



**T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

HİBRİT SAYILAR ÜZERİNE

Fatma Nur TEKELİ

AĞUSTOS - 2024

Fatma Nur TEKELİ tarafından hazırlanan "HİBRİT SAYILAR ÜZERİNE" adlı tez çalışması, aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Derya SAĞLAM

İmza

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Doç. Dr. Faik BABADAĞ

İmza

Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Gülay Kuru YÜCEKAYA

İmza

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 08.08.2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



Canım AİLEME...

ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Fatma Nur TEKELİ

08.08.2024

ÖZET

HİBRİT SAYILAR ÜZERİNE

TEKELİ, Fatma Nur

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Derya SAĞLAM

Ağustos 2024, 102 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde involüsyonlar ve anti-involüsyonlar üzerine daha önce yapılan çalışmalara değinilmiştir. İkinci ve üçüncü bölümlerde reel kuaterniyonların ve split kuaterniyonların involüsyonları ve anti-involüsyonları verildi. Dördüncü bölümde hibrit sayılarla ilgili tanım ve teoremler verildi. Beşinci bölümde hibrit sayıların involüsyonları, anti-involüsyonları ve bunların geometrik yorumları verildi.

Anahtar Kelimeler: Hibrit Sayılar, Reel Kuaterniyonlar, Split Kuaterniyonlar, Involüsyonlar, Anti-involüsyonlar

ABSTRACT

ON HYBRID NUMBERS

TEKELİ, Fatma Nur

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Derya SAĞLAM

August 2024, 102 pages

The thesis consists of five chapters. In the first chapter, previous studies on involutions and anti-involutions are mentioned. In the second and third chapter involutions and anti-involutions of real quaternions and split quaternions were given, respectively. In the fourth chapter, definitions and theorems about hybrid numbers were given. In the fifth chapter, involutions, anti-involutions of hybrid numbers and their geometric interpretations were given.

Key Words: Hybrid Numbers, Real Quaternions, Split Quaternions, Involutions, Anti-involutions

TEŐEKKÖR

Bana alıőma olanağı sağlayan ve çalıőmamın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Derya SAĞLAM’a en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca hayatımın her anında yanımda olan, verdikleri maddi ve manevi desteklerle beni bugünlere kadar getiren, hep yanımda hissettiğim aileme sonsuz sevgilerimi ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. REEL KUATERNİYONLARIN İNVLÜSYONLARI	3
3. SPLIT KUATERNİYONLARIN İNVLÜSYONLARI	16
4. HİBRİT SAYILAR	42
5. HİBRİT SAYILARIN İNVLÜSYONLARI	84
KAYNAKLAR	101
ÖZGEÇMİŞ	102

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Cismi
$\mathbb{R}^n$	n – boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}_k^n$	k – indeksli n – boyutlu yarı Öklid uzayı
$\mathbb{H}$	Reel Kuaterniyonlar Kümesi
$\mathbb{H}'$	Split Kuaterniyonlar Kümesi
$\mathbb{K}$	Hibrit Sayılar Kümesi
S_q	q kuaterniyonunun skaler kısmı
V_q	q kuaterniyonunun vektörel kısmı
$\langle, \rangle$	$\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_1^3$ deki iç çarpım
$\times$	$\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_1^3$ deki vektörel çarpım
H	Pure Hibrit Sayılar Kümesi
$\langle, \rangle_H$	H deki iç çarpım
$\times_H$	H deki vektörel çarpım

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	$f(q) = -v\bar{q}v$ ve $f(q) = -vqv$ geometrisi	11
Şekil 3.1	$v^2 = -1$ için $f(q) = -v\bar{q}v$ ve $f(q) = -vqv$ geometrisi	36
Şekil 3.2	$v^2 = 1$ için $f(q) = v\bar{q}v$ ve $f(q) = vqv$ geometrisi	37
Şekil 4.1	Hibridyen koordinatlar	49
Şekil 4.2	Hiperbolik argüment	77
Şekil 4.3	Eliptik argümentk	78
Şekil 4.4	Parabolik argüment	79
Şekil 5.1	$V^2 = -1$ için $f(Z) = -V\bar{Z}V$ ve $f(Z) = -VZV$ geometrisi . . .	95
Şekil 5.2	$V^2 = 1$ için $f(Z) = V\bar{Z}V$ ve $f(Z) = VZV$ geometrisi	96

1 . GİRİŞ

Ell ve Sangwine, 2007 yılında kuaterniyonların involüsyon ve anti- involüsyonlarını elde ettiler [1]. Daha sonra, Yaylı ve Bekar dual, complex, split, dual split, semi ve split semi kuaterniyonların involüsyon ve anti-involüsyonlarını incelediler [5-9].

Bir involüsyon veya anti-involüsyon tersi kendisine eşit olan lineer dönüşümlerdir.

Tanım 1.1. $x \rightarrow f(x)$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlarsa f ye involüsyon denir.

A1. Bir involüsyon kendinin tersidir. Yani tanım kümesinden alınan her x elemanı için

$$f(f(x)) = x$$

dir.

A2. Bir involüsyon lineerdir. Yani tanım kümesinden alınan her x_1, x_2 elemanları ve λ reel sayısı için

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

ve

$$\lambda f(x) = f(\lambda x)$$

dir.

A3. Bir çarpımın involüsyonu ters sırada involüsyonların çarpımına eşittir. Yani tanım kümesinden alınan her x_1, x_2 elemanları için

$$f(x_1 x_2) = f(x_2) f(x_1)$$

dir [1].

Tanım 1.2. $x \rightarrow f(x)$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlarsa f ye anti-involüsyon denir.

A1. Bir anti-involüsyon kendinin tersidir. Yani tanım kümesinden alınan her x elemanı

için

$$f(f(x)) = x$$

dir.

A2. Bir anti-involüsyon lineerdir. Yani tanım kümesinden alınan her x_1, x_2 elemanları ve λ reel sayısı için

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

ve

$$\lambda f(x) = f(\lambda x)$$

dir.

A3. Bir çarpımın anti-involüsyonu aynı sırada anti-involüsyonların çarpımına eşittir. Yani tanım kümesinden alınan her x_1, x_2 elemanları için

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$$

dir [1].

İnvolüsyon ve anti-involüsyonun farkı üçüncü aksiyom **A3** olduğu kolayca görülebilir. Geometrik olarak kuaterniyonların, split kuaterniyonların ve hibrit sayıların bir involüsyonu bir düzleme göre simetri ve bir anti-involüsyonu ise bir doğruya göre simetri olacaktır.

2 . REEL KUATERNİYONLARIN İNVOLÜSYONLARI

Tanım 2.1. $\mathbb{H}$ ile gösterilen reel kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in R, i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

olarak tanımlanır ve dörtlülerin kümesi olarak düşünülebilir. $q = a + bi + cj + dk$ reel kuaterniyonu için, a ya skaler kısım denir ve S_q ile gösterilir. Ayrıca $bi + cj + dk$ ye vektörel kısım denir ve V_q ile gösterilir. Buna göre $q = S_q + V_q$ biçimindedir.

Tanım 2.2. $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ ve $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ reel kuaterniyonlarının karşılıklı bileşenleri eşitse yani $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$ ise q_1 ve q_2 reel kuaterniyonları eşittir ve $q_1 = q_2$ dir.

Tanım 2.3. $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ ve $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ reel kuaterniyonlarının toplamı

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \end{aligned}$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Reel kuaterniyonlarının toplama işlemi hem değişmeli hem de birleşmelidir. Bütün bileşenleri sıfır olan reel kuaterniyonu 0 ile gösterilir. 0, reel kuaterniyonlarda toplama işlemine göre etkisiz elemandır. $q = a + bi + cj + dk$ reel kuaterniyonunun toplama işlemine göre tersi $-q = -a - bi - cj - dk$ dir. Buna göre, $(\mathbb{H}, +)$ ikilisi değişmeli gruptur.

Tanım 2.4. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j$ olmak üzere kuaterniyon çarpımı

$$q_1 q_2 = (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k)$$

eşitliğiyle tanımlanır.

$q_1 = S_{q_1} + V_{q_1}$ ve $q_2 = S_{q_2} + V_{q_2}$ olmak üzere kuaterniyon çarpımı

$$q_1 q_2 = S_{q_1} S_{q_2} - \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + S_{q_1} V_{q_2} + S_{q_2} V_{q_1} + V_{q_1} \times V_{q_2}$$

biçimindedir. Burada $\langle, \rangle$ ve $\times$ sırasıyla iç çarpım ve vektörel çarpımı göstermektedir ve

$$\langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$$

ve

$$V_{q_1} \times V_{q_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

dir.

Tanım 2.5. $q = a + bi + cj + dk \in H$ ve $q = S_q + V_q$ için $S_q = 0$ olduğu durumda q ya pure reel kuaterniyon denir. İki pure reel kuaterniyonun çarpımı

$q_1 = b_1 i + c_1 j + d_1 k$ ve $q_2 = b_2 i + c_2 j + d_2 k$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= -\langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + V_{q_1} \times V_{q_2} \\ &= -(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

biçimindedir.

Tanım 2.6. $q = a + bi + cj + dk = S_q + V_q$ bir reel kuaterniyon olmak üzere eşleniği $\bar{q} = S_q - V_q$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $q = a + bi + cj + dk$ reel kuaterniyonu için

$$q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

dir.

Tanım 2.7. $q = a + bi + cj + dk$ reel kuaterniyonun normu

$$\|q\| = q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

biçiminde tanımlanır. $\|q\| = 1$ olduğu zaman, q ya birim reel kuaterniyon denir.

Tanım 2.8. Sıfırdan farklı reel kuaterniyonun, kuaterniyon çarpımına göre tersi

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.9. Herhangi bir $q = w + xi + yj + zk$ reel kuaterniyonun kompleks formu

$$q = a + \mu b$$

biçiminde tanımlanır. Burada

$$b = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

,

$$\mu = \frac{xi + yj + zk}{b}$$

ve a , q nun reel kısmıdır. μ birim vektördür ve $\mu^2 = -1$ dir.

Kompleks formda verilen bir $q = a + \mu b$ reel kuaterniyonun eşleniği

$$\bar{q} = a - \mu b$$

dir. $\mu^2 = -1$ olduğundan

$$q\bar{q} = (a + \mu b)(a - \mu b) = a^2 - \mu^2 b^2 = a^2 + b^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

elde edilir.

$\tan \theta = \frac{b}{a}$ olmak üzere bir reel kuaterniyonun kutupsal formu

$$q = a + \mu b = \sqrt{a^2 + b^2} e^{\mu \theta} = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta + \mu \sin \theta)$$

biçimindedir.

Teorem 2.10. $v^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim pure reel kuaterniyon v olmak üzere

$$f_v : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$q \rightarrow f_v(q) = -v\bar{q}v$$

dönüşümü bir involüsyondur.

İspat. İnvolüsyon tanımındaki aksiyomları sağladığını göstermeliyiz.

A1. Her q reel kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} f(f(q)) &= f(-v\bar{q}v) \\ &= -v\overline{(-v\bar{q}v)}v \\ &= -v(\bar{v}q\overline{(-v)})v \\ &= -v((-v)qv)v \\ &= v^2qv^2 \\ &= q \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 + q_2) &= -v\overline{(q_1 + q_2)}v \\ &= -v(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)v \\ &= (-v\bar{q}_1v) + (-v\bar{q}_2v) \\ &= f(q_1) + f(q_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda q) &= -v\overline{(\lambda q)}v \\ &= -v(\lambda \bar{q})v \\ &= \lambda(-v\bar{q}v) \\ &= \lambda f(q) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 q_2) &= -v(\overline{q_1 q_2})v \\ &= -v(\overline{q_2 q_1})v \\ &= -v(\overline{q_2}(v(-v))\overline{q_1})v \\ &= (-v\overline{q_2}v)(-v\overline{q_1}v) \\ &= f(q_2)f(q_1) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 2.11. $v^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim pure reel kuaterniyon v olmak üzere

$$f_v : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$q \rightarrow f_v(q) = -vqv$$

dönüşümü bir anti-involüsyondur.

İspat. Anti-involüsyon tanımındaki aksiyomları sağladığını göstermeliyiz.

A1. Her q reel kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} f(f(q)) &= f(-vqv) \\ &= -v(-vqv)v \\ &= v(vq(v))v \\ &= v^2 q v^2 \\ &= q \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 + q_2) &= -v(q_1 + q_2)v \\ &= -v(q_1 + q_2)v \\ &= (-vq_1v) + (-vq_2v) \\ &= f(q_1) + f(q_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda q) &= -v(\lambda q)v \\ &= -v(\lambda q)v \\ &= \lambda(-vqv) \\ &= \lambda f(q) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 q_2) &= -v(q_1 q_2)v \\ &= -v(q_1(v(-v))q_2)v \\ &= (-vq_1v)(-vq_2v) \\ &= f(q_1)f(q_2) \end{aligned}$$

dir.

Geometri:

Şimdi yukarıda bulduğumuz reel kuaterniyonların involüsyonlarının ve anti-involüsyonlarının geometrik yorumlarını vereceğiz.

Teorem 2.12. $v^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör v olsun. Herhangi bir $q = a + \mu b$ reel kuaterniyonu için $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(q) = -v\bar{q}v$ involüsyonu, q kuaterniyonunun skaler kısmı a yı invaryant bırakır ve q kuaterniyonunun vektörel kısmı μb yi de v involüsyon eksenine ortogonal olan düzleme göre yansıtır.

İspat. $q = a + \mu b$ reel kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} f(q) &= -v\bar{q}v \\ &= -v\overline{(a + \mu b)}v \\ &= -v(a - \mu b)v \\ &= -vav + v\mu bv \\ &= -v^2a + v\mu vb \\ &= a + v\mu vb \end{aligned} \tag{2.1}$$

dir. Bu eşitliğe göre f involüsyonunun q nun skaler kısmı a yı invaryant bıraktığı açıktır. Diğer yandan $v\mu v$ nin de μ nün v involüsyon eksenine ortogonal olan düzleme göre yansımaları olduğunu göstermeliyiz. v, μ vektör olduğundan

$$\begin{aligned}
v\mu v &= (v\mu)v \\
&= (-\langle v, \mu \rangle + v \times \mu)v \\
&= -\langle v, \mu \rangle v + (v \times \mu)v \\
&= -\langle v, \mu \rangle v - \langle v \times \mu, v \rangle + (v \times \mu) \times v \\
&= -\langle v, \mu \rangle v - v \times (v \times \mu) \\
&= -\langle v, \mu \rangle v + \langle v, v \rangle \mu - \langle v, \mu \rangle v \\
&= -2\langle v, \mu \rangle v + \langle v, v \rangle \mu \\
&= -2\langle v, \mu \rangle v - v^2 \mu \\
&= \mu - 2\langle \mu, v \rangle v
\end{aligned} \tag{2.2}$$

bulunur. μ vektörünün düzleme olan izdüşümü

$$\mu_{izd} = \mu - \frac{\langle \mu, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v = \mu + \frac{\langle \mu, v \rangle}{v^2} v = \mu - \langle \mu, v \rangle v$$

olduğundan μ vektörünün düzleme göre yansımaları

$$2\mu_{izd} - \mu = 2(\mu - \langle \mu, v \rangle v) - \mu = \mu - 2\langle \mu, v \rangle v \tag{2.3}$$

eşitliğiyle elde edilir. (2.2) ve (2.3) eşitliklerine göre $v\mu v$, μ vektörünün v involüsyon eksenine ortogonal olan düzleme göre yansımaları olur.

Sonuç 2.13. (2.1) eşitliğine göre $v \parallel \mu$ ise

$$f(q) = -v\bar{q}v = a + v\mu vb = \bar{q}$$

ve $v \perp \mu$ ise

$$f(q) = -v\bar{q}v = a + v\mu vb = q$$

dir.

Teorem 2.14. $v^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör v olsun. Herhangi bir $q = a + \mu b$ reel kuaterniyonu için $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $f(q) = -vqv$ anti-involüsyonu, q nun skaler kısmı a yı invaryant bırakır ve q nun vektörel kısmı μb yi de v anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıtır. $f(q) = vqv$ anti-involüsyonu $f(q) = v\bar{q}v$ involüsyonunun eşleniğidir.

İspat. $q = a + \mu b$ reel kuaterniyonu için

$$\begin{aligned}
 f(q) &= -vqv \\
 &= -v(a + \mu b)v \\
 &= -vav - v\mu bv \\
 &= -v^2a - v\mu vb \\
 &= a - v\mu vb
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

dir. (2.1) ve (2.4) eşitliklerine göre $f(q) = -vqv$ anti-involüsyonu $f(q) = -v\bar{q}v$ involüsyonunun eşleniğidir. (2.4) eşitliğinden f involüsyonunun q nun skaler kısmı a yı invaryant bıraktığı açıktır. Diğer yandan $-v\mu v$ nin de μb vektörünün v anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansması olduğunu göstermeliyiz. v, μ vektör olduğundan

$$\begin{aligned}
 -v\mu v &= -(v\mu)v \\
 &= -(-\langle v, \mu \rangle + v \times \mu)v \\
 &= \langle v, \mu \rangle v - (v \times \mu)v \\
 &= \langle v, \mu \rangle v + \langle v \times \mu, v \rangle - (v \times \mu) \times v \\
 &= \langle v, \mu \rangle v + v \times (v \times \mu) \\
 &= \langle v, \mu \rangle v - \langle v, v \rangle \mu + \langle v, \mu \rangle v \\
 &= 2\langle v, \mu \rangle v - \langle v, v \rangle \mu \\
 &= 2\langle v, \mu \rangle v + v^2\mu \\
 &= 2\langle v, \mu \rangle v - \mu
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

bulunur. μ vektörünün v ye olan izdüşümü

$$I_{zd_v}\mu = \frac{\langle v, \mu \rangle}{\langle v, v \rangle} v = \frac{\langle v, \mu \rangle}{-v^2} v = \langle v, \mu \rangle v$$

olduğundan μ vektörünün v nin tanımladığı doğruya göre yansıması

$$2I_{zd_v}\mu - \mu = 2\langle v, \mu \rangle v - \mu \quad (2.6)$$

eşitliğiyle elde edilir. (2.5) ve (2.6) eşitliklerine göre $-v\mu v$, μ vektörünün v anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıması olur.

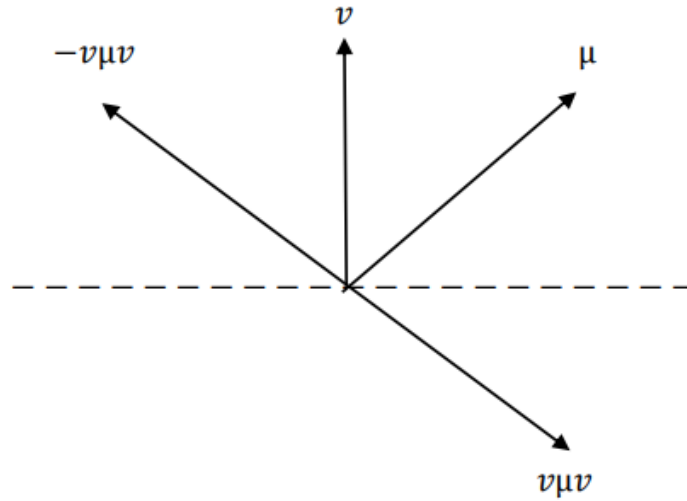
Sonuç 2.15. (2.4) eşitliğine göre $v \parallel \mu$ ise

$$f(q) = -vqv = a - v\mu vb = q$$

ve $v \perp \mu$ ise

$$f(q) = -vqv = a - v\mu vb = \bar{q}$$

dir.



Şekil 2.1: $f(q) = -v\bar{q}v$ involüsyonu ve $f(q) = -vqv$ anti-involüsyonunun geometrisi

Şekil 2.1 de noktalı doğru v ye ortogonal olan düzlemi göstermektedir ve v nin skalar kısmı invariant olduğundan gösterilmemiştir.

Sonuç 2.13 e göre involüsyonun v eksenine ile q nun vektörel kısmı paralel olduğunda involüsyon reel kuaterniyonun eşleniğini ve ortogonal olduğunda involüsyon reel ku-

aterniyonun kendisini verir. Sonuç 2.15 e göre anti-involüsyonun v eksenine ile q nun vektörel kısmı ortogonal olduğunda anti-involüsyon reel kuaterniyonun eşleniğini ve paralel olduğunda reel kuaterniyonun kendisini verir. Aşağıda Lemma 2.16 ve Lemma 2.17 böyle durumların genel formüllerini vermektedir.

Lemma 2.16. Eksenleri birbirine ortogonal v_1, v_2, v_3 birim vektörleri olan involüsyonların toplamını herhangi bir μ vektörüne uygulanırsa yine μ elde edilir. Yani f_1, f_2, f_3 sırasıyla eksenleri v_1, v_2, v_3 olan involüsyonlar ise

$$f_1(\mu) + f_2(\mu) + f_3(\mu) = \mu \quad (2.7)$$

olur.

İspat. $i = 1, 2, 3$ için $\mu_i \parallel v_i$ olmak üzere $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ olsun. μ , (2.7) eşitliğinin sol tarafında yerine yazılırsa, involüsyonun A2. aksiyomuna göre

$$\begin{aligned} f_1(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + f_2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + f_3(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) &= f_1(\mu_1) + f_1(\mu_2) + f_1(\mu_3) \\ &\quad + f_2(\mu_1) + f_2(\mu_2) + f_2(\mu_3) \\ &\quad + f_3(\mu_1) + f_3(\mu_2) + f_3(\mu_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 2.13 e göre bir vektör μ involüsyonun eksenine paralel ise involüsyon μ vektörünün işaretini değiştirir, ortogonal ise involüsyon birim dönüşüm olur. Buna göre yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$-\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 + \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = \mu$$

elde edilir.

Lemma 2.17. Eksenleri birbirine ortogonal v_1, v_2, v_3 birim vektörleri olan anti-involüsyonların toplamını herhangi bir μ vektörüne uygulanırsa μ yön değiştirir. Yani f_1, f_2, f_3 sırasıyla eksenleri v_1, v_2, v_3 olan anti-involüsyonlar ise

$$f_1(\mu) + f_2(\mu) + f_3(\mu) = -\mu \quad (2.8)$$

olur.

İspat. $i = 1, 2, 3$ için $\mu_i \parallel v_i$ olmak üzere $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ olsun. μ , (2.8) eşitliğinin

sol tarafında yerine yazılırsa, anti-involüsyonun A2. aksiyomuna göre

$$\begin{aligned} f_1(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + f_2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + f_3(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) &= f_1(\mu_1) + f_1(\mu_2) + f_1(\mu_3) \\ &+ f_2(\mu_1) + f_2(\mu_2) + f_2(\mu_3) \\ &+ f_3(\mu_1) + f_3(\mu_2) + f_3(\mu_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 2.15 e göre bir vektör μ anti-involüsyonun eksenine ortogonal ise anti-involüsyon μ nün işaretini değiştirir, paralel ise anti-involüsyon birim dönüşüm olur. Buna göre yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = -\mu$$

elde edilir.

Teorem 2.18. $q \in \mathbb{H}$ ve eksenleri birbirine ortogonal v_1, v_2, v_3 birim vektörleri olan anti-involüsyonlar f_1, f_2, f_3 ise

$$\bar{q} = \frac{1}{2}(f_1(q) + f_2(q) + f_3(q) - q) \quad (2.9)$$

dir.

İspat. $q = a + \mu b$ olsun. Anti-involüsyonun A2. aksiyomuna göre (2.9) eşitliğinin sağ tarafı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_1(q) + f_2(q) + f_3(q) - q) &= \frac{1}{2}(f_1(a + \mu b) + f_2(a + \mu b) + f_3(a + \mu b) - (a + \mu b)) \\ &= \frac{1}{2}(f_1(a) + f_1(\mu b) + f_2(a) + f_2(\mu b) + f_3(a) + f_3(\mu b) - a - \mu b) \end{aligned}$$

elde edilir. Anti-involüsyonlar a skaler kısmını invaryant bırakır ve (2.9) eşitliğine göre

yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(f_1(q) + f_2(q) + f_3(q) - q) &= \frac{1}{2}(a + f_1(\mu b) + a + f_2(\mu b) + a + f_3(\mu b) - a - \mu b) \\
&= a + \frac{1}{2}(f_1(\mu b) + f_2(\mu b) + f_3(\mu b) - \mu b) \\
&= a + \frac{1}{2}(-\mu b - \mu b) \\
&= a - \mu b \\
&= \bar{q}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.19. $q \in \mathbb{H}$ ve eksenleri birbirine ortogonal v_1, v_2, v_3 birim vektörleri olan involüsyonlar f_1, f_2, f_3 ise

$$q = \frac{1}{2}(f_1(q) + f_2(q) + f_3(q) - \bar{q}) \quad (2.10)$$

dir.

İspat. $q = a + \mu b$ olsun. İnvölüsyonun A2. aksiyomuna göre (2.10) eşitliğinin sağ tarafı hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(f_1(q) + f_2(q) + f_3(q) - \bar{q}) &= \frac{1}{2}(f_1(a + \mu b) + f_2(a + \mu b) + f_3(a + \mu b) - (a - \mu b)) \\
&= \frac{1}{2}(f_1(a) + f_1(\mu b) + f_2(a) + f_2(\mu b) + f_3(a) + f_3(\mu b) - a + \mu b)
\end{aligned}$$

elde edilir. İnvölüsyonlar a skaler kısmını invaryant bırakır ve (2.8) eşitliğine göre yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(f_1(q) + f_2(q) + f_3(q) - \bar{q}) &= \frac{1}{2}(a + f_1(\mu b) + a + f_2(\mu b) + a + f_3(\mu b) - a + \mu b) \\
&= a + \frac{1}{2}(f_1(\mu b) + f_2(\mu b) + f_3(\mu b) + \mu b) \\
&= a + \frac{1}{2}(\mu b + \mu b) \\
&= a + \mu b \\
&= q
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 2.20. $v^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör v olsun. Herhangi bir μ vektörünün v ye paralel ve ortogonal bileşenleri sırasıyla μ_1, μ_2 ise

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1}{2}(\mu - f_1(\mu)) = \frac{1}{2}(\mu + f_2(\mu)) \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}(\mu + f_1(\mu)) = \frac{1}{2}(\mu - f_2(\mu))\end{aligned}$$

dir ve $\mu = \mu_1 + \mu_2$ dir. Burada $f_1(q) = -v\bar{q}v$ involüsyonu ve $f_2(q) = -vqv$ anti-involüsyonu alınmıştır.

İspat. Şekil 2.1. den kolayca görülmektedir.



3 . SPLİT KUATERNİYONLARIN İNVOLÜSYONLARI

Tanım 3.1. $\mathbb{H}'$ ile gösterilen split kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H}' = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in R, i^2 = -1, j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k, jk = -i, ki = j, ji = -k, kj = i, ik = -j\}$$

olarak tanımlanır. $q = a + bi + cj + dk$ split kuaterniyonu için, a ya skaler kısım denir ve S_q ile gösterilir. Ayrıca $bi + cj + dk$ ye vektörel kısım denir ve V_q ile gösterilir. Buna göre $q = S_q + V_q$ biçimindedir.

Tanım 3.2. $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ ve $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ split kuaterniyonlarının karşılıklı bileşenleri eşitse yani $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$ ise q_1 ve q_2 split kuaterniyonları eşittir ve $q_1 = q_2$ dir.

Tanım 3.3. $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ ve $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ split kuaterniyonlarının toplamı

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k) + (a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \end{aligned}$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Split kuaterniyonlarının toplama işlemi hem değişmeli hem de birleşmelidir. Bütün bileşenleri sıfır olan split kuaterniyonu 0 ile gösterilir. 0, split kuaterniyonlarda toplama işlemine göre etkisiz elemandır. $q = a + bi + cj + dk$ split kuaterniyonunun toplama işlemine göre tersi $-q = -a - bi - cj - dk$ dir. Buna göre, $(\mathbb{H}', +)$ ikilisi değişmeli gruptur.

Tanım 3.4. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, ij = k, jk = -i, ki = j, ji = -k, kj = i, ik = -j$

olmak üzere kuaterniyon çarpımı

$$q_1 q_2 = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)$$

eşitliğiyle tanımlanır.

$q_1 = S_{q_1} + V_{q_1}$ ve $q_2 = S_{q_2} + V_{q_2}$ olmak üzere kuaterniyon çarpımı

$$q_1 q_2 = S_{q_1} S_{q_2} + \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + S_{q_1} V_{q_2} + S_{q_2} V_{q_1} + V_{q_1} \times V_{q_2}$$

biçimindedir. Burada $\langle, \rangle$ ve $\times$ işlemleri sırasıyla $\mathbb{R}_1^3$ yarı Öklid uzayının skaler çarpımını ve vektörel çarpımını göstermektedir ve

$$\langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle = -b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$$

ve

$$V_{q_1} \times V_{q_2} = \begin{vmatrix} -i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

dir.

Tanım 3.5. $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}'$ ve $q = S_q + V_q$ için $S_q = 0$ olduğu durumda q ya pure split kuaterniyon denir. İki pure split kuaterniyonun çarpımı $q_1 = b_1 i + c_1 j + d_1 k$ ve $q_2 = b_2 i + c_2 j + d_2 k$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + V_{q_1} \times V_{q_2} \\ &= -b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 + \begin{vmatrix} -i & j & k \\ b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

biçimindedir.

Tanım 3.6. $q = a + bi + cj + dk = S_q + V_q$ bir split kuaterniyon olmak üzere eşleniği $\bar{q} = S_q - V_q$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $q = a + bi + cj + dk$ split kuaterniyonu için

$$q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

dir.

Tanım 3.7. $q = a + bi + cj + dk$ split kuaterniyonun normu

$$\|q\| = q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

biçiminde tanımlanır. $\|q\| = 1$ olduğu zaman, q ya birim split kuaterniyon denir.

Tanım 3.8. $q = a + bi + cj + dk = S_q + V_q$ bir split kuaterniyon olmak üzere; $\|q\| < 0$ veya $q = 0$ ise q ya spacelike, $\|q\| > 0$ ise q ya timelike, $\|q\| = 0$ ve $q \neq 0$ ise q ya lightlike denir. Buna göre $V_q = bi + cj + dk$ pure split kuaterniyonu için $\|V_q\| = b^2 - c^2 - d^2 < 0$ veya $V_q = 0$ ise V_q ya spacelike, $\|V_q\| > 0$ ise V_q ya timelike, $\|V_q\| = 0$ ve $V_q \neq 0$ ise V_q ya lightlike denir.

Tanım 3.9. Sıfırdan farklı $q = a + bi + cj + dk$ split kuaterniyonun, kuaterniyon çarpımına göre tersi

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\|q\| \neq 0$ olmalıdır.

Spacelike ve timelike split kuaterniyonlar için $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$ eşitliği sağlanır, ancak lightlike split kuaterniyonların kuaterniyon çarpımına göre tersi yoktur.

Herhangi bir $q = w + xi + yj + zk$ split kuaterniyonu aşağıdaki durumları gözönüne alınarak

$$q = a + \mu b \tag{3.1}$$

biçiminde yazılabilir:

1. $V_q = bi + cj + dk$ spacelike ise

$$a = w, \quad b = \sqrt{-x^2 + y^2 + z^2}, \quad \mu = \frac{xi + yj + zk}{b}, \quad \mu^2 = 1,$$

2. $V_q = bi + cj + dk$ timelike ise

$$a = w, \quad b = \sqrt{x^2 - y^2 - z^2}, \quad \mu = \frac{xi + yj + zk}{b}, \quad \mu^2 = -1$$

dir. Her iki durumda $\|\mu\| = 1$ olduğundan μ birim vektördür.

(3.1) eşitliğindeki formda verilen bir $q = a + \mu b$ split kuaterniyonun eşleniği

$$\bar{q} = a - \mu b$$

dir.

1. $V_q = bi + cj + dk$ spacelike ise $\mu^2 = 1$ olduğundan

$$q\bar{q} = (a + \mu b)(a - \mu b) = a^2 - \mu^2 b^2 = a^2 - b^2 = w^2 + x^2 - y^2 - z^2,$$

2. $V_q = bi + cj + dk$ timelike ise $\mu^2 = -1$ olduğundan

$$q\bar{q} = (a + \mu b)(a - \mu b) = a^2 - \mu^2 b^2 = a^2 + b^2 = w^2 + x^2 - y^2 - z^2$$

elde edilir.

Teorem 3.10. $v^2 = \mp 1$ eşitliğini sağlayan birim pure split kuaterniyon v olmak üzere $f_v : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$

$$q \rightarrow f_v(q) = -v\bar{q}v$$

dönüşümü $v^2 = -1$ ise bir involüsyon, $v^2 = 1$ ise ne involüsyon ne de anti- involüsyondur.

İspat. Öncelikle $v^2 = -1$ için involüsyon tanımındaki aksiyomları sağladığını göstermeliyiz.

A1. Her q split kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} f(f(q)) &= f(-v\bar{q}v) \\ &= -v\overline{(-v\bar{q}v)}v \\ &= -v(\bar{v}q(\overline{-v}))v \\ &= -v((-v)qv)v \\ &= v^2qv^2 \\ &= q \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 + q_2) &= -v(\overline{q_1 + q_2})v \\ &= -v(\overline{q_1} + \overline{q_2})v \\ &= (-v\overline{q_1}v) + (-v\overline{q_2}v) \\ &= f(q_1) + f(q_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda q) &= -v(\overline{\lambda q})v \\ &= -v(\lambda \overline{q})v \\ &= \lambda(-v\overline{q}v) \\ &= \lambda f(q) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 q_2) &= -v(\overline{q_1 q_2})v \\ &= -v(\overline{q_2 q_1})v \\ &= -v(\overline{q_2}(v(-v))\overline{q_1})v \\ &= (-v\overline{q_2}v)(-v\overline{q_1}v) \\ &= f(q_2)f(q_1) \end{aligned}$$

dir.

Şimdi $v^2 = 1$ olduğunu varsayalım.

A1. Her q split kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} f(f(q)) &= f(-v\bar{q}v) \\ &= -v(\overline{-v\bar{q}v})v \\ &= -v(\bar{v}q(\overline{-v}))v \\ &= -v((-v)qv)v \\ &= v^2qv^2 \\ &= q \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 + q_2) &= -v(\overline{q_1 + q_2})v \\ &= -v(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)v \\ &= (-v\bar{q}_1v) + (-v\bar{q}_2v) \\ &= f(q_1) + f(q_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda q) &= -v(\overline{\lambda q})v \\ &= -v(\lambda \bar{q})v \\ &= \lambda(-v\bar{q}v) \\ &= \lambda f(q) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned}
 f(q_1 q_2) &= -v(\overline{q_1 q_2})v \\
 &= -v(\overline{q_2 q_1})v \\
 &= -v(\overline{q_2}(v v)\overline{q_1})v \\
 &= (-v\overline{q_2}v)(v\overline{q_1}v) \\
 &\neq f(q_2)f(q_1)
 \end{aligned}$$

dir. $v^2 = 1$ için $f(q_1 q_2) \neq f(q_2)f(q_1)$ olduğundan ne involüsyon ne de anti-involüsyondur.

Teorem 3.11. $v^2 = \mp 1$ eşitliğini sağlayan birim pure split kuaterniyon v olmak üzere $f_v : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$

$$q \rightarrow f_v(q) = v\overline{q}v$$

dönüşümü $v^2 = 1$ ise bir involüsyon, $v^2 = -1$ ise ne involüsyon ne de anti-involüsyondur.

İspat. Öncelikle $v^2 = 1$ için involüsyon tanımındaki aksiyomları sağladığını göstermeliyiz.

A1. Her q split kuaterniyonu için

$$\begin{aligned}
 f(f(q)) &= f(v\overline{q}v) \\
 &= v\overline{(v\overline{q}v)}v \\
 &= v(\overline{v}q\overline{v})v \\
 &= v(vqv)v \\
 &= v^2 q v^2 \\
 &= q
 \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 + q_2) &= v(\overline{q_1 + q_2})v \\ &= v(\overline{q_1} + \overline{q_2})v \\ &= (v\overline{q_1}v) + (v\overline{q_2}v) \\ &= f(q_1) + f(q_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda q) &= v(\overline{\lambda q})v \\ &= v(\lambda \overline{q})v \\ &= \lambda(v\overline{q}v) \\ &= \lambda f(q) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 q_2) &= v(\overline{q_1 q_2})v \\ &= v(\overline{q_2 q_1})v \\ &= v(\overline{q_2}(v\overline{v})\overline{q_1})v \\ &= (v\overline{q_2}v)(v\overline{q_1}v) \\ &= f(q_2)f(q_1) \end{aligned}$$

dir.

Şimdi $v^2 = -1$ olduğunu varsayalım.

A1. Her q split kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} f(f(q)) &= f(v\bar{q}v) \\ &= v\overline{(v\bar{q}v)}v \\ &= v(\bar{v}q\bar{v})v \\ &= v(vqv)v \\ &= v^2qv^2 \\ &= q \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 + q_2) &= v\overline{(q_1 + q_2)}v \\ &= v(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)v \\ &= (v\bar{q}_1v) + (v\bar{q}_2v) \\ &= f(q_1) + f(q_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda q) &= v\overline{(\lambda q)}v \\ &= v(\lambda\bar{q})v \\ &= \lambda(v\bar{q}v) \\ &= \lambda f(q) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned}
 f(q_1 q_2) &= v(\overline{q_1 q_2})v \\
 &= v(\overline{q_2 q_1})v \\
 &= v(\overline{q_2}(v(-v))\overline{q_1})v \\
 &= (v\overline{q_2}v)(-v\overline{q_1}v) \\
 &\neq f(q_2)f(q_1)
 \end{aligned}$$

dir. $v^2 = -1$ için $f(q_1 q_2) \neq f(q_2)f(q_1)$ olduğundan ne involüsyon ne de anti-involüsyondur.

Teorem 3.12. $v^2 = \mp 1$ eşitliğini sağlayan birim pure split kuaterniyon v olmak üzere

$$f_v : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$q \rightarrow f_v(q) = -vqv$$

dönüşümü $v^2 = -1$ ise bir anti-involüsyon, $v^2 = 1$ ise ne involüsyon ne de anti-involüsyondur.

İspat. Öncelikle $v^2 = -1$ için anti-involüsyon tanımındaki aksiyomları sağladığını göstermeliyiz.

A1. Her q split kuaterniyonu için

$$\begin{aligned}
 f(f(q)) &= f(-vqv) \\
 &= -v(-vqv)v \\
 &= v^2 q v^2 \\
 &= q
 \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
 f(q_1 + q_2) &= -v(q_1 + q_2)v \\
 &= -vq_1v - vq_2v \\
 &= (-vq_1v) + (-vq_2v) \\
 &= f(q_1) + f(q_2)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda q) &= -v(\lambda q)v \\ &= -v(\lambda q)v \\ &= \lambda(-vqv) \\ &= \lambda f(q) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 q_2) &= -v(q_1 q_2)v \\ &= -v(q_2 q_1)v \\ &= -v(q_2(v(-v))q_1)v \\ &= (-vq_2v)(-vq_1v) \\ &= f(q_2)f(q_1) \end{aligned}$$

dir.

Şimdi $v^2 = 1$ olduğunu varsayalım.

A1. Her q split kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} f(f(q)) &= f(-vqv) \\ &= -v(-vqv)v \\ &= v^2 q v^2 \\ &= q \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 + q_2) &= -v(q_1 + q_2)v \\ &= -v(q_1 + q_2)v \\ &= (-vq_1v) + (-vq_2v) \\ &= f(q_1) + f(q_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda q) &= -v(\lambda q)v \\ &= -v(\lambda q)v \\ &= \lambda(-vqv) \\ &= \lambda f(q) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 q_2) &= -v(q_1 q_2)v \\ &= -v(q_2 q_1)v \\ &= -v(q_2(vv)q_1)v \\ &= (-vq_2v)(vq_1v) \\ &\neq f(q_2)f(q_1) \end{aligned}$$

dir. $v^2 = 1$ için $f(q_1 q_2) \neq f(q_2)f(q_1)$ olduğundan ne involüsyon ne de anti-involüsyondur.

Teorem 3.13. $v^2 = \mp 1$ eşitliğini sağlayan birim pure split kuaterniyon v olmak üzere $f_v : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$

$$q \rightarrow f_v(q) = vqv$$

dönüşümü $v^2 = 1$ ise bir anti-involüsyon, $v^2 = -1$ ise ne involüsyon ne de anti-involüsyondur.

İspat. Öncelikle $v^2 = 1$ için anti-involüsyon tanımındaki aksiyomları sağladığını göstermeliyiz.

A1. Her q split kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} f(f(q)) &= f(vqv) \\ &= v(vqv)v \\ &= v^2qv^2 \\ &= q \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 + q_2) &= v(q_1 + q_2)v \\ &= vq_1v + vq_2v \\ &= f(q_1) + f(q_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda q) &= v(\lambda q)v \\ &= \lambda vqv \\ &= \lambda f(q) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 q_2) &= v(q_1 q_2)v \\ &= v(q_2 q_1)v \\ &= v(q_2(vv)q_1)v \\ &= (vq_2v)(vq_1v) \\ &= f(q_2)f(q_1) \end{aligned}$$

dir.

Şimdi $v^2 = -1$ olduğunu varsayalım.

A1. Her q split kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} f(f(q)) &= f(vqv) \\ &= v(vqv)v \\ &= v^2 q v^2 \\ &= q \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(q_1 + q_2) &= v(q_1 + q_2)v \\ &= v(q_1 + q_2)v \\ &= (vq_1v) + (vq_2v) \\ &= f(q_1) + f(q_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda q) &= v(\lambda q)v \\ &= v(\lambda q)v \\ &= \lambda(vqv) \\ &= \lambda f(q) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ için

$$\begin{aligned}
 f(q_1 q_2) &= v(q_1 q_2)v \\
 &= v(q_2 q_1)v \\
 &= v(q_2(v(-v))q_1)v \\
 &= (vq_2v)(-vq_1v) \\
 &\neq f(q_2)f(q_1)
 \end{aligned}$$

dir. $v^2 = -1$ için $f(q_1 q_2) \neq f(q_2)f(q_1)$ olduğundan ne involüsyon ne de anti-involüsyondur.

Geometri:

Şimdi yukarıda bulduğumuz involüsyonların ve anti-involüsyonların geometrik yorumlarını vereceğiz.

Teorem 3.14. $v^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör v olsun. Herhangi bir $q = a + \mu b$ split kuaterniyonu için $f : \mathbb{H}' \rightarrow \mathbb{H}'$, $f(q) = -v\bar{q}v$ involüsyonu, q nun skaler kısmı a yı invaryant bırakır ve q nun vektörel kısmı μb yi de v involüsyon eksenine ortogonal olan düzleme göre yansıtır.

İspat. $q = a + \mu b$ sayısı için

$$\begin{aligned}
 f(q) &= -v\bar{q}v \\
 &= -v\overline{(a + \mu b)}v \\
 &= -v(a - \mu b)v \\
 &= -vav + v\mu vb \\
 &= -v^2a + v\mu vb \\
 &= a + v\mu vb
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

dir. Bu eşitliğe göre f involüsyonunun q nun skaler kısmı a yı invaryant bıraktığı açıktır. Diğer yandan $v\mu v$ nin de μ nin v involüsyon eksenine ortogonal olan düzleme göre

yansıması olduğunu göstermeliyiz. v, μ vektör olduğundan

$$\begin{aligned}
v\mu v &= (v\mu)v \\
&= (\langle v, \mu \rangle + v \times \mu)v \\
&= \langle v, \mu \rangle v + (v \times \mu)v \\
&= \langle v, \mu \rangle v + \langle v \times \mu, v \rangle + (v \times \mu) \times v \\
&= \langle v, \mu \rangle v - v \times (v \times \mu) \\
&= \langle v, \mu \rangle v - \langle v, v \rangle \mu + \langle v, \mu \rangle v \\
&= 2\langle v, \mu \rangle v - \langle v, v \rangle \mu \\
&= 2\langle v, \mu \rangle v - v^2 \mu \\
&= 2\langle v, \mu \rangle v + \mu
\end{aligned} \tag{3.3}$$

bulunur. μ nün düzleme olan izdüşümü

$$\mu_{izd} = \omega - \frac{\langle \mu, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v = \mu - \frac{\langle \mu, v \rangle}{v^2} v = \mu + \langle \mu, v \rangle v$$

olduğundan μ nün düzleme göre yansıması

$$2\mu_{izd} - \mu = 2(\mu + \langle \mu, v \rangle v) - \mu = \mu + 2\langle \mu, v \rangle v \tag{3.4}$$

eşitliğiyle elde edilir. (3.3) ve (3.4) eşitliklerine göre $v\mu v$, μ nün v involüsyon eksenine ortogonal olan düzleme göre yansıması olur.

Sonuç 3.15. (3.2) eşitliğine göre $v \parallel \mu$ ise

$$f(q) = -v\bar{q}v = a + v\mu vb = \bar{q}$$

ve $v \perp \mu$ ise

$$f(q) = -v\bar{q}v = a + v\mu vb = q$$

dir.

Teorem 3.16. $v^2 = 1$ eşitliğini sağlayan birim vektör v olsun. Herhangi bir $q = a + \mu b$ split kuaterniyonu için $f : \mathbb{H}' \rightarrow \mathbb{H}'$, $f(q) = v\bar{q}v$ involüsyonu, q nun skaler kısmı a yı

invariant bırakır ve q nun vektörel kısmı μb yi de v involüsyon eksenine ortogonal olan düzleme göre yansıtır.

İspat. $q = a + \mu b$ split kuaterniyonu için

$$\begin{aligned}
 f(q) &= v\bar{q}v \\
 &= v\overline{(a + \mu b)}v \\
 &= v(a - \mu b)v \\
 &= vav - v\mu vb \\
 &= v^2a - v\mu vb \\
 &= a - v\mu vb
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

dir. Bu eşitliğe göre f involüsyonunun q nun skaler kısmı a yı invariant bıraktığı açıktır. Diğer yandan $-v\mu v$ nin de μb nın v involüsyon eksenine ortogonal olan düzleme göre yansımaları olduğunu göstermeliyiz. v, μ vektör olduğundan

$$\begin{aligned}
 -v\mu v &= -(v\mu)v \\
 &= -(\langle v, \mu \rangle + v \times \mu)v \\
 &= -\langle v, \mu \rangle v - (v \times \mu)v \\
 &= -\langle v, \mu \rangle v - \langle v \times \mu, v \rangle - (v \times \mu) \times v \\
 &= -\langle v, \mu \rangle v + v \times (v \times \mu) \\
 &= -\langle v, \mu \rangle v + \langle v, v \rangle \mu - \langle v, \mu \rangle v \\
 &= -2\langle v, \mu \rangle v + \langle v, v \rangle \mu \\
 &= -2\langle v, \mu \rangle v + v^2 \mu \\
 &= -2\langle v, \mu \rangle v + \mu
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

bulunur. μ nün düzleme olan izdüşümü

$$\mu_{izd} = \mu - \frac{\langle \mu, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v = \mu - \frac{\langle \mu, v \rangle}{v^2} v = \mu - \langle \mu, v \rangle v$$

olduğundan μ nün düzleme göre yansıması

$$2\mu_{izd} - \mu = 2(\mu - \langle \mu, v \rangle v) - \mu = \mu - 2\langle \mu, v \rangle v \quad (3.7)$$

eşitliğiyle elde edilir. (3.6) ve (3.7) eşitliklerine göre $v\mu v$, μ nün v involüsyon eksenine ortogonal olan düzleme göre yansıması olur.

Sonuç 3.17. (3.5) eşitliğine göre $v \parallel \mu$ ise

$$f(q) = v\bar{q}v = a - v\mu vb = \bar{q}$$

ve $v \perp \mu$ ise

$$f(q) = v\bar{q}v = a - v\mu vb = q$$

dir.

Teorem 3.18. $v^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör v olsun. Herhangi bir $q = a + \mu b$ split kuaterniyonu için $f : \mathbb{H}' \rightarrow \mathbb{H}'$, $f(q) = -vqv$ anti-involüsyonu, q nun skaler kısmı a yı invariant bırakır ve q nun vektörel kısmı μb yi de v anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıtır. $f(q) = -vqv$ anti-involüsyonu $f(q) = -v\bar{q}v$ involüsyonunun eşleniğidir.

İspat. $q = a + \mu b$ split kuaterniyonu için

$$\begin{aligned} f(q) &= -vqv \\ &= -v(a + \mu b)v \\ &= -vav - v\mu vb \\ &= -v^2a - v\mu vb \\ &= a - v\mu vb \end{aligned} \quad (3.8)$$

dir. (3.5) ve (3.8) eşitliklerine göre $f(q) = -vqv$ anti-involüsyonu $f(q) = -v\bar{q}v$ involüsyonunun eşleniğidir. (3.8) eşitliğinden göre f involüsyonunun q nun skaler kısmı a yı invariant bıraktığı açıktır. Diğer yandan $-v\mu v$ nin de μb nin v anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıması olduğunu göstermeliyiz. v, μ vektör ol-

duğundan

$$\begin{aligned}
-v\mu v &= -(v\mu)v \\
&= -(\langle v, \mu \rangle + v \times \mu)v \\
&= -\langle v, \mu \rangle v - (v \times \mu)v \\
&= -\langle v, \mu \rangle v - \langle v \times \mu, v \rangle - (v \times \mu) \times v \\
&= -\langle v, \mu \rangle v + v \times (v \times \mu) \\
&= -\langle v, \mu \rangle v + \langle v, v \rangle \mu - \langle v, \mu \rangle v \\
&= -2\langle v, \mu \rangle v + \langle v, v \rangle \mu \\
&= -2\langle v, \mu \rangle v + v^2 \mu \\
&= -2\langle v, \mu \rangle v - \mu
\end{aligned} \tag{3.9}$$

bulunur. μ nün v ye olan izdüşümü

$$I_{zd_v} \mu = \frac{\langle v, \mu \rangle}{\langle v, v \rangle} v = \frac{\langle v, \mu \rangle}{v^2} v = -\langle v, \mu \rangle v$$

olduğundan μ nün v nin tanımladığı doğruya göre yansıması

$$2I_{zd_v} \mu - \mu = -2\langle v, \mu \rangle v - \mu \tag{3.10}$$

eşitliğiyle elde edilir. (3.9) ve (3.10) eşitliklerine göre $-v\mu v$, μ nün v anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıması olur.

Sonuç 3.19. (3.8) eşitliğine göre $v \parallel \mu$ ise

$$f(q) = -vqv = a - v\mu vb = q$$

ve $v \perp \mu$ ise

$$f(q) = -vqv = a - v\mu vb = \bar{q}$$

dir.

Teorem 3.20. $v^2 = 1$ eşitliğini sağlayan birim vektör v olsun. Herhangi bir $q = a + \mu b$ split kuaterniyonu için $f : \mathbb{H}' \rightarrow \mathbb{H}'$, $f(q) = vqv$ anti-involüsyonu, q nun skaler kısmı a

yı invaryant bırakır ve q nun vektörel kısmı μb yi de v anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıtır. $f(q) = vqv$ anti-involüsyonu $f(q) = v\bar{q}v$ involüsyonunun eşleniğidir.

İspat. $q = a + \mu b$ split kuaterniyonu için

$$\begin{aligned}
 f(q) &= vqv \\
 &= v(a + \mu b)v \\
 &= vav + v\mu vb \\
 &= v^2a + v\mu vb \\
 &= a + v\mu vb
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

dir. (3.5) ve (3.11) eşitliklerine göre $f(q) = vqv$ anti-involüsyonu $f(q) = v\bar{q}v$ involüsyonunun eşleniğidir. (3.11) eşitliğinden f involüsyonunun q nun skaler kısmı a yı invaryant bıraktığı açıktır. Diğer yandan $v\mu v$ nin de μb nin v anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıması olduğunu göstermeliyiz. v, ω vektör olduğundan

$$\begin{aligned}
 v\mu v &= (v\mu)v \\
 &= (\langle v, \mu \rangle + v \times \mu)v \\
 &= \langle v, \mu \rangle v + (v \times \mu)v \\
 &= \langle v, \mu \rangle v + \langle v \times \mu, v \rangle + (v \times \mu) \times v \\
 &= \langle v, \mu \rangle v - v \times (v \times \mu) \\
 &= \langle v, \mu \rangle v - \langle v, v \rangle \mu + \langle v, \mu \rangle v \\
 &= 2\langle v, \mu \rangle v - \langle v, v \rangle \mu \\
 &= 2\langle v, \mu \rangle v - v^2 \mu \\
 &= 2\langle v, \mu \rangle v - \mu
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

bulunur. μ nün v ye olan izdüşümü

$$\text{Izd}_v \mu = \frac{\langle v, \mu \rangle}{\langle v, v \rangle} v = \frac{\langle v, \mu \rangle}{v^2} v = \langle v, \mu \rangle v$$

olduğundan μ nün v nin tanımladığı doğruya göre yansıması

$$2\dot{I}zd_v\mu - \mu = 2\langle v, \mu \rangle v - \mu \quad (3.13)$$

eşitliğiyle elde edilir. (3.12) ve (3.13) eşitliklerine göre $v\mu v$, μ nün v anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıması olur.

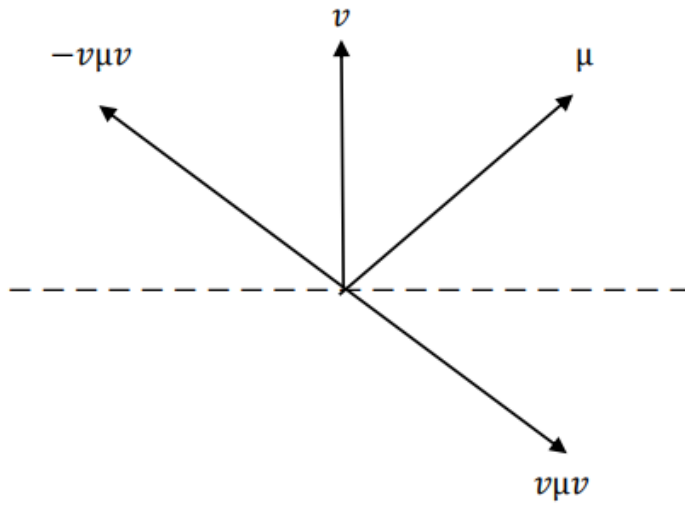
Sonuç 3.21. (3.11) eşitliğine göre $v \parallel \mu$ ise

$$f(q) = vqv = a + v\mu vb = q$$

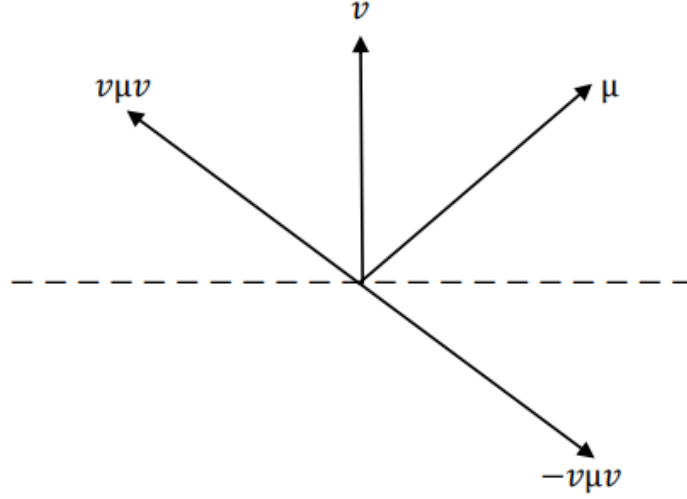
ve $v \perp \mu$ ise

$$f(q) = vqv = a + v\mu vb = \bar{q}$$

dir.



Şekil 3.1: $v^2 = -1$ için $f(q) = -v\bar{q}v$ involüsyonu ve $f(q) = -vqv$ anti-involüsyonunun geometrisi



Şekil 3.2: $v^2 = 1$ için $f(q) = v\bar{q}v$ involüsyonu ve $f(q) = vqv$ anti-involüsyonunun geometrisi

Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 de noktalı doğru v ye ortogonal olan düzlemi göstermektedir ve v nin skalar kısmı invaryant olduğundan gösterilmemiştir.

Sonuç 3.15 ve Sonuç 3.17 ye göre involüsyonun v eksenine ile q nun vektörel kısmı paralel olduğunda involüsyon split kuaterniyonun eşleniğini ve ortogonal olduğunda involüsyon split kuaterniyonun kendisini verir. Sonuç 3.19 ve Sonuç 3.21 e göre anti-involüsyonun v eksenine ile q nun vektörel kısmı ortogonal olduğunda anti-involüsyon split kuaterniyonun eşleniğini ve paralel olduğunda split kuaterniyonun kendisini verir. Aşağıda Lemma 3.22 ve Lemma 3.23 böyle durumların genel formüllerini vermektedir.

Lemma 3.22. Eksenleri birbirine ortogonal v_1, v_2, v_3 birim vektörleri olan involüsyonların toplamını herhangi bir μ vektörüne uygulanırsa yine μ elde edilir. Yani f_1, f_2, f_3 sırasıyla eksenleri v_1, v_2, v_3 olan involüsyonlar ise

$$f_1(\mu) + f_2(\mu) + f_3(\mu) = \mu \quad (3.14)$$

olur.

İspat. $i = 1, 2, 3$ için $\mu_i \parallel v_i$ olmak üzere $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ olsun. μ , (3.14) eşitliğinin

sol tarafında yerine yazılırsa, involüsyonun A2. aksiyomuna göre

$$\begin{aligned} f_1(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + f_2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + f_3(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) &= f_1(\mu_1) + f_1(\mu_2) + f_1(\mu_3) \\ &+ f_2(\mu_1) + f_2(\mu_2) + f_2(\mu_3) \\ &+ f_3(\mu_1) + f_3(\mu_2) + f_3(\mu_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 3.15 ve Sonuç 3.17 ye göre bir vektör μ involüsyonun eksenine paralel ise involüsyon μ nün işaretini değiştirir, ortogonal ise involüsyon birim dönüşüm olur. Buna göre yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$-\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 + \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = \mu$$

elde edilir.

Lemma 3.23. Eksenleri birbirine hibrit ortogonal v_1, v_2, v_3 birim vektörleri olan anti-involüsyonların toplamını herhangi bir μ vektörüne uygulanırsa μ yön değiştirir. Yani f_1, f_2, f_3 sırasıyla eksenleri v_1, v_2, v_3 olan anti-involüsyonlar ise

$$f_1(\mu) + f_2(\mu) + f_3(\mu) = -\mu \quad (3.15)$$

olur.

İspat. $i = 1, 2, 3$ için $\mu_i \parallel v_i$ olmak üzere $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ olsun. μ , (3.15) eşitliğinin sol tarafında yerine yazılırsa, anti-involüsyonun A2. aksiyomuna göre

$$\begin{aligned} f_1(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + f_2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + f_3(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) &= f_1(\mu_1) + f_1(\mu_2) + f_1(\mu_3) \\ &+ f_2(\mu_1) + f_2(\mu_2) + f_2(\mu_3) \\ &+ f_3(\mu_1) + f_3(\mu_2) + f_3(\mu_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 3.19 ve Sonuç 3.21 e göre bir vektör μ anti-involüsyonun eksenine ortogonal ise anti-involüsyon μ nün işaretini değiştirir, paralel ise anti-involüsyon birim dönüşüm olur. Buna göre yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = -\mu$$

elde edilir.

Teorem 3.24. $q \in \mathbb{H}'$ ve eksenleri birbirine ortogonal v_1, v_2, v_3 birim vektörleri olan anti-involüsyonlar f_1, f_2, f_3 ise

$$\bar{q} = \frac{1}{2}(f_1(q) + f_2(q) + f_3(q) - q) \quad (3.16)$$

dir.

İspat. $q = a + \mu b$ olsun. Anti-involüsyonun A2. aksiyomuna göre (3.16) eşitliğinin sağ tarafı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_1(q) + f_2(q) + f_3(q) - q) &= \frac{1}{2}(f_1(a + \mu b) + f_2(a + \mu b) + f_3(a + \mu b) - (a + \mu b)) \\ &= \frac{1}{2}(f_1(a) + f_1(\mu b) + f_2(a) + f_2(\mu b) + f_3(a) + f_3(\mu b) - a - \mu b) \end{aligned}$$

elde edilir. Anti-involüsyonlar a skaler kısmını invaryant bırakır ve (3.15) eşitliğine göre yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_1(q) + f_2(q) + f_3(q) - q) &= \frac{1}{2}(a + f_1(\mu b) + a + f_2(\mu b) + a + f_3(\mu b) - a - \mu b) \\ &= a + \frac{1}{2}(f_1(\mu b) + f_2(\mu b) + f_3(\mu b) - \mu b) \\ &= a + \frac{1}{2}(-\mu b - \mu b) \\ &= a - \mu b \\ &= \bar{q} \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.25. $q \in \mathbb{H}'$ ve eksenleri birbirine ortogonal v_1, v_2, v_3 birim vektörleri olan involüsyonlar f_1, f_2, f_3 ise

$$q = \frac{1}{2}(f_1(q) + f_2(q) + f_3(q) - \bar{q}) \quad (3.17)$$

dir.

İspat. $q = a + \mu b$ olsun. İnvölüsyonun A2. aksiyomuna göre (3.17) eşitliğinin sağ tarafı

hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f_1(q) + f_2(q) + f_3(q) - \bar{q}) &= \frac{1}{2}(f_1(a + \mu b) + f_2(a + \mu b) + f_3(a + \mu b) - (a - \mu b)) \\ &= \frac{1}{2}(f_1(a) + f_1(\mu b) + f_2(a) + f_2(\mu b) + f_3(a) + f_3(\mu b) - a + \mu b)\end{aligned}$$

elde edilir. İnvölüsyonlar a skaler kısmını invaryant bırakır ve (3.14) eşitliğine göre yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f_1(q) + f_2(q) + f_3(q) - \bar{q}) &= \frac{1}{2}(a + f_1(\mu b) + a + f_2(\mu b) + a + f_3(\mu b) - a + \mu b) \\ &= a + \frac{1}{2}(f_1(\mu b) + f_2(\mu b) + f_3(\mu b) + \mu b) \\ &= a + \frac{1}{2}(\mu b + \mu b) \\ &= a + \mu b \\ &= q\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.26. $v^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör v olsun. Herhangi bir μ vektörünün v ye paralel ve ortogonal bileşenleri sırasıyla μ_1, μ_2 ise

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1}{2}(\mu - f_1(\mu)) = \frac{1}{2}(\mu + f_2(\mu)) \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}(\mu + f_1(\mu)) = \frac{1}{2}(\mu - f_2(\mu))\end{aligned}$$

dir ve $\mu = \mu_1 + \mu_2$ dir. Burada $f_1(q) = -v\bar{q}v$ involüsyonu ve $f_2(q) = -vqv$ anti-involüsyonu alınmıştır.

İspat. Şekil 3.1. den kolayca görülmektedir.

Teorem 3.27. $v^2 = 1$ eşitliğini sağlayan birim vektör v olsun. Herhangi bir μ vektörünün v ye paralel ve ortogonal bileşenleri sırasıyla μ_1, μ_2 ise

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1}{2}(\mu - f_1(\mu)) = \frac{1}{2}(\mu + f_2(\mu)) \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}(\mu + f_1(\mu)) = \frac{1}{2}(\mu - f_2(\mu))\end{aligned}$$

dir ve $\mu = \mu_1 + \mu_2$ dir. Burada $f_1(q) = v\bar{q}v$ involüsyonu ve $f_2(q) = vqv$ anti-involüsyonu

alınmıştır.

İspat. şekil 3.2. den kolayca görölmektedir.



4 . HİBRİT SAYILAR

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i$ eşitliklerini sağlayan bir $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısı kompleks, hiperbolik ve dual sayıların bir genelleştirilmiştir. Hibrit sayılarına karşılık gelen geometri Öklid, Minkowski, Galile düzlem geometrileri ve bunların kombinasyonlarını içeren en genel geometridir. Hibrit sayılara karşılık gelen geometriye Hibridyen düzlem geometrisi diyeceğiz. Bu düzlem, $\mathbb{R}^4$ 'ün iki boyutlu bir alt uzayıdır. Hibridyen düzlem geometrisi eliptik, hiperbolik veya parabolik olarak sınıflandırılır.

Tanım 4.1. $\mathbb{K}$ ile gösterilen hibrit sayılar kümesi

$$\mathbb{K} = \{a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i\}$$

olarak tanımlanır ve dörtlülerin kümesi olarak düşünülebilir. Reel, kompleks, dual ve hiperbolik birimler sırasıyla

$$1 \leftrightarrow (1, 0, 0, 0), i \leftrightarrow (0, 1, 0, 0), \varepsilon \leftrightarrow (0, 0, 1, 0), h \leftrightarrow (0, 0, 0, 1)$$

olarak gösterilir ve bu birimler hibrit birimler olarak adlandırılır. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısı için, a ya skaler kısım denir ve $S(Z)$ ile gösterilir. Ayrıca $bi + c\varepsilon + dh$ ye vektörel kısım denir ve $V(Z)$ ile gösterilir.

Tanım 4.2. $Z_1 = a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h$ ve $Z_2 = a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h$ hibrit sayılarının karşılıklı bileşenleri eşitse yani $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$ ise Z_1 ve Z_2 hibrit sayıları eşittir ve $Z_1 = Z_2$ dir.

Tanım 4.3. $Z_1 = a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h$ ve $Z_2 = a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h$ hibrit sayılarının toplamı

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h) + (a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h) \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)\varepsilon + (d_1 + d_2)h \end{aligned}$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Hibrit sayılarda toplama işlemi hem değişmeli hem de birleşmelidir. Bütün bileşenleri sıfır olan hibrit sayıyı 0 ile gösterelim. 0, hibrit sayılarda toplama işlemine göre etkisiz elemandır. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısının toplama işlemine göre tersi $-Z = -a - bi - c\varepsilon - dh$ dir. Buna göre, $(\mathbb{K}, +)$ ikilisi değişmeli gruptur.

Tanım 4.4. Hibrit çarpımı $i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i$ olmak üzere

$$Z_1 Z_2 = (a_1 + b_1 i + c_1 \varepsilon + d_1 h)(a_2 + b_2 i + c_2 \varepsilon + d_2 h)$$

eşitliğiyle tanımlanır

$i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i$ eşitlikleri kullanarak herhangi iki hibrit birimin çarpımını bulunabilir. Örneğin, εi yi bulmak için $hi + \varepsilon + i = 0$ eşitliğinin her iki yanını sağdan i ile çarpalım. Böylece $\varepsilon i = h + 1$ elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse aşağıdaki çarpım tablosu bulunur.

•	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	$\varepsilon - 1$	$1 - h$	$\varepsilon + i$
ε	ε	$h + 1$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon - i$	ε	1

Buna göre, herhangi iki hibrit sayının çarpımı için bu tablo kullanılır. Bu tablo hibrit sayılardaki çarpma işleminin değişmeli olmadığını gösterir. Fakat çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

Tanım 4.5. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısının eşleniği

$$\bar{Z} = S(Z) - V(Z) = a - bi - c\varepsilon - dh$$

olarak tanımlanır.

Hibrit sayıların toplamının eşleniği, eşleniklerinin toplamına eşittir. Buna göre

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$$

dir. Ayrıca, hibrit çarpımı değişmeli olmamasına rağmen bir hibrit sayının eşleniğiyle çarpımı değişmelidir. Gerçekten

$$Z\bar{Z}=\bar{Z}Z=a^2+(b-c)^2-c^2-d^2$$

reel sayısı elde edilir. Bu reel sayı $C(Z)$ ile gösterilir. Buna göre

$$C(Z) = Z\bar{Z} = \bar{Z}Z = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2$$

dir. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısı için

$$\mathcal{V}_Z = (a, (b-c), c, d)$$

vektörüne Z nin vektör gösterimi denir. $\mathbb{E}_2^4$ deki $(-, -, +, +)$ işaretleri kullanılarak

$$C(Z) = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = - \langle \mathcal{V}_Z, \mathcal{V}_Z \rangle_{\mathbb{E}_2^4}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca, $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısı, $C(Z) < 0, C(Z) > 0, C(Z) = 0$ ise sırasıyla spacelike, timelike ve lightlike olarak adlandırılır. Bunlara Z hibrit sayısının karakteri denir.

Tanım 4.6. $\sqrt{|C(Z)|} = \sqrt{(a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2)}$ reel sayısına, Z hibrit sayısının normu denir ve $\| Z \|$ ile gösterilir.

Açıklama 4.7. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ bir hibrit sayısının normu

$$\| Z \| = \sqrt{|Z\bar{Z}|} = \sqrt{|C(Z)|} = \sqrt{|a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2|} \quad (4.1)$$

olduğundan kompleks, hiperbolik ve dual sayıların norm tanımıyla örtüşen genelleştirilmiş bir normdur.

1. Z kompleks bir sayı ise $c = d = 0$ olduğundan (4.1) eşitliğine göre

$$\| Z \| = \| a + bi \| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

dir.

2. Z hiperbolik bir sayı ise $b = c = 0$ olduğundan (4.1) eşitliğine göre

$$\|Z\| = \|a + d\mathbf{h}\| = \sqrt{|a^2 - d^2|}$$

dir.

3. Z dual bir sayı ise $b = d = 0$ olduğundan (4.1) eşitliğine göre

$$\|Z\| = \|a + c\epsilon\| = \sqrt{a^2} = |a|$$

dir.

Tanım 4.8. $Z = a + bi + c\epsilon + dh$ hibrit sayısı için

$$\epsilon_Z = ((b - c), c, d)$$

vektörüne Z nin hibrit vektörü denir. $\epsilon_Z = ((b - c), c, d)$ hibrit vektörü $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayının bir vektörü olarak alınırsa.

$$C_\epsilon(Z) = -(b - c)^2 + c^2 + d^2 = \langle \epsilon_Z, \epsilon_Z \rangle_{\mathbb{E}_1^3}$$

eşitliğiyle tanımlanan $C_\epsilon(Z)$ reel sayısına bağlı olarak Z hibrit sayısının tipleri tanımlanır. $C_\epsilon(Z) < 0, C_\epsilon(Z) > 0, C_\epsilon(Z) = 0$ ise Z hibrit sayısına sırasıyla eliptik(komplike), hiperbolik(hiperlike) ve parabolik(duallike) denir. $\sqrt{|C_\epsilon(Z)|}$ reel sayısına Z nin hibrit vektörünün normu denir ve $N(Z)$ ile gösterilir. Split kuaterniyonlarda olduğu gibi, hibrit sayının hibrit vektörü timelike, spacelike ve null olabilir.

$Z = a + bi + c\epsilon + dh$ bir spacelike hibrit sayısı olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} C(Z) < 0 &\Rightarrow a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 < 0 \\ &\Rightarrow -(b - c)^2 + c^2 + d^2 > a^2 > 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\epsilon_Z = ((b - c), c, d)$ hibrit vektörü spacelike vektördür ve ayrıca

$$C_\epsilon(Z) = \langle \epsilon_Z, \epsilon_Z \rangle_{\mathbb{E}_1^3} = -(b - c)^2 + c^2 + d^2 > 0$$

eşitliğine göre spacelike hibrit sayısının $\epsilon_Z = ((b - c), c, d)$ hibrit vektörü hiperboliktir.

$Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ bir lightlike hibrit sayısı olsun. Öyleyse $C(Z) = 0$ olduğundan $a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 = 0$ dır. Z nin skaler kısmı sıfırdan farklıysa $-(b - c)^2 + c^2 + d^2 = a^2 > 0$ olduğundan lightlike hibrit sayısının $\varepsilon_Z = ((b - c), c, d)$ hibrit vektörü spacelike vektördür. Z nin skaler kısmı sıfır ise $-(b - c)^2 + c^2 + d^2 = a^2 = 0$ olduğundan hibrit sayısının $\varepsilon_Z = ((b - c), c, d)$ hibrit vektörü null vektördür. Yani, lightlike bir hibrit sayısının türü ya hiperbolik ya da paraboliktir. Buna göre, aşağıdaki tabloyu verebiliriz.

Spacelike	Lightlike	Timelike
<i>Hiperbolik(Hiperlike)</i>	<i>Hiperbolik</i>	<i>Hiperbolik</i>
	<i>Parabolik(Duallike)</i>	<i>Parabolik</i>
		<i>Eliptik(Komplike)</i>

Hibrit sayıların çarpımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
C(Z_1 Z_2) &= Z_1 Z_2 (\overline{Z_1 Z_2}) \\
&= Z_1 Z_2 (\overline{Z_2 Z_1}) \\
&= Z_1 (Z_2 (\overline{Z_2 Z_1})) \\
&= Z_1 ((Z_2 \overline{Z_2}) \overline{Z_1}) \\
&= Z_1 (C(Z_2)) \overline{Z_1} \\
&= C(Z_2) Z_1 \overline{Z_1} \\
&= C(Z_2) C(Z_1) \\
&= C(Z_1) C(Z_2)
\end{aligned}$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilir.

Tanım 4.9. $\|Z\| \neq 0$ olmak üzere $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısının tersi

$$Z^{-1} = \frac{\overline{Z}}{C(Z)}$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Buna tanıma göre lightlike hibrit sayıların tersi yoktur.

Örneğin, $Z = 2 + 5i + 3\varepsilon + h$ hibrit sayısının tersi

$$C(Z) = Z\bar{Z} = \bar{Z}Z = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = 2^2 + (5-3)^2 - 3^2 - 1^2 = -2$$

olduğundan

$$Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{C(Z)} = \frac{2 - 5i - 3\varepsilon - h}{-2}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.10. Hibrit sayılar kümesi, toplama ve çarpma işlemlerine değişmeli olmayan bir halkadır.

Timelike hibrit sayılar kümesi $\mathbb{TK}$ ile gösterilir. Buna göre

$$\mathbb{TK} = \{Z \in \mathbb{K} : C(Z) > 0\}$$

dır. $C(Z_1 Z_2) = C(Z_1)C(Z_2)$ eşitliğine göre iki timelike hibrit sayının çarpımı yine bir timelike vektördür. Z timelike hibrit sayısı için

$$C(Z) > 0$$

ve

$$\begin{aligned} C(Z^{-1}) &= Z^{-1} \overline{Z^{-1}} \\ &= \frac{\bar{Z}}{C(Z)} \overline{\left(\frac{\bar{Z}}{C(Z)} \right)} \\ &= \frac{1}{C(Z)^2} \bar{Z}Z \\ &= \frac{1}{C(Z)^2} C(Z) \\ &= \frac{1}{C(Z)} > 0 \end{aligned}$$

olduğundan timelike bir hibrit sayının tersi de timelike olur. Öyleyse timelike hibrit sayılar çarpma işlemine göre grup oluşturur. Ayrıca, hibridyen çarpımına göre aşağıdaki

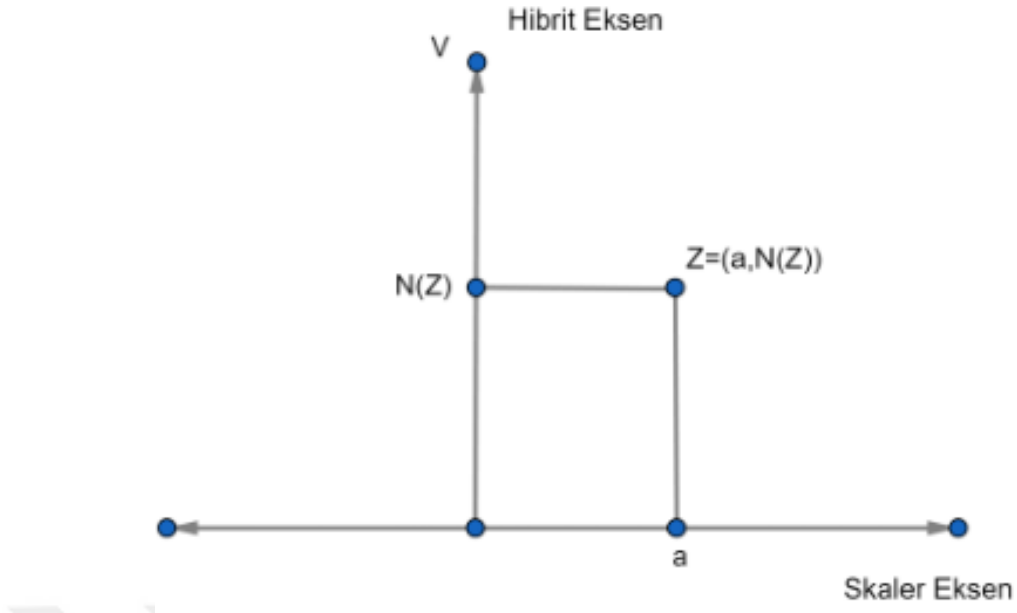
tablo yazılabilir.

$\cdot$	Spacelike	Timelike	Lightlike
Spacelike	<i>Timelike</i>	<i>Spacelike</i>	<i>Lightlike</i>
Timelike	<i>Spacelike</i>	<i>Timelike</i>	<i>Lightlike</i>
Lightlike	<i>Lightlike</i>	<i>Lightlike</i>	<i>Lightlike</i>

Herhangi bir hibrit sayı, kartezyen koordinat sistemine benzer olarak iki boyutlu bir koordinat sisteminde gösterilebilir. Bu amaçla reel eksen ve hibrit vektör ile bir koordinat düzlemi oluşturulmuştur. Hibrit sayısının reel kısmına reel eksen olarak ve $\sqrt{|C_\varepsilon(Z)|} = N(Z)$ değeri hibrit eksen olarak seçilebilir. Yani, bir $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısının skaler kısmına x -koordinatı veya apsisi ve $N(Z) = \sqrt{|C_\varepsilon(Z)|}$ sayısına y -koordinatı veya ordinatı denir. Bu şekilde oluşturulan koordinat sistemine hibridyen koordinat sistemi denir. Buna göre $Z = a + bi + c\varepsilon + dh = x + yV$ hibrit sayısının hibrit koordinatları

$$Z = (x, y) = (a, N(Z)) = (a, \sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|})$$

ile gösterilir. Burada V, Z nin hibrit vektörüdür. Hibrit düzlemi, dört boyutlu yarı Öklid uzayının bir alt uzayı olarak kabul edilir (Şekil 4.1).



Şekil 4.1: Hibridyen koordinatlar

Örneğin, $Z = 1 + 3i + 1\varepsilon + 1h$ sayısının hibrit koordinatları

$$Z = (1, \sqrt{2})$$

biçimdedir. Burada hibrit eksen $V = \frac{3i + 1\varepsilon + 1h}{\sqrt{2}}$ birim hibrit vektörü tarafından belirlenmiştir.

Hibrit Sayıların Skaler ve Vektörel Çarpımları:

Hibrit sayılardaki $g : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ skaler çarpımı $Z_1 = a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h$ ve $Z_2 = a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h$ olmak üzere

$$g(Z_1, Z_2) = \frac{Z_1 \bar{Z}_2 + Z_2 \bar{Z}_1}{2} = a_1 a_2 + b_1 b_2 - b_1 c_2 - b_2 c_1 - d_1 d_2 \quad (4.2)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Buna göre

$$\bar{Z}_1 = a_1 - b_1i - c_1\varepsilon - d_1h \text{ ve } \bar{Z}_2 = a_2 - b_2i - c_2\varepsilon - d_2h$$

kullanılarak

$$\begin{aligned}
Z_1 \bar{Z}_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 \varepsilon + d_1 h)(a_2 - b_2 i - c_2 \varepsilon - d_2 h) \\
&= a_1 a_2 - a_1 b_2 i - a_1 c_2 \varepsilon - a_1 d_2 h + b_1 a_2 i - b_1 b_2 i^2 - b_1 c_2 i \varepsilon - b_1 d_2 i h \\
&\quad + c_1 a_2 \varepsilon - c_1 b_2 \varepsilon i - c_1 c_2 \varepsilon^2 - c_1 d_2 \varepsilon h + d_1 a_2 h - d_1 b_2 h i - d_1 c_2 h \varepsilon - d_1 d_2 h^2 \\
&= a_1 a_2 - a_1 b_2 i - a_1 c_2 \varepsilon - a_1 d_2 h + b_1 a_2 i - b_1 b_2 (-1) - b_1 c_2 (1 - h) - b_1 d_2 (\varepsilon + i) \\
&\quad + c_1 a_2 \varepsilon - c_1 b_2 (h + 1) - c_1 c_2 (0) - c_1 d_2 (-\varepsilon) + d_1 a_2 h - d_1 b_2 (-\varepsilon - i) - d_1 c_2 \varepsilon - d_1 d_2 \\
&= (a_1 a_2 + b_1 b_2 - b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 d_2) + (-a_1 b_2 + b_1 a_2 - b_1 d_2 + d_1 b_2) i \\
&\quad + (-a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + c_1 d_2 + d_1 b_2 - d_1 c_2) \varepsilon + (-a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) h
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
Z_2 \bar{Z}_1 &= (a_2 + b_2 i + c_2 \varepsilon + d_2 h)(a_1 - b_1 i - c_1 \varepsilon - d_1 h) \\
&= a_2 a_1 - a_2 b_1 i - a_2 c_1 \varepsilon - a_2 d_1 h + b_2 a_1 i - b_2 b_1 i^2 - b_2 c_1 i \varepsilon - b_2 d_1 i h + c_2 a_1 \varepsilon \\
&\quad - c_2 b_1 \varepsilon i - c_2 c_1 \varepsilon^2 - c_2 d_1 \varepsilon h + d_2 a_1 h - d_2 b_1 h i - d_2 c_1 h \varepsilon - d_2 d_1 h^2 \\
&= a_2 a_1 - a_2 b_1 i - a_2 c_1 \varepsilon - a_2 d_1 h + b_2 a_1 i - b_2 b_1 (-1) - b_2 c_1 (1 - h) - b_2 d_1 (\varepsilon + i) \\
&\quad + c_2 a_1 \varepsilon - c_2 b_1 (h + 1) - c_2 c_1 (0) - c_2 d_1 (-\varepsilon) + d_2 a_1 h - d_2 b_1 (-\varepsilon - i) - d_2 c_1 \varepsilon - d_2 d_1 \\
&= (a_2 a_1 + b_2 b_1 - b_2 c_1 - c_2 b_1 - d_2 d_1) + (-a_2 b_1 + b_2 a_1 - b_2 d_1 + d_2 b_1) i \\
&\quad + (-a_2 c_1 - b_2 d_1 + c_2 a_1 + c_2 d_1 + d_2 b_1 - d_2 c_1) \varepsilon + (-a_2 d_1 + b_2 c_1 + c_2 b_1 + d_2 a_1) h
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
g(Z_1, Z_2) &= \frac{Z_1 \bar{Z}_2 + Z_2 \bar{Z}_1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \{ [(a_1 a_2 + b_1 b_2 - b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 d_2) + (-a_1 b_2 + b_1 a_2 - b_1 d_2 + d_1 b_2) i \\
&\quad + (-a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + c_1 d_2 + d_1 b_2 - d_1 c_2) \varepsilon + (-a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) h] \\
&\quad + [(a_2 a_1 + b_2 b_1 - b_2 c_1 - c_2 b_1 - d_2 d_1) + (-a_2 b_1 + b_2 a_1 - b_2 d_1 + d_2 b_1) i \\
&\quad + (-a_2 c_1 - b_2 d_1 + c_2 a_1 + c_2 d_1 + d_2 b_1 - d_2 c_1) \varepsilon + (-a_2 d_1 + b_2 c_1 + c_2 b_1 + d_2 a_1) h] \} \\
&= \frac{1}{2} [(a_1 a_2 + b_1 b_2 - b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 d_2) + (a_2 a_1 + b_2 b_1 - b_2 c_1 - c_2 b_1 - d_2 d_1)] \\
&\quad + \frac{1}{2} [(-a_1 b_2 + b_1 a_2 - b_1 d_2 + d_1 b_2) + (-a_2 b_1 + b_2 a_1 - b_2 d_1 + d_2 b_1)] i \\
&\quad + \frac{1}{2} [(-a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + c_1 d_2 + d_1 b_2 - d_1 c_2) \\
&\quad + (-a_2 c_1 - b_2 d_1 + c_2 a_1 + c_2 d_1 + d_2 b_1 - d_2 c_1)] \varepsilon \\
&\quad + \frac{1}{2} [(-a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2) + (-a_2 d_1 + b_2 c_1 + c_2 b_1 + d_2 a_1)] h \\
&= \frac{2a_1 a_2 + 2b_1 b_2 - 2b_1 c_2 - 2c_1 b_2 - 2d_1 d_2}{2} + 0i + 0\varepsilon + 0h \\
&= \frac{2(a_1 a_2 + b_1 b_2 - b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 d_2)}{2} \\
&= a_1 a_2 + b_1 b_2 - b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 d_2
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.11. Yukarıda (4.2) eşitliğiyle tanımlanan skaler çarpım non-dejenere, simetrik bilineer formdur.

İspat: $g : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ skaler çarpımı bilineerdir. Gerçekten, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{K}$ için

$$\begin{aligned}
g(\lambda Z_1 + \mu Z_2, Z_3) &= (\lambda a_1 + \mu a_2) a_3 + (\lambda b_1 + \mu b_2) b_3 - (\lambda b_1 + \mu b_2) c_3 \\
&\quad - b_3 (\lambda c_1 + \mu c_2) - (\lambda d_1 + \mu d_2) d_3 \\
&= \lambda (a_1 a_3 + b_1 b_3 - b_1 c_3 - b_3 c_1 - d_1 d_3) \\
&\quad + \mu (a_2 a_3 + b_2 b_3 - b_2 c_3 - b_3 c_2 - d_2 d_3) \\
&= \lambda g(Z_1, Z_3) + \mu g(Z_2, Z_3)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
g(Z_1, \lambda Z_2 + \mu Z_3) &= a_1(\lambda a_2 + \mu a_3) + b_1(\lambda b_2 + \mu b_3) \\
&\quad - b_1(\lambda c_2 + \mu c_3) - (\lambda b_2 + \mu b_3)c_1 - d_1(\lambda d_2 + \mu d_3) \\
&= \lambda(a_1 a_2 + b_1 b_2 - b_1 c_2 - b_2 c_1 - d_1 d_2) \\
&\quad + \mu(a_1 a_3 + b_1 b_3 - b_1 c_3 - b_3 c_1 - d_1 d_3) \\
&= \lambda g(Z_1, Z_2) + \mu g(Z_1, Z_3)
\end{aligned}$$

olduğundan g bilineerdir. Burada $Z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 \varepsilon + d_1 h$, $Z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 \varepsilon + d_2 h$ ve $Z_3 = a_3 + b_3 i + c_3 \varepsilon + d_3 h$ dir.

$\mathbb{K}$ üstündeki $g : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ skaler çarpımının non-dejenere olması için

$$\forall Z_1 \in \mathbb{K}, [(\forall Z_2 \in \mathbb{K}, g(Z_1, Z_2) = 0 \implies Z_1 = 0)]$$

önermesinin doğru olması gerekli ve yeterlidir. $Z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 \varepsilon + d_1 h$ olsun. $g(Z_1, Z_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2 - b_1 c_2 - b_2 c_1 - d_1 d_2 = 0$ olduğundan $Z_2 = 1 + 0i + 0\varepsilon + 0h$ için

$$g(Z_1, Z_2) = 0 \implies a_1 = 0,$$

$Z_2 = 0 + 0i + 1\varepsilon + 0h$ için

$$g(Z_1, Z_2) = 0 \implies b_1 = 0,$$

$Z_2 = 0 + 1i + 0\varepsilon + 0h$ için

$$\begin{aligned}
g(Z_1, Z_2) &= 0 \implies b_1 - c_1 = 0 \\
&\implies c_1 = 0,
\end{aligned}$$

$Z_2 = 0 + 0i + 0\varepsilon + 1h$ için

$$g(Z_1, Z_2) = 0 \implies d_1 = 0,$$

elde edilir. Buna göre, $Z_1 = 0$ olduğundan g skaler çarpımı non-dejenere olur.

g skaler çarpımı simetriktir. Gerçekten, $Z_1 = a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h$ ve $Z_2 = a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g(Z_1, Z_2) &= a_1a_2 + b_1b_2 - b_1c_2 - b_2c_1 - d_1d_2 \\ &= a_2a_1 + b_2b_1 - c_2b_1 - c_1b_2 - d_2d_1 \\ &= g(Z_2, Z_1) \end{aligned}$$

eşitliğine göre g simetriktir.

Hibrit sayıların skaler çarpımı kompleks, hiperbolik ve dual sayılar için genelleştirilmiş skaler çarpımdır. Bu skaler çarpım kullanılarak bir kompleks sayı ile bir hiperbolik sayının skaler çarpımı yapılabilir. Örneğin,

1) $Z_1 = a_1 + b_1i$ bir kompleks sayı, $Z_2 = a_2 + b_2i$ bir kompleks sayı ise

$$g(Z_1, Z_2) = a_1a_2 + b_1b_2,$$

2) $Z_1 = a_1 + b_1i$ bir kompleks sayı, $Z_2 = a_2 + d_2h$ bir hiperbolik sayı ise

$$g(Z_1, Z_2) = a_1a_2,$$

3) $Z_1 = a_1 + b_1i$ bir kompleks sayı, $Z_2 = a_2 + c_2\varepsilon$ bir dual sayı ise

$$g(Z_1, Z_2) = a_1a_2 - b_1c_2,$$

4) $Z_1 = a_1 + d_1h$ bir hiperbolik sayı, $Z_2 = a_2 + b_2i$ bir kompleks sayı ise

$$g(Z_1, Z_2) = a_1a_2,$$

5) $Z_1 = a_1 + d_1h$ bir hiperbolik sayı, $Z_2 = a_2 + d_2h$ bir hiperbolik sayı ise

$$g(Z_1, Z_2) = a_1a_2 - d_1d_2,$$

6) $Z_1 = a_1 + d_1h$ bir hiperbolik sayı, $Z_2 = a_2 + c_2\varepsilon$ bir dual sayı ise

$$g(Z_1, Z_2) = a_1a_2,$$

7) $Z_1 = a_1 + c_1\varepsilon$ bir dual sayı, $Z_2 = a_2 + b_2i$ bir kompleks sayı ise

$$g(Z_1, Z_2) = a_1a_2 - b_2c_1,$$

8) $Z_1 = a_1 + c_1\varepsilon$ bir dual sayı, $Z_2 = a_2 + d_2h$ bir hiperbolik sayı ise

$$g(Z_1, Z_2) = a_1a_2,$$

9) $Z_1 = a_1 + c_1\varepsilon$ bir dual sayı, $Z_2 = a_2 + c_2\varepsilon$ bir dual sayı ise

$$g(Z_1, Z_2) = a_1a_2$$

elde edilir ve buradan aşağıdaki tablo yapılabilir.

$g(Z_1, Z_2)$	<i>Kompleks</i> Z_2	<i>Hiperbolik</i> Z_2	<i>Dual</i> Z_2
<i>Kompleks</i> Z_1	$a_1a_2 + b_1b_2$	a_1a_2	$a_1a_2 - b_1c_2$
<i>Hiperbolik</i> Z_1	a_1a_2	$a_1a_2 - d_1d_2$	a_1a_2
<i>Dual</i> Z_1	$a_1a_2 - b_2c_1$	a_1a_2	a_1a_2

Örneğin, $Z_1 = 3 + 2i$ kompleks sayısı ile $Z_2 = 4 - 5\varepsilon$ dual sayısının skaler çarpımı

$$g(Z_1, Z_2) = a_1a_2 - b_1c_2$$

kullanılarak

$$g(3 + 2i, 4 - 5\varepsilon) = 3.4 - (2).(-5) = 22$$

bulunur. Skaler çarpım tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
g(1, 1) &= a_1 a_2 = 1.1 = 1 \\
g(i, i) &= a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0.0 + 1.1 = 1 \\
g(h, h) &= a_1 a_2 - d_1 d_2 = 0.0 - 1.1 = -1 \\
g(\epsilon, \epsilon) &= a_1 a_2 = 0.0 = 0 \\
g(1, i) &= a_1 a_2 = 1.0 = 0 \\
g(1, \epsilon) &= a_1 a_2 = 1.0 = 0 \\
g(1, h) &= a_1 a_2 = 1.0 = 0 \\
g(i, h) &= a_1 a_2 = 0.0 = 0 \\
g(\epsilon, h) &= a_1 a_2 = 0.0 = 0 \\
g(i, \epsilon) &= a_1 a_2 - b_1 c_2 = 0.0 - 1.1 = -1
\end{aligned}$$

eşitlikler de yazılabilir.

Tanım 4.12. Z_1 ve Z_2 hibrit sayılarının vektörel çarpımı

$$\times : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, Z_1 \times Z_2 = \frac{Z_1 \bar{Z}_2 - Z_2 \bar{Z}_1}{2} \quad (4.3)$$

biçiminde tanımlanır.

(4.2) ve (4.3) eşitliklerine göre

$$\begin{aligned}
g(Z_1, Z_2) + Z_1 \times Z_2 &= \frac{Z_1 \bar{Z}_2 + Z_2 \bar{Z}_1}{2} + \frac{Z_1 \bar{Z}_2 - Z_2 \bar{Z}_1}{2} \\
&= \frac{Z_1 \bar{Z}_2 + Z_2 \bar{Z}_1 + Z_1 \bar{Z}_2 - Z_2 \bar{Z}_1}{2} \\
&= \frac{2Z_1 \bar{Z}_2}{2} \\
&= Z_1 \bar{Z}_2
\end{aligned}$$

olduğundan Z_1 ve Z_2 nin Hermidyen çarpımı

$$Z_1 \bar{Z}_2 = g(Z_1, Z_2) + Z_1 \times Z_2$$

eşitliğiyle verilir.

$$\begin{aligned}
1 \times 1 &= \frac{1.\bar{1} - 1.\bar{1}}{2} = 0 \\
1 \times i &= \frac{1.\bar{i} - i.\bar{1}}{2} = \frac{-i - i}{2} = \frac{-2i}{2} = -i \\
1 \times \varepsilon &= \frac{1.\bar{\varepsilon} - \varepsilon.\bar{1}}{2} = \frac{1.(-\varepsilon) - \varepsilon.(1)}{2} = -\varepsilon \\
1 \times h &= \frac{1.\bar{h} - h.\bar{1}}{2} = \frac{1.(-h) - h.(1)}{2} = -h \\
i \times 1 &= \frac{i.\bar{1} - 1.\bar{i}}{2} = \frac{i.(1) - 1.(-i)}{2} = \frac{i+i}{2} = i \\
i \times i &= \frac{i.\bar{i} - i.\bar{i}}{2} = \frac{i.(-i) - i.(-i)}{2} = \frac{-i.i + i.i}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\
i \times \varepsilon &= \frac{i.\bar{\varepsilon} - \varepsilon.\bar{i}}{2} = \frac{-i\varepsilon + \varepsilon i}{2} = \frac{-(1-h) + (h+1)}{2} = h \\
i \times h &= \frac{i.\bar{h} - h.\bar{i}}{2} = \frac{-ih + hi}{2} = \frac{-(\varepsilon+i) + (-\varepsilon-i)}{2} = -\varepsilon - i \\
\varepsilon \times 1 &= \frac{\varepsilon.\bar{1} - 1.\bar{\varepsilon}}{2} = \frac{\varepsilon + \varepsilon}{2} = \varepsilon \\
\varepsilon \times i &= \frac{\varepsilon.\bar{i} - i.\bar{\varepsilon}}{2} = \frac{-\varepsilon i + i\varepsilon}{2} = \frac{-(h+1) + (1-h)}{2} = -h \\
\varepsilon \times \varepsilon &= \frac{\varepsilon.\bar{\varepsilon} - \varepsilon.\bar{\varepsilon}}{2} = \frac{-\varepsilon\varepsilon + \varepsilon\varepsilon}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\
\varepsilon \times h &= \frac{\varepsilon.\bar{h} - h.\bar{\varepsilon}}{2} = \frac{-\varepsilon h + h\varepsilon}{2} = \frac{-(-\varepsilon) + \varepsilon}{2} = \varepsilon \\
h \times 1 &= \frac{h.\bar{1} - 1.\bar{h}}{2} = \frac{h+h}{2} = \frac{2h}{2} = h \\
h \times i &= \frac{h.\bar{i} - i.\bar{h}}{2} = \frac{-hi + ih}{2} = \frac{-(-\varepsilon-i) + (\varepsilon+i)}{2} = \varepsilon + i \\
h \times \varepsilon &= \frac{h.\bar{\varepsilon} - \varepsilon.\bar{h}}{2} = \frac{-h\varepsilon + \varepsilon h}{2} = \frac{-\varepsilon + (-\varepsilon)}{2} = -\varepsilon \\
h \times h &= \frac{h.\bar{h} - h.\bar{h}}{2} = \frac{-hh + hh}{2} = 0
\end{aligned}$$

Böylece hibrit sayılar için vektörel çarpım tablosu

$\times$	1	i	ε	h
1	0	$-i$	$-\varepsilon$	$-h$
i	i	0	h	$-\varepsilon - i$
ε	ε	$-h$	0	ε
h	h	$\varepsilon + i$	$-\varepsilon$	0

biçiminde oluşturulur.

Bu tanıma göre

$$\begin{aligned} Z_1 \times Z_2 = & (a_2b_1 - b_2a_1 + b_2d_1 - d_2b_1)i \\ & + (a_2c_1 - c_2a_1 + b_2d_1 - d_2b_1 - c_2d_1 + d_2c_1)\varepsilon \\ & + (a_2d_1 - b_2c_1 + c_2b_1 - d_2a_1)h \end{aligned}$$

dir [3].

Skaler kısmı sıfır olan hibrit sayıya pure hibrit sayı denir. Pure hibrit sayıların kümesini H ile gösterelim. $Z_1 = b_1i + c_1\varepsilon + d_1h$ ve $Z_2 = b_2i + c_2\varepsilon + d_2h$ pure hibrit sayılarının skaler çarpımı

$$\langle Z_1, Z_2 \rangle_H = -(b_1 - c_1)(b_2 - c_2) + c_1c_2 + d_1d_2$$

indefinit, simetrik bilineer formdur. Bundan böyle pure hibrit sayılar bir vektör olarak ele alınacaktır. $\langle Z_1, Z_2 \rangle_H = 0$ ise Z_1 ile Z_2 ye hibrit ortogonal denir [3].

$Z_1 = b_1i + c_1\varepsilon + d_1h$ ve $Z_2 = b_2i + c_2\varepsilon + d_2h$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$Z_1 \times_H Z_2 = \begin{vmatrix} i & -\varepsilon & -h \\ b_1 - c_1 & b_1 & d_1 \\ b_2 - c_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Skaler çarpım ve vektörel çarpım tanımları kullanılarak Z_1, Z_2, Z_3 vektörleri için

$$Z_1 \times_H (Z_2 \times_H Z_3) = \langle Z_1, Z_2 \rangle_H Z_3 - \langle Z_1, Z_3 \rangle_H Z_2$$

olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca, $Z_1 = S(Z_1) + V(Z_1)$ ve $Z_2 = S(Z_2) + V(Z_2)$ hibrit sayıları için hibrit çarpımı

$$Z_1 Z_2 = S(Z_1)S(Z_2) + S(Z_1)V(Z_2) + S(Z_2)V(Z_1) + \langle V(Z_1), V(Z_2) \rangle_H + V(Z_1) \times_H V(Z_2)$$

eşitliği ile hesaplanır [3].

Hibrit Sayıların Matris Gösterimleri:

Hibrit sayıların çarpımını kolaylaştırmak amacıyla bir hibrit sayının matris gösterimi

kullanılır. 2×2 lik matrisler ve hibrit sayılar arasında bir izomorfizm tanımlayarak hibrit sayıları kolayca çarpabilir ve birçok özelliğini ispatlanabilir. Hibrit sayıları, bunlara karşılık gelen 2×2 tipindeki matrisler kullanılarak, hibrit sayılar sınıflandırılabilir. $\mathbb{M}_{2 \times 2}$ gösterimi 2×2 tipindeki reel matrislerin oluşturduğu halka olsun.

Teorem 4.13. $\mathbb{K}$ hibrit sayılar halkası $\mathbb{M}_{2 \times 2}$ halkasına izomorftur.

İspat: $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{M}_{2 \times 2}$ dönüşümü $Z = a + bi + c\varepsilon + dh \in \mathbb{K}$ hibrit sayısı için

$$\varphi(a + bi + c\varepsilon + dh) = \begin{bmatrix} a + c & b - c + d \\ c - b + d & a - c \end{bmatrix}$$

eşitliğiyle tanımlansın. Bu dönüşümün bir halka izomorfizmi olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. φ nin bir halka homomorfizmi olduğunu göstermek için her $Z_1, Z_2 \in \mathbb{K}$ olmak üzere

$$\varphi(Z_1 Z_2) = \varphi(Z_1) \varphi(Z_2)$$

ve

$$\varphi(Z_1 + Z_2) = \varphi(Z_1) + \varphi(Z_2)$$

eşitliklerinin sağlandığı gösterilmelidir. Hibrit sayıların çarpma işlemine göre

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 \varepsilon + d_1 h)(a_2 + b_2 i + c_2 \varepsilon + d_2 h) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 d_2 - d_1 b_2) i \\ &\quad + (a_1 c_2 + b_1 d_2 + c_1 a_2 - c_1 d_2 - d_1 b_2 + d_1 c_2) \varepsilon + (a_1 d_2 - b_1 c_2 + c_1 b_2 - d_1 a_2) h \end{aligned}$$

dir. Kısaca, $\varphi(Z_1 Z_2) = M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ olsun. Buna göre,

$$m_{11} = a_1 a_2 - b_1 b_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 d_2 + a_1 c_2 + b_1 d_2 + c_1 a_2 - c_1 d_2 - d_1 b_2 + d_1 c_2$$

$$\begin{aligned} m_{12} &= a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 d_2 - d_1 b_2 - a_1 c_2 - b_1 d_2 - c_1 a_2 + c_1 d_2 \\ &\quad + d_1 b_2 - d_1 c_2 + a_1 d_2 - b_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{21} &= a_1 c_2 + b_1 d_2 + c_1 a_2 - c_1 d_2 - d_1 b_2 + d_1 c_2 - a_1 b_2 - b_1 a_2 \\ &\quad - b_1 d_2 + d_1 b_2 + a_1 d_2 - b_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 a_2 \end{aligned}$$

$$m_{22} = a_1 a_2 - b_1 b_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 d_2 - a_1 c_2 - b_1 d_2 - c_1 a_2 + c_1 d_2 + d_1 b_2 - d_1 c_2$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\varphi(Z_1)\varphi(Z_2) = \begin{bmatrix} a_1 + c_1 & b_1 - c_1 + d_1 \\ c_1 - b_1 + d_1 & a_1 - c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 + c_2 & b_2 - c_2 + d_2 \\ c_2 - b_2 + d_2 & a_2 - c_2 \end{bmatrix}$$

matrisi kısaca $N = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix}$ ile gösterilsin. Buna göre,

$$n_{11} = a_1a_2 + a_1c_2 + c_1a_2 + b_1c_2 - b_1b_2 + b_1d_2 + c_1b_2 - c_1d_2 + d_1c_2 - d_1b_2 + d_1d_2$$

$$n_{12} = a_1b_2 - a_1c_2 + a_1d_2 + c_1b_2 + c_1d_2 + b_1a_2 - b_1c_2 - c_1a_2 + d_1a_2 - d_1c_2$$

$$n_{21} = c_1a_2 - b_1a_2 - b_1c_2 + d_1a_2 + d_1c_2 + a_1c_2 + c_1b_2 - c_1d_2$$

$$n_{22} = c_1b_2 + c_1d_2 - b_1b_2 + b_1c_2 - b_1d_2 + d_1b_2 - d_1c_2 + d_1d_2 + a_1a_2 - a_1c_2 - c_1a_2$$

bulunur. M ve N matrislerinin terimleri karşılaştırıldığında $M = N$ olduğundan $\varphi(Z_1Z_2) = \varphi(Z_1)\varphi(Z_2)$ elde edilir.

Her $Z_1 = a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h$ ve $Z_2 = a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h$ hibrit sayıları için

$$\begin{aligned} \varphi(Z_1 + Z_2) &= \varphi(a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)\varepsilon + (d_1 + d_2)h) \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + c_1 + c_2 & b_1 + b_2 - c_1 - c_2 + d_1 + d_2 \\ c_1 + c_2 - b_1 - b_2 + d_1 + d_2 & a_1 + a_2 - c_1 - c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + c_1 & b_1 - c_1 + d_1 \\ c_1 - b_1 + d_1 & a_1 - c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 + c_2 & b_2 - c_2 + d_2 \\ c_2 - b_2 + d_2 & a_2 - c_2 \end{bmatrix} \\ &= \varphi(Z_1) + \varphi(Z_2) \end{aligned}$$

dir. Böylece φ nin bir halka homomorfizmi olduğu gösterildi. Ayrıca, φ birebir ve örtendir. Gerçekten $Z_1 = a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h$ ve $Z_2 = a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h$ için

$$\varphi(Z_1) = \varphi(Z_2) \implies \begin{bmatrix} a_1 + c_1 & b_1 - c_1 + d_1 \\ c_1 - b_1 + d_1 & a_1 - c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + c_2 & b_2 - c_2 + d_2 \\ c_2 - b_2 + d_2 & a_2 - c_2 \end{bmatrix}$$

olduğundan iki matrisin eşitlik tanımına göre $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$ dir. Sonuç

olarak $Z_1 = Z_2$ olduğundan φ birebirdir. Diğer yandan,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

herhangi bir 2×2 tipinde reel matris olsun Bu matrisin bileşenlerinden yararlanarak oluşturulan

$$Z = \left(\frac{a+d}{2}\right) + \left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)i + \left(\frac{a-d}{2}\right)\varepsilon + \left(\frac{b+c}{2}\right)h$$

hibrit sayısı için

$$\begin{aligned} \varphi(Z) &= \begin{bmatrix} \frac{a+d}{2} + \frac{a-d}{2} & \frac{a+b-c-d}{2} - \frac{a-d}{2} + \frac{b+c}{2} \\ \frac{a-d}{2} - \frac{a+b-c-d}{2} + \frac{b+c}{2} & \frac{a+d}{2} - \frac{a-d}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a+d+a-d}{2} & \frac{a+b-c-d-a+d+b+c}{2} \\ \frac{a-d-a-b+c+d+b+c}{2} & \frac{a+d-a+d}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2a}{2} & \frac{2b}{2} \\ \frac{2c}{2} & \frac{2d}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

dır. Böylece her $A \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ matrisi için en az bir $Z \in \mathbb{K}$ hibrit sayısı $\varphi(Z) = A$ olacak biçimde bulunduğundan φ örtendir. Dolayısıyla φ bir halka izomorfizmidir.

Tanım 4.14. Yukarıdaki teoremin ispatında tanımlanan

$$\varphi(Z) = \varphi(a + bi + c\varepsilon + dh) = \begin{bmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

matrisine $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısına karşılık gelen hibrit matris denir.

Yukarıdaki φ halka izomorfizmine göre birimlere karşılık gelen hibrit matrisler

$$\varphi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \varphi(i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \varphi(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \varphi(h) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Bu dört matris, 2×2 tipindeki matrislerin vektör uzayı için bir taban oluşturur. Öyleyse her bir 2×2 tipindeki matrisler birim, dual, kompleks ve hiperbolik sayıların lineer bileşimi olarak yazılabilir. ε birim dual sayısı için

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi yerine

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi kullanılabilir. Bu dört matrisin yardımıyla hibrit sayıların çarpımı da kolaylıkla yapılabilir. Örneğin, $ih = \varepsilon + i$ için

$$\begin{aligned} \varphi(ih) &= \varphi(i)\varphi(h) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \varphi(\varepsilon) + \varphi(i) \\ &= \varphi(\varepsilon + i) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 4.15. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısına karşılık gelen hibrit matris A olsun.

Buna göre

$$C(Z) = \det A, \|Z\| = \sqrt{|\det A|}$$

ve

$$C\varepsilon(Z) = \frac{(izA)^2 - 4\det A}{4}$$

dir.

İspat: $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ bir hibrit sayı olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{vmatrix} \\ &= a^2 + b^2 - 2cb - d^2 \\ &= a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 \\ &= C(Z) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |\det A| &= \left| \det \begin{bmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{bmatrix} \right| \\ &= |a^2 + b^2 - 2cb - d^2| \\ &= |Z\bar{Z}| \\ &= \|Z\|^2 \end{aligned}$$

dir.

$$izA = iz \begin{bmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{bmatrix} = 2a$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [(izA)^2 - 4\det A] &= \frac{1}{4} [4a^2 - 4a^2 - 4b^2 + 8cb + 4d^2] \\ &= -b^2 + 2cb + d^2 \\ &= -(b-c)^2 + c^2 + d^2 \\ &= C\varepsilon(Z) \end{aligned}$$

dir.

Sonuç 4.16. $Z \in \mathbb{K}$ hibrit sayısının tersinin olması için gerek ve yeter şart $\det(\varphi(Z)) \neq 0$ dır.

İspat: Z hibrit sayısının tersi $C(Z) \neq 0$ olmak üzere $Z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{C(Z)}$ dir. $C(Z) = \det(\varphi(Z))$ olduğundan Z nin tersinin olması için gerek ve yeter şart $\det(\varphi(Z)) \neq 0$ dır.

Sonuç 4.17. A , 2×2 tipinde reel matris olmak üzere $\Delta_A = (izA)^2 - 4\det A$ sayısı, A nın

karakteristik polinomunun diskriminantına eşittir. Buna göre, $C\mathcal{E}(Z) = \frac{\Delta_A}{4}$ olur.

İspat: A'nın karakteristik polinomu

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \det(xI - A) \\
 &= \det \left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+c & b-c+d \\ c-b+d & a-c \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{vmatrix} x-a-c & b-c+d \\ c-b+d & x-a+c \end{vmatrix} \\
 &= (x-a)^2 - c^2 + (-b+c)^2 - d^2 \\
 &= x^2 - 2ax + a^2 - c^2 + b^2 - 2bc + c^2 - d^2 \\
 &= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - 2bc - d^2
 \end{aligned}$$

ve karakteristik polinomunun diskriminantı

$$\begin{aligned}
 \Delta_A &= b^2 - 4ac \\
 &= (2a)^2 - 4(a^2 + b^2 - 2bc - d^2) \\
 &= 4a^2 - 4a^2 - 4b^2 + 8bc + 4d^2 \\
 &= -4b^2 + 8bc + 4d^2 \\
 &= (izA)^2 - 4\det A
 \end{aligned}$$

olduğundan

$$C\mathcal{E}(Z) = \frac{\Delta_A}{4}$$

bulunur.

Sonuç 4.18. Hibrit sayıların sınıflandırılması tamamen bu hibrit sayıya karşılık gelen 2×2 tipindeki reel matrisin determinantına ve izine bağlıdır.

Hibrit Sayıların Kutupsal Gösterimleri:

Hibrit sayının türüne ve karakterine göre hibrit sayının kutupsal gösterimi ayrı ayrı verilebilir. Yani bu kutupsal gösterim hibrit sayının eliptik, hiperbolik ve parabolik olmasına bağlıdır. Diğer yandan, hibrit sayı spacelike, timelike ve lightlike ise kutupsal gösterim değişecektir. Buna göre bir hibrit sayının kutupsal gösterimi, hibrit vektörün tipine ve casual karakterine bağlıdır. Bu nedenle hibrit sayıların kutupsal gösterimleri

üç teoremle verilecektir.

Teorem 4.19. $V_0 = \frac{V(Z)}{N(Z)}$ ve $V_0^2 = -1$ olmak üzere her bir Z eliptik hibrit sayısı

$$Z = \|Z\| (\cos\theta + V_0 \sin\theta)$$

biçiminde yazılabilir.

İspat: $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ eliptik ise $C\varepsilon(Z) < 0$ dır. $C\varepsilon(Z) = -(b-c)^2 + c^2 + d^2 < 0$ olduğundan $\varepsilon_Z = ((b-c), c, d) \in \mathbb{R}^3$ hibrit vektörü de timelike vektördür. Gerçekten

$$C\varepsilon(Z) = \langle \varepsilon_Z, \varepsilon_Z \rangle_{\mathbb{E}_1^3} = -(b-c)^2 + c^2 + d^2 < 0$$

olur.

$$C(Z) = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 > 0$$

olduğundan her eliptik hibrit sayısı timelike olur.

$N(Z) = \sqrt{|C\varepsilon(Z)|} = \sqrt{|(b-c)^2 - c^2 - d^2|}$ ve $\|Z\| = \sqrt{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2}$ olmak üzere

$$\cos\theta = \frac{a}{\|Z\|}, \sin\theta = \frac{N(Z)}{\|Z\|}$$

alınırsa

$$(\cos\theta)^2 = \left(\frac{a}{\|Z\|}\right)^2 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{a^2}{\|Z\|^2} = \frac{a^2}{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2}$$

$$(\sin\theta)^2 = \left(\frac{N(Z)}{\|Z\|}\right)^2 \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{N(Z)^2}{\|Z\|^2} = \frac{(b-c)^2 - c^2 - d^2}{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2}$$

yararlanarak

$$\begin{aligned} \cos^2\theta + \sin^2\theta &= \frac{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2}{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2} = 1 \\ &\Rightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. $V_0 = \frac{V(Z)}{N(Z)} = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{\sqrt{|(b-c)^2 - c^2 - d^2|}}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
V_0^2 &= V_0 V_0 = \frac{V(Z)}{N(Z)} \frac{V(Z)}{N(Z)} \\
&= \frac{1}{N(Z)^2} V(Z) V(Z) \\
&= \frac{1}{N(Z)^2} (bi + c\varepsilon + dh)(bi + c\varepsilon + dh) \\
&= \frac{1}{N(Z)^2} (b^2 i^2 + bci\varepsilon + bdih + cb\varepsilon i + c^2 \varepsilon^2 + cd\varepsilon h + dbhi + dch\varepsilon + d^2 h^2) \\
&= \frac{1}{N(Z)^2} (-b^2 + bc - bch + bd\varepsilon + bdi + cbh + cb - cd\varepsilon - db\varepsilon - dbi + dc\varepsilon + d^2) \\
&= \frac{1}{(b-c)^2 - c^2 - d^2} (-b^2 + 2bc + d^2) \\
&= -1
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\|Z\| (\cos \theta + V_0 \sin \theta) &= \|Z\| \left(\frac{a}{\|Z\|} + \frac{V(Z)}{N(Z)} \frac{N(Z)}{\|Z\|} \right) \\
&= a + V(Z) \\
&= Z
\end{aligned}$$

dir.

Sonuç 4.20. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh \in K$ eliptik hibrit sayısı $Z = \|Z\|(\cos \theta + V_0 \sin \theta)$ biçimindedir. Burada $V_0 = \frac{V(Z)}{N(Z)}$, $V_0^2 = 1$ ve

$$\theta = \begin{cases} \pi - \arctan \frac{\|\varepsilon_Z\|}{|a|}, & a < 0 \\ \arctan \frac{\|\varepsilon_Z\|}{|a|}, & a > 0 \end{cases}$$

dir.

Teorem 4.21. Her bir hiperbolik hibrit sayısı $V_0 = \frac{V(Z)}{N(Z)}$ ve $V_0^2 = 1$ olmak üzere

$$Z \text{ spacelike} \Rightarrow Z = \|Z\| (\sinh \theta + V_0 \cosh \theta),$$

$$Z \text{ timelike} \Rightarrow Z = \pm \|Z\| (\cosh \theta + V_0 \sinh \theta),$$

$$Z \text{ lightlike} \Rightarrow Z = a(1 + V_0)$$

biçiminde yazılabilir.

İspat: $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hiperbolik ise $C_\varepsilon(Z) = \langle \varepsilon_Z, \varepsilon_Z \rangle_{\mathbb{E}_1^3} = -(b-c)^2 + c^2 + d^2 > 0$ yani $\varepsilon_Z = (b-c, c, d)$ hibrit vektörü spacelikedir. $-(b-c)^2 + c^2 + d^2 > 0$ olduğundan

$$N(Z) = \sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|} = \sqrt{-(b-c)^2 + c^2 + d^2}$$

olur. Diğer yandan, bir hibrit sayının causal karakteri spacelike, timelike ve lightlike olabilir. Bu nedenle üç ayrı durumda incelenmelidir.

1) Z bir spacelike hiperbolik hibrit sayı ise

$$C(Z) = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 < 0$$

ve

$$\begin{aligned} \|Z\| &= \sqrt{|Z\bar{Z}|} \\ &= \sqrt{|C(Z)|} \\ &= \sqrt{|a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2|} \\ &= \sqrt{-a^2 - (b-c)^2 + c^2 + d^2} \end{aligned}$$

dir.

$$\cosh \theta = \frac{N(Z)}{\|Z\|}, \sinh \theta = \frac{a}{\|Z\|}$$

alınırsa

$$\begin{aligned} \cosh^2 \theta &= \left(\frac{N(Z)}{\|Z\|} \right)^2 \\ &= \frac{\left(\sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|} \right)^2}{\left(\sqrt{-a^2 - (b-c)^2 + c^2 + d^2} \right)^2} \\ &= \frac{-(b-c)^2 + c^2 + d^2}{-a^2 - (b-c)^2 + c^2 + d^2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\sinh^2\theta &= \left(\frac{a}{\|Z\|}\right)^2 = \frac{(a)^2}{\left(\sqrt{-a^2 - (b-c)^2 + c^2 + d^2}\right)^2} \\ &= \frac{a^2}{-a^2 - (b-c)^2 + c^2 + d^2}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = \frac{-(b-c)^2 + c^2 + d^2 - a^2}{-a^2 - (b-c)^2 + c^2 + d^2} = 1$$

bulunur.

$$V_0 = \frac{V(Z)}{N(Z)} = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{\sqrt{|(b-c)^2 - c^2 - d^2|}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}(V_0)^2 &= V_0 V_0 \\ &= \frac{V(Z)}{N(Z)} \frac{V(Z)}{N(Z)} \\ &= \frac{1}{|(b-c)^2 - c^2 - d^2|} (-b^2 + 2bc + d^2) \\ &= \frac{1}{-(b-c)^2 + c^2 + d^2} (-b^2 + 2bc + d^2) \\ &= 1\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\|Z\| (\sinh\theta + V_0 \cosh\theta) &= \|Z\| \left(\frac{a}{\|Z\|} + \frac{V(Z)}{N(Z)} \frac{N(Z)}{\|Z\|} \right) \\ &= a + V(Z) \\ &= Z\end{aligned}$$

dir.

2) Z bir timelike hiperbolik hibrit sayı ise

$$C(Z) = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 > 0$$

ve

$$\|Z\| = \sqrt{|Z\bar{Z}|} = \sqrt{|C(Z)|} = \sqrt{|a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2|} = \sqrt{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2}$$

dir.

$$\cosh \theta = \frac{a}{\|Z\|}, \sinh \theta = \frac{N(Z)}{\|Z\|}$$

alnırsa

$$\begin{aligned} \cosh^2 \theta &= \left(\frac{a}{\|Z\|} \right)^2 \\ &= \frac{a^2}{\left(\sqrt{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2} \right)^2} \\ &= \frac{a^2}{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sinh^2 \theta &= \left(\frac{N(Z)}{\|Z\|} \right)^2 \\ &= \frac{\left(\sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|} \right)^2}{\left(\sqrt{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2} \right)^2} \\ &= \frac{-(b-c)^2 + c^2 + d^2}{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = \frac{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2}{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2} = 1$$

bulunur.

$$V_0 = \frac{V(Z)}{N(Z)} = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{\sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
 (V_0)^2 &= V_0 V_0 = \frac{V(Z)}{N(Z)} \frac{V(Z)}{N(Z)} \\
 &= \frac{1}{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|} (-b^2 + 2bc + d^2) \\
 &= \frac{1}{-(b-c)^2 + c^2 + d^2} (-b^2 + 2bc + d^2) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

dir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
 \|Z\| (\cos h\theta + V_0 \sin h\theta) &= \|Z\| \left(\frac{a}{\|Z\|} + \frac{V(Z)}{N(Z)} \frac{N(Z)}{\|Z\|} \right) \\
 &= a + V(Z) \\
 &= Z
 \end{aligned}$$

dir. $\cos h\theta = -\frac{a}{\|Z\|}$, $\sin h\theta = -\frac{N(Z)}{\|Z\|}$ alınırsa $\cos^2 h\theta - \sin^2 h\theta = 1$ ve $-\|Z\| (\cos h\theta + V_0 \sin h\theta) = Z$ olduğu kolayca gösterilebilir.

3) Z bir lightlike hiperbolik hibrit sayı ise

$$C(Z) = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = 0$$

ve

$$\|Z\| = \sqrt{|Z\bar{Z}|} = \sqrt{|C(Z)|} = 0$$

olduğundan

$$N(Z) = \sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|} = \sqrt{|a^2|} = a$$

dir. $V_0 = \frac{V(Z)}{N(Z)} = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{a}$ olduğundan

$$a(1 + V_0) = a\left(1 + \frac{bi + c\varepsilon + dh}{a}\right) = Z$$

bulunur.

Örnek 4.22. Aşağıda verilen hibrit sayıların kutupsal formlarını bulunuz.

i) $Z_1 = 1 + i + 2\varepsilon + 3h$

ii) $Z_1 = 3 + 2i + \varepsilon + 2h$,

iii) $Z_3 = -4 + i + 2\varepsilon + 3h$,

iv) $Z_4 = 3 + 2i + \varepsilon + 3h$.

Çözüm:

i) $Z_1 = 1 + i + 2\varepsilon + 3h$, $C(Z_1) = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 = 1 - 1 - 4 - 9 = -11 < 0$ olduğundan Z_1 bir spacelike hibrit sayıdır. $C\varepsilon(Z_1) = -(b - c)^2 + c^2 + d^2 = -1 + 4 + 9 = 12 > 0$ olduğundan Z_1 hiperboliktir. Teorem 4.19 a göre Z_1 in kutupsal formu

$$\begin{aligned} Z_1 &= \|Z_1\| (\cos\theta + V_0 \sin\theta) \\ &= \sqrt{|C(Z_1)|} (\cos\theta + V_0 \sin\theta) \\ &= \sqrt{5} (\cos\theta + V_0 \sin\theta) \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $\cos h\theta = \frac{N(Z_1)}{\|Z_1\|} = \frac{\sqrt{-(b-c)^2 + c^2 + d^2}}{\|Z_1\|} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{11}}$, $\sin h\theta = \frac{a}{\|Z_1\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}$, $V_0 = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{N(Z_1)} = \frac{i + 2\varepsilon + 3h}{\sqrt{12}}$ dir. Ayrıca

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = \frac{12}{11} - \frac{1}{11} = 1$$

ve

$$\begin{aligned} (V_0)^2 &= \frac{(i + 2\varepsilon + 3h)(i + 2\varepsilon + 3h)}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{12}} \\ &= \frac{1}{12} (i^2 + 2i\varepsilon + 3ih + 2\varepsilon i + 4\varepsilon^2 + 6\varepsilon h + 3hi + 6h\varepsilon + 9h^2) \\ &= \frac{1}{12} (-1 + 2(1 - h) + 3(\varepsilon + i) + 2(h + 1) + 0 + 6(-\varepsilon) + 3(-\varepsilon - i) + 6(\varepsilon) + 9) \\ &= \frac{1}{4} (-1 + 2 - 2h + 3\varepsilon + 3i + 2h + 2 - 6\varepsilon - 3\varepsilon - 3i + 6\varepsilon + 9) \\ &= \frac{1}{12} (12) \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur.

ii) $Z_2 = 3 + 2i + \varepsilon + 2h$, $C(Z_2) = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 = 9 + 1 - 1 - 4 = 5 > 0$ olduğundan Z_2 bir timelike hibrit sayıdır. $C\varepsilon(Z_2) = -(b - c)^2 + c^2 + d^2 = -1 + 1 + 4 =$

$4 > 0$ olduğundan Z_2 hiperboliktir. Teorem 4.21 e göre Z_2 nin kutupsal formu

$$\begin{aligned} Z_2 &= \|Z_2\| (\cosh \theta + V_0 \sinh \theta) \\ &= \sqrt{|C(Z_2)|} (\cosh \theta + V_0 \sinh \theta) \\ &= \sqrt{5} (\cosh \theta + V_0 \sinh \theta) \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $\cosh \theta = \frac{a}{\|Z_2\|} = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $\sinh \theta = \frac{N(Z_2)}{\|Z_2\|} = \frac{\sqrt{-(b-c)^2 + c^2 + d^2}}{\|Z_2\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ve $V_0 = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{N(Z_2)} = \frac{2i + \varepsilon + 2h}{2}$ dir. Ayrıca

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = \frac{9}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

ve

$$\begin{aligned} (V_0)^2 &= \frac{(2i + \varepsilon + 2h)(2i + \varepsilon + 2h)}{2.2} \\ &= \frac{1}{4} (4i^2 + 2i\varepsilon + 4ih + 2\varepsilon i + \varepsilon^2 + 2\varepsilon h + 4hi + 2h\varepsilon + 4h^2) \\ &= \frac{1}{4} (-4 + 2(1-h) + 4(\varepsilon+i) + 2(h+1) + 2(-\varepsilon) + 4(-\varepsilon-i) + 2(\varepsilon) + 4) \\ &= \frac{1}{4} (2 - 2h + 4\varepsilon + 4i + 2h + 2 - 4\varepsilon - 4i + 2\varepsilon) \\ &= \frac{1}{4} (4) \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur.

iii) $Z_3 = -4 + i + 2\varepsilon + 3h$, $C(Z_3) = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = 16 + 1 - 4 - 9 = 4 > 0$ olduğundan Z_3 bir timelike hibrit sayıdır. $C\varepsilon(Z_3) = -(b-c)^2 + c^2 + d^2 = -1 + 4 + 9 = 12 > 0$ olduğundan Z_3 hiperboliktir. Teorem 4.21 e göre Z_3 ün kutupsal formu

$$\begin{aligned} Z_3 &= \|Z_3\| (\cosh \theta + V_0 \sinh \theta) \\ &= \sqrt{|C(Z_3)|} (\cosh \theta + V_0 \sinh \theta) \\ &= \sqrt{12} (\cosh \theta + V_0 \sinh \theta) \end{aligned}$$

biçimindedir. Burada $\cosh \theta = \frac{a}{\|Z_3\|} = \frac{-4}{\sqrt{4}}$, $\sinh \theta = \frac{N(Z_3)}{\|Z_3\|} = \frac{\sqrt{-(b-c)^2 + c^2 + d^2}}{\|Z_3\|} =$

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}} \text{ ve } V_0 = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{N(Z_3)} = \frac{i + 2\varepsilon + 3h}{\sqrt{12}} \text{ dir. Ayrıca}$$

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = \frac{16}{4} - \frac{12}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

ve

$$\begin{aligned} (V_0)^2 &= \frac{(i + 2\varepsilon + 3h)(i + 2\varepsilon + 3h)}{12 \cdot 12} \\ &= \frac{1}{12}(i^2 + 2i\varepsilon + 3ih + 2\varepsilon i + 4\varepsilon^2 + 6\varepsilon h + 3hi + 6h\varepsilon + 9h^2) \\ &= \frac{1}{12}(-1 + 2(1 - h) + 3(\varepsilon + i) + 2(h + 1) + 6(-\varepsilon) + 3(-\varepsilon - i) + 6(\varepsilon) + 9) \\ &= \frac{1}{12}(-1 + 2 - 2h + 3\varepsilon + 3i + 2h + 2 - 6\varepsilon - 3\varepsilon - 3i + 6\varepsilon + 9) \\ &= \frac{1}{12}(12) \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur.

iv) $Z_4 = 3 + 2i + \varepsilon + 3h$, $C(Z_4) = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 = 9 + 1 - 1 - 9 = 0$ olduğundan Z_4 bir lightlike hibrit sayıdır. $C\varepsilon(Z_4) = -(b - c)^2 + c^2 + d^2 = -1 + 1 + 9 > 0$ olduğundan Z_4 hiperboliktir. Teorem 4.21 e göre Z_4 ün kutupsal formu

$$Z_4 = a(1 + V_0) = 3(1 + V_0)$$

$$\text{dir. Burada } V_0 = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{N(Z)} = \frac{2i + \varepsilon + 3h}{3} \text{ dir. Ayrıca}$$

$$\begin{aligned} (V_0)^2 &= \frac{(2i + \varepsilon + 3h)(2i + \varepsilon + 3h)}{3 \cdot 3} \\ &= \frac{1}{9}(4i^2 + 2i\varepsilon + 6ih + 2\varepsilon i + \varepsilon^2 + 3\varepsilon h + 6hi + 3h\varepsilon + 9h^2) \\ &= \frac{1}{9}(-4 + 2(1 - h) + 6(\varepsilon + i) + 3(h + 1) + 3(-\varepsilon) + 6(-\varepsilon - i) + 3(\varepsilon) + 9) \\ &= \frac{1}{9}(-4 + 2 - 2h + 6\varepsilon + 6i - 3\varepsilon - 6\varepsilon - 6i + 3\varepsilon + 2h + 2 + 9) \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur.

Sonuç 4.23. Lightlike olmayan her $Z = a + bi + c\varepsilon + dh \in K$ hiperbolik hibrit sayısı

$$Z = k\rho(\cosh\theta + V \sinh\theta)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$k = \begin{cases} 1, & Z \text{ timelike ve } a > 0 \text{ ise} \\ -1, & Z \text{ timelike ve } a < 0 \text{ ise} \\ V, & Z \text{ spacelike ve } a > 0 \text{ ise} \\ -V, & Z \text{ spacelike ve } a < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\rho = \|Z\|, \theta = \ln \left| \frac{a + N(Z)}{\rho} \right|, V = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{N(Z)}$$

dir.

Teorem 4.24. Her parabolik hibrit sayısı

$$Z = \|Z\| (\varepsilon + V_0)$$

biçimindedir. Burada $V_0 = \frac{V(Z)}{\|Z\|}$, $V_0^2 = 0$ ve $\varepsilon = \text{sgn}(S(Z)) = \pm 1$ dir.

İspat: $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısı parabolik ise Z nin hibrit vektörü $\varepsilon_Z = (b - c, c, d) \in \mathbb{R}^3$ lightlike olur. Gerçekten, Z parabolik ise $C\varepsilon(Z) = \langle \varepsilon_Z, \varepsilon_Z \rangle_{\mathbb{E}_1^3} = -(b - c)^2 + c^2 + d^2 = 0$ dır. $a^2 > 0$ olduğundan

$$\|Z\| = \sqrt{|a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2|} = \sqrt{|a^2|} = \sqrt{a^2} = |a|$$

dır. Böylece, a nın işaretine bağlı olarak Z hibrit sayısı

$$\begin{aligned} Z &= a + bi + c\varepsilon + dh \\ &= \|Z\| \left(\frac{a}{\|Z\|} + \frac{bi + c\varepsilon + dh}{\|Z\|} \right) \\ &= \|Z\| \left(\frac{a}{|a|} + \frac{V(Z)}{\|Z\|} \right) \\ &= \|Z\| (\varepsilon + V_0) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
 V_0^2 &= \frac{V(Z)}{\|Z\|} \frac{V(Z)}{\|Z\|} \\
 &= \frac{V(Z)V(Z)}{\|Z\| \|Z\|} \\
 &= \frac{-(b-c)^2 + c^2 + d^2}{(\|Z\|)^2} \\
 &= \frac{0}{(|a|)^2} \\
 &= \frac{0}{a^2} = 0
 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 4.25. $Z = 2 + 8i + 3\varepsilon + 4h$ hibrit sayısı için

$$\begin{aligned}
 Z &= a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 \\
 &= 2^2 + (8-3)^2 - 3^2 - 4^2 \\
 &= 4 > 0
 \end{aligned}$$

olduğundan Z bir timelike hibrit sayıdır ve

$$\begin{aligned}
 C\varepsilon(Z) &= -(b-c)^2 + c^2 + d^2 \\
 &= -(5)^2 + 3^2 + 4^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

olduğundan Z paraboliktir. Ayrıca

$$\|Z\| = \sqrt{C(Z)} = \sqrt{4} = 2$$

ve

$$S(Z) = 2 > 0 \implies \varepsilon = 1$$

olduğundan

$$Z = \|Z\| (\varepsilon + V_0) = 2(1 + V_0)$$

dır. Burada, $V_0 = \frac{8i + 3\varepsilon + 4h}{2}$, $V_0^2 = 0$ dır. Gerçekten

$$\begin{aligned} V_0^2 &= \frac{V(Z) \overline{V(Z)}}{\|Z\| \overline{\|Z\|}} \\ &= \frac{-(b-c)^2 + c^2 + d^2}{(\|Z\|)^2} \\ &= \frac{-(8-3)^2 + 3^2 + 4^2}{2^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir.

Tanım 4.26. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh \in \mathbb{K}$ lightlike olmayan hibrit sayısının argümenti eliptik, hiperbolik ve parabolik hibrit sayıları için sırasıyla;

$$\theta = \begin{cases} \pi - \arctan \frac{N(Z)}{|a|}, & a < 0 \\ \arctan \frac{N(Z)}{|a|}, & a > 0 \end{cases},$$

$$\theta = \ln \frac{|a + N(Z)|}{\|Z\|}$$

ve

$$\theta = \frac{|c|}{\|Z\|}$$

eşitlikleriyle tanımlıdır. Bu θ değeri, Z nin karakterine bağlı olarak Z spacelike ise Z nin position vektörü ile hibrit eksen arasındaki açıdır ve Z timelike ise Z nin position vektörü ile reel eksen arasındaki açıdır.

Örnek 4.27. Aşağıda verilen hibrit sayılarının argümentlerini bulunuz.

i) $Z = -3 + 2i + \varepsilon + 2h$

ii) $Z = -1 + 3i + \varepsilon + h$

iii) $Z = 2 + 8i + 3\varepsilon + 4h$

Çözüm:

i) $Z = -3 + 2i + \varepsilon + 2h$ hibrit sayısı için

$$C(Z) = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = 5 > 0$$

ve

$$\begin{aligned} C\mathcal{E}(Z) &= -(b-c)^2 + c^2 + d^2 \\ &= -(2-1)^2 + 1^2 + 2^2 \\ &= 4 > 0 \end{aligned}$$

olduğundan Z timelike hiperbolik hibrit sayıdır.

$$\begin{aligned} \|Z\| &= \sqrt{|a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2|} \\ &= \sqrt{|(-3)^2 + (2-1)^2 - 1^2 - 2^2|} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

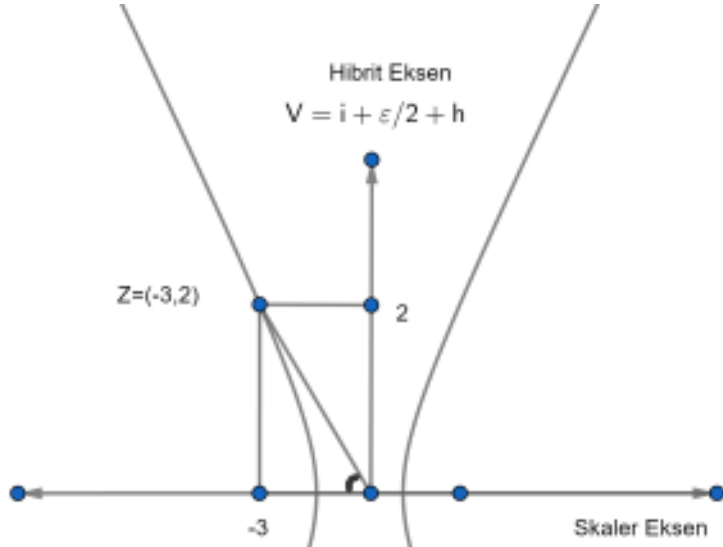
ve

$$\begin{aligned} N(Z) &= \sqrt{|C\mathcal{E}(Z)|} \\ &= \sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|} \\ &= \sqrt{|-(2-1)^2 + 1^2 + 2^2|} \\ &= 2 \end{aligned}$$

olduğundan Z nin argümenti

$$\theta = \ln \frac{|a + N(Z)|}{\|Z\|} = \ln \frac{|-3 + 2|}{\sqrt{5}} = \ln \frac{1}{\sqrt{5}} = \ln \frac{\sqrt{5}}{5}$$

bulunur. Z nin hibridyen koordinatları $(a, N(Z)) = (-3, 2)$ dir ve bu sayı $x^2 - y^2 = 5$ hiperbolü üstündedir. Z nin position vektörü ile reel eksen arasındaki hiperbolik açı $\theta = \ln \frac{\sqrt{5}}{5}$ dir (Şekil 4.2).



Şekil 4.2: Hiperbolik argüment

ii) $Z = -1 + 3i + \varepsilon + h$ hibrit sayısı için

$$\begin{aligned}
 C(Z) &= a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 \\
 &= (-1)^2 + (3-1)^2 - 1^2 - 1^2 \\
 &= 3 > 0
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 C\varepsilon(Z) &= -(b-c)^2 + c^2 + d^2 \\
 &= -(2)^2 + 1^2 + 1^2 \\
 &= -2 < 0
 \end{aligned}$$

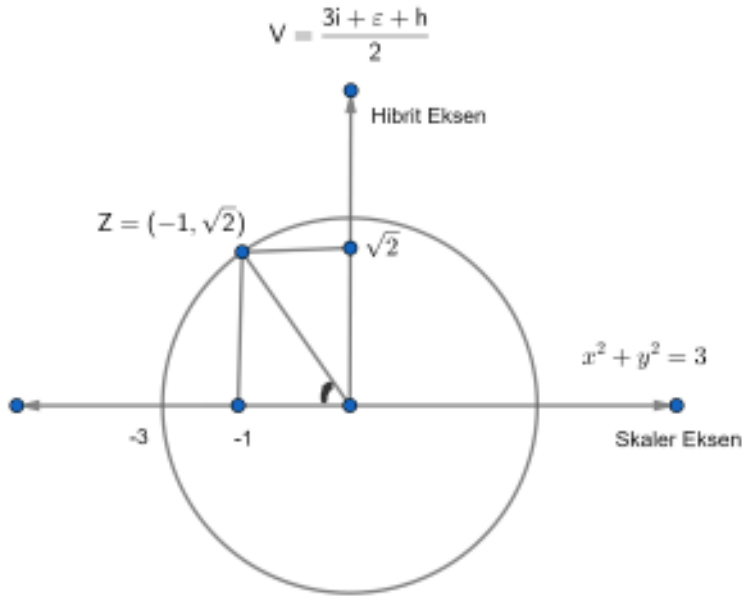
olduğundan Z timelike eliptik hibrit sayıdır.

$$N(Z) = \sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|} = \sqrt{|-2|} = \sqrt{2}$$

olduğundan Z nin argümenti

$$\theta = \pi - \arctan \frac{N(Z)}{|a|} = \pi - \arctan \frac{\sqrt{2}}{|-1|} = \pi - \arctan \sqrt{2}$$

bulunur. Z nin hibridyen koordinatları $(a, N(Z)) = (-1, \sqrt{2})$ ve bu sayı $x^2 - y^2 = 3$ çemberi üstünde yatar. Böylece, Z nin position vektörü ile reel eksen arasındaki dairesel açı $\theta = \pi - \arctan \sqrt{2}$ olur (Şekil 4.3).



Şekil 4.3: Eliptik argüment

iii) $Z = 2 + 8i + 3\epsilon + 4h$ hibrit sayısı için

$$\begin{aligned} C(Z) &= a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 \\ &= (2)^2 + (8 - 3)^2 - 3^2 - 4^2 \\ &= 4 > 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} C\epsilon(Z) &= -(b - c)^2 + c^2 + d^2 \\ &= -(8 - 3)^2 + 3^2 + 4^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan Z timelike parabolik hibrit sayıdır.

$$\begin{aligned}\|Z\| &= \sqrt{|a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2|} \\ &= \sqrt{|4 + 25 - 9 - 16|} \\ &= 2\end{aligned}$$

olduğundan Z nin argümenti

$$\theta = \frac{|c|}{\|Z\|} = \frac{3}{2}$$

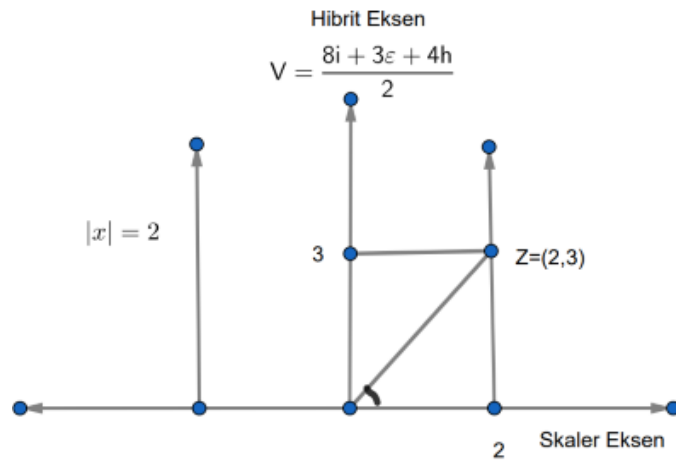
bulunur. Bu parabolik sayının hibridyen koordinatları

$$Z = (a, |c|) = a + |c|V = 2 + 3V = (2, 3)$$

olur. Burada

$$V = \frac{8i + 3\varepsilon + 4h}{2} \implies (V)^2 = 0$$

dır. Böylece Z parabolik hibrit sayısı, hibridyen koordinat sisteminde Şekil 4.4 deki gibi gösterilir.



Şekil 4.4: Parabolik argüment

Bir Z birim hibrit sayısı için yukarıdaki teoremler

<i>POLAR FORM</i>	<i>Karakterleri</i>		
<i>Tipleri</i>	<i>Spacelike</i>	<i>Timelike</i>	<i>Lightlike</i>
<i>Eliptik</i>	$\emptyset$	$\cos \theta + V_0 \sin \theta$	$\emptyset$
<i>Hiperbolik</i>	$\sinh \theta + V_0 \cosh \theta$	$\cosh \theta + V_0 \sinh \theta$	$a(1 + V_0)$
<i>Parabolik</i>	$\emptyset$	$(\varepsilon + V_0), \varepsilon = \operatorname{sgn} S(Z)$	$\emptyset$

tablosu ile özetlenebilir.

Bir Hibrit Sayının Logaritması:

Z lightlike olmayan hiperbolik hibrit sayı olsun. Buna göre, $\rho = \|Z\|$ ve $k \in \{1, -1, V, -V\}$ olmak üzere $Z = k\rho(\cosh \theta + V \sinh \theta)$ biçiminde yazılır. Z nin diferensiyeli alındığında

$$\begin{aligned}
 dZ &= k[(\cosh \theta + V \sinh \theta) d\rho + \rho(\sinh \theta + V \cosh \theta) d\theta] \\
 &= \frac{k\rho(\cosh \theta + V \sinh \theta) d\rho}{\rho} + Vk\rho(\sinh \theta + V \cosh \theta) d\theta \\
 &= \frac{Z d\rho}{\rho} + VZ d\theta \\
 &= Z\left(\frac{d\rho}{\rho} + V d\theta\right)
 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{d\rho}{\rho} + V d\theta$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının integrali alındığında

$$\int \frac{dZ}{Z} = \int \frac{d\rho}{\rho} + V \int d\theta \implies \ln Z = \ln \rho + V \theta$$

logaritmik denklemi bulunur.

Benzer bir ilişki eliptik hibrit sayılar için de elde edilebilir. Z eliptik hibrit sayı olsun.

Buna göre, $\rho = \|Z\|$ ve $V^2 = -1$ olmak üzere $Z = \rho(\cos \theta + V \sin \theta)$ biçiminde yazılır.

Z nin diferensiyeli alındığında

$$\begin{aligned}
dZ &= (\cos \theta + V \sin \theta) d\rho + \rho(-\sin \theta + V \cos \theta) d\theta \\
&= \frac{\rho (\cos \theta + V \sin \theta) d\rho}{\rho} + \rho(V^2 \sin \theta + V \cos \theta) d\theta \\
&= \frac{\rho (\cos \theta + V \sin \theta) d\rho}{\rho} + V \rho (\cos \theta + V \sin \theta) d\theta \\
&= \frac{Z d\rho}{\rho} + V Z d\theta \\
&= Z \left(\frac{d\rho}{\rho} + V d\theta \right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{d\rho}{\rho} + V d\theta$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının integrali alındığında

$$\int \frac{dZ}{Z} = \int \frac{d\rho}{\rho} + V \int d\theta \implies \ln Z = \ln \rho + V \theta$$

logaritmik denklemi bulunur. Böylece, eliptik ve hiperbolik hibrit sayılar için

$$\ln Z = \ln |Z| + V \theta$$

dir. Bu eşitliğe göre,

$$Z = e^{\ln |Z| + V \theta} = e^{\ln |Z|} e^{V \theta} = \rho e^{V \theta} = \|Z\| e^{V \theta}$$

dir. Diğer yandan, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(S(Z))$ olmak üzere $Z = \varepsilon + \theta V$ parabolik hibrit sayısı için

$$dZ = V d\theta \implies Z = e^{V \theta}$$

dir. Parabolik hibrit sayıların logaritması tanımlı değildir.

Örnek 4.28. $Z = 3 + 2i + \varepsilon + 2h$ hibrit sayının logaritmasını bulunuz.

Çözüm: $C\varepsilon(Z) = -(b-c)^2 + c^2 + d^2 = \sqrt{|-1^2 + 1^2 + 2^2|} = \sqrt{4} = 2$ olduğundan $\mathbf{Z}$ bir hiperbolik hibrit sayıdır.

$$C(Z) = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = 3^2 + 1^2 - 1^2 - 2^2 = 5$$

olduğundan Z timelike hibrit sayıdır. Sonuç 4.23 e göre $k = 1$ dir ve $Z = \rho(\cosh \theta + V \sinh \theta)$ biçimindedir. Buna göre,

$$\rho = \|Z\| = \sqrt{|a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2|} = \sqrt{|3^2 + 1^2 - 1^2 - 2^2|} = \sqrt{5}$$

olduğundan

$$Z = \sqrt{5}(\cosh \theta + V \sinh \theta)$$

dir.

$$N(Z) = \sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|} = \sqrt{|-1^2 + 1^2 + 2^2|} = \sqrt{4} = 2$$

olduğundan

$$\theta = \ln \frac{|a + N(Z)|}{\|Z\|} = \ln \frac{|3+2|}{\sqrt{5}} = \ln \frac{5}{\sqrt{5}} = \ln \sqrt{5}$$

dir. Ayrıca

$$V = \frac{bi + c\varepsilon + dh}{N(Z)} = \frac{2i + \varepsilon + 2h}{2}$$

ve

$$\begin{aligned} V^2 &= VV = \frac{2i + \varepsilon + 2h}{2} \cdot \frac{2i + \varepsilon + 2h}{2} \\ &= \frac{4i^2 + 2i\varepsilon + 4ih + 2\varepsilon i + \varepsilon^2 + 2\varepsilon h + 4hi + 2h\varepsilon + 4h^2}{4} \\ &= \frac{-4 + 2(1-h) + 4(\varepsilon + i) + 2(h+1) + 0 + 2(-\varepsilon) + 4(-\varepsilon - i) + 2\varepsilon + 4}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \ln Z &= \ln |Z| + V\theta \\ &= \ln \sqrt{5} + \frac{2i + \varepsilon + 2h}{2} \ln \sqrt{5} \\ &= \frac{2 \ln \sqrt{5}}{2} + \frac{2i + \varepsilon + 2h}{2} \ln \sqrt{5} \\ &= \frac{\ln \sqrt{5}}{2} (2 + 2i + \varepsilon + 2h) \end{aligned}$$

bulunur.

Açıklama 4.29. Hibrit sayılar için $Z_1 Z_2 \neq Z_2 Z_1$ olduğundan reel sayılar için

$$\log(Z_1 Z_2) = \log Z_1 + \log Z_2$$

eşitliği doğru değildir.

Hibrit Sayılar İçin Euler Formülleri:

Üstel, hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonların seri açılımlarını kullanarak birim hibrit sayıların Euler formülleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$Z \text{ eliptik} \Rightarrow Z = e^{V\theta} = \cos \theta + V \sin \theta$$

$$Z \text{ timelike hiperbolik} \Rightarrow Z = e^{V\theta} = \cosh \theta + V \sinh \theta$$

$$Z \text{ spacelike hiperbolik} \Rightarrow Z = V e^{V\theta} = \sinh \theta + V \cosh \theta$$

$$Z \text{ parabolik} \Rightarrow Z = e^{V\theta} = \varepsilon + V\theta, \varepsilon = \operatorname{sgn}(S(Z))$$

Bu formüller kompleks, dual ve hiperbolik sayılar için bilinen Euler formüllerinin genelleştirilmiş halidir.

5 . HİBRİT SAYILARIN İNVLÜSYONLARI

Bu bölümde hibrit sayıların involüsyonları ve anti-involüsyonları ve bunların geometrik yorumları verilecektir.

Teorem 5.1. $V^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olmak üzere $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(Z) = -V\bar{Z}V$ dönüşümü bir involüsyondur.

İspat. İnvölüsyon tanımındaki aksiyomları sağladığını göstermeliyiz.

A1. Her Z hibrit sayısı için

$$\begin{aligned} f(f(Z)) &= f(-V\bar{Z}V) \\ &= -V\overline{(-V\bar{Z}V)}V \\ &= -V(\bar{V}Z(-\bar{V}))V \\ &= -V((-V)ZV)V \\ &= V^2ZV^2 \\ &= Z \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $Z_1, Z_2 \in \mathbb{K}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(Z_1 + Z_2) &= -V\overline{(Z_1 + Z_2)}V \\ &= -V(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)V \\ &= (-V\bar{Z}_1V) + (-V\bar{Z}_2V) \\ &= f(Z_1) + f(Z_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda Z) &= -V(\overline{\lambda Z})V \\ &= -V(\lambda \overline{Z})V \\ &= \lambda(-V\overline{Z}V) \\ &= \lambda f(Z) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $Z_1, Z_2 \in \mathbb{K}$ için

$$\begin{aligned} f(Z_1 Z_2) &= -V(\overline{Z_1 Z_2})V \\ &= -V(\overline{Z_2 Z_1})V \\ &= -V(\overline{Z_2}(V(-V))\overline{Z_1})V \\ &= (-V\overline{Z_2}V)(-V\overline{Z_1}V) \\ &= f(Z_2)f(Z_1) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 5.2. $V^2 = 1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olmak üzere $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(Z) = V\overline{Z}V$ dönüşümü bir involüsyondur.

İspat.

A1. Her Z hibrit sayısı için

$$\begin{aligned} f(f(Z)) &= f(V\overline{Z}V) \\ &= V\overline{(V\overline{Z}V)}V \\ &= V(\overline{V}Z(\overline{V}))V \\ &= V((-V)Z(-V))V \\ &= V^2 Z V^2 \\ &= Z \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $Z_1, Z_2 \in \mathbb{K}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(Z_1 + Z_2) &= V(\overline{Z_1 + Z_2})V \\ &= V(\overline{Z_1} + \overline{Z_2})V \\ &= (V\overline{Z_1}V) + (V\overline{Z_2}V) \\ &= f(Z_1) + f(Z_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda Z) &= V(\overline{\lambda Z})V \\ &= V(\lambda \overline{Z})V \\ &= \lambda(V\overline{Z}V) \\ &= \lambda f(Z) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $Z_1, Z_2 \in \mathbb{K}$ için

$$\begin{aligned} f(Z_1 Z_2) &= V(\overline{Z_1 Z_2})V \\ &= V(\overline{Z_2 Z_1})V \\ &= V(\overline{Z_2}(V\overline{V})\overline{Z_1})V \\ &= (V\overline{Z_2}V)(V\overline{Z_1}V) \\ &= f(Z_2)f(Z_1) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 5.3. $V^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olmak üzere $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(Z) = -VZV$ dönüşümü bir anti-involüsyondur.

İspat.

A1. Her Z hibrit sayısı için

$$\begin{aligned} f(f(Z)) &= f(-VZV) \\ &= -V(-VZV)V \\ &= V(VZ(V)V \\ &= V^2ZV^2 \\ &= Z \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $Z_1, Z_2 \in \mathbb{K}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(Z_1 + Z_2) &= -V(Z_1 + Z_2)V \\ &= -V(Z_1 + Z_2)V \\ &= (-VZ_1V) + (-VZ_2V) \\ &= f(Z_1) + f(Z_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda Z) &= -V(\lambda Z)V \\ &= -V(\lambda Z)V \\ &= \lambda(-VZV) \\ &= \lambda f(Z) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $Z_1, Z_2 \in \mathbb{K}$ için

$$\begin{aligned} f(Z_1 Z_2) &= -V(Z_1 Z_2)V \\ &= -V(Z_1(V(-V))Z_2)V \\ &= (-VZ_1V)(-VZ_2V) \\ &= f(Z_1)f(Z_2) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 5.4. $V^2 = 1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olmak üzere $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(Z) = VZV$ dönüşümü bir anti-involüsyondur.

İspat.

A1. Her Z hibrit sayısı için

$$\begin{aligned} f(f(Z)) &= f(VZV) \\ &= V(VZV)V \\ &= V^2ZV^2 \\ &= Z \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $Z_1, Z_2 \in \mathbb{K}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(Z_1 + Z_2) &= V(Z_1 + Z_2)V \\ &= V(Z_1 + Z_2)V \\ &= (VZ_1V) + (VZ_2V) \\ &= f(Z_1) + f(Z_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda Z) &= V(\lambda Z)V \\ &= V(\lambda Z)V \\ &= \lambda(VZV) \\ &= \lambda f(Z) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $Z_1, Z_2 \in \mathbb{K}$ için

$$\begin{aligned}
 f(Z_1 Z_2) &= V(Z_1 Z_2)V \\
 &= V(Z_1(VV)Z_2)V \\
 &= (VZ_1V)(VZ_2V) \\
 &= f(Z_1)f(Z_2)
 \end{aligned}$$

dir.

Açıklama 5.5. Yukarıdaki teoremlerden hibrit sayıların involüsyonları ve anti-involüsyonları ile split kuaterniyonların involüsyonları ve anti-involüsyonlarının benzerliği kolayca görülebilir.

Geometri:

Şimdi yukarıda bulduğumuz involüsyonların ve anti-involüsyonların geometrik yorumlarını vereceğiz.

Teorem 5.6. $V^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olsun. Herhangi bir $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(Z) = -V\bar{Z}V$ involüsyonu, Z nin skaler kısmı a yı invaryant bırakır ve Z nin vektörel kısmı ω yı da V involüsyon eksenine hibrit ortogonal olan düzleme göre yansıtır.

İspat. $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için

$$\begin{aligned}
 f(Z) &= -V\bar{Z}V \\
 &= -V\overline{(a + \omega)}V \\
 &= -V(a - \omega)V \\
 &= -VaV + V\omega V \\
 &= -V^2a + V\omega V \\
 &= a + V\omega V
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

dir. Bu eşitliğe göre f involüsyonunun Z nin skaler kısmı a yı invaryant bıraktığı açıktır. Diğer yandan $V\omega V$ nin de ω nın V involüsyon eksenine hibrit ortogonal olan düz-

leme göre yansması olduğunu göstermeliyiz. V, ω vektör olduğundan

$$\begin{aligned}
V\omega V &= (V\omega)V \\
&= (\langle V, \omega \rangle_H + V \times_H \omega)V \\
&= \langle V, \omega \rangle_H V + (V \times_H \omega)V \\
&= \langle V, \omega \rangle_H V + \langle V \times_H \omega, V \rangle_H + (V \times_H \omega) \times_H V \\
&= \langle V, \omega \rangle_H V - V \times_H (V \times_H \omega) \\
&= \langle V, \omega \rangle_H V - \langle V, V \rangle_H \omega + \langle V, \omega \rangle_H V \\
&= 2\langle V, \omega \rangle_H V - \langle V, V \rangle_H \omega \\
&= 2\langle V, \omega \rangle_H V - V^2 \omega \\
&= 2\langle V, \omega \rangle_H V + \omega
\end{aligned} \tag{5.2}$$

bulunur. ω nın düzleme olan izdüşümü

$$\omega_{izd} = \omega - \frac{\langle \omega, V \rangle_H}{\langle V, V \rangle_H} V = \omega - \frac{\langle \omega, V \rangle_H}{V^2} V = \omega + \langle \omega, V \rangle_H V$$

olduğundan ω nın düzleme göre yansması

$$2\omega_{izd} - \omega = 2(\omega + \langle \omega, V \rangle_H V) - \omega = \omega + 2\langle \omega, V \rangle_H V \tag{5.3}$$

eşitliğiyle elde edilir. (5.2) ve (5.3) eşitliklerine göre $V\omega V$, ω nın V involüsyon eksenine hibrit ortogonal olan düzleme göre yansması olur.

Sonuç 5.7. (5.1) eşitliğine göre $V \parallel \omega$ ise

$$f(Z) = -V\bar{Z}V = a + V\omega V = \bar{Z}$$

ve $V \perp \omega$ ise

$$f(Z) = -V\bar{Z}V = a + V\omega V = Z$$

dir.

Teorem 5.8. $V^2 = 1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olsun. Herhangi bir $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(Z) = V\bar{Z}V$ involüsyonu, Z nin skaler kısmı a yı invaryant

bırakır ve Z nin vektörel kısmı ω yı da V involüsyon eksenine hibrit ortogonal olan düzleme göre yansıtır.

İspat. $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için

$$\begin{aligned}
 f(Z) &= V\bar{Z}V \\
 &= V\overline{(a + \omega)}V \\
 &= V(a - \omega)V \\
 &= VaV - V\omega V \\
 &= V^2a - V\omega V \\
 &= a - V\omega V
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

dir. Bu eşitliğe göre f involüsyonunun Z nin skaler kısmı a yı invaryant bıraktığı açıktır. Diğer yandan $-V\omega V$ nin de ω nın V involüsyon eksenine hibrit ortogonal olan düzleme göre yansıması olduğunu göstermeliyiz. V, ω vektör olduğundan

$$\begin{aligned}
 -V\omega V &= -(V\omega)V \\
 &= -(\langle V, \omega \rangle_H + V \times_H \omega)V \\
 &= -\langle V, \omega \rangle_H V - (V \times_H \omega)V \\
 &= -\langle V, \omega \rangle_H V - \langle V \times_H \omega, V \rangle_H - (V \times_H \omega) \times_H V \\
 &= -\langle V, \omega \rangle_H V + V \times_H (V \times_H \omega) \\
 &= -\langle V, \omega \rangle_H V + \langle V, V \rangle_H \omega - \langle V, \omega \rangle_H V \\
 &= -2\langle V, \omega \rangle_H V + \langle V, V \rangle_H \omega \\
 &= -2\langle V, \omega \rangle_H V + V^2\omega \\
 &= -2\langle V, \omega \rangle_H V + \omega
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

bulunur. ω nın düzleme olan izdüşümü

$$\omega_{izd} = \omega - \frac{\langle \omega, V \rangle_H}{\langle V, V \rangle_H} V = \omega - \frac{\langle \omega, V \rangle_H}{V^2} V = \omega - \langle \omega, V \rangle_H V$$

olduğundan ω nın düzleme göre yansıması

$$2\omega_{izd} - \omega = 2(\omega - \langle \omega, V \rangle_H V) - \omega = \omega - 2\langle \omega, V \rangle_H V \quad (5.6)$$

eşitliğiyle elde edilir. (5.5) ve (5.6) eşitliklerine göre $V\omega V$, ω nın V involüsyon eksenine hibrit ortogonal olan düzleme göre yansıması olur.

Sonuç 5.9. (5.4) eşitliğine göre $V \parallel \omega$ ise

$$f(Z) = V\bar{Z}V = a - V\omega V = \bar{Z}$$

ve $V \perp \omega$ ise

$$f(Z) = V\bar{Z}V = a - V\omega V = Z$$

dir.

Teorem 5.10. $V^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olsun. Herhangi bir $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(Z) = -VZV$ anti-involüsyonu, Z nin skaler kısmı a yı invaryant bırakır ve Z nin vektörel kısmı ω yı da V anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıtır. $f(Z) = -VZV$ anti-involüsyonu $f(Z) = -V\bar{Z}V$ involüsyonunun eşleniğidir.

İspat. $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için

$$\begin{aligned} f(Z) &= -VZV \\ &= -V(a + \omega)V \\ &= -VaV - V\omega V \\ &= -V^2a - V\omega V \\ &= a - V\omega V \end{aligned} \quad (5.7)$$

dir. (5.1) ve (5.7) eşitliklerine göre $f(Z) = -VZV$ anti-involüsyonu $f(Z) = -V\bar{Z}V$ involüsyonunun eşleniğidir. (5.7) eşitliğinden göre f involüsyonunun Z nin skaler kısmı a yı invaryant bıraktığı açıktır. Diğer yandan $-V\omega V$ nin de ω nın V anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıması olduğunu göstermeliyiz. V, ω vektör ol-

duğundan

$$\begin{aligned}
-V\omega V &= -(V\omega)V \\
&= -(\langle V, \omega \rangle_H + V \times_H \omega)V \\
&= -\langle V, \omega \rangle_H V - (V \times_H \omega)V \\
&= -\langle V, \omega \rangle_H V - \langle V \times_H \omega, V \rangle_H - (V \times_H \omega) \times_H V \\
&= -\langle V, \omega \rangle_H V + V \times_H (V \times_H \omega) \\
&= -\langle V, \omega \rangle_H V + \langle V, V \rangle_H \omega - \langle V, \omega \rangle_H V \\
&= -2\langle V, \omega \rangle_H V + \langle V, V \rangle_H \omega \\
&= -2\langle V, \omega \rangle_H V + V^2 \omega \\
&= -2\langle V, \omega \rangle_H V - \omega
\end{aligned} \tag{5.8}$$

bulunur. ω nın V ye olan izdüşümü

$$I_{Zd_V} \omega = \frac{\langle V, \omega \rangle_H}{\langle V, V \rangle_H} V = \frac{\langle V, \omega \rangle_H}{V^2} V = -\langle V, \omega \rangle_H V$$

olduğundan ω nın V nin tanımladığı doğruya göre yansıması

$$2I_{Zd_V} \omega - \omega = -2\langle V, \omega \rangle_H V - \omega \tag{5.9}$$

eşitliğiyle elde edilir. (5.8) ve (5.9) eşitliklerine göre $-V\omega V$, ω nın V anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıması olur.

Sonuç 5.11. (5.7) eşitliğine göre $V \parallel \omega$ ise

$$f(Z) = -VZV = a - V\omega V = Z$$

ve $V \perp \omega$ ise

$$f(Z) = -VZV = a - V\omega V = \bar{Z}$$

dir.

Teorem 5.12. $V^2 = 1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olsun. Herhangi bir $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(Z) = VZV$ anti-involüsyonu, Z nin skaler kısmı a yı

invariant bırakır ve Z nin vektörel kısmı ω yı da V anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıtır. $f(Z) = VZV$ anti-involüsyonu $f(Z) = V\bar{Z}V$ involüsyonunun eşleniğidir.

İspat. $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için

$$\begin{aligned}
 f(Z) &= VZV \\
 &= V(a + \omega)V \\
 &= VaV + V\omega V \\
 &= V^2a + V\omega V \\
 &= a + V\omega V
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

dir. (5.4) ve (5.10) eşitliklerine göre $f(Z) = VZV$ anti-involüsyonu $f(Z) = V\bar{Z}V$ involüsyonunun eşleniğidir. (5.10) eşitliğinden f involüsyonunun Z nin skaler kısmı a yı invariant bıraktığı açıktır. Diğer yandan $V\omega V$ nin de ω nın V anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansımaları olduğunu göstermeliyiz. V, ω vektör olduğundan

$$\begin{aligned}
 V\omega V &= (V\omega)V \\
 &= (\langle V, \omega \rangle_H + V \times_H \omega)V \\
 &= \langle V, \omega \rangle_H V + (V \times_H \omega)V \\
 &= \langle V, \omega \rangle_H V + \langle V \times_H \omega, V \rangle_H + (V \times_H \omega) \times_H V \\
 &= \langle V, \omega \rangle_H V - V \times_H (V \times_H \omega) \\
 &= \langle V, \omega \rangle_H V - \langle V, V \rangle_H \omega + \langle V, \omega \rangle_H V \\
 &= 2\langle V, \omega \rangle_H V - \langle V, V \rangle_H \omega \\
 &= 2\langle V, \omega \rangle_H V - V^2 \omega \\
 &= 2\langle V, \omega \rangle_H V - \omega
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

bulunur. ω nın V ye olan izdüşümü

$$\text{Izd}_V \omega = \frac{\langle V, \omega \rangle_H}{\langle V, V \rangle_H} V = \frac{\langle V, \omega \rangle_H}{V^2} V = \langle V, \omega \rangle_H V$$

olduğundan ω nın V nin tanımladığı doğruya göre yansıması

$$2\dot{I}_Z d_V \omega - \omega = 2\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - \omega \quad (5.12)$$

eşitliğiyle elde edilir. (5.11) ve (5.12) eşitliklerine göre $V\omega V$, ω nın V anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıması olur.

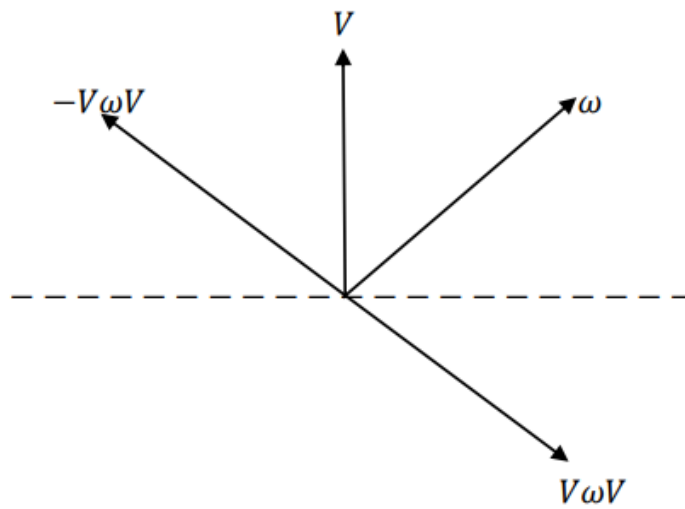
Sonuç 5.13. (5.10) eşitliğine göre $V \parallel \omega$ ise

$$f(Z) = VZV = a + V\omega V = Z$$

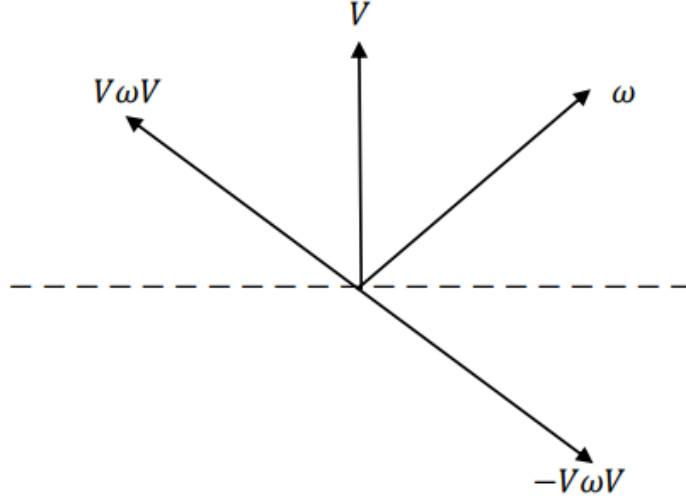
ve $V \perp \omega$ ise

$$f(Z) = VZV = a + V\omega V = \bar{Z}$$

dir.



Şekil 5.1: $V^2 = -1$ için $f(Z) = -V\bar{Z}V$ involüsyonu ve $f(Z) = -VZV$ anti-involüsyonunun geometrisi



Şekil 5.2: $V^2 = 1$ için $f(Z) = V\bar{Z}V$ involüsyonu ve $f(Z) = VZV$ anti-involüsyonunun geometrisi

Şekil 5.1 ve Şekil 5.2 de noktalı doğru V ye ortogonal olan düzlemi göstermektedir ve V nin skalar kısmı invaryant olduğundan gösterilmemiştir. Sonuç 5.7 ve Sonuç 5.9 a göre involüsyonun V eksenine ile Z nin vektörel kısmı paralel olduğunda involüsyon hibrit sayının eşleniğini ve hibrit ortogonal olduğunda involüsyon hibrit sayının kendisini verir. Sonuç 5.11 ve Sonuç 5.13 e göre anti-involüsyonun V eksenine ile Z nin vektörel kısmı hibrit ortogonal olduğunda anti-involüsyon hibrit sayının eşleniğini ve paralel olduğunda hibrit sayının kendisini verir. Aşağıda Lemma 5.14 ve Lemma 5.15 böyle durumların genel formüllerini vermektedir.

Lemma 5.14. Eksenleri birbirine hibrit ortogonal V_1, V_2, V_3 birim vektörleri olan involüsyonların toplamını herhangi bir ω vektörüne uygulanırsa yine ω elde edilir. Yani f_1, f_2, f_3 sırasıyla eksenleri V_1, V_2, V_3 olan involüsyonlar ise

$$f_1(\omega) + f_2(\omega) + f_3(\omega) = \omega \quad (5.13)$$

olur.

İspat. $i = 1, 2, 3$ için $\omega_i \parallel V_i$ olmak üzere $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ olsun. ω , (5.13) eşitliğinin

sol tarafında yerine yazılırsa, involüsyonun A2. aksiyomuna göre

$$\begin{aligned} f_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + f_2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + f_3(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) &= f_1(\omega_1) + f_1(\omega_2) + f_1(\omega_3) \\ &+ f_2(\omega_1) + f_2(\omega_2) + f_2(\omega_3) \\ &+ f_3(\omega_1) + f_3(\omega_2) + f_3(\omega_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 5.7 ve Sonuç 5.9 e göre bir vektör ω involüsyonun eksenine paralel ise involüsyon ω nın işaretini değiştirir, hibrit ortogonal ise involüsyon birim dönüşüm olur. Buna göre yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = \omega$$

elde edilir.

Lemma 5.15. Eksenleri birbirine hibrit ortogonal V_1, V_2, V_3 birim vektörleri olan anti-involüsyonların toplamını herhangi bir ω vektörüne uygulanırsa ω yön değiştirir. Yani f_1, f_2, f_3 sırasıyla eksenleri V_1, V_2, V_3 olan anti-involüsyonlar ise

$$f_1(\omega) + f_2(\omega) + f_3(\omega) = -\omega \quad (5.14)$$

olur.

İspat. $i = 1, 2, 3$ için $\omega_i \parallel V_i$ olmak üzere $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ olsun. ω , (5.14) eşitliğinin sol tarafında yerine yazılırsa, anti-involüsyonun A2. aksiyomuna göre

$$\begin{aligned} f_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + f_2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + f_3(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) &= f_1(\omega_1) + f_1(\omega_2) + f_1(\omega_3) \\ &+ f_2(\omega_1) + f_2(\omega_2) + f_2(\omega_3) \\ &+ f_3(\omega_1) + f_3(\omega_2) + f_3(\omega_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 5.11 ve Sonuç 5.13 e göre bir vektör ω anti-involüsyonun eksenine hibrit ortogonal ise anti-involüsyon ω nın işaretini değiştirir, paralel ise anti-involüsyon birim dönüşüm olur. Buna göre yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 = -\omega$$

elde edilir.

Teorem 5.16. $Z \in \mathbb{K}$ ve eksenleri birbirine hibrit ortogonal V_1, V_2, V_3 birim vektörleri olan anti-involüsyonlar f_1, f_2, f_3 ise

$$\bar{Z} = \frac{1}{2}(f_1(Z) + f_2(Z) + f_3(Z) - Z) \quad (5.15)$$

dir.

İspat. $Z = a + \omega$ olsun. Anti-involüsyonun A2. aksiyomuna göre (5.15) eşitliğinin sağ tarafı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_1(Z) + f_2(Z) + f_3(Z) - Z) &= \frac{1}{2}(f_1(a + \omega) + f_2(a + \omega) + f_3(a + \omega) - (a + \omega)) \\ &= \frac{1}{2}(f_1(a) + f_1(\omega) + f_2(a) + f_2(\omega) + f_3(a) + f_3(\omega) - a - \omega) \end{aligned}$$

elde edilir. Anti-involüsyonlar a skaler kısmını invaryant bırakır ve (5.14) eşitliğine göre yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f_1(Z) + f_2(Z) + f_3(Z) - Z) &= \frac{1}{2}(a + f_1(\omega) + a + f_2(\omega) + a + f_3(\omega) - a - \omega) \\ &= a + \frac{1}{2}(f_1(\omega) + f_2(\omega) + f_3(\omega) - \omega) \\ &= a + \frac{1}{2}(-\omega - \omega) \\ &= a - \omega \\ &= \bar{Z} \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 5.17. $Z \in \mathbb{K}$ ve eksenleri birbirine hibrit ortogonal V_1, V_2, V_3 birim vektörleri olan involüsyonlar f_1, f_2, f_3 ise

$$Z = \frac{1}{2}(f_1(Z) + f_2(Z) + f_3(Z) - \bar{Z}) \quad (5.16)$$

dir.

İspat. $Z = a + \omega$ olsun. İnvölüsyonun A2. aksiyomuna göre (5.16) eşitliğinin sağ tarafı

hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f_1(Z) + f_2(Z) + f_3(Z) - \bar{Z}) &= \frac{1}{2}(f_1(a + \omega) + f_2(a + \omega) + f_3(a + \omega) - (a - \omega)) \\ &= \frac{1}{2}(f_1(a) + f_1(\omega) + f_2(a) + f_2(\omega) + f_3(a) + f_3(\omega) - a + \omega)\end{aligned}$$

elde edilir. İnvölüsyonlar a skaler kısmını invaryant bırakır ve (5.13) eşitliğine göre yukarıdaki eşitlikten

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(f_1(Z) + f_2(Z) + f_3(Z) - \bar{Z}) &= \frac{1}{2}(a + f_1(\omega) + a + f_2(\omega) + a + f_3(\omega) - a + \omega) \\ &= a + \frac{1}{2}(f_1(\omega) + f_2(\omega) + f_3(\omega) + \omega) \\ &= a + \frac{1}{2}(\omega + \omega) \\ &= a + \omega \\ &= Z\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 5.18. $V^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olsun. Herhangi bir ω vektörünün V ye paralel ve hibrit ortogonal bileşenleri sırasıyla ω_1, ω_2 ise

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{2}(\omega - f_1(\omega)) = \frac{1}{2}(\omega + f_2(\omega)) \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}(\omega + f_1(\omega)) = \frac{1}{2}(\omega - f_2(\omega))\end{aligned}$$

dir ve $\omega = \omega_1 + \omega_2$ dir. Burada $f_1(Z) = -V\bar{Z}V$ involüsyonu ve $f_2(Z) = -VZV$ anti-involüsyonu alınmıştır.

İspat. Şekil 5.1. den kolayca görülmektedir.

Teorem 5.19. $V^2 = 1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olsun. Herhangi bir ω vektörünün V ye paralel ve hibrit ortogonal bileşenleri sırasıyla ω_1, ω_2 ise

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{2}(\omega - f_1(\omega)) = \frac{1}{2}(\omega + f_2(\omega)) \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}(\omega + f_1(\omega)) = \frac{1}{2}(\omega - f_2(\omega))\end{aligned}$$

dir ve $\omega = \omega_1 + \omega_2$ dir. Burada $f_1(Z) = V\bar{Z}V$ involüsyonu ve $f_2(Z) = VZV$ anti-

involüsyonu alınmıştır.

İspat. Şekil 5.2. den kolayca görülmektedir.



KAYNAKLAR

- [1] T. A. Ell, S. J. Sangwine, Quaternion Involutions and Anti-involutions, Computers and Mathematics with Applications, 2007.
- [2] M. Özdemir, Introduction to Hybrid Numbers, Adv. Appl. Clifford Algebras, 2018.
- [3] İ. Öztürk, M. Özdemir, Elliptical Rotations with Hybrid Numbers, Indian J Pure Appl Math, 2022.
- [4] H. Çakır, M. Özdemir, Hybrid Number Matrices, Preprint, 2021
- [5] M. Bekar, Y. Yaylı, Dual Quaternion Involution and Anti-Involutions, Adv. Appl. Clifford Algebras, 2013.
- [6] M. Bekar, Y. Yusuf, Involutions of Complexified Quaternions and Split Quaternions, Adv. Appl. Clifford Algebras, 2013.
- [7] M. Bekar, Y. Yaylı, Involutions in Dual Split-Quaternions, Adv. Appl. Clifford Algebras, 2016.
- [8] M. Bekar, Y. Yaylı, Involutions in Split Semi-Quaternions, Math. Meth. Appl. Sci., 2018.
- [9] M. Bekar, Y. Yaylı, Involutions in Semi-Quaternions, Geometry and Symmetry in Physics, 2016.
- [10] İ. Öztürk, M. Özdemir, Similarity of Hybrid Numbers, Math Meth Appl Sci., 2020
- [11] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry, New York, Academic Press, 1983.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :

Doğum Yeri :

Yabancı Dil :

Eğitim Durumu

Lise :

Lisans :

Yüksek Lisans :

Yayınları :

Araştırma Alanları :