

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLİCZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Ziyattin BİÇER

Tez Yöneticisi
Prof. Dr. Mikail ET

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2008

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORLİCZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Ziyattin BİÇER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mikail ET

Üye: Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

Üye: Prof. Dr. Mikail ET (Danışman)

Üye: Yrd. Doç. Dr. Mahmut IŞIK

Üye:

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/...../..... tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Anneme, Babama ve Kardeşlerime ...

TEŐEKKÜR

Bu çalıőmamın hazırlanması sűrecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrűbelerinden her zaman yararlandıđım saygıdeđer hocam Prof. Dr. Mikail ET'e űzerimdeki emeklerinden dolayı çok teőekkűr eder, saygılar sunarım.

Ayrıca, engin bilgi ve birikiminden yararlandığım, yűksek lisans eğitimim boyunca her zaman yanımda olan, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Yavuz ALTIN'a ve zaman zaman karőılaőtđım problemleri tartıőmak için bana zamanını ayıran arkadaőtım Dr. Hıfsı ALTINOK'a teőekkűrlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Ziyattin BİÇER

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	I
ŞEKİLLER LİSTESİ	II
SİMGELER LİSTESİ	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
1. TEMEL KAVRAMLAR	1
1.1. Bazı Topolojik Kavramlar	1
1.2. Eşitsizlikler	6
1.3. Orlicz Fonksiyonu ve N-Fonksiyonlar	7
1.4. Tamamlayan N-Fonksiyonlar	10
1.5. Young Eşitsizliği	12
1.6. N-Fonksiyonların karşılaştırılması	14
1.7. Denk N-Fonksiyonlar	15
2. ORLİCZ DİZİ UZAYLARI	16
2.1. l_M Dizi uzayı	16
2.2. $l_M(p)$ Dizi uzayı	19
3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	20
3.1. Doğal Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık	20
3.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesaro Yakınsaklık Arasındaki İlişki	23
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI	27
4.1. Fark Dizileri	27
4.2. Δ^m - İstatistiksel Yakınsaklık	29
5. BİR ORLİCZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI	36
5.1. Cesaro Toplanabilmeye İlişkin Sonuçlar	36
5.2. İstatistiksel Yakınsaklığa İlişkin Sonuçlar	42
KAYNAKLAR	46

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1.Konveks fonksiyon	7
Şekil 1.2 Young eşitsizliği.	12

SİMGELER LİSTESİ

- \mathbb{N} : Doğal sayılar kümesi
 \mathbb{R} : Reel sayılar kümesi
 \mathbb{R}^n : n -boyutlu Öklid uzay
 \mathbb{C} : Kompleks sayılar kümesi
 Δ^m : Genelleştirilmiş fark operatörü
 M : Orlicz fonksiyonu
h.h.k : hemen hemen her k
BK : Banach Koordinatsal
 \xrightarrow{s} : İstatistiksel yakınsaklık

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

Ziyattin BİÇER

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2008, Sayfa: 47

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar verilmiş, konveks fonksiyonların özel bir sınıfında yer alan N -fonksiyonları ve Young eşitsizliğinin bazı özellikleri incelenmiştir.

İkinci bölümde, Orlicz dizi uzayı l_M dizi ve $l_M(p)$ dizi uzayları verilmiştir.

Üçüncü bölümde doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve Kuvvetli Cesaro yakınsaklık arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Dördüncü bölüm genelleştirilmiş fark dizi uzayları ve Δ^m - istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki verilmiştir.

Beşinci bölüm bir Orlicz fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış genelleştirilmiş fark dizi uzayları ve Δ^m - istatistiksel yakınsaklığa ilişkin sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Orlicz fonksiyonu, istatistiksel yakınsaklık, fark dizileri.

ABSTRACT

Master's Thesis

GENERALIZED DIFFERENCE SEQUENCE SPACES DEFINED BY ORLICZ FUNCTION

Ziyattin BİÇER

Firat University

Graduate School of Science and Technology

Department of Mathematics

2008, Page: 47

In the first chapter of this thesis that consists of five chapters, we give some fundamental definitions and theorems which will be used in the later chapters and examine N - functions in the special class of convex functions and some properties of Young inequalities.

In the second chapter, we give Orlicz sequence space, l_M and $l_M(p)$ sequence spaces.

In the third chapter, we give natural density and relation between statistically convergence and strongly Cesaro convergence.

In the fourth chapter, we give the connection between generalized difference sequence spaces and Δ^m - statistically convergence.

In the fifth chapter, we give some results about generalized difference sequence spaces which is defined using Orlicz functions and Δ^m - statistically convergence.

Key Words: Orlicz function, statistically convergence, difference sequence.

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Bazı Topolojik Kavramlar

Bu bölümde, çalışmamızda kullanacağımız bazı temel tanım, teorem ve eşitsizliklere yer vereceğiz.

Tanım 1.1.1 X boş olmayan bir cümle olsun. Her $x, y, z \in X$ için

- i) $d(x, x) = 0$
- ii) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$
- iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerini sağlayan $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna metrik ve (X, d) ikilisine de metrik uzay denir. (i), (iii) ve (iv) şartlarını sağlayan d fonksiyonuna bir yarımetrik, (X, d) ikilisine de bir yarımetrik uzay denir [1].

Tanım 1.1.2 $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X \quad \text{ve} \quad \cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı adı verilir.

L1) $x + y = y + x$

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.

L4) Her $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

L5) $1 \cdot x = x$

L6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

L7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

L8) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

dır [2].

Tanım 1.1.3 X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

i) $g(\theta) = 0$

ii) $g(x) = g(-x)$

iii) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$

iv) $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ ($n \rightarrow \infty$) ve $g(x_n - x_0) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) iken $g(\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)
(burada $\lambda_0, \lambda_n \in K$ ve $x_0, x_n \in X$ dir)

şartlarını sağlayan $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir paranorm, (X, g) ikilisine de paranormlu uzay denir. Eğer $g(x) = 0$ iken $x = \theta$ oluyorsa g ye total paranorm denir [1].

Tanım 1.1.4 Yarım metriği bir paranormdan elde edilebilen lineer uzaya lineer yarımetrik uzay ve yarımetriği bir total paranormdan elde edilebilen lineer uzaya lineer metrik uzay denir [1].

Tanım 1.1.5 X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her $\lambda \in K$ ve $x, y \in X$ için

i) $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$

ii) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$

şartlarını sağlayan $q : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir yarınorm, (X, q) ikilisine de yarınormlu uzay denir [1].

(i) ve **(ii)** şartlarının yanında $q(x) = 0 \Rightarrow x = \theta$ şartı da sağlanıyorsa, $q = \|\cdot\|$ fonksiyonuna norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir [1].

Tanım 1.1.6 (X, d) metrik uzayında bir $a = (a_k)$ dizisinin Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \ni \forall i, j > n_0$ için $d(a_i, a_j) < \varepsilon$ olmasıdır [1].

Tanım 1.1.7 Bir metrik uzayda, her Cauchy dizisi metrik uzayın bir noktasına yakınsıyorsa, metrik uzaya tamdır denir. Daha açık ifade etmek gerekirse, $i, j \rightarrow \infty$ için $d(x_i, x_j) \rightarrow 0$ olduğunda, $i \rightarrow \infty$ için $d(x_i, x) \rightarrow 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa metrik uzaya tamdır denir [1].

Tanım 1.1.8 d yarimetriği

$$d(x, y) = g(x - y)$$

şeklinde bir g paranormundan elde edilmiş ise, d ye invaryant yarimetrik denir [1].

Tanım 1.1.9 (X, d) metrik uzay ve $S \subseteq X$ olsun. $\overline{S} = X$ ise S ye X de yoğunudur denir [2].

Tanım 1.1.10 Sayılabilir yoğun bir altcümle içeren (X, d) metrik uzayına ayrılabilir denir [2].

Tanım 1.1.11 Bir λ dizi uzayı, her $x = (x_i), y = (y_i) \in \lambda$ için $xy = (x_i y_i)$ koordinatsal çarpma işlemi altında kapalı ise λ ya dizi cebiri denir [3].

Tanım 1.1.12 Bir λ dizi uzayı için $x = (x_i) \in \lambda$ iken $|y_i| \leq |x_i|$ olduğunda $y = (y_i) \in \lambda$ oluyorsa λ ya normal dizi uzayı denir [3].

Tanım 1.1.13 Bir λ dizi cebiri aynı zamanda normal ise, normal dizi cebiri denir [3].

l_p, c_0, l_∞ ve w normal dizi cebiridir, c ise dizi cebiri olduğu halde normal değildir.

Tanım 1.1.14 (λ, q) yarınormlu bir dizi uzayı olsun. Her $x = (x_i), y = (y_i) \in \lambda$ ve $i \geq 1$ için $|x_i| \leq |y_i|$ olduğunda $q(x) \leq q(y)$ oluyorsa q ya mutlak monoton yarınorm denir [3].

Tanım 1.1.15 Bir $x = (x_n)$ dizisi verilsin. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall n > n_0$ için

$$\|x_n - s\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa $x = (x_n)$ dizisi s 'e yakınsaktır denir ve $\lim_n x_n = s$ yazılır.

Tanım 1.1.16 $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [2].

Bu çalışmada kompleks terimli tüm $x = (x_k), (k = 1, 2, 3, \dots)$ dizilerin cümlesini ω ile göstereceğiz. ω dizi uzayı, $x = (x_k), y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k + y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır.

Bu çalışmada sık sık kullanacağımız

$$l_\infty = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı,

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \text{ mevcut} \right\}$$

yakınsak ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

sıfır dizileri uzayı

$$\|x\| = \sup_k |x_k|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

Tanım 1.1.17 X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : X \rightarrow C, \tau_k(x) = x_k, (k = 1, 2, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X e bir BK -uzayı denir [4].

Tanım 1.1.18 $(X, \|\cdot\|)$ ile $(Y, \|\cdot\|)$ birer normlu uzay ve $T : X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. T dönüşümü normu koruyorsa, yani her $x \in X$ için $\|Tx\| = \|x\|$ oluyorsa T dönüşümüne lineer izometri denir. Böyle bir dönüşümün birebir olacağı açıktır. Eğer bu dönüşüm örten ise T ye lineer izomorfizm denir. Bu durumda X ile Y normlu uzayları izomorfik uzaylar adını alırlar [5].

Tanım 1.1.19 Eğer X ve Y uzayları izometrik olarak izomorf ise X ve Y uzaylarına denk uzaylar denir. Bu durumda X den Y ye bir lineer izometri vardır [1].

Tanım 1.1.20 X ve Y topolojik uzaylar olsunlar. $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü birebir, örten, f sürekli ve f^{-1} de sürekli ise f ye X den Y ye bir homeomorfizm denir.

$f : X \rightarrow Y$ bir homeomorfizm ise f ve f^{-1} açık cümleleri koruduğundan X ve Y uzayları topolojik olarak denktir [1].

Teorem 1.1.1 Bir X Banach uzayının bir Y alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart Y nin X de kapalı olmasıdır [2].

1.2 Eşitsizlikler

Teorem 1.2.1. λ bir normal dizi cebiri ve $\|\cdot\|_{\lambda}$ üzerinde bir mutlak monoton yarınorm olsun. Bu durumda, $p > 1$ olmak üzere, her $u, v \in \lambda$ için

$$\|(u+v)^p\|_{\lambda}^{1/p} \leq \|u^p\|_{\lambda}^{1/p} + \|v^p\|_{\lambda}^{1/p}$$

dir, burada $u^p = (u_n^p)$ ve $(u+v)^p = ((u_n+v_n)^p)$ şeklindedir [6].

Önerme 1.2.2. Her bir k için $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ ve $p_k > 0$ olsun. $H = \sup p_k$ olmak üzere

$$|a_k + b_k|^{p_k} \leq C \{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\} \quad (1.1)$$

eşitsizliği sağlanır, burada $C = \max(1, 2^{H-1})$ dir [1].

1.3. Orlicz Fonksiyonu ve N-Fonksiyonlar

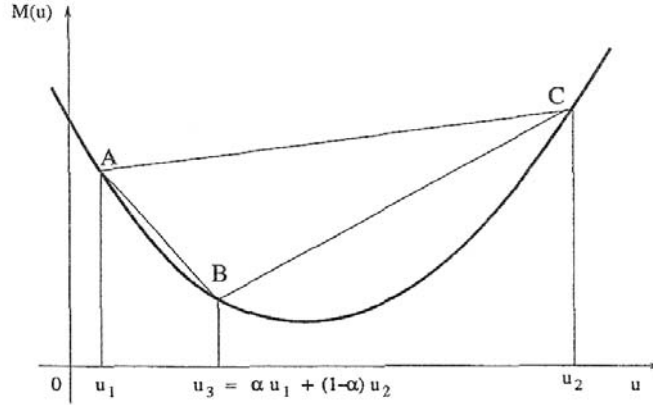
Bu kısımda konveks fonksiyon, N-fonksiyonu, Orlicz fonksiyonu ile ilgili bazı kavramları vereceğiz.

Tanım 1.3.1 (Konveks Fonksiyon). $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ için

$$M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [M(u_1) + M(u_2)] \quad (1.2)$$

eşitsizliğini sağlayan reel değerli M fonksiyonuna konvektir denir [7].

(1.2) şartı, $M(u)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde iki noktayı birleştiren kirişin orta noktasının, grafiğin bu noktaya karşılık gelen noktasının üstünde kalacağı anlamına gelir.



Şekil 1.1.

Şekil 1.1 incelendiğinde, her kirişin, grafiğin üzerinde kalacağı geometrik olarak açıktır. Bu, $0 \leq \alpha \leq 1$ olacak şekilde her α için

$$M[\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2] \leq \alpha M(u_1) + (1 - \alpha) M(u_2) \quad (1.3)$$

eşitsizliğinin sağlanacağı anlamına gelir. Bu eşitsizliğe Jensen eşitsizliği denir. (1.2) eşitsizliği $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$M\left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} [M(u_1) + M(u_2) + \dots + M(u_n)] \quad (1.4)$$

şeklinde genişletilebilir.

Teorem 1.3.1 (Konveks fonksiyonun integral temsili). $M(\alpha) = 0$ şartını sağlayan her konveks $M(u)$ fonksiyonu

$$M(u) = \int_{\alpha}^u p(t) dt$$

formunda temsil edilebilir, burada $p(t)$ azalmayan sağda sürekli bir fonksiyondur [7].

Tanım 1.3.2 (Orlicz Fonksiyonu). Çift, konveks, sürekli ve $M(0) = 0$, $x \rightarrow \infty$ için $M(x) \rightarrow \infty$ özelliklerine sahip bir $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonuna Orlicz fonksiyonu denir. Eğer en az bir $x > 0$ için $M(x) = 0$ ise M fonksiyonuna dejenere Orlicz fonksiyonu denir [8].

İntegral gösterim kullanılarak her Orlicz fonksiyonu, $p(t)$ nin durumuna göre üç farklı gruba ayrılabilir:

1. $p(0) = \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ vardır.
2. $0 \leq t \leq t_0$ için $p(t) = 0$ olacak şekilde bir $t_0 > 0$ vardır.
3. $p(0) = 0$ ve $t > 0$ için $p(t) > 0$ dir.

Birinci ve ikinci gruptaki Orlicz fonksiyonu bir dejenere Orlicz fonksiyonudur. Üçüncü gruptaki Orlicz fonksiyonuna M -fonksiyon ya da sadece Orlicz fonksiyonu diyeceğiz.

Tanım 1.3.3.

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t) dt \quad (1.5)$$

gösterimine sahip olan bir $M(u)$ fonksiyonuna N -fonksiyon denir, burada $p(t)$ fonksiyonu $t \geq 0$ için sağdan sürekli, $t > 0$ için pozitif ve

$$p(0) = 0, p(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty \quad (1.6)$$

şartlarını sağlayan azalmayan bir fonksiyondur [7].

1.4. Tamamlayan N-fonksiyonlar

$p(t)$, $t > 0$ için pozitif, $t \geq 0$ için sağdan süreklili, azalmayan ve (1.6) şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. $s \geq 0$ için

$$q(s) = \sup_{p(t) \leq s} t \quad (1.7)$$

eşitliği ile $q(s)$ fonksiyonunu tanımlayalım $q(s)$ fonksiyonunun $p(t)$ fonksiyonu ile aynı özelliklere sahip olduğunu görmek kolaydır: $q(s)$, $s > 0$ için pozitif, $s \geq 0$ için sağdan süreklili, azalmayan ve

$$q(0) = 0, \lim_{s \rightarrow \infty} q(s) = \infty \quad (1.8)$$

şartlarını sağlar.

$q(s)$ fonksiyonunun tanımından

$$q[p(t)] \geq t, p[q(s)] \geq s \quad (1.9)$$

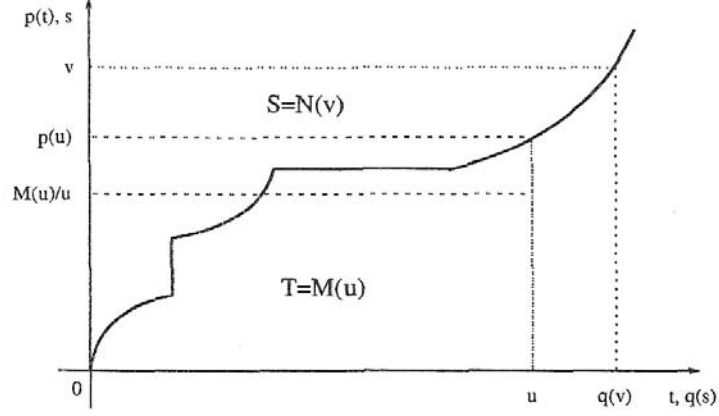
eşitsizliklerinin sağlandığını ve $\varepsilon > 0$ için

$$q[p(t) - \varepsilon] \leq t, p[q(s) - \varepsilon] \leq s \quad (1.10)$$

olduğunu hemen görebiliriz.

Örnek 1.4.1. $M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$ ($\alpha > 1$) ve $M_2(u) = e^{u^2} - 1$ fonksiyonları birer N -fonksiyonlardır. Gerçekten $p_1(t) = M_1(t) = t^{\alpha-1}$ ve $p_2(t) = M_2(t) = 2te^{t^2}$ fonksiyonları, $t \geq 0$ için sağdan sürekli, $t > 0$ için pozitif ve (1.7) ve (1.8) şartlarını sağlar [7].

1.5. Young Eşitsizliği



Şekil 1.2.

Şekil 1.2 de T ve S alanları sırasıyla $M(u)$ ve $N(v)$ N -fonksiyonları tarafından belirtilen alanları ifade etmektedir.

$$uv \leq M(u) + N(v) \quad (1.11)$$

eşitsizliğinin sağlandığı geometrik olarak açıktır. $M(u)$ ve $N(v)$ çift fonksiyonlar olduğundan (1.11) eşitsizliği her u, v için geçerlidir ve bu eşitsizliğe Young Eşitsizliği denir [7].

Örnek 1.5.1. $M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$ ($\alpha > 1$) bir N -fonksiyondur. $M_1(u)$ fonksiyonunun tamamlayan N -fonksiyonunu hemen bulabiliriz. $t > 0$ için $p_1(t) = M'(t) = t^{\alpha-1}$ olup, $q_1(s) = s^{\beta-1}$ ($s \geq 0$) olacaktır. Burada $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ dir. Böylece,

$$N_1(v) = \int_0^{|v|} q_1(s) ds = \frac{v^\beta}{\beta}$$

olur [7].

Örnek 1.5.2. $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$ N -fonksiyonunun tamamlayan N -fonksiyonunu bulalım. $p_2(t) = M'(t) = e^t - 1$ ($t \geq 0$) ve buradan $q_2(s) = \ln(s+1)$ ($s \geq 0$) olacaktır. Böylece

$$N_2(v) = \int_0^{|v|} q_2(s) ds = (1 + |v|) \ln(1 + |v|) - |v| \quad (1.12)$$

olur [7].

Bir çok durumda, tamamlayan N -fonksiyon için açık bir formül bulmak mümkün olmaz. Örneğin, $M(u) = e^{u^2} - 1$ alınırsa, $p(t) = 2te^{t^2}$ dir ve $q(s)$, açık formda ifade edilemez.

1.6. N – fonksiyonların Karşılaştırılması

Tanım 1.6.1. M_1 ve M_2 iki N –fonksiyon olsun. $u \geq u_0$ için

$$M_1(u) \leq M_2(ku) \quad (1.13)$$

olacak şekilde u_0 ve k pozitif sabitleri varsa, M_2 N –fonksiyonu M_1 den kuvvetlidir denir ve

$$M_1 < M_2 \text{ (ya da } M_2 > M_1) \quad (1.14)$$

ile gösterilir [7].

$M_1 < M_2$ (yada $M_2 > M_1$) bağıntılarından biri sağlamıyorsa, $M_1(u)$ ve $M_2(u)$ N –fonksiyonları karşılaştırılabilir denir [7].

1.7. Denk N -fonksiyonlar

Tanım 1.7.1. $M_1 < M_2$ ve $M_2 < M_1$ ise M_1 ve M_2 N -fonksiyonlarına denktir denir ve $M_1 \sim M_2$ ile gösterilir [6].

Yukarıdaki tanıma göre, M_1 ve M_2 N -fonksiyonlarının denk olması için gerek ve yeter şart, $u \geq u_0$ için

$$M_1(k_1u) \leq M_2(u) \leq M_1(k_2u) \quad (1.15)$$

olacak şekilde k_1, k_2 ve u_0 pozitif sabitlerinin var olmasıdır.

Bu eşitsizliklerden, $M(u)$, N -fonksiyonunun keyfi bir $k > 0$ için $M(ku)$ N -fonksiyonuna denk olduğunu söyleyebiliriz. Yine,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{M(u)}{M_1(u)} = a > 0 \quad (1.16)$$

şartını sağlayan M ve M_1 N -fonksiyonlarının denk olacağı açıktır.

BÖLÜM 2

ORLICZ DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, elemanları skalerlerin bir dizisi olan Orlicz dizi uzaylarına yer verdik. W.Orlicz [9]'in ℓ_p uzayını genelleştirme fikriyle başlayan ve W. Orlicz [9]'den sonra K.J. Lindberg [8], J. Lindenstrauss ve L. Tzafriri [10], P.K. Kamthan ve M. Gupta [3] ve daha bir çok matematikçinin katkılarıyla genişleyen Orlicz dizi uzayları teorisine bir giriş niteliğindedir.

2.1 ℓ_M Dizi Uzayı

Tanım 2.1.1. Her bir M Orlicz fonksiyonu için

$$\tilde{\ell}_M = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} M(|x_k|) < \infty \right\}$$

ile tanımlanan $\tilde{\ell}_M$ cümlesine Orlicz dizi sınıfı denir [3].

Tanım 2.1.2. M bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere

$$\ell_M = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_k|}{p}\right) < \infty, \text{ en az } p > 0 \text{ için} \right\} \quad (2.1)$$

ile tanımlanan dizi uzayına Orlicz dizi uzayı denir [3].

M ve N birbirini tamamlayan Orlicz fonksiyonları olmak üzere, ℓ_M dizi uzayı

$$\ell_M = \left\{ x \in w : \forall y \in \tilde{\ell}_N \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \text{ yakınsak} \right\} \quad (2.2)$$

şeklinde de tanımlanabilir [3].

Teorem 2.1.1. Her bir $x \in \ell_M$ için

$$\sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(|y_k|) \leq 1 \right\} < \infty$$

dir [3].

Böylece, $\|x\|_M = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \right| : \sum_{k=1}^{\infty} N(|y_k|) \leq 1 \right\}$ şeklinde, ℓ_M üzerinde bir norm tanımlanabilir. ℓ_M , bu şekilde tanımlanan norm ile bir Banach uzayıdır.

Teorem 2.1.2. $(\ell_M, \|\cdot\|_M)$ bir BK -uzayıdır.

ℓ_M , üzerinde farklı bir norm

$$\|x\|_{(M)} = \inf \left\{ p > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} M \left(\frac{|x_k|}{p} \right) \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanabilir. ℓ_M dizi uzayı $\|\cdot\|_{(M)}$ normu ile bir BK -uzayıdır [3].

Teorem 2.1.3. $x \in \ell_M$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} M \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_{(M)}} \right) \leq 1$$

dir [3].

Teorem 2.1.4. $\|x\|_M \leq 1$ olmak üzere $x \in \ell_M$ olsun. Bu durumda, $y = \{p(|x_n|)\} \in \tilde{\ell}_N$ ve $\sum_i N(|y_i|) \leq 1$ dir [3].

Teorem 2.1.5. $\|x\|_M \leq 1$ olmak üzere $x \in \ell_M$ olsun. Bu durumda $x \in \tilde{\ell}_M$ ve $\sum_i M(|x_i|) \leq \|x\|_M$ dir [3].

Teorem 2.1.6. $x \in \ell_M$ için

$$\|x\|_{(M)} \leq \|x\|_M \leq 2 \|x\|_{(M)}$$

dir [3].

Buna göre $\|x\|_M$ ve $\|x\|_{(M)}$ normları denktir.

2.2 $\ell_M(p)$ Dizi Uzayı

Bu kısımda, S.D. Parashar ve B. Choudhary [11] tarafından tanımlanan ve bazı topolojik özellikleri incelenen $\ell_M(p)$ dizi uzayına yer verildi.

M bir Orlicz fonksiyonu ve $p = (p_k)$ kesin pozitif sayıların herhangi bir dizisi olsun.

$$\ell_M(p) = \left\{ x \in w : \sum_{k=1}^{\infty} \left[M \left(\frac{|x_k|}{p} \right) \right]^{p_k} < \infty, \exists p > 0 \text{ için} \right\}$$

olarak tanımlanan dizi uzayının bazı temel özelliklerini verelim.

Teorem 2.2.1. $p = (p_k)$ dizisi sınırlı olsun. Bu durumda $\ell_M(p)$, \mathbb{C} karmaşık sayılar cismi üzerinde bir lineer uzaydır [11].

Teorem 2.2.2. $p = (p_k)$ dizisi sınırlı bir dizi olsun. $H = \max(1, \sup p_k)$ olmak üzere, $\ell_M(p)$

$$g(x) = \inf \left\{ p^{p_n/H} > 0 : \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[M \left(\frac{|x_k|}{p} \right) \right]^{p_k} \right)^{1/H} \leq 1, n = 1, 2, \dots \right\} \quad (2.3)$$

paranormuyla, total paranormlu uzaydır [11].

Uyarı 2.2.1 $M(x) = x$ için $\ell_M(p)$ üzerindeki paranorm ile $\ell(p)$ üzerindeki paranorm aynıdır [11].

Teorem 2.2.3. $\ell_M(p)$ dizi uzayı (2.3) de tanımlanan paranorm ile tam paranormlu uzaydır [11].

Teorem 2.2.4. Her bir k için $0 < p_k \leq q_k < \infty$ olacak şekilde (p_k) ve (q_k) dizileri için $\ell_M(p) \subseteq \ell_M(q)$ dir [11].

BÖLÜM 3

İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

İstatistiksel yakınsaklık tanımı 1951 yılında Fast [12], tarafından kısa bir not olarak verildi. Schoenberg [13], istatistiksel yakınsaklığı toplanabilme metodu olarak inceledi ve istatistiksel yakınsaklığın bazı temel özelliklerini verdi. Her iki yazar da sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesaro toplanabilir olduğunu ifade ettiler. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık Salat [14], Connor [15], Fridy [16], Kolk [17] tarafından çalışıldı.

3.1 Doğal Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.1.1. Pozitif tamsayılardan oluşan bir K cümlesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$, K nın n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir [16].

Tanım 3.1.2. Eğer $x = (x_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir cümle hariç diğer bütün k 'lar için bir P özelliği sağlanıyorsa, bu taktirde (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir."h.h.k." şeklinde gösterilir [16].

Sıfır yoğunluklu cümle tanımından esinlenerek istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 3.1.3. $x = (x_k)$ kompleks sayıların dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0, \quad (3.1)$$

yani h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. $S - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L(S)$ yazılır. Burada küme sembolü dışındaki dikey çizgiler kümenin eleman sayısını göstermektedir.

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. $L = 0$ olması halinde S_0 , yani sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir. Buna göre

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

ve

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

dır.

Açıkça görülebileceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir. Gerçekten

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2, \quad m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan,

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu $S - \lim x = 0$ demektir. Diğer taraftan l_∞ ve S uzayları bir birlerini kapsamazlar ancak ortak elemanları vardır. Gerçekten

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 1, & k \neq m^2, \quad m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $S - \lim x = 1$ dır, ancak $x \notin l_\infty$ dır. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ dizisi sınırlıdır. Ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise limiti tektir, yani $S - \lim x = L_1, S - \lim x = L_2$ ise $L_1 = L_2$ dir.

Teorem 3.1.1. $S - \lim x = L_1, S - \lim y = L_2$ ve $\alpha \in R$ olsun. Bu durumda

i) $S - \lim x = L_1$ ise $S - \lim (\alpha x) = \alpha L_1$

ii) $S - \lim x = L_1, S - \lim y = L_2$ ise $S - \lim (x + y) = L_1 + L_2$ dir [13].

(i)-(ii) den istatistiksel yakınsak dizilerin uzayının lineer uzay olduğu anlaşılır.

Tanım 3.1.4. $\varepsilon > 0$ olsun. h.h.k için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı var ise, yani

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [16].

Teorem 3.1.2. Bir x dizisi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel Cauchy dizisidir [16].

İspat. $S - \lim x_k = L$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda, h.h.k için $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ dır. Eğer $N, |x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse,

$$|x_k - x_N| = |x_k - L + L - x_N| \leq |x_k - L| + |x_N - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (\text{h.h.k. için})$$

elde edilir.

3.2. İstatistiksel Yakınsaklık ve Kuvvetli Cesaro Yakınsaklık Arasındaki İlişki

Bu kısımda kuvvetli Cesaro yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 3.2.1. $x = (x_k)$ kompleks sayıların dizisi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L ye Cesaro yakınsaktır denir. Cesaro yakınsak dizilerin cümlesi

$$\sigma_1 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - L) = 0 \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilecektir [18].

Teorem 3.2.1. $x = (x_k)$ dizisi L ye yakınsak ise (x_k) dizisi L ye σ_1 -yakınsaktır [18].

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun, $n \geq N_1$ için $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde pozitif bir N_1 tamsayısı mevcuttur. Bu taktirde $n \geq N_2$ için

$$\frac{1}{n} |(x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{N-1}) - N_1 L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir pozitif N_2 tamsayısı mevcuttur. $N = \max \{N_1, N_2\}$ olsun. Eğer $n \geq N$ ise, bu taktirde

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k - L \right| &= \left| \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^n x_k - (n+1)L \right] \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=N_1}^n (x_k - L) \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N_1}^n |x_k - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n+1} (n+1 - N_1) \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

dır. Tersisi doğru değildir. Gerçekten $x_n = 1 + (-1)^n$ dizisi σ_1 -yakınsaktır ancak yakınsak değildir.

Teorem 3.2.2. $S - \lim x = L$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k| < M$ ise $\sigma_1 - \lim x = L$ dır [13].

İspat. $L = 0$ olsun $\sigma_1 - \lim x = 0$ olduğunu gösterelim.

Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n x_k \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n |x_k| \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{\substack{1 \leq k < n \\ |x_k| \geq \varepsilon}} |x_k| + \sum_{\substack{1 \leq k < n \\ |x_k| < \varepsilon}} |x_k| \right\} \\
&\leq \frac{1}{n} n\varepsilon + \frac{1}{n} M |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}|
\end{aligned}$$

dır. (3.1) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. Teoremin karşıtı doğru değildir. Gerçekten $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ şeklinde tanımlanan dizinin aritmetik ortalaması $\frac{1}{2}$ ye yakınsaktır. Fakat bu dizi istatistiksel yakınsak değildir.

Tanım 3.2.2. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L ye kuvvetli p -Cesaro yakınsaktır denir. Kuvvetli p -Cesaro yakınsak dizilerin cümlesi

$$\omega_p = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilecektir [1].

Teorem 3.2.3. $0 < p < \infty$ olsun. Bir $x = (x_k)$ dizisi, L sayısına kuvvetli p -cesaro yakınsak ise L sayısına istatistiksel yakınsaktır. Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak ise L sayısına kuvvetli p -cesaro yakınsaktır [15].

İspat.

$x \in w$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| < \varepsilon}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |x_k - L| \geq \varepsilon}} |x_k - L|^p \\ &\geq \varepsilon^p |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $S - \lim x_k = L$ demektir.

Sınırlı bir $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak olsun ve $K = \|x\|_\infty + L$ diyelim, $\varepsilon \geq 0$ verilsin. Her $n > N_\varepsilon$ için N_ε 'u

$$\frac{1}{n} \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\} < \frac{\varepsilon}{2K^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

diyelim. Bu taktirde $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{k \leq n \\ k \in L_n}} |x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin L_n}} |x_k - L|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2K^p} K^p + n \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli p -Cesaro yakınsaktır.

BÖLÜM 4

GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİ UZAYLARI

4.1 Fark Dizileri

Bu bölümde Kızmaz [19], tarafından tanımlanan ve Et, Çolak [20], tarafından genelleştirilen fark dizi uzaylarını inceleyecek Et ve Nuray [21], tarafından tanımlanan Δ^m -istatistiksel yakınsaklık ile aralarındaki bağıntı verilecektir.

Tanım 4.1.1. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları Kızmaz [19], tarafından

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\},$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\},$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\},$$

tanımlandı. Kızmaz [19], bu uzayların

$$\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer BK-uzayı olduğunu göstermiştir. Daha sonra Et ve Çolak [20], $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x_k = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$, $\Delta^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$ olmak üzere

$$\ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\},$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\},$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\},$$

dizi uzaylarını tanımlamış ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer BK–uzayı olduklarını göstermişlerdir.

Daha sonra Et ve Nuray [21], X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere yukarıdaki dizi uzaylarını $X(\Delta^m)$ dizi uzaylarına genişleterek bu uzayların bazı özelliklerini incelemiştir.

4.2. Δ^m -İstatistiksel Yakınsaklık

X herhangi bir dizi uzayı, $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $X(\Delta^m)$ dizi uzayı Et ve Nuray [21], tarafından

$$X(\Delta^m) = \{x = (x_k) : (\Delta^m x_k) \in X\}$$

şeklinde tanımlandı. Aşağıda $X(\Delta^m)$ ve X arasındaki bazı ilişkiler verilecek, $X(\Delta^m)$ 'in bazı topolojik özellikleri incelenecek ve sonuçların bazıları ispatsız olarak verilecektir.

Teorem 4.2.1. X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$ de bir lineer uzaydır [21].

İspat. $x, y \in X(\Delta^m)$ ve α bir skaler olsun.

i) $x \in X(\Delta^m)$ ve $y \in X(\Delta^m)$ ise $\Delta^m x \in X$ ve $\Delta^m y \in X$ dir. X lineer uzay olduğundan $(\Delta^m x + \Delta^m y) \in X$, Δ^m lineer olduğundan $\Delta^m(x + y) \in X$ elde edilir. Bu ise $x + y \in X(\Delta^m)$ demektir.

ii) $x \in X(\Delta^m)$ ve α skaler olsun. Bu taktirde $\Delta^m x \in X$ dir. X lineer uzay olduğundan $\alpha \Delta^m x \in X$ yazılabilir. Δ^m lineer olduğundan $\Delta^m(\alpha x) \in X$ olup tanımdan $\alpha x \in X(\Delta^m)$ elde edilir.

Teorem 4.2.2. $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$ 'dir [21].

Teorem 4.2.3. $X, \|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $X(\Delta^m)$

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile Banach uzaydır [21].

Teorem 4.2.4. X ayrılabilir ise $X(\Delta^m)$ de ayrılabilir [21].

İspat. X ayrılabilir olsun. Bu taktirde $\overline{A} = X$ olduğundan $\overline{A(\Delta^m)} = \overline{A}(\Delta^m) = X(\Delta^m)$ dir. Şimdi

$$f : A(\Delta^m) \rightarrow A, f(x) = \Delta^m x$$

dönüşümünü tanımlayalım. f birebir örten bir dönüşümdür. Buradan $A(\Delta^m), X(\Delta^m)$ nin $\overline{A(\Delta^m)} = X(\Delta^m)$ olacak şekilde sayılabilir bir alt cümlesidir. Buradan $X(\Delta^m)$ ayrılabiliridir.

Sonuç 4.2.1. $c_0(\Delta^m), c(\Delta^m)$ ve $l_p(\Delta^m), (1 \leq p \leq \infty)$ ayrılabiliridir [21].

Teorem 4.2.5. X bir vektör uzayı ve $A \subset X$ olsun. A konveks ise $A(\Delta^m), X(\Delta^m)$ de konvektir [21].

İspat. $x, y \in A(\Delta^m)$ olsun. Bu taktirde $\Delta^m x, \Delta^m y \in A$ dir. Δ^m lineer olduğundan $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\lambda \Delta^m x + (1 - \lambda) \Delta^m y = \Delta^m (\lambda x + (1 - \lambda) y)$$

yazılabilir. A konveks olduğundan $(\lambda \Delta^m x + (1 - \lambda) \Delta^m y) \in A$ dir. Buradan $(\lambda x + (1 - \lambda) y) \in A(\Delta^m)$ dir.

Tanım 4.2.1. $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani h.h.k için $|\Delta^m x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Δ^m -istatistiksel yakınsaktır. Δ^m -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S(\Delta^m)$ ile gösterilir. $L = 0$ olması halinde $S_0(\Delta^m)$, yani sifra Δ^m -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı elde edilir [21].

Sonuç 4.2.2. $S(\Delta^m)$ lineer uzaydır [21].

Tanım 4.2.2. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L ye kuvvetli Δ_p^m -Cesaro yakınsaktır denir.

Kuvvetli Δ_p^m -Cesaro yakınsak dizilerin cümlesi

$$w_p(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p = 0, n \rightarrow \infty, p > 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilecektir. $x \in w_p(\Delta^m)$ olması durumunda $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ yazacağız [21].

Teorem 4.2.6. $p \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty$ olsun.

i) $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ dir,

ii) $x \in l_\infty(\Delta^m)$ ve $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ dir [21].

İspat. i) $x = (x_k) \in w$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |\Delta^m x_k - L| < \varepsilon}} |\Delta^m x_k - L|^p + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon}} |\Delta^m x_k - L|^p \\ &\geq \varepsilon^p |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde edilir. $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ olduğundan $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ elde edilir..

ii) $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ olsun. $M = \|\Delta^m x\|_\infty + |L|$ diyelim, $\varepsilon \geq 0$ verilsin. Her $n > N_\varepsilon$ için N_ε sayısını

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

diyelim. Bu takdirde $n > N_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p &= \frac{1}{n} \left(\sum_{\substack{k \leq n \\ k \in L_n}} |\Delta^m x_k - L|^p + \sum_{\substack{k \leq n \\ k \notin L_n}} |\Delta^m x_k - L|^p \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2M^p} M^p + n \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ elde edilir.

Sonuç 4.2.3. $S \cap l_\infty \subset S(\Delta^m) \cap l_\infty(\Delta^m)$ [21].

Sonuç 4.2.4. $S(\Delta^m) \cap l_\infty(\Delta^m) = w_p(\Delta^m) \cap l_\infty(\Delta^m)$ [21].

Tanım 4.2.3. $x = (x_k) \in w$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - \Delta^m x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisi denir [21].

Teorem 4.2.7. Eğer $x = (x_k)$ dizisi Δ^m -istatistiksel yakınsak ise $x = (x_k)$ dizisi Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisidir [21].

İspat. Kabul edelim ki $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde h.h.k için

$$|\Delta^m x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazabiliriz. N sayısını h.h.k için

$$|\Delta^m x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde seçelim. Bu taktirde h.h.k için

$$\begin{aligned} |\Delta^m x_k - \Delta^m x_N| &< |\Delta^m x_k - L| + |\Delta^m x_N - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. O halde $x = (x_k)$ dizisi Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisidir.

Teorem 4.2.8. y, Δ^m -istatistiksel yakınsak bir dizi olsun. Eğer x , h.h.k için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ olacak şekilde bir dizi ise x , Δ^m -istatistiksel yakınsak bir dizidir [21].

İspat. h.h.k için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ ve $y_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ olsun, $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde her n için

$$\{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\} \subset \{k \leq n : |\Delta^m x_k \neq \Delta^m y_k|\} \cup \{k \leq n : |\Delta^m y_k - L| \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Eşitsizliğin ikinci yanındaki son cümle sabit sayıda eleman içerir. Bunu $g = g(\varepsilon)$ ile gösterelim. Her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa h.h.k için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k \neq \Delta^m y_k|\}| + \lim_n \frac{g}{n}$$

yazılabilir. Bu da $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.9.

- (i) $c(\Delta^m) \subset S(\Delta^m)$, kapsama kesindir,
- (ii) $S(\Delta^m)$ ve $l_\infty(\Delta^m)$ birbirlerini kapsamazlar ancak ortak elemanları vardır,
- (iii) $S(\Delta^m)$ ve l_∞ birbirlerini kapsamazlar ancak ortak elemanları vardır,
- (iv) S ve $c(\Delta^m)$ birbirlerini kapsamazlar ancak ortak elemanları vardır,
- (v) S ve $c_0(\Delta^m)$ birbirlerini kapsamazlar ancak ortak elemanları vardır,
- (vi) S ve $l_\infty(\Delta^m)$ birbirlerini kapsamazlar ancak ortak elemanları vardır [21].

İspat. $c \subset S$ olduğundan $c(\Delta^m) \subset S(\Delta^m)$ dir. Şimdi

$$\Delta^m x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklinde seçelim. Bu taktirde $\Delta^m x \in S$ fakat $\Delta^m x \notin c$ dir. $c \subset S(\Delta^m)$, $c \subset c(\Delta^m)$, $c \subset l_\infty(\Delta^m)$, $c \subset S$, $c \subset l_\infty$ ve $c \cap c_0(\Delta^m) \neq \emptyset$ olduğundan $S(\Delta^m)$ ile $l_\infty(\Delta^m)$, $S(\Delta^m)$ ile l_∞ , S ile $c(\Delta^m)$, S ile $c_0(\Delta^m)$ ve S ile $l_\infty(\Delta^m)$ nin ortak elemanları vardır. Şimdi bu uzayların birbirlerini kapsamadıklarını gösterelim.

(ii) (4.1) de tanımlanan diziyi göz önüne alalım. $x \in S(\Delta^m)$ fakat $x \notin l_\infty(\Delta^m)$ dir. $x = (1, 0, 1, 0, \dots)$ seçersek her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^m x_k = (-1)^{k+1}$ olup $x \in l_\infty(\Delta^m)$ fakat $x \notin S(\Delta^m)$ dir.

(iii) (4.1) de tanımlanan dizi sınırlı değildir. Ancak Δ^m -istatistiksel yakınsaktır. Tersine $x = (1, 0, 1, 0, \dots) \in l_\infty$ seçersek $x \notin S(\Delta^m)$ dir.

(iv)

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$x \in S$ dir. Fakat $x \notin c(\Delta^m)$ dir. Tersine $x = (k)$ seçilirse $x \notin S$ fakat $x \in c(\Delta^m)$ dir.

(v) (iv)'de verilen dizi bu şıkın şartını sağlar.

(vi)

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $x \in S$ ancak $x \notin l_\infty(\Delta^m)$ dir. Tersine $x = (k)$ olarak alınırsa $x \in l_\infty(\Delta^m)$ fakat $x \notin S$ dir.

BÖLÜM 5

BİR ORLICZ FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIS GENELLESTİRİLMİS FARK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde genelleştirilmiş fark operatörü Δ^m , M Orlicz fonksiyonu ve q yarınormu kullanarak birkaç dizi uzayı tanımlayacak ve bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

5.1 Cesaro Toplanabilmeye İlişkin Sonuçlar

Tanım 5.1.1. M bir Orlicz fonksiyonu, X lineer uzay, q bir yarı norm $p = (p_k)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $w(X)$ ile X üzerinde tanımlı tüm dizilerin uzayını gösterelim. Bu taktirde $W(\Delta^m, M, p, q)$, $W_0(\Delta^m, M, p, q)$ ve $W_\infty(\Delta^m, M, p, q)$ dizi uzaylarını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$W(\Delta^m, M, p, q) = \left\{ x \in w(X) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M\left(q\left(\frac{\Delta^m x_k - L}{\rho}\right)\right) \right]^{p_k} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \text{ ve } L \in X \right\}$$

$$W_0(\Delta^m, M, p, q) = \left\{ x \in w(X) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M\left(q\left(\frac{\Delta^m x_k}{\rho}\right)\right) \right]^{p_k} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \right\}$$

$$W_\infty(\Delta^m, M, p, q) = \left\{ x \in w(X) : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M\left(q\left(\frac{\Delta^m x_k}{\rho}\right)\right) \right]^{p_k} < \infty, \text{ en az bir } \rho > 0 \right\}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ ve $M(x) = x$ alınırsa $W(\Delta^m, M, p, q)$, $W_0(\Delta^m, M, p, q)$ ve $W_\infty(\Delta^m, M, p, q)$ uzaylarının sırasıyla $[\mathbb{C}, \Delta^m, 1, q]$, $[\mathbb{C}, \Delta^m, 1, q]_0$ ve $[\mathbb{C}, \Delta^m, 1, q]_\infty$ uzaylarına indirgenir [22].

X , q ve m 'ye özel değerler verilirse yukarıdaki dizi uzaylarından aşağıdaki dizi uzaylarını elde ederiz.

i) $q(x) = |x|$ ise $W(\Delta^m, M, p, q) = W(\Delta^m, M, p)$, $W_0(\Delta^m, M, p, q) = W_0(\Delta^m, M, p)$ ve $W_\infty(\Delta^m, M, p, q) = W_\infty(\Delta^m, M, p)$.

ii) Eğer $m = 0$ ise $W(\Delta^m, M, p, q) = W(M, p, q)$, $W_0(\Delta^m, M, p, q) = W_0(M, p, q)$ ve $W_\infty(\Delta^m, M, p, q) = W_\infty(M, p, q)$ dır.

iii) Eğer $m = 0$ $q(x) = |x|$ ve $X = \mathbb{C}$ ise bu taktirde $W(\Delta^m, M, p, q) = W(M, p)$, $W_0(\Delta^m, M, p, q) = W_0(M, p)$ ve $W_\infty(\Delta^m, M, p, q) = W_\infty(M, p)$.

iv) $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $p_k = 1$ ise $W(\Delta^m, M, p, q) = W(\Delta^m, M, q)$, $W_0(\Delta^m, M, p, q) = W_0(\Delta^m, M, q)$ ve $W_\infty(\Delta^m, M, p, q) = W_\infty(\Delta^m, M, q)$ dır.

Eğer $x \in W(\Delta^m, M, q)$ ise (x_k) dizisine M Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli Δ_q^m -Cesaro toplanabilir dır denir.

Teorem 5.1.1. (p_k) sınırlı bir dizi olsun. $W(\Delta^m, M, p, q)$, $W_0(\Delta^m, M, p, q)$ ve $W_\infty(\Delta^m, M, p, q)$ birer lineer uzaydır [22].

İspat: $x, y \in W_0(\Delta^m, M, p, q)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M\left(q\left(\frac{\Delta^m x_k}{\rho_1}\right)\right) \right]^{p_k} = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M\left(q\left(\frac{\Delta^m y_k}{\rho_2}\right)\right) \right]^{p_k} = 0$$

olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 pozitif sayıları vardır. $\rho_3 = \max(2|\alpha|\rho_1, 2|\beta|\rho_2)$ diyelim. M artan ve konveks, q bir yarı norm ve Δ^m lineer olduğundan

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M\left(q\left(\frac{\Delta^m(\alpha x_k + \beta y_k)}{\rho_3}\right)\right) \right]^{p_k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M\left(q\left(\frac{\alpha \Delta^m x_k + \beta \Delta^m y_k}{\rho_3}\right)\right) \right]^{p_k} \\
&\leq D \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M\left(q\left(\frac{\Delta^m x_k}{\rho_1}\right)\right) \right]^{p_k} + D \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M\left(q\left(\frac{\Delta^m y_k}{\rho_2}\right)\right) \right]^{p_k} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu $W_0(\Delta^m, M, p, q)$ 'ın lineer uzay olduğunu gösterir.

Diğerleri benzer şekilde gösterilir.

Teorem 5.1.2. (p_k) dizisi sınırlı olsun. $H = \max\left(1, \sup_k p_k\right)$ olmak üzere $W(\Delta^m, M, p, q)$, $W_0(\Delta^m, M, p, q)$ ve $W_\infty(\Delta^m, M, p, q)$ uzayları

$$g_\Delta(x) = \inf \left\{ \rho^{p_n/H} : \sup_{k \geq 1} M\left(q\left(\frac{\Delta^m x_k}{\rho}\right)\right) \leq 1, \rho > 0, n \in \mathbb{N} \right\},$$

paranormu ile birer paranormlu uzaydır [22].

İspat. İspatı sadece $W_\infty(\Delta^m, M, p, q)$ için yapalım. Diğerleri benzer şekilde gösterilir. Açıkça $g_\Delta(x) \geq 0$, $g_\Delta(x) = g_\Delta(-x)$ ve $g_\Delta(\bar{\theta}) = 0$ dır. Şimdi $(x_k), (y_k) \in W_\infty(\Delta^m, M, p, q)$ olsun. Bu taktirde

$$\sup_{k \geq 1} M\left(q\left(\frac{\Delta^m x_k}{\rho_1}\right)\right) \leq 1$$

ve

$$\sup_{k \geq 1} M\left(q\left(\frac{\Delta^m y_k}{\rho_2}\right)\right) \leq 1$$

olacak şekilde $\rho_1 > 0$ ve $\rho_2 > 0$ sayıları vardır. $\rho = \rho_1 + \rho_2$ diyelim. Bu taktirde

$$\sup_{k \geq 1} M\left(q\left(\frac{\Delta^m(x_k + y_k)}{\rho}\right)\right) \leq \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}\right) \sup_{k \geq 1} M\left(q\left(\frac{\Delta^m x_k}{\rho_1}\right)\right) + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right) \sup_{k \geq 1} M\left(q\left(\frac{\Delta^m y_k}{\rho_2}\right)\right) \leq 1$$

dir.

Böylece $g_\Delta(x+y) \leq g_\Delta(x) + g_\Delta(y)$ skaler çarpımın sürekliliği aşağıdaki eşitlikten çıkar.

$$\begin{aligned} g_\Delta(x) &= \inf \left\{ \rho^{p_n/H} : \sup_{k \geq 1} M\left(q\left(\frac{\Delta^m \lambda x_k}{\rho}\right)\right) \leq 1, \rho > 0, n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \inf \left\{ (r|\lambda|)^{p_n/H} : \sup_{k \geq 1} M\left(q\left(\frac{\Delta^m \lambda x_k}{r}\right)\right) \leq 1, r > 0, n \in \mathbb{N} \right\}, \end{aligned}$$

burada $r = \frac{\rho}{|\lambda|}$ dir.

Teorem 5.1.3. M_1 ve M_2 iki Orlicz fonksiyonu olsun. Bu taktirde $W_0(\Delta^m, M_1, p, q) \cap W_0(\Delta^m, M_2, p, q) \subseteq W_0(\Delta^m, M_1 + M_2, p, q)$ dir [22].

İspat. $x \in W_0(\Delta^m, M_1, p, q) \cap W_0(\Delta^m, M_2, p, q)$ olsun. (1.1) eşitsizliği kullanılırsa $x \in W_0(\Delta^m, M_1 + M_2, p, q)$ elde edilir.

Sonuç 5.1.1. M_1 ve M_2 iki Orlicz fonksiyonu olsun. Bu taktirde $W_\infty(\Delta^m, M_1, p, q) \cap W_\infty(\Delta^m, M_2, p, q) \subseteq W_\infty(\Delta^m, M_1 + M_2, p, q)$ dir.

Sonuç 5.1.2. $W(\Delta^{m-1}, M, p, q) \subseteq W_0(\Delta^m, M, p, q)$ dir.

Teorem 5.1.4. $m \geq 1$ olsun. Bu taktirde aşağıdaki kapsamalar kesindir.

- i) $W_0(\Delta^{m-1}, M, q) \subseteq W_0(\Delta^m, M, q)$,
- ii) $W(\Delta^{m-1}, M, q) \subseteq W(\Delta^m, M, q)$,
- iii) $W_\infty(\Delta^{m-1}, M, q) \subseteq W_\infty(\Delta^m, M, q)$ dir [22].

İspat. Sadece (i) nin ispatını yapalım. Diğerleri benzer şekilde yapılabilir. $x \in W_0(\Delta^{m-1}, M, q)$ olsun. Bu taktirde en az bir $\rho > 0$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M\left(q\left(\frac{\Delta^{m-1} x_k}{\rho}\right)\right) \right] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır.

M artan ve konveks q bir yarı norm olduğundan

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M\left(q\left(\frac{\Delta^m x_k}{2\rho}\right)\right) \right] \\
& \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M\left(q\left(\frac{\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}}{2\rho}\right)\right) \right] \\
& \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} M\left(q\left(\frac{\Delta^{m-1} x_k}{\rho}\right)\right) \right] + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} M\left(q\left(\frac{\Delta^{m-1} x_{k+1}}{\rho}\right)\right) \right] \\
& \leq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left[M\left(q\left(\frac{\Delta^{m-1} x_k}{\rho}\right)\right) \right] \rightarrow 0
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Genel olarak $W_0(\Delta^i, M, q) \subseteq W_0(\Delta^m, M, q)$ kapsaması kesindir ($i = 1, 2, 3, \dots, m-1$). Bunu aşağıdaki örnekle açıklayalım.

Örnek 5.1.1. $X = \mathbb{C}$, $M(x) = x$, $q(x) = |x|$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ olsun. $(x_k) = (k^{m-1})$ dizisini gözönüne alalım. Her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta_{x_k}^m = 0$ ve $\Delta_{x_k}^{m-1} = (-1)^{m-1} (m-1)!$ olduğundan $x \in W_0(\Delta^m, M, q)$ fakat $x \notin W_0(\Delta^{m-1}, M, q)$ dir.

Teorem 5.1.5. $p = (p_k)$ ve $t = (t_k)$ pozitif sayıların herhangi iki dizisi q_1 ve q_2 herhangi iki yarı norm olsun. Bu taktirde

- i) $W_0(\Delta^m, M, p, q_1) \cap W_0(\Delta^m, M, t, q_2) \neq \emptyset$
- ii) $W(\Delta^m, M, p, q_1) \cap W(\Delta^m, M, t, q_2) \neq \emptyset$
- iii) $W_\infty(\Delta^m, M, p, q_1) \cap W_\infty(\Delta^m, M, t, q_2) \neq \emptyset$ dir [22].

İspat. Sıfır dizisi yukarıdaki dizilerin herbirine ait olduğundan kesişimler boş değildir.

Teorem 5.1.6. $0 < p_k \leq r_k$ ve $\left(\frac{r_k}{p_k}\right)$ sınırlı olsun. Bu taktirde $W(\Delta^m, M, r, q) \subseteq W(\Delta^m, M, p, q)$ dir [22].

İspat. $(x_k) \in W(\Delta^m, M, r, q)$ olsun. $w_k = \left[M(q(\frac{\Delta^m x_k - L}{\rho})) \right]^{r_k}$ diyelim ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_k = \frac{p_k}{r_k}$ yazalım. Bu taktirde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 < \lambda_k \leq 1$ dir. $\lambda, \forall k \in \mathbb{N}$ için $0 < \lambda < \lambda_k \leq 1$ olacak şekilde bir sayı olsun. (u_k) ve (v_k) dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$w_k \geq 1 \text{ için } u_k = w_k \text{ ve } v_k = 0$$

ve

$$w_k < 1 \text{ için } u_k = 0 \text{ ve } v_k = w_k$$

olsun. Açıkça $\forall k \in \mathbb{N}$ için $w_k = u_k + v_k$, $w_k^{\lambda_k} = u_k^{\lambda_k} + v_k^{\lambda_k}$; $u_k^{\lambda_k} \leq u_k \leq w_k$ ve $v_k^{\lambda_k} \leq v_k$ dir. Böylece

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k^{\lambda_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n w_k + \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k \right]^{\lambda}$$

dir. Bu ise $(x_k) \in W(\Delta^m, M, r, q)$ olması demektir.

Teorem 5.1.7. $W_0(M, p, q)$ ve $W_\infty(M, p, q)$ normal ve böylece monotondur. Fakat $W_0(\Delta^m, M, p, q)$, $W(\Delta^m, M, p, q)$ ve $W_\infty(\Delta^m, M, p, q)$ uzayları $m \geq 1$ için genelde normal değildir [21].

İspat. $W_0(M, p, q)$ ve $W_\infty(M, p, q)$ uzaylarının normal olduğu kolayca gösterilebilir. Normal bir uzay monoton olduğundan bu uzaylar aynı zamanda monotondur. $W_0(\Delta^m, M, p, q)$, $W(\Delta^m, M, p, q)$ ve $W_\infty(\Delta^m, M, p, q)$ uzaylarının normal olmadığını göstermek için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 5.1.2. $X = \mathbb{C}$, $M(x) = x$, $q(x) = |x|$, $m = 2$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ olsun. Bu taktirde $x = (x_k) \in W_0(\Delta^2, M, p, q)$ fakat $\alpha x = (\alpha_k x_k) \notin W_0(\Delta^2, M, p, q)$ burada $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k = (-1)^k$ dir. Burada $W_0(\Delta^2, M, p, q)$ normal değildir. Diğerleri benzer şekilde yapılabilir.

5.2. İstatistiksel Yakınsaklığa İlişkin Sonuçlar

Bu bölümde bir q yarı normu kullanarak istatistiksel yakınsaklık genelleştirilecek ve $W(\Delta^m, M, p, q)$ uzayı ile ilişkisi araştırılacaktır.

Tanım 5.2.1. $x = (x_k)$ dizisi $\forall q \in \mathbb{Q}$ ve $\forall L \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : q(\Delta^m x_k - L) \geq \varepsilon\}| = 0$$

şartını sağlıyorsa Δ_q^m -istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $x_k \rightarrow L(S(\Delta_q^m))$ yazılır. Δ_q^m -istatistiksel yakınsak tüm dizilerin uzayını $S(\Delta_q^m)$ ile göstereceğiz. Eğer, $q(x) = |x|$ alınırsa $S(\Delta_q^m) = S(\Delta^m)$ ve $m = 0$, $q = |x|$ ise $S(\Delta_q^m) = S$ dir [22].

Tanım 5.2.2. (x_k) dizisi verilsin.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : q(\Delta^m x_k - \Delta^m x_{n_0}) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon, q) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa x dizisine Δ_q^m -istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Bir q yarınormu kullanılarak Et ve Çolak [20], Et ve Nuray [21] tarafından verilen bu uzaylar aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

$$\begin{aligned} l_\infty(\Delta_q^m) &= \left\{ x \in w : \sup_k q(\Delta^m x_k) < \infty \right\}, \\ c(\Delta_q^m) &= \{ x \in w : q(\Delta^m x_k - L) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \}, \\ c_0(\Delta_q^m) &= \{ x \in w : q(\Delta^m x_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty \}, \\ w_p(\Delta_q^m) &= \left\{ x \in w(x) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [q(\Delta^m x_k - L)]^p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\}, \end{aligned}$$

Önerme 5.2.1. $m < n$ ve $Y = c_0, c$, ve l_∞ için

i) $Y(\Delta_q^m) \subset Y(\Delta_q^n)$ kapsaması kesindir.

ii) $c_0(\Delta_q^m) \subset c(\Delta_q^m) \subset l_\infty(\Delta_q^m)$ kapsaması kesindir [22].

Örnek 5.2.1. $q(x) = |x|$ ve $(x_k) = (k^m)$ olsun. Bu taktirde $Y \in \{c_0, c, l_\infty\}$ olmak üzere $(x_k) \in Y(\Delta_q^m)$ ve $(x_k) \notin Y(\Delta_q^{m-1})$.

Teorem 5.2.1. $0 < p < \infty$ olsun.

i) $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta_q^m))$ ise $x_k \rightarrow L(S(\Delta_q^m))$

ii) $x \in l_\infty(\Delta_q^m)$ ve $x_k \rightarrow L(S(\Delta_q^m))$ ise $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta_q^m))$

iii) $l_\infty(\Delta_q^m) \cap S(\Delta_q^m) = l_\infty(\Delta_q^m) \cap w_p(\Delta_q^m)$

dir [22].

İspat. i) $\varepsilon > 0$ verilsin ve $(x_k) \in w_p(\Delta_q^m)$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^n [q(\Delta^m x_k - L)]^p \geq |\{k \leq n : q(\Delta^m x_k - L) \geq \varepsilon\}| \varepsilon^p$$

olup $x_k \rightarrow L(S(\Delta_q^m))$ dır.

ii) $x \in l_\infty(\Delta_q^m)$, $x_k \rightarrow L(S(\Delta_q^m))$ ve $q(\Delta^m x_k) + q(L) = M$ olsun, $\varepsilon > 0$ verilsin. $\forall n > n_0$ için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : q(\Delta^m x_k - L) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

sağlanacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ olsun.

$$L_n = \left\{ k \leq n : q(\Delta^m x_k - L) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

diyelim. Bu taktirde $n > n_0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [q(\Delta^m x_k - L)]^p &= \frac{1}{n} \sum_{k \in L_n} [q(\Delta^m x_k - L)]^p + \frac{1}{n} \sum_{k \notin L_n} [q(\Delta^m x_k - L)]^p \\ &< \frac{1}{n} \left(\frac{n\varepsilon}{2M^p} \right) M^p + \frac{1}{n} n \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Burada $x_k \rightarrow L (w_p(\Delta_q^m))$ dir.

Teorem 5.2.2. M bir Orlicz fonksiyonu olsun. Bu taktirde $W(\Delta^m, M, p, q) \subset S(\Delta_q^m)$ dir [22].

İspat. $x \in \mathbb{N}$ olsun. Bu taktirde $n \rightarrow \infty$ için

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(q \left(\frac{\Delta^m x_k - L}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0$$

sağlanacak şekilde bir $\rho > 0$ vardır. $q(\Delta^m x_k - L) \geq \varepsilon$ olacak şekildeki $k \leq n$ lerin üzerinden alınan toplamı \sum_1 ile $q(\Delta^m x_k - L) < \varepsilon$ olacak şekilde $k \leq n$ lerin üzerinden alınan toplamı \sum_2 ile gösterelim. Bu taktirde

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(q \left(\frac{\Delta^m x_k - L}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_1 \left[M \left(q \left(\frac{\Delta^m x_k - L}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} + \sum_2 \left[M \left(q \left(\frac{\Delta^m x_k - L}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \right\} \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_1 \left[M \left(q \left(\frac{\Delta^m x_k - L}{\rho} \right) \right) \right]^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_1 [M(\varepsilon_1)]^{p_k} \text{ burada } \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon_1 \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_1 \min \left\{ [M(\varepsilon_1)]^{\inf p_k}, [M(\varepsilon_1)]^G \right\} \\ &\geq \frac{1}{n} |\{k \leq n : q(\Delta^m x_k - L) \geq \varepsilon\}| \cdot \min \left\{ [M(\varepsilon_1)]^{\inf p_k}, [M(\varepsilon_1)]^G \right\} \end{aligned}$$

dir. Böylece $x \in S(\Delta_q^m)$ dir.

Teorem 5.2.3. $S(\Delta_q^m) \cap l_\infty(\Delta_q^m) = W(\Delta^m, M, p, q) \cap l_\infty(\Delta_q^m)$ dir [22].

İspat. Teorem 5.2.2 den dolayı $S(\Delta_q^m) \cap l_\infty(\Delta_q^m) \subseteq W(\Delta^m, M, p, q) \cap l_\infty(\Delta_q^m)$ göstermek yeterlidir. $y_k = \Delta^m x_k - L$ olsun. \sum_1 ve \sum_2 Teorem 5.2.2 deki gibi olsun. $(x_k) \in l_\infty(\Delta_q^m)$ olduğundan diyelimki her y_k dizisi için

$$M\left(q\left(\frac{y_k}{\rho}\right)\right) \leq K$$

sağlanacak şekilde $K > 0$ sayısı vardır. Burada $\varepsilon > 0$ ve $\forall n \in N$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\left[q\left(\frac{y_k}{\rho}\right)\right] &\leq \frac{1}{n} \sum_1 M\left[q\left(\frac{y_k}{\rho}\right)\right] + \frac{1}{n} \sum_2 M\left[q\left(\frac{y_k}{\rho}\right)\right] \\ &\leq \frac{K}{n} |\{k \leq n : q(y_k) \geq \varepsilon \rho\}| + M\left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right) \end{aligned}$$

yazabiliriz. O halde $x \in W(\Delta^m, M, p, q) \cap l_\infty(\Delta_q^m)$ dir.

KAYNAKLAR

1. I.J. Maddox, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, 1970.
2. Kreyszig, E. Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York,1978.
3. Kamthan, P.K. and Gupta, M. Sequence Spaces and Series, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1981.
4. Goes, G. and Goes, S. Sequence of variation and sequence of fourier coefficients 1, Math., Z., 118, 93-102, 1970.
5. Akılov, G.P. ve Kantorovich. Functional Analysis, Pergamon Press, Oxford, 1982.
6. M.Kemal Özdemir, Orlicz fonksiyonu yardımıyla tanımlanmış bazı yeni dizi uzayları, Doktora tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya, 2003.
7. M.A. Krasnosel'skii and Y.B. Rutickii, Convex Functions and Orlicz Spaces, Noordhoff Ltd., Groningen, Netherlands, 1961.
8. K.J. Lindberg, On subspaces of Orlicz Sequence Spaces, Studia Mathematica, Vol. 45, 1973.
9. W. Orlicz, Über Raume (L^M), Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Ser A, 93-107, (1936).
10. J.Lindenstrauss and L. Tzafriri, On Orlicz sequence spaces, Israel J. Math., 379-390, 18 (1971).
11. Parashar, S. D. and Choudhary, B. Sequence spaces defined by Orlicz functions, Indian J. Pure Appl. Math., 25 (4), 419-428, 1994.
12. H. Fast, Sur la convergence statistique, Collog. Math., 241-244, 2(1951).
13. Schoenberg, I.J. The integrability of certain functions and related to summability methods, Amer. Math., Monthly, 66, 361-375, 1959.
14. T. Salat, On statistically convergent sequences of real numbers, Math., Slovaca, 139-150, 30 (2) (1980).

15. Connor, J.S. The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences, *Analysis*, 8, 47-63, 1988.
16. Fridy, J.A. On statistical convergence, *Analysis*, 301-313, 1985.
17. E. Kolk. The Statistical Convergence in Banach Spaces, *Acta Et Commentationes Univ. Tartuensis* 928, 41-52, 1991.
18. Powell, R.E. ve Shsah, S.M. *Summability Theory And Its Applications*, V.N.R. Company. London, 1972.
19. H. Kızmaz, On certain sequence spaces, *Canadian Math., Bull.* 169-176, 24 (1981).
20. M. Et, and R. Çolak, On some generalized difference sequence spaces, *Soochow J.Math.*, 377-386, 21 (1995).
21. Et, M. and Nuray, F., Δ^m - Statistical convergence, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 32 (6) 961-969, 2001.
22. B. C. Tripathy, M. Et and Y. Altin *Journal of Analysis and Applications* Vol. No.3, pp. 175-192, 1 (2003).

ÖZGEÇMİŞ

1975 Elazığ doğumluyum. İlk ve Orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladıktan sonra 1994 yılında kazandığım Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nden 1998'de mezun oldum. 1999'da F.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisansa başladım. 1999 yılında öğretmenliğe başladım. Halen Çubukbey Anadolu lisesinde öğretmen olarak çalışmaktayım.

Ziyattin BİÇER