

**BİRLEŞTİRİLMİŞ GEÇİŞ ŞARTLI SÜREKSİZ
SINIR DEĞER PROBLEMİNİN
ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARININ
ASİMPOTOTİK AÇILIMLARI**

FATMA HIRA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

T.C.

**ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİRLEŞTİRİLMİŞ GEÇİŞ ŞARTLI SÜREKSİZ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN
ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARININ ASİMPTOTİK AÇILIMLARI**

FATMA HIRA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

SAMSUN-2009

BİRLEŞTİRİLMİŞ GEÇİŞ ŞARTLI SÜREKSİZ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARININ ASİMPTOTİK AÇILIMLARI

ÖZET

Bu çalışmada ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için bir sınır değer geçiş problemi incelenmiştir. Diferansiyel denklem süreksiz katsayı ve süreksizlik noktasındaki geçiş şartlarını içermesi bakımından farklılıklar göstermektedir. Aynı zamanda özdeğer parametre hem diferansiyel denklemde hem de her iki sınır şartında bulunmaktadır.

Bu çalışma beş bölüm halinde düzenlenmiştir:

Literatür özeti bölümünde; tez konumla ilgili olan çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir. Materyal ve metot bölümünde; tezde kullanılan kaynaklar ve uygulanan yöntemler hakkında bilgi verilmiştir. Giriş bölümünde; araştırılan sınır değer probleminin güncelliği, uygulama alanları, teorik ve pratik önemi belirtilmiştir. Genel bilgiler bölümünde; orijinal bölümde kullandığımız tanım, teorem ve bilgilere yer verilmiştir.

Bulgular ve tartışma bölümü çalışmamızın orijinal kısmıdır. Bu bölümde araştırdığımız sınır değer problemine uygun olarak tanımladığımız özel Hilbert uzayında, tanımladığımız problem ile aynı özdeğere sahip olan operatör tanımlanmıştır. Diferansiyel denkleme ait özdeğer ve özfonsiyonların bazı temel özellikleri verilmiş ve bunlara ait asimptotik açılımlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Özdeğer parametre, geçiş şartları, özdeğerlerin asimptotiği, süreksiz sınır değer problemleri.

**ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF EIGENVALUES AND EIGENFUNCTIONS
OF THE DISCONTINUOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH
COUPLED TRANSMISSION CONDITIONS**

ABSTRACT

In this study, consideration is given to the second order differential equation for boundary value transmission problem. The original part of the problem is the discontinuity in the coefficient of differential equation and transmissions conditions. At the same time, the eigenvalue parameter is not only included in the differential equation but it is also included in both of the boundary conditions.

This study consists of five main chapter:

A brief information related to study is given in the literature summary chapter. The methods and sources used in this thesis are introduced in material and method chapter. Current interest application fields, theoretical and practical importance of explored boundary value transmission problem are determined in introduction. Some basic definition, theorem and informations, which are used in the original part, are explained in general information chapter

Findings and discussion chapter is formed the original part of our study. In this chapter, we introduced the special inner product in the Hilbert space and a symmetric operator defined on this Hilbert space such that definition of boundary value problem which is our study topic can be considered as the eigenvalue problem of this operator.

Key Words: Eigenvalue parameter, transmission conditions, the asymptotic of eigenvalues, discontinuous boundary value problems.

III

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenen, çalışmalarım boyunca büyük bir özveriyle bana yardımcı olan, destek ve yol göstericiliğini benden esirgemeyen ve kendisiyle çalışmanın mutluluğuna eriştiğim saygı değer hocam Sayın **Yrd. Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK**'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Görüşleriyle çalışmalarımıza katkıda bulunan, yardım ve desteğini esirgemeyen Sayın **Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU**'na sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı arz ederim.

Çalışmam boyunca yakın ilgilerinden ötürü tüm matematik anabilim dalı öğretim üyelerine ve değerli arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. LİTERATÜR ÖZETİ.....	1
2. MATERYAL VE METOT.....	4
3. GİRİŞ.....	5
4. GENEL BİLGİLER.....	11
4.1. Hilbert Uzayı ve Simetrik Operatör.....	11
4.2. Lineer Operatörlerin Özdeğer ve Özelemanları.....	12
4.3. $L_2(a, b)$ Uzayı.....	12
4.4. Rouche Teoremi.....	13
4.5. Regüler Sturm-Liouville Problemi.....	13
4.6. Asimptotik Formüller.....	15
5. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	17
5.1. Sınır Değer Probleminin İfadesi	17
5.2. Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayda Ürettiği Lineer Operatör.....	18
5.3. Özdeğer ve Özfonksiyonlar için Bazı Basit Özellikler.....	19
5.4. $\omega(\lambda)$ için Asimptotik Açılımlar.....	30
5.5. Özdeğerler için Asimptotik Açılımlar.....	40
5.6. Özfonksiyonlar için Asimptotik Açılımlar.....	45
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	49
7. KAYNAKLAR.....	50
8. ÖZGEÇMİŞ.....	52

1. LİTERATÜR ÖZETİ

Charles Sturm ve Joseph Liouville 19. yüzyılın ortalarında ısı iletim problemini Fourier yöntemi ile araştırırken ortaya çıkan özdeğer parametre içeren ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemin bazı sınır şartlarını sağlayan çözümlerini incelemişlerdir. Sınır şartları fiziksel olayın doğal sonucunda ortaya çıkan şartlardır. Bu tipten sınır değer problemleri daha sonra literatürde Sturm-Liouville problemleri olarak adlandırılmıştır. Bu konuda çok sayıda çalışma yapılmış, makale ve kitaplar yayınlanmıştır.

G.D. Birkhoff [3], çalışmasında regüler sınır şartları tanımlayarak parametreye bağlı adi lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri için asimptotik formüller vermiştir. Ayrıca çözüm fonksiyonlarından yani özfonksiyonlardan oluşan temel çözüm sisteminin tamlığı incelenmiştir.

J.D. Tamarkin [18], sınır şartları için güçlü regülerlik kavramını tanımlamıştır. Güçlü regüler sınır koşullarında elde edilen özfonksiyonlar ve bu özfonksiyonlar üzerine seri açılımlarını incelemiştir. Bundan sonraki yıllarda bir çok matematikçi tarafından bu tip problemler araştırılarak geliştirilmiştir.

Daha sonra sadece denklemde değil aynı zamanda sınır koşullarında da özdeğer parametresi içeren sınır değer problemleri özel ilgi çekmeye başlamıştır. Bu konuda çok sayıda çalışmalar yapılmış, makale ve kitaplar yayınlanmıştır.

J. Walter [21], çalışmasında bu tip sınır değer problemleri için tanımlamış olduğu yeni bir μ ölçümü yardımıyla uygun $L_2([a, b], \mu)$ Hilbert uzayında probleme uygun operatör tanımlayarak problemin operatör-teorik yorumlamasını vermiştir.

A. Schneider [16], çalışmasında ise özfonksiyonlar üzerine seri açılımının düzgün ve mutlak yakınsaklığı için yeter koşullar belirlemiştir. Ancak açılım teoremini sadece düzgün fonksiyonlar için ispatlamıştır.

E.M. Russakovskiy [15], sınır şartları polinom biçiminde özdeğer parametresi içeren problemlerin operatör-teorik yorumunu incelemiştir. Bu durumda uygun Hilbert uzayı olarak $L_2([a, b]) \oplus \mathbb{C}$ yerine $L_2([a, b]) \oplus \mathbb{C}^n$ uzayı alınmıştır.

C.T. Fulton [5],

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in (a, b] \quad (1.1)$$

$$\cos \alpha u(a) + \sin \alpha u'(a) = 0 \quad (1.2)$$

$$(\lambda \beta_1' + \beta_1)u(b) + (\lambda \beta_2' + \beta_2)u'(b) = 0 \quad (1.3)$$

biçiminde Sturm-Liouville problemini ele almıştır. Bu problem için uygun bir $H = L_2([a, b]) \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayında (1.1)-(1.3) sınır değer problemine uygun kendine eşlenik $A: H \rightarrow H$ operatörünü tanımlayarak (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin operatör-teorik yorumlamasını vermiştir. Titchmarsh'ın [19] klasik yöntemlerinden yararlanarak sınır şartlarında da özdeğer parametre bulunduran problemin özdeğerleri ve özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları için asimptotik formüller bulmuştur. Daha sonra Rezolvent operatörünü ve Green fonksiyonunu incelemiş, özfonksiyonlar üzerine açılım teoremlerini ispatlamış, Fourier serileri ile eşyakınsaklık teoremini vermiştir.

Kerimov ve Mamedov [9],

$$-u'' + q(x)u = \lambda^2 u, \quad 0 < x < 1$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2)u(0) + u'(0) = 0$$

$$(\beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2)u(1) + u'(1) = 0$$

sınır değer problemine uygun $A(\lambda)\lambda^2 + B(\lambda)\lambda + C(\lambda) = 0$ biçiminde operatörler demetini kurarak bu probleme farklı bir yaklaşımla operatör-teorik yorum getirmiştir. Ayrıca özdeğer ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller vermiş ve özfonksiyonların sıfır yerleri hakkında klasik sonuçlara benzer sonuçlar elde etmiştir.

Bunların dışında bu konuda yapılmış en önemli çalışmalar B. D. Hinton [6],

A. Shkalikov[17], M. Kobayashi [10], Q. Kang ve A. Zettl [7], S.Y.Yakubov[22], E.M.E Zayed ve S.F.M. İbrahim [23] şeklinde sıralanabilir.

Ancak yukarıda bahsedilen bütün çalışmalarda sınır değer problemindeki diferansiyel denklem sürekli katsayılıdır. Süreksiz katsayılı diferansiyel denklemleri ve geçiş şartlarını içeren süreksiz sınır değer problemi O.S. Mukhtarov'un [11], [12], [13]; N.Altınışik'in [1] ve arkadaşlarının [2]; M. Kadakal'ın [8] ve E.Tunç'un [20] çalışmalarında incelenmiştir.

2. MATERYAL VE METOT

Bu tez çalışmasında materyal olarak kaynaklarda verilen kitap ve makalelerden yararlanılmıştır. Bu kaynaklardaki yöntemlerin yanı sıra diferansiyel operatörler teorisinde Sturm-Liouville teoremi ve yöntemleri, özdeğer probleminin çözüm yöntemleri, fonksiyonel analizde simetrik ve lineer operatörlerin spektral teorisi, kompleks analizde tam fonksiyonların rezidü teorisi ve Rouché Teoremi, diferansiyel denklemlerde integral denklemleri teorisi ve çözüm fonksiyonlarının asimptotik açılım yöntemleri uygulanmıştır.

3.GİRİŞ

Verilen fonksiyonun bağılı olduğu değişkene göre türevi, fonksiyonun bu değişkene göre anlık değişimini ifade etmektedir.

Evrende maddeler, fiziksel veya kimyasal olayların etkisi ve tesiri altında olduğundan hareket ve değişim halindedirler. Diferansiyel denklemler ise türev içerdiğinden günlük hayatta karşılaşılan bazı fiziksel olaylar diferansiyel denklemler olarak formüle edilebilir.Örneğin

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

denklemini sıcaklığı zamanla değişmeyen yani; kararlaşmış sıcaklığı gösteren denklemdir. Homojen metal çubuktaki titreşimlerle ilgili dalga denklemini

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

şeklinde verilir. Isı izolasyonu yapılmış homojen metal çubuktaki ısı transferi

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

denklemini ile ifade edilir. Burada $u(x,t)$, x konumuna ve t gözlem zamanına bağlı bir sıcaklık fonksiyonu; K ise çubuğun oluştuğu maddenin ısı tutumuna, yoğunluğuna ve ısı iletkenliğine bağlı sabit bir sayıdır.

(3.1) denkleminde uzunluğu ℓ olan metal çubuğun uçlarında ısısın sıfır olduğu kabul edilirse

$$u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0, \quad t > 0 \quad (3.2)$$

biçiminde sınır şartları, $t = 0$ anında her noktadaki ısısın değeri $f(x)$ ile gösterilirse

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \ell \quad (3.3)$$

biçiminde başlangıç şartı belirlenmiş olur. Böylece (3.1)-(3.3) matematik fizikte ısı iletimi problemi olarak adlandırılır. Değişkenlerine ayırma yöntemi ile bu problemin çözümü

$$u(x,t) = \psi(x)\varphi(t) \quad (3.4)$$

şeklinde aranır.(3.4) ifadesi (3.1) de yerine yazılırsa

$$\psi(x)\varphi'(t) = K\psi''(x)\varphi(t)$$

eşitliği elde edilir. Ayırma sabiti σ ile gösterilirse

$$\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{K} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \sigma \quad (3.5)$$

eşitlikleri elde edilir. Birinci eşitlikten

$$\psi''(x) - \sigma\psi(x) = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Diğer taraftan (3.4) ifadesinde (3.2) sınır şartları yazılırsa

$$\psi(0)\varphi(t) = 0, \quad \psi(\ell)\varphi(t) = 0$$

olur. Buradan

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(\ell) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece ısı iletim probleminden ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için sınır değer problemi olarak

$$\psi''(x) - \sigma\psi(x) = 0 \quad (3.6)$$

$$\psi(0) = 0 \quad (3.7)$$

$$\psi(\ell) = 0 \quad (3.8)$$

sınır değer problemi elde edilir. (3.7)-(3.8) sınır şartları Dirichlet tipinde şartlar olarak adlandırılır. Ancak $\sigma < 0$ olması durumunda (3.6)-(3.8) sınır değer probleminin aşikar olmayan $\psi(x)$ çözümü vardır. $\lambda > 0$ özdeğer parametresi olmak üzere $\sigma = -\lambda$ gösterimi kullanılırsa (3.6) diferansiyel denkleminin genel çözümü A ve B keyfi sabitler olmak üzere

$$\psi(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x + B)$$

biçimindedir. $\psi(x)$ çözümü (3.7) sınır şartını sağladığı için $A \neq 0$ olmak üzere $\cos B = 0$ olur. Dolayısıyla bu eşitliği sağlayan B değerleri için $\sin B = 1$ olur. Buna göre (3.8) sınır şartından

$$\sin \sqrt{\lambda}\ell = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.9)$$

özdeğerleri elde edilir. Bu özdeğerlere karşılık (3.6)-(3.8) sınır değer probleminin özfonksiyonları ise

$$\psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.10)$$

şeklinde elde edilir.

(3.5) ifadesinin ikinci eşitliğinden

$$\varphi'(t) - K\sigma\varphi(t) = 0 \quad (3.11)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin genel çözümü

$$\varphi_n(t) = B_n e^{-K\lambda_n t} \quad (3.12)$$

şeklindedir. Böylece (3.10) ve (3.12) ifadeleri (3.4) de yerine yazılırsa elde edilen

$$u_n(x, t) = A_n B_n e^{-K\lambda_n t} \sin \sqrt{\lambda_n} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.13)$$

fonksiyonlarının (3.6) denklemini ve (3.7)-(3.8) sınır şartlarını sağladığı açıktır. Ancak bu çözümler genel olarak (3.3) başlangıç koşulunu sağlamaz. Hem (3.1) denklemini hemde (3.2) sınır şartları homojen olduğundan iyi bilinen süperpozisyon prensibi gereği (3.13) ifadesinin sonlu sayıda toplamı da (3.1) denklemini ve (3.2) sınır şartlarını sağlar. Gerekli ek şartlar altında

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

ifadesi (3.1) denklemini ve (3.2) sınır şartlarını sağlar. (3.3) başlangıç şartını sağlaması için $A_n B_n = C_n$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (3.14)$$

olacak biçimde C_n sabiti bulunmalıdır. Fourier serileri teorisinden bilindiği üzere

$$C_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{\ell} d\xi$$

biçimde seçilirse (3.14) eşitliği sağlanır. Böylece (3.1)-(3.3) probleminin çözümü

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{\ell} d\xi \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

serisi biçiminde bulunur.

Bilindiği üzere günümüzde matematik fiziğin ortaya koyduğu yeni somut problemlerin araştırılması ile birlikte teorik matematiğin gelişmesi sadece klasik sınır değer problemlerini değil aynı zamanda standart olmayan sınır değer problemlerinin incelenmesini gerektirmektedir. Bunlara diferansiyel denklemler için lokal olmayan sınır değer problemleri, süreksiz katsayılı diferansiyel denklemler için geçiş şartları da eklenmiş sınır değer problemleri, çok noktalı sınır değer problemleri örnek olarak gösterilebilir. Böylece problemler fizik ve matematiğin bir çok dallarında ortaya çıkar. Örneğin farklı fiziksel yapılara sahip olan cisimler arasındaki ısı ve madde iletimi, difraksiyon olayı, cisimlerdeki farklı geçiş süreleri genel olarak süreksiz katsayılı diferansiyel denklemlerden geçiş ve sınır şartlarından oluşan sınır değer problemine indirgenebilir.

Ele alınan problem; diferansiyel denkleminin süreksiz katsayılı olması, özdeğer parametresinin hem denkleminde hemde sınır koşullarında olması, geçiş şartlarının birleştirilmiş olması bakımından klasik problemlerden farklılıklar göstermektedir. Bu problemin özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunması matematiksel fizik problemlerinin çözümünde etkin yöntemlerden biridir. Örneğin kuantum fiziğinde $\psi(x,t)$ dalga fonksiyonu olmak üzere tek boyutlu zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$-\frac{h^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi \quad (3.15)$$

yazılabilir.

$$H = -\frac{h^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V \quad (3.16)$$

Hamiltonien operatörü olmak üzere

$$H\psi = E\psi \quad (3.17)$$

özdeğer denklemi şeklinde yazılır. Burada E kuantum fiziğinde parçacığın enerjisini, h Planck sabitini, m parçacığın kütlesini göstermektedir. E , (3.17) özdeğer probleminin özdeğeri, $\psi(x)$ ise özfonksiyonudur. (3.17) Schrödinger denklemi ele aldığımız

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + q(x)u = \lambda u$$

denklemine benzemektedir. Bu nedenle bu tip denklemleri içeren sınır değer problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonlarının incelenmesi uygulama açısından büyük önem arz etmektedir.

4.GENEL BİLGİLER

4.1. Hilbert Uzayı ve Simetrik Operatör

H kompleks lineer uzayı verilsin. Her $x, y \in H$ elemanları çiftine

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \quad (x_1, x_2, y \in H)$
3. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y) \quad (\lambda \in \mathbb{C})$
4. $(x, x) \geq 0$
5. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

koşullarını gerçekleyen ve (x, y) ile göstereceğimiz kompleks sayısının karşılık getirildiğini kabul edelim. Bu halde (x, y) kompleks sayısına x ve y elemanlarının iç çarpımı; H lineer uzayına ise iç çarpım uzayı denir. H iç çarpım uzayında

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

formülü bir norm tanımladığı için iç çarpım uzayına bu norma göre lineer normlu uzay denir.

Eğer bu lineer normlu uzay tam ve sonsuz boyutlu ise H uzayına Hilbert uzayı denir.

4.2.1. Tanım: H Hilbert uzayında tanım bölgesi $D(A) \subset H$ olan $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ lineer operatörü verilsin. Eğer her $x, y \in D(A)$ için

$$\langle Ax, y \rangle_H = \langle x, Ay \rangle_H$$

eşitliği sağlanıyorsa A operatörüne simetrik operatör denir. Burada $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ H uzayında bir iç çarpımdır.

4.2.2. Tanım: H_1 ve H_2 Hilbert uzayları verilsin.

$$H_1 \times H_2 := \{(x, y) \mid x \in H_1, y \in H_2\}$$

kümesi alışılmış yöntemle lineer uzaya dönüştürülebilir. Bu lineer uzayda

$X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2) \in H_1 \times H_2$ elemanları için

$$\langle X, Y \rangle_{H_1 \oplus H_2} := \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} + \langle y_1, y_2 \rangle_{H_2}$$

eşitliği bir iç çarpım tanımlar ve bu iç çarpıma göre

$$H_1 \oplus H_2 := (H_1 \times H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1 \oplus H_2})$$

bir Hilbert uzayıdır.

4.2. Lineer Operatörlerin Özdeğer ve Özelemanları

H kompleks Hilbert uzayında $A: H \rightarrow H$ lineer operatörü ve λ kompleks parametresi verilsin. Eğer herhangi bir $\lambda = \lambda_0$ için $Au = \lambda_0 u$ operatör denkleminin $u_0 \neq 0$ çözümü varsa λ_0 sayısına A operatörünün özdeğeri; $u_0 \in D(A)$ elemanına ise λ_0 özdeğerine uygun özelemanı denir.

4.3. $L_2(a, b)$ Uzayı

Verilmiş $[a, b]$ aralığında tanımlı ve Lebesgue anlamında ölçülebilir olan $f(x)$ fonksiyonu için $|f(x)|^2$ fonksiyonu bu aralıkta Lebesgue anlamında integrallenebilir ise $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında karesi integrallenebilir fonksiyon denir.

Karesi integrallenebilir fonksiyonların lineer uzayında

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

formülü bir iç çarpım tanımlar. Bu şekilde tanımlanan iç çarpım uzayının bir Hilbert uzayı olduğu açıktır. Bu uzay $L_2(a, b)$ ile gösterilir.

4.4. Rouché Teoremi

Bütün kompleks düzlemde analitik olan fonksiyona tam fonksiyon denir. $f(z)$ tam fonksiyonu verildiğinde

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

ise $z = z_0$ noktasına $f(z)$ fonksiyonunun k -katlı sıfır yeri denir. Tam fonksiyonların sıfır yerlerinin sonlu veya sayılabilir sayıda olduğu (veya hiç olmadığı) kompleks analizden iyi bilinmektedir.

4.4.1. Teorem (Rouché Teoremi): Kabul edelim ki $f(z)$ ve $g(z)$ kompleks fonksiyonları herhangi bir γ kapalı düzgün Jordon eğrisinin içinde ve üzerinde analitik olsun ve her $z \in \gamma$ için $|f(z)| > |g(z)|$ eşitsizliği sağlansın. Bu durumda γ eğrisinin içinde $f(z) + g(z)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı ile $f(z)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı eşittir (her bir sıfır yeri mertebesi sayıda hesaplanır).

4.5. Regüler Sturm-Liouville Problemi

λ bir parametre olmak üzere $[a, b]$ aralığında

$$a_1(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_2(x) \frac{dy}{dx} + (a_3(x) + \lambda) y = 0 \quad (4.5.1)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemde eğer

$$p(x) = \exp\left(\int^x \frac{a_2(t)}{a_1(t)} dt\right), \quad q(x) = \frac{a_3(x)}{a_1(x)} p(x), \quad s(x) = \frac{p(x)}{a_1(x)} \quad (4.5.2)$$

değişimleri yapılırsa (4.5.1) denklemi

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + (q(x) + \lambda s(x))y = 0 \quad (4.5.3)$$

denkleme indirgenmiş olur. Bu denkleme Sturm-Liouville denklemi denir. Bu denklem

$$L := \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

operatörü yardımıyla

$$L(y) + \lambda s(x)y = 0 \quad (4.5.4)$$

olarak yazılabilir. Burada $p(x), q(x)$ ve $s(x)$ reel değerli fonksiyonlardır. $[a, b]$ aralığında $q(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonlarının sürekli, $p(x)$ fonksiyonunun türevlenebilir olması durumunda (4.5.4) denkleminin çözümü vardır.

Eğer $p(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında pozitif iseler (4.5.3) Sturm-Liouville denkleme $[a, b]$ aralığında regülerdir veya düzgündür denir.

4.5.1. Tanım: Verilen $[a, b]$ aralığında tanımlı

$$L(y) + \lambda s(x)y = 0 \quad (4.5.5)$$

denklemi

$$\left. \begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.5.6)$$

olarak verilen sınır koşulları ile birlikte bir regüler Sturm-Liouville problemi tanımlar. Bir başka deyişle (4.5.5) denkleminin (4.5.6) sınır koşullarını sağlayan çözümlerinin araştırılması problemine regüler Sturm-Liouville problemi denir. Burada a_1, a_2, b_1, b_2 reel sabitler olup $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ ve $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ dır.

4.5.1. Teorem: Eğer $q(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise

$$-u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [a, b]$$

diferansiyel denklemi ve

$$u(a) = \sin \alpha, \quad u'(a) = -\cos \alpha \quad (u(a) = f(\lambda), u'(a) = g(\lambda))$$

homojen olmayan sınır şartlarından oluşan sınır değer probleminin $u = u(x, \lambda)$ çözümü bulunur ve herbir $x \in [a, b]$ için $u(x, \lambda)$ fonksiyonu λ parametresinin tam fonksiyonudur.

4.6. Asimptotik Formüller

$x \in [a, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ değişkenlerine bağlı $g(x, \lambda)$ fonksiyonu verilsin. $f(x, \lambda)$

fonksiyonu için öyle $M > 0$ ve $R > 0$ sabitleri için $\left| \frac{f(x, \lambda)}{g(x, \lambda)} \right| \leq M$ eşitsizliği bütün

$x \in [a, b]$ ve $|\lambda| > R$ için geçerli oluyorsa, o halde

$$f(x, \lambda) = O(g(x, \lambda)), \quad \lambda \rightarrow \infty$$

veya kısaca

$$f(x, \lambda) = O(g(x, \lambda))$$

şeklinde gösterilir. Eğer $[a, b]$ aralığında düzgün olarak $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x, \lambda)}{g(x, \lambda)} \right| = 0$ oluyorsa o

halde

$$f(x, \lambda) = o(g(x, \lambda)), \lambda \rightarrow \infty$$

şeklinde gösterilir.

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

5.1. Sınır Değer Probleminin İfadesi

Bu çalışmada $[a, \xi) \cup (\xi, b]$ aralığında tanımlı

$$\tau u := -u'' + q(x)u = \lambda u \quad (5.1.1)$$

diferansiyel denklemden

$$L_1(u) := \lambda (\alpha_1' u(a) - \alpha_2' u'(a)) + \alpha_1 u(a) - \alpha_2 u'(a) = 0 \quad (5.1.2)$$

$$L_2(u) := \lambda (\alpha_3' u(b) - \alpha_4' u'(b)) + \alpha_3 u(b) - \alpha_4 u'(b) = 0 \quad (5.1.3)$$

sınır şartlarından ve süreksizlik noktasındaki

$$L_3(u) := \begin{pmatrix} u(\xi+0) \\ u'(\xi+0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\xi-0) \\ u'(\xi-0) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.1.4)$$

geçiş şartlarından oluşan sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik açılımları incelenmiştir. Burada λ kompleks özdeğer parametresidir. $q(x)$,

$[a, \xi) \cup (\xi, b]$ aralığında reel değerli ve $q(\xi \pm 0) = \lim_{x \rightarrow \xi \pm 0} q(x)$ sonlu limitleri olan

fonksiyondur. $\alpha_i, \alpha_i' (i = \overline{1, 4}), \beta_j, \beta_j' (j = 1, 2)$ reel sayılar olmak üzere

$$\rho_j = (-1)^j (\alpha_{2j-1}' \alpha_{2j} - \alpha_{2j-1} \alpha_{2j}') > 0 \quad (j = 1, 2),$$

$$\delta = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1' & \beta_2' \end{vmatrix} > 0$$

olduğu kabul edilmiştir.

5.2. Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayda Ürettiği Lineer Operatör

Bu bölümde araştırdığımız sınır değer problemine uygun olarak tanımladığımız özel Hilbert uzayında sınır değer problemi ile aynı özdeşliklere sahip olan bir operatör tanımladık ve bu operatöre ait bazı özellikleri inceledik.

İki bileşenli $H = L_2([a, b]) \oplus \mathbb{C}^2$ lineer uzayında

$$F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} g(x) \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in H \text{ için}$$

$$\langle F, G \rangle := \int_a^\xi f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{\delta} \int_\xi^b f(x) \overline{g(x)} dx + \frac{1}{\rho_1} f_1 \overline{g_1} + \frac{1}{\rho_2 \delta} f_2 \overline{g_2} \quad (5.2.1)$$

formülü bir iç çarpım tanımlar. Bu iç çarpıma göre H lineer uzayı bir Hilbert uzayı olur. Böylece verilen sınır değer problemine uygun bir Hilbert uzayı tanımlamış olduk.

Sınır değer problemine uygun olan $A: H \rightarrow H$ operatörünü

$$D(A) = \left\{ F = \begin{pmatrix} f(x) \\ R_1'(f) \\ R_2'(f) \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} f(x), [a, \xi] \text{ ve } [\xi, b] \text{ aralıklarında sürekli} \\ \text{ve } f(\xi \pm 0) \text{ sonlu limitleri var,} \\ \tau f \in L_2[a, b], \quad L_3 f = 0 \end{array} \right. \right\} \quad (5.2.2)$$

$$AF = \begin{pmatrix} \tau f \\ -R_1(f) \\ -R_2(f) \end{pmatrix} \quad (5.2.3)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$R_1(f) = \alpha_1 f(a) - \alpha_2 f'(a)$$

$$R_2(f) = \alpha_3 f(b) - \alpha_4 f'(b)$$

$$R_1'(f) = \alpha_1' f(a) - \alpha_2' f'(a)$$

$$R_2'(f) = \alpha_3' f(b) - \alpha_4' f'(b)$$

ifadelerini temsil etmektedir.

$$AF = \lambda F$$

olup A operatörü ile (5.1.1) - (5.1.4) probleminin özdeğerlerinin aynı olduğu açıktır.

5.3. Özdeğer ve Özfonksiyonlar için Bazı Basit Özellikler

5.3.1. Teorem: $H = L_2([a, b]) \oplus \mathbb{C}^2$ uzayında (5.2.2)-(5.2.3) eşitlikleri ile tanımlı A operatörü simetriktir.

İspat: Keyfi $F = \begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} g(x) \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in D(A)$ alalım. (5.2.1) deki iç çarpımı

kullanırsak

$$\begin{aligned} \langle AF, G \rangle &= \int_a^\xi (-f''(x) + q(x)f(x)) \overline{g(x)} dx \\ &\quad + \frac{1}{\delta} \int_\xi^b (-f''(x) + q(x)f(x)) \overline{g(x)} dx \\ &\quad - \frac{1}{\rho_1} R_1(f) \overline{R_1'(g)} - \frac{1}{\rho_2 \delta} R_2(f) \overline{R_2'(g)} \end{aligned}$$

olur. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının wronskiyanini

$$W(f, g; x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$$

şeklinde gösterir ve iki defa kısmi integral uygularsak

$$\begin{aligned}
\langle AF, G \rangle &= W(f, \bar{g}; \xi - 0) - W(f, \bar{g}; a) + \frac{1}{\delta} W(f, \bar{g}; b) - \frac{1}{\delta} W(f, \bar{g}; \xi + 0) \\
&\quad - \int_a^\xi f(x) \overline{g''(x)} dx - \frac{1}{\delta} \int_a^\xi f(x) \overline{g''(x)} dx + \int_a^\xi f(x) q(x) \overline{g(x)} dx \\
&\quad + \frac{1}{\delta} \int_a^\xi f(x) q(x) \overline{g(x)} dx - \frac{1}{\rho_1} R_1(f) \overline{R_1'(g)} - \frac{1}{\rho_2 \delta} R_2(f) \overline{R_2'(g)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (5.2.1) deki iç çarpımdan

$$\begin{aligned}
\langle F, AG \rangle &= - \int_a^\xi f(x) \overline{g''(x)} dx + \int_a^\xi f(x) q(x) \overline{g(x)} dx - \frac{1}{\delta} \int_a^\xi f(x) \overline{g''(x)} dx \\
&\quad + \frac{1}{\delta} \int_a^\xi f(x) q(x) \overline{g(x)} dx - \frac{1}{\rho_1} R_1'(f) \overline{R_1(g)} - \frac{1}{\rho_2 \delta} R_2'(f) \overline{R_2(g)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\langle AF, G \rangle - \langle F, AG \rangle &= W(f, \bar{g}; \xi - 0) - W(f, \bar{g}; a) + \frac{1}{\delta} W(f, \bar{g}; b) \\
&\quad - \frac{1}{\delta} W(f, \bar{g}; \xi + 0) + \frac{1}{\rho_1} \left(R_1'(f) \overline{R_1(g)} - R_1(f) \overline{R_1'(g)} \right) \quad (5.3.1) \\
&\quad + \frac{1}{\rho_2 \delta} \left(R_2'(f) \overline{R_2(g)} - R_2(f) \overline{R_2'(g)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.1.4) geçiş şartlarından

$$W(f, \bar{g}; \xi + 0) = \delta W(f, \bar{g}; \xi - 0) \quad (5.3.2)$$

ve

$$R_1'(f) \overline{R_1(g)} - R_1(f) \overline{R_1'(g)} = \rho_1 W(f, \bar{g}; a) \quad (5.3.3)$$

$$R_2'(f) \overline{R_2(g)} - R_2(f) \overline{R_2'(g)} = -\rho_2 W(f, \bar{g}; b) \quad (5.3.4)$$

bulunur. (5.3.2) ,(5.3.3) ve (5.3.4.) eşitlikleri (5.3.1) de kullanılırsa

$$\langle AF, G \rangle = \langle F, AG \rangle, (F, G \in D(A))$$

elde edilir. Böylece A operatörünün simetrik olduğu gösterilmiş olur.

5.3.1. Sonuç: (5.1.1)-(5.1.4) probleminin bütün özdeğerleri reeldir.

İspat : λ bir özdeğer ve ϕ de bu özdeğere karşılık gelen özeleman olsun. A operatörü simetrik olduğundan

$$\langle A\phi, \phi \rangle = \langle \phi, A\phi \rangle$$

$$\langle \lambda\phi, \phi \rangle = \langle \phi, \lambda\phi \rangle$$

$$\lambda \langle \phi, \phi \rangle = \bar{\lambda} \langle \phi, \phi \rangle$$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \langle \phi, \phi \rangle = 0$$

ve $\langle \phi, \phi \rangle \neq 0$ olduğundan

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

bulunur. O halde bütün λ özdeğerleri reeldir.

5.3.2. Sonuç: A operatörünün farklı özdeğerlerine karşılık gelen özelemanları ortogonaldır.

İspat : A operatörünün λ_1 ve λ_2 gibi iki farklı özdeğerine karşılık gelen özelemanlar sırasıyla ϕ_1 ve ϕ_2 olsun. Buna göre

$$A\phi_1 = \lambda_1\phi_1, A\phi_2 = \lambda_2\phi_2$$

eşitlikleri sağlanır. A operatörünün simetrik olduğu kullanılırsa,

$$\langle A\phi_1, \phi_2 \rangle = \langle \phi_1, A\phi_2 \rangle$$

$$\langle \lambda_1\phi_1, \phi_2 \rangle = \langle \phi_1, \lambda_2\phi_2 \rangle$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \phi_1, \phi_2 \rangle = 0$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = 0$$

bulunur. Böylece ϕ_1 ve ϕ_2 özelemanlarının ortogonalliği gösterilmiş olur.

5.3.3. Sonuç: Verilmiş (5.1.1)-(5.1.4) probleminin iki farklı λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $u_1(x, \lambda)$ ve $u_2(x, \lambda)$ özfonksiyonları arasında

$$\begin{aligned} \int_a^\xi u_1(x) u_2(x) dx + \frac{1}{\delta} \int_\xi^b u_1(x) u_2(x) dx &= -\frac{1}{\rho_1} R_1'(u_1) R_1'(u_2) \\ &\quad - \frac{1}{\rho_2 \delta} R_2'(u_1) R_2'(u_2) \end{aligned}$$

bağıntısı vardır. Burada $U_1 = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ R_1'(u_1) \\ R_2'(u_1) \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} u_2(x) \\ R_1'(u_2) \\ R_2'(u_2) \end{pmatrix} \in D(A)$ dir.

$\phi_{1\lambda}(x) := \phi_1(x, \lambda)$ ile (5.1.1) denkleminin $[a, \xi]$ aralığındaki

$$\begin{pmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 + \lambda \alpha_2' \\ \alpha_1 + \lambda \alpha_1' \end{pmatrix}, \quad (5.3.5)$$

şartlarını sağlayan çözümünü, bu çözüme bağlı olarak $\phi_{2\lambda}(x) := \phi_2(x, \lambda)$ ile (5.1.1) denkleminin $[\xi, b]$ aralığındaki

$$\begin{pmatrix} u(\xi) \\ u'(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1\lambda}(\xi - 0) \\ \phi_{1\lambda}'(\xi - 0) \end{pmatrix} \quad (5.3.6)$$

şartlarını sağlayan çözümünü gösterelim. Böylece $\phi_\lambda(x) := \phi(x, \lambda)$ fonksiyonu

$$\phi_\lambda(x) = \begin{cases} \phi_{1\lambda}(x), & x \in [a, \xi] \\ \phi_{2\lambda}(x), & x \in (\xi, b] \end{cases}$$

olmak üzere (5.1.1) denkleminin $[a, \xi] \cup (\xi, b]$ aralığındaki (5.1.2) sınır şartı ile birlikte (5.1.4) geçiş şartlarını sağlayan çözümü olur.

Benzer şekilde (5.1.1) denkleminin $[\xi, b]$ aralığındaki

$$\begin{pmatrix} u(b) \\ u'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_4 + \lambda \alpha_4' \\ \alpha_3 + \lambda \alpha_3' \end{pmatrix} \quad (5.3.7)$$

şartlarını sağlayan çözümünü $\chi_{2\lambda}(x) := \chi_2(x, \lambda)$ ile, bu çözüme bağlı olarak (5.1.1) denkleminin $[a, \xi]$ aralığındaki

$$\begin{pmatrix} u(\xi) \\ u'(\xi) \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \beta_2' & -\beta_2 \\ -\beta_1' & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{2\lambda}(\xi + 0) \\ \chi_{2\lambda}'(\xi + 0) \end{pmatrix} \quad (5.3.8)$$

şartlarını sağlayan çözümünü ise $\chi_{1\lambda}(x) := \chi_1(x, \lambda)$ ile gösterelim. Böylece $\chi_\lambda(x) = \chi(x, \lambda)$ fonksiyonu

$$\chi_\lambda(x) = \begin{cases} \chi_{1\lambda}(x), & x \in [a, \xi] \\ \chi_{2\lambda}(x), & x \in (\xi, b] \end{cases}$$

olmak üzere (5.1.1) denkleminin $[a, \xi] \cup (\xi, b]$ aralığındaki (5.1.3) sınır şartı ile birlikte (5.1.4) geçiş şartlarını da sağlayan çözümü olur.

5.3.1. Lemma: $x \in [a, \xi] \cup (\xi, b]$ için $\phi_{j\lambda}(x)$ ve $\chi_{j\lambda}(x)$ ($j = 1, 2$) fonksiyonlarının wronskiyeni x değişkeninden bağımsızdır.

İspat:

$$W(\phi_{j\lambda}, \chi_{j\lambda}; x) := \phi_{j\lambda}(x) \chi'_{j\lambda}(x) - \phi'_{j\lambda}(x) \chi_{j\lambda}(x)$$

eşitliğinde türev alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W(\phi_{j\lambda}, \chi_{j\lambda}; x) &= \phi'_{j\lambda}(x) \chi'_{j\lambda}(x) + \phi_{j\lambda}(x) \chi''_{j\lambda}(x) \\ &\quad - \phi''_{j\lambda}(x) \chi_{j\lambda}(x) - \phi'_{j\lambda}(x) \chi'_{j\lambda}(x) \\ &= \phi_{j\lambda}(x) \chi''_{j\lambda}(x) - \phi''_{j\lambda}(x) \chi_{j\lambda}(x) \end{aligned}$$

ve $\phi_{j\lambda}(x)$ ve $\chi_{j\lambda}(x)$ fonksiyonlarının (5.1.1) denkleminin çözümü olduğu kullanılırsa

$$\frac{d}{dx} W(\phi_{j\lambda}, \chi_{j\lambda}; x) = 0$$

elde edilir. Buda bize $\phi_{j\lambda}(x)$ ve $\chi_{j\lambda}(x)$ fonksiyonlarının wronskiyeininin x değişkeninden bağımsız olduğunu verir.

Buna göre

$$\omega_j(\lambda) = W(\phi_{j\lambda}, \chi_{j\lambda}; x) := \phi_{j\lambda}(x) \chi'_{j\lambda}(x) - \phi'_{j\lambda}(x) \chi_{j\lambda}(x)$$

şeklinde gösterilebilir.

5.3.2. Lemma: Her bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\delta\omega_1(\lambda) = \omega_2(\lambda)$ dır.

İspat: (5.3.6) ve (5.3.8) eşitlikleri dikkate alınırsa

$$W(\phi_{1\lambda}, \chi_{1\lambda}; \xi - 0) = \frac{1}{\delta} W(\phi_{2\lambda}, \chi_{2\lambda}; \xi + 0)$$

elde edilir. Buradan da $\delta\omega_1(\lambda) = \omega_2(\lambda)$ bulunur.

Buna göre $\omega(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunu

$$\omega(\lambda) = \delta\omega_1(\lambda) = \omega_2(\lambda)$$

şeklinde göstereceğiz.

5.3.2. Teorem: Verilmiş olan (5.1.1)-(5.1.4) sınır değer probleminin özdeğerleri ancak ve ancak $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinden ibarettir.

İspat: Kabul edelim ki $\lambda_0, \omega(\lambda)$ nın sıfır yeri olsun. Bu taktirde $\omega_j(\lambda_0) = 0$ olur. Buradan ise $\phi_{j\lambda_0}(x)$ ve $\chi_{j\lambda_0}(x)$ çözümleri lineer bağımlı olur. Yani

$$\phi_{j\lambda_0}(x) = k_j \chi_{j\lambda_0}(x) \quad (5.3.9)$$

olacak şekilde $k_j \neq 0$ sabit sayısı bulunur.

$\chi_{j\lambda_0}(x)$ fonksiyonu (5.1.1) denkleminin (5.1.3) sınır şartını ve geçiş şartlarını sağladığı gibi aynı zamanda (5.3.9) gereği (5.1.2) sınır şartını da sağlar. Buna göre $\chi_{\lambda_0}(x)$, (5.1.1)-(5.1.4) sınır değer probleminin çözümü olur. Yani $\lambda = \lambda_0$ bir özdeğerdir.

Şimdi bunun tersinin de doğru olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\lambda = \lambda_0$ özdeğeri için $\omega_j(\lambda_0) \neq 0$ olsun. Bu taktirde (ϕ_1, χ_1) ve (ϕ_2, χ_2) fonksiyonları lineer bağımsızdırlar. Bu yüzden $u_0(x)$ özfonksiyonu

$$u_0(x) = \begin{cases} c_1 \phi_1(x, \lambda_0) + c_2 \chi_1(x, \lambda_0), & x \in [a, \xi) \\ c_3 \phi_2(x, \lambda_0) + c_4 \chi_2(x, \lambda_0), & x \in (\xi, b] \end{cases}$$

formunda yazılabilir. Burada c_i ($i = \overline{1, 4}$) katsayılarından en az biri sıfırdan farklı olan sabitlerdir. Diğer taraftan $u_0(x)$ özfonksiyon olduğundan

$$L_i(U_0(x)) = 0, (i = \overline{1,3}) \quad (5.3.10)$$

eşitlikleri sağlanır.

$$(5.1.2) \text{ sınır şartı gereği } L_1(U_0(x)) = 0$$

$$\lambda(\alpha_1' U_0(a) - \alpha_2' U_0'(a)) + \alpha_1 U_0(a) - \alpha_2 U_0'(a) = 0$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$c_1 \{ \phi_{1\lambda_0}(a)(\alpha_1 + \lambda\alpha_1') - \phi_{1\lambda_0}'(a)(\alpha_2 + \lambda\alpha_2') \} + c_2 \{ \chi_{1\lambda_0}(a)(\alpha_1 + \lambda\alpha_1') - \chi_{1\lambda_0}'(a)(\alpha_2 + \lambda\alpha_2') \} = 0$$

eşitliği elde edilir. $\phi_{1\lambda_0}(x)$ çözüm fonksiyonunun (5.3.5) şartlarını sağladığı dikkate alınır

$$c_2 (\phi_{1\lambda_0}'(a) \chi_{1\lambda_0}(a) - \phi_{1\lambda_0}(a) \chi_{1\lambda_0}'(a)) = 0$$

olur. Buradan

$$c_2 \omega_1(\lambda_0) = 0 \quad (5.3.11)$$

elde edilir. Diğer taraftan (5.1.4) geçiş şartları gereği $L_3(U_0(x)) = 0$

$$\begin{pmatrix} U_0(\xi) \\ U_0'(\xi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0(\xi-0) \\ U_0'(\xi-0) \end{pmatrix} = 0$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} & c_1 \{ -\beta_1 \phi_{1\lambda_0}(\xi-0) - \beta_2 \phi_{1\lambda_0}'(\xi-0) \} + c_2 \{ -\beta_1 \chi_{1\lambda_0}(\xi-0) - \beta_2 \chi_{1\lambda_0}'(\xi-0) \} \\ & + c_3 \phi_{2\lambda_0}(\xi+0) + c_4 \chi_{2\lambda_0}(\xi+0) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

ve

$$\begin{aligned}
& c_1 \left\{ -\beta_1' \phi_{1\lambda_0}(\xi - 0) - \beta_2' \phi_{1\lambda_0}'(\xi - 0) \right\} + c_2 \left\{ -\beta_1' \chi_{1\lambda_0}(\xi - 0) - \beta_2' \chi_{1\lambda_0}'(\xi - 0) \right\} \\
& + c_3 \phi_{2\lambda_0}'(\xi + 0) + c_4 \chi_{2\lambda_0}'(\xi + 0) = 0
\end{aligned} \tag{5.3.13}$$

elde edilir. Diğer taraftan (5.1.3) sınır şartından $L_2(U_0(x)) = 0$

$$\lambda(\alpha_3' U_0(b) - \alpha_4' U_0'(b)) + \alpha_3 U_0(b) - \alpha_4 U_0'(b) = 0$$

eşitliği sağlanır. Buradan ise

$$c_3 \left\{ \phi_{2\lambda_0}(b)(\alpha_3 + \lambda \alpha_3') - \phi_{2\lambda_0}'(b)(\alpha_4 + \lambda \alpha_4') \right\} + c_4 \left\{ \chi_{2\lambda_0}(b)(\alpha_3 + \lambda \alpha_3') - \chi_{2\lambda_0}'(b)(\alpha_4 + \lambda \alpha_4') \right\} = 0$$

elde edilir. $\chi_{2\lambda_0}(x)$ fonksiyonunun (5.3.8) şartlarını sağladığı dikkate alınırsa

$$c_3 \left(\phi_{2\lambda_0}(b) \chi_{2\lambda_0}'(b) - \phi_{2\lambda_0}'(b) \chi_{2\lambda_0}(b) \right) = 0$$

olur. Buradan ise

$$c_3 \omega_2(\lambda_0) = 0 \tag{5.3.14}$$

elde edilir. Bu (5.3.11)-(5.3.14) eşitliklerine $c_i (i = \overline{1,4})$ değişkenlerine göre homojen lineer denklem sistemi olarak bakılırsa

$$\begin{vmatrix}
0 & \omega_1(\lambda_0) & 0 & 0 \\
-\beta_1 \phi_{1\lambda_0}(\xi - 0) - \beta_2 \phi_{1\lambda_0}'(\xi - 0) & -\beta_1 \chi_{1\lambda_0}(\xi - 0) - \beta_2 \chi_{1\lambda_0}'(\xi - 0) & \phi_{2\lambda_0}(\xi + 0) & \chi_{2\lambda_0}(\xi + 0) \\
-\beta_1' \phi_{1\lambda_0}(\xi - 0) - \beta_2' \phi_{1\lambda_0}'(\xi - 0) & -\beta_1' \chi_{1\lambda_0}(\xi - 0) - \beta_2' \chi_{1\lambda_0}'(\xi - 0) & \phi_{2\lambda_0}'(\xi + 0) & \chi_{2\lambda_0}'(\xi + 0) \\
0 & 0 & \omega_2(\lambda_0) & 0
\end{vmatrix}$$

$$= \omega_1(\lambda_0) \omega_2^2(\lambda_0) \neq 0$$

elde edilir ki bu denklem sisteminin sadece $c_i = 0$ ($i = \overline{1, 4}$) aşıkâr çözümü vardır. Bu çelişki ise ispatı tamamlar.

5.3.3. Lemma: $\lambda = \lambda_0$ özdeğer ise $\phi(x, \lambda_0)$ ve $\chi(x, \lambda_0)$ çözümleri lineer bağımlıdır.

İspat: $\lambda = \lambda_0$ özdeğer olsun. 5.3.2. Teoreminden

$$W(\phi_{j\lambda_0}, \chi_{j\lambda_0}; x) = \omega_j(\lambda_0) = 0$$

olur ve buradan

$$\chi_{j\lambda_0}(x) = k_j \phi_{j\lambda_0}(x) \quad (j = 1, 2) \quad (5.3.15)$$

$k_1 \neq 0$ ve $k_2 \neq 0$ dır. $k_1 = k_2$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $k_1 \neq k_2$ olsun.

$\phi_j(x, \lambda)$ ve $\chi_j(x, \lambda)$ çözümlerini ve (5.3.15) eşitliğini dikkate alarak

$$\begin{aligned} L_3(\chi_{\lambda_0}) &= \chi_{\lambda_0}(\xi + 0) - \beta_1 \chi_{\lambda_0}(\xi - 0) - \beta_2 \chi'_{\lambda_0}(\xi - 0) \\ &= \chi_{2\lambda_0}(\xi) - \beta_1 \chi_{1\lambda_0}(\xi) - \beta_2 \chi'_{1\lambda_0}(\xi) \\ &= k_2 \phi_{2\lambda_0}(\xi) - \beta_1 k_1 \phi_{1\lambda_0}(\xi) - \beta_2 k_1 \phi'_{1\lambda_0}(\xi) \\ &= k_2 \phi_{2\lambda_0}(\xi) - k_1 (\beta_1 \phi_{1\lambda_0}(\xi) + \beta_2 \phi'_{1\lambda_0}(\xi)) \\ &= (k_2 - k_1) \phi_{2\lambda_0}(\xi) \end{aligned}$$

elde edilir. $L_3(\chi_{\lambda_0}) = 0$ ve $(k_2 - k_1) \neq 0$ olduğundan

$$\phi_{2\lambda_0}(\xi) = 0. \quad (5.3.16)$$

bulunur. Benzer şekilde yine $L_3(\chi_{\lambda_0}) = 0$ olduğundan

$$\phi'_{2\lambda_0}(\xi) = 0 \quad (5.3.17)$$

elde edilir. $\phi_{2\lambda_0}(x)$, (5.1.1) denkleminin $[\xi, b]$ deki çözümü olduğundan ve (5.3.16) ve (5.3.17) eşitliklerinden $[\xi, b]$ aralığında $\phi_{2\lambda}(x) = 0$ olur (Alışılmış lineer diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemleri için iyi bilinen varlık ve teklik teoreminden dolayı).

(5.3.6), (5.3.16) ve (5.3.17) eşitliklerinden dolayı

$$\phi_{1\lambda_0}(\xi) = \phi'_{1\lambda_0}(\xi) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde $[a, \xi]$ aralığında $\phi_{1\lambda_0}(x) = 0$ bulunur. Buradan $[a, \xi) \cup (\xi, b]$ de $\phi(x, \lambda_0) = 0$ olur. Bu ise λ_0 in özdeğer olması ile çelişir ve ispat tamamlanmış olur.

5.3.4. Lemma: Bütün λ_n özdeğerleri $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun basit sıfır yerleridir.

İspat: Lagrange formülü kullanılarak her λ için

$$(\lambda - \lambda_n) \left(\int_a^b \phi_\lambda(x) \phi_{\lambda_n}(x) dx \right) = W(\phi_\lambda, \phi_{\lambda_n}; b) \quad (5.3.18)$$

yazılabilir. $k_n \neq 0, n = 1, 2, \dots$ için $\chi_{\lambda_n}(x) = k_n \phi_{\lambda_n}(x)$ ($x \in [a, \xi) \cup (\xi, b]$) eşitliği (2.3.18) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} W(\phi_\lambda, \phi_{\lambda_n}; b) &= \frac{1}{k_n} W(\phi_\lambda, \chi_{\lambda_n}; b) \\ &= \frac{1}{k_n} (\lambda_n R'_2(\phi_\lambda) + R_2(\phi_\lambda)) \\ &= \frac{1}{k_n} [\omega(\lambda) - (\lambda - \lambda_n) R'_2(\phi_\lambda)] \\ &= (\lambda - \lambda_n) \frac{1}{k_n} \left[\frac{\omega(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} - R'_2(\phi_\lambda) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik (5.3.18) de kullanılırsa ve $\lambda \rightarrow \lambda_n$ için

$$\int_a^b (\phi_{\lambda_n}(x))^2 dx = \frac{1}{k_n} (\omega'(\lambda_n) - R_2'(\phi_{\lambda_n})) \quad (5.3.19)$$

olur. $R_2'(\phi_{\lambda_n}) = \frac{1}{k_n} R_2'(\chi_{\lambda_n}) = \frac{\rho_2}{k_n}$ eşitliği (5.3.19) de yazılırsa $\omega'(\lambda_n) \neq 0$ bulunur.

5.4. $\omega(\lambda)$ İçin Asimptotik Açılımlar

5.4.1. Lemma: $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$ olmak üzere (2.1.1) denkleminin $\phi_{j\lambda}(x) = \phi_j(x, \lambda)$ ($j=1,2$) çözümü için aşağıdaki integral denklemleri $k=0$ ve $k=1$ için geçerlidir :

$$\begin{aligned} \phi_{1\lambda}^{(k)}(x) &= (\alpha_2 + \lambda \alpha_2') (\cos s(x-a))^{(k)} + \frac{1}{s} (\alpha_1 + \lambda \alpha_1') (\sin s(x-a))^{(k)} \\ &+ \frac{1}{s} \int_a^x (\sin s(x-y))^{(k)} q(y) \phi_{1\lambda}(y) dy \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2\lambda}^{(k)}(x) &= (\beta_1 \phi_{1\lambda}(\xi-0) + \beta_2 \phi_{1\lambda}'(\xi-0)) (\cos s(x-\xi))^{(k)} \\ &+ \frac{1}{s} (\beta_1' \phi_{1\lambda}(\xi-0) + \beta_2' \phi_{1\lambda}'(\xi-0)) (\sin s(x-\xi))^{(k)} \\ &+ \frac{1}{s} \int_{\xi}^x (\sin s(x-y))^{(k)} q(y) \phi_{2\lambda}(y) dy \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

İspat : (5.1.1) diferansiyel denklemini

$$u'' + s^2 u = q(x)u \quad (5.4.3)$$

şeklinde yazalım. Bu denkleme homojen olmayan diferansiyel denklem gözü ile

bakarak sabitin deęiřimi yöntemiyle çözümünü bulalım.

$$u'' + s^2 u = 0$$

denkleminin genel çözümü

$$u(x, s) = C_1(s) \cos sx + C_2(s) \sin sx$$

şeklindedir. Buna göre (5.4.3) denkleminin genel çözümünü

$$u(x, s) = C_1(x, s) \cos sx + C_2(x, s) \sin sx \quad (5.4.4)$$

şeklinde arayacağız. O halde $C_1(x, s), C_2(x, s)$ fonksiyonlarını öyle seçelim ki

$$C_1'(x, s) \cos sx + C_2'(x, s) \sin sx = 0$$

$$-sC_1'(x, s) \sin sx + sC_2'(x, s) \cos sx = q(x)u(x, s)$$

denklem sistemi sağlansın. Bu denklem sisteminden

$$C_1'(x, s) = -\frac{1}{s} q(x) u(x, s) \sin sx \quad (5.4.5)$$

$$C_2'(x, s) = \frac{1}{s} q(x) u(x, s) \cos sx \quad (5.4.6)$$

elde edilir. Buradan

$$C_1(x, s) = -\frac{1}{s} \int_{\xi}^x \sin(sy) q(y) u(y, s) dy + C_1$$

$$C_2(x, s) = \frac{1}{s} \int_{\xi}^x \cos(sy) q(y) u(y, s) dy + C_2$$

bulunur. Bu ifadeleri (5.4.4) de yerine yazarsak

$$u(x, s) = C_1 \cos sx + C_2 \sin sx + \frac{1}{s} \int_{\xi}^x \sin s(x-y) q(y) u(y, s) dy \quad (5.4.7)$$

olur. Burada (5.3.6) şartlarını göz önünde bulundurursak

$$\begin{aligned} C_1 &= \cos(s\xi) (\beta_1 \phi_{1\lambda}(\xi - 0) + \beta_2 \phi'_{1\lambda}(\xi - 0)) \\ &\quad - \frac{1}{s} \sin(s\xi) (\beta'_1 \phi_{1\lambda}(\xi - 0) + \beta'_2 \phi'_{1\lambda}(\xi - 0)) \\ C_2 &= \frac{1}{s} \cos(s\xi) (\beta'_1 \phi_{1\lambda}(\xi - 0) + \beta'_2 \phi'_{1\lambda}(\xi - 0)) \\ &\quad + \sin(s\xi) (\beta_1 \phi_{1\lambda}(\xi - 0) + \beta_2 \phi'_{1\lambda}(\xi - 0)) \end{aligned}$$

olarak buluruz. Bulduğumuz bu değerleri (5.4.7) de yerine yazıp uygun trigonometrik özdeşlikleri kullanırsak

$$\begin{aligned} u(x, s) &= (\beta_1 \phi_{1\lambda}(\xi - 0) + \beta_2 \phi'_{1\lambda}(\xi - 0)) \cos s(x - \xi) \\ &\quad + \frac{1}{s} (\beta'_1 \phi_{1\lambda}(\xi - 0) + \beta'_2 \phi'_{1\lambda}(\xi - 0)) \sin s(x - \xi) \\ &\quad + \frac{1}{s} \int_{\xi}^x \sin s(x-y) q(y) u(y, s) dy \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

ifadesini elde ederiz. (5.1.1) denleminin (5.3.6) şartlarını sağlayan çözümünü $\phi_{2\lambda}(x)$ ile gösterdiğimizden (5.4.8) ifadesinde $u(x, s)$ yerine $\phi_{2\lambda}(x)$ yazarsak, $\phi_{2\lambda}(x)$ için

$$\begin{aligned}
\phi_{2\lambda}(x) &= (\beta_1 \phi_{1\lambda}(\xi - 0) + \beta_2 \phi'_{1\lambda}(\xi - 0)) \cos s(x - \xi) \\
&+ \frac{1}{s} (\beta_1 \phi'_{1\lambda}(\xi - 0) + \beta_2 \phi''_{1\lambda}(\xi - 0)) \sin s(x - \xi) \\
&+ \frac{1}{s} \int_{\xi}^x \sin s(x - y) q(y) \phi_{2\lambda}(y) dy
\end{aligned}$$

integral denklemini elde etmiş oluruz. Benzer şekilde $\phi_{1\lambda}(x)$ eşitliği de hesaplanır. Elde edilen eşitliklerde x değişkenine göre türev alınırsa türev denklemleri de elde edilir.

5.4.2. Lemma: Kabul edelim ki $\lambda = s^2, s = \sigma + it$ olsun. $x \in [a, \xi) \cup (\xi, b]$ ve $|\lambda| \rightarrow \infty$ olduğunda $\phi_{j\lambda}(x) (j=1,2)$ fonksiyonları için aşağıdaki asimptotik ifadeler geçerlidir ($k=0$ ve $k=1$ için)

$\alpha'_2 \neq 0$ için

$$\phi_{1\lambda}^{(k)}(x) = s^2 \alpha'_2 (\cos s(x - a))^{(k)} + O(|s|^{k+1} e^{t|(x-a)|}) \quad (5.4.9)$$

$$\phi_{2\lambda}^{(k)}(x) = -s^3 \alpha'_2 \beta_2 \sin s(\xi - a) (\cos s(x - \xi))^{(k)} + O(|s|^{k+2} e^{t|(x-a)|}) \quad (5.4.10)$$

$\alpha'_2 = 0$ için

$$\phi_{1\lambda}^{(k)}(x) = -s \alpha'_1 (\sin s(x - a))^{(k)} + O(|s|^k e^{t|(x-a)|}) \quad (5.4.11)$$

$$\phi_{2\lambda}^{(k)}(x) = s^2 \alpha'_1 \beta_2 \cos s(\xi - a) (\cos s(x - \xi))^{(k)} + O(|s|^{k+1} e^{t|(x-a)|}) \quad (5.4.12)$$

İspat : $\alpha'_2 \neq 0$ olsun.(5.4.1) ifadesini

$$\begin{aligned}
\phi_{1\lambda}(x) &= s^2 \alpha_2' \cos s(x-a) + \alpha_2 \cos s(x-a) + s \alpha_1' \sin s(x-a) \\
&+ \frac{1}{s} \alpha_1 \sin s(x-a) + \frac{1}{s} \int_a^x \sin s(x-y) q(y) \phi_{1\lambda}(y) dy
\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

şeklinde yazalım. $F_{1\lambda}(x) = s^{-2} e^{-|t|(x-a)} \phi_{1\lambda}(x)$ dersek

$$\begin{aligned}
F_{1\lambda}(x) &= e^{-|t|(x-a)} \alpha_2' \cos s(x-a) + \frac{\alpha_2}{s^2} e^{-|t|(x-a)} \cos s(x-a) \\
&+ \frac{\alpha_1'}{s} e^{-|t|(x-a)} \sin s(x-a) + e^{-|t|(x-a)} \frac{1}{s^3} \alpha_1 \sin s(x-a) \\
&+ \frac{1}{s} \int_a^x \sin s(x-y) e^{-|t|(x-y)} q(y) F_{1\lambda}(y) dy
\end{aligned}$$

olur. Her λ için sonlu $F_1(\xi \pm 0, \lambda)$ limiti bulunduğundan

$$\mu_1(\lambda) = \sup_{x \in [a, \xi)} |F_{1\lambda}(x)| < \infty$$

olur. O halde sonuncu eşitlikten

$$\mu_1(\lambda) \leq \frac{\left| \alpha_2' \right| + \frac{\left| \alpha_2 \right|}{\left| s \right|^2} + \frac{\left| \alpha_1' \right|}{\left| s \right|} + \frac{\left| \alpha_1 \right|}{\left| s \right|^3}}{1 - \frac{1}{\left| s \right|} \int_a^\xi |q(y)| dy}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $\mu_{1\lambda}(x) = O(1) \quad |\lambda| \rightarrow \infty$ asimptotiği, dolayısıyla

$$\phi_{1\lambda}(x) = O\left(\left| s \right|^2 e^{|t|(x-a)}\right) \tag{5.4.14}$$

asimptotik ifadesini buluruz. Diğer taraftan $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ Euler formülünde

$z = s(x-a)$, $s = \sigma + it$ yazarsak

$$\begin{aligned} |\sin s(x-a)| &= \left| \frac{e^{i(s(x-a))} - e^{-i(s(x-a))}}{2i} \right| \\ &= \left| \frac{e^{-t(x-a)} e^{i(\sigma(x-a))} - e^{t(x-a)} e^{-i(\sigma(x-a))}}{2i} \right| \leq e^{t(x-a)} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$$\sin s(x-a) = O\left(e^{|t|(x-a)}\right) \quad (5.4.15)$$

ve benzer şekilde

$$\cos s(x-a) = O\left(e^{|t|(x-a)}\right) \quad (5.4.16)$$

olduğu görülür.(5.4.14) - (5.4.16) asimptotik ifadelerini (5.4.13) ifadesinde yerine yazarsak

$$\phi_{1\lambda}'(x) = s^2 \alpha_2' \cos s(x-a) + O\left(|s| e^{|t|(x-a)}\right)$$

asimptotik ifadesini elde etmiş oluruz.

Diğer taraftan $k=1$ için

$$\begin{aligned} \phi_{1\lambda}'(x) &= -s^3 \alpha_2' \sin s(x-a) - s \alpha_2 \sin s(x-a) + s^2 \alpha_1' \cos s(x-a) \\ &\quad + \alpha_1 \cos s(x-a) + \int_a^x \cos s(x-y) q(y) \phi_{1\lambda}(y) dy \end{aligned}$$

eşitliğinde (5.4.14)-(5.4.16) asimptotik ifadeleri yerine yazılırsa

$$\phi'_{1\lambda}(x) = -s^3 \alpha'_2 \sin s(x-a) + O(|s|^2 e^{l(x-a)})$$

asimptotik ifadesini elde etmiş oluruz.

Benzer şekilde yine $\alpha'_2 \neq 0$ olsun.

$$\begin{aligned} \phi_{2\lambda}(x) &= (\beta_1 \phi_{1\lambda}(\xi - 0) + \beta_2 \phi'_{1\lambda}(\xi - 0)) \cos s(x - \xi) \\ &+ \frac{1}{s} (\beta'_1 \phi_{1\lambda}(\xi - 0) + \beta'_2 \phi'_{1\lambda}(\xi - 0)) \sin s(x - \xi) \\ &+ \frac{1}{s} \int_{\xi}^x \sin s(x - y) q(y) \phi_{2\lambda}(y) dy \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

olup (5.4.9) dan elde edilen

$$\phi_{1\lambda}(\xi) = s^2 \alpha'_2 \cos s(\xi - a) + O(|s| e^{l(\xi - a)}) \quad (5.4.18)$$

$$\phi'_{1\lambda}(\xi) = -s^3 \alpha'_2 \sin s(\xi - a) + O(|s|^2 e^{l(\xi - a)}) \quad (5.4.19)$$

ifadelerini (5.4.17) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \phi_{2\lambda}(x) &= s^2 \beta_1 \alpha'_2 \cos s(x - \xi) \cos s(\xi - a) - s^3 \beta_2 \alpha'_2 \cos s(x - \xi) \sin s(\xi - a) \\ &+ s \beta'_1 \alpha'_2 \sin s(x - \xi) \cos s(\xi - a) - s^2 \beta'_2 \alpha'_2 \sin s(x - \xi) \sin s(\xi - a) \\ &+ \frac{1}{s} \int_{\xi}^x \sin s(x - y) q(y) \phi_{2\lambda}(y) dy + O(|s|^{-1} e^{l(x-a)}) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $F_{2\lambda}(x) = s^{-3} e^{-l(x-a)} \phi_{2\lambda}(x)$ dersek ve $\mu_2(\lambda) = \sup_{x \in (\xi, b]} |F_{2\lambda}(x)| < \infty$ için

$$\mu_2(\lambda) \leq \frac{\frac{|\beta_1 \alpha_2'|}{|s|} + |\alpha_2' \beta_2| + \frac{|\alpha_2' \beta_1'|}{|s|^2} + \frac{|\beta_2' \alpha_2'|}{|s|}}{1 - \frac{1}{|s|} \int_{\xi}^b |q(y)| dy}$$

olup buradan ise $\mu_2(\lambda) = O(1) |\lambda| \rightarrow \infty$ asimptotiği dolayısıyla

$$\phi_{2\lambda}(x) = O(|s|^3 e^{l(x-a)}) \quad (5.4.20)$$

asimptotiği bulunur. Bu ifadeyi (5.4.17) yerine yazarsak

$$\phi_{2\lambda}(x) = -s^3 \alpha_2' \beta_2 \sin s(\xi - a) \cos s(x - \xi) + O(|s|^2 e^{l(x-a)})$$

asimptotiği elde edilir. Diğer taraftan $k=1$ için

$$\begin{aligned} \phi_{2\lambda}'(x) &= -s^3 \beta_1 \alpha_2' \sin s(x - \xi) \cos s(\xi - a) \\ &\quad + s^4 \beta_2 \alpha_2' \sin s(x - \xi) \sin s(\xi - a) + s^2 \beta_1' \alpha_2' \cos s(x - \xi) \cos s(\xi - a) \\ &\quad - s^3 \beta_2' \alpha_2' \cos s(x - \xi) \sin s(\xi - a) + \int_{\xi}^x \sin s(x - y) q(y) \phi_{2\lambda}(y) dy \\ &\quad + O(|s| e^{l(x-a)}) \end{aligned}$$

eşitliğinde (5.4.15), (5.4.16) ve (5.4.20) asimptotik ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\phi_{2\lambda}'(x) = s^4 \beta_2 \alpha_2' \sin s(x - \xi) \sin s(\xi - a) + O(|s|^3 e^{l(x-a)})$$

asimptotik açılımı elde edilir.

Benzer olarak $\alpha_2' = 0$ için (5.4.11) ve (5.4.12) ifadelerinin doğruluğu gösterilebilir.

5.4.1. Teorem : Kabul edelim ki $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$ olsun. Bu taktirde $\omega(\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik ifadeler geçerlidir.

1. Durum : $\alpha'_4 \neq 0, \alpha'_2 \neq 0$ ise

$$\omega(\lambda) = -s^6 \alpha'_2 \beta_2 \alpha'_4 \sin s(\xi - a) \sin s(b - \xi) + O(|s|^5 e^{t|(b-a)|}) \quad (5.4.21)$$

2. Durum : $\alpha'_4 \neq 0, \alpha'_2 = 0$ ise

$$\omega(\lambda) = s^5 \beta_2 \alpha'_1 \alpha'_4 \cos s(\xi - a) \sin s(b - \xi) + O(|s|^4 e^{t|(b-a)|}) \quad (5.4.22)$$

3. Durum : $\alpha'_4 = 0, \alpha'_2 \neq 0$ ise

$$\omega(\lambda) = -s^5 \beta_2 \alpha'_2 \alpha'_3 \sin s(\xi - a) \cos s(b - \xi) + O(|s|^4 e^{t|(b-a)|}) \quad (5.4.23)$$

4. Durum : $\alpha'_4 = 0, \alpha'_2 = 0$ ise

$$\omega(\lambda) = s^4 \beta_2 \alpha'_1 \alpha'_3 \cos s(\xi - a) \cos s(b - \xi) + O(|s|^3 e^{t|(b-a)|}) \quad (5.4.24)$$

İspat : $\omega(\lambda) = \delta \omega_1(\lambda) = \omega_2(\lambda)$ olduğundan ve (5.3.7) eşitlikleri dikkate alındığında

$$\begin{aligned} \omega(\lambda) &= (\phi_{2\lambda}(b) \chi'_{2\lambda}(b) - \phi'_{2\lambda}(b) \chi_{2\lambda}(b)) \\ &= \lambda (\alpha'_3 \phi_{2\lambda}(b) - \alpha'_4 \phi'_{2\lambda}(b)) + (\alpha_3 \phi_{2\lambda}(b) - \alpha_4 \phi'_{2\lambda}(b)) \end{aligned} \quad (5.4.25)$$

elde edilir.

1. Durum : $\alpha'_4 \neq 0, \alpha'_2 \neq 0$ ise

(5.4.10) den $\alpha_2' \neq 0$ için

$$\begin{aligned}\phi_{2\lambda}(b) &= -s^3 \alpha_2' \beta_2 \sin s(\xi - a) \cos s(b - \xi) + O(|s|^2 e^{|t|(b-a)}) \\ \phi_{2\lambda}'(b) &= s^4 \alpha_2' \beta_2 \sin s(\xi - a) \sin s(b - \xi) + O(|s|^3 e^{|t|(b-a)})\end{aligned}\quad (5.4.26)$$

asimptotik açılımları elde edilir. Bu açılımları (5.4.25) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\omega(\lambda) &= -s^5 \alpha_2' \beta_2 \alpha_3' \sin s(\xi - a) \cos s(b - \xi) \\ &\quad - s^6 \alpha_2' \beta_2 \alpha_4' \sin s(\xi - a) \sin s(b - \xi) \\ &\quad - s^3 \alpha_2' \beta_2 \alpha_3' \sin s(\xi - a) \cos s(b - \xi) \\ &\quad - s^4 \alpha_2' \beta_2 \alpha_4' \sin s(\xi - a) \sin s(b - \xi) + O(|s|^3 e^{|t|(b-a)}) \\ &= -s^6 \alpha_2' \beta_2 \alpha_4' \sin s(\xi - a) \sin s(b - \xi) + O(|s|^5 e^{|t|(b-a)})\end{aligned}$$

asimptotik açılımını elde ederiz.

2. Durum : $\alpha_4' \neq 0, \alpha_2' = 0$ ise

(5.4.12) den $\alpha_2' = 0$ için

$$\begin{aligned}\phi_{2\lambda}(b) &= s^2 \alpha_1' \beta_2 \cos s(\xi - a) \cos s(b - \xi) + O(|s| e^{|t|(b-a)}) \\ \phi_{2\lambda}'(b) &= -s^3 \alpha_1' \beta_2 \cos s(\xi - a) \sin s(b - \xi) + O(|s|^2 e^{|t|(b-a)})\end{aligned}\quad (5.4.27)$$

asimptotik açılımları elde edilir. Bu açılımları (5.4.25) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\omega(\lambda) &= s^4 \alpha_1' \beta_2 \alpha_3' \cos s(\xi - a) \cos s(b - \xi) \\ &\quad + s^5 \alpha_1' \beta_2 \alpha_4' \cos s(\xi - a) \sin s(b - \xi) \\ &\quad + s^2 \alpha_1' \beta_2 \alpha_3' \cos s(\xi - a) \cos s(b - \xi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +s^3 \alpha_1' \beta_2 \alpha_4 \cos s(\xi - a) \sin s(b - \xi) + O\left(|s|^2 e^{t|(b-a)}\right) \\
& = s^5 \alpha_1' \beta_2 \alpha_4' \cos s(\xi - a) \sin s(b - \xi) + O\left(|s|^4 e^{t|(b-a)}\right)
\end{aligned}$$

asimptotik açılımını elde ederiz.

Benzer şekilde (5.4.26) ve (5.4.27) ifadelerini kullanarak (5.4.23) ve (5.4.24) ifadelerinin doğruluğu da gösterilebilir.

5.4.1. Sonuç : (5.1.1)-(5.1.5) probleminin özdeğerleri alttan sınırlıdır.

İspat : (5.4.15) formülünde $s = it$ ($t > 0$) yazılırsa $t \rightarrow \infty$ için $\omega(-t^2) \rightarrow \infty$ olur. Böylece negatif ve yeteri kadar büyük modül için $\omega(\lambda) \neq 0$ dır.

5.5. Özdeğerler için Asimptotik Açılımlar

Özdeğerler reel olmakla beraber alttan sınırlıdır. Ayrıca özdeğerler sonlu limit noktasına sahip olmadığından bu özdeğerler $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, şeklinde sıralanabilir ve n nin yeteri kadar büyük değerleri için $\lambda_n = s_n^2$ olarak gösterilebilir.

5.5.1. Teorem : (5.1.1)-(5.1.5) probleminin λ_n özdeğerleri için $n \rightarrow \infty$ olduğunda aşağıdaki asimptotik ifadeler geçerlidir.

1. Durum : $\alpha_4' \neq 0, \alpha_2' \neq 0$ ise

$$\begin{aligned}
s_n' &= \frac{\pi}{(b - \xi)}(n - 2) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
s_n'' &= \frac{\pi}{(\xi - a)}n + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{5.5.1}$$

2. Durum : $\alpha_4' \neq 0, \alpha_2' = 0$ ise

$$\begin{aligned}
s_n' &= \frac{\pi}{(b - \xi)}(n - 2) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
s_n'' &= \frac{\pi}{(\xi - a)}\left(n + \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{5.5.2}$$

3. Durum : $\alpha_4' = 0, \alpha_2' \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} s_n' &= \frac{\pi}{(b-\xi)} \left(n + \frac{1}{2} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ s_n'' &= \frac{\pi}{(\xi-a)} (n-2) + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (5.5.3)$$

4. Durum : $\alpha_4' = 0, \alpha_2' = 0$ ise

$$\begin{aligned} s_n' &= \frac{\pi}{(b-\xi)} \left(n - \frac{5}{2} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ s_n'' &= \frac{\pi}{(\xi-a)} \left(n + \frac{1}{2} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

İspat:

1.Durum : $\alpha_4' \neq 0, \alpha_2' \neq 0$ ise

(5.4.21) ifadesinin ilk terimini

$$\omega_1(\lambda) = -s^6 \alpha_2' \beta_2 \alpha_4' \sin s(\xi-a) \sin s(b-\xi)$$

ile ikinci terimini ise

$$\omega_2(\lambda) = O\left(|s|^5 e^{t(b-a)}\right)$$

ile gösterelim. Kompleks düzlemde

$$C_n' := \left\{ s' \in \mathbb{C} \mid |s'| = \frac{\pi}{(b-\xi)} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}$$

eğrisi üzerinde yeteri kadar büyük n değerleri için

$$|\omega_1(\lambda)| > |\omega_2(\lambda)|$$

olduğu görülür. Buna göre Rouché Teoremi gereği C'_n eğrisi içinde $\omega(\lambda) = \omega_1(\lambda) + \omega_2(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı $\omega_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısına eşittir. $\omega_1(\lambda)$ fonksiyonunun çift fonksiyon olduğunu ve $\lambda = s^2$ olduğunu dikkate alırsak bu fonksiyonun sadece pozitif reel yarım eksendeki sıfır yerlerini araştırmamız yeterlidir. Bu sıfır yerlerini $s_0, s_1, s_2, \dots$ şeklinde sıralarsak

$$s_k = \frac{(k-2)\pi}{(b-\xi)} \quad k=0,1,2,\dots \text{ olur. } C'_{n-1} \text{ ve } C'_n \text{ çemberleri ile sınırlı bölgeyi } D'_n \text{ ile}$$

$$\text{gösterirsek, } D'_n \text{ bölgesinde } \omega_1(\lambda) \text{ fonksiyonunun } s_{n+2} = \frac{n\pi}{(b-\xi)} \text{ ve } -s_{n+2} = -\frac{n\pi}{(b-\xi)}$$

şeklinde iki tane sıfır yeri bulunur. $\omega_1(\lambda)$ ve $\omega_2(\lambda)$ fonksiyonlarına Rouché Teoremini uygulayarak $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun pozitif reel eksenin D'_n bölgesinde kalan

$$\left(\frac{\pi}{(b-\xi)} \left(n - \frac{1}{2} \right), \frac{\pi}{(b-\xi)} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right)$$

aralığında tek bir tane sıfır yeri olduğunu elde etmiş oluruz. $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun reel eksenin pozitif kısmındaki sıfır yerlerini s'_n ile gösterirsek

$$s'_{n+2} \in \left(\frac{\pi}{(b-\xi)} \left(n - \frac{1}{2} \right), \frac{\pi}{(b-\xi)} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right)$$

olur. Buradan

$$\left| s'_{n+2} - \frac{n\pi}{(b-\xi)} \right| < \frac{\pi}{2(b-\xi)}$$

bulunur. Burada

$$\delta'_n = s'_n - \frac{\pi}{(b-\xi)}(n-2)$$

olarak gösterirsek

$$|\delta'_n| \leq \frac{\pi}{2(b-\xi)}$$

elde edilir.

$$\omega(s'_n) = 0 \quad \text{eşitliğinde} \quad s'_n = \frac{\pi}{(b-\xi)}(n-2) + \delta'_n \quad \text{ifadesi yazılırsa buradan}$$

$$\delta'_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ bulunur. Benzer şekilde } s''_n = \frac{\pi}{(\xi-a)}n + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ de bulunur. Böylece (5.5.1)}$$

ifadesi elde edilir.

2. Durum : $\alpha'_4 \neq 0, \alpha'_2 = 0$ ise

(5.4.22) ifadesinin ilk terimini

$$\omega_1(\lambda) = s^5 \alpha'_1 \beta'_2 \alpha'_4 \cos s(\xi-a) \sin s(b-\xi)$$

ile ikinci terimini ise

$$\omega_2(\lambda) = O\left(|s|^4 e^{\ell(b-a)}\right)$$

ile gösterelim. Kompleks düzlemde

$$C''_n := \left\{ s'' \in \mathbb{C} \mid |s''| = \frac{\pi}{(\xi-a)}(n+1) \right\}$$

eğrisi üzerinde yeteri kadar büyük n değerleri için

$$|\omega_1(\lambda)| > |\omega_2(\lambda)|$$

olduğu görülür. Buna göre Rouché Teoremi gereği C_n'' eğrisi içinde $\omega(\lambda) = \omega_1(\lambda) + \omega_2(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısı $\omega_1(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinin sayısına eşittir. $\omega_1(\lambda)$ fonksiyonunun çift fonksiyon olduğunu ve $\lambda = s^2$ olduğunu dikkate alırsak bu fonksiyonun sadece pozitif reel yarım eksenindeki sıfır yerlerini araştırmamız yeterlidir. Bu sıfır yerlerini $s_0, s_1, s_2, \dots$ şeklinde sıralarsak

$$s_k = \frac{\pi}{(\xi - a)} \left(k + \frac{1}{2} \right) \quad k=0,1,2,\dots \text{ olur. } C_{n-1}'' \text{ ve } C_n'' \text{ çemberleri ile sınırlı bölgeyi } D_n'' \text{ ile}$$

gösterirsek, D_n'' bölgesinde $\omega_1(\lambda)$ fonksiyonunun $s_{n+1} = \frac{\pi}{(\xi - a)} \left(n + \frac{3}{2} \right)$ ve

$$-s_{n+1} = -\frac{\pi}{(\xi - a)} \left(n + \frac{3}{2} \right) \text{ şeklinde iki tane sıfır yeri bulunur. } \omega_1(\lambda) \text{ ve } \omega_2(\lambda)$$

fonksiyonlarına Rouché Teoremini uygulayarak $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun pozitif reel eksenin D_n'' bölgesinde kalan

$$\left(\frac{\pi}{(\xi - a)} (n+1), \frac{\pi}{(\xi - a)} (n+2) \right)$$

aralığında tek bir tane sıfır yeri olduğunu elde etmiş oluruz. $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun reel eksenin pozitif kısmındaki sıfır yerlerini s_n'' ile gösterirsek

$$s_{n+1}'' \in \left(\frac{\pi}{(\xi - a)} (n+1), \frac{\pi}{(\xi - a)} (n+2) \right)$$

olur. Buradan

$$\left| s_{n+1}'' - \frac{\pi}{(\xi - a)} \left(n + \frac{3}{2} \right) \right| < \frac{\pi}{2(\xi - a)}$$

bulunur. Burada

$$\delta_n'' = s_n'' - \frac{\pi}{(\xi - a)} \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

olarak gösterirsek

$$|\delta_n''| \leq \frac{\pi}{2(\xi - a)}$$

elde edilir.

$$\omega(s_n'') = 0 \quad \text{eşitliğinde} \quad s_n'' = \frac{\pi}{(\xi - a)} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \delta_n'' \quad \text{ifadesi yazılırsa buradan}$$

$$\delta_n'' = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{bulunur. 1.durumdan} \quad s_n' = \frac{\pi}{(b - \xi)}(n - 2) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{de bulunmuştur. Böylece}$$

(5.5.2) ifadesi elde edildi.

Diğer durumlarda da benzer şekilde ispatlanır.

5.6. Özfonksiyonlar için Asimptotik Açılımlar

Bu dört durum altında elde ettiğimiz özdeğerlerin asimptotik formüllerine uygun özfonksiyonların asimptotik formüllerini hesaplayalım.

1.Durum : $\alpha_4' \neq 0, \alpha_2' \neq 0$ ise

(5.5.1) ifadesini (5.4.9) da yerine yazarsak

$$\phi_{1\lambda_n'}(x) = \alpha_2' \left(\frac{\pi}{(b - \xi)}(n - 2) \right)^2 \cos \left(\pi(n - 2) \frac{(x - a)}{(b - \xi)} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\phi_{1\lambda_n''}(x) = \alpha_2' \left(\frac{\pi}{(\xi - a)}n \right)^2 \cos \left(\pi n \frac{(x - a)}{(\xi - a)} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.5.1) ifadesini (5.4.10) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\phi_{2\lambda_n'}(x) = -\alpha_2' \beta_2 \left(\frac{\pi}{(b - \xi)}(n - 2) \right)^3 \sin \left(\pi(n - 2) \frac{(\xi - a)}{(b - \xi)} \right) \cos \left(\pi(n - 2) \frac{(x - \xi)}{(b - \xi)} \right) + O(1)$$

$$\phi_{2\lambda_n''}(x) = -\alpha_2' \beta_2 \left(\frac{\pi}{(\xi - a)}n \right)^3 \sin(\pi n) \cos \left(\pi n \frac{(x - \xi)}{(\xi - a)} \right) + O(1)$$

elde edilir. Buradan $\phi(x, \lambda_n')$ ve $\phi(x, \lambda_n'')$ özfonksiyonları için

$$\phi(x, \lambda_n') = \begin{cases} \alpha_2' \left(\frac{\pi}{(b-\xi)}(n-2) \right)^2 \cos \left(\pi(n-2) \frac{(x-a)}{(b-\xi)} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right), & x \in [a, \xi) \\ -\alpha_2' \beta_2 \left(\frac{\pi}{(b-\xi)}(n-2) \right)^3 \sin \left(\pi(n-2) \frac{(\xi-a)}{(b-\xi)} \right) \cos \left(\pi(n-2) \frac{(x-\xi)}{(b-\xi)} \right) \\ + O(1), & x \in (\xi, b] \end{cases}$$

$$\phi(x, \lambda_n'') = \begin{cases} \alpha_2' \left(\frac{\pi}{(\xi-a)}n \right)^2 \cos \left(\pi n \frac{(x-a)}{(\xi-a)} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right), & x \in [a, \xi) \\ -\alpha_2' \beta_2 \left(\frac{\pi}{(\xi-a)}n \right)^3 \sin(\pi n) \cos \left(\pi n \frac{(x-\xi)}{(\xi-a)} \right) + O(1), & x \in (\xi, b] \end{cases}$$

asimptotik açılımı elde edilir.

2.Durum: $\beta_2' \neq 0, \alpha_2 = 0$ ise

(5.5.2) ifadesini (5.4.11) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\phi_{1\lambda_n'}(x) = -\alpha_1' \left(\frac{\pi}{(b-\xi)}(n-2) \right) \sin \left(\pi(n-2) \frac{(x-a)}{(b-\xi)} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\phi_{1\lambda_n''}(x) = -\alpha_1' \left(\frac{\pi}{(\xi-a)} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \sin \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{(x-a)}{(\xi-a)} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.5.2) ifadesini (5.4.12) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\phi_{2\lambda_n'}(x) = \alpha_1' \beta_2 \left(\frac{\pi}{(b-\xi)}(n-2) \right)^2 \cos \left(\pi(n-2) \frac{(\xi-a)}{(b-\xi)} \right) \cos \left(\pi(n-2) \frac{(x-\xi)}{(b-\xi)} \right) \\ + O(1)$$

$$\phi_{2\lambda_n''}(x) = \alpha_1' \beta_2 \left(\frac{\pi}{(\xi-a)} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right)^2 \cos \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \cos \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{(x-\xi)}{(\xi-a)} \right) \\ + O(1)$$

elde edilir. Buradan $\phi(x, \lambda_n')$ ve $\phi(x, \lambda_n'')$ özfonksiyonları için

$$\phi(x, \lambda_n') = \begin{cases} -\alpha_1' \left(\frac{\pi}{(b-\xi)}(n-2) \right) \sin \left(\pi(n-2) \frac{(x-a)}{(b-\xi)} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right), & x \in [a, \xi) \\ \alpha_1' \beta_2 \left(\frac{\pi}{(b-\xi)}(n-2) \right)^2 \cos \left(\pi(n-2) \frac{(\xi-a)}{(b-\xi)} \right) \times \\ \times \cos \left(\pi(n-2) \frac{(x-\xi)}{(b-\xi)} \right) + O(1), & x \in (\xi, b] \end{cases}$$

$$\phi(x, \lambda_n'') = \begin{cases} -\alpha_1' \left(\frac{\pi}{(\xi-a)} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \sin \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{(x-a)}{(\xi-a)} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right), & x \in [a, \xi) \\ \alpha_1' \beta_2 \left(\frac{\pi}{(\xi-a)} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right)^2 \cos \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) \cos \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{(x-\xi)}{(\xi-a)} \right) \\ + O(1), & x \in (\xi, b] \end{cases}$$

asimptotik açılımı elde edilir.

Diğer durumlar için açılımlar aşağıdaki gibidir:

3.Durum: $\beta_2' = 0, \alpha_2 \neq 0$ ise

$$\phi(x, \lambda_n') = \begin{cases} \alpha_2' \left(\frac{\pi}{(b-\xi)} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right)^2 \cos \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{(x-a)}{(b-\xi)} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right), & x \in [a, \xi) \\ -\alpha_2' \beta_2 \left(\frac{\pi}{(b-\xi)} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right)^3 \sin \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{(\xi-a)}{(b-\xi)} \right) \cos \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{(x-\xi)}{(b-\xi)} \right) \\ + O(1), & x \in (\xi, b] \end{cases}$$

$$\phi\left(x, \lambda_n''\right)=\left\{\begin{array}{l} \alpha_2' \left(\frac{\pi}{(\xi-a)}(n-2)\right)^2 \cos\left(\pi(n-2)\frac{(x-a)}{(\xi-a)}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right), \quad x \in [a, \xi) \\ -\alpha_2' \beta_2 \left(\frac{\pi}{(\xi-a)}(n-2)\right)^3 \sin(\pi n) \cos\left(\pi(n-2)\frac{(x-\xi)}{(\xi-a)}\right) \\ +O(1), \quad x \in (\xi, b] \end{array}\right.$$

4.Durum: $\beta_2' = 0, \alpha_2 = 0$ ise

$$\phi\left(x, \lambda_n'\right)=\left\{\begin{array}{l} -\alpha_1' \left(\frac{\pi}{(b-\xi)}\left(n-\frac{5}{2}\right)\right) \sin\left(\pi\left(n-\frac{5}{2}\right)\frac{(x-a)}{(b-\xi)}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right), \quad x \in [a, \xi) \\ \alpha_1' \beta_2 \left(\frac{\pi}{(b-\xi)}\left(n-\frac{5}{2}\right)\right)^2 \cos\left(\pi\left(n-\frac{5}{2}\right)\frac{(\xi-a)}{(b-\xi)}\right) \times \\ \times \cos\left(\pi\left(n-\frac{5}{2}\right)\frac{(x-\xi)}{(b-\xi)}\right)+O(1), x \in (\xi, b] \end{array}\right.$$

$$\phi\left(x, \lambda_n''\right)=\left\{\begin{array}{l} -\frac{\alpha_1'(\xi-a)}{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)} \sin\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(x-a)}{(\xi-a)}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right), \quad x \in [a, \xi) \\ -\alpha_1 \beta_4 \cos\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{(x-\xi)}{(\xi-a)}\right)+O(1), \quad x \in (\xi, b] \end{array}\right.$$

6.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında diferansiyel denklemi Sturm-Liouville denklemine benzeyen bir sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik açılım formülleri araştırılmıştır.

Geliştirilen yöntemler ve bulunan sonuçlar bakımından çalışmamız süreksiz katsayılı regüler Sturm-Liouville teorisine önemli katkı sağlamaktadır.

Araştırdığımız sınır değer problemi diferansiyel denklemin süreksiz katsayılı olması, özdeğer parametrenin hem denklemde hemde her iki sınır koşulunda olması ve süreksiz olduğu noktada birleştirilmiş geçiş şartına sahip olması bakımından regüler sınır değer probleminden farklılıklar göstermektedir. Diferansiyel denklemin süreksiz olmasının doğal bir sonucu olarak sınır şartlarına ek olarak geçiş şartları eklenmiştir.

Bu çalışmada elde ettiğimiz bazı sonuçlar literatürde bilinen sonuçlarla çakışmaktadır. Örneğin; incelediğimiz problemde $\alpha'_i = 0 \ (i = \overline{1,4}), \beta_2 = \beta'_1 = 0, \beta_1 = \beta'_2 = 1$ ve $x \in [a, b]$ alınmasıyla klasik Sturm-Liouville problemi için bilinen sonuçlar ile, $\alpha'_1 = \alpha'_2 = 0, \beta_2 = \beta'_1 = 0$ ve $\beta_1 = \beta'_2 = 1$ olması durumunda ise C. T. Fulton'un [5] çalışmasındaki sonuçlar ile örtüşür.

Bu özel durumlarda bulunan uygun sonuçlar elde edilen sonuçlardan özel hal olarak elde edilemez.

Bu çalışmada araştırdığımız problemin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik açılımlarında ilk terimler elde edilmiştir. Ancak $q(x)$ katsayısı üzerine ek şartlar koymakla diğer terimler de edilebilir. İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin en yüksek türevinin katsayısı süreksiz bir fonksiyon alınabilir. Geçiş şartlarına da λ özdeğer parametresi ekleyerek sınır değer problemi geliştirilebilir. Araştırdığımız problemde elde edilen sonuçlara ek olarak problemin Green fonksiyonu ve Rezolventi için açılımlar özfonksiyonlar üzerine açılım teoremleri ile elde edilebilir.

7.KAYNAKLAR

- [1]. **Altınışik, N., 1998.** Sınır Şartlarında Özdeğer Parametre Bulunduran Süreksiz Katsayılı Sınır Değer Problemi, Doktora Tezi, Samsun.
- [2]. **Altınışik, N., Kadakal, M., Mukhtarov, O. Sh., 2004.** Eigenvalues and Eigenfunctions of Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Boundary Conditions, Acta Math Hungar, 102 (1-2), p. 159-174.
- [3]. **Birkhoff, G. D., 1908.** On the Asymptotic Character of the Solution of the Certain Linear Differential Equations Containing Parameter , Trans.Amer.Math. Soc., 9, p. 219-231.
- [4]. **Chanane, B., 2007.** Sturm-Liouville Problems with Impulse Effects , Math and Computation, p. 610-626.
- [5]. **Fulton, C.T., 1977.** Two Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Condition , Proc, Soc.Edinburg, 77A, P.293-308.
- [6]. **Hinton, D. B., 1979.** An Expansion Theorem for Eigenvalue Problem with Eigenvalue Boundary Condition , Quart. J. Math. Oxford (2),30,33-42.
- [7]. **Kang, Q., Zettl, A., 1996.** Eigenvalues of Regular Sturm-Liouville Problems , Journal of Differential Equations I, 131.
- [8]. **Kadakal, M., 2000.** Sınır Şartlarının Birinde Özdeğer Parametresi Bulunduran Regüler Sınır Değer-Geçiş Problemi , Doktora Tezi, Samsun.
- [9]. **Kerimov, N. B., Mamedov, Kh. K., 1999.** On a Boundary Value Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Conditions , Sibirsk. Math. J. 40, No:2, 281-290.
- [10]. **Kobayashi, M., 1989.** Eigenvalue of discontinuous Sturm-Liouville Problems with Symmetric Potentials, compiters Math aplic.Vol. 18, 357-364
Lang,S,1983 Real Analysis (Second edition), Addision-wesley, Reading Mass.

- [11]. **Mukhtarov, O. Sh., 1990.** Düzgün Fonksiyonların Geçiş Probleminin Özfonksiyonları ve Hesaplanış Fonksiyonları Üzerine Açılımı, Nekotorie Voprosi Teor. Nelin. Analiz. Vıp II, p. 103-115.
- [12]. **Mukhtarov, O. Sh., 1994.** Discontinuous Boundary Value Problems with Spectral Parameter in Boundary Condition , Tr, J. Math., 18, p. 183-192.
- [13]. **Mukhtarov, O. Sh., 1998.** Bir Geçiş Probleminin Bazı Spektral Özellikleri , Viniti, No.1773 (Moskow).
- [14]. **Naimark, M.A., 1967.** *Linear Differential Operators* , Ungar, New York.
- [15]. **Russakoskiy, E.M., 1975.** Sınır Şartlarında Özdeğer Parametresinden Polinomal Şeklinde Bağımlı olan Sınır Değer Probleminin Operatör Yorumu.Funk. Analizi Eko Pri loj. 9 No:4, 91-92 (Rusça).
- [16]. **Schneider, A., 1974.** A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions . Math.Z. 156,163-167.
- [17]. **Shkalikov, A. A., 1983.** Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with a Parameter in Boundary Condition , Trudy., Sem., Imeny, I. G. Petrovsgo, 9, 190-229.
- [18]. **Tamarkin, J.D., 1928.** Some General Problems of the Theory of Ordinary Linear Differential Equations and Expansions of an Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions . Math. Z.,1-54,27.
- [19]. **Titchmarsh, E. C., 1939.** *Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations I* , 2nd end, Oxford Univ. Press London.
- [20]. **Tunç, E. 2001.** Bir Adi Diferansiyel Operatörün Bazı Spektral Özellikleri , Doktora Tezi, Samsun.
- [21]. **Walter, J., 1973.** Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions , Math. Z. 133,301-312.
- [22]. **Yakubov, S.Y., 1994.** Completeness of Root Functions of Regular Boundary Value Problems, Longman, Scientific, Technical.
- [23]. **Zayed, E.M.E., Ibrahim, S.F.M., 1992.** Regular Eigenvalue Problem with Eigenparameter in the Boundary Conditions, Bull. Cal. Math. Soc. 84,379-393.

8. ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Trabzon ilinin Çaykara ilçesinde doğdum. İlk öğrenimimi ve lise öğrenimimi Trabzon'da tamamladım. 2002 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans eğitime başladım. 2006 yılında mezun olduktan sonra aynı üniversitede Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitime başladım. Hitit Üniversitesinde araştırma görevlisiyim.