-\infty, 8)$$

$$y = 0 \Rightarrow x < 4 \quad (-\infty, 4)$$

Öğrev durumu 12

$$x - 2y - 4 \geq 0$$

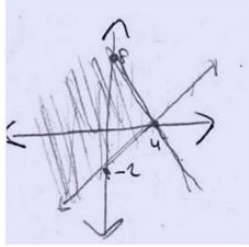
$$-2x + 8 - y > 0$$

$$8 > y - 4$$

$$4 > x$$

$$y \geq -2$$

$$x \geq 4$$



Şekil 95. Zehra'nın GD9, GD10 ve GD12 için uyguladığı eksik ve hatalı prosedürlerine yönelik görsel araçları

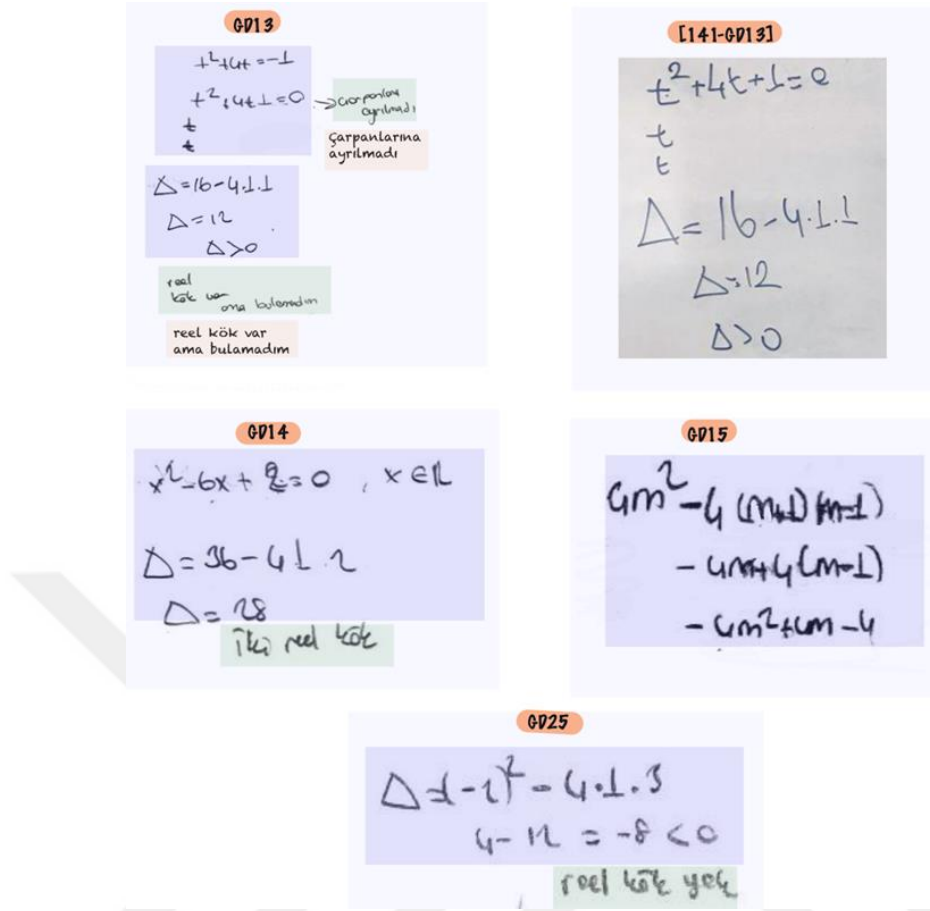
Burada GD9'da " $y + 2x = 8$ " denkleminde y değişkenini x türünden " $y = 8 - 2x$ " biçiminde yazdıktan sonra " $x - 2y = 4$ " denkleminde y değişkeni yerine yazmak yerine tekrardan " $y + 2x = 8$ " denkleminde yerine yazmış ve " $8 = 8$ " ifadesini elde ettiği için çözüm kümesini reel sayılar olarak belirlemiştir. Ayrıca Zehra, " $x - 2y = 4$ " denkleminde de y değişkenini x türünden yazmaya çalışırken eşitliğin her iki tarafını $-\frac{1}{2}$ ile çarpmak isterken hata yapmış ve 4 reel sayının -2 ile çarpmıştır. Düzlemde grafik çiziminde zorlandığını belirten [8-GD9] Zehra'nın ardışık adımlarının birbiriyle bağlantılı olmadığı görülmüştür. Katılımcı GD10'da ise doğru denklemlerinin grafiğini çizerken izlenen yola benzer adımları gerçekleştirmeye çalışmış, fakat "<" eşitsizlik sembolünden dolayı her bir değişkenin reel sayı aralığını yazarak çözümle mantıksal olarak ilişkisi olmayan bir şekilde prosedürünü sonlandırmıştır. Bununla birlikte GD9'da arkadaşı Elif'in prosedüründe denklem sisteminin çözüm kümesinin analitik düzlemde gösteriminde doğruların

kesiştikleri noktanın çözümler kümesinin elemanı olduğunun farkına varan Zehra benzer adımları GD12’de eşitsizlik sisteminin çözümler kümesini belirlerken uygulamıştır. GD9’da farkındalığını “Aaaa! Kesiştikleri nokta zaten ortak çözümler kümeleri oluyormuş [*farkına vararak, hayret ederek*] [149-GD9]” ve “Zaten ben bir kısmına kadar gelmişim devamını yapamamışım [...] bu ikisinin [...] ıı aynı grafikte çizersek eğer bu [...] denklemlerin ııı doğrularını bunların kesişim noktası ikisinin ortak çözümler kümesi anlamına geliyormuş. [153-GD10]” şeklindeki söylemleriyle belirten Zehra, GD12’de de kanonik bir prosedür uygulamada güçlük yaşamıştır. GD12’de Elif’in GD9’da yer alan denklem sistemi için uyguladığı benzer prosedürü eşitsizlik sistemi için uygulayarak çözümler kümesini analitik düzlemde göstermeye çalışan katılımcının; sembolleri kanonik bir şekilde kullanmadığı, “ $-2x + 8 - y = 0$ ” doğrusunu kesikli bir şekilde çizmediği ve eşitsizliklerin çözümler kümesini analitik düzlemde belirttiği yarı düzlemleri hatalı bir şekilde taradığı görölmüştür. Ayrıca GD17’de yer alan problem durumunu “ $25x + 30y = 1250$ ” biçiminde eksik bir şekilde cebirsel ifadeye dönüştüren Zehra’nın “ $25x + 30y = 1250 \wedge x + y = 45, x, y \in \mathbb{R}$ ” biçimindeki denklem sisteminin çözümler kümesinin geometrik karşılığı için “İki doğrunun kesişimi mi yani kesiştikleri nokta [235-GD17]” şeklideki söylemi de katılımcının [149-GD9]’daki farkındalığının bir devamı olarak gözlemlenmiştir. Fakat katılımcının bu farkındalığını onaylayan yeterli kanonik ve tekrarlı görsel araçların bulunmamasından dolayı bu bulgular bir rutin olarak kodlanmamıştır.

Zehra’nın odak grup görüşmelerinde ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme prosedürleri incelendiğinde ise katılımcı denklemin çözümlerinin varlığına dair anlatılar üretmiştir. Katılımcı GD13’te yer alan “ $t^2 + 4t = -1, t \in \mathbb{R}$ ” denklemi için yazılı yanıtları incelendiğinde denklemi çarpanlarına ayıramadığı belirttiği ve diskriminantı hesaplayarak “ $\Delta > 0$ reel kök var ama bulamadım” şeklinde bir açıklamada bulunmuştur. Katılımcı bu durumu görüşmede sesli bir şekilde belirtmiş ve “Sonra bunu çarpanlarına ayırmaya çalıştım. [...] Ayrılmadı [*gölerek*] [129-GD13] Sonra baktım dedim, kök var mı acaba, bir diskriminantına bakalım dedim. [136-GD13] sonra ıı zaten diskriminant b kare

eksi dört a , c olduğu için [...] on altı eksi dört ıı a burada [...] t' 'nin katsayısı oluyor [...] c 'de sabit terim o da artı bir [...] burada diskriminant on iki geldi [*Şekil 96'daki cebirsel gerçekleştirmeleri yazıyor*], demek ki iki tane reel kök olduğunu [...] söyledim. [141-GD13]

Ama sonra kökleri bulamadım ıı çünkü ıı unuttum [...] o formülü, nasıl bulacağımı unuttum. [143-GD13]" şeklinde söylemlerde bulunmuştur. Bununla birlikte GD14'te $x^2 - 6x + 2 = 0$ " denkleminin çözüm kümesinin elemanlarını belirlemek için Zehra'nın diskriminantı hesapladığı ve " $\Delta = 28$ " gerçekleşmesi sonrasında "iki reel kök" şeklinde sözel bir gerçekleşmesine rastlanılmıştır. Bu durumu görüşmede katılımcı "... çarpanlarına ayrılmadığı için diskriminantına baktım. [251-GD14]" şeklinde bir söylemiyle belirtmiştir. Bununla birlikte GD25'te arkadaşı Burcu'nun " $t^2 - 2t + 3 = 0$ " denklemini çarpanlarına ayırmadığı için çözüm kümesinin boş küme olduğunu belirtmesi üzerine Zehra, "Çarpanlarına ayırmadığımız zaman reel kök yoktur demeyiz, çünkü reel kök diskriminantı küçük sıfır olduğu zaman diyoruz [111-GD25]" şeklindeki anlatısıyla arkadaşına öneride bulunmuştur. Buna rağmen Zehra GD15'te yer alan " $(m + 1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $x \in \mathbb{R}$ " eşitliği sağlayan reel sayıları belirlemek için diskriminantı hesaplamaya çalıştığı fakat prosedürünü kanonik bir şekilde uygulamada güçlük yaşamıştır. Katılımcının denklemin diskriminantı ve çözümlerinin varlığı arasındaki ilişkiye yönelik prosedürleri ve anlatılarını onaylayan görsel araçları ise Şekil 96'da yer almaktadır:



Şekil 96. Zehra'nın ikinci dereceden tek değişkenli denklemin çözümlerinin varlığını belirleme prosedürü

Bireysel görüşmede sadece baş katsayı 1 ve çözümleri tamsayı olan ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çarpanlarına ayırma metoduyla çözen katılımcı odak grup görüşmelerinde denklemin reel çözümlerini $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülleri aracılığıyla belirlemiştir. GD13'te yer alan " $t^2 + 4t = -1, t \in \mathbb{R}$ " denklemi için formülü hatırlamada yaşadığı güçlüğü "Ama sonra kökleri bulamadım ııı çünkü ıı unuttum [...] o formülü, nasıl bulacağımı unuttum. [143-GD13]" şeklinde belirten Zehra, arkadaşı Burcu'nun tahtada prosedürünü paylaşması üzerine "Evet [gülerek] bakınca hatırladım. [163-GD13] Evet ben bunları unutmuşum [167-GD13] Ben kök görünce korkuyorum. [183-GD13]" şeklindeki kişisel söylemleri eşliğinde söyleme katılmıştır. Katılımcı bir sonraki görev durumunda araştırmacının katılımcılardan " $x^2 - 6x + 2 = 0$ " denkleminin reel sayılarda çözüm

kümesini belirlemesini istediğinde ise formülü “ $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{ac}$ ” biçiminde eksik bir şekilde hatırlamış ve bu süreçte yaşadığı güçlüğü, “Ben formülü unuttum [193-GD14] Sadece altındakini [*payda kısmında yer alan 2a ifadesini kastederek*] unuttum üstünü [*pay kısmında yer alan “ $-b \pm \sqrt{\Delta}$ ” ifadesini kastederek*] hatırladım. [195-GD14] Hocam ben altına ne yazdığımızı [...] iki çarpı bir yazdığımızı hatırlıyorum da o iki ne [...] bir dakika! Düşüneceğim. [197-GD14]” şeklindeki söylemleriyle belirtmiştir. Geçmiş öğrenme yaşantılarından (emsal olaylardan) yola çıkarak prosedüründe hangi adımları devam ettirip hangilerini devam ettirmeyeceğine karar verme sürecini kişisel söylemleriyle belirten Zehra’nın prosedürünü diğer katılımcılarla tahtada paylaşırken yaşadığı iletişimsel süreci ise Tablo 65’teki gibidir:

Tablo 65

Zehra'nın " $x^2 - 6x + 2 = 0$ " Denkleminin Reel Sayılarda Çözüm Kümesini Belirleme Prosedürü

Zehra'nın diğer katılımcılarla sesli iletişimi	Zehra'nın iletişimindeki görsel araçları
251. Z: Şimdi ilk önce yine bu [göstergeyi kastederek] çarpanlarına ayrılmadığı için diskriminantına baktım.	
252. A: Hı hı.	
253. Z: [$\Delta =$ ifadesini yazıyor] b kare eksi dört a , c 'den otuz altı eksi dört çarpı bir çarpı iki. Buradan da yirmi sekiz geldi [gerçekleşme 1'i yazıyor]. Ben bu formülü de inşallah doğru hatırladıysam yazacağım şimdi [...] eksi b artı kök delta bölü [...] a çarpı c olduğunu düşünüyorum [gerçekleşme 2'yi yazıyor].	$x^2 - 6x + 2 = 0, x \in \mathbb{R}$ Gösterge
254. A: Burcu gülüyor [gülümseyerek].	$\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 2$ $\Delta = 28$ Gerçekleşme 1
255. Z: Yanlış mı yaptım [gülerek arkadaşlarına dönüyor]. Yanlış mı, doğru mu? [Onay isteyerek]	
256. A: Niye gülüyorsun Burcu?	
257. Ş: Hocam Zehra'nın ki tesadüfen doğru çıkıyor [gülerek]. Çünkü c 'de iki.	$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{a \cdot c}$ $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{a \cdot c}$ Gerçekleşme 2
258. Z: Burcu niye bana gülüyorsun?	
259. B: Hayır gülmedim [...] böyle üzuldüm yani.	
260. E: c değil a .	$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ Gerçekleşme 3
261. Ş: Evet formül iki a ama Zehra c yaptığı için c de iki [gülerek].	
262. Z: Haaaa! [Yüksek sesle ve uzun süre gülüyor]	$\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2} = 3 - 2\sqrt{7}$ Gerçekleşme 4
263. A: Evet ikiye tutturmak da şans yani [gülerek].	
264. Z: Çok şanslıyım yani [Yüksek sesle ve uzun süre gülüyor].	$\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2} = 3 + 2\sqrt{7}$ Gerçekleşme 5
265. A: Neymiş ama?	$Q_k = \{ 3 + 2\sqrt{7}, 3 - 2\sqrt{7} \}$ Gerçekleşme 6
266. Z: İki a 'ımiş [gülerek] düzeltiyorum [$a \cdot c$ ifadesini silerek $2a$ ifadesini yazıyor] (gerçekleşme 3)	
267. A: Peki Zehra buradan sonra nasıl devam ediyorsun?	
268. Z: Eksi b eksi burada da bu sefer ikinci kök de (gerçekleşme 3'ü göstererek).	
269. A: Böyle şans Zehra'da olur gördüğünüz gibi.	
270. Z: Evet hocam [gülerek]. Şimdi bunu yapalım önce [...] eksi b zaten buradaki b 'miz bu [denklemdaki -6 sayısını göstererek] eksi b altı oluyor [...] altı eksi, kök yirmi sekiz iki kök yedi olduğu için ben buraya iki kök yedi yazdım [...] bölü iki [...] yani bu ıı üç eksi iki kök yedi [...] şuraya yazayım [gerçekleşme 4'ü yazıyor] yine bu da altı eksi iki kök yedi bölü iki [...] sonra buradan da diğer şeyimiz de kökümüz de üç artı iki kök yedi (gerçekleşme 5) geliyor [gerçekleşme 6'yı yazarak prosedürünü tamamlıyor].	

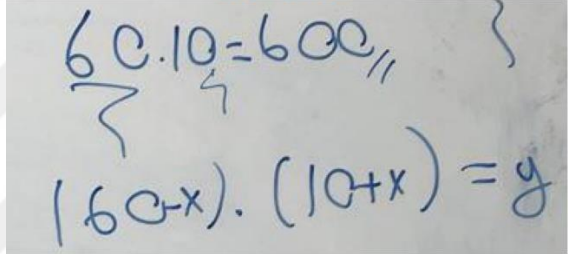
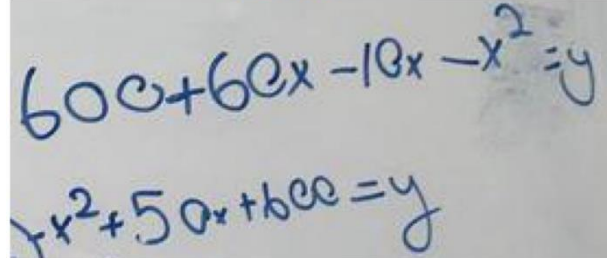
Burada Zehra, formülü eksik bir şekilde hatırlamasına rağmen c ile temsil edilen katsayının 2 reel sayısına karşılık gelmesinden dolayı tesadüfi olarak formülü doğru bir şekilde uyguladığı görülmüş fakat katılımcı prosedüründe gerçekleşme 4 ve gerçekleşme 5'te sadeleşme işlemini doğru bir şekilde uygulayamamasından dolayı çözüm kümesinin elemanlarını hatalı bir şekilde belirlemiştir. Bununla birlikte Zehra ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çarpanlarına ayırma metoduyla da çözmeye devam etmiştir (örneğin, Şekil 97).

Katılımcı ikinci dereceden tek değişkenli bağıntıların alabileceği en büyük ve en küçük reel sayıları belirlemede söyleme katılırken parabol eğrisi ve parabol eğrisinin tepe noktasının apsisi ve ordinatı hakkında anlatılar üretmiştir. Her ne kadar katılımcı GD19, GD20 ve GD21 kanonik bir prosedür uygulamada güçlük yaşamış olsa da Zehra'nın diğer katılımcıların prosedürlerine dair açıklamalar yaparken sonuç odaklı anlatılarına rastlanılmıştır. Katılımcı, GD19'da "Tepe noktası [...] tepe noktası eksi b bölü a 'dan [61-GD19]. Minimum ya da maksimum değer [...] eğer (*parabolün*) kolları yukarı doğruysa minimum değer, aşağı doğruysa maksimum değer [66-GD19]" şeklinde anlatı üretirken, GD20'de arkadaşı Burcu'nun elde ettiği " $12x - x^2 = y$ " cebirsel ifadesi için "Kolları ııı bunun aşağı doğru olduğu için şey tepe noktasının r sinin en büyük değeri var bunun [92-GD20]" biçiminde bir anlatı üretmiştir. Benzer şekilde GD21'de " $y = (10 + x)(60 - x)$ " cebirsel ifadesi için katılımcının "Parabolün kolları aşağı doğru olduğu için tepe noktasının k 'sı maksimum değer oluyor [356-GD21]" biçiminde bir anlatısına da rastlanmıştır. Zehra'nın ikinci dereceden tek değişkenli bağıntılara ait görsel araçları incelendiğinde, katılımcı tepe noktasının ordinatını cebirsel olarak hesaplamış ve grafik çizimi yoluyla bağıntının alabileceği en büyük ya da en küçük değeri belirlemeyi tercih etmemiştir. Katılımcı, bu durumu "Ya ben çok işlem hatası yaptığım için en garanti yol hangisiyse onu kullanıyorum [215-GD17]", "Çünkü yani grafikte [...] grafiğe alışkın değilim ben, o yüzden hata yapma ihtimalim daha yüksek o yüzden tercih etmiyorum [105-GD23] ııı birazcık garanticilik [111-GD23]" şeklindeki kişisel söylemleriyle belirtmiştir. Zehra,

GD21’te yer alan “Bir ürünün tanesini 60 TL ye satan bir satıcı günde 10 tane ürün satabilmektedir. Satıcı bir ürünün satış fiyatında x TL indirim yapınca, bir günde satılan ürün sayısı x tane artmaktadır. Buna göre, bu satıcının bir günlük satıştan elde edebileceği paranın TL cinsinden en çok ne kadar olabileceğini bulunuz.” Şeklinde problem içeren görev durumuna dair prosedürünü tahtada arkadaşlarıyla paylaşma fırsatı bulmuş ve anlatılarını Tablo 66’daki görsel araçlarla da onaylamıştır.

Tablo 66

Zehra’nın İkinci Dereceden Tek Değişkenli Bağıntılara Yönelik Prosedürü

Ne söylüyor?	Ne yapıyor?
30. Z: Tamam [...] şimdi bir ürünün tanesini altmış TL’ye satan bir satıcı on tane ürün satabiliyormuş yani 10 ürün altmış TL’den on tane satılırsa bu satıştan günlük altı yüz TL kazanabiliyordur [$60 \cdot 10 = 600$ ifadesini yazıyor]. Bize bu bilgiyi vermiş bunu bu şekilde yazdım ben [...] sonra satış fiyatında [...] satış fiyatı dediğimiz şey bu, altmış [60 reel sayısının altını çizerek] x TL indirim yaparsa yani x lira çıkarırsa bundan [...] altmış eksi x lira [$60 - x$ ifadesini yazıyor] çıkarırsa [...] bir satılan ürünle [...] satılan üründe yani on o da bu oluyor [yazdığı işlemde 10 reel sayısını göstererek] x tane artmaktadır diyor. Yani ikisini çarptığımızda [...] yani denklemin sonunda bize en çok kazanabileceği parayı sorduğu için 10 on artı x yapıyoruz [$10 + x$ ifadesini yazıyor] buna göre bir satıcının bir günlük satıştan elde edebileceği paranın TL cinsinden en çok ne kadar olabileceğini bulunuz [problem durumunu okuyor] 10 sonra bu elde edeceği paraya da ben y diyorum [$(60 - x)(10 + x) = y$ cebirsel ifadesini yazıyor] <Kağıdında y’ye eşittir şeklinde yazmamış. Derya’dan görmüş olabilir> 65. Z: 10 sonra çarptım bu ikisini [yazdığı denklemde çarpanları göstererek] 10 ilk önce sırayla ben birinciden başladım, altmış çarpı on yaptım, altmış çarpı x yaptım [göstererek] altı yüz artı altmış x [$600 + 60x$ ifadesini yazıyor] 10 sonra eksi x le onu çarptım eksi on x [$-10x$ ifadesini yazıyor] sonra eksi x ile x’i çarptım eksi x kare [$-x^2$ ifadesini yazıyor] burası böyle oldu [$= y$ yazarak] 10 sonra burayı düzenledim eksi x kare artı elli x 10 artı altı yüz [...] eşittir y [$-x^2 + 50x + 600 = y$ ifadesini yazıyor] dedim. Sonra ben eksi sevmediğim için eksiyle çarptım bu ifadeyi 67. Z: Eksi böyle çarpanlarına ayıracağımız zaman zorluk oluyor ve benim kafam karışıyor o yüzden	[30-0021]  [65-0021] 

eksiyle çarpıyorum ben genelde denklemi $[-x^2 + 50x + 600 = y]$ eşitliğini iki elinin arasına alarak gösteriyor]

71. Z: Ama işte benim burada kafam takıldı.

73. Z: Ben bu y [...] eksiyle çarpmadım eksi yazdığım için [gülererek] neden öyle olduğunu bilmiyorum. Onu düşündüm ben kendi kendime ama bulamadım. [...] İşte x kare eksi elli x artı altı yüz

83. Z: Evet biz bunu büyük ihtimal parabol olarak düşündüğümüz için eksi ile çarpmadık ama bu bir denklem burada $[-x^2 - 50x + 600 = y]$ ifadesini göstererek [...] [düşünüyor ve fikri değişiyor] parabol belirten bir denklem olduğundan bence eksiyle çarpmalıyız çünkü [...].

96. Z: Tamam $[x^2 - 50x + 600 = -y]$ eşitliğini yazarak]. Sonra ıı ben buradan sonra bir şeyler düşündüm ama yani tam yapamadım. Tepe noktasının r 'sine baktım, eksi b bölü iki a 'ya [...] oradan baktım.

100. Z: ıı eksi elli bölü iki a dediği için iki çarpı eksi bir buradan da yirmi beş geliyor $[\frac{-50}{-2.1} = 25]$ eşitliğini yazıyor].

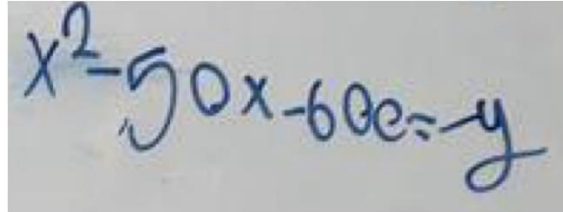
102. Z: Tepe noktasını buldum çünkü ıı şimdi biz zaten geçen görüşmedeki çözdüğümüz sorularda da tepe noktasının r 'sini k 'sını bulup parabolü çiziyorduk, ona göre işte [...] dahil durumlarına göre [...] parabolün bir kısmını siliyorduk [...] ıı ona göre [...] onun tepe noktasının k 'sı en çok değeri de bizim elde edebileceğimiz en çok miktar oluyordu, o yüzden.

106. Z: r 'sini buldum. Sonra k dediğim şeyi [...] $f(r)$ yaparak buldum. Ama kağıdımda ıı $f(r)$ yapmadım, neden yapmadım bilmiyorum. Neyse yapalım, ıı [yazmaya başlıyor]

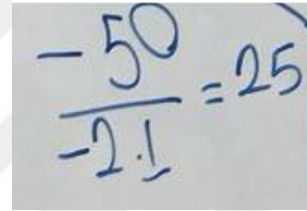
118. Z: Evet [yazmaya devam ediyor] eksi yirmi beşin karesi artı elli çarpı yirmi beş [...] [+600 ifadesini yazıyor] buradan [...] yirmi beşin karesi beş yüz yirmi beş mi? [Arkadaşlarına soruyor] Altı yüz yirmi beş [-625 ifadesini yazıyor] artı yirmi beş kere beş yüz yirmi beş [...] bin iki yüz elli artı [+1250 + ifadesini yazıyor] ıı buradan şey [...] altı yüz yirmi beş [zihninden hesaplamaya çalışıyor] bin iki yüz elliden artı bin iki yüz yirmi beş mi [...] evet [+1225 ifadesini yazıyor] artı yazdım [+ sembolünü silerek] tepe noktasının k 'sı da bin iki yüz yirmi beş geldi.

124. Z: Sonuçta bu elde ettiğimiz paraya [y gösterimini göstererek] ben elde ettiğimiz kazandığımız parayı [1225 sayısının altını çizerek] buldum [...] ben burada $[-x^2 + 50x + 600 = y]$ ifadesini göstererek] y değişkenini en çok kazandığı para olarak vermişim, burada buldum [işlemlerini göstererek] artık y 'miz bin iki yüz yirmi beş oldu.

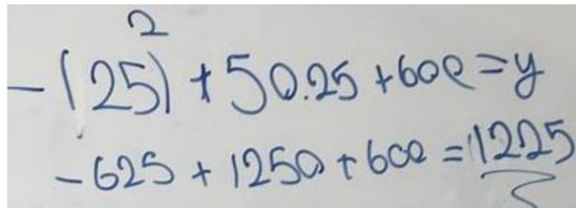
[96-0021]



[100-0021]



[118-0021]



Burada Zehra, satıcının bir günlük satıştan elde edebileceği paranın TL cinsinden en çok ne kadar olabileceğini belirlerken problem durumunun cebirsel ifadesi olan “ $(60 - x)(10 + x) = y$ ” bağıntısının düzlemdeki grafiği bir parabol belirttiği için tepe noktasının ordinatını hesaplayacağını [102-GD21] belirtmiştir. Kağıdında tepe noktasının apsisini belirledikten sonra prosedürüne devam etmediği gözlemlenen katılımcı bu durumun nedenini “Bilmiyorum! Sayılar çok büyük gelince gözüm korktu, buradan gelmez yanlış bir şey yapıyorum diye düşündüm. [112-GD21]” ve “Bilmiyorum genelde bize böyle sorularda şey yapılıyor ya, direkt küçük sayılar veriliyor bulabileceğimiz, yirmi beş gözüme büyük geldi o yüzden yanlış yaptım, yanlış geldi diye düşündüm. [114-GD21]” şeklindeki kişisel söylemleriyle belirtmiş ve sonrasında araştırmacı ile arasında aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

133. A: Zehra sen kağıdında neden çözümünü tamamlamadığını düşünüyorsun, sadece sayılar büyük olduğu için mi?

134. Z: Evet sadece o yüzden yani, çünkü f yirmi beş, ben şey diye düşünmüştüm yani, günlük hayatımızda doğru olur da ben şeyden sonra [...] f yirmi beş kısmından sonra yanlış ilerlediğimi düşündüm. Yani şunlardan falan emindim [*yazdığı cebirsel ifadeleri göstererek*] hatta iki kere kontrol ettim, doğru mu yanlış mı diye, sonra devamını getirmedim.

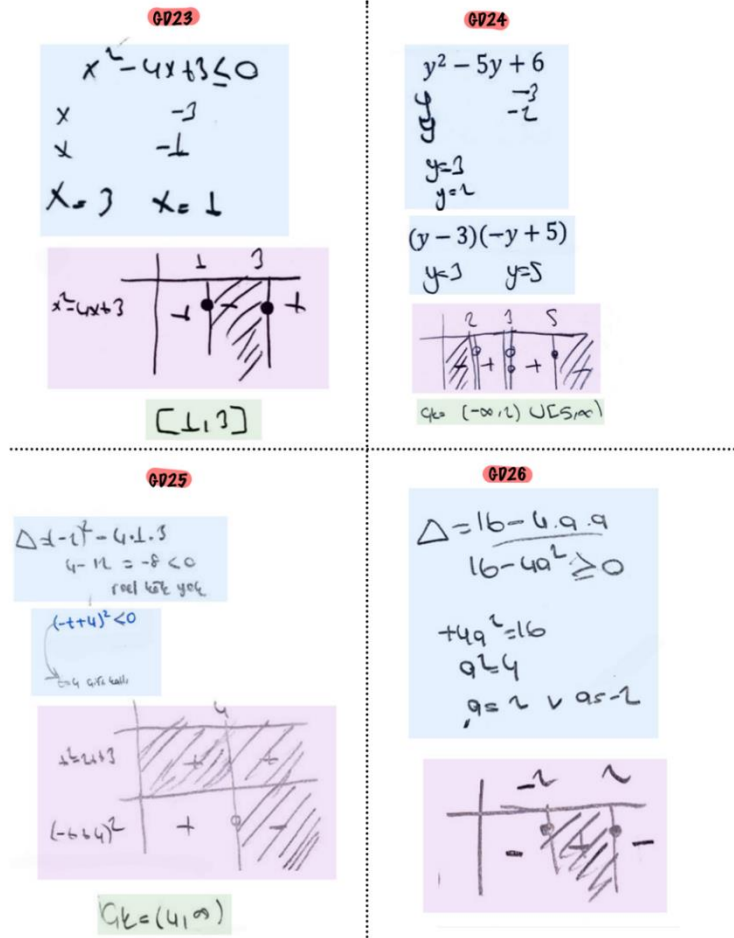
135. A: Yani farkındasın yanlış anlamıyorsam, tepe noktasında en büyük değere ulaşacağına?

136. Z: Evet, evet.

137. A: Ama bu adımı atmak için kendinde o cesareti mi bulmadın?

138. Z: Evet yanlış olacağını düşündüğüm için yapmadım.

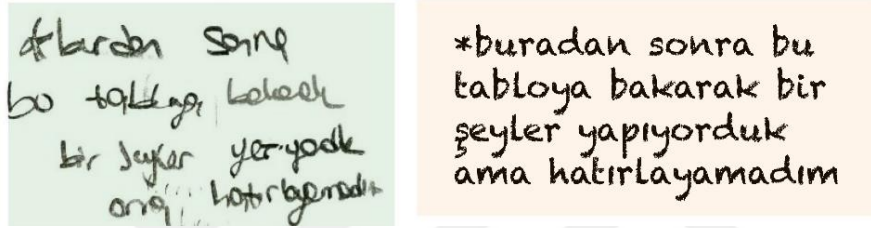
Zehra'nın söylemleri [102-GD21] prosedürünü önceki benzer görev durumlarında yaşanılanları (emsal olayları) dikkate alarak uyguladığını göstermiştir. Grafik çizimi yoluyla çözüm yapmada güçlük yaşayan Zehra tek bir gerçekleşme ile (cebirsel) prosedürünü ezbere ve katı bir şekilde uygulamıştır. Katılımcı benzer şekilde ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sistemlerini çözerken de sıklıkla kullanılan işaret tablosu aracılığıyla çözüm kümesini belirlemiş ve grafik çizimi yoluyla çözmede zorlandığını [105-GD23] belirtmiştir. Katılımcının GD23, GD24, GD25 ve GD25 için uyguladığı benzer prosedürlere Şekil 97'de yer verilmiştir.



Şekil 97. Zehra'nın ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sistemlerini çözme prosedürü

Zehra'nın ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sistemlerine dair prosedürü incelendiğinde çözümlerinin kısmi hatalar içerdiği (Şekil 97'de GD25) ya da eksik olduğu (Şekil 97'de GD26) gözlemlenmiştir. Fakat katılımcının söylemleri prosedüründeki eksiklik ya da hataların farkında olduğunu göstermiştir. GD25'te $(-t + 4)^2$ polinomu için 4 reel sayısının çift katlı kök olduğuna dair farkındalığını "...çift katlı olduğunu tabloda göstermeyi unutmuşum [gülüyor] bakın hocam [kağıdındaki prosedürünü göstererek] çok güzel orada [62-GD25]" ve "Ben kendim oraya ilk başta oraya çift katlı olduğunu yazdım ama yapmayı unutmuşum. Bilmiyorum, dikkatsizlik mi [...] boşluğuma geldi [77-GD25]." şeklinde belirtmiştir. GD26'da görev durumuna dair "Ben bu sorularda hep zorlanıyorum [4-GD26]" kişisel söylemde bulunan katılımcı yine geçmiş öğrenme yaşantılarına

başvurmuş ve “Sınıftaki bu tarz soruyu çözerken konuştuklarımızı çok net hatırlıyorum. Ama bir kısmı aklıma gelmedi, konuşmaları hatırlıyorum ama devamını getiremedim işte [...] gelmedi yani oradan sonra ne yapacağım. [42-GD26]” şeklinde söylemlerde bulunmuştur. Katılımcının “ $a < 0$ ” durumunu incelemeyi unuttuğunu “ a küçük sıfır göremedim ben [206-GD26]” ve “Düşündüm ama orada öyle bir şey olduğunu biliyordum ama göremedim [208-GD26]” şeklinde ifade etmiştir. Ayrıca görev durumu 26 için kağıdına yazdığı Şekil 98 yer alan sözel gerçekleşmesi katılımcının ezbere bir prosedür uyguladığını ortaya koymuştur:



Şekil 98. Zehra’nın prosedüründe yaşadığı güçlüğü yönelik sözel gerçekleşmesi

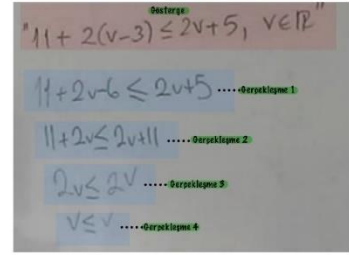
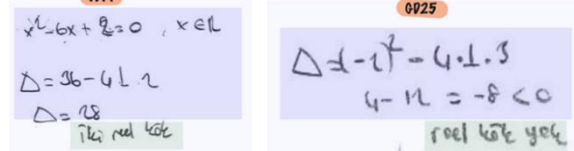
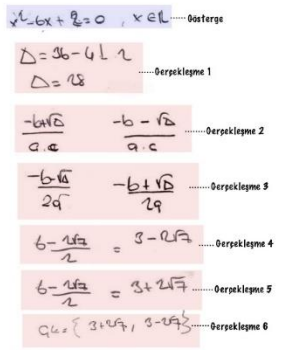
Zehra’nın 11 farklı oturumda 26 farklı görev durumdan elde edilen bulguları analiz edildiğinde, toplamda 8 farklı rutin gözlenmiş ve katılımcının odak grup görüşmelerine dair rutinleri Tablo 67’deki gibi kodlanmıştır.

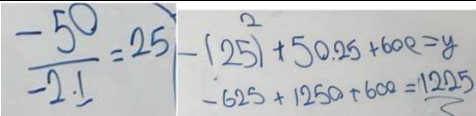
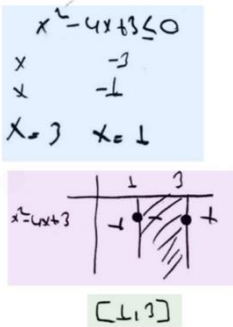
Tablo 67

Zehra'nın Odak Grup Görüşmelerindeki Rutin Profili

Rutin kodu	Ne zaman?		Nasıl?			
			Görev	Gerçekleşme	Prosedür	Tekrarı (Zamanı)
OG-Z1	Denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken	eşitsizlik	Eşitlik bağıntısı içeren açık önermeleri “denklem” sıralama bağıntısı içeren ifadeleri “eşitsizlik” olarak tanımlamak	Sesli	Z: Denklem ın bir değişken bir eşitsizlik içeren ifade, eşitsizlik yine bir değişken ve bir eşitsizlik içeren yani bu sefer büyüktür büyük-eşittir, küçüktür, küçük-eşittir gibi ifadeler içeren ifadelerdir ve bunların arasındaki fark da denklem de arada eşitlik var mutlaka. Ve yine eşitsizlikte her ikisinde değişken var eşitsizlikte de o büyüktür, büyük-eşittir, küçüktür, küçük-eşittir işaretlerinden bir tanesi var. [519-GD3] Z: Çünkü denklem şartı eşitlik bulundurması ve değişkeni olmasıydı. Burada eşitlik bulunuyor ve değişkeni de var, o yüzden denklem [23-GD5] Z: İşareti [...] yani birinde eşittir var birinde küçüktür, yani biri denklem biri eşitsizlik. [104-GD10] Z: Denklem tanımında diyor ki en az bir değişken ve bir eşitlik içeren ifade diyor [...] ve eşitlik dediğimiz şey eşittir işareti zaten [...] ve bu eşitsizliğin tanımında da diyor ki bir değişken ve eşitsizlik içeren diyor [...] eşitsizlikte bu dört tane sembolümüz var onlar eşitsizlik zaten [36-GD23]	> 10 (GD3, GD5, GD10, GD13, GD15, GD16, GD22, GD23)
				Sözel	Denklem : En az bir değişken (x,y,z vb.) ve bir eşitlik içeren açık önermeler. Eşitsizlik : En az bir değişken (x,y,z vb.) ve bir eşitsizlik ($>$, $\geq$, $<$, $\leq$) içeren açık önermeler. Denklem : En az bir değişken (x,y,z vb.) ve bir eşitlik içeren açık önermeler Eşitsizlik : En az bir değişken (x,y,z vb.) ve bir eşitsizlik ($>$, $\geq$, $<$, $\leq$) içeren açık önermeler	4 (GD13, GD15, GDS)
OG-Z2*	Çözüm elemanları konuşurken	kümesinin hakkında	Çözüm kümesinin elemanını değişken yerine yazarak açık önermeyi doğrulamak İşlemleri sonucunda doğru bir önerme elde ettiğinde çözüm kümesini reel sayılar, yanlış bir önerme elde ettiğinde boş küme olarak belirlemek	Sesli	Z: ... bu şekilde buradan da sıfır eşittir sıfır geldi [...] bu da demek oluyor ki tüm reel sayılar için geçerli, ama biz böyle yaptığımız için mesela Elif de beş eşittir beş yapmış o da doğru, çünkü çözüm kümesi tüm reel sayılar, bu denklem tüm reel sayıları sağlıyor. Yani bir eşittir bir geldiği zamanda biz buna, ben totoloji yazdım buraya [...] bütün değerleri sağlıyor oluyor [119-GD2] Aynen eşitliğin iki tarafı da eşit geldiği için çözüm kümesi tüm reel sayılar [127-GD2] Z: Yani bu demek oluyor ki bütün reel sayılarda [$\mathbb{R}$] ifadesini yazarak doğru yani. [115-GD4] Çünkü bu işaret ["$v \leq v$" ifadesini işaret ederek] v büyük ya da eşittir v'ye demek. Burada da yani doğru [gülümseyerek] çünkü bu sayılar aynı. Buraya v'ye bir dersek, bir büyük ya da eşittir bir olacak. Bir zaten bire eşit. O yüzden bu ifade ["$v \leq v$" ifadesini işaret ediyor] doğru oluyor. [117-GD4]	> 20 (GD1, GD2, GD4, GD5, GD9, G11, GD12, GD15)

			Sözel	3 (GD2, GD7, GDS) Bir denklemin çözüm kümesinde olan sayılar değişken yerine yazıldığında açık önermeyi doğru yapan sayılardır. Tüm reel sayılar, tek bir sayı ya da hiçbir reel sayı olabilir. Eşitsizliğin çözüm kümesinde yine denklemden olduğu gibi açık önermeyi doğru bir önerme haline getiren sayılardır. Aralık çıkabilir tek bir sayı çıkabilir ya da boş küme çıkabilir. Bir denklemin çözüm kümesinde olan sayılar değişken yerine yazıldığında açık önermeyi doğru yapan sayılardır. Tüm reel sayılar, tek bir sayı ya da hiçbir reel sayı olabilir. Eşitsizliğin çözüm kümesinde yine denklemden olduğu gibi açık önermeyi doğru bir önerme haline getiren sayılardır. Aralık çıkabilir tek bir sayı çıkabilir ya da boş küme çıkabilir.	
			Cebirsel	6 (GD2, GD4, GD5, GD6, GD7, GD9) Görev durumu 4 $-4(x-7) = x+5(3-x), x \in \mathbb{R}$ denklemin çözümünde atacağın adımları ve bu adımları niçin attığını paylaşıp mısın? $-4x+28 = x+15-5x$ $-4x+28 = -4x+15$ $28=15$ $\emptyset$ Görev durumu 5 $"11+2(v-3) \leq 2v+5, v \in \mathbb{R}"$ cebirsel ifadesini doğrulayan (varsa) reel sayıları nasıl belirlerisin? Bu belirlemede gerçekleştirdiğin adımları yazabilir misin? $11+2(v-3) \leq 2v+5$ $11+2v-6 \leq 2v+5$ $0 \leq 0$ $\mathbb{R}$	
BG-Z4	Birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken	Açık önermeyi doğrulayan reel sayı(ları) belirlemek*	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor? 25. Z: ıı ben ilk önce iki taraftan bir çıkardım. 27. Z: [...] üç y eksi altı oldu (gerçekleşme 1). Sonra iki tarafı da ikiyle çarptım [gerçekleşme 2'yi yazarak] [...] ıı ondan sonra iki tarafa [...] beş değil burası ya [kafası karışıyor, silgiye uzanıyor] ha tamam doğru [silmekten vazgeçiyor] ıı ben iki tarafa üç ekledim (gerçekleşme 3). [...] ıımm sonra da şey yaptım [...] zaten bu [...] yani bu haliyle de bir çelişki [$y = 6y - 9$ ifadesinde bırakarak] ama ben yine de şey yaptım çünkü [...] ıı şey yaptım. Bu tarafı altıya böldüm. [...]y bölü altı eşittir y eksi dokuz gibi bir şey geldi (gerçekleşme 4) [...] yani ben burada bir çelişki olduğunu düşündüm (gerçekleşme 5) [...] çözüm kümesine de boş küme dedim (gerçekleşme 6). Ne yapıyor? $\frac{y-3}{2} + 1 = 3y - 5, y \in \mathbb{R}$ Öösterge $\frac{y-3}{2} = 3y-6$ Gerçekleşme 1 $y-3 = 6y-12$ Gerçekleşme 2 $y = 6y-9$ Gerçekleşme 3 $\frac{y}{6} = y-9$ Gerçekleşme 4 $\#$ Gerçekleşme 5 $6y-9 = \emptyset$ Gerçekleşme 6	4 (GD2, GD5, GD6)

BG-Z5	Birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözerken	Açık önermeyi doğrulayan reel sayı(ları) belirlemek*	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor?	Ne yapıyor?	2 (GD4, GD7)
				113. Z: 11'i ilk önce ben bu ikiye parantezin içine dağıttım (gerçekleşme 1) 11 sonra iki tarafa altı ekledim (gerçekleşme 2) sonra iki taraftan on bir çıkarttım (gerçekleşme 3) sonra iki tarafı da ikiye böldüm (gerçekleşme 4). Buradan böyle bir sonuç geldi [$v \leq v$ ifadesini işaret ederek] 115. Z: Yani bu demek oluyor ki bütün reel sayılarda doğru yani. 117. Z: Çünkü bu işaret ["$v \leq v$" ifadesini işaret ederek] v büyük ya da eşittir v'ye demek. Burada da yani doğru [gülümseyerek] çünkü bu sayılar aynı. Buraya v'ye bir dersek, bir büyük ya da eşittir bir olacak. Bir zaten bire eşit. O yüzden bu ifade [$v \leq v$ ifadesini işaret ediyor] doğru oluyor.		
OG-Z3	İkinci dereceden tek değişkenli denklemin çözümlerinin varlığını belirlerken	İkinci dereceden tek değişkenli denklemin diskriminantını hesaplamak	Sesli	Z: ... burada diskriminant on iki geldi [Şekil 96'daki cebirsel gerçekleştirmeleri yazıyor], demek ki iki tane reel kök olduğunu [...] söyledim. [141-GD13] Z: Çarpanlarına ayırmadığımız zaman reel kök yoktur demeyiz, çünkü reel kök diskriminantı küçük sıfır olduğu zaman diyoruz [111-GD25]		3 (GD13, GD14, GD25)
			Cebirsel-Sözel			5 (GD13, GD14, GD25)
OG-Z4	İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken	Çarpanlarına ayırma yöntemiyle ya da $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülü aracılığıyla çözüm kümesinin elemanlarını belirlemek	Sesli-Cebirsel	Ne söylüyor?	Ne yapıyor?	6 (GD14, GD22, GD23, GD24, GD25, GD26)
				253. Z: [$\Delta =$ ifadesini yazıyor] b kare eksi dört a, c'den otuz altı eksi dört çarpı bir çarpı iki. Buradan da yirmi sekiz geldi [gerçekleşme 1'i yazıyor]. Ben bu formülü de inşallah doğru hatırladıysam yazacağım şimdi [...] eksi b artı kök delta bölü [...] a çarpı c olduğunu düşünüyorum [gerçekleşme 2'yi yazıyor]. 266. Z: İki a'ımış [gülerek] düzeltiyorum [$a.c$ ifadesini silerek $2a$ ifadesini yazıyor] (gerçekleşme 3) 270. Z: Evet hocam [gülerek]. Şimdi bunu yapalım önce [...] eksi b zaten buradaki b'miz bu [denklemdaki -6 sayısını göstererek] eksi b altı oluyor [...] altı eksi, kök yirmi sekiz iki kök yedi olduğu için ben buraya iki kök yedi yazdım [...] bölü iki [...] yani bu 11 üç eksi iki kök yedi [...] şuraya yazayım [gerçekleşme 4'ü yazıyor] yine bu da altı eksi iki kök yedi bölü iki [...] sonra buradan da diğer şeyimiz de kökümüz de üç artı iki kök yedi (gerçekleşme 5) geliyor [gerçekleşme 6'yı yazarak prosedürünü tamamlıyor].		

OG-Z5	İkinci dereceden tek değişkenli bağıntıların alabileceği en büyük ya da en küçük değeri belirlerken	Tepe noktasının ordinatını belirlemek	Sesli	Z: Tepe noktası [...] tepe noktası eksi b bölü a'dan [61-GD19]. Minimum ya da maksimum değer [...] eğer (<i>parabolün</i>) kolları yukarı doğruysa minimum değer, aşağı doğruysa maksimum değer [66-GD19] Z: Kolları ıı bunun aşağı doğru olduğu için şey tepe noktasının r'sinin en büyük değeri var bunun [92-GD20] Z: Z: Tepe noktasını buldum çünkü ıı şimdi biz zaten geçen görüşmedeki çözdüğümüz sorularda da tepe noktasının r'sini k'sını bulup parabolü çiziyorduk, ona göre işte [...] dahil durumlarına göre [...] parabolün bir kısmını siliyorduk [...] ıı ona göre [...] onun tepe noktasının k'sı en çok değeri de bizim elde edebileceğimiz en çok miktar oluyordu, o yüzden. [102-GD21] Z: Parabolün kolları aşağı doğru olduğu için tepe noktasının k'sı maksimum değer oluyor [356-GD21]	4 (GD19, GD20, GD21)
		Cebirsel		1 (GD21)	
OG-Z6	İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ya da eşitsizlik sistemlerini çözerken	Eşitsizliklerin çözüm kümesini işaret tablosu aracılığıyla belirlemek	Cebirsel- Grafiksel		4 (GD23, GD24, GD25, GD26)

Katılımcının denklem ve eşitsizliklere yönelik işlemsel prosedürleri içeren BG-Z4, BG-Z5, OG-Z4 ve OG-Z6 kodlu rutinlerinde Zehra'nın süreç odaklı olduğu ve prosedürünü nasıl yürütmesi gerektiğine odaklandığı görülmüştür. Prosedüründe “Nasıl ilerlerim?” sorusunu geçmiş öğrenme yaşantılarına (emsal olaylara) başvurarak yanıtlamaya çalışan katılımcı, bu durumu zaman zaman söylemlerinde “[...] o formülü, nasıl bulacağımı unuttum [143-GD13]”, “Geçen çözdüklerimize benziyor ama ben ne yaptığımızı unuttum şu an ... [10-GD12]”, “Tepe noktasını buldum çünkü ııı şimdi biz zaten geçen görüşmedeki çözdüğümüz sorularda da tepe noktasının r 'sini k 'sını bulup parabolü çiziyorduk, ona göre ... [102-GD23]” ve “Sınıftaki bu tarz soruyu çözerken konuştuklarımızı çok net hatırlıyorum. Ama bir kısmı aklıma gelmedi, konuşmaları hatırlıyorum ama devamını getiremedim ... [42-GD26]” şeklinde belirtmiştir. Bununla birlikte katılımcının işlemsel prosedürlerinde yer alan kısmi hatalar ya da eksiklikler de (örneğin, Tablo 64, Tablo 65 ve Şekil 97) rutinlerinin ritüel olduğuna dair birer delil olarak bulgulara gözlemlenmiştir. Zehra'nın birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizlikleri çözerken kullandığı BG-Z4 ve BG-Z5 kodlu rutinleri bireysel görüşmedekine benzer prosedürleri içermesinden dolayı birer ritüel rutin olarak kodlanmıştır. Benzer şekilde katılımcının odak grup görüşmelerinde gözlemlenen ve işlemsel prosedürleri içeren OG-Z4 ve OG-Z6 kodlu rutinlerinin türü de ritüel olmuştur. İkinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme prosedürlerini içeren OG-Z4 kodlu rutininde Zehra, irrasyonel çözümlere sahip denklemlerin çözümlerini $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülleri aracılığıyla belirleyeceğinin farkında olmasına rağmen formülü kanonik bir şekilde hatırlamada (örneğin, [143-GD13], [193-GD14], [195-GD13] ve [197-GD13]) ve uygulamada (örneğin, Tablo 65) güçlük yaşamıştır. Katılımcı ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ve eşitsizlik sistemlerine yönelik prosedürlerini (Şekil 97) tahtada arkadaşlarıyla paylaşma fırsatı bulamasa da farklı görev durumlarındaki işlemsel adımları incelendiğinde sıklıkla kullanılan bir yol olan işaret tablosu aracılığıyla çözümü tercih ettiği görülmüş ve katılımcı bu durumu sesli olarak da (örneğin, [105-

GD23]) ifade etmiştir. Ayrıca GD25 ve GD26’da prosedürünü eksik bir şekilde uygulaması ve Şekil 98’deki gibi sözel gerçekleşmesi de katılımcının rutinin de prosedürünü nasıl uygulayacağına odaklandığını göstermiştir. Bununla birlikte Zehra’nın işlemsel prosedürlere yönelik farklı görev durumlarında kullandığı “Hocam ben birinci dereceden iki değişkenli eşitsizliklerin bu şekilde çözüm kümesini yaptığımı unutmuşum. İşte ben de bir kısmına kadar gelebildim. [185-GD10]”, “Geçen çözdüklerimize benziyor ama ben ne yaptığımı unuttum şu an görsem [...] şu an hatırlarım [...] o yüzden yapamıyorum [...] ben hatırlamıyorum [10-GD12]”, “Ama sonra kökleri bulamadım ııı çünkü ııı unuttum [...] o formülü, nasıl bulacağımı unuttum. [143-GD13]”, “Ya ben çok işlem hatası yaptığım için en garanti yol hangisiyse onu kullanıyorum [215-GD17]”, “Bilmiyorum! Sayılar çok büyük gelince gözüm korktu, buradan gelmez yanlış bir şey yapıyorum diye düşündüm. [112-GD21]”, “Bilmiyorum genelde bize böyle sorularda şey yapılıyor ya, direkt küçük sayılar veriliyor bulabileceğimiz, yirmi beş gözüme büyük geldi o yüzden yanlış yaptım, yanlış geldi diye düşündüm. [114-GD21]”, “Evet yanlış olacağını düşündüğüm için yapmadım [138-GD21]”, “Çünkü yani grafikte [...] grafiğe alışkın değilim ben, o yüzden hata yapma ihtimalim daha yüksek o yüzden tercih etmiyorum [105-GD23] ııı birazcık garantcilik [111-GD23]”, “Ben kendim oraya ilk başta oraya çift katlı olduğunu yazdım ama yapmayı unutmuşum. Bilmiyorum, dikkatsizlik mi [...] boşluğuma geldi [77-GD25].”, “Ben bu sorularda hep zorlanıyorum [4-GD26]” ve “Sınıftaki bu tarz soruyu çözerken konuştuklarımızı çok net hatırlıyorum. Ama bir kısmı aklıma gelmedi, konuşmaları hatırlıyorum ama devamını getiremedim işte [...] gelmedi yani oradan sonra ne yapacağım. [42-GD26]” şeklindeki kişisel söylemleri de katılımcının işlemsel prosedürleri içeren rutinlerinin ritüel bir rutin olduğunu göstermiştir.

Katılımcının matematiksel nesneler hakkında anlatı üretmeyi amaçladığı OG-Z1, OG-Z2, OG-Z3 ve OG-Z5 kodlu rutinleri ise birer keşif rutini olmuştur. Denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutini olan OG-Z1 kodlu rutininde katılımcı denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olarak tanımlamış (örneğin, Şekil 90) ve anlatılar üretmiştir:

Z: Denklem ıı bir değişken bir eşitsizlik içeren ifade, eşitsizlik yine bir değişken ve bir eşitsizlik içeren yani bu sefer büyüktür, büyük-eşittir, küçüktür, küçük-eşittir gibi ifadeler içeren ifadelerdir ve bunların arasındaki fark da denklem de arada eşitlik var mutlaka. Ve yine eşitsizlikte her ikisinde değişken var eşitsizlikte de o büyüktür, büyük-eşittir, küçüktür, küçük-eşittir işaretlerinden bir tanesi var. [519-GD3]

...

Z: Çünkü denklem şartı eşitlik bulundurması ve değişkeni olmasıydı. Burada eşitlik bulunuyor ve değişkeni de var, o yüzden denklem. [23-GD5]

...

Z: Denklemin tanımı [...] ıı bir değişken en az bir değişken ve eşitlik içeren ifadeler [...] denklem diyoruz biz bunlara. [201-GD5]

...

Katılımcının bu anlatıları “Denklem, eşitlik bağıntısı içeren açık önermelere verilen isimdir.” ve “ $\leq$ bağıntısını içeren açık önermeye bir *eşitsizlik* denir.” şeklindeki kanonik anlatılara denk olduğu için OG-Z1 kodlu rutini bir keşif rutin olarak kodlanmıştır. Benzer şekilde katılımcı çözüm kümesi veya çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken de “Denklem ya da eşitsizlikleri (açık önermeleri) doğru bir önermeye (amaca göre yanlış önermeye de olabilir) dönüştüren evrensel kümenin elemanlarının her birine *denklemin ya da eşitsizliğin çözümü* ve çözüm olan bu elemanların oluşturduğu kümeye de *denklemin ya da eşitsizliğin çözüm kümesi* adı verilir.” biçimindeki kanonik anlatıya denk anlatılar üretmiştir (örneğin, Şekil 91). Bununla birlikte katılımcının OG-Z2 kodlu rutin prosedüründe sıklıkla KA3, KA4, KA5 ve KA6’ya denk anlatılar ürettiği görülmüştür:

Z: ... bu şekilde buradan da sıfır eşittir sıfır geldi [...] bu da demek oluyor ki tüm reel sayılar için geçerli ... çünkü çözüm kümesi tüm reel sayılar, bu denklem tüm reel sayıları sağlıyor. Yani bir eşittir bir geldiği zamanda biz buna, ben totoloji yazdım buraya [...] bütün değerleri sağlıyor oluyor. [119-GD2]

...

Z: Evet buna da çelişki deniyor [402-GD2] ve sağlamıyor yani ıı herhangi reel sayıyı yazarsak yazalım değişkenimiz yerine herhangi reel sayıyı yazarsak yazalım eşitlik sağlanmıyor, doğrulamıyor [404-GD2] Yani şöyle bir eşittir sıfır geldiği zaman zaten bu bir çelişki, çelişkilerde ıı çelişkilerde denklemlerdeki çözüm kümeleri boş küme oluyor direkt. [408-GD2]

...

Z: Sonuçta denklemin çözümünü yapıyoruz. Denklemin çözümünde de bir eşittir sıfır oluyor. Yani bu doğru bir ifade olmadığı için denklemde de hiçbir ifade [...] hiçbir hangi reel sayıyı yazarsak yazalım doğru çıkmıyor. [418-GD2]

...

Z: Yani bu demek oluyor ki bütün reel sayılarda [$\mathbb{R}$] ifadesini yazarak] doğru yani. [115-GD4]
Çünkü bu işaret [$v \leq v$] ifadesini işaret ederek] v büyük ya da eşittir v 'ye demek. Burada da
yani doğru [gülümseyerek] çünkü bu sayılar aynı. Buraya v 'ye bir dersek, bir büyük ya da
eşittir bir olacak. Bir zaten bire eşit. O yüzden bu ifade [$v \leq v$] ifadesini işaret ediyor] doğru
oluyor. [117-GD4]

Zehra'nın OG-Z2 kodlu rutin prosedüründeki anlatıları KA3, KA4, KA5 ve KA6'ya denk anlatılar olmasından dolayı katılımcının OG-Z2 kodlu rutini bir keşif rutini olarak kodlanmıştır. Bununla birlikte katılımcı ikinci dereceden bir değişkenli denklemin çözümlerini belirlerken de anlatılar üretmiş ve denklemin diskriminantı aracılığıyla çözümlerinin varlığına yönelik “Çarpanlarına ayırmadığımız zaman reel kök yoktur demeyiz, çünkü reel kök diskriminantı küçük sıfır olduğu zaman diyoruz [111-GD25]” ve “...burada diskriminant on iki geldi [Şekil 96'daki cebirsel gerçekleştirmeleri yazıyor], demek ki iki tane reel kök olduğunu [...] söyledim. [141-GD13]” şeklinde söylemlerde bulunmuştur. Anlatılarını görsel araçlarla da onaylayan Zehra'nın bu anlatılarının KA33 ve KA35'e denk anlatılar olduğu görülmüş ve katılımcının OG-Z3 kodlu rutini bir keşif rutini olarak kodlanmıştır. İkinci dereceden tek değişkenli bağıntıların alabileceği en büyük ya da en küçük değeri belirlerken kullandığı OG-Z5 kodlu rutininde ise Zehra, her ne kadar parabol eğrisinin grafiğini çizmede güçlük yaşasa da tepe noktasının ordinatının istenilen değere karşılık geldiğini belirten anlatıları sıklıkla (örneğin, [66-GD19], [92-GD20], [102-GD21] ve [356-GD21]) üretmeyi amaçlamıştır. Tablo 66'daki gibi rutinine dair işlemsel prosedürleri diğer katılımcılarla paylaşma fırsatı bulan Zehra'nın rutinin de süreç odaklı olmaktan ziyade sonuç odaklı olduğu düşünülmüş ve OG-Z5 kodlu rutini bir keşif rutini olarak kodlanmıştır.

Zehra'nın Tablo 67'deki gibi kodlanan 8 farklı rutininin ritüel ya da keşif rutini olduğu Tablo 68'de okuyucuya sunulmuştur.

Tablo 68

Zehra'nın Odak Grup Görüşmelerindeki Rutinlerinin Türü

Rutin kodu	Ritüel	Keşif
OG-Z1		X
OG-Z2		X
BG-Z4	X	
BG-Z5	X	
OG-Z3		X
OG-Z4	X	
OG-Z5		X
OG-Z6	X	

Zehra'nın söyleme katılımı nesneleştirme bağlamında incelendiğinde katılımcının OG-Z1 OG-Z2 ve OG-Z3 kodlu keşif rutinleriyle söyleme katılımı keşifsel katılıma örnek teşkil etmiştir. Katılımcı denklem ve eşitsizlikleri tanımlarken kullandığı OG-Z1 kodlu rutininde kavramları birer matematiksel nesne (açık önerme) olarak gördüğünü söylemlerinde belirtmiş (örneğin, [247-GD22] ve Şekil 90) ve anahtar sözcükleri kanonik bir şekilde kullanmıştır (örneğin, [519-GD3] ve [23-GD5]). Bununla birlikte Zehra'nın prosedüründe sonuç odaklı olduğu (örneğin, [104-GD10]) ve kavramlar hakkında onaylanmış kanonik anlatılara denk anlatılar ürettiği (örneğin, [519-GD3] ve Şekil 90) görülmüştür. Keşifsel katılımın iletişimsel belirleyicilerine dair örnekleri içeren OG-Z1 kodlu rutiniyle Zehra'nın söyleme katılımı nesneleştirme açısından keşifsel olarak kodlanmıştır. Katılımcının denklem ve eşitsizlik kavramlarını birer açık önerme olarak gördüğü onun OG-Z2 kodlu çözüm kümesinin elemanları hakkında konuştuğu rutin prosedüründe de ortaya çıkmış (örneğin, Şekil 91) ve Zehra söylemlerinde anahtar kelimeleri kanonik bir şekilde kullanarak (örneğin, [119-GD2], [408-GD2] ve [418-GD2]) anlatılar üretmiştir. Benzer şekilde Zehra, odak grup görüşmelerinde ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerinin diskriminantı ile denklemin çözümlerinin varlığını arasındaki ilişkilere yönelik de onaylanmış anlatılar üretmiş (örneğin, [111-GD25], [141-GD13] ve Şekil 96) ve bu anlatılarında anahtar kelimeleri kanonik bir şekilde kullanmıştır. Bu nedenle katılımcının OG-Z3 kodlu rutiniyle söyleme katılımı keşifsel olarak kodlanmıştır.

Buna rağmen Zehra'nın işlemsel prosedürlerini içeren BG-Z4, BG-Z5 ve OG-Z4 kodlu rutinleriyle söyleme katılımı nesneleştirme açısından incelendiğinde (örneğin, Tablo 64,

Tablo 65 ve Tablo 66) ise ritüel katılımın örnekleri gözlemlenmiştir. Katılımcı söylemlerinde çoğunlukla prosedürün sürecine odaklanmış ve günlük bir dil eşliğinde matematiksel nesnelerin manipülasyonu hakkında konuşmuştur. Zehra, dağılma özelliğini kullandığını belirtmek için “...parantezin içine dağıttım”, “...içeriye dağıtıyorum” gibi insani eylem içeren ifadeleri kullanırken uyguladığı işlemlere “ekledim”, “çıkardım”, “çarptım” ve “böldüm” gibi birinci tekil şahıs ekini eklediği ifadelerle belirtmiştir. Ayrıca BG-Z4, BG-Z5 ve OG-Z4 kodlu rutin prosedüründe matematiksel nesneleri temsilen sıklıkla “bu” zamirini kullanan katılımcının rutin amacı, iletişimi sürdürmek ve prosedüründe nasıl ilerleyeceğine dair yanıt aramak olmuştur. Bu nedenle Zehra’nın BG-Z4, BG-Z5 ve OG-Z4 kodlu rutinleri söyleme katılımında nesneleştirme bağlamında ritüel katılımın birer örneklerini teşkil etmiştir. Bununla birlikte Zehra’nın ikinci dereceden tek değişkenli bağıntıların alabileceği en büyük ya da en küçük değeri belirlerken kullandığı OG-Z5 kodlu rutini ise hibrit katılımın bir örneğini sunmuştur. Katılımcının rutiniyle söyleme katılımı incelendiğinde Zehra ikinci dereceden tek değişkenli bağıntıların grafikleri (parabol eğrisi) hakkında anlatılar üretmiş fakat grafiksel gerçekleştirmelere geçiş yapmada güçlük yaşamıştır (örneğin, [8-GD9] ve [249-GD9]). Bu durumu “Ya ben çok işlem hatası yaptığım için en garanti yol hangisiyse onu kullanıyorum [215-GD17]”, “Çünkü yani grafikte [...] grafiğe alışkın değilim ben, o yüzden hata yapma ihtimalim daha yüksek o yüzden tercih etmiyorum [105-GD23] ını birazcık garantıcilik [111-GD23]” şeklindeki kişisel söylemleriyle de dile getiren Zehra anlatılarını tek bir (cebirsal) gerçekleştirme ile uygulayabilmiştir (örneğin, Tablo 66). Katılımcının ürettiği onaylanmış anlatılarında göstergelerin farklı gerçekleştirmelerinin farkında olması fakat bu gerçekleştirmeler arasındaki geçişlerde güçlük yaşamasından dolayı OG-Z5 kodlu rutiniyle söyleme katılımının nesneleştirme açısından hibrit olduğu gözlemlenmiştir.

Katılımcının rutinleriyle söyleme katılımı esneklik bağlamında ele alındığında Zehra BG-Z4, BG-Z5, OG-Z5 ve OG-Z6 kodlu rutinlerinde ezbere ve katı bir prosedür uygulamıştır (Tablo 64 ve Tablo 66). Zehra’nın işlemsel prosedürlerinde çoğunlukla cebirsel

gerçekleşmeleri tercih ettiği, grafiksel gerçekleştirmeler aracılığıyla çözüm yapmada güçlük yaşadığı ve işlemlerinde eksikliklerin ya da kısmi hataların olduğu da gözlemlenmiştir. Bu nedenle katılımcının BG-Z4, BG-Z5, OG-Z5 ve OG-Z6 kodlu rutinleriyle söyleme katılımı esneklik açısından ritüel bir katılımın birer örneği olmuştur. Bununla birlikte bireysel görüşmede baş katsayısı 1 ve çözümleri tamsayı olan ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri sadece çarpanlarına ayırma yoluyla çözen Zehra odak grup görüşmelerinde çözümleri irrasyonel olan ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri de çözebilmeye başlamıştır (Tablo 65). Fakat katılımcının farkına vardığı bu yeni prosedürü kanonik bir şekilde uygulamada güçlük yaşamasında dolayı Zehra'nın OG-Z4 kodlu rutiniyle söyleme katılımı esneklik bağlamında hibrit katılımın birer örneğini teşkil etmiştir.

Zehra'nın rutinleri bağlılık-tutarlılık bağlamında incelendiğinde ise birinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme rutini olan BG-Z4 kodlu rutininde ardışık adımlarının bazılarında bağlılık olmadığı ve katılımcının birbirine denk açık önermeler yazmada güçlük yaşadığı görülmüştür. Örneğin, Zehra “ $3 - 2(x + 5) = -(3x + 1) + 7, x \in \mathbb{R}$ ” ve “ $\frac{y-3}{2} + 1 = 3y - 5, y \in \mathbb{R}$ ” denklemlerini sağlayan (doğrulayan) reel sayıları belirlerken Şekil 99'daki gibi değişkeni içeren terimleri eşitliğin herhangi bir tarafında toparlamada ve bu nedenle değişkenin karşılığı olan reel sayıyı belirlemede güçlük yaşamıştır (örneğin, [82-GD6]).

$\frac{y-3}{2} + 1 = 3y - 5, \quad y \in \mathbb{R} \dots \text{Gösterge}$ $\frac{y-3}{2} = 3y-6 \dots \text{Gerçekleşme 1}$ $y-3 = 6y-12 \dots \text{Gerçekleşme 2}$ $y = 6y-9 \dots \text{Gerçekleşme 3}$ $\frac{y}{6} = y-9 \dots \text{Gerçekleşme 4}$ $\# \dots \text{Gerçekleşme 5}$ $4K=\emptyset \dots \text{Gerçekleşme 6}$	$3 - 2(x+5) = -(3x+1) + 7, \quad x \in \mathbb{R} \dots \text{Gösterge}$ $\Rightarrow 3 - 2x - 10 = -3x - 1 + 7 \dots \text{Gerçekleşme 1}$ $\Rightarrow -2x - 7 = -3x + 6 \dots \text{Gerçekleşme 2}$ $\Rightarrow -2x - 7 = -3x + 6 \dots \text{Gerçekleşme 3}$ $-2x - 13 = -3x \dots \text{Gerçekleşme 4}$ $-2x - 13 + 13 = -3x + 13 \dots \text{Gerçekleşme 5}$ $-2x = -3x + 13 \dots \text{Gerçekleşme 6}$ $x = \frac{3x+13}{-2} \dots \text{Gerçekleşme 7}$ $x = \frac{3x+13}{2} \dots \text{Gerçekleşme 8}$

Şekil 99. Zehra'nın BG-Z4 kodlu rutin prosedürlerindeki ardışık adımları

Burada katılımcı çözüm kümesinin elemanlarını belirleme amacıyla uyguladığı prosedürlerinde, " $\frac{y-3}{2} + 1 = 3y - 5, y \in \mathbb{R}$ " göstergesi için gerçekleşme 3'e, " $3 - 2(x+5) = -(3x+1) + 7, x \in \mathbb{R}$ " göstergesi için ise gerçekleşme 6'ya denk açık önermeler yazmada zorlanmış ve hatalı ya da eksik bir şekilde prosedürünü sonlandırmıştır. Zehra'nın çözüm kümesi hakkında konuşurken kullandığı OG-Z2 kodlu keşif rutini dikkate alındığında katılımcının prosedürünün ulaşmak istediği sonuçla tutarlı olduğu fakat katılımcı bazı ardışık adımlarının bağlı olmamasından dolayı doğru sonuca ulaşamamıştır. Bu nedenle BG-Z4↔OG-Z2 rutin çiftinin bağlılık-tutarlılık bağlamında hibrit katılımın bir örneği olarak kodlanmıştır. Benzer şekilde Zehra'nın birinci dereceden tek değişkenli eşitsizlikleri çözme rutini olan BG-Z5 kodlu rutin prosedürünün de bazı görev durumlarında ardışık adımlarının bağlılığının olmadığı gözlemlenmiştir. Katılımcı GD4 ve GD7'de kanonik bir prosedür uygulayabilirken kendisi için daha zorlu bir görev durumu olan GD8 için Şekil 100'deki gibi hatalı adımları içeren bir prosedür uygulamıştır:

$$\begin{array}{l}
\frac{-1}{22} \leq \frac{1}{4u+6} \dots \text{Gösterge} \\
-1 \leq \frac{22}{1} \left(\frac{1}{4u+6} \right) \dots \text{Gerçekleşme 1} \\
-1 \leq \frac{22}{4u+6} \dots \text{Gerçekleşme 2} \\
-4u-6 \leq 22 \dots \text{Gerçekleşme 3} \\
-4u \leq 16 \dots \text{Gerçekleşme 4} \\
u \geq -4 \dots \text{Gerçekleşme 5} \\
(-4, \infty) \dots \text{Gerçekleşme 6}
\end{array}$$

Şekil 100. Zehra'nın görev durumu 8 için uyguladığı prosedürün cebirsel gerçekleştirmeleri

Burada gerçekleşme 3'te eşitsizliğin her iki tarafını $4u + 6$ ifadesiyle çarpan katılımcı, $4u + 6$ ifadesinin pozitif ya da negatif olma durumunu göz ardı etmiş ve gerçekleşme 5'te eşitsizliğin her iki tarafını $-\frac{1}{4}$ ile çarptığında eşitsizliği yön değiştirirken " $\leq$ " sembolünün değilini almıştır. Katılımcının bu hataları birbirine denk açık önermeler yazamamasına ve eşitsizliği doğrulayan u reel sayılarının kümesini (eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, -7] \cup (-\frac{3}{2}, \infty)$ şeklindedir) eksik bir şekilde belirlemesine sebep olmuştur. Bununla birlikte katılımcı çözüm kümesinin elemanlarına dair "... eksi sekizin bunu sağlaması gerekir [502-GD8]" ve "bu kümelerin $[(-\infty, -7]$ aralığı ile $(-\frac{3}{2}, \infty)$ aralığını kastederek] birleşimi çözüm kümesinin elemanlarını içerir [549-GD8]" şeklinde anlatılar üretmiştir. Bu nedenle Zehra BG-Z5 kodlu rutiniyle söyleme katılımı bağlılık-tutarlılık bağlamında hibrit bir katılımın örneğini sunmuştur. Ayrıca katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürünü içeren OG-Z4 ve OG-Z6 kodlu rutinleri de bazı görev durumlarında katılımcının yaptığı kısmi hatalardan dolayı ardışık adımlarının bazılarında bağlılığın olmadığı (örneğin, Tablo 65'te gerçekleşme 2 ve gerçekleşme 6; Şekil 97'de GD25'te grafiksel gerçekleşme) fakat katılımcının bu durumun farkında olduğu (örneğin, [197-GD14] ve [77-GD25] görülmüştür. Bu nedenle Zehra'nın bu rutinleriyle söyleme katılımı da yine hibrit katılımın iletişimsel belirleyicilerinin bir örneği olmuştur.

Zehra'nın rutinleriyle söyleme katılımı gerekçelendirme bağlamında incelendiğinde, katılımcı denklem ve eşitsizlikler hakkında konuşurken kullandığı OG-Z1 kodlu keşif rutininde bir cebirsel ifadesini denklem ya da eşitsizlik olmasını anlatılar üreterek gerekçelendirir. Kendi argümanını inşa ederken sonuç odaklı olan Zehra söylemleri matematiksel nesneler hakkında olmuş ve kavramlara yönelik mantıksal çıkarımlarda bulunmuştur:

Z: Çünkü denklem şartı eşitlik bulundurması ve değişkeni olmasıydı. Burada eşitlik bulunuyor ve değişkeni de var, o yüzden denklem. [23-GD5]

...

Z: Ya ben açık önerme olduğunu düşünüyorum, çünkü açık önermenin tanımını tam olarak hatırlamıyorum, bizim ne yazdığımızı, ama büyük ihtimal eşitlik veya eşitsizlik içeren ifadeler, sonuçta açık önerme neydi, bizim kesin hüküm bildiremediklerimizdi ve bu eşitsizlik içeren ifadeye baktığımızda yine kesin hüküm bildiremiyoruz, zaten açık önermeler önerme değildi, o yüzden bence bu da açık önerme, öyle düşünüyorum. [84-GD5]

...

Z: Evet değişken olması gerekiyor, değişken olmayan açık önerme görmedik şu ana kadar. Zaten değişken olmazsa bir şeye bağlı olmuyor ki? [113-GD5]

...

Z: Şey yaparsa mesela, bir denklem verse ama buradaki [*tahtada yer alan " $x \in \mathbb{R}$ " ifadesini işaret ederek*] x elemanıdır reel sayı yerine x ikiye eşittir dese, onu belirtse bize bence o açık önerme olmaz, çünkü kesin hüküm verebileceğiz o zaman. [119-GD5]

...

Z: Demek ki her denklem bir açık önerme. [134-GD5]

Burada Zehra'nın söyleme katılımı gerekçelendirme açısından keşifsel katılımın iletişimsel belirleyicilerinin bir örneğini sunduğu için katılımcının OG-Z1 kodlu rutiniyle söyleme katılımı gerekçelendirme bağlamında keşifsel katılıma dahil edilmiştir. Benzer şekilde katılımcı çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken kullandığı OG-Z2 kodlu rutinini de gerekçelendirirken de matematiksel nesneler hakkında anlatılar üretmiştir:

Z: Ama bu denklem bütün değerleri sağlamaz ki. [61-GD1] Yanlış (önerme). Çünkü her x değeri yani bütün reel sayılar denklemi sağlamıyor. [77-GD1] Bu yanlış bir önerme [85-GD1]

...

Z: ... bu şekilde buradan da sıfır eşittir sıfır geldi [...] bu da demek oluyor ki tüm reel sayılar için geçerli, ama biz böyle yaptığımız için mesela Elif de beş eşittir beş yapmış o da doğru, çünkü çözüm kümesi tüm reel sayılar, bu denklem tüm reel sayıları sağlıyor. Yani bir eşittir bir geldiği zamanda biz buna, ben totoloji yazdım buraya [...] bütün değerleri sağlıyor oluyor [119-GD2] Aynen eşitliğin iki tarafı da eşit geldiği için çözüm kümesi tüm reel sayılar [127-GD2]

...

Z: Yani bu demek oluyor ki bütün reel sayılarda [$\mathbb{R}$ ifadesini yazarak] doğru yani. [115-GD4] Çünkü bu işaret [$v \leq v$ ifadesini işaret ederek] v büyük ya da eşittir v 'ye demek. Burada da yani doğru [gülümseyerek] çünkü bu sayılar aynı. Buraya v 'ye bir dersek, bir büyük ya da eşittir bir olacak. Bir zaten bire eşit. O yüzden bu ifade [$v \leq v$ ifadesini işaret ediyor] doğru oluyor. [117-GD4]

...

Z: Evet buna da çelişki deniyor [402-GD2] ve sağlamıyor yani ıı herhangi reel sayıyı yazarsak yazalım değişkenimiz yerine herhangi reel sayıyı yazarsak yazalım eşitlik sağlanmıyor, doğrulanmıyor [404-GD2] Yani şöyle bir eşittir sıfır geldiği zaman zaten bu bir çelişki, çelişkilerde ıı çelişkilerde denklemlerdeki çözüm kümeleri boş küme oluyor direkt. [408-GD2]

...

Z: Sonuçta denklemin çözümünü yapıyoruz. Denklemin çözümünde de bir eşittir sıfır oluyor. Yani bu doğru bir ifade olmadığı için denklemde de hiçbir ifade [...] hiçbir hangi reel sayıyı yazarsak yazalım doğru çıkmıyor. [418-GD2]

Bu nedenle katılımcının OG-Z2 kodlu rutiniyle söyleme katılımı, gerekçelendirme bağlamında keşifsel katılımın birer örneği olarak kodlanmıştır. Buna rağmen katılımcının ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme prosedürlerini içeren OG-Z4 kodlu rutinde hafızaya başvurduğu ve formülü hatırlamaya çalışarak prosedürünü uygulamaya çalışması (örneğin, Tablo 65) ise ritüel katılımın bir örneğini sunmuştur. Katılımcı prosedürünü uygularken “Ben formülü unuttum [193-GD14] Sadece altındakini [*payda kısmında yer alan 2a ifadesini kastederek*] unuttum üstünü [*pay kısmında yer alan “ $-b \pm \sqrt{\Delta}$ ” ifadesini kastederek*] hatırladım. [195-GD14] Hocam ben altına ne yazdığımızı [...] iki çarpı bir yazdığımızı hatırlıyorum da o iki ne [...] bir dakika! Düşüneceğim. [197-GD14]” ve “...Ben bu formülü de inşallah doğru hatırladıysam yazacağım şimdi [...] eksi b artı kök delta bölü [...] a çarpı c olduğunu düşünüyorum. [253-GD14]” gibi söylemlerde bulunmuş ve geçmiş öğrenme yaşantılarını hatırlamaya çalıştığını belirtmiştir. Katılımcının prosedüründeki adımları hafızaya ya da geçmiş öğrenme yaşantılarına

başvurarak gerekçelendirmesi onun OG-Z4 kodlu rutiniyle söyleme ritüel katılımın bir örneğini sunmuştur. Benzer şekilde Zehra ikinci dereceden tek değişkenli bağıntıların alabileceği en büyük ya da en küçük değeri belirlerken kullandığı OG-Z5 kodlu rutininde “Tepe noktası [...] tepe noktası eksi b bölü a ’dan [61-GD19]. Minimum ya da maksimum değer [...] eğer (*parabolün*) kolları yukarı doğruysa minimum değer, aşağı doğruysa maksimum değer [66-GD19]” ve “Parabolün kolları aşağı doğru olduğu için tepe noktasının k ’sı maksimum değer oluyor [356-GD21]” şeklinde ürettiği anlatıları “Tepe noktasını buldum çünkü ııı şimdi biz zaten geçen görüşmedeki çözdüğümüz sorularda da tepe noktasının r ’sini k ’sını bulup parabolü çiziyorduk, ona göre işte [...] dahil durumlarına göre [...] parabolün bir kısmını siliyorduk [...] ııı ona göre [...] onun tepe noktasının k ’sı en çok değeri de bizim elde edebileceğimiz en çok miktar oluyordu, o yüzden. [102-GD21]” biçimindeki söylemiyle gerekçelendirmiş ve katılımcının sunduğu argümanında prosedürünü geçmiş öğrenme yaşantılarına dayandırarak uygulamıştır. Katılımcı ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizlik ya da eşitsizlik sistemlerini çözerken kullandığı OG-Z6 kodlu rutininde de prosedüründeki eksiklik ya da hatalara dair “Ben kendim oraya ilk başta oraya çift katlı olduğunu yazdım ama yapmayı unutmuşum. Bilmiyorum, dikkatsizlik mi [...] boşluğuma geldi [77-GD25].”, “Ben bu sorularda hep zorlanıyorum [4-GD26]” ve “Sınıftaki bu tarz soruyu çözerken konuştuklarımızı çok net hatırlıyorum. Ama bir kısmı aklıma gelmedi, konuşmaları hatırlıyorum ama devamını getiremedim işte [...] gelmedi yani oradan sonra ne yapacağım. [42-GD26]” şeklindeki kişisel söylemlerinde ve Şekil 98’deki gibi “buradan sonra bu tabloya bakarak bir şeyler yapıyorduk ama hatırlayamadım” biçimindeki sözel gerçekleşmesinde hafızaya ya da geçmiş öğrenme yaşantılarına başvurduğunu ortaya koyan argümanlar sunmuştur. Bu nedenle Zehra’nın OG-Z6 kodlu rutiniyle de söyleme katılımı gerekçelendirme bağlamında ritüel olarak kodlanmıştır.

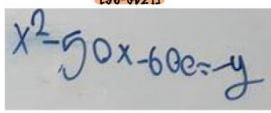
Zehra’nın söyleme katılımı yetkinliği açısından ele alındığında katılımcının rutinleri aracılığıyla söyleme katılımı hibrit katılımın belirleyicilerine örnekler sunmuştur. Katılımcı

herhangi bir görev durumunda prosedürü uygularken çoğunlukla bağımsız kararlar almış, prosedürü uygularken zorluk yaşadığı anlarda bir dış otoriteye ihtiyaç duymuştur. Emin olmadığı durumlarda nadiren başkalarının onayına başvuran Zehra zaman zaman arkadaşlarına (emin olmasa da) önerilerde bulunmuş ve başkalarının söylemlerinden sıklıkla mantıksal çıkarımlar yapmıştır. Ayrıca katılımcı prosedürü eksik ya da hatalar içerse de kendinden emin bir şekilde söylemlerde bulunmuş ve prosedüründeki eksiklik ya da hataların (varsa) farkında olduğunu dile getirmiştir. Zehra'nın OG-Z1, OG-Z2, BG-Z4, OG-Z4, OG-Z5 ve OG-Z6 kodlu rutinleriyle söyleme katılımında yetkinlik açısından hibrit bir katılım gösterdiğine yönelik Tablo 69'daki gibi iletişimsel örneklere rastlanmış ve katılımcının bu rutinleri hibrit katılımın birer örneği olarak kodlanmıştır.

Tablo 69

Zehra'nın Katılımcının Yetkinliğinde Hibrit Bir Katılım Sergilediği İletişimsel Örnekleri

Hibrit katılımın iletişimsel belirleyicisi	İletişim örneği	Rutin kodu
Katılımcı bir görev durumunda prosedürü uygularken çoğunlukla bağımsız kararlar alır, prosedürü uygularken zorluk yaşadığında dış otoriteye ihtiyaç duyar. Emin olmadığı durumlarda nadiren başkalarının onayına başvurur.	Ne söylüyor? 251. Z: Şimdi ilk önce yine bu [göstergeyi kastederek] çarpanlarına ayrılmadığı için diskriminantına baktım. 252. A: Hi hi. 253. Z: [$\Delta =$ ifadesini yazıyor] b kare eksi dört a, c'den otuz altı eksi dört çarpı bir çarpı iki. Buradan da yirmi sekiz geldi [gerçekleşme 1'i yazıyor]. Ben bu formülü de inşallah doğru hatırladıysam yazacağım şimdi [...] eksi b artı kök delta bölü [...] a çarpı c olduğunu düşünüyorum [gerçekleşme 2'yi yazıyor]. 254. A: Burcu gülüyor [gülümseyerek]. 255. Z: Yanlış mı yaptım [gülerek arkadaşlarına dönüyor]. Yanlış mı, doğru mu? [Onay isteyerek] 256. A: Niye gülüyorsun Burcu? 257. Ş: Hocam Zehra'nınki tesadüfen doğru çıkıyor [gülerek]. Çünkü c'de iki. 258. Z: Burcu niye bana gülüyorsun? 259. B: Hayır gülmedim [...] böyle üzuldüm yani. 260. E: c değil a. 261. Ş: Evet formül iki a ama Zehra c yaptığı için c de iki [gülerek]. 262. Z: Haaaa! [Yüksek sesle ve uzun süre gülüyor] 263. A: Evet ikiye tutturmak da şans yani [gülerek]. 264. Z: Çok şanslıyım yani [Yüksek sesle ve uzun süre gülüyor]. 265. A: Neymiş ama? 266. Z: İki a'ımiş [gülerek] düzeltiyorum [a. c ifadesini silerek $2a$ ifadesini yazıyor]. (gerçekleşme 3) Ne söylüyor? 65. Z: 11 sonra çarptım bu ikisini [yazdığı denklemden çarpanları göstererek] 11'i ilk önce sırayla ben birinciden başladım, altmış çarpı on yaptım, altmış çarpı x yaptım [göstererek] altı yüz artı altmış x [$600 + 60x$ ifadesini yazıyor] 11'i sonra eksi x le onu çarptım eksi on x [$-10x$ ifadesini yazıyor] sonra eksi x ile x'i çarptım eksi x kare [$-x^2$ ifadesini yazıyor] burası böyle oldu [= y yazarak] 11'i sonra burayı düzenledim eksi x kare artı elli x 11'i artı altı yüz [...] eşittir y [$-x^2 + 50x + 600 = y$ ifadesini yazıyor] dedim. Sonra ben eksi sevmediğim için eksiyle çarptım bu ifadeyi 67. Z: Eksi böyle çarpanlarına ayıracağımız zaman zorluk oluyor ve benim kafam karışıyor o yüzden eksiyle çarpıyorum ben genelde denklemi [$-x^2 + 50x + 600 = y$ eşitliğini iki elinin arasına alarak gösteriyor] 71. Z: Ama işte benim burada kafam takıldı. 73. Z: Ben bu y [...] eksiyle çarpmadım eksi yazdığım için [gülerek] neden öyle olduğunu bilmiyorum. Onu düşündüm ben kendi kendime ama bulamadım. [...] İşte x kare eksi elli x artı	OG-Z4
	Ne yapıyor? $x^2 - 6x + 9 = 0, x \in \mathbb{L}$ Gösterge $\Delta = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9$ $\Delta = 18$ Gerçekleşme 1 $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ Gerçekleşme 2 $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ Gerçekleşme 3 [65-0021] $600 + 60x - 10x - x^2 = y$ $x^2 + 50x + 600 = y$	OG-Z5

	altı yüz 83. Z: Evet biz bunu büyük ihtimal parabol olarak düşündüğümüz için eksi ile çarpmadık ama bu bir denklem burada $[-x^2 - 50x + 600 = y]$ ifadesini göstererek [...] <i>[düşünüyor ve fikri değişiyor]</i> parabol belirten bir denklem olduğundan bence eksiyle çarpmalıyız çünkü [...]. 96. Z: Tamam $[x^2 - 50x + 600 = -y]$ eşitliğini yazarak. Sonra ıı ben buradan sonra bir şeyler düşündüm ama yani tam yapamadım. Tepe noktasının r' 'sine baktım, eksi b bölü iki a 'ya [...] oradan baktım.	
Arkadaşlarına eksik ya da matematiksel olarak doğru olmayan önerilerde bulunur. Katılımcı söylemlerinin (özellikle anlatılarının) sonuna “öyle değil mi, doğru mu, ...şöyle olmalı değil mi” gibi onay ifadelerini ekler. Katılımcı başkalarının söylemlerinden mantıksal çıkarımlar yapar.	466. Z: Birden büyük tüm reel sayılar dedik mesela. $<11 + 2(y - 3) > 7, y \in \mathbb{R}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi hakkında konuşuyor> 467. A: Hı hı. 468. Z: Orada $[11 + 2(x - 3) = 7, x \in \mathbb{R}]$ ifadesini kastederek] sadece tek bir sonuç. 469. D: Evet hocam ben de öyle düşünüyorum yani y burada birden büyük tüm sayılar olabilirken x sadece bir sayıyı temsil ediyor. 470. A: Tamam Şule, sen ne düşünüyorsun? 471. Ş: Ben de onu diyecektim hocam [...] yani x için bir değer bulurken y için bir aralık buluyoruz. ... 474. A: x için bir reel sayı, sadece bir reel sayı mı buluyoruz? 475. Z: Ama o şeydi totolojiydi bütün değerler sağlıyordu onu $<“11 + 2(u - 3) = 2u + 5, u \in \mathbb{R}”$ şeklindeki bir önceki görev durumunu hatırlıyor> 476. D: Hah evet! 477. E: Doğru. 478. A: Demek ki bu ikisini birbirinden ayıran şey bulduğunuz reel sayılar- 479. Z: Değilmiş, demek ki aradaki işaretlermiş. Aradaki işaret işte! <i>[Gülerek] <Kendinden emin ve mutlu gözüküyor></i> .	OG-Z1
	33. A: Denklem içeren bir açık önerme? 34. <i><Öğrenciler bu söylem üzerine düşünüyor></i> 35. A: Denklem içermeyen açık önermeler de mi var? 36. Z: Eşitsizlik içerebilir. 37. E: Açık önermelerde hep eşitlik içeriyor [...] diye biliyorum. 38. Z: Eşitsizlik içeremez mi? <i><Elif bir an şaşıyor ve düşünüyor></i> [...] eşitsizlik de olabilir. ... 83. A: Zehra seni de dinleyelim bir kere daha. $<“-4(x - 7) = x + 5(3 - x), x \in \mathbb{R}”$ cebirsel ifadesi hakkında konuşmasını istiyor> 84. Z: Ya ben açık önerme olduğunu düşünüyorum, çünkü açık önermenin tanımını tam olarak hatırlamıyorum, bizim ne yazdığımızı, ama büyük ihtimal eşitlik veya eşitsizlik içeren ifadeler, sonuçta açık önerme neydi, bizim kesin hüküm bildiremediklerimizdi ve bu eşitsizlik içeren ifadeye baktığımızda yine kesin hüküm bildiremiyoruz, zaten açık önermeler önerme değildi, o yüzden bence bu da açık önerme, öyle düşünüyorum. 85. A: Evet. <i>[Tahtaya “ - 4(x - 7) ≠ x + 5(3 - x), x ∈ ℝ” yazarak]</i> 86. Z: Bence bu da açık önerme. 87. A: Bu bir açık önerme mi? 88. Z: Bence öyle. ... 109. A: Şimdi bunlara denklem diyorsunuz, eşitsizlik diyorsunuz, bir yandan da açık önerme diyorsunuz. Bir ilişki kurabiliyor musunuz arasında? 110. <i><Şule yani anlamında kafasını sağa sola sallıyor, gülerek></i> 111. Z: Demek ki açık önermeler değişken içeriyor <i>[gülerek]</i> 112. A: Demek ki açık önermeler değişken içeriyor. 113. Z: Evet değişken olması gerekiyor, değişken olmayan açık önerme görmedik şu ana kadar. <i><Şule gülüyor></i> Zaten değişken olmazsa bir şey bağli olmuyor ki?	OG-Z1

171. A: Bu gösterimlerden hangileri doğru? Gösterim nasıl olsa en doğru şekilde olur? [Katılımcıların yanıtlarında yer alan $\{R\}, \{\mathbb{R}\}, R, \{\infty\}$ biçimindeki gösterimleri kastederek]
172. Z: Şimdi [...] bence bu üçü doğru zaten ikisi aynı, üçünün doğru olduğunu düşünüyorum <Burcu'nun $\{\infty\}$ biçimindeki gösterimi hariç> bunun doğru olmasıyla alakalı <R gösterimi üzerine konuşuyor> bir açıklamam yok sadece test kitaplarında sorularda sadece R yazıyor.
173. Ş: Belki de reel sayılar çok sayıyı kapsadığı için şeyin içinde $\{ \}$ küme parantezini kastediyor jest yapıyor yazmamız doğru olur mu bilemedim.
174. A: Bilemediniz.
175. Z: Yani şey gibi bu aslında mesela boş kümede hem bu küme parantezini açıp içini boş bırakıyoruz ya da sıfır gibi [boş küme gösterimini temsilen ikonik jest yapıyor] bir şey yapıyoruz ya onunla alakalı (A: hıhı) bence bu da [R şeklindeki gösterimi göstererek] doğru yani. <Kendi gösterimi olan $\{R\}$ ile R gösterimini doğru buluyor>
176. Ş: O sıfırda tüm reel sayıları kapsadığı için- <sessizce söylüyor, sözlerini tamamlamıyor, söyledikleri anlaşılmıyor>
177. A: Peki şunu yazıyor musun $\{\{\emptyset\}$ ifadesini yazarak boş kümeyi temsil için?
178. Z: Hayır, çünkü bu bir tek elemanlı küme.
179. A: Tamam, sizce bununla bunun arasında da [R ile $\{R\}$ arasındaki farkı sorarak] bir farklılık olabilir mi?
- ...
182. Z: Evet aaa olabilir burada [gülerek] aydınlandım [...] olabilir ama emin değilim.
- ...
184. A: Burcu'nun sonsuz gösteriminin $\{\{\infty\}$ gösterimini kastederek] doğru olduğunu düşünüyor musunuz?
185. Z: [...] Hayır.
186. Ş: Öyle olunca da belki de artı sonsuz eksi sonsuz şeklinde göstermesi gerekebilirdi, sadece sonsuz değil $\{(-\infty, \infty)\}$ ifadesini yazıyor]
- ...
203. Z: Bence yani [...] eğer şey olarak şu Şule nin şu gösterimi $\{(-\infty, \infty)\}$ ifadesini kastederek] bana şu an en mantıklısı gibi geldi sonsuz şeklinde yazacaksak bile ııı şu eğer sonsuz şeklinde yazacaksak eğer eksi sonsuz artı sonsuz bu şekilde yazmalıyız $(-\infty, \infty)$ ifadesini yazarak].
- ...
212. Z: Bence direkt böyle R yazabiliriz ya.
213. A: Direkt R yazabiliriz diyor. Küme içinde R den vazgeçtik mi yoksa?
214. Z: Evet ben vazgeçtim.

Katılımcı prosedüründeki eksik ya da hataların (varsa) farkındadır fakat doğru prosedürü nasıl uygulaması gerektiği noktasında bağımsız kararlar almada güçlük yaşar.

Ne söylüyor?

Ne yapıyor?

BG-Z4

72. Z: Evet eksiye, çünkü arada yine çarpma var. [...] Sonra burayı düzenliyorum, eksi iki x , artı üç eksi on artı [...] evet eksi yedi ııı sonra [= sembolünü yazarak] eksi üç x , eksi bir artı yedi (gerçekleşme 1) burası artı altı ediyor [gerçekleşme 2'yi yazarken]. ııı sonra [...] iki taraftan [...] altı çıkartabilirim. (gerçekleşme 3) [...] Sonra dur yazayım $\Rightarrow$ bağlaçlarını ekliyor [...] burası böyle olur $[-2x - 13]$ yazarak] burası da böyle olur $[-3x]$ yazarak] direkt eksi üç x (gerçekleşme 4). Sonra iki tarafa da on üç eklesem. [...] ııı ondan sonra (gerçekleşme 6) [Durup yazdıklarını bir süre düşünmüyor] ııı yine aynı yerde takıldım. Şimdi [...] ııı
74. Z: Burada önce bir on üçten [...] yok her tarafa şimdi bir şey yapsam [...] tamam şey her tarafı eksi ikiye bölssem [kararsız]
76. Z: Yani ben olsam öyle yapardım benim düşüncemle.
78. Z: Tamam [...] eksi iki x eşittir eksi üç x artı on üç bölü eksi iki

$$3 - 2(x+5) = -(3x+1) + 7, x \in \mathbb{R} \dots \text{Öösterge}$$

$$\Rightarrow 3 - 2x - 10 = -3x - 1 + 7 \dots \text{Gerçekleşme 1}$$

$$\Rightarrow -2x - 7 = -3x + 6 \dots \text{Gerçekleşme 2}$$

$$\Rightarrow -2x - 7 + 7 = -3x + 6 + 7 \dots \text{Gerçekleşme 3}$$

$$-2x - 13 = -3x + 13 \dots \text{Gerçekleşme 4}$$

$$-2x - 13 + 13 = -3x + 13 \dots \text{Gerçekleşme 5}$$

$$-2x = -3x + 13 \dots \text{Gerçekleşme 6}$$

(gerçekleşme 7).

82. Z: 111 burası x oluyor [$x = \frac{-3x+13}{-2}$ yazıyor] 111 ondan sonrada [$x =$ yazıyor] [...] buradaki eksi bölü eksi artı ediyor (gerçekleşme 8) yani bundan sonra [...] böyle kalır, kalmazdım ben ama [...] <Çözümüne devam etmede güçlük yaşıyor>

84. Z: [...] yani ikiyle çarpınca aynı şey oluyor ama bilemedim şu an Kafam karışıyor da benim yani.

Handwritten mathematical work for Gerçekleşme 7 and Gerçekleşme 8. Gerçekleşme 7 shows the equation $x = \frac{3x+13}{-2}$. Gerçekleşme 8 shows the equation $x = \frac{3x+13}{2}$.

133. A: Zehra sen kağıdında neden çözümünü tamamlayamadığını düşünüyorsun, sadece sayılar büyük olduğu için mi?

OG-Z5

134. Z: Evet sadece o yüzden yani, çünkü f yirmi beş, ben şey diye düşünmüştüm yani, günlük hayatımızda doğru olur da ben şeyden sonra [...] f yirmi beş kısmından sonra yanlış ilerlediğimi düşündüm. Yani şunlardan falan emindim [yazdığı cebirsel ifadeleri göstererek] hatta iki kere kontrol ettim, doğru mu yanlış mı diye, sonra devamını getirmedi.

135. A: Yani farkındasın yanlış anlamıyorsam, tepe noktasında en büyük değere ulaşacağına?

136. Z: Evet, evet.

137. A: Ama bu adımı atmak için kendinde o cesareti mi bulmadın?

138. Z: Evet yanlış olacağımı düşündüğüm için yapmadım.

62. Z: ...çift katlı olduğunu tabloda göstermeyi unutmuşum [gülüyor] bakın hocam [kağıdındaki prosedürünü göstererek] çok güzel orada. OG-Z6

...

77. Z: Ben kendim oraya ilk başta oraya çift katlı olduğunu yazdım ama yapmayı unutmuşum. Bilmiyorum, dikkatsizlik mi [...] boşluğuma geldi.

...

206. Z: a küçük sıfır göremedim ben.

207. A: Evet.

208. Z: Düşündüm ama orada öyle bir şey olduğunu biliyordum ama göremedim.

Zehra'nın söyleme katılımı rutinlerinin uygulanabilirliği açısından incelendiğinde katılımcı denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutini olan OG-Z1 kodlu rutini ve çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken kullandığı OG-Z2 kodlu rutiniyle keşifsel bir katılım sergilemiştir. Zehra odak grup görüşmelerindeki rutin profilinin yer aldığı Tablo 67'de olduğu gibi katılımcının bu rutinlerini farklı görev durumlarında kanonik bir şekilde sıklıkla uygulayabilmiştir. Daha az sıklıkta görülse de katılımcı ikinci dereceden tek değişkenli denklemin çözümlerinin varlığını incelerken kullandığı OG-Z3 kodlu rutiniyle ikinci dereceden tek değişkenli bağıntıların alabileceği en büyük ya da en küçük değeri belirleme kullandığı OG-Z5 kodlu anlatı rutinini farklı görev durumlarında kanonik bir şekilde uygulayabilmiştir. Bu nedenle katılımcının OG-Z3 ve OG-Z5 kodlu rutinleriyle söyleme katılımı da uygulanabilirlik açısından keşifsel katılımın birer örneği olarak kodlanmıştır. Katılımcının farklı görev durumlarında prosedürünü uygularken kimi zaman güçlük yaşadığı gözlemlenen OG-Z4 ve OG-Z6 kodlu rutinleri ise hibrit katılımın birer örneğini teşkil etmiştir. Bununla birlikte BG-Z4 ve BG-Z5 kodlu rutinleri bireysel görüşmedekine benzer nedenlerden dolayı uygulanabilirlik bağlamında hibrit katılımın birer örneği olarak kodlanmıştır.

Bu bağlamda katılımcının kriterler bağlamında hangi rutinlerinin hangi katılım türü için örnek teşkil ettiği Tablo 70'te okuyucuya sunulmuştur.

Tablo 70

Zehra'nın Rutinleri Aracılığıyla Kriterler Bağlamında Odak Grup Görüşmelerinde Söyleme Katılım Türü

Kriterler	Ritüel katılım	Hibrit katılım	Keşifsel katılım
Söylemin Nesneleştirilmesi	BG-Z4 BG-Z5 OG-Z4	OG-Z5	OG-Z1 OG-Z2 OG-Z3
Esneklik	BG-Z4 BG-Z5 OG-Z5 OG-Z6	OG-Z4	
Bağlılık-Tutarlılık		BG-Z4↔OG-Z2 BG-Z5↔OG-Z2 OG-Z4 OG-Z6	
Gerekçelendirme	OG-Z4 OG-Z5 OG-Z6		OG-Z1 OG-Z2
Katılımcının yetkinliği		OG-Z1 OG-Z2 BG-Z4 OG-Z4 OG-Z5 OG-Z6	
Uygulanabilirlik		BG-Z4 BG-Z5 OG-Z4 OG-Z6	OG-Z1 OG-Z2 OG-Z3 OG-Z5

Sonuç olarak, Zehra'nın söyleme katılımı esneklik ve gerekçelendirme bağlamında bireysel görüşmedeki gibi ritüel bir biçimde olmuştur. Katılımcının söyleme katılımı bağlılık-tutarlılık ve katılımcının yetkinliği bağlamında hibrit iken uygulanabilirlik bağlamında hibrit ve keşifsel katılımın örnekleri eşit sıklıkta gözlemlenmiştir.

Katılımcıların Rutin Gelişimlerine Yönelik Bulgular

Sfard (2008), öğrenmeyi belirli bir topluluğa katılımcı olmanın bir parçası olarak kişinin söylemini değiştirmesi olarak tanımlamakta ve bu bakış açısına göre öğrenme, kişinin söylemindeki değişiklikler yoluyla uygulama topluluklarında yetkin bir katılımcı haline gelmesi olarak nitelendirilmektedir. Bu bağlamda matematiğin öğrenilmesi, öğrencilerin

yavaş yavaş matematiksel söylemin katılımcıları haline geldiği bir süreç olarak tanımlamakta ve bu süreç, ritüel rutinlerin gerçekleştirilmesinden keşif rutinlerine geçişle karakterize edilmektedir (Heyd-Metzuyanım vd., 2022; Lavie vd., 2019). Başka bir deyişle öğrenme, başlangıç rutinleri olan ritüellerin, keşif rutinlerine dönüşümünün (process of de-ritualization) meydana gelmesiyle (sağlanmasıyla) gerçekleşmektedir (Lavie vd., 2019; Nachlieli & Tabach, 2019). Öğrenmenin nasıl gerçekleştiğinin gözlemlenebileceği bu geçişin incelenmesi güç olsa da araştırmacılara göre, rutinlerin ritüelden keşfe geçiş sürecinde herhangi bir ilerlemeden (gelişimden) söz edilebilmesi için söylemin nesneleşmesi, esneklik, bağlılık, gerekçelendirme, katılımcının yetkinliği ve uygulanabilirlik gibi özelliklerin bir veya daha fazlasında artış (zenginleşme) veya gelişim gözlemlenmelidir (Küchle, 2021; Lavie & Sfard, 2019; Lavie vd., 2019; Sfard & Lavie, 2005; Sfard, 2008). Katılımcının; (i) matematiksel nesneler hakkında onaylanmış anlatılar üretmeye başladığında nesneleştirme açısından, (ii) prosedürünü birden fazla alternatif yolla uyguladığında esneklik açısından, (iii) işlemlerindeki ardışık adımlarını tam ve kanonik bir şekilde yazarak prosedürünü tamamladığında bağlılık açısından, (iv) rutininin nedenine dair matematiksel argümanlar sunmaya başladığında gerekçelendirme açısından, (v) rutinini uygularken herhangi bir otoriteye ihtiyaç hissetmeden bağımsız kararlar almaya başladığında yetkinliği açısından ve (vi) farklı görev durumu veya çalışma ortamlarında da rutinini uygulamaya başladığında uygulanabilirlik açısından rutininde gelişim gösterdiği söylenebilir. Bu doğrultuda çalışmanın bu kısmında, öğrencilerin denklem ve eşitsizlik kavramlarına ilişkin rutin gelişimlerinin nasıl olduğuna yanıt aramak için sözü edilen bu kriterler bağlamında katılımcıların (i) ritüelden keşfe dönüşmekte olan rutinlerine, (ii) giderek anlatılarının zenginleştiği keşif rutinlerine ve (iii) hem bireysel hem de odak grup görüşmesinde aynı türden sergilenen fakat söyleme katılım biçiminde değişim gözlemlenen rutinlerine dair bulgulara yer verilmiştir.

Bu çalışmada katılımcıların rutinlerindeki gelişim ya bireysel görüşmedeki ritüel rutinlerinin odak grup görüşmelerinde keşif rutinlerine dönüşümü ya da bireysel

görüşmedeki keşif rutinlerine dair anlatılarının odak grup görüşmelerinde zenginleşmesi şeklinde gözlemlenmiştir. Bununla birlikte katılımcıların hem bireysel görüşmede hem de odak grup görüşmelerinde ritüel ya da keşif olan bir rutiniyle söyleme katılımında, ritüelden hibrite ya da keşifsele veya hibritten keşifsele doğru bir geçişin olması da bu çalışmada bir rutin gelişimi olarak dikkate alınmıştır. Bu kısımda bu duruma yönelik bulgulara da yer verilmiştir.

Katılımcıların bireysel görüşmede karşılaşılan bir rutini ritüel bir rutin iken odak grup görüşmelerinde keşfe dönüşen rutinlerine yönelik bulgulara, Elif'in denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutinlerinde rastlanılmıştır. Bireysel görüşmede süreç odaklı tanımlamalar yapan katılımcı, odak grup görüşmelerinde ele aldığı kavramların birer açık önerme olduğunu fark etmesi üzerine matematiksel nesneler hakkında anlatılar üretmiş ve böylece katılımcının söylemlerinde değişimler olmuştur. Bireysel görüşmede BG-E1 kodlu rutin prosedüründe denklem ve eşitsizlikleri “[...] denklem dediğimiz şey içinde en az bir bilinmeyen olması gerekiyordu, eşitlik olması gerekiyordu ııı eşitsizlik de ııı bir denklemin [...] x değeri mesela bir tane değer alabiliyordu çözüm kümesi diyoruz zaten biz buna ama eşitsizlikte ise birden fazla değer alabiliyordu [2]” şeklindeki söylemleriyle tanımlayan katılımcının, odak grup görüşmelerinde tanımında değişim olmuştur. Bireysel görüşmede “... (eşitsizliklerin) çözüm kümesi belirli bir aralığın içinde ama denklemde ise tek bir cevabı var [12]” ve “... yani eğer zaten büyüktür küçüktür işaretleri varsa ve birden fazla değer alabiliyorsa eşitsizlik diyoruz. [215]” şeklinde söylemlerine benzer söylemlerle tanımlarında denklem ve eşitsizlik çözme süreçlerini de vurguladığı görülen Elif'in odak grup görüşmelerinde, bu söylemleri yerini matematiksel anlatılar ürettiği söylemlere bırakmıştır. Bu değişim ilk olarak katılımcının görev durumu 1'de yer alan “ $11 + 2(x - 3) = 7, \forall x \in \mathbb{R}$ ” şeklindeki cebirsel ifade için “Denklem. Çünkü denklemlerde en az bir değişken (x) ve eşitlik içeren ifadelerdir. Bu ifade de bu şartları sağlıyor (Şekil 19)” şeklindeki sözel gerçekleşmesinde görülmüştür. GD1'de diğer katılımcılarla kurduğu iletişim süreci sonunda denklem kavramı için “eşitlik ve en az bir değişkeni olan ifadelere

denir [345-GD1]]” şeklinde anlatı üreten katılımcının, henüz kavramların birer açık önerme olduğunun farkında olmadığı fakat GD1’de “ $11 + 2(x - 3) = 7, \forall x \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesinin bir önerme belirttiğine dair gerçekleşen söylemsel iletişime katıldığı ve iletişimi dikkatle takip ettiği [88] gözlemlenmiştir.

65. A: Peki bu cebirsel ifade bir denklem midir? <“ $11 + 2(x - 3) = 7, \forall x \in \mathbb{R}$ ” ifadesi hakkında konuşurken>

66. Z: B:Ş: Evet.

67. A: Size göre denklem. <Zehra ve Derya araştırmacının cevabında şüphelenerek gülümsüyorlar> [...] Değil mi? <Şule ve Elif de gülümsüyor>

68. E: Evet [Gülerek]

69. A: Tamam bu bir denklemse (Ş: Bir değeri var) her ($\forall$) sembolü cebirsel ifadede ne anlam ifade ediyor? Her ($\forall$) sembolü varsa bu ifade ne belirtir acaba? Önceki kavramları bir düşünün bakalım.

70. D: Önerme mi?

71. A: Bir iyi fikir geldi mesela bu bir önerme olabilir, dedi.

72. E: Evet [heyecanlanıyor ve elini kaldırarak söz istiyor] aslında mantıklı.

73. Ş: Önermenin de doğru ve yanlışlığı (Z: Mantıkta var) doğru veya yanlış olması önemli değildir demişim.

74. A: Dur bir dakika sırayla gidelim. Şimdi Derya bu bir önerme dedi. <Bu sırada Burcu tüm bu konuşmalarda sessizce ve tereddütlü bir şekilde konuşmaları dinliyor>

75. Z: Önermenin ya bir ya sıfır değeri var. Ya doğru ya yanlış olacak.

76. A: Hah. Zehra’da güzel bir şey söyledi. Peki bu nasıl bir önerme?

77. Z: Yanlış. Çünkü her x değeri yani bütün reel sayılar x ’i sağlamıyor.

78. Ş: Evet.

79. A: Bütün reel sayılar x ’i mi sağlamıyor?

80. Z: Yani denklemi [gülerek] <Elif ve Burcu söz hakkı istiyor, Zehra gülerek Elif’e sözü bırakıyor>

81. E: [Gülerek] Bence burada biz daha denklemi çözmediğimiz için x ’in değerini bulmadığımız için x ’in sadece ait olduğu kümeyi belirtiyor.

...

84. A: x elemanıdır $\mathbb{R}$ bunu ifade ediyor ama burada her ($\forall$) sembolü için Şule diyor ki, hocam bu şunu kastediyor her reel sayı bu denklemi sağlar diyor.

85. Z: Denklemi sağlar [araştırmacıyla birlikte tekrar ederek] bu yanlış bir önerme-

86. A: Dolayısıyla Derya diyor ki, bu bir önerme. Zehra’da diyor ki, bu bir yanlış önerme.

88. <Elif konuşmaları dikkatle dinliyor, Burcu ise sessizliğini koruyor>

89. A: Sen bütün bu konuşmalara dair ne düşünüyorsun? Katılıyor musun, katılmıyor musun?

90. E: [...] Yani mı bence buradaki x elemanıdır her ($\forall$) dediği için yani burada sağladığı tek bir değer var ve bunun için de doğru bir önerme ama geriye kalan reel sayılar için yanlış bir önerme olur.

Burada Elif, diğer katılımcılarla yaşadığı söylemsel iletişim sonucunda “... yani burada sağladığı tek bir değer var ve bunun için de doğru bir önerme ama geriye kalan reel sayılar için yanlış bir önerme olur.” şeklinde mantıksal bir çıkarım yapsa da görüşme sürecinde diğer katılımcılar da dahil katılımcılar, kavramların birer “açık önerme” olduğu geçişini yapamamıştır. Elif’in GD3’teki söylemlerinde katılımcının GD1 sonrasında geçmiş öğrenme yaşantılarına (9. sınıf ders notlarına) başvurduğu görülmüş ve GD3’te araştırmacı ile arasında aşağıdaki iletişim gerçekleşmiştir:

137. A: Tamam. [*Elif’in kağıdına yazdığı ifadeyi (Şekil 20) okumaya devam ediyor*] büyük, büyük-eşit, küçük ve küçük-eşit sembollerini içeren ve sıralama belirten açık önermelerdir, demişsin. <“ $11 + 2(y - 3) > 7, \exists y \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesi için Elif’in sözel gerçekleşmesi hakkında konuşurken>

138. E: Evet [*gülerek*].

139. A: Bunu niye yazdığını bir anlatır mısın bakalım.

140. E: Yani hocam şimdi dün- [*gülerek*]

141. A: Dün neler yaşandı? [*Gülerek*]

142. E: [*gülüyor*] Hocam şimdi dün gittim defteri açtım, sonra açık önermeye baktım. Açık önermede direkt şey yazıyordu tanımında (A : Ne?) şey içinde eşitlik içeren (A : $H_1 h_1$) ve içinde en az bir değişken olan önermeler diyordu, açık önerme için. <Denklem tanımını söylüyor, doğru hatırlamada güçlük yaşıyor>

143. A: Eşitlik içeren?

144. E: $H_1 h_1$.

145. A: Başka?

146. E: Bir de değişken, en az bir değişken içeren [*yüz ifadesi oldukça kararsız*].

147. A: Açık önerme için bunu mu diyordu?

148. E: Öyleydi, yanlış mı hatırlıyorum? [*Tedirgin*]

149. B: Eşitlik mi, eşitsizlik mi?

150. E: Öyleydi [*emin değil*].

151. A: Tamam söyle, ne diyormuş, eşitlik içeren-

152. E: [...] İşte ve içinde en az bir değişken olan (A : $H_1 h_1$) önermelerdir.

153. A: Önermelerdir?

154. E: Evet [*kararsız*] [...] Şu an keşke defteri getirseydim de [*emin olamıyor*]

155. A: Hatırlayamadın herhâlde tam, bir şeyler okudun ama hatırlayamadın.

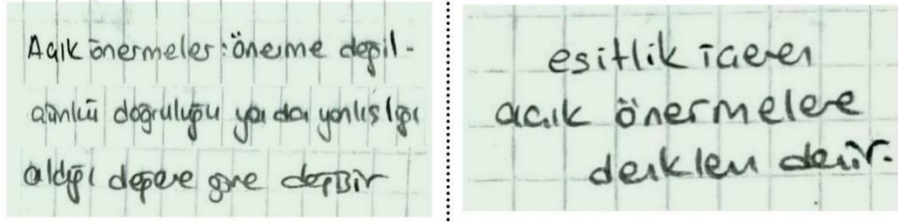
156. E: Evet.

Burada geçmiş öğrenme yaşantılarına başvurduğu [142] görülen Elif, henüz denklem ve açık önerme ilişkisini kuramamış ve “açık önerme” tanımını doğru bir şekilde hatırlamada güçlük yaşamıştır. Ayrıca katılımcı, “ $11 + 2(y - 3) > 7, \exists y \in \mathbb{R}$ cebirsel ifadesine isim vermek gerekirse sence hangi matematiksel ismi vermek uygun olur? Cevabının gerekçesini/lerini paylaşır mısın?” şeklindeki görev durumu için kağıdına eşitsizlik kavramına yönelik “ $>, \geq, <, \leq$ işaretlerini içeren ve sıralama belirten açık önermelerdir (Şekil 20)” biçiminde bir açıklama yazmıştır. Fakat “ $11 + 2(y - 3) > 7, \exists y \in \mathbb{R}$ ” ifadesinin aslında bir önerme belirtmesinden dolayı katılımcının GD3’te henüz “denklem”, “eşitsizlik”, “önerme” ve “açık önerme” kavramları arasındaki ilişkileri kanonik bir şekilde kurmada güçlük yaşadığı görülmüştür. Bununla birlikte Elif, bireysel görüşmede sonsuz çözüme sahip denklemlerin (özdeşliklerin) birer eşitsizlik belirttiğine dair “Burada da direkt aslında bu sıfırlıyor çünkü yani bu iki kare farkı $[x, y \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere}, x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \text{ ifadeyi göstererek}]$ sıfırlıyor, o yüzden sıfır eşittir sıfır, o yüzden burada x ve y yerine ne yazarsam yazayım sağlıyor, o yüzden aslında eşitsizlik dedim yani benim tanımına göre eşitsizlik oluyor aslında. [181]” şeklindeki söylemlerinin doğru olmadığına yönelik farkındalığını GD3’te aşağıdaki gibi belirtmiştir:

527. E. ... denklem içinde en az bir değişken olan ve eşitlik içeren ifadelerdir, eşitsizlikte küçüktür, büyüktür işte büyük-eşittir sembollerini içeren ve içinde bir değişken olan ifadelerdir ve bunlar arasındaki fark 111 [...] sadece şey sembollerden dolayı, sonuçlardan değil.

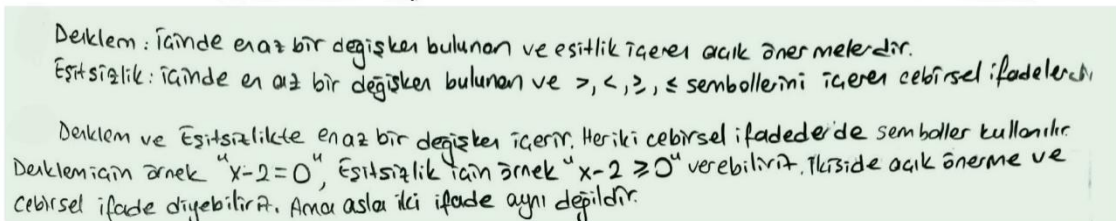
Katılımcı aslında bireysel görüşmede sonsuz çözüme sahip denklemleri, eşitsizlik olarak tanımladığı için sıklıkla tereddütler yaşamış ve söylemlerinde kendinden emin olmadığını “... şu an kendimle çelişiyorum ... [156]”, “... kendimle çelişiyorum ama *[gülerek biraz da mahcup]* [497]” ve “... kendimle çelişmek istemiyorum [671]” şeklindeki kişisel söylemleriyle belirtmiştir. Odak grup görüşmelerinde Elif’in söylemlerinde gerçekleşen değişimin, katılımcı söylemlerinde dile getirmese de GD2’de yer alan “ $11 + 2(u - 3) = 2u + 5, u \in \mathbb{R}$ ” denkleminin çözüm kümesi hakkında diğer katılımcılarla gerçekleşen söylemsel iletişiminden (örneğin, Zehra’nın [404-GD2], [408-GD2] ve [418-GD2]’teki söylemleri) kaynaklandığı düşünülmüştür.

Elif'in araştırmacının görüşmeler dışında yürüttüğü dersleri de dikkatle takip ettiği gözlemlenmiş ve katılımcı "İkinci dereceden iki değişkenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulur." kazanımına yönelik işlenen derste sınıfta gerçekleşen söylemsel iletişim sürecinde defterine Şekil 101'deki gibi notlar almıştır:



Şekil 101. Elif'in açık önerme ve denklem kavramlarına yönelik defterinde yer alan notları

Elif'in GD3 sonrasındaki söylemleri, denklem ve açık önerme arasındaki ilişkileri kurabildiğini göstermiş (örneğin, [70-GD13] ve [250-GD22]) ve GD13'te yer alan " $t^2 + 4t = -1, t \in \mathbb{R}$ " cebirsel ifadesi için "ikinci dereceden tek değişkenli eşitlik içeren açık önerme (Şekil 20)" biçimindeki sözel gerçekleşmesine rastlanmıştır. Bu durum aynı zamanda katılımcının bireysel görüşmede sembollere odaklanarak "derecesi iki olan" polinom biçimindeki cebirsel ifadeleri ikinci dereceden denklem olarak tanımladığı (örneğin, [575], [591], [601], [617] ve Şekil 14) BG-E9 kodlu rutininde de değişime sebep olmuş ve katılımcı gösterim biçiminden bağımsız bir şekilde "eşitlik içeren açık önermeleri" denklem olarak tanımladığını söylemlerinde (örneğin, [250-GD22], Şekil 20) belirtmiştir. Ayrıca Elif'in denklem ve eşitsizliklere dair söylemini nesneleştirdiği, odak grup görüşmeleri bitiminde denklem ve eşitsizliklere yönelik Şekil 102'deki gibi yaptığı tanımlamasında yer alan sözel gerçekleşmelerinde de görülmüştür:



Şekil 102. Elif'in odak grup görüşmeleri bitiminde yaptığı denklem ve eşitsizlik kavramlarının tanımına yönelik sözel gerçekleşmeleri

Elif'in denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken kullandığı rutinindeki gelişimi gösteren katılımcının söylemlerine ise Tablo 71'de yer verilmiştir.

Tablo 71

Elif'in Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarını Tanımlama Rutine Yönelik Söylemleri

Rutin kodu	Katılımcının anlatıları	Zamanı
BG-E1	"[...] denklem dediğimiz şey içinde en az bir bilinmeyen olması gerekiyordu, eşitlik olması gerekiyordu ııı eşitsizlik de ııı bir denklemin [...] x değeri mesela bir tane değer alabiliyordu çözüm kümesi diyoruz zaten biz buna ama eşitsizlikte ise birden fazla değer alabiliyordu, hatırladığım kadarıyla yani." [2]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E1	"(eşitsizlikte) x 'in belirli bir değer aralığı oluyordu yani belli bir çözüm kümesi oluyordu, birden fazla değer alabiliyordu." [6]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E1	"... (eşitsizlikte) çözüm kümesi belirli bir aralığın içinde ama denklemde ise tek bir cevabı var." [12]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E1	"... yine eşitlik kullanmış ve tek [...] bir bilinmeyen var en az içinde." [14]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E1	"Burada zaten x var sadece [kalemiyle göstererek] ııı yani karşı tarafa attığımız zaman x 'in tek bir değeri oluyor, o yüzden ben buna denklem demiştim." [18]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E1	"Bir değişken olacak ve eşitlik olması lazım." [215]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E1	"... aslında burada büyüktür küçüktür işareti olduğu için aklıma eşitsizlik geliyor ama [...] yine de çözüm yapmak istiyorum. ... burada dediğim gibi küçüktür büyüktür [kâğıt üzerinde sembolü göstererek] işareti olduğunda direkt eşitsizlik diyebilirim ama sadece sonucunu bulamadığım için belki ikisi birbirine eşit çıkacak, tek bir değer olacak." [72, 82]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E1	"İıı aslında eşitlik varsa denklem [...] iki değer alırsa aslında yine eşitlik varsa birden fazla değer alırsa eşitsizlik [emin gözükmüyor]" [170]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E1	"Bir değişken olacak ve eşitlik olması lazım yani eğer zaten büyüktür küçüktür işaretleri varsa ve birden fazla değer alabiliyorsa eşitsizlik diyoruz." [215]	04.03.2022 Bireysel görüşme
OG-E1	"Çünkü denklemlerde en az bir değişken (x) ve eşitlik içeren ifadelerdir." (Şekil 19'daki sözel gerçekleşmesi)	10.03.2022 GD1
OG-E1	<Denklemleri tanımlarken> "Eşitlik ve en az bir değişkeni olan ifadeler denir." [345-GD1]	10.03.2022 GD1
OG-E1	"(Eşitsizlik) $>$, $\geq$, $<$, $\leq$ işaretlerini içeren ve sıralama belirten açık önermelerdir" (Şekil 20'deki sözel gerçekleşmesi)	11.03.2022 GD3

OG-E1	“... denklem içinde en az bir değişken olan ve eşitlik içeren ifadelerdir, eşitsizlikte küçüktür, büyüktür işte büyük-eşittir sembollerini içeren ve içinde bir değişken olan ifadelerdir ve bunlar arasındaki fark ııı [...] sadece şey sembollerden dolayı, sonuçlardan değil.” [527-GD3]	11.03.2022 GD3
OG-E1	$\langle “t^2 + 4t = -1, t \in \mathbb{R}” \text{ cebirsel ifadesini isimlendirirken} \rangle$ “İkinci dereceden bir değişkenli eşitlik içeren açık önerme” (Şekil 20’deki sözel gerçekleşmesi)	28.03.2022 GD13
OG-E1	“Denklem: İçinde en az bir değişken bulunan ve eşitlik içeren açık önermelerdir. Eşitsizlik: İçinde en az bir değişken bulunan ve $>, <, \geq, \leq$ sembollerini içeren cebirsel ifadelerdir.” (Şekil 102’deki sözel gerçekleşmesi)	28.04.2022 GDS

Tablo 71’de olduğu gibi denklem ve eşitsizlikleri tanımlama söylemleri giderek nesneleştiği gözlemlenen Elif’in, bu rutinine dair sunduğu argümanları da (örneğin, bireysel görüşme için [2], [215] ve [445]; odak grup görüşmelerinde [70-GD13] ve Şekil 20) giderek süreçlerden ziyade matematiksel nesneler hakkında olmaya başlamıştır. Bu durum Elif’in denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutiniyle, söyleme katılımı gerektiren kriteri bağlamında hibrit bir katılımdan (BG-E1 kodlu rutini) keşifsel bir katılıma (OG-E1 kodlu rutini) geçiş yapmasını sağlamıştır. Benzer durum bahsi geçen rutinin uygulanabilirliğinde de görülmüş ve katılımcı bireysel görüşmede uygulanabilirlik bağlamında rutiniyle hibrit bir katılım sergilerken odak grup görüşmelerinde keşifsel bir katılım sergilemiştir (Tablo 32). Ayrıca rutininde yetkinliği bireysel görüşmede ritüel olduğu gözlemlenen Elif’in, söylemlerindeki nesneleşme sayesinde prosedüründe daha bağımsız kararlar aldığı gözlemlenmiş ve söyleme katılımı yetkinliği keşifsel bir hal almaya başlamıştır (Tablo 31).

Katılımcının kavramların birer açık önerme olduğunu fark etmesi, Elif’in çözüm kümesi hakkında konuşurken kullandığı sonuç odaklı BG-E3 kodlu keşif rutinine dair anlatılarının zenginleşmesine de sebep olmuş ve katılımcının söylemlerinde yer alan anlatıları giderek matematiksel nesneler hakkındaki kanonik anlatılara yaklaşmıştır. Tablo 72’de Elif’in bu değişimini gösteren ve çözüm kümesi ya da çözüm kümesinin elemanları hakkında ürettiği anlatıları yer almıştır.

Tablo 72

Elif'in Çözüm Kümesi ya da Çözüm Kümesinin Elemanları Hakkında Konuşurken Ürettiği Anlatıları

Rutin kodu	Katılımcının anlatıları	Zamanı
BG-E3	"... x değeri mesela bir tane değer alabiliyordu çözüm kümesi diyoruz zaten biz buna ama eşitsizlikte ise birden fazla değer alabiliyordu ..." [2]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E3	"... (eşitsizliklerde) çözüm kümesi belirli bir aralığın içinde ama denklemde ise tek bir cevabı var." [12]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E3	"... x tek bir değer almış ve x 'i yerine yazdığımız zaman denklemi sağlıyor." [24]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E3	"Denklemin çözümü [...] x yani buradaki [kendi örneğini işaret ederek] değişken yerine ne yazarsak bu denklemi sağlaması gereken ifade." [241]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E3	" x yerine bu değeri yazdığımız zaman bu denklemin iki tarafında da sağlaması lazım." [249]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E3	"... x yerine yazdığımız zaman eşitliğin iki tarafında da aynı şey olursa denklem sağlanmış olur." [265]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E3	"Çözüm kümesi bence x yerine ne yazarsak zaten burada reel sayı olduğunu söylemiş, ben burada x yerine ne yazarsam yazayım sağlayacak ..." [289]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E3	"... yani burada x eleman reel sayı olduğunu vermiş, x yerine reel sayılar içinde ne yazarsam yazayım sağlıyor çözüm kümesi reel sayılar." [291]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E3	" x yerine eksi biri yazınca denklemi sağlaması lazım [...] yani eşitliğin her iki tarafını da aynı şeyi bulmam lazım." [674]	04.03.2022 Bireysel görüşme
OG-E2	"... çözüm kümesi de reel sayılar yani [...] hani yerine her şeyi yazdığımızda, sağlıyor ..." [36-GD2]	10.03.2022 GD2
OG-E2	"Beş eşittir beş olduğu için ıı [...] buradaki u yerine ne yazarsak yazalım doğru olacağı için ve bana da zaten u 'nun reel sayılarda olduğunu söylediği için, o yüzden de u için reel sayılar çözüm kümesi." [107-GD2]	10.03.2022 GD2
OG-E2	"Böyle bir şey doğru değil, böyle bir ifade doğru değil [$28 = 15 i$ göstererek] [...] O yüzden bir çelişki $\langle -4(x - 7) = x + 5(3 - x), x \in \mathbb{R} \rangle$ cebirsel ifadesini kastederek [# sembolünü yazarak] o yüzden çözüm kümesi de boş küme." [416-GD5]	14.03.2022 GD5
OG-E2	"Burası $(-\frac{3}{2}, \infty)$ aralığını sayı doğrusunda göstererek] yani şu ifadede $[-4u - 6 \leq 22$ ifadesini göstererek] onu yerine yazdığımızda bunu doğru yapan değerler." [357-GD8]	16.03.2022 GD8

OG-E2	“... iki denklemin [$x - 2y = 4 \wedge y + 2x = 8, x, y \in \mathbb{R}$] denklemlerini kastederek] ortak çözümünü ve ııı [...] sıralı ikili olarak ifade etmemiz gerekiyor. Yani çözüm kümesi eşittir dörde sıfır [$\text{Ç. } K = \{(4,0)\}$] ifadesini yazarak.” [145-GD9]	16.03.2022 GD9
OG-E2	“...şöyle düşünüyorum, mesela orada bir doğru bulduk ya, o doğrunun hepsi [...] yani sonsuz tane nokta var ve reel sayılardayız hepsini yazamayız [...] o doğru aslında direkt çözüm kümesi.” [157-GD9]	16.03.2022 GD9
OG-E2	“Denklemin analitik düzlemdeki çözüm kümesi. [236-GD22] İkisini de doğru yapan değerler [...] iki denklemi yani.” [242-GD22]	21.04.2022 GD22
OG-E2	“Açık önermeyi sağlayan, doğru yapan noktalar” [250-GD22]	21.04.2022 GD22
OG-E2	“Denklemin (eşitsizliğin) çözüm kümesi değişkenin yerine yazıldığında açık önermeyi doğru bir önerme yapan ifadelere denir.” (Şekil 103’teki sözel gerçekleşmesi)	28.04.2022 GDS

Bununla birlikte katılımcının çözüm kümesi ya da çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken söyleminin giderek nesneleştiği, Elif’in 26 farklı görev durumunun bitiminde Şekil 103’teki gibi yaptığı sözel gerçekleştirmelerinde de gözlemlenmiştir:

Denklemin çözüm kümesi değişkenin yerine yazıldığında açık önermeyi doğru bir önerme yapan ifadelere denir. İlla bir elemanı olmak zorunda değil hiç elemanı olmayabilir ya da evrensel küme olabilir.
Eşitsizliğin çözüm kümesi: yine değişkenin yerine yazıldığında açık önermeyi doğru bir önerme yapan ifadelere denir. yine açık boş, birelemlili, sonsuz elemlili olabilir.

Şekil 103. Elif’in odak grup görüşmeleri bitiminde çözüm kümesi ya da çözüm kümesinin elemanları hakkındaki söylemlerine ait sözel gerçekleşmesi

Elif’in denklem ve eşitsizliklerin tanımlarına ve çözümlerine yönelik oluşturduğu bu farkındalığı, onun ritüel rutinlerindeki “görev” anlayışını da değiştirmiştir. Katılımcının bireysel görüşmede birinci dereceden tek değişkenli denklemlerin çözümlerini belirlerken “ x = reel sayı biçiminde bir sonuç elde etmek” amacıyla prosedürünü uygularken (BG-E4 kodlu ritüel rutini), odak grup görüşmelerindeki söylemleri (örneğin, [36-GD2], [357-GD8] ve [250-GD22]) “denklemin (açık önermeyi) sağlayan reel sayıların kümesini belirlemek” amacıyla prosedürünü uyguladığını (BG-E4 kodlu ritüel rutini) göstermiştir. Bununla birlikte araştırmacının yürüttüğü derslerde denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözümlerini ve çözüm kümelerinin gösterimlerini dikkatle takip ettiği gözlemlenen Elif’in,

BG-E8 kodlu keşif rutininde de anlatılarının zenginleşmesi yoluyla bir gelişim olmuştur. Bireysel görüşmede hem cebirsel hem de grafiksel gerçekleştirmelerle denklem sistemlerini kanonik bir şekilde çözen katılımcı (Şekil 12) denklem sisteminin çözümünü “sıralı ikili” biçiminde göstermede güçlük yaşamış (Tablo 18’de gerçekleşme 6) ve yok etme metodunu eşitsizlik sistemlerinin çözümlerini belirlerken de kullanmıştır (Tablo 19). Fakat Elif’in hem odak grup görüşmelerinde hem de araştırmacının yürüttüğü derslerde söylemsel iletişime olan katılımları aracılığıyla söylemini zenginleştirdiği gözlemlenmiştir. Katılımcı, evrensel kümesi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olan denklem ve eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesinin elemanlarının birer sıralı ikili belirttiğine ve analitik düzlemde gösterimlerinin bir noktaya karşılık geldiğine dair farkındalığını odak grup görüşmelerindeki söylemlerinde sıklıkla dile getirmiş (örneğin, Tablo 27’deki prosedürü; [122-GD9], [145-GD9], [123-GD11] ve [38-40-42-GD22]’deki söylemleri) ve söylemini nesneleştirdiğini ortaya koymuştur. Bu durum Elif’in denklem sistemlerini çözme prosedürlerini içeren rutinlerindeki “görev” anlayışının değişmesini de sağlamıştır. Bireysel görüşmede katılımcının söylemleri (örneğin, [333]) “yok etme metodunu kullanarak değişkenler için (x ve y gibi) birer reel sayı karşılığı bulmak” amacıyla prosedürünü uyguladığını (BG-E7 kodlu rutini) gösterirken, Elif’in odak grup görüşmesindeki söylemleri (örneğin, [122-GD9], [145-GD9], [123-GD11] ve [38-40-42-GD22]) “denklem sistemini doğrulayan elemanları (sıralı ikililer) belirlemek” amacıyla prosedürünü uyguladığını (OG-E3 kodlu rutini) göstermiştir. Elif’in bireysel görüşmedeki BG-E8 kodlu keşif rutin prosedüründe yer alan anlatılarıyla, sözü edilen bu anlatılarının zenginleştiğini ve giderek söyleminin nesneleştirdiğini gösteren odak grup görüşmelerindeki anlatıları (OG-E3 ve OG-E4 kodlu rutin prosedürleri) Tablo 73’te okuyucuya sunulmaktadır.

Tablo 73

Elif'in Denklem ve Eşitsizlik Sistemlerine Yönelik Anlatılarının Zenginleştiğini Gösteren Bulguları

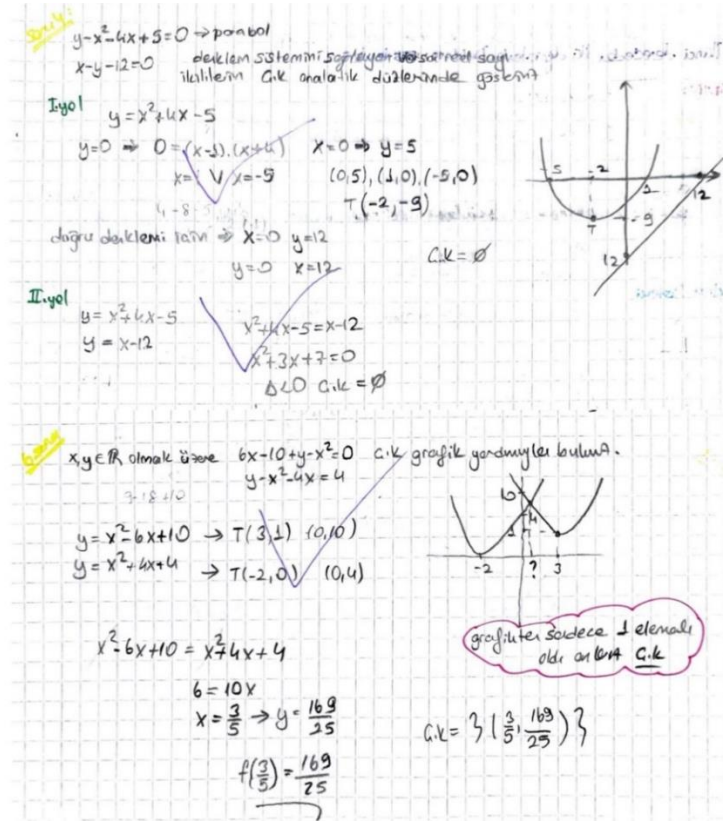
Rutin kodu	Katılımcının anlatıları	Zamanı
BG-E8	“Çünkü şey [yazmaya başlıyor] koordinat sisteminde [koordinat sistemi çizerek] x ve y ikilisini yazmaya çalışıyorum [...] doğruyu çizmeye çalışıyorum çünkü [...] o yüzden de x için sıfır verdiğimiz zaman burada y eşittir eksi iki gelir [kağıdındaki çözüm üzerinden konuşuyor] yani sıfıra eksi iki olması lazım $(0, -2)$ ifadesini yazıyor o yüzden eksi iki [y koordinatında işaretliyor] aynı şekilde y 'ye sıfır verdiğimiz zamanda x 'in altı olması lazım [koordinat düzleminde 6 sayısını temsilen işaretleme yapıyor].” [531]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E8	“Çünkü ııı eksenleri kestiği noktayı bilirim ($A: hı hum$) doğruyu çizebilirim.” [537]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E8	“Çünkü bu doğru bir denklem [...] pardon bu denklem [kalemiyle sorudaki denklemleri göstererek] bir doğru belirtiyor ve bu doğruların arasında [...] yani [...] denklem çözüm kümesini istiyor benden [“çözüm kümesinin” ifadesinin altını çizerek] o yüzden bu doğruların arasında kalan da ikisini de sağlaması lazım [...] bu yüzden yapıyorum yani bu denklem bir doğru belirtiyor.” [539]	04.03.2022 Bireysel görüşme
BG-E8	“İşte doğruyu çizmişim $((0, -2)$ ve $(6,0)$ noktalarından geçen doğruyu çizerek] burada da aynı şekilde x yerine sıfır verip y 'yi bulduğum zaman üç gelmiş [işaretleyerek] aynı şeyi diğeri içinde yaptığımda böyle buldum $(-9,0)$ ve $(0,3)$ noktalarından geçen doğruyu çizerek] ııı ve bu ikisi arasında kalan [...] bundan sonrasını bulamadım sanırım [çözümünü okuyor] eğimleri aynı, paraleldir, bu yüzden çözüm kümesi boş demişim [...] ııı [...] çözüm kümesi [...] yani bunlar hah tamam [nasıl yaptığını hatırlayarak] bu denklem sisteminin, doğruların aslında bir yerde çakışması lazım ki ııı belli bir çözüm kümesi olsun ($A: Hı hı$) ama bunlar [çizdiği doğrulara işaret ederek] belli bir yerde çakışmıyor çünkü birbirine paralel o yüzden bunun bir çözüm kümesi yok, boş.” [547]	04.03.2022 Bireysel görüşme
OG-E3	“...denklem sisteminin ortak bir çözüm kümesi olması gerekiyor. ... iki denklemin [$x - 2y = 4 \wedge y + 2x = 8, x, y \in \mathbb{R}$] denklemlerini kastederek] ortak çözümünü ve ııı [...] sıralı ikili olarak ifade etmemiz gerekiyor. Yani çözüm kümesi eşittir dörde sıfır [$\mathcal{C}. K = \{(4,0)\}$] ifadesini yazarak].” [12,145-GD9]	16.03.2022 GD9
OG-E3	“...orada bir doğru bulduk ya, o doğrunun hepsi [...] yani sonsuz tane nokta var ve reel sayılardayız hepsini yazamayız [...] o doğru aslında direkt çözüm kümesi.” [157-GD9]	16.03.2022 GD9

OG-E3	<“ $x - 2y = 4$ ” denkleminin çözüm kümesi hakkında konuşurken> “... bunun çözüm kümesi [...] yani hani x ve y reel sayılar ya [...] bir sayı sonsuz tane ve sonsuz tane nokta var. En başta x ’e sıfır verip y ’ yi bulurum, bunu yapmamın sebebi aslında eksenleri kestiği noktaları bulup [...] o doğrunun geçtiği yeri göstermek” [66-81-GD9]	16.03.2022 GD9
OG-E4	<“ $y < 8 - 2x$, $x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğinin çözüm kümesi hakkında konuşurken> “Mesela biz burada hani [...] Şule en başta dedi ya bunu bir doğru olarak kabul edelim, bir denklem olarak [...] hani eşitlik olması gerekiyor aslında [...] eşitliğe göre çözdük bir doğru çizdik. Orayı sağlamamasının nedeni orada küçük-eşittir gibi bir ifade yok yani eşitlik olmadığı için o bölgeyi [eliyle havada doğruyu çiziyor] almıyoruz [...] o doğruyu sağlamıyor yani.” [78-GD10]	24.03.2022 GD10
OG-E4	<(0,8) sıralı ikilisinin $8 - 2x - y > 0$ doğrulamadığını belirtirken> “Doğrunun üzerinde o nokta, o yüzden (eşitsizliği) sağlamıyor” [123-GD10]	24.03.2022 GD10
OG-E3	<Tahtada prosedürünü uygulamada güçlük yaşayan arkadaşı Zehra’ya önerilerde bulunurken> “Şimdi burada şöyle olması gerekiyor bence [...] burada x ’leri buldun ya ... bunlar bir sıralı ikili olmak zorunda [...] o yüzden de x ’i buldun. Sıralı ikili olacağından x ’i yerine yazıp y ’yi bulman lazım. x, y sıralı ikilileri olacak çözüm kümesi.” [36,38,40,42-GD22]	21.04.2022 GD22
OG-E3	“Denklemin analitik düzlemdeki çözüm kümesi.” [236-GD22] İkisini de doğru yapan değerler [...] iki denklemi yani.” [242-GD22]	21.04.2022 GD22

Elif’in odak grup görüşmelerinde birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizlik kavramlarının farklı gerçekleştirmeleri arasındaki geçişleri matematiksel anlatılar üreterek kanonik bir şekilde yaptığı gözlemlenen OG-E4 kodlu keşif rutininin uygulanabilirliğinde de artış olmuştur. Katılımcı farklı bir bağlam olan ikinci dereceden tek değişkenli bağıntıları, eşitsizlik ve eşitsizlik sistemlerini çözerken kullandığı OG-E6 ve OG-E8 kodlu rutinlerinde de “farklı gerçekleştirmeler arasındaki geçişleri kanonik bir şekilde yapabildiği” prosedürleri uygulayabildiğini ortaya koymuştur. Katılımcı OG-E6 ve OG-E8 kodlu rutinlerinde de OG-E3 ve OG-E4 kodlu rutinlerinde olduğu gibi kavramların cebirsel ve grafiksel gerçekleştirmeleri arasında kurduğu ilişkileri matematiksel anlatılarla ifade etmiştir (örneğin, Şekil 35’teki gerçekleştirme ağacı).

Bununla birlikte bireysel görüşmede eşitsizlik sistemlerinin çözümlerini belirlerken kullandığı rutin (BG-E7 kodlu) prosedürünün (Tablo 19) kanonik olmadığına dair farkındalığını “Ama sonra ikisi de bir eşitsizlik sistemi ve bence koordinat sisteminde göstermem gerektiğini düşündüm ... [90-GD11]” şeklindeki kişisel söylemiyle ifade eden Elif, odak grup görüşmelerinde eşitsizlik sistemlerinin çözümlerini belirlerken kullandığı rutininde (OG-E4 kodlu rutini) kanonik prosedürler (Şekil 28) uygulamıştır. Böylece katılımcının bireysel görüşmede nesneleştirme ve esneklik açısından katılımının ritüel, bağlılık-tutarlılık ve uygulanabilirlik açısından katılımının hibrit olduğu BG-E7 kodlu ritüel rutininin, odak grup görüşmelerinde bahsi geçen kriterlerin tamamı bağlamında keşifsel bir katılım sergilediği OG-E3 kodlu keşif rutinine dönüştüğü gözlemlenmiştir.

Katılımcının Tablo 73’te yer alan gelişiminde, Elif’in odak grup görüşmeleriyle araştırmacı tarafından eş zamanlı yürütülen dersleri dikkatle takip etmesinin ve farklı gerçekleştirmelerle uygulanan çözüm prosedürlerine dair notları özenle tutmasının etkisinin de olabileceği düşünülmüştür. Katılımcının araştırmacının yürüttüğü derslerde aldığı notlarına yönelik bir örneğe ise Şekil 104’te yer verilmiştir.



Şekil 104. Elif'in ders notlarına yönelik bir örnek

Bununla birlikte bulgularda, Elif'in ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken kullandığı rutini de ritüelden keşfe dönüşmeye başlamasıyla bir rutin gelişimi örneği olmuştur. Katılımcı bireysel görüşmedeki BG-E10 kodlu ritüel rutininde prosedürünü uygularken çoğunlukla “Nasıl ilerlerim?” sorusunun yanıtını aramış ve süreç odaklı söylemlerde (örneğin, Tablo 17’de Oturum 4- Görev durumu 4 için uyguladığı prosedürü) bulunmuştur. Odak grup görüşmelerinde ise katılımcı; ikinci dereceden denklemlerin çözümleri hakkında konuşurken, rutin amacının “denklemin çözümlerini bulmak” olduğunu söylemlerinde belirtmiş (örneğin, [117-GD23]) ve ikinci dereceden cebirsel ifadeleri (polinomları) sıfıra eşitleyerek “kök” kavramının matematiksel tanımına uygun bir şekilde prosedürünü (Şekil 27 ve Şekil 29) uygulamıştır. Elif'in bu süreçteki söylemleri (örneğin, 256, 258, 260-GD15 ve 117-GD23)], “Nasıl ilerlerim?” sorusundan ziyade “Neye ulaşmak/neyi başarmak istiyorum?” sorusuna yanıt arama amaçlı olmuş ve katılımcı prosedürünü uygularken anlatı üretmeyi de (OG-E5 kodlu rutini) amaçlamıştır. Böylece

katılımcının söylemleri giderek daha nesneleşmiş bir hal almaya başlamış ve söyleme katılımı ise ritüel katılımdan hibrit katılıma doğru evrilmiştir. Ayrıca ikinci dereceden denklemlerin çözümlerini bireysel görüşmede çarpanlarına ayırma metodu ile belirleyen Elif, odak grup görüşmelerinde denklemleri sıfıra eşitleyen x reel sayılarını (çözümleri) çarpanlarına ayırma yöntemiyle, $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülü aracılığıyla ya da tam kare ifadelere dönüştürerek üç farklı yoldan belirleyebilmiştir (Şekil 27 ve Şekil 29). Böylece katılımcının bireysel görüşmede esneklik bağlamında ritüel olan katılımı odak grup görüşmelerinde hibrit katılıma doğru evrilmiştir. Elif'in prosedürünü birden farklı yolla kanonik bir şekilde uygulayabilmesinde, GD13'ten önce araştırmacının yürüttüğü derslerde yer alan denklem ve eşitsizliklerin ikinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizlikleri içermesi ve birden farklı yol ve gerçekleştirmelerle çözümlerin belirlenmesinin etkili olduğu düşünülmektedir.

Tablo 74'te Elif'in değişimin gözlemlendiği rutinlerine ve bu değişimin nasıl gerçekleştiğine dair bulguların bir özeti yer almaktadır.

Tablo 74

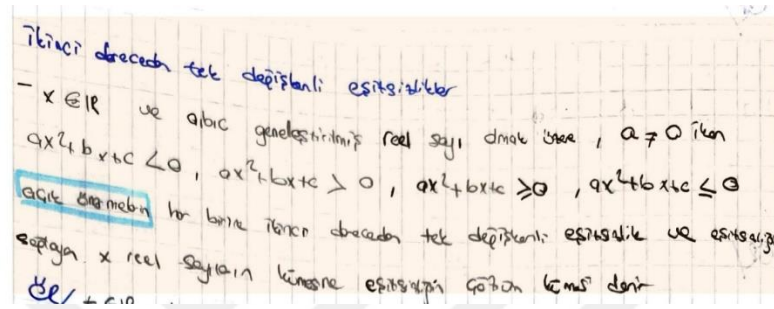
Elif'in Gelişim Gözlemlenen Rutinleri

Katılımcının gelişim gözlemlenen bireysel görüşmedeki rutini	Katılımcının gelişim gözlemlenen bireysel görüşmedeki rutininin odak grup görüşmelerindeki kodu	Gelişimin hangi kriter bağlamında olduğu	Gelişimin ilgili kriter bağlamında nasıl gerçekleştiği
Bireysel görüşmedeki denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken kullandığı BG-E1 kodlu ritüel rutini ve ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken kullandığı BG-E9 kodlu ritüel rutini	Odak grup görüşmelerinde denklem ve eşitsizlikleri tanımlarken kullandığı OG-E1 kodlu keşif rutini	Söylemin nesneleştirilmesi	Katılımcının süreç odaklı söylemlerinin matematiksel nesneler hakkında anlatılar ürettiği sonuç odaklı söylemlere evrilmesinden dolayı rutinin ritüelden keşfe dönüşmesi ve söyleme katılım biçiminde hibrit katılımdan keşifsel bir katılıma geçişin olması
		Gerekçelendirme	Katılımcının matematiksel nesneler hakkında anlatılar üreterek argümanlar sunmaya başlamasından dolayı bu rutiniyle söyleme katılım biçiminde hibrit katılımdan keşifsel bir katılıma geçişin olması
		Katılımcının yetkinliği	Katılımcının prosedüründe bağımsız kararlar almaya başlamasından dolayı söyleme katılım biçiminde ritüel katılımdan keşifsel bir katılıma geçişin olması
		Uygulanabilirlik	Katılımcının rutinini farklı görev durumlarında ve farklı çalışma ortamlarında da kanonik bir şekilde uygulamaya başlamasından dolayı hibrit katılımdan keşifsel bir katılıma geçişin olması
Bireysel görüşmede çözüm kümesi ya da çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken kullandığı BG-E3 kodlu keşif rutini	Odak grup görüşmelerinde çözüm kümesi ya da çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken kullandığı OG-E2 kodlu keşif rutini	Söylemin nesneleştirilmesi	Katılımcının kavramların birer açık önerme olduğuna dair farkındalığının oluşmasından dolayı anlatılarının zenginleşmesi
Bireysel görüşmede birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizlik sistemlerini çözerken kullandığı BG-E7 ritüel kodlu rutini	Odak grup görüşmelerinde birinci dereceden denklem sistemlerini çözerken kullandığı OG-E3 kodlu keşif rutini	Söylemin nesneleştirilmesi	Katılımcının süreç odaklı söylemlerinin matematiksel nesneler hakkında anlatılar ürettiği sonuç odaklı söylemlere evrilmesinden dolayı rutinin ritüelden keşfe dönüşmesi ve söyleme katılım biçiminde ritüelden keşifsel katılıma geçişin olması

		Esneklik	Katılımcının çözüm kümesinin elemanlarının birer sıralı ikili olduğuna dair farkındalığının farklı gerçekleştirmeler arasındaki geçişleri ve birden farklı yolla kanonik çözümleri yapabilmesini sağlaması ve bundan dolayı bu rutiniyle söyleme katılım biçiminde ritüel katılımdan keşifsel katılıma geçişin olması
		Bağlılık-tutarlılık	Katılımcının çözüm kümesinin elemanlarının birer sıralı ikili olduğuna dair farkındalığından dolayı prosedür-sonuç ilişkisini kurması ve böylece bu rutiniyle söyleme katılım biçiminde hibrit katılımdan keşifsel katılıma geçişin olması
Bireysel görüşmede çözüm kümesini analitik düzlemde grafik çizme yoluyla belirlemesi istendiğinde, denklem ve eşitsizlik sistemlerini çözerken kullandığı BG-E8 kodlu keşif rutini	Odak grup görüşmelerinde birinci dereceden denklem sistemlerini çözerken kullandığı OG-E3 kodlu keşif rutini ve birinci dereceden iki değişkenli eşitsizlikleri ve eşitsizlik sistemlerini çözerken kullandığı OG-E4 kodlu keşif rutini	Söylemin nesneleştirilmesi	Katılımcının matematiksel nesneleri farklı gerçekleştirmeleri arasında geçişleri kanonik bir şekilde yapabilmesinden dolayı anlatılarının zenginleşmesi
		Uygulanabilirlik	Katılımcının “farklı gerçekleştirmeler arasındaki geçişleri kanonik bir şekilde yapabilme” prosedürünü farklı bağlamlarda da uygulayabilmesi
Bireysel görüşmede ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken kullandığı BG-E10 kodlu ritüel rutini	Odak grup görüşmelerinde ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken kullandığı OG-E5 kodlu keşif rutini	Söylemin nesneleştirilmesi	Katılımcının prosedüründe “Nasıl ilerilerim?” sorusundan ziyade “Neyi başarmak istiyorum?” sorusuna yanıt aramasından dolayı matematiksel nesneler hakkında anlatılar üretmesi ve bu rutinin ritüelden keşfe dönüşmesiyle katılımcının söyleme katılımında ritüel katılımdan hibrit bir katılıma geçişin olması
		Esneklik	Katılımcının çözümleri belirlerken prosedürünü birden farklı yolla ve anlatı üretmeyi amaçlayarak uygulamasından dolayı bu rutiniyle söyleme katılım biçiminde ritüelden keşifsel katılıma geçişin olması

Zehra'nın gelişim gösteren rutinleri ele alındığında ise Elif gibi Zehra'nın da denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutini ritüelden keşfe dönüşmüştür. Bireysel görüşmede cebirsel ifadeleri birer sembol dizisi olarak gören ve “En az bir bilinmeyen ... içeren ve bir çözüm kümesi olan ... cebirsel ifadelerdir. [2]”, “... bunların [*eşitsizlikleri kastederek*] da çözüm kümesi olması gerekiyor. Bunlar işte denklem gibi değil çünkü bir şeye eşit değiller [...] bir tane değerleri olmuyor. [6]” ve “... eşitsizlikler ... bir aralık şeklinde yazılıyor ... ama denklemin sonucu oluyor ... [18]” gibi süreç odaklı söylemlerde bulunan Zehra'nın odak grup görüşmelerinde kavramların birer açık önerme olduğunu fark etmesiyle söylemleri değişmiştir. Zehra'nın denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutinindeki gelişimde, katılımcının diğer katılımcıların söylemlerinden yaptığı mantıksal çıkarımlar etkili olmuştur. Öncelikle bireysel görüşmede “bilinmeyen” ve “değişken” sözcüklerini birbiri yerine kullanan Zehra odak grup görüşmelerinde yaptığı tanımlarda, evrensel kümenin temsil ettiği harf gösterimleri için sadece “değişken” terimini kullanmış ve bu duruma araştırmacının yürüttüğü derslerdeki söylemsel iletişimlerin etkisinin olduğu gözlemlenmiştir. Bununla birlikte Zehra, en az bir değişken ve eşitlik içeren cebirsel ifadeleri denklem, en az bir değişken ve “ $<, >, \leq, \geq$ ” eşitsizlik sembollerinden birini içeren ifadeleri de eşitsizlik olarak tanımlamaya odak grup görüşmelerinde de devam etmiş ve bireysel görüşmeden farklı olarak çözüm kümeleri üzerinde yaptığı tanımlamanın (örneğin, [6] ve [18]) uygun olmadığının farkına varmıştır. GD3'te “Birinde eşittir işareti var birinde büyüktür işareti var [...] yani büyüktür olduğu için 111 mesela bunda sonuç buluyoruz yukarıdaki $[11 + 2(x - 3) = 7, x \in \mathbb{R}]$ ifadesini *kastederek*] tek sonuç buluyoruz aşağıdaki $[11 + 2(y - 3) > 7, y \in \mathbb{R}]$ ifadesini *kastederek*] bir aralık ya da çözüm kümesi buluyoruz [462-GD3]” biçiminde bireysel görüşmedekine benzer şekilde tanımlama yapsa da GD2'de yer alan “ $11 + 2(u - 3) = 2u + 5, u \in \mathbb{R}$ ” denklemin sonsuz çözüme sahip olduğuna dair bir önceki görev durumunda gerçekleşen söylemsel iletişimleri hatırlamış (örneğin, [475-GD3]) ve kavramların çözüm kümesindeki eleman sayısından dolayı değil de içerdikleri işaretlerden dolayı farklı isimlendirildiğine dair çıkarım (örneğin, [479-GD3]) yapmıştır. Katılımcı diğer katılımcılarla gerçekleşen söylemsel iletişim ve yaptığı mantıksal çıkarımları sonucunda, denklem ve eşitsizlikleri “Denklem 111 bir değişken bir eşitsizlik içeren ifade, eşitsizlik yine bir değişken ve bir eşitsizlik içeren yani bu sefer büyüktür büyük-eşittir küçüktür küçük-eşittir gibi ifadeler içeren ifadelerdir ve bunların arasındaki fark da denklem de arada eşitlik var mutlaka. Ve yine eşitsizlikte her ikisinde değişken var eşitsizlikte de o büyüktür, büyük-eşittir, küçüktür, küçük-eşittir işaretlerinden bir tanesi var. [519-GD3]” şeklindeki anlatılarıyla tanımlamıştır. Bu

süreçte kavramların henüz açık önerme olduğuna dair farkındalığı oluşmadan da Zehra'nın söylemlerinin nesneleşmeye başladığı dikkat çekmiştir. Katılımcının GD5'te " $-4(x - 7) = x + 5(3 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ " cebirsel ifadesine yönelik Tablo 63'te detaylı bir şekilde sunulan söylemsel iletişimleri ise onun kavramların birer açık önerme olduğunu fark ettiği iletişimsel süreçleri olmuştur. Katılımcının araştırmacının yürüttüğü derslerdeki notları incelendiğinde ise GD5'ten sonraki derslerde yapılan "ikinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklere" ait tanımda "açık önerme" terimini Şekil 105'teki gibi dörtgensel bir şeklin içine alarak vurguladığı görülmüştür.



Şekil 105. Zehra'nın "açık önerme" terimini vurguladığı ders notları

GD5'ten sonra kavramların birer açık önerme olduğunu söylemlerinde belirten (örneğin, [104-GD10], [82-GD15] ve [247-GD22]) Zehra'nın odak grup görüşmeleri sonunda Şekil 90'daki gibi yaptığı tanımda yer alan sözel gerçekleştirmeleri de katılımcının söyleminin nesneleştiğini göstermiştir. Zehra'nın denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken kullandığı rutinindeki gelişimi gösteren katılımcının söylemlerine ise Tablo 75'te yer verilmiştir.

Tablo 75

Zehra'nın Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarını Tanımlama Rutine Yönelik Söylemleri

Rutin kodu	Katılımcının anlatıları	Zamanı
BG-Z1	"En az bir bilinmeyen ve [...] bir tane bilinmeyen içeren ve bir çözüm kümesi olan olduğunu düşünüyorum ben yani [...] çözüm kümesi olan şey cebirsel ifadelerdir." [2]	07.03.2022 Bireysel görüşme
BG-Z1	"Eşitsizlik de yine bir tane bilinmeyen mutlaka olması gerekiyor [...] sabit terimin de olması gerekiyor mu [...] emin değilim olabilir de [gülerek]." [4]	07.03.2022 Bireysel görüşme
BG-Z1	"İyi yine bu şekilde bunlar [...] bunların da çözüm kümesi olması gerekiyor. Bunlar işte denklem gibi değil çünkü bir şeye eşit değiller [...] bir tane değerleri olmuyor." [6]	07.03.2022 Bireysel görüşme
BG-Z1	"... eşitsizlikler bir çözüm kümesi şeklinde veya bir aralık şeklinde yazılıyor ııı burada da gösterdiğim gibi zaten [$x \geq 1$ ifadesini göstererek] ama denklemin sonucu oluyor [...] tek belirli	07.03.2022 Bireysel görüşme

	bir sonucu oluyor, eşitsizliğin sonucu farklı, fazla olabiliyor yani bir aralık şeklinde.” [18]	
BG-Z1	“... çözüm kümesine bakmadım ama eşitsizlik olması için sonuçta eşitsizlikte eşittir kavramı yerine büyük-eşittir, büyüktür, küçüktür, küçük-eşittir kullanıyoruz.” [26]	07.03.2022 Bireysel görüşme
BG-Z1	“Denklem olduğunda yine [...] bir tane bilinmeyeni var ve ... o yüzden denklem olduğuna karar verdim yani” [41]	07.03.2022 Bireysel görüşme
BG-Z1	“İki şeyden dolayı bu işaret şey burada eşittir ifadesi var [$-3x + \sqrt{7} = 0,5x - 4$ ” <i>cebirsal ifadesini göstererek</i>], eşittir ifadesi olunca denklem oluyor burada [$x - 9 < 8 + 2x$ ” <i>cebirsal ifadesini göstererek</i>] küçüktür işareti var.” [49]	07.03.2022 Bireysel görüşme
BG-Z1	“Denklem bir bilinmeyeni bulunacak çözüm kümesi olması gerekiyordu.” [351]	07.03.2022 Bireysel görüşme
OG-Z1	“Birinde eşittir işareti var birinde büyüktür işareti var [...] yani büyüktür olduğu için ııı mesela bunda sonuç buluyoruz yukarıdaki [$11 + 2(x - 3) = 7, x \in \mathbb{R}$ ” <i>ifadesini kastederek</i>] tek sonuç buluyoruz aşağıdaki [$11 + 2(y - 3) > 7, y \in \mathbb{R}$ ” <i>ifadesini kastederek</i>] bir aralık ya da çözüm kümesi buluyoruz.” [462-GD3]	11.03.2022 GD3
OG-Z1	“Denklem ııı bir değişken bir eşitsizlik içeren ifade, eşitsizlik yine bir değişken ve bir eşitsizlik içeren yani bu sefer büyüktür büyük-eşittir küçüktür küçük-eşittir gibi ifadeler içeren ifadelerdir ve bunların arasındaki fark da denklem de arada eşitlik var mutlaka. Ve yine eşitsizlikte her ikisinde değişken var eşitsizlikte de o büyüktür, büyük-eşittir, küçüktür, küçük-eşittir işaretlerinden bir tanesi var.” [519-GD3]	11.03.2022 GD3
OG-Z1	<“ $-4(x - 7) = x + 5(3 - x), x \in \mathbb{R}$ ” <i>cebirsal ifadesi hakkında konuşurken</i> > “Çünkü denklem şartı eşitlik bulundurması ve değişkeni olmasıydı. Burada eşitlik bulunuyor ve değişkeni de var, o yüzden denklem.” [23-GD5]	14.03.2022 GD5
OG-Z1	<Araştırmacının, “Evet bu açık önerme [$y = 8 - 2x$] ile bu açık önermeyi [$y < 8 - 2x$] kıyaslayınız, aradaki fark nedir?” sorusunu yanıtlarken> “İşareti [...] yani birinde eşittir var birinde küçüktür, yani biri denklem biri eşitsizlik.” [104-GD10]	24.03.2022 GD10
OG-Z1	<Araştırmacının “Denklem nedir?” sorusunu yanıtlarken> “Açık önerme.” [247-GD22]	21.04.2022 GD22
OG-Z1	“Denklem: En az bir değişken (x, y, z vb.) ve eşitlik içeren açık önermeler Eşitsizlik: En az bir değişken (x, y, z vb.) ve bir eşitsizlik içeren ($>, \geq, <, \leq$) açık önermeler” (Şekil 90’daki sözel gerçekleşmesi)	28.04.2022 GDS

Burada katılımcı, söylemlerinin giderek nesneleşmesi neticesinde bir cebirsel ifadenin denklem ya da eşitsizlik belirttiğini gerekçelendirmedi, argümanlarını sembol odaklı söylemlerden (örneğin, [2], [4], [6], [18], [26] ve [41]) ziyade giderek matematiksel anlatılar ürettiği söylemleriyle (örneğin, [519-GD3], [23-GD5] ve Şekil 90) sunmuştur. Böylece

katılımcının gerekçelendirmeleri de giderek nesneleşmiş ve söyleme katılımı daha keşifsel bir katılıma doğru evrilmiştir.

Zehra'nın denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme ve aralarındaki farkın içerdikleri bağıntıdan kaynaklı olduğunu fark etmesi üzerine bireysel görüşmede “Bence var orada da söyledim zaten çünkü bunların çözüm metotları vesaire benzer aynı şekilde çözüyoruz denklemlerini falan o yüzden ıı bir ilişki var aralarında benzerlik var yani. [8]” şeklinde görsel araçlarla da onayladığı (örneğin, Şekil 79) söylemlerinin yerini Tablo 75'teki OG-Z1 kodlu rutinine ait matematiksel nesneler hakkındaki anlatıları almıştır. Bununla birlikte katılımcının denklem ve eşitsizlikler hakkında konuşurken giderek kendinden daha emin bir şekilde söylemlerde bulunduğu da dikkat çekmiştir. Bu durumun bir örneği Zehra'nın “her denklem bir eşitsizliktir” şeklinde söylemde bulunan arkadaşı Burcu'ya bulunduğu önerilerde görülmüştür:

22. B: Evet çünkü şöyle, ıı denklemini [...] denklemini yazdığımızda mesela bir tane denklem sağlıyor [...] mesela o sıfır olsun [...] ama eşitsizlik yazdığımızda mesela eksi birle bir arasında oluyor ve zaten sıfırı sağlıyor *[zihninden örnek vererek açıklama yapıyor]* aslında her eşitsizlik bir denklem oluyor.

23. A: Hala bu fikir de misin?

24. B: Evet hala bu fikirdelim ve eşitsizlik denklemden daha fazla bir alan kapsıyor.

25. A: Katılıyor musunuz bu fikre?

26. Z: Hayır!

...

29. B: Ben o kısmı savunuyorum şu an. Çünkü dediğim gibi eşitsizlikte bir aralık belirtiyoruz ve o mesela sıfır dersem, *[arkadaşlarına dönüyor ve parmağıyla onları gösteriyor]* aslında siz de eminim böyle düşünüyorsunuz. Çünkü köklerini neden buluyoruz, denklemini sağlayan diye [...] sıfır bul- ayy konuşamadım [...] denklem olarak düşünseydik eğer köklerini zaten buluyorduk, bunda da bulmak zorundayız ki aralığını belirleyelim. O yüzden bence her eşitsizlik bir denklem oluyor *[ifade etmekte güçlük yaşasa da arkadaşlarına açıklamaya yapıyor]*

30. Z: Her eşitsizlik bir denklem mi? *[Şaşıyor]*

31. B: Ya da her denklem bir eşitsizlik mi oluyor *[gülerek, emin değil]*

...

35. A: Katılıyor musunuz, değilse Burcu'yu olmadığına ikna edin.

36. Z: Şimdi Burcu karşıda ne görüyorsun *[“ $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ ” eşitsizliğini işaret ederek]* ifadeye bak iyi bak, orada şimdi bir de denklem ve eşitsizliğin tanımlarını hatırlayalım. Denklemin tanımında diyor ki en az bir değişken ve bir eşitlik içeren ifade diyor [...] ve eşitlik dediğimiz şey eşittir işareti zaten [...] ve bu eşitsizliğin tanımında da diyor ki bir değişken ve eşitsizlik içeren diyor [...] eşitsizlikte bu dört tane sembolümüz var onlar eşitsizlik zaten-

37. B: Tamam da bak sıfıra eşit diyorsunuz zaten *[$\geq$ sembolündeki eşit durumunu kastederek]* niye diyorsunuz?

...

39. Z: Tamam bak onu düşünmeyelim. Şimdi o eşitliği silsek o da mı bir denklem? *[Burcu'ya sorarak]*

40. B: Tamam da bak o zaman şöyle düşün biz neden bu eşitsizlikte siz direkt köklerini bulacaksınız değil mi, x , x diye ayıracaksınız eksi üçe eksi bir.

41. Z: Evet, evet.

42. B: Sonra x üç gelecek ve x [...] bir gelecek [...] tamam da niye bunları buluyorsunuz?

...

45. Z: Hayır sadece denklemse köklerine bakıyoruz, eşitsizlik çözerken zaten kök bulmakla eşitsizliği çözmek ayrı ifade, hatta yazıyorduk bir kenarda eksi x kare artı dört x eksi üç eşittir sıfır

yazıyorduk bir kenara yazıyorduk, yani buna bir denklem gözüyle bakıp köklerini bulup [...] kritik noktaları belirliyorduk.

...

49. B: Bilmiyorum hala ikna olmadım çünkü dediğimin doğru olduğunu düşünüyorum, bence yanlış değil, bilmiyorum şu an kafam karıştı.

...

51. Z: Yani senin dediğine göre bütün eşitsizliklerde hep büyük-eşit ya da küçük-eşit olmalı ve büyüktür ve küçüktür olan eşitsizlikler de var.

Bu söylemlerde Zehra'nın kendinden emin bir şekilde söylemlerde ve arkadaşlarına önerilerde bulunması, katılımcının OG-Z1 kodlu rutiniyle söyleme katılırken yetkinliğinde bir gelişim olduğunu ortaya koymuştur. Zehra'nın kavramların birer açık önerme olduğunun farkına varması, onun çözüm kümesi ve çözüm kümesi elemanları hakkında ürettiği anlatılarının zenginleşmesini ve söylemlerinin giderek nesneleşmesini sağlamıştır. Bireysel görüşmede birinci dereceden tek değişkenli denklemlerin tek bir çözümü olduğuna yönelik "... denklemin sonucu oluyor [...] tek belirli bir sonucu oluyor, eşitsizliğin sonucu farklı, fazla olabiliyor yani bir aralık şeklinde. [18]" biçimindeki iletişimini (düşüncesini) katılımcı, GD2'de sonsuz çözüme sahip denklem içeren görev durumuna dair yaşanan iletişimsel süreçler sonrasında değiştirmiştir. Bu durum bireysel görüşmedeki BG-Z3 keşif rutinine dair söylemlerinin kanonik anlatılara yaklaşmasını ve böylece Zehra'nın anlatılarının zenginleşmesini sağlamıştır. Zehra'nın çözüm kümesi ve çözüm kümesi elemanları hakkında konuşurken kullandığı rutin gelişimini gösteren anlatılarını içeren söylemlerine ise Tablo 76'da yer verilmiştir.

Tablo 76

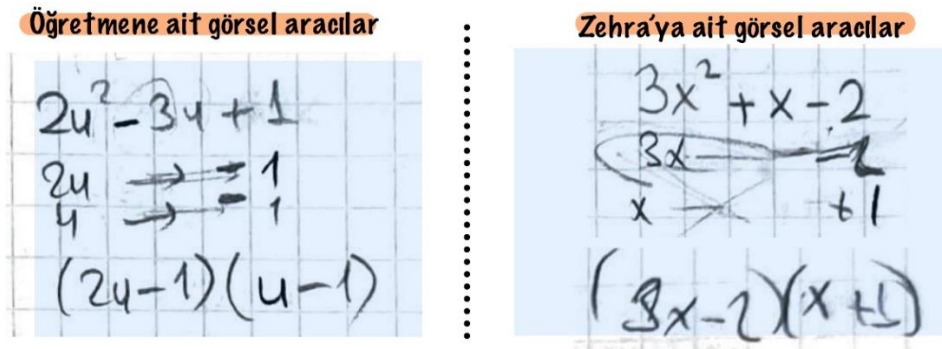
Zehra'nın Çözüm Kümesi ya da Çözüm Kümesinin Elemanları Hakkında Konuşurken Ürettiği Anlatıları

Rutin kodu	Katılımcının anlatıları	Zamanı
BG-Z3	"...çözüm kümesi olması gerekiyor. Bunlar (eşitsizlikler) işte denklem gibi değil çünkü bir şeye eşit değiller [...] bir tane değerleri olmuyor. [6]"	07.03.2022 Bireysel görüşme
BG-Z3	"... eşitsizlikler bir çözüm kümesi şeklinde veya bir aralık şeklinde yazılıyor ıı burada da gösterdiğim gibi zaten $[x \geq 1]$ ifadesini göstererek] ama denklemin sonucu oluyor [...] tek belirli bir sonucu oluyor, eşitsizliğin sonucu farklı, fazla olabiliyor yani bir aralık şeklinde." [18]"	07.03.2022 Bireysel görüşme
BG-Z3	<" $\frac{3x}{x-5} = 3 + \frac{15}{x-5}$ " denkleminin çözüm kümesi hakkında konuşurken> "... tüm x değerlerinde cevabımız doğru çıkar. ... (çözüm kümesi) tüm reel sayılar ... ıı buradaki aralığı $[x \in \mathbb{R}]$ ifadesini kastederek] reel sayılar olarak vermişsiniz o yüzden." [126, 128, 130]"	07.03.2022 Bireysel görüşme
BG-Z3	<" $2x - 3 \geq 7$ " eşitsizliği sağlayan reel sayıların kümesini belirlerken elde ettiği " $[5, \infty)$ " aralığı hakkında konuşurken>	07.03.2022 Bireysel

	“Bu bir aralık [...] bu eşitsizliğin alabileceği reel sayı değerlerini gösteren aralık [...] burada iki x eksi üç yazıyor [$2x - 3 \geq 7$] eşitsizliğini göstererek] buna göre alabileceği yani. Altı bu eşitsizliği sağlar [...] yani x yerine, değişkenimiz yerine altı yazdığımızda eşitsizliğimiz doğru çıkar.” [142, 146]	görüşme
BG-Z3	<“ $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x - 1 \leq 5 - x < 8 + 3x$ ” eşitsizliği için uyguladığı prosedür sonucunda elde ettiği $(-\frac{3}{4}, 3]$ aralığı hakkında konuşurken> “Yani mesela burada değişken yerine üç yazabiliriz ama eksi üç bölü dört yazamayız, o dahil olmayacak, üç yazarsak eğer cevabımız doğru çıkarmış çünkü burada dahil olabileceğini bize söylemiş.” [186]	07.03.2022 Bireysel görüşme
BG-Z3	<“ $x^2 - 3x + 2 = 5x - 10$ ” biçimindeki ikinci dereceden tek değişkenli denklemin çözümüne dair prosedüründe yer alan “ $x = 6$ ” ve “ $x = 2$ ” biçimindeki gerçekleştirmeleri hakkında konuşurken> “Bu denklemin kökleri [...] x ’in alabileceği değerler [...] öyle olması gerekiyor.” [404]	07.03.2022 Bireysel görüşme
OG-Z2	<“ $11 + 2(x - 3) = 7, \forall x \in \mathbb{R}$ ” biçiminde cebirsel ifade hakkında konuşurken> “Ama bu denklem bütün değerleri sağlamaz ki. Yanlış (önerme). Çünkü her x değeri yani bütün reel sayılar denklemini sağlamıyor. Bu yanlış bir önerme.” [61, 77, 85-GD1]	10.03.2022 GD1
OG-Z2	“... bu şekilde buradan da sıfır eşittir sıfır geldi [...] bu da demek oluyor ki tüm reel sayılar için geçerli ... Elif, beş eşittir beş yapmış o da doğru, çünkü çözüm kümesi tüm reel sayılar, bu denklem tüm reel sayıları sağlıyor. Yani bir eşittir bir geldiği zamanda biz buna, ben totoloji yazdım buraya [...] bütün değerleri sağlıyor oluyor.” [119-GD2]	10.03.2022 GD2
OG-Z2	“... eşitliğin iki tarafı da eşit geldiği için çözüm kümesi tüm reel sayılar.” [127-GD2]	10.03.2022 GD2
OG-Z2	<“ $11 + 2(u - 3) = 2u + 4, u \in \mathbb{R}$ ” denkleminin çözüm kümesi hakkında konuşurken> “Evet buna da çelişki deniyor ve sağlamıyor yani ıı herhangi reel sayıyı yazarsak yazalım değişkenimiz yerine hiçbir sonuç eşitliği sağlamıyor, doğrulamıyor. ... Sonuçta denklemin çözümünü yapıyoruz. Denklemin çözümünde de bir eşittir sıfır oluyor. Yani bu doğru bir ifade olmadığı için denkleminde de hiçbir ifade [...] hiçbir hangi reel sayıyı yazarsak yazalım doğru çıkmıyor.” [402, 404, 418-GD2]	10.03.2022 GD2
OG-Z2	“Yani bu demek oluyor ki bütün reel sayılarda [$\mathbb{R}$] ifadesini yazarak] doğru yani. Çünkü bu işaret [$v \leq v$] ifadesini işaret ederek] v büyük ya da eşittir v ’ye demek. Burada da yani doğru [gülümseyerek] çünkü bu sayılar aynı. Buraya v ’ye bir dersek, bir büyük ya da eşittir bir olacak. Bir zaten bire eşit. O yüzden bu ifade [$v \leq v$] ifadesini işaret ediyor] doğru oluyor.” [115, 117-GD4]	11.03.2022 GD4
OG-Z2	<Çözüm kümesinin boş küme hakkında konuşurken> “Çünkü hiçbir x değeri için doğru çıkmıyor sonuç [434-GD5]”	14.03.2022 GD5

OG-Z2	“Bir denklemin çözüm kümesinde olan sayılar değişkenin yerine yazıldığında açık önermeyi doğru yapan sayılardır. (Çözüm kümesinin elemanları) tüm reel sayılar, tek bir reel sayı ya da hiçbir reel sayı olabilir. Eşitsizliğin çözüm kümesinde yine denklemde olduğu gibi açık önermeyi doğru bir önerme haline getiren sayılardır. Aralık çıkabilir, tek bir sayı çıkabilir ya da boş küme çıkabilir.” (Şekil 91’deki sözel gerçekleşmesi)	28.04.2022 GDS

Ayrıca Zehra’nın bulguları, katılımcının rutinlerinin uygulanabilirlik ve esneklik açısından bir artışın gözlemlendiği örnekleri de içermiştir. Katılımcının bireysel görüşmede sadece baş katsayısı 1 ve çözümleri tamsayı olan ikinci dereceden denklemleri çözdüğü BG-Z10 kodlu rutin prosedüründe (Tablo 57 ve Şekil 87) odak grup görüşmelerinde değişiklikler olmuştur. Katılımcının araştırmacının yürüttüğü derslerde uygulanan prosedürleri dikkatle takip ettiği, sıklıkla tahtaya kalkarak çözüm prosedürlerini uyguladığı ve baş katsayısı 1’den farklı olan ikinci dereceden tek değişkenli polinomların çarpanlarına nasıl ayrıldığına yönelik öğretmeninden ve arkadaşı Derya’dan yardım istediği gözlemlenmiştir. Zehra, ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri içeren GD13, GD14 ve GD15’ten önce yürütülen dersin teneffüsünde (18.03.22 tarihli ve “İkinci dereceden tek değişkenli eşitsizliklerin çözüm kümesini bulur.” kazanımına yönelik işlenen ders) öğretmeninden (araştırmacı) “ $2u^2 - 3u + 1$ ” biçimindeki polinomun çarpanlarına nasıl ayrıldığına dair yardım istemiş ve öğretmeni prosedür sürecini Zehra’ya ifade ettikten sonra rutini tekrarlaması için katılımcıdan “ $3x^2 + x - 2$ ” şeklindeki polinomu çarpanlarına ayırmasını istemiştir. Bunun üzerine prosedürünü uygulamada güçlük yaşayan Zehra, arkadaşı Derya’dan onay alarak ifadeyi çarpanlarına ayırmayı başarmış ve “Hocam başardım [sevinerek]” şeklinde kişisel bir söylemde bulunmuştur. Bu söylemsel iletişimde öğretmene ve katılımcıya ait görsel araçlar ise Şekil 106’daki gibidir:



Şekil 106. İkinci dereceden tek değişkenli polinomların çarpanlarına ayrılmasına yönelik görsel araçlar

Katılımcı sonrasında görev durumlarında baş katsayısı 1'den farklı ve çözümleri irrasyonel sayı olan ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerin reel çözümlerini hem çarpanlara ayırma metoduyla hem de $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ formülleri aracılığıyla belirleyebileceğini fark etmiştir (örneğin, Tablo 65). Bu durum katılımcının odak grup görüşmelerinde ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerin çözümleri ve diskriminantı arasındaki ilişkiye dair anlatılar üretmesini de (örneğin, [111-GD25] ve Şekil 96) sağlamıştır.

Zehra'nın denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduğuna dair farkındalığı; katılımcının BG-Z4 ve BG-Z5 kodlu ritüel rutinlerinde “görev” anlayışının değişmesine sebep olsa da araştırmanın bulguları, katılımcının bu rutinleriyle kriterler bağlamında söyleme katılımında bir değişimin olmadığını göstermiştir. Katılımcının denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürlerini içeren BG-Z4 ve BG-Z5 kodlu rutinleriyle söyleme katılımı hem bireysel hem odak grup görüşmelerinde; nesneleştirme ve esneklik açısından ritüel iken bağlılık-tutarlılık, katılımcının yetkinliği ve uygulanabilirlik açısından hibrit olduğu görülmüştür. Katılımcının “görev” anlayışı; bireysel görüşmede denklemin çözümü için “ x = reel sayı biçiminde bir sonuç elde etmek” ve eşitsizliklerin çözümü için “Bir reel sayı aralığı elde etmek” iken, odak grup görüşmelerinde kavramların birer açık önerme olduğunu fark etmesi üzerine her iki kavramın çözümleri için “Açık önermeyi doğrulayan reel sayı(ları) belirlemek” olarak değişmiştir.

Tablo 77'de Zehra'nın değişimin gözlemlendiği rutinlerine ve bu değişimin nasıl gerçekleştiğine dair bulguların bir özeti yer almaktadır.

Tablo 77

Zehra'nın Gelişim Gözlemlenen Rutinleri

Katılımcının gelişim gözlemlenen bireysel görüşmedeki rutini	Katılımcının gelişim gözlemlenen bireysel görüşmedeki rutininin odak grup görüşmelerindeki kodu	Gelişimin hangi kriter bağlamında olduğu	Gelişimin ilgili kriter bağlamında nasıl gerçekleştiği
Bireysel görüşmedeki denklem ve eşitsizlik kavramlarını tanımlarken kullandığı BG-Z1 kodlu ritüel rutini ve ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri tanımlarken kullandığı BG-Z9 kodlu ritüel rutini	Odak grup görüşmelerinde denklem ve eşitsizlikleri tanımlarken kullandığı OG-Z1 kodlu keşif rutini	Söylemin nesneleştirilmesi	Katılımcının denklem ve eşitsizlikleri birer birer sembol dizisi olarak görmek yerine matematiksel bir nesne (açık önerme) olarak görmeye başlamasından dolayı rutinin ritüelden keşfe dönüşmesi ve bu rutiniyle söyleme katılımında hibrit katılımdan keşifsel bir katılıma geçiş olması
		Gerekçelendirme	Katılımcının sembolleri ve süreçleri vurgulayarak sunduğu argümanlarının matematiksel anlatılar ürettiği argümanlarına doğru evrilmesi ve bu rutiniyle söyleme katılımında hibrit katılımdan keşifsel bir katılıma geçiş olması
		Katılımcının yetkinliği	Katılımcının denklem ve eşitsizlikler hakkında konuşurken kendinden emin söylemlerde bulunmasından ve prosedüründe bağımsız kararlar almasından dolayı söylem katılımında hibrit katılımdan keşifsel katılıma doğru bir geçişin olması
Bireysel görüşmede çözüm kümesi ya da çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken kullandığı BG-Z3 kodlu keşif rutini	Odak grup görüşmelerinde çözüm kümesi ya da çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken kullandığı OG-Z2 kodlu keşif rutini	Söylemin nesneleştirilmesi	Katılımcının denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduğuna dair farkındalığının oluşmasından dolayı söylemlerinin giderek matematiksel nesneler hakkında olması ve bu nedenle katılımcının anlatılarının zenginleşerek söyleme katılımında hibrit katılımdan keşifsel bir katılıma geçiş olması
Bireysel görüşmede ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken kullandığı BG-Z10 kodlu ritüel rutini	Odak grup görüşmelerinde ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözerken kullandığı OG-Z4 kodlu ritüel rutini	Esneklik	Katılımcının prosedürünü birden fazla yolla uygulayabileceğinin farkına varması ve bu rutiniyle söyleme katılımında ritüel katılımdan hibrit katılıma bir geçişin olması

Bağlılık-tutarlılık	Katılımcının baş katsayısı 1'den farklı ve irrasyonel çözümlere sahip ikinci dereceden tek değişkenli denklemleri çözme prosedürüne dair farkındalığının oluşması ve bu rutiniyle söyleme katılımında ritüel katılımdan hibrit katılıma bir geçişin olması
Uygulanabilirlik	Katılımcının farklı görev durumlarında da prosedürünü (çarpanlarına ayırma metodunu) kanonik bir şekilde uygulamasından dolayı söyleme katılımında ritüel katılımdan hibrit katılıma bir geçişin olması

Bununla birlikte bir diğerkatılımcı olan Burcu'nun bireysel ve odak grup görüşmelerindeki rutinleri bütüncül bir bakış açısıyla incelendiğinde, katılımcının bireysel görüşmedeki rutin türünün odak grup görüşmelerinde de aynı türden olmaya devam ettiğigörülmüştür. Bu doğrultuda katılımcının BG-B3 ve BG-B11 kodlu keşif rutinleri, odak grup görüşmelerinde de keşif rutini olarak devam ederken, bireysel görüşmedeki diğerritüel rutinleri de odak grup görüşmelerinde ritüel rutin olarak gözlemlenmeye devam etmiştir. Katılımcının söylemlerinden elde edilen bulgular, Burcu'nun rutinleriyle kriterler bağlamında söyleme katılım türünde de gelişim olarak dikkate alınabilecek herhangi bir değişiklik olmadığını göstermiştir.

Burcu'nun bireysel görüşmeden farklı olarak odak grup görüşmelerinde diğerkatılımcılarla olan söylemsel iletişimlerden dolayı denklemlerin değişken içerdiğine ve “tanım kümesi” şeklinde isimlendirdiği kümenin “evrensel kümeye” karşılık geldiğine dair farkındalığının oluştuğu (örneğin, Şekil 59 ve Şekil 61) görülmüştür. Fakat katılımcının bu farkındalığı Burcu'nun denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutininde (bireysel görüşmede BG-B1 ve odak grup görüşmelerindeki OG-B1 kodlu ritüel rutinleri) ve bu rutiniyle söyleme katılım türünde herhangi bir değişime sebep olmamış ve katılımcı bu rutiniyle söylemin nesneleştirilmesi bağlamında tüm görüşmelerde ritüel bir katılım sergilemiştir. Bununla birlikte katılımcının bireysel görüşmeden farklı olarak, ikinci dereceden denklemlerin çözümlerini belirlerken yeni bir yolun daha varlığına dair farkındalığı olduğu görülmüş fakat, katılımcı prosedürünü bağımsız bir şekilde uygulayamamıştır (örneğin, [77,79,102,106-GD13] ve Şekil 76'da GD13 için cebirsel gerçekleşme 1). Arkadaşı Şule'nin tahtada paylaştığı prosedür sonrasında Şule'nin prosedürünü taklit ederek prosedürünü uygulayan (örneğin, [169,189,200-GD13] ve Şekil 76'da GD14 için cebirsel gerçekleşme 1) Burcu'nun, ilgili görev durumunda söyleme katılımı acemi katılımcı rolünde olmuştur. Bu nedenle katılımcının başkalarını taklit ederek prosedürü katı bir şekilde uygulamaya çalıştığı OG-E3 kodlu ritüel rutinindeki bu durum, gelişimin başlangıcı için gerekli görülse de bir “rutin gelişimi” olarak değerlendirilmemiştir. Katılımcının rutinlerini çoğunlukla sosyal bir bağ kurma ve başkalarını memnun etme amacıyla sergilemesi (örneğin, [169-GD13], [189-GD13], [200-GD13], [103-GD20], [125-GD20], [112-GD20] ve Tablo 48) onun rutinlerinde gelişim olarak dikkate alınabilecek herhangi bir değişimin olmamasının en önemli sebebi olarak görülmüştür. Odak grup görüşmelerinde Burcu; söylemlerinde sıklıkla arkadaşlarını birer otorite olarak görmüş (örneğin, [70-GD5], [103-GD5], [105-GD5], [124-GD25] ve Tablo 48), prosedürünü uygularken bağımsız kararlar almada güçlük yaşamış (örneğin, [216-GD2], [106-GD13], [47-

GD14], [49-GD23] ve Tablo 49'daki prosedürleri) ve prosedürünü uygularken arkadaşlarının önerilerine ve onayına sıklıkla başvurmuştur (örneğin, [135-GD2] ve Tablo 49'da yer alan [114-GD20], [216-GD21], [269-GD21], [272-GD21], [281-GD21], [160-GD22] ve [178-GD22] söylemleri).



BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmanın bulgularından elde edilen sonuçlar ve bu sonuçların literatüre ve matematik eğitime olan katkılarına dair tartışmalar ile öneriler yer almaktadır.

Sonuçlar ve Tartışma

Ortaöğretim öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait görev durumlarında rutinlerinin yapısını açıklığa kavuşturmak ve buna bağlı olarak matematiksel söyleme katılımlarını incelemek amacıyla yapılan bu araştırmanın bulgularında, “Ortaöğretim öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik kavramlarını içeren görev durumlarında rutinleri, söyleme katılımları ve rutin gelişimleri nasıldır?” sorusuna cevap aranmıştır. Bu doğrultuda araştırmanın “Bulgular ve Yorum” kısmında öncelikle öğrencilerin denklem ve eşitsizlik kavramlarına ait farklı görev durumlarındaki söylemsel rutinleri ve bu rutinleriyle söyleme katılım biçimlerinin yapısı ortaya konmuş ve sonrasında katılımcıların rutinlerinde gözlemlenen gelişimlere dair bulgular okuyucuya sunulmuştur.

Araştırmanın bulguları incelendiğinde, bazı katılımcıların (örneğin, Burcu ve Zehra) denklem ve eşitsizliklere ilişkin rutinleri ritüel ağırlıklı ve bazılarının rutinleri (örneğin, Elif) daha keşif ağırlıklı olmasına rağmen, öğrenciler ritüel ve keşif rutinlerini bir arada

kullanarak matematiksel söyleme katılmıştır. Araştırmanın bulgularından elde edilen bu sonuç, matematik öğrenme ortamlarında öğrencilerin söyleme katılımının ne tamamen ritüel ne de keşifsel olmadığını iddia eden çalışmaların (Lavie & Sfard, 2019; Lavie vd., 2019; Nachlieli & Tabach, 2019; Sfard & Lavie, 2005; Sfard, 2008, 2020) bulgularını desteklemiştir. Bu bağlamda, araştırmanın bireysel görüşme bulguları incelendiğinde, öğrencilerin (polinom biçimindeki) denklem ve eşitsizlik kavramlarını birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizlikleri esas alarak ritüel rutinleri aracılığıyla tanımladıkları ortaya çıkmıştır. Bu duruma öğrencilerin müfredatta (MEB, 2018) yer alan kazanımlar bağlamında ilk olarak “birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizliklerle” karşılaşmalarının etkili olduğu düşünülmektedir. Katılımcılar denklem ve eşitsizlik tanımlama rutinleri (BG-E1, BG-B1 ve BG-Z1 kodlu ritüel rutinler) incelendiğinde ise öğrencilerin, kavramların birer açık önerme olduğunun farkında olmadığı ve birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizliklerin cebirsel gösterimlerini ve çözüm süreçlerini betimleme yoluyla, yani denklem ve eşitsizlikleri birer sembol dizisi olarak gördüklerini ifade eden ve çözüm kümesinin eleman sayılarını kıyaslayan söylemleri içeren rutinleriyle tanımlamalar yapmıştır (örneğin; Elif’in bireysel görüşmesinde [2], [6] ve [12]; Burcu’nun bireysel görüşmesinde [2] ve [8]; Zehra’nın bireysel görüşmesinde [2], [4] ve [6]). Bu söylemlerinde öğrenciler, denklemlerin çözüm kümesinin tek elemanlı bir küme olduğunu ve eşitsizliklerin çözüm kümesinin ise bir aralık belirttiğini sıklıkla vurgulamıştır (örneğin, Elif’in bireysel görüşmesinde [12], [24] ve [215]; Burcu’nun bireysel görüşmesinde [16]; Zehra’nın bireysel görüşmesinde [18]). Katılımcıların bu söylemleri, açık önermelerin (denklem ve eşitsizlikler) içerdikleri bağıntıları temsil eden sembollerden kaynaklı olduğu görülmüştür. Katılımcılar denklem çözme prosedürlerini (örneğin, BG-E4, BG-B4 ve BG-Z4 kodlu rutinleri) genellikle “ $x = reel\ sayı$ ” gibi bir sonuç elde etmek amacıyla uygulamalarından ötürü “=” sembolü hakkında öğrencilerin *değişkenin tek bir reel sayıya eşit olması* şeklinde kendileriyle iletişim kurdukları (düşündükleri) sonucuna varılmıştır. Benzer şekilde öğrencilerin

söylemleri, “ $<, \leq, >, \geq$ ” sembollerini hakkında kendileriyle (eşitsizlik çözme prosedürleri sonucunda) *bir reel sayı aralığına ulaştıran gösterimler* şeklinde iletişim kurduklarını (düşündüklerini) ortaya koymuştur. Ayrıca öğrencilerin bireysel görüşmede yer alan denklem ve eşitsizlik kavramlarına yönelik söylemleri ve rutinleri, katılımcıların çözüm kümesi boş küme olan ya da sonsuz çözüme sahip denklemlerin (özdeşliklerin) ya da eşitsizliklerin varlığının farkında olmadığını ortaya koymuştur. Katılımcılardan Elif, bireysel görüşmesinde çözüm kümesi sonsuz çözüme sahip denklemlerin birer eşitsizlik olduğu yönünde (örneğin, [181]’deki söylemi) kanonik olmayan söylemlerde bulunurken, Burcu uyguladığı prosedürler sonucunda elde ettiği “ $x = \text{reel sayı}$ ” biçiminden farklı gösterimler için (örneğin, “ $0 = 0$ ”, “ $3x = 3x$ ” gibi) çözüm kümesini belirlemede iletişimsel güçlük yaşamıştır (örneğin, bireysel görüşmesindeki [116], [122], [124]’teki söylemleri ve Şekil 47). Bu duruma katılımcıların matematik sınıflarında denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümesini belirlemek amacıyla verilen örneklerde, çoğunlukla denklemler için çözüm kümesinin bir elemana sahip ve eşitsizlikler için de çözüm kümesinin $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[x, y], [x, y), (x, y]$ ve (x, y) biçiminde bir reel sayı aralığı olmasının etkili olduğu düşünülmüştür. Bununla birlikte, katılımcıların odak grup görüşmelerinde GD2 ve GD4’te çözüm kümesi boş küme ya da sonsuz elemana sahip bir küme (örneğin, $\mathbb{R}$) olan denklem ve eşitsizlikleri içeren görev durumlarıyla karşılaşmaları ve bu görev durumları hakkında konuşmalarını ve tartışmalarını içeren iletişimsel süreçleri sonrasında öğrencilerin bu duruma yönelik farkındalıklarının oluştuğu gözlemlenmiştir. Bireysel görüşmede çözüm kümesi boş küme ya da sonsuz çözüme sahip denklem ya da eşitsizlikleri içeren görev durumlarının (örneğin, EK 5’te Oturum 2’ de GD4 ve Oturum 3’te GD4) varlığına rağmen katılımcıların odak grup görüşmelerinde, bu duruma yönelik farkındalığını belirten söylemleri ([475-GD3], [479-GD3], [541-GD3]) hem bireysel görüşmede katılımcıların denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümesinin boş küme ya da sonsuz çözüme sahip olabileceğinin farkında olmadıklarını hem de öğrenmede söylemsel iletişimin etkili olabileceğini ortaya koymuştur.

Diğer taraftan odak grup görüşmelerinde GD1 ve GD3'te “önerme”, “açık önerme”, “denklem” ve “eşitsizlik” kavramları arasındaki ilişkilere dair konuşmaları ve tartışmaları içeren iletişimsel süreçler de Elif ve Zehra'nın kavramların birer açık önerme olduğuna dair farkındalığının oluşmasını sağlamış ve katılımcıların bu farkındalıkları, söylemlerinin giderek nesneleşmesine yol açmıştır (Tablo 71 ve Tablo 75). Elif ve Zehra'nın denklem ve eşitsizlikleri tanımlama rutinlerindeki (OG-E1 ve OG-Z1 kodlu keşif rutinleri) bu gelişime, katılımcıların GD1, GD3, GD5 gibi görev durumlarında ve araştırmacının yürüttüğü derslerde yaşanan söylemsel iletişimlere dikkatle takip etmesi ve bu süreçte diğer katılımcıların söylemleri üzerine düşünmesi (örneğin, Tablo 63) etkili olmuştur. Matematiksel söylemlere çoğunlukla sosyal bir bağ kurma ve başkalarını memnun etme amacıyla katıldığı gözlemlenen Burcu ise ritüel bir katılımı rutinlerini sergilemeye ve sembol odaklı tanımlamalar yapmaya devam etmiştir (örneğin, Şekil 39 ve Şekil 61). Araştırmada her üç katılımcı da eşit öğrenme fırsatlarına sahip olmasına rağmen Burcu'nun denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduğuna dair farkındalığı keşif anlamında oluştuğuna dair bulgulara rastlanmamıştır. Her ne kadar katılımcının denklem ve eşitsizlikler için “açık önerme” şeklinde kelime kullanımlarına yönelik sesli ve sözel gerçekleştirmeleri (Şekil 60) olsa da Burcu kavramlar hakkındaki söylemlerinde “önerme” ve “açık önerme” terimlerini sosyal bir bağ kurma ve başkalarını memnun etme amacıyla kullanmış (örneğin, [70, 97, 99, 103, 121, 239-GD5]) ve söylemi bireyselleştirmede güçlük yaşamıştır (örneğin, [145, 149, 218, 236-GD5]). Katılımcının odak grup görüşmelerinde, diğer katılımcılarla olan söylemsel iletişimlerden dolayı denklemlerin değişken içerdiğine ve “tanım kümesi” şeklinde isimlendirdiği kümenin “evrensel kümeye” karşılık geldiğine dair farkındalığının oluşmasına rağmen (örneğin, Şekil 59 ve Şekil 61) Burcu'nun söyleme katılım amacı, rutinini odak grup görüşmelerinde de ritüel bir şekilde sergilemeye devam etmesine sebep olmuştur. Burcu'nun söylemlerinde kavramlara ait anahtar kelime kullanımlarına yer vermesi, kavramın öğreniminin bir başlangıcı olarak kabul edilebilir

olsa da rutin gelişimi için yeterli olmadığı düşünülmüştür. Araştırmanın bu bulgularından yola çıkarak ulaşılan sonuçlar ise şu şekildedir:

- Kavramın öğretiminde, denklem ve eşitsizliklerin birer *açık önerme* olduğuna dair farkındalık oluşturacak görev durumlarına ve söylemsel iletişime yer verilmesinin önemli olduğu düşünülmektedir. Böylece öğrencilerin *denklem ve eşitsizlik kavramlarına yönelik matematiksel söylemi* bireyselleştirebilmelerine ve matematiksel söyleme daha keşifsel bir katımları sağlanabileceğini sonucuna varılmıştır.
- Öğrencilerin söylemlerinde “anahtar kelimeler” ve “görsel araçlar” gibi söylem öğelerinin varlığının, öğrenmenin gerçekleştiğini söyleyebilmek için yeterli olamayacağı sonucuna varılmıştır. Bu nedenle öğrencilerin öğrenmesi söyleme katılımları bağlamında değerlendirilirken, öğrenci söylemlerine bütüncül bir bakış açısıyla bakılmasının ve öğrencilerin rutinlerini hangi amaçla sergilediklerinin önemli olduğu düşünülmektedir.
- Öğrencilerin kavramları öğrenme sürecinde, yani ritüel rutinlerini keşif rutinlerine dönüştürme sürecinde, kanonik söylemlerle karşılaşmalarını sağlayan öğrenme fırsatlarının yanı sıra öğrencilerin de bu fırsatları içeren öğrenme ortamlarında söylemler üzerine düşünmelerinin ve matematiksel söylemi bireyselleştirebilmek için çaba sarf etmelerinin önemli ve gerekli olduğu sonucuna varılmıştır.

Araştırmanın bulguları, öğrencilerin “değişken” ve “bilinmeyen” kavramlarının cebirsel ayrımını yapmada güçlük yaşadığını da (örneğin, Burcu’nun bireysel görüşmesinde [221] ve [223]; Zehra’nın bireysel görüşmesinde [248]) ortaya koymuştur. Araştırmanın bu bulguları, öğrencilerin “değişken” ve “bilinmeyen” kavramları arasında cebirsel ayrımı yapmada zorluk yaşadığını ortaya koyan söylemsel çalışmaları (Emre-Akdoğan, 2023) desteklemiştir. Bireysel görüşmede öğrenciler “değişken” ve “bilinmeyen” kavramlarını aynı anlamı ifade edecek şekilde birbirini yerine sıklıkla kullanmıştır (örneğin, Elif’in bireysel görüşmesinde [2] ve [215]; Burcu’nun [525-GD3] ve [156-GD5] söylemleri;

Zehra'nın bireysel görüşmesinde [41] ve [53]). Araştırmacının odak grup görüşmeleriyle eş zamanlı yürüttüğü derslerde “değişken” ve “bilinmeyen” kavramlarının bağlama bağlı olarak cebirsel ayrımının nasıl olması gerektiğine dair söylemlerde bulunmasına rağmen öğrenciler odak grup görüşmelerinde de bu söylemleri bireyselleştirmede güçlük yaşamıştır. Katılımcılardan Elif, “değişken” kavramı hakkında anlatılar üretmeyi hedefleyen söylemlerde (BG-B2 kodlu rutini) bulunmasına rağmen “ $a, b, c, m, n, x, y, z, t$...” gibi cebirsel ifadelerde yer alan harflerin bağlamına bağlı olarak isimlendirilmesinin nasıl olması gerektiği konusunda tereddütler (örneğin, bireysel görüşmede [14], [144], [156] ve [199]; odak grup görüşmelerinde [61-GD2], [76-GD3] ve [174-GD15]) yaşamıştır. Burcu'nun ve Zehra'nın ise “değişken” kavramına yönelik rutin olarak değerlendirilebilecek yeterlilikte söylemlerine rastlanılmasa da Zehra odak grup görüşmelerinde denklem ve eşitsizliklerde yer alan harfli gösterimler için “değişken” kullanımını tercih etmiştir. Benzer durum diğer katılımcılarda da gerçekleşmiş ve odak grup görüşmelerinde katılımcıların matematiksel söylemlerinde x, y, z, u, t gibi alfabenin son harfleri için “bilinmeyen” yerine “değişken” kullanımını tercih etmiştir. Bu duruma araştırmacının yürüttüğü derslerdeki söylemlerinin etkili olduğu düşünülmüş ve öğretmen söyleminin öğrenci söylemleri üzerinde etkili olabileceği sonucuna varılmıştır. Bu durum aynı zamanda öğretmen söylemlerinin öğrenci söylemlerine olan etkisine odaklanan çalışmaların bulgularını da (Emre-Akdoğan, 2015, 2023; Heyd-Metzuyanım vd., 2019; Sfard, 2017) desteklemiştir. Bununla birlikte Burcu'nun derslerde yaşanan iletişimsel süreçlerden etkilenerek odak grup görüşmelerinde “değişken” ve “bilinmeyen” ayrımını yapmaya başladığına dair söylemlerine rastlanılsa da (örneğin, [68-GD2], [91-GD2] ve [77-GD3]) sonrasında katılımcının bu söylemlerini bireyselleştiremediği görülmüştür. Bu nedenle öğrencilerin denklem ve eşitsizliklere dair cebirsel ayrımları yapabilmesi için uzman söylemlerinin (öğretmen, ders kitabı, öğretim programı vb.) kanonik olmasının önemli ve gerekli olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca ders kitaplarında “değişken” ve “bilinmeyen” kavramlarının tanımlarının yer almasının da öğrencilerin denklem ve

eşitsizliklerde yer alan harfli gösterimleri, matematiksel birer nesne olarak görmesinde etkili olabileceği düşünülmüştür. Ayrıca katılımcıların *değişkenin ait olduğu evrensel küme* hakkında konuşurken fonksiyon kavramına ait olan “değer kümesi” ve “tanım kümesi” terimlerinden yola çıkarak “değer aralığı”, “tanım aralığı” biçiminde kanonik olmayan söylemlerine de (örneğin, Elif’in bireysel görüşmesinde [6], [301] ve [399]; Burcu’nun bireysel görüşmesinde [6], [28], [30]) rastlanılmıştır. Öğrencilerin bilinmeyenler için sıklıkla kullandıkları “değer/ler” ve “ x ’in değeri” gibi söylemlerinin de (örneğin, Elif’in bireysel görüşmesinde [2]; Burcu’nun bireysel görüşmesinde [183] ve [91-GD2], [77-GD3], [52-GD23]; Zehra’nın bireysel görüşmesinde [6], [126], [142] ve [61-GD1], [119-GD2], [434-GD5]) yine fonksiyon kavramına ait matematiksel söylemlerden kaynaklandığı düşünülmüştür. Bununla birlikte, öğrencilerin ikinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizlikler hakkında konuşmaya başladıklarında, *denklemin ya da eşitsizliklerin çözümü* için aslında polinom kavramına ait olan “kök” terimini kullanmaları (örneğin, Elif’in bireysel görüşmesinde [641], [645], [665] ve [260-GD15], [194-GD22], [172-GD25]; Burcu’nun söylemlerinde [159-GD13], [283-GD15], [29-GD23] ve [40-GD23]; Zehra’nın bireysel görüşmesinde [404] ve [141-GD13], [45-GD23]) dikkat çekmiştir. Bu durumun da hem öğretim programında yer alan kazanımın içeriğinden (MEB, 2018, s. 30) hem de bu nedenle ders kitaplarında ve öğretmenlerin söylemlerinde yer alan kelime kullanımlarından kaynaklandığı düşünülmüştür. Bu nedenle öğrencilerin matematiksel söyleme kanonik bir şekilde katılmalarını sağlamak için ilişkili kavramların (denklem, eşitsizlik, fonksiyon ve polinom gibi) anahtar kelimelerini birbiri yerine kullanmadan ve eğer kullanılıyorsa da bu kelimelerin bağlama bağlı olarak ayırımına vurgu yapılarak (örneğin, *ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerin polinom biçiminde olmasından dolayı “kök” kullanımının makul olabileceği vurgusu yapılarak*) öğretiminin yapılmasının ve öğretim programı ve ders kitabı içeriklerinin bu bağlamda hazırlanmasının önemli olduğu sonucuna varılmıştır.

Katılımcıların bireysel görüşmedeki denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürleri incelendiğinde ise öğrenciler çoğunlukla “nasıl ilerlerim?” sorusuna yanıt arayarak ritüel bir katılım eşliğinde prosedürlerini uygulamıştır (BG-E4, BG-E5, BG-E7, BG-E10, BG-B4, BG-B5, BG-B7, BG-B8, BG-B10, BG-Z4, BG-Z5, BG-Z7, BG-Z8 ve BG-Z10 kodlu rutinler). Katılımcıların denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedüründeki söylemleri, matematiksel nesneler hakkında anlatı üretmeyi amaçlamadan sadece prosedürün adımlarını gerçekleştirmeyi hedeflediklerini ortaya koymuştur. Öğrenciler, rutinlerinde uyguladıkları prosedürlerin nedenlerini bilmediklerini söylemlerinde de ifade etmiş (örneğin, Elif’in bireysel görüşmesinde [399]; Burcu’nun bireysel görüşmesinde [116], [173], [175], [215] ve [192-GD13], [200-GD13]; Zehra’nın bireysel görüşmesinde [105], [300], [302] ve [73-GD21]) ve katılımcılar birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizlikleri sadece cebirsel gerçekleştirmeler aracılığıyla (BG-E4, BG-E5, BG-B4, BG-B5, BG-Z4 ve BG-Z5 kodlu rutinler) çözmüştür. Öğrencilerin uyguladıkları prosedürlerin nedenlerine dair farkındalığının olmamasının onların prosedürlerini ezbere ve katı bir şekilde uygulamasına ve kendilerine otorite olarak gördükleri kişileri (arkadaşı ya da öğretmeni) taklit etme yoluyla çözüm yapmalarına (örneğin, Burcu’nun Şule’yi taklit ederek prosedürünü uyguladığını gösteren bulgular: [169,189,200-GD13] ve Şekil 76’da GD14 için cebirsel gerçekleşme 1) sebep olmuştur. Katılımcılardan Elif ise odak grup görüşmelerinde birinci dereceden tek değişkenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini belirlerken kullandığı BG-E4 ve BG-E5 kodlu ritüel rutinleri dışındaki denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürlerinde (OG-E3, OG-E4, OG-E5, OG-E6, OG-E7 ve OG-E8 kodlu rutinleri) anlatılar üretmeyi hedeflemiştir. Elif’in diğer katılımcılardan farklı olarak odak grup görüşmelerinde denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürlerinde anlatı üretmeyi hedeflemesinde, katılımcının kavramlara ait göstergelerin cebirsel ve grafiksel gerçekleştirmeleri arasındaki geçişleri kanonik olarak yapabilmesi (örneğin, Elif’in Şekil 12, Şekil 13 ve Şekil 35’te yer alan gerçekleşme ağaçları) etkili olmuştur. Elif’in bu süreçte araştırmacı tarafından eş zamanlı yürütülen dersleri dikkatle takip ederek söylemsel

iletişime dahil olmaya çalıştığı ve derslerde farklı gerçekleştirmelerle uygulanan çözüm prosedürlerine dair notları özenle tuttuğu (örneğin, Şekil 104) da gözlemlenmiştir.

Öğrencilerin denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürleri bütüncül bir bakış açısıyla ele alındığında ise, rutinlerinin çoğunlukla ritüel olmasının muhtemel sebepleri arasında;

- müfredatta yer alan kazanımların kavramların yapısına ve özelliklerine yönelik değil de çoğunlukla denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürlerini içeren rutinleri teşvik edici yönde ifadeleri içermesi (örneğin, 9.3.3.2. Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulur. (MEB, 2018, s. 20)) ve bu bağlamda matematik derslerinin denklem ve eşitsizliklerin çözümlerini belirlemeye odaklı örnekler üzerinden sunulması,
- matematik öğrenme ortamlarında (sınıf içi ders ortamları) denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini belirlemede atılan adımların (uygulanan prosedürün) nedenleri üzerine sınıf içi tartışma ortamlarının olmaması ya da yeterince olmaması
- öğrencilerin kavramların yapısı ve özellikleri hakkında (örneğin, kavramların birer açık önerme olması, kavramın cebirsel ve grafiksel gerçekleştirmeleri arasındaki ilişkiler) geçmiş öğrenme yaşantılarının veya farkındalığının olmaması

gibi durumlar söz konusu olabileceği düşünülmektedir. Bununla birlikte Elif'in odak grup görüşmelerinde denklem ve eşitsizliklere yönelik prosedürleri uygularken çoğunlukla sonuç odaklı olmasında ve matematiksel nesneler hakkında anlatılar üreterek rutinleri (OG-E3, OG-E4, OG-E5, OG-E6, OG-E7 ve OG-E8 kodlu rutinleri) sergilemesinde katılımcının,

- denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduğuna dair farkındalığının oluşması (OG-E1 ve OG-E2 kodlu rutinleri)
- denklem ve eşitsizliklerin cebirsel ve grafiksel gerçekleştirmeleri arasındaki ilişkileri kanonik bir şekilde kurabilmesi (örneğin, odak grup görüşmelerinde birinci dereceden iki değişkenli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümesinin elemanlarının

bir sıralı ikili belirttiğini ve düzlemde gösteriminin bir noktaya karşılık geldiğine dair farkındalığı oluşan (OG-E3 ve OG-E4 kodlu rutini) katılımcının sonrasında ikinci dereceden tek değişkenli bağıntı, denklem ve eşitsizliklerin çözümlerinde de kanonik bir şekilde grafiksel gerçekleştirmeleri (OG-E5, OG-E6, OG-E7 ve OG-E8 kodlu rutinleri) yapabilmesi),

- odak grup görüşmelerinde ve araştırmacının yürüttüğü derslerde matematiksel söylemler üzerine dikkatini vererek düzenli not tutması ve söylemler üzerine araştırmalar yaparak düşünmesi

gibi durumların etkili olabileceği sonucuna varılmıştır. Denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduğunu fark eden katılımcı Zehra ise kavramın cebirsel ve grafiksel gerçekleştirmeleri arasındaki ilişkileri kuramamasından (örneğin, [300]) kaynaklı olarak odak grup görüşmelerinde de prosedürlerini ritüel bir katılımıla çoğunlukla eksik ya da hatalı bir şekilde uygulamıştır (Tablo 60, Tablo 61, Şekil 95 ve Şekil 97). Ayrıca Zehra'nın kavramın tanımına dair söylemlerinin giderek nesneleşmesine (Tablo 75) rağmen ilgili durum, katılımcının işlemlerinin doğruluğuna olumlu bir etki sağlayamamıştır. Bahsi geçen durumun Zehra'nın işlemsel prosedürleri içeren rutinlerinin doğruluğuna yönelik kendine güvenmemesinden ve bu nedenle güvendiği tek bir yolu tercih ederek alternatif çözümleri gerekli görmemesinden (örneğin, katılımcının [215-GD17], [105-GD23] ve [111-GD23] yer alan kişisel söylemleri) kaynaklandığı sonucuna varılmıştır. Bu bağlamda öğrencilerin ritüel rutinlerinin keşif rutinlerine dönüşmesi sürecine kişisel söylemlerinin de etkisinin olduğu görülmüş dolayısıyla rutin gelişimi analizinde katılımcıların kişisel söylemlerinin de dikkate alınmasının önemli olduğu sonucuna varılmıştır. Aynı zamanda, öğrenciler kavramlara ait göstergelerin farklı gerçekleştirmeleri arasındaki ilişkileri kanonik (matematiksel olarak doğru) bir şekilde kurabildiğinde söyleme; esneklik, bağlılık-tutarlılık ve uygulanabilirlik özellikleri bağlamında daha keşifsel bir katılım sergilemişlerdir (örneğin, Tablo 25 ve Tablo 33). Bu nedenle öğretim sürecinde, kavramın farklı gerçekleştirmeleri arasındaki ilişkilerin kurulmasının ve öğrencilere bu geçişleri

yapabilecek öğrenme fırsatlarını sunulmasının onların kanonik prosedürleri ustaca uygulayabilmesinde önemli olduğu sonucuna varılmıştır.

Bu çalışmada araştırmacı aynı zamanda katılımcıların 9, 10 ve 11. sınıf matematik derslerini yürüten öğretmenleri de olduğundan, araştırmacının ders süreçlerindeki enformel gözlemleri; öğrencilerin işlemsel prosedürlerini içeren rutinleri çoğunlukla ritüel olsa da bu rutinleriyle söyleme katılımlarının bağlılık-tutarlılık ve uygulanabilirlik bağlamında hibrit ya da keşifsel olmasının, onların matematik dersi sınavlarında başarılı olması için yeterli olabileceği sonucuna varırmıştır. Araştırmada Burcu ve Zehra'nın işlemsel prosedürlerini içeren rutinlerinin tamamı (BG-B4, BG-B5, BG-B7, BG-B8, BG-B10, BG-B12, OG-B2, OG-B3, OG-B4, BG-B5, BG-Z4, BG-Z5, BG-Z7, BG-Z8, BG-Z10, OG-Z4 ve OG-Z6 kodlu rutinler) ritüel olmuştur. Fakat katılımcıların bağlılık-tutarlılık ve uygulanabilirlik bağlamında işlemsel prosedürlerini içeren rutinleriyle söyleme katılımları hibrit ya da keşifsel olmasının öğrencilerin okuldaki matematik derslerinde ya da okul sınavlarında başarı elde etmesinde yeterli olabileceği gözlemlenmiştir. Bununla birlikte Burcu'nun ritüel rutinleriyle söyleme katılımı esneklik bağlamında Zehra'ya göre daha keşifsel olmuştur (Tablo 45, Tablo 52, Tablo 62 ve Tablo 70). Zehra'nın yetkinliğinin Burcu'ya göre daha keşifsel olmasına rağmen Burcu'nun ritüel rutinlerini uygulamadaki esnekliğinin sınıf içinde ve okul matematik sınavlarında Burcu'yu Zehra'ya göre daha başarılı (Burcu'nun 10. sınıfta matematik ders başarı ortalamasını 85 ile 90 aralığında iken Zehra'nın matematik ders başarı ortalaması 80 ile 85 aralığındadır) kılmasının sebeplerinden biri olabileceği düşünülmektedir. Araştırmacının üç sene boyunca yapmış olduğu enformel gözlemleri ve araştırmanın bulgularından yola çıkılarak, kavramların yapısına ve özelliklerine dair yeterli bir farkındalık oluşmadan da uzmanların rutinlerini ustaca taklit ederek öğrencilerin derslerde ve okul matematik sınavlarında başarıya ulaşabileceği öne sürülmektedir. Bu sonuç aynı zamanda, ritüel katılım fırsatları sağlayan öğretim uygulamalarının yaygınlığının olası nedenlerini araştırarak çalışmalara da (Nachlieli & Tabach, 2019) katkı sunmaktadır. Çünkü öğrencilerin söylemini nesneleştirmeden de

ritüel rutinleri aracılığıyla matematik sınıflarında başarı elde edebileceğine yönelik gözlemler, öğretmenlerin öğrencilerini ritüel bir katılıma teşvik eden öğrenme fırsatlarını öğrencilerine sunmada kendilerini haklı görebileceğini düşündürmüştür. Oysaki öğrenciler tarafından gösterilen bu katılımın bir “başarı” olarak sayılabilmesi, matematik sınıflarında denklem ve eşitsizliklerin çözümlerine odaklı bir öğretim sürecinin olmasından ve sınavlarda sadece öğrencilerin çözme prosedürlerini içeren görsel araçlarının değerlendirilmesinden kaynaklanmaktadır. Bu doğrultuda *söylemsel anlamda bir başarıdan* söz edilebilmesi için sınıf içi ortamlarda ve matematik sınıflarında “matematiksel anlatılara” da yer verilecek şekilde öğretimin, ölçme ve değerlendirmenin yapılmasının önemli olacağı öne sürülmektedir. Aksi takdirde matematik öğrenme ortamlarında, keşifsel katılımın gerekliliğine ihtiyaç hissedilmeden ritüel rutinlerin yaygın bir şekilde kullanımının söz konusu olacağı varsayılmaktadır. Başka bir deyişle sınıf ortamlarında matematiksel kavramların yapısı ve özellikleri hakkında tartışma ortamları oluşturulmazsa ve kanonik anlatılara dair söylemlere yer verilmezse, öğrenme için ilk ve gerekli adımlar olarak görülen ritüel rutinlerin, matematik öğretimi ve öğrenimi sürecinde tek rutin türü olarak devamlılık arz edebileceği düşünülmektedir.

Burcu ve Zehra’ya göre prosedüründeki ardışık adımları birbirine bağlı ve prosedür-sonuç ilişkisini kurmada başarılı olan Elif ise söyleme katılımında iyi bir problem çözücü rolünde olmuştur. Bu durumun, Elif’in arkadaşları tarafından bir otorite olarak görülmesinin sebeplerinden biri olabileceği düşünülmüştür. Bununla birlikte Elif’in diğer katılımcılara göre rutinleriyle, söyleme katılımında yetkinliğinin daha keşifsel olmasının da (Tablo 25 ve Tablo 33) yine arkadaşları tarafından bir otorite olarak görülmesine sebep olabileceği sonucuna varılmıştır. Katılımcının matematik ders başarısının yüksek olmasının (95 üzerinde), Elif’in diğer katılımcılara göre daha fazla keşif rutini sergilemesine ve söyleme daha keşifsel katılmasına sebep olabileceği düşünülse de araştırmanın bulguları, Elif’in kavramlara ve gerçekleştirmelerine yönelik farkındalıklarının da bu durumu etkilediğini ortaya koymuştur. Elif’in işlemsel prosedürleri incelendiğinde, söyleme katılımında bağlılık-

tutarlılık ve uygulanabilirlik bağlamında keşifsel olmasının (Tablo 25 ve Tablo 33), onun başarılı bir şekilde rutinini sergilemesinde yeterli olduğu görülse de Elif'in söylemlerinin nesneleşmesi de onun rutinleriyle söyleme katılımında esneklik bağlamında ritüelden keşifsele bir geçiş olmasını sağlamıştır. Bu doğrultuda söylemin nesneleşmesi ve öğrencilerin işlemsel prosedürleri ustaca uygulayabilmesi arasında olumlu bir ilişki olabileceği sonucuna varılmıştır. Araştırmanın bulgularından elde edilen bu sonuç, başarı arttıkça öğrencilerin daha keşifsel bir katılım sergilediğini ve nesneleştirilmiş bir söylemin gelişmiş bir performansla ilişkili olduğunu iddia eden çalışmalarla da (Essack, 2015) uyumlu olmuştur.

Araştırmanın bulguları, tüm katılımcıların hem bireysel görüşmede hem de odak grup görüşmelerinde çözüm kümesi ya da çözüm kümesinin elemanları hakkında konuşurken sonuç odaklı olduklarını ve anlatılar ürettiklerini (BG-E3, BG-B3, BG-Z3, OG-E2 ve OG-Z2 kodlu keşif rutinleri) ortaya koymuştur. Bunun sebebinin hem öğrencilerin çözümleri, uyguladıkları prosedürün birer sonucu olarak görmesi (örneğin, Elif'in bireysel görüşmesinde [168], [199] ve [527-GD3] ve [541-GD3]; Burcu'nun bireysel görüşmesinde [12], [152], [241] ve [77-GD3], [29-GD5]; Zehra'nın bireysel görüşmesinde [12], [18], [216] ve [404-GD2], [468-GD3]) hem de matematik öğrenme ortamlarında *çözümler hakkında anlatılara* sıklıkla yer verilmesinin etkili olabileceği düşünülmektedir. Elif ve Zehra'nın denklem ve eşitsizliklerin birer açık önerme olduğuna dair odak grup görüşmelerinde farkındalıklarının oluşmasıyla birlikte katılımcıların çözüm kümesi ve çözüm kümesinin elemanları hakkındaki keşif rutinlerine dair anlatıları zenginleşmiş ve söylemleri giderek nesneleşmiştir (örneğin, Tablo 72 ve Tablo 76). Benzer şekilde öğrenciler, ikinci dereceden tek değişkenli denklemlerin çözümleri ve denklemin diskriminantı arasındaki ilişkiyi açıklarken de sonuç odaklı söylemlerde bulunmuş ve anlatılar üretmiştir (BG-E11, BG-B11, OG-Z3 kodlu keşif rutinleri). Yine bu durumunda öğretim programında yer alan 10.4.1.4 numaralı kazanım dahilinde (MEB, 2018, s. 30) derslerde yer verilen matematiksel anlatıları içeren söylemsel iletişimlerden kaynaklandığı

düşünülmüştür. Bu nedenle işlemsel prosedürleri içeren rutinlerin uygulanması süreci de dahil öğretim sürecinde, kavramlarının yapısına ve özelliklerine dair söylemsel etkinliklere ve sınıf içi tartışmaları içeren iletişimsel süreçlere yer verilmesinin, öğrencilerin söylemi bireyselleştirmesinde ve keşif rutinleriyle söyleme katılmasında etkili olacağı sonucuna varılmıştır.

Öğrencilerin rutin gelişimlerine yönelik bulgular incelendiğinde ise katılımcıların kavramların birer açık önerme olduğuna dair farkındalığı oluştuğunda, söylemlerinde değişimler olmaya başlamıştır. Söylemleri giderek nesneleşmeye başlayan öğrencilerin (örneğin, Elif ve Zehra) söyleme katılımlarında, ritüel katılımdan hibrit ya da keşifsel katılıma veya hibrit katılımdan keşifsel katılıma bir geçiş olmuştur (Tablo 74 ve Tablo 77). Öğrencilerin bu farkındalığı aynı zamanda çözüm kümesine yönelik anlatılarının da giderek zenginleşmesini sağlayarak söylemde, hibrit bir katılım yerine keşifsel bir katılım sergilemelerini de sağlamıştır. Bu çalışmanın bulguları, öğrencilerin ritüel rutinleriyle söyleme katılımlarında, ritüel katılımdan hibrit ya da keşifsel katılıma veya hibrit katılımdan keşifsel katılıma bir geçiş olması durumunun da *bir rutin gelişimi* olarak ele alınabileceği ortaya koymuştur. Bu gelişimi gözlemlemede araştırmanın verileri için sunulan kriter listesinde (Tablo 12) yer alan hibrit katılımın belirleyicilerinin fırsatlar (olanaklar) sağladığı da düşünülmektedir. Bu nedenle, gelecekte yapılması muhtemel söylemsel araştırmalarda, bu çalışmanın bulgularının rutin gelişimine yönelik bir bakış açısı sunabileceği ve bu anlamda literatüre katkı sağlayacağı da öngörülmektedir. Bu çalışma, araştırma problemi bağlamında, öğrencilerin gözlemlenen ya da gözlemlenemeyen rutin gelişimlerinin nedenlerine odaklanmasa da araştırmanın elde edilen bulgularından yola çıkarak bahsi geçen durumlara yönelik ulaşılan sonuçlar şu şekilde sıralanabilir:

- Öğrenciler kendilerine otorite ve kendilerinden daha tecrübeli olarak gördüğü katılımcıların (arkadaş, öğretmen, uzman) rutinleri üzerine düşünerek kendi rutinini

uyguladığında (düşünerek taklit etme süreci), öğrencilerin rutinlerinde bir gelişimin meydana gelmesi söz konusu olabilir.

- Öğrencilerin matematiksel kavramların yapısına ve özelliklerine yönelik farkındalığının oluşması; onların söylemini nesneleştirmesini, anlatılarını zenginleştirmesini, matematiksel argümanlar sunmasını ve böylece ritüel rutinlerini keşif rutinlere dönüştürmesini sağlayabilir.
- Öğrencilerin matematiksel kavramların farklı gerçekleştirmeleri arasındaki ilişkilere yönelik farkındalığının oluşması; onların rutin prosedüründeki bağlılık ve tutarlılığı, esnekliği ve uygulanabilirliği artırmasını ve böylece söyleme daha keşifsel bir şekilde katılmalarını sağlayabilir.
- Öğrencilerin sınıf içi tartışma ortamlarında söyleme katılımı çaba göstermesi ve söylemsel iletişime dahil olması; onların söylemi bireyselleştirmesini sağlayabilir ve böylece söyleme daha keşifsel bir katılım sergilemeleri söz konusu olabilir.
- Öğrencilerin matematiksel rutinlere dair söylemsel iletişim üzerine düşünmemesi ve rutinlerini sosyal bir bağ kurma amacıyla sergilemedeki kararlılığı; onların rutin gelişimlerini olumlu yönde desteklemeyebilir ve söylemi bireyselleştirmesinde güçlük yaşatabilir.
- Öğrencilerin kendilerine yönelik “yapamam” ve “başaramam” gibi olumsuz kişisel söylemleri de; onların rutinlerindeki gelişimi olumsuz yönde etkileyebilir ve söyleme daha keşifsel yönde katılımlarını engelleyebilir.

Özetle, araştırmanın bireysel ve odak grup görüşmelerinden elde edilen bulguları bütüncül bir bakış açısıyla ele alındığında, rutinlerini sosyal bir bağ kurma ve başkalarını memnun etme amacıyla sergilediğinde ve daha deneyimli katılımcıların yaptıkları üzerine düşünmeden onları taklit ettiğinde, öğrencilerin rutinlerinde gelişimin olmasının güç olduğu sonucuna varılmıştır. Bununla birlikte, araştırmanın bulgularından elde edilen sonuçlar, rutinlerini anlatı üretmeyi hedefleyerek ve daha tecrübeli katılımcıların ya da uzmanların söylemleri üzerine (merak etme, araştırma, çıkarımlar yapma vb. eylemler

eşliğinde) *düşünerek taklit etme* yoluyla sergilediğinde öğrencilerin matematiksel söylemleri bireyselleştirebileceğini, yani matematiksel söylemleri kendi düşüncesinin bir parçası haline getirebileceğini ortaya koymuştur. Ayrıca öğrencilerin giderek söylemini nesneleştirmesinde ve kendi söylemi haline getirmesinde karşılaştıkları görev durumları ve hem odak grup görüşmelerinde hem de araştırmacının yürüttüğü derslerde gerçekleşen iletişimsel süreçleri etkili olmuştur. Bunun yanında araştırmanın bulgularından elde edilen sonuçları, *ritüel rutinlerin keşif rutinine dönüşmesinin yanı sıra mevcut keşif rutinine dair anlatıların giderek zenginleşmesi ve farklı öğrenme ortamlarında aynı türden sergilenen rutinlerde söyleme katılım biçiminde değişiklik olması* (ritüel katılımdan hibrit ya da keşifsel katılıma doğru veya hibrit katılımdan keşifsel katılıma doğru) yoluyla da öğrenci rutinlerinde *gelişimin* gözlemlenebileceğini göstermiştir. Bu bağlamda araştırmanın sonuçları;

- ritüellerin acemi katılımcının yeni bir söyleme katılırken attığı ilk ve gerekli adımlar olduğu (Lavie & Sfard, 2019; Lavie vd., 2019; Sfard & Lavie, 2005; Sfard, 2008),
- söyleme katılımda rutinin taklit edilmesinin ve rutin içerisinde esnek bir şekilde çalışılabilmesinin öğrenmenin ilk adımlarından biri olarak kabul edildiği (Sfard, 2008),
- öğrenmenin ilerlemesi için bireyin başlangıçta başkalarına bağlı bir şekilde taklit ederek sergilediği ritüel rutinlerini; başkalarından bağımsız, esnek ve yetkin bir şekilde uygulayabildiği keşif rutinlere dönüştürmesi gerektiği (Lavie vd., 2019; Nachlieli & Tabach, 2019; Sfard, 2017),
- bireyin rutininin süreç odaklı olmaktan sonuç odaklı olmaya doğru gelişmesiyle birlikte ritüel rutinden keşif rutinine doğru kademeli bir değişim olabileceği (Christiansen vd., 2023; Lavie vd., 2019) ve

- değişimin gerçekleşebilmesi için bireylerin bir yandan söyleme katılmaları, bir yandan da rutinlerinin süreç odaklı olmaktan sonuç odaklı olmaya doğru gelişmesi için çaba göstermeleri gerektiği (Nachlieli & Tabach, 2022; Sfard, 2020)
- matematiksel söyleme katılmadan ve matematiksel kavramları tartışmadan, öğrencilerin ritüel rutinlerden keşifsel rutinlere geçmekte zorlanabileceği (Emre-Akdoğan, 2023)
- görev durumu seçiminin ve öğretmen söylemlerinin, öğrencilerin keşifsel katılımlarını mümkün hale getirebildiği (Heyd-Metzuyanım vd., 2019)

biçimindeki fikirleri desteklemektedir. Bununla birlikte araştırmanın bulguları, bulguların analizinde kullanılan kriter listesi ve bulgularından elde edilen sonuçları;

- ritüel katılımdan keşifsel katılıma ilerlemeye başlayan öğrenciler hakkında çok az ampirik çalışmalar bulunduğunu ifade eden araştırmacılara (Heyd-Metzuyanım & Graven, 2019),
- denklemler konusunda herhangi bir öğrencinin keşifsel söyleme geçiş yaptığını gösteren yeterli kanıtı içermeyen çalışmalara (Nisa vd., 2021; Roberts & le Roux, 2019),
- rutin gelişiminin gözlemlenmesinde alternatif yollar sunması (örneğin, farklı öğrenme ortamlarında aynı türden sergilenen rutinlerde söyleme katılım biçiminde değişiklik olması (ritüel katılımdan hibrit ya da keşifsel katılıma doğru veya hibrit katılımdan keşifsel katılıma doğru)) nedeniyle gelişimin ritüel rutinlerden keşif rutinlerine geçişle gözlemleneceğini ifade eden araştırmalara (Lavie vd., 2019; Nachlieli & Tabach, 2019; Sfard, 2017)

yönelik, sunduğu zengin veri kaynağıyla ilgili literatüre katkı sağlamaktadır.

Öneriler

Bu kısımda araştırmanın bulgularından elde edilen sonuçlar bağlamında matematik öğretmenlerine, matematik eğitimi üzerine araştırma yapanlara ve öğretim programı hazırlayan uzmanlara yönelik önerilere yer verilmektedir.

Matematik bir *söylem* ve matematik öğrenimi *öğrencilerin söyleminin uzmanların söylemine doğru evrilmesi* olarak ele alındığında, matematik öğrenme ortamlarındaki iletişimsel süreçlerde, öğretmen söylemlerinin kanonik bir şekilde olmasının önem kazandığı düşünülmektedir. Araştırmanın bulgularından elde edilen sonuçlar, öğrencilerin söyleminin nesneleşmeye başladığında, matematiksel söyleme kanonik bir şekilde (uzmanların söylemine yakın bir şekilde) katılım sağlayabildiklerini ve böylece rutinlerinde bir gelişim meydana gelebildiğini göstermiştir. Katılımcıların söylemlerinin giderek nesneleşmesinde, yani öğrencilerin söylemlerinin giderek uzmanların söylemlerine doğru evrilmesinde, karşılaştıkları görev durumlarının içeriğinin ve bu görev durumlarında matematiksel tanım ve anlatılar hakkında tartışma süreçlerini içeren söylemsel iletişimlerin etkili olduğu gözlemlenmiştir. Sosyokültürel bir ortamda söylemsel iletişime katılan öğrencilerin söylemlerinin nesneleşmesinde, kendilerinden daha tecrübeli olarak gördükleri katılımcıların (arkadaş, öğretmen gibi) söylemleri üzerine düşündüklerini ve ilgili söylemi bireyselleştirmek için çaba gösterdikleri de gözlemlenmiştir. Bu bağlamda öğretmenlerin matematik öğrenme ortamlarında öncelikle öğrencilerine, bu söyleme katılma fırsatlarını sunarak onların söylemlerinin nesneleşmesini sağlayacak görev durumlarını içeren etkinlikler eşliğinde derslerini yürütmesi önerilmektedir. Bununla birlikte, öğrencilerin *matematiksel söyleme kanonik bir şekilde katılabilmelerinde* öğretmenlerin matematik öğretimi sürecinde söylemlerini, günlük bir dilden ziyade matematiksel bir dil eşliğinde ifade etmesinin ve kavramların farklı gerçekleştirmeleri arasındaki geçişleri kanonik bir şekilde yaparak derslerini yürütmesinin de önemli ve gerekli olduğu düşünülmektedir. Bu doğrultuda araştırmanın bulgularından elde edilen sonuçlardan yola çıkarak öğretmenlere

(polinom biçimindeki) denklem ve eşitsizlik kavramlarının öğretimine yönelik sunulan öneriler ise şu şekildedir:

- Cebirsel ifadelerde yer alan harfli gösterimlerin ($a, b, c, m, n, x, y, z, t$ gibi) bağlamına bağlı olarak cebirsel ayrımı vurgulanabilir. Bu doğrultuda “değişken”, “bilinmeyen” ve “katsayı” gibi terimlerin bağlama bağlı olarak tanımları verilebilir ve bu tanımlara yönelik sınıf tartışmalarını içeren söylemsel etkinlikler uygulanabilir. Öğretmenler söylemlerinde anahtar kelime kullanımı konusunda matematiksel olarak doğru söylemleri tercih edebilir. Örneğin, “birinci dereceden bir *bilinmeyenli* denklem” yerine matematiksel olarak daha doğru olan “birinci dereceden bir *değişkenli* denklem” söylemini kullanabilir. Aksi halde araştırmanın bulgularında da görüldüğü gibi, öğrencilerin birinci dereceden tek değişkenli denklemlerin sadece “tek bir çözümü” olduğuna dair düşünceleri oluşabilir. Bu bağlamda “bilinmeyen” teriminin denklemin çözümlerini temsilen, “değişken” teriminin de evrensel kümenin elemanlarını temsilen kullanımına ve sonsuz çözüme sahip birinci dereceden tek değişkenli denklem örneklerine yer verilerek kavramların öğretimi yapılabilir.
- Denklem ve eşitsizliklerin tanımları öğrencilere sunulurken, kavramların birer “açık önerme” olduğuna dair sınıf tartışmalarını içeren söylemsel etkinliklere yer verilebilir. Aynı zamanda müfredattaki akıştan farklı olarak, kavramların tanımları eş zamanlı olarak sunulabilir ve böylece “denklem” ve “eşitsizlikler” arasındaki ilişki/ler üzerine söylemsel iletişimler gerçekleştirilebilir. Bu süreçte değişkenin ait olduğu evrensel kümenin, *bir cebirsel ifadenin denklem ya da eşitsizlik belirtmesindeki* ve *çözüm kümesinin elemanlarının belirlenmesindeki* rolüne yönelik örnekleri içeren görev durumlarına derslerde yer verilerek, kavramın farklı gerçekleştirmeleri aracılığıyla çözümler yapılabilir. Örneğin; “ $2x - 1 = 4$ ” biçimindeki cebirsel ifadenin; değişkenin ait olduğu evrensel küme belli değilse bir denklem belirtmediği, değişkenin ait olduğu küme doğal sayılar ($\mathbb{N}$) ya da

tamsayılar ($\mathbb{Z}$) kümesi ise denklemin çözüm kümesinin bir boş küme belirttiği, değişkenin ait olduğu küme reel sayılar ($\mathbb{R}$) ise denklemin çözüm kümesinin $\{\frac{5}{2}\}$ biçiminde bir elemanlı bir küme olduğu” gibi örnekleri içeren görev durumlarına yer verilebilir. Bununla birlikte “ $2x - 1 = 4$ ” denkleminin reel sayılarda ($\mathbb{R}$) cebirsel gerçekleştirmelerini içeren çözümünüyle birlikte, denklemin çözümlerinin sayı doğrusunda $\frac{5}{2}$ reel sayıyı temsil eden gösterime karşılık geldiğine de derslerde yer verilebilir. Yine bahsi geçen denklem için evrensel kümesinin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olması durumunda çözümlerinin grafiksel gösteriminin $x = \frac{5}{2}$ doğrusuna karşılık geldiği üzerine görev durumları veya iletişimsel süreçler de oluşturulabilir. Benzer şekilde denklem ve eşitsizlik sistemlerinin tanımları sunulurken de evrensel kümenin rolüne vurgu yapılarak, cebirsel ifadelerin denklem ya da eşitsizlik sistemi belirtip belirtmediğine yönelik tartışmaları içeren söylemsel etkinlikler yapılabilir. Örneğin, “ $2x - 1 = 3 \wedge y - 2 = 3$ biçimindeki cebirsel ifadesi için, değişkenlerin ait olduğu evrensel kümenin reel sayılar ($\mathbb{R}$) olması durumunda bir sistem belirtmezken, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olması durumunda ortak çözüme sahip ve çözüm kümesi $\{(2,5)\}$ biçiminde olan bir denklem sistemi belirttiği” gibi örnekleri içeren görev durumlarına yer verilebilir.

- Çözüm kümesi boş ya da sonsuz elemana sahip bir küme olan denklem ve eşitsizliklere yönelik örnekleri içeren görev durumlarına derslerde yer verilerek, bu görev durumları hakkında sınıf içi tartışma ortamları oluşturulabilir. Böylece öğrencilerin denklem ve eşitsizlikleri, cebirsel gösterimlerinden ve çözüm kümesinin eleman sayısından bağımsız birer matematiksel nesne olarak görmeleri sağlanabilir. Bununla birlikte, öğrencilere, boş küme gösterimi için x bir reel sayı olmak üzere $[x, x]$ gibi reel sayı aralıklarının ve sonsuz küme gösterimi için $(-\infty, \infty)$ aralığının kullanıldığı örnekler sunulabilir.

- Denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürleri gerçekleştirilirken, kavramlara yönelik kanonik anlatıları içeren sözel gerçekleştirmeler eşliğinde hem cebirsel hem de grafiksel gerçekleştirmeleri içeren görsel araçlar bir arada kullanılabilir. Bu süreçte öğrencilerin farklı gerçekleştirmeler arasındaki ilişki/leri kanonik bir şekilde kurabilmesini sağlayacak söylemsel iletişime veya etkinliklere yer verilebilir.
- Denklem ve eşitsizliklere dair kelime kullanımlarına, hem kavramlar (denklem ve eşitsizlikler) hem de kavramlarının ilişkili olduğu matematiksel kavramlar (küme, polinom, fonksiyon, analitik düzlem, doğru, parabol gibi) bağlamında dikkat edilerek matematiksel bir dil eşliğinde kanonik söylemler tercih edilebilir ve öğrencilerin farkındalığının oluşmasına yönelik vurgulara söylemlerde yer verilebilir. Örneğin, değişkenin ait olduğu evrensel küme yerine öğrenci söylemlerinde rastlanılması muhtemel ve aslında fonksiyon kavramıyla ilişkili olan “tanım kümesi” ve “değer aralığı” gibi kullanımların uygun olmadığı vurgulanabilir. Benzer şekilde “çözüm kümesinin elemanları” yerine “değer/ler” gibi kullanımlarında denklem ve eşitsizlik kavramları hakkında konuşurken kanonik olmadığı söylenebilir. Polinom biçiminde denklem ve eşitsizlikler hakkında söylemlerde bulunurken, cebirsel ifadelerin polinom biçiminde olmasından dolayı “kök”, “derece”, “katsayı” gibi terimlerin kullanımın kabul görebileceği fakat herhangi bir denklem ya da eşitsizlik bağlamında “kök” terimi yerine “çözüm/ler”, “çözüm kümesinin elemanı”, “bilinmeyen” gibi söylemlerin uygunluğu da belirtilebilir. İlave olarak, kavramlar hakkında matematiksel anlatılar üretirken ya da matematiksel anlatılardan bahsederken, kelime kullanımının tam ve doğru bir şekilde kullanımı tercih edilebilir. Örneğin, “bu denklem düzlemde bir doğru belirtir” anlatısı yerine matematiksel olarak daha kanonik olan “bu denklemin çözüm kümesinin elemanlarının (analitik) düzlemde gösterimi bir doğru belirtir” anlatısı tercih edilebilir. Ya da “ikinci dereceden tek değişkenli bir denklemin çözümleri (kökleri), grafiğin x eksenini kestiği noktaların apsiseridir”

anlatısı yerine “ikinci dereceden bir değişkenli bir denklemin çözümleri (polinomun kökleri), aynı cebirsel ifade ile belirtilen ikinci dereceden tek değişkenli fonksiyonun sıfırlarıdır, yani bu fonksiyonun x eksenini kestiği noktaların apsisleridir” şeklindeki anlatısı tercih edilebilir.

- Öğrencilerin kavramların yapısına ve özelliklerine yönelik farkındalığının oluşabilmesi için derslerde yer verilecek ilgili görev durumlarının yanı sıra matematik sınavlarında da kavramların yapısına ve özelliklerine yönelik görev durumlarına yer verilebilir. Böylece öğretmenler, öğrencilerin matematiksel nesneler hakkında anlatılar üretmeyi kendilerine görev olarak gördüğü prosedürlerine yönelik fikir sahibi olma fırsatı bulabilir.

Araştırmanın bulgularından elde edilen sonuçları, matematiksel söyleme katılımında öğrenciler için kendilerine göre daha deneyimli katılımcıların (arkadaşı, öğretmeni, ebeveyni vb.) birer otorite rolünde olabileceği gibi ders kitaplarının da onların söylemlerinde güvendiği birer otorite rolünü üstlenebileceğini göstermiştir. Bununla birlikte kavramın yapısına ve özelliklerine yönelik görev durumlarının; öğrencilerin söylemlerini nesneleştirebilmesinde, onların kavramın farklı gerçekleştirmeleri arasında kanonik geçişleri yapabilmesi ve matematiksel nesneler hakkında anlatılar üretebilmesi önemli bir rol oynamıştır. Matematiksel söylemde de herhangi bir *öğrenme sürecinde bir uzmanın taklit edilmesi* ve böylece *matematiksel söylemini kişinin kendisiyle ya da başkalarıyla matematiksel bir iletişim kurması yoluyla bireyselleştirmesi* önemli görüldüğünden, araştırmanın sonuçlarından yola çıkarak öğretim programı hazırlayan uzmanlara sunulan öneriler ise şu şekildedir:

- Mevcut öğretim programı incelendiğinde (MEB, 2018) kazanımların çoğunlukla denklem ve eşitsizlikleri çözme prosedürlerini içeren rutinleri teşvik eden bir yapıda olduğu ve kavramların yapısına ve özelliklerine yönelik kazanımlara daha az ağırlık verildiği görülmüştür. Bu nedenle hazırlanması muhtemel öğretim programlarında, denklem ve eşitsizlik kavramlarının tanımlarına, yapısına ve

özelliklerine yönelik kazanımların sayısı artırılabilir ve bu doğrultuda ders kitaplarında bu kazanımlara yönelik matematiksel etkinliklere yer verilebilir.

- Öğretim programında kazanımların yazımında matematiksel söylem bağlamında kelime kullanımında bazı eksiklikler olduğu görülmüştür. Örneğin, “10.4.1.1. İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kavramını açıklar. (MEB, 2018, s. 29)” kazanımında olduğu gibi denklem ve eşitsizlikleri isimlendirirken cebirsel ifadenin hem polinom biçiminde olduğu belirtilmemiş hem de “değişken” terimi yerine “bilinmeyen” terimi tercih edilmiştir. Oysaki “Polinom biçimindeki ikinci dereceden tek değişkenli denklem kavramını açıklar” biçiminde bir ifadenin matematiksel söylem bağlamında daha kanonik olacağı düşünülmekte ve bu şekilde kullanımlar önerilmektedir. Bir başka örnekte ise yine ikinci dereceden tek değişkenli denklemler hakkında olan “10.4.1.4. İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin kökleri ile katsayıları arasındaki ilişkileri kullanarak işlemler yapar. (MEB, 2018, s. 30)” biçimindeki kazanımda aslında polinom kavramına ait olan “kök” teriminin denklem kavramı için kullanılmıştır. Burada cebirsel ifadenin polinom biçiminde olmasından dolayı sıkıntı oluşturmuyor gibi görünse de programda yer alan diğer kazanımlar incelendiğinde “kök” kullanımının polinom biçimde olmayan denklemler için de “...trigonometrik denklemlerin kökleri buldurulur (MEB, 2018, s.38)” biçiminde kullanıldığı görülmüştür. Bu durumun yansımalarının öğretmen ve öğrenci söylemlerinde de görülebilmesi muhtemel olduğundan denklem ve eşitsizlikler hakkında kazanımlar yazılırken “kök” terimi yerine “çözüm/ler”, “bilinmeyen/ler” ya da “çözüm kümesinin elemanları” biçimindeki kelime kullanımları tercih edilebilir. Bu doğrultuda “İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin kökleri ile katsayıları arasındaki ilişkileri kullanarak işlemler yapar.” şeklindeki bir kazanım, “İkinci dereceden bir değişkenli denklemin çözümleri ile cebirsel ifadede yer alan genelleştirilmiş reel sayılar arasındaki ilişkileri kullanarak işlemler yapar.” biçiminde veya “Polinom biçimindeki ikinci

dereceden bir değişkenli denklemin çözümleri ile katsayıları arasındaki ilişkileri kullanarak işlemler yapar.” şeklinde ifade edilebilir.

- Araştırmanın bulgularından elde edilen sonuçlar, öğrencilerin denklem ve eşitsizlik kavramlarına ilişkin rutinlerinde bir gelişimin olmasında, öğrencilerin kavramların birer açık önerme olmasına ve değişkenin ait olduğu evrensel kümeye dair farkındalığının etkili olduğunu göstermiştir. Bu nedenle gelecekte hazırlanması muhtemel öğretim programlarında mevcut programdaki (MEB, 2018) gibi “mantık” ve “kümeler” konusunun “denklemler ve eşitsizlikler” konusunun hemen öncesinde yer alması önerilmektedir. Bununla birlikte “denklemler ve eşitsizlikler” konusunun ilk kazanımı kavramların birer açık önerme olduğunu vurgulayacak şekilde denklem ve eşitsizliklerin tanımlarına ve özelliklerine yönelik olabilir.
- Öğretim programında “terimler ve kavramlar” başlığı eşliğinde verilen “değişken”, “bilinmeyen”, “kök” ve “değer” gibi kavramların tanımlarına; bağlamına uygun olacak şekilde ders kitaplarında yer verilebilir. Böylece hem öğretmenlerin hem de öğrencilerin bağlamına uygun bir şekilde kelimeleri matematiksel söylemde kullanmaları sağlanabilir. Bu şekilde bir denklemin çözümü için kullanımı yaygın olan “... ise x değerini bulunuz.” ve “... ise denklemin köklerini belirleyiniz” biçimindeki söylemlerin doğru olmadığına dair farkındalığın oluşması sağlanabilir.
- Ders kitaplarında öğrencileri matematiksel söyleme keşifsel bir şekilde katılım sağlamaları yönünde fırsatlar sunacak görev durumlarını içeren matematiksel etkinliklere yer verilebilir. Böylece öğretmenlere, matematik öğrenme ortamlarında öğrencilerini keşifsel katılıma teşvik etme konusunda rehberlik edilebilir. Ölçme ve değerlendirme için hazırlanan sorularda, kavramların yapısına ve özelliklerine yönelik sorulara da yer verilerek öğrenci öğrenmelerini daha uygun (kapsamlı) ve sağlıklı bir şekilde ölçülebilmesi sağlanabilir. Öğretim programlarında kavramların yapısına ve özelliklerine yönelik bu anlamda yapılacak iyileştirmelerin

öğretmenlere de rehber olacağı ve yürüttükleri derslerde yer vermelerini sağlayacağı için önemli olduğu düşünülmektedir.

Matematiksel söylem bağlamında matematik hakkındaki öğretimi ve öğrenimi analiz etmek ve araştırmak için *rutinlerine odaklanmak* esas olduğundan ve bu nedenle *matematiksel öğrenmenin araştırılması rutinlerin nasıl ortaya çıktığı ve daha sonra nasıl geliştiği sorusunu yanıtlamakla eşdeğer* olduğundan, araştırmanın sonuçlarından yola çıkarak matematik eğitiminde araştırma yapanlara sunulan öneriler ise şu şekildedir:

- Bu çalışmada ortaöğretim öğrencilerinin rutinlerinin yapısı ve rutin gelişimlerinin nasıl olduğuna dair “denklem ve eşitsizlik” kavramları bağlamında yanıt aranmıştır. Öğrenci rutinleri üzerine çalışma yapmayı düşünen araştırmacılar; aynı kavramları farklı görev durumları bağlamında araştırarak, bu araştırmanın bulgularına katkı sunabilir ve öğrencilerin ilgili kavramlara yönelik mevcut rutinlerine dair bulguları zenginleştirebilir. Denklem ve eşitsizlikler dışında farklı kavramlar bağlamında da benzer çalışmalar yapılabilir ve böylece matematiksel kavramlara yönelik söylemsel rutinlerin yapısına ve gelişimine yönelik literatüre katkılar sunulabilir.
- Bu çalışmada ortaöğretim öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik kavramlarına yönelik söyleme katılımları ritüel ve keşifsel katılıma ek olarak, “hibrit katılım” biçiminde tanımlanan bir katılım türüyle de incelenmiştir. Hibrit katılım öğrencilerin ritüel katılımdan keşifsel katılıma geçişin gözlemlenmeye başladığı bir katılım biçimi olarak görülmüş ve iletişimsel belirleyicileri betimlenmiştir. Öğrencilerin rutinleriyle söyleme katılımlarının nasıl olduğuna odaklanmayı düşünen matematik eğitimi araştırmacıları, aynı kavramları (denklem ve eşitsizlikler) farklı görev durumları bağlamında araştırarak bu araştırmanın bulgularına katkı sunabilir ve öğrencilerin ilgili kavramlara yönelik söyleme katılımlarının nasıl olduğuna dair bulguları zenginleştirerek literatüre katkıda bulunabilir. Bununla birlikte hem bu araştırma ile aynı hem de bu araştırmadan farklı matematiksel kavramlar bağlamında öğrencilerin söyleme katılımlarına dair

araştırmalar yaparak, hibrit katılıma yönelik yeni ve özgün iletişimsel belirleyiciler ekleyebilir ve çalışmasında veri analizi için kriter listelerini, bu çalışma da dahil literatürden yola çıkarak özgün ve bağlamsal bir şekilde oluşturabilir.

- Bu çalışmada öğrencilerin rutinleri aracılığıyla söyleme katılım biçimleri; söylemin nesneleştirilmesi, esneklik, bağlılık-tutarlılık, gerekçelendirme, katılımcının yetkinliği ve uygulanabilirlik olmak üzere altı farklı kriter bağlamında analiz edilmiştir. Öğrenci söylemlerini bu kriterler bağlamında incelemeyi düşünen araştırmacılar, aynı kavramları (denklem ve eşitsizlikler) farklı görev durumları bağlamında araştırarak bu araştırmanın bulgularına katkı sunabilir ve öğrencilerin ilgili kavramlara yönelik söyleme katılımlarının bu kriterler bağlamında nasıl olduğuna dair bulguları zenginleştirerek literatüre katkıda bulunabilir. Bununla birlikte yine araştırmacılar, bu araştırmayla aynı kavramlarda ya da farklı kavramlar bağlamında da bu kriterlerinden bir ya da birasına daha fazla odaklanacak şekilde araştırmalarını yürütebilir. Ayrıca kriterlerin sayısını azaltmak yerine bu araştırmayla aynı kavramlarda ya da farklı kavramlar bağlamında gözlemlenmesi muhtemel yeni kriterler ışığında da benzer çalışmaları yapabilir ve ilgili literatüre katkılar sunabilirler.
- Bu çalışmada ortaöğretim öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik kavramlarına yönelik gözlemlenen rutin gelişimlerinin nasıl olduğuna dair bulgulara örnekler sunulsa da gözlemlenen *bir rutin gelişiminin* nedenlerini açıklamak için elde edilen bulgular yeterli görülmemektedir. Aynı zamanda bu araştırmada ritüel rutinlerin kalıcılığına ya da araştırma sürecinde gelişim gözlemlenemeyen rutinelere ve bunun nedenine dair, araştırma problemi bağlamı dışında olduğu için detaylı bir inceleme de yapılmamıştır. Bu doğrultuda öğrencilerin rutinlerinin yapısına odaklanacak araştırmacılar, herhangi bir matematiksel kavram bağlamında gözlemledikleri rutin gelişimlerinin nedenlerini araştıran çalışmalar yapabilir. Benzer şekilde bu çalışmalar, gelişim gözlemlenmeyen rutinlerin nedenleri üzerine de odaklanabilir.

Fakat araştırmacılar rutinlerdeki gelişimin olup olmasının nedenlerini gözlemlene sürecinin uzun ve zor olabileceğini unutmamalı ve amacına uygun oldukça zengin veri toplamaya özen göstermelidir. Bu çalışmanın verilerinin denklem ve eşitsizlik kavramları bağlamında rutin gelişimlerinin nedenlerine odaklanacak çalışmalara katkı sunacağı da düşünülmektedir. Bu nedenle çalışmanın bulguları, ilgili kavram bağlamında rutin gelişimini araştırmaya odaklanacak çalışmalar için yol gösterici nitelikte olabilir.

- Bu çalışmada araştırmacı aynı zamanda katılımcıların matematik derslerini de yürüttüğünden, öğretmen söylemlerinin öğrenci söylemlerini etkileyebileceği ve böylece öğretmenin söylemlerinin öğrencilerin matematiksel söyleminin gelişiminde önemli bir rol oynayabileceği gözlemlenmiştir. Fakat araştırma problemi öncelikli olarak ilgili kavramlar bağlamında öğrenci söylemlerine odaklandığı için öğretmen söylemlerinin öğrenci söylemlerine olan etkilerine dair detaylı bir bulgu sunumu bu çalışmada yer almamaktadır. Buna rağmen, araştırma sürecinde elde edilen sonuçlardan yola çıkarak matematik eğitimi araştırmacıları, herhangi bir matematiksel kavram bağlamında öğretmen ve öğrenci söylemlerini bir arada ele alarak, öğretmen söylemlerinin öğrenci söylemlerini ne ölçüde etkilediği incelemesi tavsiye edilebilir.
- Bu çalışmada ortaöğretim öğrencilerinin denklem ve eşitsizliklere yönelik rutinlerinin yapısı ortaya konulurken öğrencilerin kanonik olmayan söylemlerinin (eksik veya hatalı olan) nedenleri, araştırma probleminin dışında olduğu için araştırılmamıştır. Ancak öğrencilerin kanonik söylemlerden farklı olan iletişimlerinin ve bu süreçte matematiksel söylemlere katılırken yaşadığı iletişimsel güçlüklerinin nedenlerinin bilinmesinin, öğrencilerin rutin gelişimlerinin nasıl sağlanabileceğine dair fikirler sunacağı düşünülmektedir. Bu nedenle öğrencilerin söylemleri üzerine araştırma yapmayı düşünenler, öğrencilerin “iletişimsel çatışmalarının (commognitive conflict)” kaynağını ortaya çıkarmak amacıyla hem

bu araştırmanın kavramları hem de farklı matematiksel kavramlar bağlamında araştırmalar yapabilir. Ek olarak, öğrencilerin iletişimsel çatışmalarını kanonik bir hale getirebilmenin yollarına dair yapılacak söylemsel çalışmalarda literatüre ve matematik eğitime katkı sunabilir.



KAYNAKLAR

- Adler P. A. & Adler P. (1998). Observational techniques. In N. K. Denzin, Y. S. Lincoln (Eds.), *Collecting and interpreting qualitative materials* (pp. 79–109). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S. & Halıcıoğlu, S. (2020). *Temel matematik kavramların künyesi*. Ankara: Palme.
- Baccaglini-Frank, A. (2021). To tell a story, you need a protagonist: how dynamic interactive mediators can fulfill this role and foster explorative participation to mathematical discourse. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 291-312.
- Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Ben-Dor, N. & Heyd-Metzuyanim, E. (2021). Standing on each other's shoulders: A case of coalescence between geometric discourses in peer interaction. *The Journal of Mathematical Behavior*, 64, 100900.
- Ben-Zvi, D. & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, daedalus' wings and the learners autonomy. *Education et Didactique*, 1(3), 117-134.
- Bredo, E. (1997) The social construction of learning. In G. P. Phye (Ed.) *Handbook of academic learning. Construction of knowledge* (pp. 3-43). San Diego: Academic.
- Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19(1), 1.

- Caduri, G. & Heyd-Metzuyanim, E. (2015). Is collaboration across incommensurable theories in mathematics education possible? *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 29, 1–17.
- Chan, M. C. E. & Sfard, A. (2020). On learning that could have happened: The same tale in two cities. *The Journal of Mathematical Behavior*, 60.
- Christiansen, I. M., Corriveau, C. & Pettersson, K. (2023). Hybrids between rituals and explorative routines: opportunities to learn through guided and recreated exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 112(1), 49-72.
- Cobb, P. (2006a). Mathematics learning as a social process. In J. Maas & W. Schlöglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 147-152). Rotterdam, The Netherlands: Sense.
- Cobb, P. (2006b). Discursive perspectives on mathematical learning: Commentary on Sfard's and Lerman's chapters. In J. Maas & W. Schlöglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 189-201). Rotterdam, The Netherlands: Sense.
- Creswell, J. W. (2014). *Research design, qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. United State of America: Sage.
- de Lima, R. N. & Tall, D. (2010). An example of the fragility of a procedural approach to solving equations. <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010x-lima-quadraticsdraft.pdf> adresinden erişilmiştir.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

- Ehrenfeld, N. & Heyd-Metzuyanim, E. (2018). Rituals, explorations, and cultural resources in the mathematics classroom: when arguing does not help learning. *International Society of the Learning Sciences*, 1627-1628.
- Emre-Akdoğan, E. (2015). *Lise öğrencilerinin geometrik dönüşümlerle ilgili matematiksel söylemlerinin gelişiminin incelenmesi*. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Emre-Akdoğan, E. (2023). The genesis of routines: Mathematical discourses on the equal sign and variable. *The Electronic Journal for Research in Science & Mathematics Education*, 27(1), 77-94.
- Emre-Akdoğan, E., Güçler, B. & Argün, Z. (2018). The development of two high school students' discourses on geometric translation in relation to the teacher's discourse in the classroom. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(5), 1605–1619.
- Essack, R. M. (2015). *Exploring grade 11 learner routines on function from a commognitive perspective*. Doctoral Dissertation, University of Witwatersrand, Johannesburg, South Africa.
- Foucault, M. (1972). *The archaeology of knowledge*. New York: Pantheon Books.
- Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116-140.
- Glesne C. & Peskin A. (1992). *Becoming qualitative researchers: An introduction*. White Plains, NY: Longman.
- Guthrie, E. R. (1940). Association and the law of effect. *Psychological Review*, 47(2), 127.
- Halmaghi, E. (2011). *Undergraduate students' conceptions of inequalities*. Doctoral Dissertation. Simon Fraser University: Canada.

- Herbel-Eisenmann, B., Meaney, T., Bishop, J. P. & Heyd-Metzuyanim, E. (2017). Highlighting heritages and building tasks: A critical analysis of mathematics classroom discourse literature. *Compendium for Research in Mathematics Education*, 722-765.
- Heyd-Metzuyanim, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics—teacher–student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 341-368.
- Heyd-Metzuyanim, E. (2015). Vicious cycles of identifying and mathematizing: A case study of the development of mathematical failure. *Journal of the Learning Sciences*, 24(4), 504-549.
- Heyd-Metzuyanim, E. (2019). Changing teaching practices towards explorative mathematics instruction—The interweaving of teacher identity and pedagogical discourse. *Teaching and Teacher Education*, 86, 102862.
- Heyd-Metzuyanim, E., Elbaum-Cohen, A. & Tabach, M. (2022). The aRithmetic Discourse Profile as a tool for evaluating students' discourse according to the ritual to explorative continuum. *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 384–391.
- Heyd-Metzuyanim, E. & Graven, M. (2019). Rituals and explorations in mathematical teaching and learning: introduction to the special issue. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 141-151.
- Heyd-Metzuyanim, E. & Shabtay, G. (2019). Narratives of 'good' instruction: Teachers' identities as drawing on exploration vs. acquisition pedagogical discourses. *ZDM Mathematics Education*. 51, 541–554.

- Heyd-Metzuyanim, E., Smith, M., Bill, V. & Resnick, L. B. (2019). From ritual to explorative participation in discourse-rich instructional practices: a case study of teacher learning through professional development. *Educational Studies in Mathematics*, 101, 273-289.
- Heyd-Metzuyanim, E., Tabach, M. & Nachlieli, T. (2016). Opportunities for learning given to prospective mathematics teachers: Between ritual and explorative instruction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19, 547-574.
- Hoch, M. & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills. *Proceedings of the 30th PME conference*, 305–312.
- Jayakody, G. (2015). Commognitive conflicts in the discourse of continuous functions. *Proceedings of the 18th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, 611–619.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 11–49). Rotterdam: Sense.
- Kieran, C., Forman, E. & Sfard, A. (2001). Guest editorial learning discourse: sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 1–12.
- Kim, D. J., Choi, S. & Lim, W. (2017). Sfard's commognitive framework as a method of discourse analysis in mathematics. *International Journal of Cognitive and Language Sciences*, 11(11), 481-485.
- Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. Oxford University.
- Kooloos, C., Oolbekkink-Marchand, H., Kaenders, R. & Heckman, G. (2020a). Orchestrating mathematical classroom discourse about various solution methods:

- Case study of a teacher's development. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41(2), 357-389.
- Kooloos, C., Oolbekkink-Marchand, H., Kaenders, R. & Heckman, G. (2020b). Collaboratively developing classroom discourse. *Proceedings of ICMI Study*, 25, 372-379.
- Kozulin, A. & Wertsch, J. V. (1987). Vygotsky and the social formation of mind. *American Journal of Psychology*, 100(1), 123.
- Krueger, R. A. & Casey, M.A. (2000). *Focus groups: a practical guide for applied research*, Thousand Oaks, CA: Sage.
- Küchle, V. A. (2021). *Operationalizing the commognitive framework*. <https://www.researchgate.net/publication/355181349> adresinden erişilmiştir.
- Lave, J. & Wenger, E. (1991). Learning in doing: Social, cognitive, and computational perspectives. *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*, 10, 109-155.
- Lavie, I. & Sfard, A. (2019). How children individualize numerical routines: Elements of a discursive theory in making. *Journal of the Learning Sciences*, 28(4-5), 419-461.
- Lavie, I., Steiner, A. & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 153-176.
- Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*, 1, 19-44.
- Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 87-113.
- Lerman, S. (2006). Socio-cultural research in PME. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and, future* (pp. 347–366). Rotterdam: Sense.

- Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–34). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Lisarelli, G. (2019). *A dynamic approach to functions and their graphs: A study of students' discourse from a commognitive perspective*. Doctoral Dissertation, University of Firenze, Firenze, Italy. <https://flore.unifi.it/handle/2158/1152055#.X2dmIC8Rp24> adresinden erişilmiştir.
- Lisarelli, G., Macchioni, E. & Miragliotta, E. (2022). A developing discourse on transitions between different realizations of the same function. *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 147-154.
- Mbhiza, H. (2021). Rural teachers' teaching of algebraic functions through a commognitive lens. *Interdisciplinary Journal of Rural and Community Studies*, 3(1), 10-20.
- Millî Eğitim Bakanlığı (2018). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. sınıflar) öğretim programı*. <https://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=343> sayfasından erişilmiştir.
- Millî Eğitim Bakanlığı (2019). *Ortaöğretim fen lisesi matematik 9 ders kitabı*. Ankara: Korza.
- Morgan, C. (1998). *Writing mathematically: The discourse of investigation*. Falmer.
- Moschkovich, J. N. (Ed.). (2010). *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research*. Charlotte, NC: Information Age.

- Mudaly, V. & Mpofu, S. (2019). Learners' views on asymptotes of a hyperbola and exponential function: A commognitive approach. *Problems of Education in the 21st Century*, 77(6), 734-744.
- Nachlieli, T. & Katz, Y. (2017). Ritual towards explorative classroom participation of pre-service elementary school mathematics teachers. *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2963-2971.
- Nachlieli, T. & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom—The case of function. *International Journal of Educational Research*, 51-52, 10–27.
- Nachlieli, T. & Tabach, M. (2015). The discursive routine of personifying and its manifestation by two instructors. *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1147-1453.
- Nachlieli, T. & Tabach, M. (2019). Ritual-enabling opportunities-to-learn in mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 253-271.
- Nachlieli, T. & Tabach, M. (2022). Classroom learning as a deritualization process: The case of prospective teachers learning to solve arithmetic questions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 65, 100930.
- Nain, A. (2017). Flexible algebraic action on quadratic equations. *International Journal of Advanced Research and Development* 2(3), 209-214.
- Nardi, E. (2005). ‘Beautiful minds’ in rich discourses: Employing discursive approaches to research in mathematics education. *European Educational Research Journal*, 4(2), 145-154.
- Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E. & Viirman, O. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: The case of discursive shifts in the study of Calculus. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 182-198.

- Ng, O. (2016). Comparing calculus communication across static and dynamic environments using a multimodal approach. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 2(2), 115–141.
- Nisa, Z. & Lukito, A. & Masriyah, M. (2021). Students mathematical discourse analysis by commognition theory in solving absolute value equation. *Journal of Physics: Conference Series*, 1808(1), 1–10.
- Patton, M. Q. (2015). *Qualitative research & evaluation methods: integrating theory and practice*. Los Angeles: Sage.
- Pavlov, I. P. (1927). Conditioned reflexes (G.V. Anrep, Trans.). London: Oxford University.
- Piaget, J. (1952). *The origins of intelligence in children*. New York: International Universities.
- Presmeg, N. (2016). Commognition as a lens for research. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 423-430.
- Rivera, F. & Becker, J. R. (2004). A socio-cultural account of students' collective mathematical understanding of polynomial inequalities in instrumented activity. *Proceedings of the 28th PME International Conference* 4, 81–88.
- Roberts, A. (2016). *A study of Grade 8 and 9 learner thinking about linear equations, from a commognitive perspective*. Doctoral dissertation, University of Cape Town, South Africa.
- Roberts, A. & le Roux, K. L. (2019). A commognitive perspective on Grade 8 and Grade 9 learner thinking about linear equations. *Pythagoras*, 40(1), 1–15.
- Schunk, D. H. (2012). *Learning theories an educational perspective*. Boston: Pearson.

- Scott, S. N. & Palincsar, A. S. (2013). *The historical roots of sociocultural theory*. <http://www.education.com/reference/article/sociocultural-theory/> adresinden erişilmiştir.
- Sinclair, N. & Heyd-Metzuyanim, E. (2014). Learning number with TouchCounts: The role of emotions and the body in mathematical communication. *Technology, Knowledge and Learning*, 19, 81–99.
- Sinclair, N. & Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research*, 51, 28-44.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, 16(4), 565-613.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University.
- Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, 51, 1-9.
- Sfard, A. (2015). Learning, commognition and mathematics. *The Sage Handbook of Learning*, 129-138.
- Sfard, A. (2017). Ritual for ritual, exploration for exploration or what the learners get is what you get from them in return. In J. Adler & A. Sfard (Eds.), *Research for educational change: Transforming researchers' insights into improvement in mathematics teaching and learning* (pp. 39–63). London: Routledge.

- Sfard, A. (2018). On the need for theory of mathematics learning and the promise of 'commognition'. *The Philosophy of Mathematics Education Today*, 219-228.
- Sfard, A. (2020). Commognition. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 95-101.
- Sfard, A. & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different?—Early numerical thinking revisited. *Cognition and Instruction*, 23(2), 237-309.
- Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Skinner, B. F. (1938). *The behavior of organisms*. New York: Appleton-Century-Crofts.
- Steffe, L. P. & Thomson, P. W. (2000). *Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Swidan, O. & Daher, W. M. (2019). Low achieving students' realization of the notion of mathematical equality with an interactive technological artifacts. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(4), 1690-1704.
- Tabach, M. (2006). Research and teaching—Can one person do both? A case study. *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 5, 233–240.
- Tabach, M. & Nachlieli, T. (2011). Combining theories to analyse classroom discourse: A method to study learning process. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2524-2538.
- Tabach, M. & Nachlieli, T. (2016). Communicational perspectives on learning and teaching mathematics: Prologue. *Educational Studies in Mathematics*, 91, 299-306.
- Tsamir, P. & Reshef, M. (2006). Students' preferences when solving quadratic inequalities. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 28(1), 37.

- Tudge, J. & Scrimsher, S. (2003). Lev S. Vygotsky on education: A cultural-historical, interpersonal, and individual approach to development. In B. J. Zimmerman & D. H. Schunk (Eds.), *Educational psychology: A century of contributions* (pp. 207–228) Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Viirman, O. & Nardi, E. (2019). Negotiating different disciplinary discourses: biology students’ ritualized and exploratory participation in mathematical modeling activities. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 233–252
- Vyncke, M. (2012). *The Concept and practice of critical thinking in academic writing: An investigation of international students’ perceptions and writing experiences*. Doctoral Dissertation, King’s College, London.
- Vygotsky, L. S. & Cole, M. (1978). *Mind in society: Development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University.
- Vygotsky, L. S. (1981). The genesis of higher mental functions. In J. V. Wertsch (Ed.), *The concept of activity in Soviet psychology*. Armonk, NY: M.E. Sharpe.
- Vygotsky, L. S. (1987). The collected works of LS Vygotsky: The fundamentals of defectology (Vol. 2). Springer & Business.
- Watson, J. B. (1924). *Behaviorism*. New York: Norton.
- Weingarden, M., Heyd-Metzuyanim, E. & Nachlieli, T. (2019). The realization tree assessment tool—examining explorative participation in mathematics lessons. *The Journal of Mathematical Behavior*, 56, 100717.
- Wenger, E. (1998). Communities of practice: Learning as a social system. *Systems Thinker*, 9(5), 2-3.
- Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin.
- Yin, R.K. (2018). *Case Study Research and Applications*. London UK: Sage.

EKLER



EK 1. Etik Komisyon Onay Formu

Evrak Tarih ve Sayısı: 31.01.2022-E.276144



**T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Etik Komisyonu**

Sayı : E-77082166-302.08.01-276144
Konu : Bilimsel ve Eğitim Amaçlı

31.01.2022

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Üniversitemiz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı **Doktora Öğrencisi Tuba AKÇAKOCA'nın, Prof.Dr.Ziya ARGÜN'ün** danışmanlığında yürüttüğü **"Ortaöğretim Öğrencilerinin Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarına İlişkin Rutinlerinin İncelenmesi"** adlı tez çalışması ile ilgili konu Komisyonumuzun **11.01.2022** tarih ve **01** sayılı toplantısında görüşülmüş olup,

İlgilinin çalışmasının, yapılması planlanan yerlerden izin alınması koşuluyla yapılmasında etik açıdan bir sakınca bulunmadığına oybirliği ile karar verilmiş ve karara ilişkin imza listesi ekte gönderilmiştir.

Bilgilerinizi rica ederim.

Araştırma Kod No: 2022 - 121

Prof. Dr. İsmail KARAKAYA
Komisyon Başkanı

Ek:1 Liste

DAĞITIM

Gereği:

Sayın Prof. Dr. Ziya ARGÜN

Bilgi:

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu belge, güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Bu belge,güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

EK 2. Araştırma için MEB İzin Belgesi

Evrak Tarih ve Sayısı: 23.02.2022-E.298818



**T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı**

Sayı : E-17311665-044-298818
Konu : Anketler (Tuba AKÇAKOCA)

23.02.2022

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : a) 09.02.2022 tarihli ve 80287700-044- 286396 sayılı yazı.
b) 22.02.2022 tarihli ve E-14588481-605.99-44154050 sayılı yazı.

Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim dalı doktora öğrencisi Tuba AKÇAKOCA'nın, Prof. Dr. Ziya ARGÜN danışmanlığında yürüttüğü "Ortaöğretim Öğrencilerinin Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarına İlişkin Rutinlerinin İncelenmesi" adlı tez çalışması kapsamında Ankara İl Millî Eğitim Müdürlüğüne bağlı okullarda uygulama yapmasına izin verilmesine dair ilgi (a) yazınız Ankara Valiliğine iletilmiş olup, alınan ilgi (b) cevabı yazı ve ekleri ilişikte gönderilmiştir.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof. Dr. Bekir BULUÇ
Rektör Yardımcısı

Ek:İlgi (b) yazı ve ekleri (6 sayfa)

Bu belge, güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Bu belge,güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Evrak Tarih ve Sayısı: 23.02.2022-E.298818

Evrak Tarih ve Sayısı: 23.02.2022-E.298751



T.C.
ANKARA VALİLİĞİ
Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E-14588481-605.99-44154050
Konu : Araştırma İzni

22.02.2022

GAZİ ÜNİVERSİTESİNE
(Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı)

İlgi: a) MEB Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 2020/2 sayılı Genelgesi.
b) 09.02.2022 tarihli ve 286602 sayılı yazınız.

Üniversiteniz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı doktora öğrencisi Tuba AKÇAKOCA'nın "**Ortaöğretim öğrencilerinin Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarına İlişkin Rutinlerinin İncelenmesi**" konulu çalışması kapsamında İlimize bağlı liselerde uygulama yapma talebi ilgi (a) Genelge çerçevesinde incelenmiştir.

Yapılan inceleme sonucunda, söz konusu araştırmanın Müdürlüğümüzde muhafaza edilen ölçme araçlarının; Türkiye Cumhuriyeti Anayasası, Milli Eğitim Temel Kanunu ile Türk Milli Eğitiminin genel amaçlarına uygun olarak, ilgili yasal düzenlemelerde belirtilen ilke, esas ve amaçlara aykırılık teşkil etmeyecek, eğitim-öğretim faaliyetlerini aksatmayacak şekilde okul ve kurum yöneticilerinin sorumluluğunda, gönüllülük esasına göre uygulanması Müdürlüğümüzce uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Burhan İNAN
Vali a.
Milli Eğitim Müdür V.

Ek: Uygulama Araçları

Dağıtım:
Gereği:
Gazi Üniversitesi

Bilgi:
B Planı

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Bu belge,güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

EK 3. Katılımcılar için Bilgilendirilmiş Gönüllü Olur Formu

GAZİ ÜNİVERSİTESİ ETİK KOMİSYONU FORM-2

Rev-3
19.12.2017



T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
ETİK KOMİSYONU

KATILIMCILAR İÇİN BİLGİLENDİRİLMİŞ GÖNÜLLÜ OLUR FORMU

Sizi, Gazi Üniversitesi Etik Komisyonu'ndan tarih / sayı ile izin alınan* ve Ziya Argün tarafından yürütülen "Ortaöğretim Öğrencilerinin Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarına İlişkin Rutinlerinin İncelenmesi" başlıklı araştırmaya davet ediyoruz. Bu çalışmaya katılmak tamamen gönüllülük esasına dayanmaktadır. Çalışmaya katılmama veya katıldıktan sonra herhangi bir anda çalışmadan çıkma hakkına sahipsiniz. Bu çalışmaya katılmanız için sizden herhangi bir ücret istenmeyecektir. Çalışmaya katıldığınız için size bir ödeme yapılmayacaktır. Çalışmadan elde edilecek bilgiler tamamen araştırma amacı ile kullanılacak olup kişisel bilgileriniz gizli tutulacaktır.

*Gazi Üniversitesi Etik Komisyon izni alındıktan sonra doldurularak kullanılacaktır.

Araştırmanın Amacı	Ortaöğretim öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik kavramlarını öğrenme süreçlerini ve süreçteki gelişimlerinin nasıl olduğunu incelemektir.
Araştırmanın Yöntemi	Araştırma görüşme tekniği kullanılarak görev durumlarında yer alan problemlerin cevaplanması ve cevapların kayıt altına alınıp daha sonrasında değerlendirilmesi yöntemiyle gerçekleştirilecektir.
Araştırmanın Öngörülen Süresi (Başlama ve Bitiş Tarihi)	27.01.2022/17.06.2022
Araştırmaya Katılması Beklenen Katılımcı/Gönüllü Sayısı	5-6
Araştırmanın Yapılacağı Yerler	Ankara Keçiören Atatürk Anadolu İmam Hatip Lisesi
Görüntü ve/veya ses kaydı alınacak mı?	Evet ☒ Hayır ☐

Tablo katılımcıların anlayabileceği biçimde, akademik dil kullanılmadan yazılacaktır.

KATILIMCI BEYANI

Yukarıda amacı ve içeriği belirtilen bu araştırma ile ilgili bilgiler tarafıma aktarıldı. Bu bilgilerden sonra araştırmaya katılımcı olarak davet edildim. Bu çalışmaya katılmayı kabul ettiğim takdirde gerek araştırma yürütülürken gerekse yayımlandığında kimliğimin gizli tutulacağı konusunda güvence aldım. Bana ait verilerin kullanımına izin veriyorum. Araştırma sonuçlarının eğitim ve bilimsel amaçlarla kullanımı sırasında kişisel bilgilerimin dikkatle korunacağı konusunda bana yeterli güven verildi. Araştırmanın yürütülmesi sırasında herhangi bir sebep göstermeden çekilebilirim. Araştırma için yapılacak harcamalarla ilgili herhangi bir parasal sorumluluk altına girmiyorum. Bana herhangi bir ödeme yapılamayacaktır. Araştırma ile ilgili bana yapılan tüm açıklamaları ayrıntılarıyla anlamış bulunmaktayım. Bu çalışmaya hiçbir baskı altında kalmadan kendi bireysel onayım ile katılıyorum. İmzalı bu form kağıdının bir kopyası bana verilecektir.

Araştırma yürütücüsü(Tez çalışmalarında Danışman tarafından imzalanacaktır.)

Adı ve Soyadı	Ziya Argün	Tarih ve İmza
Adres ve telefonu		

Katılımcı

Adı ve Soyadı		Tarih ve İmza
Adres ve telefonu		

Velayet veya Vesayet Altındaki Katılımcılar için Veli/Vasi

Adı ve Soyadı		Tarih ve İmza
Adres ve telefonu		

EK 4. Veli Onam Formu

Sayın Veli;

Çocuğunuzun katılacağı bu çalışma, “Ortaöğretim Öğrencilerinin Denklem ve Eşitsizlik Kavramlarına İlişkin Rutinlerinin İncelenmesi” adıyla, 27.01.2022-17.06.2022 tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: Ortaöğretim öğrencilerinin denklem ve eşitsizlik kavramlarını öğrenme süreçlerini ve süreçteki gelişimlerinin nasıl olduğunu incelemektir.

Araştırma Uygulaması: Görüşme şeklindedir.

Araştırma T.C. Millî Eğitim Bakanlığı’nın ve okul yönetiminin de izni ile gerçekleştirilmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çocuğunuz çalışmaya katılıp katılmamakta özgürdür. Araştırma çocuğunuz için herhangi bir istenmeyen etki ya da risk taşımamaktadır. Çocuğunuzun katılımı **tamamen sizin isteğinize bağlıdır**, reddedebilir ya da herhangi bir aşamasında ayrılabilirsiniz. Araştırmaya katılmamama veya araştırmadan ayrılma durumunda öğrencilerin akademik başarıları, okul ve öğretmenleriyle olan ilişkileri etkilemeyecektir.

Çalışmada öğrencilerden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir.

Uygulamalar, genel olarak kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden çocuğunuz kendisini rahatsız hissederse cevaplama işini yarıda bırakıp çıkmakta özgürdür. Bu durumda rahatsızlığın giderilmesi için gereken yardım sağlanacaktır. Çocuğunuz çalışmaya katıldıktan sonra istediği an vazgeçebilir. Böyle bir durumda veri toplama aracını uygulayan kişiye, çalışmayı tamamlamayacağını söylemesi yeterli olacaktır. Anket çalışmasına katılmamak ya da katıldıktan sonra vazgeçmek çocuğunuza hiçbir sorumluluk getirmeyecektir.

Onay vermeden önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımızla,

Araştırmacı : TUBA AKÇAKOCA

İletişim bilgileri :

*Velisi bulunduğum sınıfı numaralı öğrencisi
.....’in yukarıda açıklanan araştırmaya katılmasına izin
veriyorum. (Lütfen formu imzaladıktan sonra çocuğunuzla okula geri gönderiniz*).*

...../...../.....

İsim-Soyisim İmza:

Veli Adı-Soyadı :

Telefon Numarası:

EK 5. Katılımcı Belirleme Tarama Formu

OTURUM 1

1. Denklem ve eşitsizlik kavramlarından anladıklarınızı paylaşınız.
2. Denklem ve eşitsizlik kavramları arasında sizce bir ilişki var mıdır? Var olduğunu düşünüyorsanız bu ilişkiyi/ilişkileri örnek vererek açıklayınız.
3. Aşağıdaki cebirsel ifadelerden “birinci dereceden bir değişkenli denklem” ya da “birinci dereceden bir değişkenli eşitsizlik” olanları seçiniz. Seçiminizin gerekçelerini açıklayınız.

• $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $z \in \mathbb{N}$ olmak üzere,
$-3x + \sqrt{7} = 0,5x - 4$	$(x + 3)(y + 3) = xy + 9$	$\sqrt{4z + 4} = 0$

• $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
$2\sin x - 1 = 0$	$\frac{a}{2} - 20 = a + 1$	$\left(\frac{25}{9}\right)^{y-2} \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{y+1}$

• $c \in \mathbb{R} - \{5\}$ olmak üzere,	• $x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,	• $z \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
$\frac{2c}{c-5} \leq 1$	$x - 9 < 8 + 2x$	$ 5z - 7 \geq 13$

• $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere,	• $a, b, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
$\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{2}{x} = 0$	$ax - b = bx + a$	$y^5 - 3y + 1 = 0$

• $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,
$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$	$2x - 3y + z = -1$	$2m + 3n > 6$

OTURUM 2

1. “Denklemin çözümü” ifadesinden anladıklarınızı örneklerle açıklayınız.
2. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$3x - 2(x - 4) = 4(x + 1) \text{ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.}$$

3. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$2(x - 5) + \frac{x-1}{3} = -3x + 4 \text{ denklemini sağlayan reel sayıları belirleyiniz.}$$

4. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\frac{3x}{x-5} = 3 + \frac{15}{x-5} \text{ ve } 3x - 15 = 3x - 15 \text{ denklemlerinin çözüm kümelerini}$$

karşılaştırınız. Ne gördüğünüzü açıklayınız.

5. $2x - 3 \geq 7$ eşitsizliği sağlayan reel sayıların kümesi olan aralığı oluşturunuz.

6. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} > 1 \text{ eşitsizliğinin çözümlerini belirleyiniz.}$$

7. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x - 1 \leq 5 - x < 8 + 3x \text{ eşitsizliğinin çözüm kümesini aralık olarak ifade ediniz.}$$

8. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$-\frac{1}{22} < \frac{1}{4x+6} \leq \frac{1}{14} \text{ eşitsizliğini sağlayan reel sayıların kümesini bulunuz.}$$

OTURUM 3

1. Aşağıdaki cebirsel ifadelerin “denklem sistemi” ya da “eşitsizlik sistemi” türlerinden hangisine ait olduğuna karar veriniz ve kararınızın gerekçe/lerini açıklayınız.

• $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $x, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}x - \sqrt{3}y &= 6 \\ -x + 4y &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a - 2b &= 5 \\ -3b + 5a &= 11 \\ 2a - 4b &= 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+2} - 2z &= 9 \\ \frac{x}{x+2} + 4z &= -18\end{aligned}$$

• $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
$y \leq x - 6$	$ax + 2by = c$	$ x + y \leq 2$
$y > 2x + 8$	$-2ax - 3c = 4by$	

• $y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
$3y - 4 \leq -y < 11 + 2y$	$z + x = 6$	$xz = 3$
	$0,2x + 0,3z + 0,1y = 15$	$y^2 + 3z^2 = 12$
	$z - 3y = 7$	

• $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,	• $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
$-1 < x \leq 3$	$a + \sqrt{2}b \leq 5$	$ x \leq 2$
$-5 \leq y < 2$	$a \geq 0$	$ y > 3$

- $x, y \in \mathbb{R}$ olmak

üzere,

$$x < 2$$

$$y \geq 1$$

- $x \in \mathbb{R}$ olmak

üzere,

$$2x - 4 = 6$$

$$x - 3 = 12 - 2x$$

- $x, y \in \mathbb{R}$ olmak

üzere,

$$x^2 + y^2 - 2xy = 4$$

$$x + y = 4$$

2. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$5x + 3y = 7$$

$$y - 2x = -5$$

denklem sisteminin çözüm kümesini,

- yok etme metodunu kullanarak bulunuz.
- yerine koyma metodunu kullanarak bulunuz.

3. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$2x - 6y = 12$$

$$-x + 3y = 9$$

denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarını analitik düzlemde grafik çizimi yoluyla bulunuz.

4. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$-2x - y < -1$$

$$4x + 2y \leq -6$$

eşitsizlik sistemini sağlayan reel sayı ikililerinin kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

OTURUM 4

1. Aşağıdaki cebirsel ifadelerden “ikinci dereceden bir değişkenli denklem” olanları seçiniz. Seçiminizin gerekçe/lerini açıklayınız.

• $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(x + 5)^2 = x$	• $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	• $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $xy - 4x = 3$
• $z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $4^z - 5 \cdot 2^z + 6 = 0$	• $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a^2 - 4 = 0$	• $y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\sqrt{y^4} = 0$
• $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ax^2 + bx = c$	• $x, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\left(\frac{1}{2}x - z\right)^2 = 2,5$	• $z \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $z^6 - 3z^3 - 4 = 0$
• $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere, $\frac{x^2 - 5}{x} = 3$	• $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $-x(6 + x) = 2$	• $y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $2y - \frac{1}{4} + \frac{9}{5}y^2 = 0$

2. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 5 \text{ ve } x^2 - 3x + 2 = 5x - 10 \text{ denklemlerinin çözüm kümelerini}$$

karşılaştırınız. Ne gördüğünüzü açıklayınız.

3. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$(a - 3)x^4 - bx^3 + x^{c+2} - 5x + 1 = 0$ ifadesi ikinci dereceden bir değişkenli bir denklem belirttiğine göre $a + b - c$ ifadesinin eşitini bulunuz.

4. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$2x^2 + x - 3 = 0$ denkleminin czm kümesini bulunuz.

5. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$x^2 - 3x + 5 = 0$ denklemini sağlayan reel sayıların kümesini bulunuz.

6. Czm kümesi $\{-2, 3\}$ olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

7. Czm kümesindeki elemanların toplamı 4 ve carpımı -5 olan ikinci dereceden bir değişkenli denklemi yazınız.

8. $m \in \mathbb{R} - \{-1\}$ olmak üzere $(m + 1)x^2 + 2mx + m - 1 = 0$ denklemi için

- I. Czm kümesi farklı iki reel sayıyı içerir.
- II. Czm kümesinin elemanlarından biri -1 dir.
- III. Czm kümesindeki tüm elemanlar negatiftir.

ifadelerinden hangileri kesinlikle doğrudur? Gereke/leriyle açıklayınız.

OTURUM 5

1. Bugünlerde Ankara’da şehir içi taksimetre açılış ücreti 6 TL ve her bir kilometre için ise ücret 4,7 TL’ dir. Kilometreye bağlı olarak bir yolcunun vereceği ücreti belirleyen cebirsel ifadeyi yazınız.
 2. Ayşe ile Berfin’ in cebindeki paralar ile ilgili aşağıdakiler bilinmektedir.
 - Ayşe, Berfin’e 50 TL verdiğinde paraları eşit olmaktadır.
 - Berfin, Ayşe’ye 15 TL verdiğinde Ayşe’nin parası Berfin’ in parasının 5 katı olmaktadır.
- Bu şartlar altında,
- a. Ayşe’nin parasını hesaplamada kullanılabilecek cebirsel ifadeyi yazınız.
 - b. Ayşe’nin parasının kaç TL olduğunu bulunuz.
3. Gökhan internet üzerinden tanesi 45 TL olan 32 GB’lık taşınır belleklerden sipariş vermek istiyor. Sipariş için kargo ücreti 10 TL’dir. Gökhan’ın bu sipariş için harcayabileceği en fazla 200 TL’si vardır.
 - a. Gökhan’ın sipariş edebileceği maksimum taşınır bellek sayısını belirleyen cebirsel ifadeyi yazınız.
 - b. Gökhan’ın elindeki parayla alabileceği 32 GB’lık taşınır bellek sayısını bulunuz.

EK 6. Einat Heyd-Metzuyanım ile Mail Yoluyla Yapılan Yazışma

Gönderen: Einat Heyd-Metzuyanım
Tarih: 4 Mar 2022 Cum, saat 08:43
Konu: Re:
Alıcı: Tuba Akçakoca

Dear Tuba,
In principle, I don't know that commognition has a specific, unique take on the issue you are raising. However, Anna Sfard often says (as other discourse analysts. such as James Gee do too) that you need to be "an insider" as well as "an outsider" to the discourse you are studying. Meaning you need to be familiar with it sufficiently to understand all the cultural and contextual nuances, but also be able to "make the familiar strange", in Gee's words. Thus, look at the situation as if you were an anthropologist. You get the insider's view from being a teacher, and the outsider's view from being a researcher. So I think that as long as you are aware of the conflicts that this situation may raise, are being reflective, and have a good advisor to look over your shoulder, you should be fine.
By the way, Michal Tabach once wrote a paper on this particular issue (not from a commognitive perspective, but may still interest you). [See here](#).
Kind regards,
Einat

On Wed, Mar 2, 2022 at 8:19 PM Tuba Akçakoca

wrote:

Dear Einat,
I have a very important question that will affect the research process.
I will be eagerly awaiting your reply on this matter.

I will collect my data from 5 students from 11th grade. We will work with task situations on the concepts of equations and inequalities (linear and quadratic). At the same time, I am the mathematics teacher of the students I will do research on and they take the lessons from me.

The question I am wondering is:

What are the advantages and disadvantages of conducting the research as their teacher, according to the commognitive theory?

Kind regards
Tuba.

Thank you
very much.

Thank you for your
information.

Thank you for the
information!

← Yanıtla

→ Yönlendir



EK 7. Araştırmacının Ders Materyalleri

İkinci Dereceden İki Değişkenli Denklem Sistemleri

Tanım: $x, y \in \mathbb{R}$ ve a, b, c, d, e ve f birer genelleştirilmiş reel sayı olmak üzere, a, b ve c den en az biri ile değişken sayısı iki tane olacak şekilde diğer genelleştirilmiş sayılardan biri sıfırdan farklı iken $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ açık önermesine *ikinci dereceden iki değişkenli denklem* denir.

$i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$ genelleştirilmiş reel sayılar ve a_i, b_i ve c_i den en az biri ile değişken sayısı iki tane olacak şekilde diğer genelleştirilmiş sayılardan biri sıfırdan farklı olmak üzere;

$$a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$

$$a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$$

.....

$$a_nx^2 + b_nxy + c_ny^2 + d_nx + e_ny + f_n = 0$$

şeklinde verilen denklem grubuna da *ikinci dereceden iki değişkenli bir denklem sistemi* denir.

Başka bir ifade ile en az bir tanesi ikinci dereceden iki değişkenli denklem olan iki ya da daha fazla denklemden oluşan denklem grubuna **ikinci dereceden iki değişkenli denklem sistemi** denir.

İkinci dereceden iki değişkenli denklem sistemleri çözülürken yerine koyma, yok etme gibi yöntemler kullanılır. Verilen denklemlerin analitik düzlemdeki (varsa) kesişme noktaları bu denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarını verir.

- ❖ Öğrencilerden tanımdan yola çıkarak ikinci dereceden tek değişkenli denklem örnekleri istenir ve verilen örnek durumlar sınıfta tartışılır. Farklı değişkenler içeren denklem örnekleri verilir.

Sorular

1. $u^2 - 10u + v^2 + 4v + 29 = 0$

denklemini sağlayan u ve v reel sayılarını bulunuz.

2. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$3x^2 - y^2 - 11 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

3. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$x^2 - xy + y^2 - x = 0$$

$$y - x = -1$$

denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarını belirleyiniz.

4. $y - x^2 - 4x + 5 = 0$

$$x - y - 12 = 0$$

denklem sistemini sağlayan (varsa) reel sayı ikililerinin kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

5. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$-x^2 + y - 7x + 10 = 0$$

$$y + x^2 - x = -2$$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

6. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$6x - 10 + y - x^2 = 0$$

$$y - x^2 - 4x = 4$$

denklem sisteminin çözüm kümesini grafik yardımıyla bulunuz.

7. $t^2 - 3tz = 7$

$$z^2 + tz = 3$$

denklem sistemini sağlayan t ve z reel sayıları için $t - z$ reel sayılarını bulunuz.

8. $x^2 + y^2 = 5$

$$xy - 2 = 0$$

denklem sistemini sağlayan reel sayı ikililerini bulunuz.

9. a bir genelleştirilmiş reel sayı olmak üzere,

$$-y + x^2 - 3x + a + 2 =$$

$$y + x^2 - ax = 1$$

denklem sisteminin çözüm kümesi bir elemanlı olduğuna göre a reel sayı kaç olmalıdır?

İkinci Dereceden Tek Değişkenli Eşitsizlik Sistemleri

Birden fazla eşitsizliğin oluşturduğu sisteme eşitsizlik sistemi denir. Sistemdeki eşitsizliklerden en az biri ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik ise bu sisteme **ikinci dereceden bir değişkenli eşitsizlik sistemi** denir. Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, eşitsizliklerin hepsini sağlayan ortak noktalardan oluşan kümedir yani bu küme, tüm eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimidir.

1. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\begin{matrix} x - 4 > 0 \\ x^2 - 2x + 1 \leq 0 \end{matrix}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

2. $y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\begin{matrix} y^2 - 9 \leq 0 \\ y^2 - 3y + 5 > 0 \end{matrix}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

3. $\begin{matrix} -z^2 - 2z + 3 \geq 0 \\ (z - 3)(-z + 5) < 0 \end{matrix}$ eşitsizlik sistemini sağlayan z reel sayılarını bulunuz.
 $|z - 1|(z + 2) > 0$

4. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $-1 \leq \frac{x^2}{x-2} < 3$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

5. a bir genelleştirilmiş reel sayı ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = (a + 2)x^2 + (5 - a)x + a - 3$ fonksiyonunun grafiği x eksenini $(x_1, 0)$ ve $(x_2, 0)$ noktalarında kesmektedir.

$\begin{matrix} x_1 \cdot x_2 \leq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{matrix}$ olduğuna göre a reel sayılarının kümesini bulunuz.

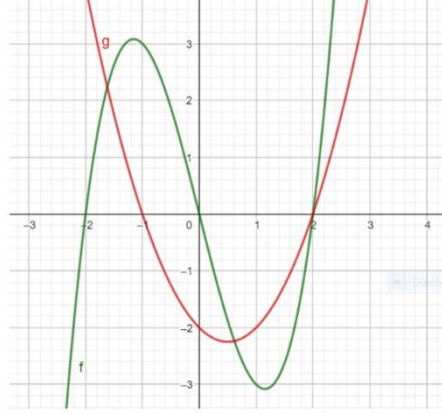
6. c bir genelleştirilmiş reel sayı ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = (c - 1)x^2 - (c - 1)x - c + 1$ ikinci dereceden tek değişkenli fonksiyonu her reel sayı için negatif değerler aldığına göre c reel sayılarının kümesini bulunuz.

7. m bir genelleştirilmiş reel sayı ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = mx^2 - 2\sqrt{2}x + m + 1$ ikinci dereceden tek değişkenli fonksiyonu her reel sayı için pozitif değerler aldığına göre m reel sayılarının kümesini bulunuz.

8.



Grafikleri verilen f ve g fonksiyonlarına göre,

- a. $\begin{matrix} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{matrix}$ eşitsizlik sistemini sağlayan x reel sayılarının kümesini bulunuz.
- b. $\begin{matrix} f(x-3) < 0 \\ g(x+1) \geq 0 \end{matrix}$ eşitsizlik sistemini sağlayan x reel sayılarının kümesini bulunuz.

9. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$y \leq x^2 - 4x + 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

10. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$\begin{matrix} y < x + 3 \\ y > x^2 - 2x + 3 \end{matrix}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

İkinci Dereceden Tek Değişkenli Eşitsizlikler

Tanım: $x \in \mathbb{R}$ ve a, b, c birer genelleştirilmiş reel sayı olmak üzere, $a \neq 0$ iken

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \quad ax^2 + bx + c > 0 \text{ veya } ax^2 + bx + c \geq 0$$

biçimindeki (formundaki) açık önermelerin her birine *ikinci dereceden tek değişkenli bir eşitsizlik* ve eşitsizliği sağlayan x reel sayılarının kümesine *eşitsizliğin çözüm kümesi* denir.

- Öğrencilerden tanımdan yola çıkarak ikinci dereceden tek değişkenli denklem örnekleri istenir ve örnekler sınıf içinde tartışılır. Eğer öğrencilerden farklı değişken ya da sıralama bağıntısı içeren örnekler gelmezse, bu tarz örnekler öğrencilere verilir.

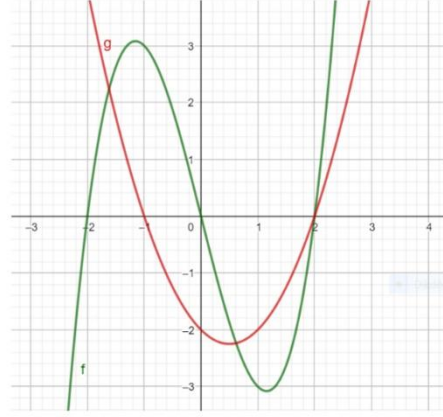
Sorular

1. $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere,
 $2t^2 + 5t + 3 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi bulunuz.
2. $z^2 - 7z + 10 \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan z reel sayılarını belirleyiniz.
3. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^2 - x - 6 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini,
i) grafik çizimi yardımıyla bulunuz.
ii) işaret tablosu oluşturarak bulunuz.
4. $-3x^2 + 4x < 2$ eşitsizliğini sağlayan (varsa) reel sayıların kümesini,
i) grafik çizimi yardımıyla bulunuz.
ii) işaret tablosu oluşturarak bulunuz.
5. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x^2 - 2x + 5 \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini,
i) grafik çizimi yardımıyla bulunuz.
ii) işaret tablosu oluşturarak bulunuz.
6. $9x^2 - 6x + 1 > 0$ eşitsizliğini sağlayan (varsa) x reel sayılarının kümesini işaret tablosu oluşturarak belirleyiniz.

7. $-4x^2 + 12x \geq 9$ eşitsizliğini sağlayan (varsa) x reel sayılarının kümesini işaret tablosu oluşturarak belirleyiniz.
8. Karesinin 12 fazlası, 8 katından küçük olmayan reel sayıları belirleyiniz.
9. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x^2 - 6x + 7 \leq 2x - 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini
- i) grafik çizimi yardımıyla bulunuz.
- ii) işaret tablosu oluşturarak bulunuz.
10. a bir genelleştirilmiş reel sayı ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $-x^2 + ax - 4 < 0$ eşitsizliği tüm reel sayılar için sağlandığına göre a reel sayılarını bulunuz.
11. m bir genelleştirilmiş reel sayı ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x^2 + 4x - 3 + m > 0$ eşitsizliği tüm reel sayılar için sağlandığına göre m reel sayılarını bulunuz.
12. b bir genelleştirilmiş reel sayı ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $-2x^2 + (b + 1)x > 2$ eşitsizliği hiçbir reel sayı için **sağlanmadığına** göre b reel sayılarını bulunuz.

1. $(3z - 1)(z + 5) \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan z reel sayıların kümesini bulunuz.
2. $(y - 5)(y^2 - 3y - 4) < 0$ eşitsizliğini sağlayan z reel sayıların kümesini işaret tablosu oluşturmadan bulunuz.
3. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(-x + 3)(x^2 - 2x - 3) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
4. $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(-t + 3)(3t - 1) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
5. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(x - 2)^2(5 - x) \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
6. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(-3x + x^2)(x - 3)^2 \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
7. $\left(\frac{2u^2 - 3u}{4}\right)(3u^2 + u - 2) < 0$ eşitsizliğini sağlayan (varsa) u reel sayılarını belirleyiniz.
8. a, b, c birer genelleştirilmiş reel sayı ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $a < b < 0 < c$ iken $(x - c)^2(ax + b) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
9. $|x - 5|(-x^2 - 2) \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan (varsa) x reel sayılarını bulunuz.
10. $3^{x+1} \cdot (x^2 + 4)(3 - x^2) \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan (varsa) x reel sayılarını bulunuz.
11. $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{t-3}{2t+9} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini işaret tablosu oluşturmadan bulunuz.
12. $\frac{z+1}{25-z^2} > 0$ eşitsizliğini sağlayan (varsa) z reel sayılarını bulunuz.
13. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{(-x+2)(x+5)}{(2x-1)} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
14. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{x-1}{(x-3)(x+1)} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini işaret tablosu oluşturmadan bulunuz.
15. $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{u^2 - 4u + 4}{-2u^2 + 3u - 1} \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan u reel sayılarını bulunuz.
16. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\frac{(-x+2)(x+3)^3}{(2x-1)^2} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

8.



Grafikleri verilen f ve g fonksiyonlarına göre,

- a. $\begin{matrix} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{matrix}$ eşitsizlik sistemini sağlayan x reel sayılarının kümesini bulunuz.
- b. $\begin{matrix} f(x-3) < 0 \\ g(x+1) \geq 0 \end{matrix}$ eşitsizlik sistemini sağlayan x reel sayılarının kümesini bulunuz.

9. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$y \leq x^2 - 4x + 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

10. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$\begin{matrix} y < x + 3 \\ y > x^2 - 2x + 3 \end{matrix}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

EK 8. Görev Durumları

GD1	“ $11 + 2(x - 3) = 7, \forall x \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesine isim vermek gerekirse sence hangi matematiksel ismi vermek uygun olur? Cevabının gerekçesini/lerini paylaşır mısın?
GD2	“ $11 + 2(u - 3) = 2u + 5, u \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesini doğrulayan (varsa) reel sayıları nasıl belirlersin? Bu belirlemede gerçekleştirdiğin aşamaları yazabilir misin?
GD3	“ $11 + 2(y - 3) > 7, \exists y \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesine isim vermek gerekirse sence hangi matematiksel ismi vermek uygun olur? Cevabının gerekçesini/lerini paylaşır mısın?
GD4	“ $11 + 2(v - 3) \leq 2v + 5, v \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesini doğrulayan (varsa) reel sayıları nasıl belirlersin? Bu belirlemede gerçekleştirdiğin aşamaları yazabilir misin?
GD5	“ $-4(x - 7) = x + 5(3 - x), x \in \mathbb{R}$ ” denkleminin çözümünde atacağın adımları ve bu adımları niçin attığını paylaşır mısın?
GD6	“ $\frac{y-3}{2} + 1 = 3y - 5, y \in \mathbb{R}$ ” denklemini sağlayan (varsa) reel sayıları nasıl belirlersin? Bu belirlemede gerçekleştirdiğin aşamaları paylaşır mısın?
GD7	“ $z - 3 > \frac{4+z}{5}, z \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğinin çözüm kümesini belirlerken attığın adımları paylaşır mısın? Bu çözüm kümesi bir aralık mıdır? Cevabının gerekçesini/lerini açıklar mısın?
GD8	“ $\frac{-1}{22} \leq \frac{1}{4u+6}, u \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğini sağlayan u reel sayılarının kümesini belirlerken attığın adımları paylaşır mısın?
GD9	“ $x - 2y = 4 \wedge y + 2x = 8, x, y \in \mathbb{R}$ ” denklemlerinin çözüm kümelerini bulunuz. Bu kümeleri düzlemde gösteriniz. Ne gördüğünü paylaşır mısın?
GD10	“ $y < 8 - 2x, x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizliğinin çözüm kümesini oluşturan reel sayı ikililerini bulunuz. Attığın adımları ve bu adımları niçin attığını açıklar mısın?
GD11	“ $-1 < x \leq 4 \wedge 2 \geq y > -3, x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizlik sistemini sağlayan (varsa) reel sayı ikililerinin kümesini belirleyiniz ve sonra bu kümeyi düzlemde gösteriniz. Attığın adımları ve bu adımları niçin attığını açıklar mısın?
GD12	“ $x - 2y \geq 4 \wedge y < 8 - 2x, x, y \in \mathbb{R}$ ” eşitsizlik sistemini sağlayan (varsa) reel sayı ikililerinin kümesini belirleyiniz ve sonra bu kümeyi düzlemde gösteriniz. Attığın adımları ve bu adımları niçin attığını açıklar mısın?

GD13	“ $t^2 + 4t = -1$, $t \in \mathbb{R}$ ” cebirsel ifadesine isim vermek gerekirse sence hangi matematiksel ismi vermek uygun olur? Cevabının gerekçesini/lerini paylaşır mısın?
GD14	Çözüm kümesindeki elemanlarının toplamı 6 ve çarpımı 2 olan ikinci dereceden tek değişkenli denklemi yazabilir misin? Nasıl bir yol izlediğini açıklar mısın? Bu denklemi yazmanın başka bir yolunu biliyor musun? Biliyorsan paylaşır mısın?
GD15	“(m + 1)x² + 2mx + m – 1 = 0, $m \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $x \in \mathbb{R}$” cebirsel ifadesi için, i) Hangi matematiksel ismi uygun gördüğünü gerekçeleriyle açıklar mısın? ii) m ve x harflerine verilebilecek isim veya isimler neler olabilir? Önerilebileceğin isimler var mı? Varsa niçin bu matematiksel isimleri önerdiğini gerekçeleriyle açıklar mısın? iii) Yukarıdaki eşitliği sağlayan x reel sayılarını belirleyebilir misin? Bu belirlemede attığın adımları gerekçeleriyle paylaşır mısın?
GD16	Bankada 1500 TL si bulunan Hatice, haftalık 50 TL yatırarak hesabındaki paranın 4000 TL ye ulaşmasını istemektedir. Sence Hatice hedeflediği miktara bir yıl içerisinde ulaşabilir mi? Kararını gerekçeleriyle açıklar mısın? • Hatice’nin 10. hafta sonundaki birikimini bulabilir misin? • x hafta geçtikten sonra Hatice’nin hesabında biriken parayı temsil eden cebirsel bir ifade yazabilir misin? Attığın adımları gerekçeleriyle paylaşır mısın?
GD17	Yarı zamanlı işlerde çalışan Mehmet Bey; çalıştığı birinci işten saatte 25 TL, ikinci işten saatte 30 TL kazanmakta ve haftada tam olarak 45 saat çalışmaktadır. Haftada 1250 TL kazanmak isteyen Mehmet Bey’in her işte haftada kaç saat çalışması gerektiğini nasıl belirlersin? Bir önerin varsa bunu gerekçeleriyle açıklar mısın?
GD18	Toplamları 18’den büyük olmayan ardışık iki pozitif reel sayı ikililerini belirleyebilir misin? Bu belirleme sürecinde attığın adımları gerekçeleriyle paylaşır mısın?
GD19	İkisi de 3 ten küçük olmayan ve birbirinden farklı iki reel sayının toplamı 15 ise bu iki reel sayının çarpımının alabileceği en küçük ve en büyük reel sayıyı belirleyebilir misin? Bu belirleme sürecinde attığın adımları gerekçeleriyle paylaşır mısın?

GD20	Çevresi 24 birim olan bir dikdörtgensel bölgenin alanının en çok kaç birim kare olacağını tespit edebilir misin? Bu tespit sürecinde attığın adımları gerekçeleriyle paylaşır mısın?
GD21	Bir ürünün tanesini 60 TL ye satan bir satıcı günde 10 tane ürün satabilmektedir. Satıcı bir ürünün satış fiyatında x TL indirim yapınca, bir günde satılan ürün sayısı x tane artmaktadır. Buna göre, bu satıcının bir günlük satıştan elde edebileceği paranın TL cinsinden en çok ne kadar olabileceğini bulunuz.
GD22	$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\begin{aligned} x^2 - y - 3x &= 0 \\ 3 - x + y &= 0 \end{aligned}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.
GD23	“ $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ ” eşitsizliğini sağlayan (varsa) x reel sayılarının kümesini bulunuz.
GD24	“ $\frac{y(y-3)(-y+5)}{y^2-5y+6} \leq 0$ ” eşitsizliğini sağlayan (varsa) y reel sayılarının kümesini bulunuz.
GD25	$t \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\begin{aligned} t^2 - 2t + 3 &> 0 \\ (-t + 4)^2 &< 0 \end{aligned}$ eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.
GD26	a bir genelleştirilmiş reel sayı ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ax^2 - 4x + a \leq 0$ eşitsizliği her x reel sayısı için sağlandığına göre a reel sayılarının kümesini bulunuz.

EK 9. Çalışma Ortamı Fotoğrafları

Çalışma ortamı 1



Çalışma ortamı 2



Çalışma ortamı 3





GAZİLİ OLMAK AYRICALIKTIR..