

**SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN
GREEN FONKSİYONLARI İLE ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE**

Seda ŞENTÜRK

**Zonguldak Karaelmas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır**

ZONGULDAK

Haziran 2009

KABUL:

Seda ŞENTÜRK tarafından hazırlanan "SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN GREEN FONKSİYONLARI İLE ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek, Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. (26/06/2009)

Başkan: Prof. Dr. İrfan Baki YAŞAR (UFUK Ü.)

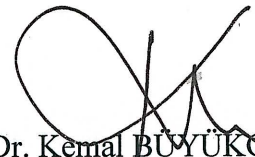
Üye : Yrd. Doç. Dr. Sedat ÇEVİKEL (Z.K.Ü)
(Tez Danışmanı)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ (Z.K.Ü)



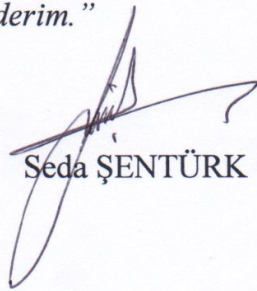
ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. 17.7/2009



Prof. Dr. Kemal BÜYÜKSÜZEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”



Seda ŞENTÜRK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SINIR-DEĞER PROBLEMLERİNİN GREEN FONKSİYONLARI İLE ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

Seda ŞENTÜRK

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Sedat ÇEVİKEL

Haziran 2009, 75 sayfa

Belirli bir diferensiyel denklemin verilen sınır koşulları ile birlikte oluşturduğu sisteme sınır-değer problemi denir. Sınır-değer problemleri fizik, mühendislik, tıp, astronomi gibi bilimsel alanlarda sıkça görülen uygulamalı matematiğin temel kavramlarındanıdır. Sınır-değer problemlerinin çözümleri birçok farklı metotla yapılmakta olup, bu çalışmanın amacı çözüm yöntemlerinden biri olan Green fonksiyonları yardımıyla çözümlerin tanıtılmasıdır. Birinci bölümde genel tanım ve teoremler, ikinci bölümde sınır-değer problemleri ve bunların geniş bir sınıfını oluşturan Sturm-Liouville probleminin tanıtımı ve özellikleri, sınır-değer problemleri için Green fonksiyonlarına ait kavramlar, özellikler ve kurulumuna ait örneklerle birlikte uygulamaları yer almaktadır. Son bölüm İntegral denklemlere ayrılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Sınır-Değer problemleri, Green Fonksiyonu, Sturm-Liouville Problemi, İntegral Denklem

Bilim Kodu: 403.06.01

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON THE SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS VIA GREEN'S FUNCTIONS

Seda ŞENTÜRK

**Zonguldak Karaelmas University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Assist. Prof. Sedat ÇEVİKEL

June 2009, 75 pages

Boundary value problem consists of a certain differential equation and given boundary conditions. Boundary value problems are the essential notion of applied mathematics which is often used in the fields such as physics, engineering, medical and astronomy. The solution of boundary value problems can be done by many different methods. The purpose of this work is to introduce the method of Green's functions in the solutions. In the first section, some essential definitions and theorems are given. In the second section, an introduction of boundary value problems and Sturm-Liouville problem - which is a wide class of boundary value problems- are presented. Also, notion of Green's functions with their properties, examples on the construction of these functions and some applications are examined. Last section is devoted to integral equations.

Key Words: Boundary Value Problems, Green's Functions, Sturm-Liouville Problem, Integral Equation

Science Code: 403.06.01

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında büyük bir özveriyle bana yardımcı olan, destek ve yol göstericiliğini esirgemeyen başta sayın bölüm başkanımız olmak üzere, tez danışmanı hocam Yrd. Doç. Dr. Sedat ÇEVİKEL' e, bölümümüz hocalarına ve sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL.....	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
 BÖLÜM 1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	 1
 BÖLÜM 2 SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ	 13
2.1 GİRİŞ	13
2.2 STURM- LIOUVILLE PROBLEMİ	13
2.2.1 Sturm-Liouville Problemi İçin Özdeğer Ve Özfonksiyonlar	15
2.2.2 Sturm-Liouville Özdeğer Problemi İçin Adjoint Özdeğer Problemi	18
2.3 GREEN FONKSİYONLARI	21
2.4 GREEN FONKSİYONLARININ ÖZELLİKLERİ	25
2.5 GREEN FONKSİYONLARININ KURULMA YÖNTEMLERİ	26
2.5.1 Adi Diferensiyel Denklemler İçin Green Fonksiyonunun Oluşturulması.	31
2.5.2 Sınır-Değer Problemlerinin Çözümünde Green Fonksiyonunun Kullanılması	32
2.5.3 İkinci Mertebeden Homogen Olmayan Selfadjoint Sınır Değer Problemi İçin Çözülebilirlik Koşulu.....	 36
2.6 LİNEER DENKLEMLER İÇİN GREEN FONKSİYONLARI İLE İLGİLİ UYGULAMALAR	 40
2.6.1 Green Fonksiyonları Kuruluşu.	40
2.6.2 Uygulamalarda Green Fonksiyonu.....	45

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
BÖLÜM 3 İNTEGRAL DENKLEMLER.....	51
3.1 İNTEGRAL DENKLEMLER VE İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI	52
3.1.1 Lineer Ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler	53
3.1.2 Singüler Ve Singüler Olmayan İntegral Denklemler	53
3.1.3 Diğer Tipte İntegral Denklemler	55
3.2 VOLTERRA VE FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLER.....	57
3.3 LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLER İLE VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ	58
3.4 İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	62
3.4.1 Ardışık Yaklaştırma Metodu.....	63
3.4.2 İtere Fonksiyonlar.....	65
3.4.3 Karşılık Fonksiyonları	67
3.5 SONUÇ VE ÖNERİLER	71
KAYNAKLAR	73
ÖZGEÇMİŞ	75

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

λ	: Özdeğer
$\phi(x)$	: Özfonksiyon
W	: Wronskian determinanı
$C[a, b]$	: $[a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
L	: Lineer Operatör
$L\{.\}$	: Laplace Dönüşümü
$K(x, t)$	: Çekirdek fonksiyonu
$\delta(x)$	: Dirac Delta fonksiyonu
$G(x, \xi)$	: Green fonksiyonu
$H(x)$	: Heaviside fonksiyonu
a_n, b_n	: Fourier katsayıları

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1 GİRİŞ

Diferensiyel denklemler ve sınır-değer problemleri uygulamalı matematiğin sıkça ihtiyaç duyulan temel kavramlarındandır. Diferensiyel denklemler genellikle adi türevli ve kısmi türevli olarak iki gruba ayrılmaktadır. Kısmi türevli diferensiyel denklemler de bazı dönüşümler yardımıyla adi türevli denklemlere dönüştürülebilir. Bu problemlerin çözümünde temel amaç verilen diferensiyel denklemi ve buna ait sınır koşullarını sağlayan fonksiyonu elde etmektir. Sınır değer probleminin çözümünde analitik ve nümerik çözümlerin de bulunduğu birçok farklı metot mevcuttur. Fizik, mühendislik, elektronik, tıp gibi bilimlerde, kuantum mekaniği, elastite teorisinde, dalga (katı, sıvı, gaz) hareketinin incelenmesindeki sınır değer problemleri uygulamalı matematiğin vazgeçilmez yapılarındandır. Bu alanlardaki diferensiyel denklemler Sturm-Liouville problemleri ya da integral denklemler modellemesi ile incelenmektedir.

Dönen bir telin hareketi, taşıyıcı sistemlerin deformasyonları, bükülmüş çubukların üzerine gelen yüklerin davranışlarının incelenmesi adi türevli diferensiyel denklemlerin sınır değer problemleri şeklinde ve ısı denklemi titreşen telin dalga denklemi kısmi türevli diferensiyel denklem olarak koşulları ile birlikte sınır değer problemlerine örnek teşkil edebilirler. Bu bağlamda değişkenlerine ayırma, Laplace transformasyonu, Fourier transformasyonları ve bir çok sayısal methodlar kullanılmaktadır. Bu çalışmanın amacı da çözüm yöntemlerinden biri olan Green fonksiyonlarını tanıtarak, lineer diferensiyel denklemler ile integral denklemler arasındaki ilişkilerin incelenmesidir.

Tanım 1.1 (Lineer Diferensiyel Denklem): $a_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ katsayıları sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) = 0 \quad (1.1)$$

denklemine n . mertebeden lineer homogen diferensiyel denklem denir. $a_i(x)$ katsayılarının sabit olması halinde denklem sabit katsayılı adını alır. Sağ tarafın sıfırdan farklı olması halinde denklem homogen olmayan lineer diferensiyel denklem adını alır. L operatörü için,

$$L = a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x) \quad (1.2)$$

şeklinde olmak üzere (1.2) denklemi,

$$Ly = 0 \quad (1.3)$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.2 (Sınır-Değer Problemi): İkinci mertebeden lineer diferensiyel denklem, $x \in (a, b)$ için

$$a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x) \quad (1.4)$$

olup ve

$$B_1(y) = \alpha_{11} y(a) + \alpha_{12} y'(a) + \beta_{11} y(b) + \beta_{12} y'(b) = \gamma_1 \quad (1.5)$$

$$B_2(y) = \alpha_{21} y(a) + \alpha_{22} y'(a) + \beta_{21} y(b) + \beta_{22} y'(b) = \gamma_2$$

sınır koşulları ile bir sınır-değer problemi oluşturmaktadır. Burada $a_2, a_1, a_0 \in C[a, b]$ ve $a_2(x) \neq 0$ $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i$ sabitlerdir. (1.5) ile verilen sınır koşulları en genel halde olup $\beta_{11} = \beta_{12} = 0$ ve $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$ ise sınır koşulları ayrık sınır koşulları adını alır. Eğer

$\alpha_{12} = \beta_{12} = 0$ ve $\alpha_{21} = \beta_{21} = 0$ ve $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ise sınır koşulları periyodik olarak adlandırılır. Diğer taraftan $\alpha_{12} = \beta_{11} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0$ olması halinde ise sözü edilen sınır koşulları $y(a) = \frac{\gamma_1}{\alpha_{11}}, y'(a) = \frac{\gamma_2}{\alpha_{21}}$ şeklinde ifade edilen başlangıç koşullarına dönüşür.

Yukarıda verilen $B_i, i = 1, 2$ sınır operatörleri lineerdir.

Tanım 1.3 (Wronskian Determinantı): (1.4) denkleminin çözümleri olan $y_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında türevlenebilir fonksiyonlar ise her $x \in [a, b]$ için y_1 ve y_2 fonksiyonlarının Wronskian'ı $W(y_1, y_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \quad (1.6)$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer Wronskian determinantının değeri $[a, b]$ aralığının herhangi bir noktasında sıfırdan farklı ise bu durumda y_1 ve y_2 fonksiyonları aynı aralıkta lineer bağımsızdır.

Tanım 1.4 (Ortogonal Fonksiyonlar): $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$, $[a, b]$ aralığında tanımlanan herhangi sayıdaki sürekli fonksiyonlar ailesi olsun. $\phi_m(x)$ ve $\phi_n(x)$ fonksiyonları bu ailenin herhangi iki elemanı olmak üzere

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x) \phi_n(x) r(x) dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (1.7)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu fonksiyonlar ortogonaldır. $\{\phi_n(x)\}$ fonksiyon ailesine $[a, b]$ aralığında $r(x)$ fonksiyonuna göre ortogonal sistem denir. Ayrıca

$$\int_a^b \{\phi_m(x)\}^2 dx = 1 \quad (m = n) \quad (1.8)$$

eşitliği gerçekleşiyorsa her eleman normalize edilmiştir denir.

Tanım 1.5 (Fonksiyon serileri): $\forall a \in N$ için $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi verilsin. $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ olarak alındığında $S_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde E üzerinde tanımlanan bir $\{S_n\}$ fonksiyonlar dizisi elde edilir ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$ olur. Bu durumda $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin x noktasında oluşturduğu reel sayı serisi yakınsak olur ve toplam $f(x)$ 'dir.

Bir E kümesinde tanımlanan $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin $\{S_n\}$ kısmi toplamlar dizisi düzgün yakınsak ise $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin oluşturduğu fonksiyon serisi düzgün yakınsak olur.

Tanım 1.5.a. (Fonksiyonların Ortonormal Serilere Açılımı): $[a, b]$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad a \leq x \leq b \quad (1.9)$$

şeklinde $\phi_n(x)$, $n=1,2,\dots$ ortonormal fonksiyonların serisine açılabilirdiği düşünülürse, bu durumda sözü edilen serilere ortonormal seriler denir.

Tanım 1.6 (Lineer Operatör): Belirli bir küme üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları ve α, β skalerleri için,

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg \quad (1.10)$$

koşulunu sağlayan L operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 1.7 (İç Çarpım Uzayı): V bir kompleks vektör uzayı olsun. $\varphi : V \times V \rightarrow C$, $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$ fonksiyoneli $\forall x, y \in V$ ve $\forall \alpha \in C$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonuna bir iç çarpım, $\langle x, y \rangle$ sayısına x ve y 'nin iç çarpımı ve $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

$$\begin{aligned}
1) \langle x, x \rangle &\geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\
2) \langle x, y \rangle &= \overline{\langle y, x \rangle} \\
3) \langle \alpha x, y \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle \\
4) \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Tanım 1.8 (Adjoint Ve Self-Adjoint Diferensiyel Operatörü)

n . mertebeden homogen olmayan lineer diferensiyel denklem

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \tag{1.12}$$

olmak üzere

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 \tag{1.13}$$

türev operatörü için $Ly = f$ denklemindeki L^* adjoint operatörü,

$$L^* y = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (\bar{a}_n y) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (\bar{a}_{n-1} y) + \dots + \bar{a}_0 y \tag{1.14}$$

Şeklinde. Burada $\bar{a}_n$ fonksiyonu, a_n fonksiyonunun kompleks eşleniğidir. Her bir a_k fonksiyonu k . mertebeden sürekli türevlenebilir, u ve v fonksiyonları da herhangi bir aralıkta n . mertebeden sürekli türevlenebilir ise bu durumda Lagrange özdeşliğinden,

$$\bar{v}Lu - u\overline{L^*v} = \frac{d}{dx} B[u, v] \tag{1.15}$$

yazılabilir. Buradaki $B[u, v]$ bilinear formu,

$$B[u, v] = \sum_{m=1}^n \sum_{\substack{j+k=m-1 \\ j \geq 0, k \geq 0}} (-1)^j u^{(k)} (a_m \bar{v})^{(j)} \tag{1.16}$$

olarak tanımlıdır. Eğer L ikinci mertebeden bir diferensiyel operatörü ise,

$$\begin{aligned}\overline{v}Lu - u\overline{L^*v} &= \frac{d}{dx}[ua_1\overline{v} + u'a_2\overline{v} - u(a_2\overline{v})'] \\ &= u''a_2\overline{v} + u'a_1\overline{v} + u[-a_2\overline{v}'' + (-2a_2' + a_1)\overline{v}' + (-a_2'' + a_1')\overline{v}].\end{aligned}\quad (1.17)$$

Lagrange özdeşliği geçerli olduğu aralıkta integre edilirse,

$$\int_a^b (\overline{v}Lu - u\overline{L^*v})dx = \langle v, Lu \rangle - \langle L^*v, u \rangle = B[u, v] \big|_{x=b} - B[u, v] \big|_{x=a} \quad (1.18)$$

bulunur. Bu da Green özdeşliğidir (Mauch 2004).

Tanım 1.9 (Lagrange Özdeşliği): L operatörü Sturm-Liouville operatörü olmak üzere,

$$uLv - vLu = [p(uv' - vu')]'. \quad (1.19)$$

Bu özdeşliğin ispatı operatör üzerinde birkaç işlem yapılarak kolayca yapılabilir

$$\begin{aligned}uLv - vLu &= u \left[\frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) + qv \right] - v \left[\frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + qu \right] \\ &= u \frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) - v \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) \\ &= u \frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) + p \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} - v \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) - p \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \\ &= \frac{d}{dx} \left[pu \frac{dv}{dx} - pv \frac{du}{dx} \right].\end{aligned}\quad (1.20)$$

Tanım 1.10 (Green Özdeşliği): Sturm-Liouville operatörü için Green özdeşliği,

$$\int_a^b (uLv - vLu)dx = [p(uv' - vu')] \big|_a^b. \quad (1.21)$$

şeklindedir. Bu özdeşlik Lagrange özdeşliğinin integrasyonuyla elde edilebilir.

Tanım 1.11 (Lineer Bağımlı Ve Lineer Bağımsız Fonksiyonlar): $[a, b]$ aralığında tanımlı $u_1, u_2, \dots, u_n$ fonksiyonları için en az biri sıfırdan farklı olan $c_1, c_2, \dots, c_n$ reel sayıları verildiğinde

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n = 0 \quad (1.22)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu fonksiyonlara lineer bağımlı fonksiyonlar denir. Eğer c_i katsayılarının $(1, 2, 3, \dots, n)$ hepsi birden sıfır iken (1.22) eşitliği sağlanıyorsa $u_1, u_2, \dots, u_n$ fonksiyonları lineer bağımsızdırlar.

Tanım 1.12 (Süreklilik): $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir $\Leftrightarrow$ her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (1.23)$$

Tanım 1.13 (Düzgün Süreklilik): f , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $|x - y| < \delta$ koşulunu sağlayan $\forall x, y \in [a, b]$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ bulunabilirse f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında düzgün süreklidir denir.

Tanım 1.14 (Yakınsaklık): Boş olmayan bir fonksiyonlar kümesi X olmak üzere $f_n : X \rightarrow F$, $n \in \mathbb{N}$ şeklinde fonksiyonlar olsun.

i) Eğer $\forall x \in X$ için $f_n(x) \rightarrow f(x)$ oluyorsa yani $\forall x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $\exists N = N(x, \varepsilon)$ varsa ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f 'ye noktasal yakınsar denir.

ii) $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N = N(\varepsilon)$ varsa $\forall x \in X$ ve $\forall n \geq N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ oluyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f 'ye düzgün yakınsar denir.

Tanım 1.15 (Özdeğer-Özfonksiyon) Bir fonksiyon uzayında tanımlı L lineer operatörü için,

$$Lf = \lambda f \quad (1.24)$$

olacak biçimde bir λ sabiti mevcut ise bu değere L operatörünün özdeğeri, f fonksiyonuna da özfonksiyonu denir.

Tanım 1.16 (Dirac Delta Fonksiyonu): Dirac delta fonksiyonu esas olarak kuantum mekaniğinde kullanılır ve aşağıdaki gibi ifade edilir

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Burada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (1.26)$$

ayrıca $\phi(x)$ test fonksiyonu olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \delta(x) dx = \phi(0) \quad (1.27)$$

olur.

Tanım 1.17 (Heaviside Birim Fonksiyonu):

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

ile ifade edilen Heaviside birim fonksiyonu (birim adım fonksiyonu), Dirac delta fonksiyonunun integralidir. $\phi(x)$ test fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} H'(x) \phi(x) dx &= - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \phi'(x) dx \\
&= - \int_0^{\infty} \phi'(x) dx \\
&= \phi(0)
\end{aligned} \tag{1.29}$$

olur ki buradan sonuç olarak

$$H'(x) = \delta(x) \tag{1.30}$$

elde edilir (Roac 1970).

Örnek 1.1 $f(x) = |x|$ fonksiyonun türevi bulunsun. Eğer $\phi(x)$ test fonksiyonu ise

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \phi(x) dx &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \phi'(x) dx \\
&= - \int_{-\infty}^0 (-x) \phi'(x) dx - \int_0^{\infty} x \phi'(x) dx \\
&= - \int_{-\infty}^0 \phi(x) dx + \int_0^{\infty} \phi(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\text{sgn } x) \phi(x) dx
\end{aligned} \tag{1.31}$$

olur ki bu da $f'(x) = |x|' = \text{sgn}(x)$ olduğunu gösterir. Burada x pozitif ise signum fonksiyonunun değeri (+1), x negatif ise signum fonksiyonunun değeri (-1)'dir.

Tanım 1.18 (Fourier Serileri): $f(x)$ fonksiyonu $(-L, L)$ aralığında tanımlı ve $2L$ periyoda sahip bir fonksiyon olsun.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{1.32}$$

şeklindeki ifadeye $f(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen Fourier serisi veya Fourier açılımı denir.

Fourier serisinin katsayıları a_n ve b_n 'ler olup,

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.33)$$

olarak ifade edilir.

Tanım 1.19 (Leibniz Formülü): İntegralin sınırları $a(x)$ ve $b(x)$ olmak üzere, integral altında türev alma işlemi aşağıdaki şekilde yapılır;

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} F(x, t) dt = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dt + F\{x, b(x)\} \frac{db}{dx} - F\{x, a(x)\} \frac{da}{dx} \quad (1.34)$$

$a(x)$ ve $b(x)$ sabitler olduğundan $\frac{da}{dx} = \frac{db}{dx} = 0$ olur ki

$$\frac{d}{dx} \int_a^b F(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dt \quad (1.35)$$

olur (Karadeniz 1983).

Tanım 1.20 (Laplace Dönüşümü): $F(t)$ fonksiyonu $0 \leq t < \infty$ aralığında tanımlı olsun.

$$L\{F(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (1.36)$$

integralinin yakınsak olduğu s değeri için $f(s)$ fonksiyonuna $F(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir.

Tanım 1.21 (Ters Laplace Dönüşümü): Eğer $f(s)$, $F(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü ise $F(t)$ fonksiyonuna $f(s)$ Laplace dönüşümünün ters Laplace dönüşümü denir ve

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\} \quad (1.37)$$

olarak yazılır. Genel olarak s , $a+ib$ şeklinde bir parametre olmak üzere, $f(s)$ belli iken $F(t)$ temel fonksiyonu

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(s) e^{st} dt \quad (1.38)$$

integrali ile hesaplanır (Yaşar 2005).

BÖLÜM 2

SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ

2.1 GİRİŞ

Sınır değer problemlerinin çözümü, bir diferensiyel denklemi ve verilen bölgenin sınırlarında önceden belirlenmiş koşulları sağlayan fonksiyonunun bulunmasına dayanmaktadır. Bu çalışmada, uygulama alanı oldukça geniş olan ve matematiğin temel konularından olan sınır değer problemlerinin özel bir hali niteliğindeki Sturm-Liouville problemi ve bazı ikinci mertebeden sınır değer problemleri ve integral denklemler üzerinde durulacaktır.

2.2 STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

Kısmi türevli diferensiyel denklemlerin değişkenlerine ayırma yöntemi ve buna benzer yöntemlerle adi türevli denklemlere dönüştürülmesiyle oluşan Sturm-Liouville diferensiyel denklemi uygulamalı matematiğin, sınır değer problemlerinin, integral denklemlerinin, operatörler teorisinin, sayısal çözümleme metotlarının ve analiz gelişiminde büyük rol oynamıştır. Bu bölümde Sturm-Liouville probleminin tanımı, özellikleri ve bazı özel durumları verilecektir. Sturm-Liouville diferensiyel denkleminin genel hali $a \leq x \leq b$ kapalı sınırlı aralığı üzerinde tanımlı y fonksiyonları için,

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y + \lambda \rho(x)y = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Sınır koşulları,

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad (2.2)$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

olarak verilirse (2.1) denkleminde Sturm-Liouville problemi denir. Denkleminde verilen $p(x) > 0$, $q(x)$ ve $\rho(x)$ fonksiyonlar, $\alpha_i, i=1,2$ ve $\beta_i, i=1,2$ reel sabitler olup $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$ ve $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$ koşulları sağlanmalıdır. λ sayıları (özdeğerler) da belirlenmemiş parametrelerdir. Bu özdeğerlere karşılık gelen sıfırdan farklı y fonksiyonlarına da özfonksiyon denir. Ayrıca $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılır.

Eğer $p(x) > 0$, $\alpha_i \neq 0, (i=1,2)$, $\beta_i \neq 0, (i=1,2)$ ise problem regüler, eğer $p(x)$ veya $\rho(x)$ bazı uç noktalarda sıfır ise singüler adını alır. Ayrıca hem singüler hem de regüler biçimde olan Sturm-Liouville problemleri de mevcuttur.

Özel olarak $\beta_1 = \beta_2 = 0$ için (2.2) denklemi $y(a) = y(b) = 0$ ile tanımlı Dirichlet koşuluna, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ için denklem $y'(a) = y'(b) = 0$ ile belirli Neumann sınır koşullarına indirgenebilmektedir.

Regüler bir Sturm-Liouville problemi için aşağıdaki özellikler geçerlidir;

Özellik 1. Özdeğerler reel olup, her bir özdeğer karşılık gelen bir ϕ_n özfonksiyonu vardır ki bu fonksiyon (a,b) üzerinde $n-1$ tane köke sahiptir.

Özellik 2. $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ özdeğerleri sonsuz bir dizi oluşturur ve bu özdeğerler $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ şeklinde iyi sıralanmıştır ve en küçük bir özdeğer daima mevcut olup $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ dir.

Özellik 3. λ_{i_1} ve λ_{i_2} gibi birbirinden farklı iki özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar $f(x)$ ve $g(x)$ ise bu fonksiyonlar $\rho(x)$ tarafından tanımlanan iç çarpıma göre ortogonaldır.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \rho(x) dx = 0 \quad (2.3)$$

Özellik 4. Özfonksiyonların oluşturduğu küme tamdır. $f(x)$ herhangi bir parçalı düzgün fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (2.4)$$

şeklinde Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonlarının serisine açılabilir. Buradaki c_n katsayıları,

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} \quad (2.5)$$

biçiminde tanımlıdır (Mauch 2004).

Sturm-Liouville probleminin özellikleri bu sayılanlarla sınırlı olmayıp problemin özel durumları ve özel çözüm teknikleri mevcuttur.

2.2.1 Sturm-Liouville Problemi İçin Özdeğer Ve Özfonksiyonlar

Sturm-Liouville probleminin “sıfır” çözümünden başka farklı çözümlerinin olması λ 'ya bağlıdır. Bu λ değerlerine Sturm-Liouville probleminin öz değerleri ve bu özdeğerler kullanılarak elde edilen çözümlere özfonksiyonlar dendiği bilinmektedir (Tanım 1.15).

Teorem 2.1:

(2.2) sınır koşulları ile verilen (2.1) Sturm-Liouville sınır değer problemi için özdeğerler reeldir ve reel değerli özfonksiyonlara sahiptir.

İspat:

λ kompleks bir sayı olsun. $\phi(x) [\phi(x) \neq 0]$, (2.1) Sturm-Liouville probleminin (2.2) koşullarını sağlayan kompleks değerli özfonksiyonu olsun.

$$L[\phi](x) + \lambda \rho(x) \phi(x) = 0 \quad (2.6)$$

denkleminin her iki tarafının eşleniği alınırsa,

$$\begin{aligned} \overline{L[\phi](x) + \lambda \rho(x) \phi(x)} &= L[\bar{\phi}](x) + \bar{\lambda} \rho(x) \bar{\phi} = 0 \\ L[\phi](x) &= -\lambda \rho(x) \phi(x) \end{aligned} \quad (2.7)$$

olduğundan ve bununla birlikte α_1, α_2 ve β_1, β_2 reel oldukları için $\bar{\phi}$ de (2.2) şartlarını sağlar.

Verilen denklemden yola çıkılarak

$$\int_a^b L[\phi](x) \overline{\phi(x)} dx = -\lambda \int_a^b \rho(x) \phi(x) \bar{\phi}(x) dx = -\lambda \int_a^b \rho(x) |\phi(x)|^2 dx \quad (2.8)$$

ifadesi elde edilir. $\langle u, Lv \rangle = \langle Lu, v \rangle$ iç çarpımından yararlanılarak

$$\int_a^b L[\phi](x) \overline{\phi(x)} dx = \int_a^b \phi(x) L[\bar{\phi}](x) dx = -\bar{\lambda} \int_a^b \rho(x) |\phi(x)|^2 dx \quad (2.9)$$

(2.8) ve (2.9) denklemlerinin sol tarafı eşit olduğu için

$$-\lambda \int_a^b \rho(x) |\phi(x)|^2 dx = -\bar{\lambda} \int_a^b \rho(x) |\phi(x)|^2 dx \quad (2.10)$$

elde edilir. Bu eşitlikten $\lambda = \bar{\lambda}$ bulunur yani λ reel sayıdır.

Teorem 2.2:

Sturm-Liouville sınır değer probleminin iki farklı öz değerine karşılık gelen özfonksiyonları $[a, b]$ aralığında $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır.

İspat:

λ ve μ sırasıyla ϕ ve ψ özfonksiyonlarına karşılık gelen özdeğer olsun;

$$L[\phi] = -\lambda \rho \phi, \quad L[\psi] = -\mu \rho \psi \quad (2.11)$$

ϕ_1 ve ϕ_2 aynı λ özdeğerinin farklı iki özfonksiyonu olsun. Bu durumda;

$$L\phi_1 = -\lambda\phi_1, \quad L\phi_2 = -\lambda\phi_2 \quad (2.12)$$

olur ve o halde

$$\begin{aligned} \phi_1 L[\phi_2] - \phi_2 L[\phi_1] &= 0 \\ \frac{d}{dx} [p(\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2)] &= 0 \\ p(\phi_1 \phi_2' - \phi_1' \phi_2) &= c \end{aligned} \quad (2.13)$$

burada ϕ_1 ve ϕ_2 özfonksiyonları sınır şartlarını sağladığına göre $c = 0$ 'dır.

$$\phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} - \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} = \phi_2^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\phi_1}{\phi_2} \right) = 0 \quad (2.14)$$

denkleminde göre ϕ_1 ve ϕ_2 özfonksiyonları lineer bağımlıdır. Yani $\phi_1 = k\phi_2$ olur. Buradaki k denklemin integrasyon sabitidir. Sonuç olarak aynı özdeğere karşılık gelen iki özfonksiyondan biri diğerinin bir skalerle çarpımına eşit olduğu için bu özfonksiyonlar eşittir.

Örnek 2.1:

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0 \quad (2.15)$$

probleminin özdeğer ve özfonksiyonları bulunsun. Mümkün olan özdeğerler pozitifdir, dolayısıyla özel olarak ($\alpha > 0$) olmak üzere $\lambda = \alpha^2$ alınsın. Bu durumda diferensiyel denklem $y'' + \alpha^2 y = 0$ 'dır ve genel çözüm

$$y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \quad (2.16)$$

ile verilir. $y(x) = 0$ koşulundan $A = 0$ olacaktır ve dolayısıyla

$$y(x) = B \sin \alpha x, \quad y'(x) = B\alpha \cos \alpha x \quad (2.17)$$

olur ve ikinci sınır koşulu $y'(L) = 0$ için

$$y'(L) = B\alpha \cos \alpha L = 0 \quad (2.18)$$

Bu, $B \neq 0$ ve αL değerleri $\pi/2$ nin pozitif tek tam katları için geçerlidir. Böylece

$$\alpha L = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2}, \dots \quad (2.19)$$

yani

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4L^2}, \frac{9\pi^2}{4L^2}, \dots, \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4L^2}, \dots \quad (2.20)$$

olur ki bu da verilen problemin n . özdeğeri λ_n , buna karşılık gelen özfonksiyonu ise $(n=1,2,3,\dots)$ için

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4L^2}, \quad y_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \quad (2.21)$$

ile verilir.

2.2.2 Sturm-Liouville Özdeğer Problemi İçin Adjoint Özdeğer Problemi

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx \quad (2.22)$$

iç çarpımı için L türev operatörü;

$$\langle u, Lv \rangle = \langle L^*(u), v \rangle \quad (2.23)$$

eşitliğini sağlıyor ise L operatörüne adjoint operatör denildiği bilindiğine göre eğer bu eşitlik $\forall u, v$ için sağlanıyorsa yani $L = L^*$ ise L operatörüne self-adjoint operatör denilmektedir. Sturm-Liouville özdeğer problemi için adjoint özdeğer problemi,

$$L^*u = -\lambda u \quad (2.24)$$

ile verilebilir. Bunu şu şekilde ifade edebiliriz;

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = \lambda u, \quad u(a) = 0, \quad u(b) = 0 \quad (2.25)$$

biçimde özdeğer diferensiyel denklemi ve sınır koşulları olsun. $x \in [a, b]$ olmak üzere;

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} \quad (2.26)$$

operatörü ve $\langle f, g \rangle$ iç çarpımı göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} \langle u, Lv \rangle &= \int_a^b u \left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} \right] dx \\ &= \left\{ u \frac{dv}{dx} + uv \right\} \Big|_a^b - \int_a^b \left[\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v \right] dx \\ &= -\frac{du}{dx} v \Big|_a^b + \int_a^b \left[\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{du}{dx} \right] v dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{du}{dx} \right] v dx \\ &= \langle L^*u, v \rangle \end{aligned} \quad (2.27)$$

elde edilir ki burada L^* adjoint operatörü

$$L^* = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} \quad (2.28)$$

olarak bulunur. Bu nedenle $L \neq L^*$ olduğundan bu operatör self-adjoint değildir. Eğer (2.25) denklemi e^x ile çarpılırsa;

$$\frac{d}{dx} \left(e^x \frac{du}{dx} \right) - \lambda e^x u = 0 \quad (2.29)$$

denklemi elde edilir. İç Çarpım olarak da;

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) e^x dx \quad (2.30)$$

kullanıldığında,

$$\begin{aligned} \langle u, Lv \rangle &= \int_a^b u \left[\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} \right] e^x dx \\ &= \left\{ u \frac{dv}{dx} + uv \right\} e^x \Big|_a^b - \int_a^b \left[\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v \right] e^x dx - \int_a^b u \left(\frac{dv}{dx} + v \right) e^x dx \\ &= - \left(v \frac{du}{dx} + uv \right) e^x \Big|_a^b + \int_a^b \frac{du}{dx} v e^x dx + \int_a^b \frac{d^2 u}{dx^2} v e^x dx + \int_a^b \frac{du}{dx} v e^x dx - \int_a^b u v e^x dx \\ &\quad + \int_a^b \frac{du}{dx} v e^x dx + \int_a^b u v e^x dx \\ &= -v \frac{du}{dx} e^x \Big|_a^b + \int_a^b \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} \right) v e^x dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} \right) v e^x dx \\ &= \langle L^* u, v \rangle \end{aligned} \quad (2.31)$$

olarak bulunur. Bunun sonucu olarak $L = L^*$ elde edilir. O halde (2.30) iç çarpımı ile problemin çözümü L 'nin self-adjoint olduğunu gösterir. Sonuç olarak söylenebilir ki; adjoint denklem sınır şartlarına bağlı olduğu kadar seçilen iç çarpıma da bağlıdır.

Sturm-Liouville probleminin self-adjoint olduğunu göstermek için Green formülünde u ve v sınır şartlarını sağlayan fonksiyonlar olmak üzere;

$$\begin{aligned}
p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b &= p(b) [u(b)v'(b) - v(b)u'(b)] - p(a) [u(a)v'(a) - v(a)u'(a)] \\
&= p(b) \left[-u(b) \frac{b_1}{b_2} v(b) + v(b) \frac{b_1}{b_2} u(b) \right] - p(a) \left[-u(a) \frac{a_1}{a_2} v(a) + v(a) \frac{a_1}{a_2} u(a) \right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int_a^b (uL[v] - vL[u])(x) \rho dx &= 0 \\
\int_a^b u(Lv) \rho dx &= \int_a^b (Lu)v \rho dx \\
\langle u, Lv \rangle &= \langle L^*u, v \rangle \quad \Rightarrow \quad L = L^*
\end{aligned} \tag{2.33}$$

olarak bulunur ki sonuçta Sturm-Liouville operatörü self-adjointtir.

2.3 GREEN FONKSİYONLARI

Homogen olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümleri başlangıç koşullarına ve homogen olmayan sınır koşullarına bağlı olarak sıfırdan farklıdır. Hâlbuki kısmi türevli diferensiyel denklem ve buna ait verilen sınır koşulları homogen ise genellikle çözüm fonksiyonlarının bulunuşunda Fourier yöntemi veya bir başka ifadeyle değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılmaktadır. Bununla birlikte bu tür problemlerin çözümünde özfonksiyonların açılımı yöntemi de kullanışlıdır.

Bu bölümde özellikle homogen olmayan sınır-değer problemlerinin çözümünde kullanılan Green fonksiyonları kavramı ve bu fonksiyonların özellikleri tanıtılacaktır. Green fonksiyonları matematiğin uygulamalarında da sıkça kullanılmaktadır. Örneğin,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
u(0, t) &= 0 \\
u(L, t) &= 0 \\
u(x, 0) &= g(x)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

şeklinde sınır koşullarıyla ifade edilen bir boyutlu ısı problemi değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözülürse $u(x,t)$ fonksiyonu,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \quad (2.36)$$

biçiminde elde edilir. Buradaki a_n değerleri başlangıç koşullarının gerektirdiği $g(x)$ fonksiyonunun Fourier sinüs serilerinin katsayılarıdır. Bu durumda $g(x)$ fonksiyonu ve a_n katsayıları,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.37)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2.38)$$

şeklinde dir. Elde edilen bu değerler (2.36) da yerine yazılırsa $u(x,t)$ fonksiyonu,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L g(x_0) \sin \frac{n\pi x_0}{L} dx_0 \right] \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \quad (2.39)$$

olup, integral ve sonsuz toplamın yerleri değiştirildiğinde

$$u(x,0) = \int_0^L g(x_0) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \right) dx_0 \quad (2.40)$$

elde edilir. Öte yandan homogen olmayan denklemin aşağıda verilen homogen olan sınır koşulları ile çözümü;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}
u(0,t) &= 0 \\
u(L,t) &= 0 \\
u(x,0) &= g(x)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Bu homogen olmayan problem verilen özfonksiyonların açılımı yöntemine uygun olup,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{2.43}$$

sonucuna ulaşılır. Bu Fourier sinüs serileri, $u(x,t)$ ve $\sin n\pi x/L$ homogen sınır koşullarını sağladığından terim terim integre edilebilir. Bu nedenle $a_n(t)$ fonksiyonu,

$$\frac{da_n}{dt} + k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 a_n = f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x,t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \tag{2.44}$$

şeklindeki birinci mertebeden diferensiyel denklemin çözümüdür. Bu denklemde yer alan $f_n(t)$ değerleri,

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{2.45}$$

ile ifade edilen $f(x,t)$ fonksiyonunun Fourier sinüs serilerinin katsayılarıdır. (2.43) denklemi integral çarpanı $e^{-k(n\pi/L)^2 t}$ kullanılarak çözülürse $a_n(t)$ fonksiyonları,

$$a_n(t) = a_n(0) e^{-k(n\pi/L)^2 t} + e^{-k(n\pi/L)^2 t} \int_0^t f_n(t_0) e^{k(n\pi/L)^2 t_0} dt_0 \tag{2.46}$$

olarak bulunur. $a_n(0)$ değerleri de $u(x,0) = g(x)$ başlangıç koşulunun Fourier sinüs serilerinin katsayıları olup aşağıdaki biçimde tanımlıdır.

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{2.47}$$

$$a_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2.48)$$

Bu Fourier katsayıları $u(x, t)$ fonksiyonları

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{2}{L} \int_0^L g(x_0) \sin \frac{n\pi x_0}{L} dx_0 \right) e^{-k(n\pi/L)^2 t} + e^{-k(n\pi/L)^2 t} \int_0^t \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x_0, t_0) \sin \frac{n\pi x_0}{L} dx_0 \right) e^{k(n\pi/L)^2 t_0} dt_0 \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.49)$$

şekilde yazılırsa fonksiyonda yok edilebilir. Sonsuz toplamın ve integralin yerleri hem x_0 hem de t_0 üzerinden değiştirilirse,

$$u(x, t) = \int_0^L g(x_0) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \right) dx_0 + \int_0^t \int_0^L f(x_0, t_0) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 (t-t_0)} \right) dt_0 dx_0 \quad (2.50)$$

elde edilir ki (2.50) eşitliğinin sağ tarafında yer alan ikinci integralin içindeki fonksiyon Green fonksiyonu olarak adlandırılır ve,

$$G(x, t; x_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \sin \frac{n\pi x_0}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 (t-t_0)} \quad (2.51)$$

şeklinde ifade edilir.

Sonuç olarak çözüm fonksiyonu $G(x, t; x_0, t_0)$ ile tanımlı Green fonksiyonuna bağlı olarak

$$u(x, t) = \int_0^L g(x_0) G(x, t; x_0, t_0) dx_0 + \int_0^t \int_0^L f(x_0, t_0) G(x, t; x_0, t_0) dt_0 dx_0 \quad (2.52)$$

şeklinde bulunmuş olur (Duffy 1997).

2.4 GREEN FONKSİYONLARININ ÖZELLİKLERİ

Sturm-Liouville operatörü selfadjoint olup bu operatör,

$$L = p \frac{d^2}{dx^2} + p' \frac{d}{dx} + q \quad (2.53)$$

şeklinde tanımlıdır ve bu operatörle birlikte

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0 \quad (2.54)$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0$$

sınır koşulları verilsin. $G : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı Green fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) Green fonksiyonu her $x, \xi \in [a, b]$ için simetriktir. Yani $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ eşitliğini sağlar ve ayrıca x ve ξ değişkenlerine göre sınır koşullarını sağlar.

2) G fonksiyonu $[a, b] \times [a, b]$ bölgesinde süreklidir ve $[a, b] \times [a, b] \setminus \{(x, \xi) : x = \xi\}$ aralığında $G \in C^2$ dir. Öte yandan,

$$L_x G(x, \xi) = p(x)G_{xx}(x, \xi) + p'(x)G_x(x, \xi) + q(x)G(x, \xi) = 0 \quad (2.55)$$

denklemini sağlar.

3) $\partial G / \partial x$ fonksiyonu $x = \xi$ noktasında bir sıçrama süreksizliğine sahiptir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(\xi^+, \xi^-) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi^-, \xi^-) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\frac{\partial G}{\partial x}(\xi + \delta, \xi) - \frac{\partial G}{\partial x}(\xi - \delta, \xi) \right] \\ &= \frac{1}{p(\xi)} \end{aligned} \quad (2.56)$$

2.5 GREEN FONKSİYONLARININ KURULMA YÖNTEMLERİ

Green fonksiyonlarının kurulumunda birden çok metot mevcut olup, bu kısımda kuruluş yöntemlerinden sadece ikisi olan seri formunda ve kapalı formda elde edilişleri anlatılacaktır. Öncelikle aşağıda ifade edilen özdeğer denkleminin özelliklerini ifade etmek faydalı olacaktır.

$$Ly_n(x) = \lambda_n w(x) y_n(x) \quad (2.57)$$

şeklinde tanımlanan denklemin tüm özdeğerleri reeldir ve tüm özfonksiyonları ortogonaldır veya ortogonalleştirilebilir. Burada L operatörü Hermite operatörü olmaktadır. Bu nedenle selfadjointtir. L operatörünün tüm $y_n(x)$ özfonksiyonlarının bilindiği ve bu özfonksiyonların probleme ait sınır koşullarını sağladığı kabul edilsin. L operatörünün özfonksiyonlarının bir tam küme oluşturmamasından faydalanılarak homogen olmayan,

$$Ly(x) = f(x) \quad (2.58)$$

denkleminin sınır koşullarına göre çözümü bulunabilir. Bazı c_n katsayıları için $y(x)$ şeklindeki çözüm fonksiyonları bilinen özfonksiyonların bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Yani çözüm fonksiyonları,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x) \quad (2.59)$$

şeklinde ifade edilebilir. $Ly(x) = f(x)$ denklemi, L operatörünün lineer olması nedeniyle aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$f(x) = Ly(x) = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n Ly_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda_n w(x) y_n(x) \quad (2.60)$$

$$\int_a^b y_j^* f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b c_n \lambda_n y_j^*(z) y_n(z) w(z) dz \quad (2.61)$$

eşitliği (2.60) denkleminin ilk ve son terimleri y_j^* ile çarpılıp, integre edilmesiyle elde edilir. Özfonksiyonların ortogonal olması nedeniyle, sağ taraftaki integraller $n \neq j$ için sıfırdır ve dolayısıyla c_n katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$c_n = \frac{1}{\lambda_n} \frac{\int_a^b y_n^*(z) f(z) dz}{\int_a^b y_n^*(z) y_n(z) w(z) dz} \quad (2.62)$$

(2.61) bağıntısı yardımıyla tüm c_n katsayıları bulunabilir. $y(x)$ fonksiyonları (2.59) denkleminin çözüm fonksiyonlarıdır ve bu fonksiyonlar

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\int_a^b y_n^*(z) f(z) dz}{\int_a^b y_n^*(z) y_n(z) w(z) dz} y_n(x) \quad (2.63)$$

şeklindedir. $\hat{y}_n(x)$ fonksiyonları normalize edilmiş özfonksiyonlar ise her n için,

$$\int_a^b \hat{y}_n^*(z) \hat{y}_n(z) w(z) dz = 1 \quad (2.64)$$

(2.62) eşitliği toplam ve integrasyonun sırası değiştirilebildiği varsayılarak

$$y(x) = \int_a^b \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n} \hat{y}_n(z) \hat{y}_n^*(z) \right] \right\} f(z) dz \quad (2.65)$$

biçimde yazılabilir. Son denklemdeki parantez içerisindeki toplam ifadesi genellikle $G(x, t)$ şeklinde yazılır ve problemin Green fonksiyonu olarak adlandırılır. Burada Green fonksiyonu seri formunda elde edilmiştir. Bunun sonucu olarak (2.65) eşitliği,

$$y(x) = \int_a^b G(x, z) f(z) dz \quad (2.66)$$

halini alır. Böylece herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için Green fonksiyonu daima oluşturulabilir.

Homogen olmayan Sturm-Liouville probleminin çözümü için sınır koşulları,

$$Ly = (p(x)y')' + q(x)y = f(x) \quad (2.67)$$

$$B_1 y = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad (2.68)$$

$$B_2 y = \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad (2.69)$$

olmak üzere bu probleme ait Green fonksiyonu aşağıdaki denklemleri sağlar.

$$L[G(x, \xi)] = \delta(x - \xi) \quad (2.70)$$

$$B_1[G(x, \xi)] = B_2[G(x, \xi)] = 0 \quad (2.71)$$

Homogen denklemin (2.68) ve (2.69) ile verilen sınır koşullarını sağlayan çözümü y_1 ve y_2 fonksiyonları olsun. Green fonksiyonu $x \neq \xi$ için

$$Ly_1 = 0, \quad B_1 y_1 = 0, \quad (2.72)$$

$$Ly_2 = 0, \quad B_2 y_2 = 0. \quad (2.73)$$

homogen denklemi ve homogen sınır koşullarını sağlar. Sözü edilen Green fonksiyonu,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} c_1(\xi) y_1(x), & a \leq x \leq \xi \\ c_2(\xi) y_2(x), & \xi \leq x \leq b \end{cases} \quad (2.74)$$

formunda olur. Burada ξ değişkeninin bilinmeyen fonksiyonları c_1 ve c_2 fonksiyonlarıdır.

$$G(\xi^-, \xi) = G(\xi^+, \xi) \quad (2.75)$$

$$c_1(\xi)y_1(\xi) = c_2(\xi)y_2(\xi) \quad (2.76)$$

eşitlikleri Green fonksiyonunun sürekliliğindendir. (2.67) denklemi standart formda yazılarak,

$$G''(x, \xi) + \frac{p'}{p}G'(x, \xi) + \frac{q}{p}G(x, \xi) = \frac{\delta(x - \xi)}{p} \quad (2.77)$$

denkleme dönüşür. c_1 ve c_2 fonksiyonları için diğer bir denklem ise $x = \xi$ noktasındaki sıçrama süreksizliğinden elde edilir ve bu

$$G'(\xi^+, \xi) - G'(\xi^-, \xi) = \frac{1}{p(\xi)} \quad (2.78)$$

$$c_2(\xi)y_2'(\xi) - c_1(\xi)y_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}. \quad (2.79)$$

şeklindedir. Bu durumda c_1 ve c_2 fonksiyonları için

$$c_1(\xi)y_1(\xi) - c_2(\xi)y_2(\xi) = 0 \quad (2.80)$$

$$c_1(\xi)y_1'(\xi) - c_2(\xi)y_2'(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)} \quad (2.81)$$

denklemleri elde edilmiş olur. Bu sistemi Cramer kuralına göre çözülecek olursa,

$$c_1(\xi) = -\frac{y_2(\xi)}{p(\xi)(-W(\xi))}, \quad c_2(\xi) = -\frac{y_1(\xi)}{p(\xi)(-W(\xi))} \quad (2.82)$$

eşitliklerine ulaşılır. Buradaki $W(x)$, y_1 ve y_2 fonksiyonlarının Wronskian'ıdır. Böylece istenen Green fonksiyonu,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, & a \leq x \leq \xi \\ \frac{y_2(x)y_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}, & \xi \leq x \leq b \end{cases} \quad (2.83)$$

şeklinde olup, Sturm-Liouville probleminin çözümü de,

$$y = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.84)$$

ile tanımlıdır. Son eşitlikte $G(x, \xi)$ fonksiyonu ile $w(x)=1$ şeklindeki ağırlık fonksiyonu integral denklemin çekirdeğini oluşturmaktadır. Buradaki (2.83) ile ifade edilen Green fonksiyonu kapalı formdadır.

Örnek 2.2:

$$\begin{aligned} y'' &= 0, \quad 0 < x < 1 \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.85)$$

problemi için Green fonksiyonunun elde edilişi aşağıda verilmektedir.

Burada $L_\lambda = L_0$ olup $\lambda = 0$ 'ın bir özdeğer olmadığı kolayca görülür. $u_1(x) = x$ ve $u_2(x) = x-1$ şeklinde seçilsin. Bu durumda

$$W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (2.86)$$

olarak bulunur. O halde bu problem için aranan Green fonksiyonu

$$G(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} x(\xi-1) & 0 \leq x \leq \xi \\ \xi(x-1) & \xi \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.87)$$

şeklinde olur.

2.5.1 Adi Diferensiyel Denklemler İçin Green Fonksiyonunun Oluşturulması

n -inci mertebeden bir diferensiyel denklem

$$L[y] \equiv p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (2.88)$$

şeklinde verilsin. Burada $p_0(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve $p_0(x) \neq 0$ dır. Sınır koşulları ise $(k = 1, 2, \dots, n)$ olmak üzere

$$V_k(y) = \alpha_k y(a) + \alpha_k^1 y'(a) + \dots + \alpha_k^{n-1} y^{n-1}(a) + \beta_k y(b) + \beta_k^1 y'(b) + \dots + \beta_k^{n-1} y^{n-1}(b) \quad (2.89)$$

ile verilsin. Burada $y(a), y'(a), \dots, y^{n-1}(a), y(b), y'(b), \dots, y^{n-1}(b)$ nin fonksiyonları olan $V_1, \dots, V_n$ ler lineer bağımsız formlardır. (2.88) ve (2.89) ile verilen homogen sınır değer probleminin $y(x) \equiv 0$ trivial çözümünden başka çözümünün olmadığı varsayılırsa sınır değer Green fonksiyonu $G(x, \xi)$, $a < \xi < b$ olmak üzere herhangi bir ξ için inşa edilmiş olunan ve aşağıdaki özellikleri taşıyan bir fonksiyondur.

Özellik 1. $G(x, \xi)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b$ aralığında süreklidir ve x 'e göre ilk $n-2$ 'inci mertebeden türevleri vardır.

Özellik 2. x 'e göre $n-1$ inci mertebeden türevinin $x = \xi$ noktasında birinci çeşit bir süreksizliği vardır ve sıçrama miktarı $\frac{1}{p_0(x)}$ kadardır. Bir başka deyişle,

$$\left. \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=\xi+0} - \left. \frac{\partial^{n-1} G(x, \xi)}{\partial x^{n-1}} \right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(x)} \quad (2.90)$$

(2.90) denklemi $[a, \xi)$ ve $(\xi, b]$ aralıklarının ikisinde de $G(x, \xi)$ fonksiyonu x 'in bir olarak düşünülür ve sonuçta (2.88) denkleminin bir çözümü olacaktır (Hasanov et al 2002).

2.5.2 Sınır-Değer Problemlerinin Çözümünde Green Fonksiyonunun Kullanılması

Sınır değer problemlerinin pek çok çözüm yolu olduğu bilinmekle beraber bu tez içinde ağırlık verilen Green fonksiyonları ile çözümleri de oldukça önemli ve yoğundur. Bu bölümde sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan Green fonksiyonları anlatılacaktır.

Teorem 2.3:

İkinci mertebeden türevi mevcut ve sürekli y fonksiyonları için, $p(x)$ sürekli diferensiyellenebilir, $q(x)$ sürekli ve her $x \in [a, b]$ için $p(x) > 0$ olmak üzere L selfadjoint operatörü

$$Ly \equiv \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y \equiv (p(x)y')' + q(x)y \quad (2.91)$$

şeklinde tanımlı olsun. Öncelikle her $x \in [a, b]$ için,

$$Ly = 0 \quad (2.92)$$

denkleminin

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad (2.93)$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

sınır koşulları altında yalnızca sıfır çözümünün mevcut olduğunu varsayalım. Bu durumda eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise, her $x \in [a, b]$ için,

$$Ly = f(x) \quad (2.94)$$

homogen olmayan denkleminin (2.93) ile verilen sınır koşulları altında

$$y(x) = \int_a^b G(x,t)f(t)dt \quad (2.95)$$

şeklinde yazılabilen tek bir çözümü vardır. (2.95) denklemi açık olarak 1.çeşit Fredholm integral denklemini ifade etmektedir. Buradaki $G(x,t)$ fonksiyonu $[a,b] \times [a,b]$ üzerinde sürekli ve $\{(x,y) \in [a,b] \times [a,b] : x \neq y\}$ üzerinde ikinci mertebeden türevi süreklidir. Ayrıca $t \in [a,b]$ için,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t+0,t) - \frac{\partial G}{\partial x}(t-0,t) = \frac{1}{p(t)}. \quad (2.96)$$

İspat:

Çözüm fonksiyonlarının tek olduğunu göstermek amacıyla y_1 ve y_2 fonksiyonlarının (c) ile verilen sınır koşullarıyla birlikte $Ly = f(x)$ denklemini çözdüğünü varsayalım. Buradan $y = y_1 - y_2$ fonksiyonunun yine aynı sınır koşullarıyla birlikte $Ly = 0$ denklemini çözer. Hipotez gereği y fonksiyonu $y \equiv 0$ şeklindeki sıfır çözümü olmalıdır. Böylece $y_1 = y_2$ olup problemin çözümü mevcut ise bunun tek türlü olduğu açıktır.

$Ly = 0$ denkleminin (2.93) ile verilen sınır koşullarından birincisini sağlayan $y = u$ şeklinde bir çözümü ve yine benzer şekilde aynı denklemin ikinci sınır koşulunu sağlayan $y = v$ şeklinde bir çözümü vardır. Her $x \in [a,b]$ için,

$$p(x)W(x) = A \quad (2.97)$$

olmak üzere $A \neq 0$ olup, $W(x)$ ise sözü edilen u ve v fonksiyonlarının Wronskian determinantını ifade etmektedir. Böylece $G : [a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{u(x)v(t)}{A}, & a \leq x \leq t \leq b \\ \frac{u(t)v(x)}{A}, & a \leq t \leq x \leq b \end{cases} \quad (2.98)$$

şeklinde tanımlanabilir. $G(x,t)$ fonksiyonunun $[a,b] \times [a,b]$ üzerinde sürekli olduğu $t \rightarrow x$ için sağ ve sol limit alınarak gösterilebilir. Diğer taraftan $G(x,t)$ fonksiyonunun $x < t$ ve $x > t$ için iki defa sürekli türevlenebilirdir ve ayrıca $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x}(t+0,t) - \frac{\partial G}{\partial x}(t-0,t) &= \lim_{x \rightarrow t} \left(\frac{u(t)v'(x)}{A} - \frac{u'(x)v(t)}{A} \right) \\ &= \frac{W(t)}{A} \\ &= \frac{1}{p(t)} \end{aligned} \quad (2.99)$$

Son olarak $x \in [a,b]$ için,

$$y(x) = \int_a^b G(x,t) f(t) dt \quad (2.100)$$

ya da başka bir ifadeyle

$$y(x) = \frac{v(x)}{A} \int_a^x u(t) f(t) dt + \frac{u(x)}{A} \int_x^b v(t) f(t) dt \quad (2.101)$$

fonksiyonunun (2.93)-(2.94) probleminin bir çözümü olduğu gösterilmelidir. y fonksiyonu G sürekli oldukça iyi tanımlı olacağından,

$$y(a) = \frac{u(a)}{A} \int_a^b v f \quad (2.102)$$

$$y(b) = \frac{v(b)}{A} \int_a^b u f$$

yazılabilir. (2.101) bağıntısı türetilirse, $x \in [a,b]$ için,

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{v'(x)}{A} \int_a^x u f + \frac{v(x)u(x)f(x)}{A} + \frac{u'(x)}{A} \int_x^b v f - \frac{u(x)v(x)f(x)}{A} \\
&= \frac{v'(x)}{A} \int_a^x u f + \frac{u'(x)}{A} \int_x^b v f
\end{aligned} \tag{2.103}$$

olur dolayısıyla

$$y'(a) = \frac{u'(a)}{A} \int_a^b v f \tag{2.104}$$

$$y'(b) = \frac{v'(b)}{A} \int_a^b u f.$$

(2.92) ve (2.104)'den u fonksiyonu birinci sınır koşulunu sağladığından,

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \frac{1}{A} (\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a)) \int_a^b v f = 0 \tag{2.105}$$

elde edilir. Böylece y fonksiyonunun da birinci sınır koşulunu sağladığı görülür. Benzer şekilde v fonksiyonu ikinci sınır koşulunu sağladığından, y de ikinci sınır koşulunu sağlar.

Diğer taraftan (2.103) bağıntısı $p(x)$ ile çarpılarak, ikinci defa türev alınırsa,

$$p(x)y'(x) = \frac{p(x)v'(x)}{A} \int_a^x u f + \frac{p(x)u'(x)}{A} \int_x^b v f \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(p(x)y'(x)) &= \frac{1}{A} \frac{d}{dx}(p(x)v'(x)) \int_a^x u f + \frac{1}{A} p(x)v'(x)u(x)f(x) \\
&\quad + \frac{1}{A} \frac{d}{dx}(p(x)u'(x)) \int_x^b v f - \frac{1}{A} p(x)u'(x)v(x)f(x).
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Ayrıca $pW = p(uv' - u'v) = A$ ve $Lu = Lv = 0$ olup,

$$Ly = \frac{Lv}{A} \int_a^x uf + \frac{Lu}{A} \int_x^b vf + f = f \quad (2.108)$$

elde edilir ki ispat tamamlanır.

Burada dikkat edilirse Green fonksiyonunun kuruluşu f fonksiyonundan bağımsız olarak yapılmaktadır. Başka bir deyişle elde edilen Green fonksiyonu her f fonksiyonu için kullanılabilir.

2.5.3 İkinci Mertebeden Self-adjoint Sınır Değer Problemi İçin Çözülebilirlik Koşulu

Homogen olmayan lineer sınır değer problemlerinin çözümünün mevcut olmadığı durumlar olabilir. Genel olarak,

$$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x) \quad (2.109)$$

$$y(a) = y(b) = 0$$

göz önüne alınsın. Eğer $u(x)$ homogen problemin bir çözümü ise

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = 0 \quad (2.110)$$

ve $u(a) = u(b) = 0$ olur. (2.109) denklemi $u(x)$ ile çarpılıp a 'dan b 'ye integre edilirse,

$$\int_a^b u(x) \{ (p(x)y'(x))' + q(x)y(x) \} dx = \int_a^b u(x)f(x)dx \quad (2.111)$$

Kısmi integrasyonla, $u(a) = u(b) = 0$ olduğu da göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)(p(x)y'(x))' dx &= [u(x)p(x)y'(x)]_a^b - \int_a^b p(x)y'(x)u'(x)dx \\ &= - \int_a^b p(x)y'(x)u'(x)dx \end{aligned} \quad (2.112)$$

elde edilir. Tekrar kısmi integrasyon uygulanırsa, $y(a) = y(b) = 0$ olduğu da göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} -\int_a^b p(x)y'(x)u'(x)dx &= -[p(x)u'(x)y(x)]_a^b + \int_a^b (p(x)u'(x))'y(x)dx \\ &= \int_a^b (p(x)u'(x))'y(x)dx \end{aligned} \quad (2.113)$$

Bu eşitlik (2.111) de yerine yazılırsa,

$$\int_a^b y(x)\{(p(x)u'(x))' + q(x)u(x)\}dx = \int_a^b u(x)f(x)dx \quad (2.114)$$

bağıntısına ulaşılır ki $u(x)$ homogen problemin çözümü olduğundan,

$$\int_a^b u(x)f(x)dx = 0 \quad (2.115)$$

elde edilir. Bu da (2.109) probleminin çözülebilmesi için gerekli şartın $f(x)$ fonksiyonunun homogen problemin çözümü olan $u(x)$ fonksiyonuna ortogonal olması gerektiğini belirtmektedir.

Örnek 2.3:

$$y'' + \frac{1}{4}y = f(x) \quad (2.116)$$

diferensiyel denklemi için sınır koşullarıyla

$$y(0) = y(\pi) = 0 \quad (2.117)$$

olarak verilen. Green fonksiyonunun bulunması ve $f(x) = \sin 2x$ ve $f(x) = x/2$ fonksiyonları için çözüm aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

Denklemin sol tarafındaki operatör verilen sınır koşulları altında Hermite operatörü olduğundan Green fonksiyonunun oluşturulabilmesi için öncelikle özfonksiyonlarının bulunması gerekir. Bu özfonksiyonlar da,

$$y'' + \frac{1}{4}y = \lambda y \quad (2.118)$$

denklemini sağlayacaktır. Bu denklemin çözümü,

$$y(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}\right)x + B \cos\left(\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}\right)x \quad (2.119)$$

şeklindedir. Sınır koşulları $B = 0$ ve $\sin\left(\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}\right)\pi = 0$ olmasını gerektirir ki bu durumda

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \lambda} = n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.120)$$

olmalıdır. Böylece sınır koşullarını sağlayan lineer bağımsız özfonksiyonlar, n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere,

$$y_n(x) = A_n \sin nx \quad (2.121)$$

şeklindedir. Ayrıca bunlara karşılık gelen özdeğerler de,

$$\lambda_n = \frac{1}{4} - n^2 \quad (2.122)$$

biçimindedir. Diğer taraftan özfonksiyonların normalizasyonundan A_n katsayıları,

$$\int_0^\pi A_n^2 \sin^2 nxdx = 1 \quad \Rightarrow \quad A_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \quad (2.123)$$

eşitliği ile belirlidir. O halde sözü edilen problem için gerekli Green fonksiyonu,

$$G(x, z) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx \sin nz}{\frac{1}{4} - n^2} \quad (2.124)$$

ile tanımlıdır. $f(x) = \sin 2x$ için problemin çözümünde,

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx \sin nz}{\frac{1}{4} - n^2} \right) \sin 2z dz = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{\frac{1}{4} - n^2} \int_0^{\pi} \sin nz \sin 2z dz \quad (2.125)$$

bulunur. Bu denklemin en solundaki integral $n = 2$ olmadıkça sıfırdır. $n = 2$ olması durumunda ise,

$$\int_0^{\pi} \sin^2 2z dz = \frac{\pi}{2} \quad (2.126)$$

elde edilir. $f(x) = \sin 2x$ için problemin çözümü,

$$y(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{\sin 2x}{15/4} \frac{\pi}{2} = -\frac{4}{15} \sin 2x \quad (2.127)$$

şeklinde elde edilir. $f(x) = x/2$ için ise çözüm fonksiyonu,

$$y(x) = \int_0^{\pi} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx \sin nz}{\frac{1}{4} - n^2} \right) \frac{z}{2} dz = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{\frac{1}{4} - n^2} \int_0^{\pi} z \sin nz dz \quad (2.128)$$

olarak tanımlıdır. İntegral kısmi integrasyonla hesaplanırsa, $n \neq 0$ için,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} z \sin nz dz &= \left[-\frac{z \cos nz}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nz}{n} dz \\ &= \frac{-\pi \cos n\pi}{n} + \left[\frac{\sin nz}{n^2} \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{\pi(-1)^n}{n} \end{aligned} \quad (2.129)$$

$n = 0$ için integralin değeri sıfır olur ki $f(x) = x/2$ olması halinde çözüm fonksiyonu,

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n \left(\frac{1}{4} - n^2 \right)} \quad (2.130)$$

ile tanımlıdır (Krasnov et al. 1976).

2.6 LİNEER DENKLEMLER İÇİN GREEN FONKSİYONU İLE İLGİLİ ÖRNEKLER

2.6.1 Green Fonksiyonları Kuruluşu

Modern matematikte ve fizik, mühendislik gibi diğer bilim dallarında Green fonksiyonlarının önemi yoğun bir şekilde vurgulanmaktadır. Özellikle sınır değer problemlerinin çözümleri üzerindeki etkisi, fonksiyonun özelliklerini tam anlamıyla yansıtmaktadır. Bu bölümde gerek uygulamalı matematikte gerekse mekanik fizik ve mühendislikte Green fonksiyonunun kuruluşu ile ve uygulama alanları ile ilgili seçkin örnekler verilecektir.

Örnek 2.4:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad \lambda > 0, \quad 0 < x < \pi \quad (2.131)$$

denklemini için sınır koşulları

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (2.132)$$

şeklinde verilen problemin Green fonksiyonunun elde edilişi aşağıda verilmektedir.

Burada $L(y) = y''$ ve $L_{\lambda}(y) = y'' + \lambda y$ olduğu göz önünde bulundursun. Probleme ait özdeğerler $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$ biçiminde olduğundan, $\lambda \neq n$ için;

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \sin \sqrt{\lambda} x \\ u_2(x) &= \sin \sqrt{\lambda} (x - \pi) x \end{aligned} \quad (2.133)$$

şeklinde seçilirse bu durumda

$$k(0)W(u_1, u_2)(0) = \begin{vmatrix} 0 & -\sin \sqrt{\lambda} x \\ \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x \end{vmatrix} = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi \quad (2.134)$$

elde edilir ve aranan Green fonksiyonu,

$$G(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} -\frac{\sin \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} (\xi - \pi)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x}, & 0 \leq x \leq \xi \\ -\frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi \sin \sqrt{\lambda} (x - \pi)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x}, & \xi \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.135)$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Örnek 2.5:

$$\begin{aligned} u'' &= 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) + u(1) &= 0 \\ u'(0) + u'(1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.136)$$

sistemi için Green fonksiyonunun kurulumunda,

$$\begin{aligned} u'_\xi &= 0, \quad x > \xi > 0 \\ u_\xi(\xi^+) &= 0, \quad u'_\xi(\xi^+) = 1 \end{aligned} \quad (2.137)$$

olmak üzere

$$G(x, \xi) = H(x - \xi)u_\xi(x) + Ax + B \equiv E(x, \xi) + Ax + B \quad (2.138)$$

olacak şekilde Green fonksiyonları bulunmalıdır. Bu durumda;

$$E(x, \xi) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \xi \\ x - \xi & x \leq \xi \leq 1 \end{cases} \quad (2.139)$$

biçiminde tanımlı ve ayrıca,

$$\begin{aligned}
 B_1(G) &= (E(0, \xi) + B) + (E(1, \xi) + A + B) \\
 &= 2B + A + (1 + \xi) = 0 \\
 B_2(G) &= (0 + A) + (1 + A)
 \end{aligned} \tag{2.140}$$

çözüm yapıldığı taktirde

$$\begin{aligned}
 A &= -1/2 \\
 B &= -1/4 + \xi/2
 \end{aligned} \tag{2.141}$$

olarak bulunur dolayısıyla aranan Green fonksiyonu,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{\xi}{2}, & 0 \leq x \leq \xi \\ (x - \xi) - \frac{1}{4} + \frac{\xi}{2} - \frac{x}{2}, & x \leq \xi \leq 1 \end{cases} \tag{2.142}$$

veya

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{4} + \frac{|x - \xi|}{2} \tag{2.143}$$

şeklinde bulunmuş olur.

Örnek 2.6 :

$$y'' + \lambda y = x, \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{2.144}$$

sınır değer problemi için Green fonksiyonunu elde edilmişinde öncelikle

$$y''(x) = 0, \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{2.145}$$

şeklindeki sınır değer probleminin çözümleri bulunmalıdır. Sözü edilen problemin iki lineer bağımsız çözümü,

$$y_1(x) = x \quad (2.146)$$

ve

$$y_2(x) = x - \frac{\pi}{2} \quad (2.147)$$

olduğundan

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{W(\xi)}, & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{y_1(\xi)y_2(x)}{W\xi}, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (2.148)$$

formunda bir Green fonksiyonu aranacaktır. Burada,

$$W = \begin{vmatrix} \xi & \xi - \frac{\pi}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2} \quad (2.149)$$

olur. Dolayısıyla,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi} \xi - 1 \right) x, & 0 \leq x \leq \xi \\ \left(\frac{2}{\pi} x - 1 \right) \xi, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (2.150)$$

olacak şekilde sonuca ulaşılır.

Örnek 2.7:

$f(x)$, $0 < x < L$ ’de parçalı düzgün fonksiyon olmak üzere

$$y'' = -f(x) \quad 0 < x < L \quad (2.151)$$

kısmi diferensiyel denkelmi

$$y(0) = 0 = y(L) \quad (2.152)$$

sınır koşulları ile bir sınır değer problemidir. Bu problemin çözümünde

$$y'(x) = -\int_0^x f(z) dz + A \quad y(x) = -\int_0^x \int_0^\xi f(z) dz d\xi + Ax + B \quad (2.153)$$

hesaplanır. A ve B belirtilen sabitler olmak üzere sınır koşulları

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + A \cdot 0 + B \\ 0 &= -\int_0^L \int_0^\xi f(z) dz d\xi + AL + B \end{aligned} \quad (2.154)$$

sonuçlarını verir. Buradan

$$B = 0, \quad A = \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^\xi f(z) dz d\xi \quad (2.155)$$

elde edilir. Burada çift katlı integral, integralin yerleri değiştirilerek tek katlı integrale dönüştürülüp aşağıdaki gibi ifade edilebilir

$$\int_0^x \int_0^\xi f(z) dz d\xi = \int_0^x \int_z^x f(z) d\xi dz = \int_0^x (x-z) f(z) dz \quad (2.156)$$

böylece çözüm şu şekilde yazılır

$$\begin{aligned}
y(x) &= -\int_0^x (x-z)f(z)dz + \frac{x}{L} \int_0^L (L-z)f(z)dz \\
&= \int_0^x \frac{z}{L} (L-z)f(z)dz + \int_x^L \frac{x}{L} (L-z)f(z)dz \\
&= \int_0^L G(x,z)f(z)dz
\end{aligned} \tag{2.157}$$

burada $G(x, z)$ Green fonksiyonu

$$G(x, z) = \begin{cases} \frac{z(L-x)}{L}, & 0 \leq z \leq x \\ \frac{x(L-z)}{L}, & x \leq z \leq L \end{cases} \tag{2.158}$$

olarak tanımlanır (Pinsky 1991).

2.6.2 Uygulamalarda Green Fonksiyonları

Örnek 2.8 :

ℓ uzunluğundaki titreşen bir şeride ait diferensiyel denklem ve buna ait sınır koşulları,

$$v''(\xi) + \lambda^2 v(\xi) = f(\xi) \quad \xi = [0, \ell] \tag{2.159}$$

$$\begin{aligned}
v(0) &= v(\ell) \\
v'(0) &= v'(\ell)
\end{aligned} \tag{2.160}$$

şeklindedir. Bu problem selfadjoint olup, homogen denklemin çözümleri $\sin \lambda \xi$ ve $\cos \lambda \xi$ biçimindedir. Çözüm fonksiyonları bunların bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilmek istenirse,

$$\begin{aligned}
u(\xi) &= A_1 \sin \lambda \xi + A_2 \cos \lambda \xi & 0 \leq \xi \leq x \\
u(\xi) &= B_1 \sin \lambda \xi + B_2 \cos \lambda \xi & x \leq \xi \leq \ell
\end{aligned} \tag{2.161}$$

ve ayrıca sınır koşullarının uygulanmasıyla da,

$$\begin{aligned} A_2 &= B_1 \sin \lambda l + B_2 \cos \lambda l \\ A_2 &= B_1 \cos \lambda l - B_2 \sin \lambda l \end{aligned} \quad (2.162)$$

elde edilir. Diğer taraftan $u(\xi)$ fonksiyonunun $x = \xi$ noktasındaki sürekliliğinden,

$$(B_1 - A_1) \sin \lambda x + (B_2 - A_2) \cos \lambda x = 0 \quad (2.163)$$

ve $u'(\xi)$ fonksiyonunun $x = \xi$ noktasındaki sıçrama süreksizliğinden,

$$\lambda(B_1 - A_1) \cos \lambda x - \lambda(B_2 - A_2) \sin \lambda x = 1 \quad (2.164)$$

denklemlerine ulaşılır.

Elde edilen bu dört denklemden A_1, A_2, B_1, B_2 katsayıları çözülürse,

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\sin \lambda \left(x - \frac{\ell}{2} \right)}{2\lambda \sin \lambda \frac{\ell}{2}} & A_2 &= \frac{\cos \lambda \left(x - \frac{\ell}{2} \right)}{2\lambda \sin \lambda \frac{\ell}{2}} \\ B_1 &= \frac{\sin \lambda \left(x + \frac{\ell}{2} \right)}{2\lambda \sin \lambda \frac{\ell}{2}} & B_2 &= \frac{\cos \lambda \left(x - \frac{\ell}{2} \right)}{2\lambda \sin \lambda \frac{\ell}{2}} \end{aligned} \quad (2.165)$$

şeklinde bulunmuş olur. Böylece aranan Green fonksiyonu da,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\cos \lambda \left(x - \xi - \frac{\ell}{2} \right)}{2\lambda \sin \lambda \frac{\ell}{2}}, & 0 \leq \xi \leq x \\ \frac{\cos \lambda \left(x - \xi + \frac{\ell}{2} \right)}{2\lambda \sin \lambda \frac{\ell}{2}}, & \ell \geq \xi \geq x \end{cases} \quad (2.166)$$

eşitliğiyle tanımlıdır.

Örnek 2.9:

$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$ diferensiyel denkleminin

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u_t(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.167)$$

olarak verilen sınır koşulları ile çözümü, değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak

$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx}$ de

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad XT'' = \alpha^2 X''T \quad (2.168)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{\alpha^2 T} \quad (2.169)$$

elde edilir. x 'e bağlı X''/X ve t 'ye bağlı $T''/\alpha^2 T$ fonksiyonları bütün x ve t 'ler için ancak her biri aynı sabite eşit ise uyushabilirler. Bu sebeple bir λ sabiti için

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{\alpha^2 T} = -\lambda \quad (2.170)$$

olur ki burada $-\lambda$ kullanılması özdeğer probleminin tanınmasını kolaylaştırmak için kullanılmaktadır. Böylece kısmi türevli denklem iki ayrı adi diferensiyel denkleme aşağıdaki şekilde ayrılabilir;

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \\ T'' + \lambda \alpha^2 T &= 0 \end{aligned} \quad (2.171)$$

Sınır koşullarına göre

$$\begin{aligned} u(0, t) &= X(0) + T(t) = 0 \\ u(L, t) &= X(L) + T(t) = 0 \end{aligned} \quad (2.172)$$

olur ve özdeğer problemi

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0 \quad (2.173)$$

olarak tanımlanır ve bu problemin özdeğerleri

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.174)$$

sayılarıdır ve λ_n 'lere ait fonksiyonlar

$$X_n = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.175)$$

(2.171) düşünülerek $u_t(x, 0) = X(x)T'(0) = 0$ homogen başlangıç koşulu $T'(0) = 0$ olduğunu gösterir. Ayrıca $\lambda_n = n^2 \pi^2 / L^2$ özdeğeri ile ilgili $T_n(t)$ çözümü

$$T_n'' + \frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{L^2} T_n = 0, \quad T_n'(0) = 0 \quad (2.176)$$

koşullarını sağlamalıdır. (2.176)'deki diferensiyel denklemin genel çözümü

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi\alpha t}{L} + B_n \sin \frac{n\pi\alpha t}{L} \quad (2.177)$$

dir.

$$T'_n(t) = \frac{n\pi\alpha}{L} \left(-A_n \sin \frac{n\pi\alpha t}{L} + B_n \cos \frac{n\pi\alpha t}{L} \right) \quad (2.178)$$

türevi $B_n = 0$ ise $T'_n(0) = 0$ koşulunu sağlar. Böylece (2.176) in çözümü

$$T_n(t) = \cos \frac{n\pi\alpha t}{L} \quad (2.179)$$

olarak bulunur. (2.175) ve (2.179) sonuçları birleştirilerek $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$u_n(x, t) = X_n(t) T_n(t) = \cos \frac{n\pi\alpha t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.180)$$

çarpım fonksiyonlarının sonsuz dizisi elde edilir. Bu sonuç problemin homogen sınır koşullarını sağlar. Üst üste ekleme ile

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi\alpha t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.181)$$

sonsuz serisi elde edilir. $0 < x < L$ olmak üzere

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \quad (2.182)$$

homogen olmayan sınır koşullarını sağlamak için A_n katsayılarını seçmek gerekir ki

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2.183)$$

seçilir ki bu $[0, L]$ aralığında $f(x)$ 'in Fourier sinüs serisini verir. Böylece problemin seri çözümü $\{A_n\}_1^\infty$ katsayıları (2.183) kullanılarak hesaplanan

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi\alpha t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.184)$$

seri, $f(x)$ 'in Fourier sinüs serisinden sadece n . terimde $\cos(n\pi\alpha t/L)$ çarpanı kullanılarak elde edilir (Akın 2006).

BÖLÜM 3

İNTEGRAL DENKLEMLER

Diferensiyel denklemler kuramı matematik, modern mühendislik, fizik eğitiminin ve uygulamalarının önemli bir kısmını oluşturmaktadır. Genel olarak diferensiyel denklemler, bir takım bağımsız değişkenleri, bu değişkenlerin fonksiyonlarını ve fonksiyonların sonlu mertebeden türevlerini içeren denklemlerdir. Doğal bilimler ve sosyal bilimlerdeki süreçlerin matematik modellerinin oluşturulmasında karşımıza genel olarak diferensiyel denklemler çıkmaktadır. İntegral denklemler kavramı ise diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan integral dönüşümleri ile ortaya çıkmıştır.

İntegral denklemler ilk olarak Pier Simon Laplace tarafından 1782’de fizik ve astronomi alanında kullanılmıştır. Fakat integral denklemler kavram olarak ilk 1888’de Bois Reymond tarafından ele alınmıştır. Veian B. Fourier 1822 yılında ısı denkleminin çözümünde kullanılan denklemleri vermiştir. Abel başlangıcı 1823’e dayanan integral denklemleri çalışmalarında mekanik problemlerinin genel formülü

$$f(x) = \int_a^{\alpha} \frac{\varphi(y)}{(x-y)^2} dy \quad f(0) = 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.1)$$

olan bir integral denklemini ortaya koymuştur. $a = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ sınırlarının seçimi ile Huygens toutochrone(eşit zaman) problemini ilk olarak ele almıştır.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) \varphi(t) dt \quad (3.2)$$

integral denklemini Poisson tarafından ele alınmış, daha sonra 1830 yılında Liouville tarafından çözümün serisel yakınsaklığı ispatlanmıştır. Vita Volterra (1860-1940) tarafından

integral sınırlarından birinin x değişkeni olduğu lineer integrallere ait çalışmalar yayınlanmıştır. İntegral sınırlarında $x = b$ değişimini yaparak elde edilen

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (3.3)$$

integral denklemi ilk olarak Eric İvan Fredholm tarafından 1900 yılında araştırılmıştır.

Bu bölümde, kısaca tarihi gelişiminden söz edilen integral denklemler ve onların sınıflandırılması üzerine bilgi verilmektedir.

3.1 İNTEGRAL DENKLEMLER VE İNTEGRAL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

Genel olarak ifade edilebilir ki; bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemlere integral denklemler denilmektedir. (a, b) aralığı üzerinde negatif olmayan bir

$f(x)$ fonksiyonu için $\int_a^b f(x) dx$ integrali sonlu ise $f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığı üzerinde

integre edilebilirdir. λ sayısal bir parametre, $f(x)$ ve $K(x, t)$ bilinen fonksiyonlar, $\varphi(x)$ ise bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere tek değişkenli fonksiyonlarda bir integral denklemin en genel hali aşağıdaki gibidir;

$$\psi(x) \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (3.4)$$

Burada $K(x, t)$ fonksiyonuna integral denklemin çekirdeği denmektedir. İntegral denklemlerin sınıflandırılması lineer ve lineer olmayan integral denklemler, singüler ve singüler olmayan integral denklemler, Volterra ve Fredholm integral denklemler, diğer tipte integral denklemler şeklinde yapılmaktadır.

3.1.1 Lineer ve lineer olmayan integral denklemler

$\varphi(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\varphi(t) dt \quad (3.5)$$

integral denkleminde $\varphi(x)$ bilinmeyen fonksiyonu lineer ise (3.5) integral denklemi lineerdir.

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\varphi^n(t) dt, \quad n \neq 1 \quad (3.6)$$

integral denkleminde $\varphi(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun n . kuvveti bulunduğundan (3.6) denklemi lineer olmayan integral denklemdir.

3.1.2 Singüler ve Singüler olmayan İntegral Denklemler

$a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$ aralığında $K(x,t)$ fonksiyonu sürekli ise integral denklem singüler (tekil) olmayan integral denklem, $K(x,t)$ fonksiyonu sürekli değil ise integral denklem singüler integral denklemdir. Ayrıca integral sınırlarının en az birinin sonsuz olması halinde de integral denklem singüler integral denklem sınıfına dâhil olacaktır. Örneğin $u(x)$ 'in Fourier Sinüs Transformasyonu olan $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \int_0^{\infty} \sin xt u(t) dt \quad (3.7)$$

ve $u(x)$ 'in Laplace Transformasyonu olarak kullanılan

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} u(t) dt \quad (3.8)$$

$f(x)$ fonksiyonu singüler integral denklemdir (Aksoy 1983).

Ayrıca $\varphi(x)$ bilinmeyen fonksiyon ve $u(x), f(x), K(x, t)$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \\ u(x) &= f(x) + \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklindeki integral denklemlerinde bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde olduğundan 1. çeşit integral denklem olarak adlandırılmaktadır. Benzer şekilde $\varphi(x)$ bilinmeyen fonksiyon ve $f(x), K(x, t)$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (3.10)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (3.11)$$

şeklindeki integral denklemlerin de bilinmeyen fonksiyon hem integral içinde hem de integral dışında olduğundan 2. çeşit integral denklem olarak adlandırılmaktadır.

$$u(x) \varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (3.12)$$

olarak verilen integral denklemde de $\varphi(x)$ bilinmeyen fonksiyon ve $u(x), f(x), K(x, t)$ bilinen fonksiyonlardır ve burada integral dışındaki bilinmeyen fonksiyonun katsayısı nedeniyle integral denklem 3. çeşit integral denklem adını almaktadır.

İntegral denklemlerin sınıflandırılmasına bakıldığında homogen ve homogen olmayan integral denklemlerle de karşılaşmaktadır. Bir integral denklemde integralin dışında ve bilinmeyen φ fonksiyonu dışında bir f fonksiyonu bulundurmayan (3.10) tipindeki integral denklemlere

homogen integral denklem, f fonksiyonu bulunduran (3.11) tipindeki integral denklemlere homogen olmayan integral denklemler denir.

$\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq 1$ olan bir parametre olmak üzere integral denklemlere λ 'nın ilave edilmesiyle daha genel durum elde edilir ve bu tür denklemler parametrelili integral denklemler olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt, \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad (3.13)$$

3.1.3 Diğer Tipte İntegral Denklemler

$K(x, y)$ çekirdeği sadece $x-t$ ' yi değişken kabul eden fonksiyon olmak üzere

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\varphi(t)dt \quad (3.14)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, x-t)\varphi(t)dt \quad (3.15)$$

Denklemleri verilsin. Burada (3.14) denklemi konvolisyon integral denklemi, (3.15) denklemine hemen hemen konvolisyon integral denklemi formundadır. (3.14)'de $K(x, x-t)$ çekirdeği (3.14)'daki $K(x-t)$ çekirdeğinden farkı iki değişkenli çekirdek olmasıdır.

(3.14) ile verilen denklemde $x-t < 0$ iken $K(x-t) = 0$ olması durumunda

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^x K(x-t)\varphi(t)dt \quad (3.16)$$

$x < t$ veya $t < 0$ iken $K(x-t) = 0$ olması durumunda

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt \quad (3.17)$$

şeklinde ve (3.16)'ün özel hali olan konvolisyon çekirdekli Volterra integral denkleme ulaşılır.

İntegro diferensiyel denklemler de bilinmeyen fonksiyonun türevlerini içeren integral denklemdir ve

$$a_0(x)\varphi^n(x) + a_1(x)\varphi^{n-1}(x) + \dots + a_n(x)\varphi(x) + \sum_{m=0}^s \int_0^x K_m(x,t)\varphi^m(t)dt = f(x) \quad (3.18)$$

formunda bir denklemdir. Burada $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x), K_m(x,t) (m=0,1,2,\dots,s)$ bilinen fonksiyonlar ve $\varphi(x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur.

Konvolisyon çekirdekli ve $[0, +\infty]$ aralığında tanımlı

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty K(x-t)\varphi(t)dt \quad (3.19)$$

şeklindeki integral denklemlere Wiener-Hopf denklemi denir. Fox integral denklemi de aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty K(xt)\varphi(t)dt \quad (0 < x < \infty) \quad (3.20)$$

n -boyutlu uzayın bir D bölgesinde x ve y n -boyutlu vektör olarak çizildiğinde

$$\varphi(x) = f(x) + \int_D K(x,t)\varphi(t)dt \quad (3.21)$$

olacak şekilde vektörel formda bir integral denklem elde edilir. İki boyutlu integral denklemler ise

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \int_a^b \int_a^b K(x, y, t_1, t_2) \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (3.22)$$

formunda ifade edilir (Aksoy 1983).

3.2 VOLTERRA VE FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLER

$K(x, t)$ bilinen fonksiyon integral denkleminin çekirdeği λ sayısal bir parametre, $f(x)$ bilinen fonksiyon, $\varphi(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad (3.23)$$

denklemini, ikinci çeşit Volterra lineer denklemini olarak isimlendirilir. $f(x) \equiv 0$ ise (3.23) denklemini

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad (3.24)$$

formunu alır ve ikinci çeşit homogen Volterra denklemini olarak adlandırılır. $\varphi(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (3.25)$$

denklemini birinci çeşit Volterra integral denklemini olarak isimlendirilir. Bu tür denklemlerde, integral işaretinin üst sınırında (veya sınırlarından birinde) x değişkeni bulunmaktadır. x değişkeninin $x = b$ gibi sabit bir değere eşit olması halinde yazılabilecek,

$$\int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (3.26)$$

şeklindeki denklemlere ise Fredholm integral denklemleri denilmektedir. Fredholm integral denklemleri de denklemin içeriğine göre 1., 2. ve 3. çeşit integral denklemleri olarak gruplandırılmaktadır ve bu denklemler sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_a^b K(x,t)\varphi(t) dt \\
 \varphi(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t) dt \\
 \psi(x)\varphi(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t) dt
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

(Lovitt 1950).

3.3 LINEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER İLE VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

Değişken veya sabit katsayılı lineer diferensiyel denklemler başlangıç koşulları verilerek Volterra tipinde bir integral denkleme dönüştürülebilir. Yani n . mertebeden lineer diferensiyel denklem aşağıdaki gibi verilirse

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} + a_1(x) \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}} + a_2(x) \frac{d^{(n-2)}y}{dx^{(n-2)}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \tag{3.28}$$

bu diferensiyel denklemin başlangıç koşulları

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \tag{3.29}$$

ise bu koşulları gerçekleyen çözümü ikinci çeşit bir Volterra integral denkleminin çözümüne indirgenebilir. Bu söylenenler ikinci mertebeden bir lineer diferensiyel denklem üzerinde gerçekleştirilecek olursa, denklem ve sınır koşulları

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x) \tag{3.30}$$

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1 \quad (3.31)$$

olsun.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x) \quad (3.32)$$

denecek olursa (3.31) başlangıç koşulları dikkate alınarak (3.32) denklemi ard arda iki kez integre edilirse

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t) dt + C_1, \quad (3.33)$$

$$y = \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + C_1 x + C_0$$

bulunur. Bu sonuca ulaşabilmek için aşağıdaki bağıntıdan yararlanılır,

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x}_{n} f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{(n-1)} f(z) dz \quad (3.34)$$

(3.33) ve (3.34) dikkate alınarak (3.30) diferensiyel denklemi

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x) \varphi(t) dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x) (x-t) \varphi(t) dt + C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x) = F(x) \quad (3.35)$$

formunda ya da

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \varphi(t) dt = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x) \quad (3.36)$$

yazılabilir. Eğer,

$$K(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x - t)] \quad (3.37)$$

$$f(x) = F(x) - C_1 a_1 - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x)$$

seçilirse (3.36) denklemi

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x, t) \varphi(t) dt + f(x) \quad (3.38)$$

şeklindeki ikinci çeşit Volterra integral denklemine dönüştürülmüş olur.

Örnek 3.1 :

$x=0$ için $y=0$, $y'=1$ başlangıç koşulları ile verilen,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = \cos x \quad (3.39)$$

diferensiyel denklemi integral denkleme dönüştürülsün.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = u(x) \quad (3.40)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} \quad (3.41)$$

olup

$$\int_0^x dy' = \int_0^x u(x) dx \quad (3.42)$$

$$|y'(x)|_0^x = \int_0^x u(x) dx \quad (3.43)$$

$$y'(x) - 1 = \int_0^x u(x) dx \quad (3.44)$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = 1 + \int_0^x u(x) dx \quad (3.45)$$

bulunur ve iki kere daha integral alınır

$$\int_0^x dy = \int_0^x \left[1 + \int_0^x u(x) dx \right] dx \quad (3.46)$$

$$|y(x)|_0^x = \int_0^x dx + \int_0^x \int_0^x u(x) dx dx \quad (3.47)$$

$$y(x) - y(0) = |x|_0^x + \int_0^x (x-t) u(t) dt \quad (3.48)$$

$$y(x) = x + \int_0^x (x-t) u(t) dt \quad (3.49)$$

olur. Bulunanlar (3.39)'te yerine yazılırsa

$$u(x) + x + \int_0^x (x-t) u(t) dt = \cos x \quad (3.50)$$

bu sonuçta düzenlenerek

$$u(x) = \cos x - x + \int_0^x (t-x) u(t) dt \quad (3.51)$$

şeklinde 2. çeşit bir Volterra integral denkleminde ulaşılmış olur.

Aynı zamanda bir integral denklem bir diferensiyel denkleme dönüştürülebilir. Bunun için Leibnitz formülünün uygulanması yeterlidir.

Örnek 3.2:

Aşağıdaki verilen integral denklem diferensiyel denkleme dönüştürülsün.

$$u(x) - \lambda \int_0^x \sin tu(t) dt = x \quad (3.52)$$

Verilen denklemin her iki tarafının x 'e göre türevi alınırsa

$$\frac{du(x)}{dx} - \lambda \frac{d}{dx} \int_0^x \sin tu(t) dt = 1 \quad (3.53)$$

Leibnitz formülüne göre

$$\frac{d}{dx} \int_0^x u(t) \sin t dt = \int_0^x 0 dt + u(x) \sin x = u(x) \sin x \quad (3.54)$$

elde edilir ve (3.53) ifadesi

$$u' - \lambda u \sin x = 1 \quad (3.55)$$

şeklini alır.

3.4 İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

İntegral denklemlerin sonucuna ulaşmak için birçok çözüm yöntemi vardır. Bunlardan en sık kullanılanları ardışık yaklaşırma metodu ve teorik yöntemdir. Bu kısımda integral denklemin çözümünde kullanılan bu yöntemler açıklanacaktır.

3.4.1 Ardışık Yaklaştırma Metodu

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi(t) dt \quad (3.56)$$

formunda verilen integral denklemi için ilk yaklaşım $\lambda = 0$ olsun. $\varphi(x) = f(x)$ olup bu $\varphi_0(x)$ ile gösterilsin. (3.56)' de yerine konulacak olursa ve bu da $\varphi_1(x)$ ile gösterilirse

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi_0(t) dt \quad (3.57)$$

olur ve bu integral x 'in fonksiyonu olacağından bunu

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t) \varphi_0(t) dt \quad (3.58)$$

ile gösterilerek (3.57) ifadesi kısaca

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \phi(x) \quad (3.59)$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre ilk yaklaşım

$$\varphi_0(x) = f(x) = \phi_0(x) \quad (3.60)$$

ile gösterilsin. Bu şekilde devam edilerek üçüncü yaklaşım

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \varphi_1(t) dt \quad (3.61)$$

yazarak yapılacaktır. (3.59)' de (3.60) gereğince $f(x)$ yerine $\phi_0(x)$ yazılır ve (3.61)'de yerine konursa

$$\varphi_2(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) \quad (3.62)$$

olup

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) [\phi_0(t) + \phi_1(t)] dt \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \phi_0(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K(x,t) \phi_1(t) dt \end{aligned} \quad (3.63)$$

elde edilir. Aynı şekilde (3.59) gereğince $f(x)$ yerine $\phi_0(x)$ yazılır. İntegral ifadesi (3.59) ve (3.60) gereğince $\phi_1(x)$ 'dir ve

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= \int_a^b K(x,t) \phi_1(t) dt \\ \varphi_2(x) &= \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) + \lambda^2 \phi_2(x) \end{aligned} \quad (3.64)$$

yazılabilir, böyle devam edilerek $\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_{n-1}(x), \phi_n(x)$ şeklinde fonksiyon dizisi elde edilir. Sonuç olarak $\varphi_n(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) + \lambda^2 \phi_2(x) + \dots + \lambda^n \phi_n(x)$ olarak bir seri oluşacak ve

$$\phi_0(x) = f(x); \quad \phi_n(x) = \int_a^b K(x,t) \phi_{n-1}(t) dt \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.65)$$

dir. (3.56) denklemine göre $\varphi(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) + \lambda^2 \phi_2(x) + \dots + \lambda^n \phi_n(x) + \dots$ serisi elde edilir. Burada $\varphi(x)$ fonksiyonu $\varphi_n(x)$ fonksiyonunun $n \rightarrow \infty$ için limiti olacağından $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$ olur ve λ 'nın mutlak değeri yeteri kadar küçük olduğunda $\varphi(x) = \phi_0(x) + \lambda \phi_1(x) + \lambda^2 \phi_2(x) + \dots + \lambda^n \phi_n(x) + \dots$ serisi yakınsak olur ve bu da integral denklemin çözümüdür.

3.4.2 İtere Fonksiyonlar

$$\begin{cases} K_1(x, t) = K(x, t) \\ K_i(x, t) = \int_a^b K(x, s) K_{i-1}(s, t) ds \end{cases} \quad (3.66)$$

ifadesinde $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ fonksiyonları itere fonksiyonlar olarak adlandırılır. (3.65)'de birbirini izleyen uygulamalarda açık olarak

$$K_i(x, t) = \int_a^b \dots \int_a^b K(x, s_1) K(s_1, s_2) \dots K(s_{i-1}, t) ds_{i-1} \dots ds_1 \quad (3.67)$$

şeklinde. (3.67) formunda $K_n(x, s)$, $(n-1)$ -inci dereceden integral, $K_p(s, t)$, $(p-1)$ -inci dereceden integraldir. Bu durum gösterir ki $\int_a^b K_n(x, s) K_p(s, t) ds$ integrali $(n+p-1)$ -inci derecedendir. Basit bir değişiklik yapıp düzenlenirse benzer olarak $K_{n+p}(x, t)$ aşağıdaki şekilde görülebilir;

$$K_{n+p}(x, t) = \int_a^b K_n(x, s) K_p(s, t) ds \quad (3.68)$$

Örnek 3.3:

$a=0$ ve $b=1$ için $K(x, t) = e^{\min(x, t)}$ verildiğine göre $K_1(x, t)$ ve $K_2(x, t)$ itere fonksiyonlarını bulunsun. Burada $\min(x, t)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$K(x, t) = \min(x, t) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq t \\ t & t \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.69)$$

Buna göre verilen çekirdek fonksiyonu,

$$K(x,t) = e^{\min(x,t)} = \begin{cases} e^x & 0 \leq x \leq t \\ e^t & t \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.70)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $K(x,t) = K(t,x)$ olup simetrik çekirdektir. x yerine t ve t yerine x yazıldığında bu özelliğin gerçekleştiği gözlenmektedir.

$$K_1(x,t) = K(x,t) \quad (3.71)$$

olduğu bilinmektedir. Bu halde hesaplanması gereken 2. mertebeden itere çekirdek fonksiyonudur.

$$K_2(x,t) = \int_0^1 K(x,s)K_1(s,t)ds = \int_0^1 K(x,s)K(s,t)ds \quad (3.72)$$

olup burada

$$K(x,s) = \begin{cases} e^x & 0 \leq x \leq s \\ e^s & s \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.73)$$

$$K(s,t) = \begin{cases} e^s & 0 \leq s \leq t \\ e^t & t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

demektir.

$$K_2(x,t) = \int_0^t K(x,s)K(s,t)ds + \int_t^x K(x,s)K(s,t)ds + \int_x^1 K(x,s)K(s,t)ds \quad (3.74)$$

yazılabileceği görülür. $(0,t)$ aralığında;

$$\int_0^t K(x,s)K(s,t)ds = \int_0^t e^s e^s ds = \int_0^t e^{2s} ds = \frac{1}{2}(e^{2t} - 1) \quad (3.75)$$

(t,x) aralığında;

$$\int_t^x K(x,s)K(s,t)ds = \int_t^x e^s e^t ds = e^{x+t} - e^{2t} \quad (3.76)$$

$(x,1)$ aralığında;

$$\int_x^1 K(x,s)K(s,t)ds = \int_x^1 e^s e^t ds = (1-x)e^{x+t} \quad (3.77)$$

olup $K_2(x,t)$ fonksiyonunu bulmak üzere bunların toplamı hesaplanır.

$$\begin{aligned} K_2(x,t) &= \frac{1}{2}(e^{2t} - 1) + e^{x+t} - e^{2t} + (1-x)e^{x+t} \\ &= (2-x)e^{x+t} - \frac{e^{2t} + 1}{2} \quad (t < x) \end{aligned} \quad (3.78)$$

bulunur. $(x < t)$ için $K_2(x,t)$ ifadesinde x ile t 'nin yerleri değiştirilerek $K_2(x,t)$ ifadesini yazabiliriz. Buna göre

$$K_2(x,t) = (2-t)e^{x+t} - \frac{e^{2x} + 1}{2} \quad (x < t) \quad (3.79)$$

olur. Böylece ikinci mertebeden itere çekirdek

$$K_2(x,t) = \begin{cases} (2-t)e^{x+t} - \frac{e^{2x} + 1}{2}, & 0 \leq x \leq t \\ (2-x)e^{x+t} - \frac{e^{2t} + 1}{2}, & t \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.80)$$

şeklinde tanımlanır

3.4.3 Karşılık Fonksiyonları

Bu fonksiyon

$$-k(x, t) = K_1(x, t) + K_2(x, t) + \dots + K_n(x, t) + \dots \quad (3.81)$$

olarak tanımlanır. Burada $K(x, t)$ sürekli ve reel, $k(x, t)$ serisi $M(b-a) < 1$ koşulu için düzgün yakınsak olduğu kabul ediliyor. Ayrıca $k(x, t)$ fonksiyonu da sürekli ve reel kabul ediliyor. (3.81) ifadesi

$$\begin{aligned} -k(x, t) - K(x, t) &= K_2(x, t) + K_3(x, t) + \dots + K_n(x, t) + \dots \\ &= \int_a^b K_1(x, s)K_1(s, t)ds + \dots + \int_a^b K_1(x, s)K_{n-1}(s, t)ds + \dots \\ &= \int_a^b K_1(x, s)K_1(s, t)ds + \dots + \int_a^b K_{n-1}(x, s)K_1(s, t)ds + \dots \end{aligned} \quad (3.82)$$

Bu denklemde itere fonksiyonlar $K_n(x, t) = \int_a^b K(x, t_1)K_{n-1}(t_2, t)dt_1$ bağıntısından yararlanılarak integralde yerine yazılır ve

$$\begin{aligned} -k(x, t) - K(x, t) &= \int_a^b K_1(s, t)[K_1(s, t) + \dots + K_{n-1}(s, t) + \dots]ds \\ &= \int_a^b [K_1(x, s) + \dots + K_{n-1}(x, s) + \dots]K_1(s, t)ds \end{aligned} \quad (3.83)$$

bulunur. Eğer (3.81) uygulanırsa aşağıdaki karakteristik formül elde edilir;

$$\begin{aligned} K(x, t) + k(x, t) &= \int_a^b K(x, s)k(s, t)ds \\ &= \int_a^b k(x, s)K(s, t)ds \end{aligned} \quad (3.84)$$

(Lovit, 1983).

Örnek 3.4 :

$\varphi(x) = x + \int_0^1 xt\varphi(t) dt$ integral denkleminin $K(x,t) = xt$ çekirdek fonksiyonunun karşılık fonksiyonu bulunsun. Karşılık fonksiyon $k(x,t)$ ise (3.81) gereğince itere çekirdekler hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} K_1(x,t) &= K(x,t) = xt \\ K_2(x,t) &= \int_0^1 (xs)(st)ds = \frac{xt}{3} \\ K_3(x,t) &= \frac{1}{3} \int_0^1 (xs)(st)ds = \frac{xt}{3^2} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ K_n(x,t) &= \frac{xt}{3^{n-1}} \end{aligned} \tag{3.85}$$

olup $k(x,t)$ karşılık fonksiyonu

$$-k(x,t) = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots\right) xt \tag{3.86}$$

veya parantez içi ortak çarpanı $q = \frac{1}{3}$ olan bir geometrik seri olduğundan toplamı

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \tag{3.87}$$

olur ve $k(x,t)$ fonksiyonu

$$k(x,t) = -\frac{3}{2} xt \tag{3.88}$$

şeklinde bulunur (Aksoy 1983).

Teorem 3.1:

$$L[y] = 0, \quad v_k(y) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.89)$$

sınır değer problemi $G(x, \xi)$ Green fonksiyonuna sahip ise kesim 2.5.1'deki (2.88) ve (2.89) sınır değer problemi

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi + f(x) \quad (3.90)$$

Fredholm integral denklemine denktir. Burada

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) h(\xi) d\xi \quad (3.91)$$

dır. Özellikle $L[y] = \lambda y$, $v_k(y) = 0$ sınır değer problemi aşağıdaki homogen integral denkleme denktir.

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi \quad (3.92)$$

$G(x, \xi)$ sürekli bir çekirdek olduğu için Fredholm teorisi integral denklemlere uygulanabilir. Bu nedenle (3.92) homogen integral denkleminin en çok sayılabilir sayıda $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \dots$ özdeğerine sahip olabileceğine ve bunların sonlu bir limit noktasının olmadığını söyleyebiliriz. λ 'nın özdeğerlerinin farklı değerleri için (3.90) homogen olmayan denkleminin sağ yanda yer alan $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olması durumunda vardır. Bu çözüm

$$y(x) = \lambda \int_a^b R(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi + f(x) \quad (3.93)$$

formülü ile verilir.

3.5 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında uygulamalı matematikte sıkça karşılaşılan sınır değer problemleri ve onun özel bir hali olan Sturm-Liouville problemleri üzerinde durulmuş, bazı adi türevli sınır değer problemlerinin ve Sturm-Liouville probleminin Green fonksiyonları ile çözümleri incelenmiştir. Green fonksiyonlarının kurulumunda en sık kullanılan yöntemler olan seri yöntemi ve kapalı formda kurulum yöntemleri tanıtılmış olup, bu yöntemlerle ilgili örneklerle de değinilmiştir. Green fonksiyonları ile çözüm yöntemi homogen olmayan diferensiyel denklemlerin verilen sınır koşulları altındaki çözümünü ilgilendirmektedir. Bu çözüm yönteminin en büyük kolaylığı oluşturulan Green fonksiyonunun denklemin sağ tarafında yer alan fonksiyondan bağımsız olması ve her fonksiyon için kullanılabilmesidir. Bu çalışmaya ek integral denklemlerin sınır değer problemleri, Green fonksiyonları yardımıyla teorik çözümlerinin zorluğu nedeniyle, ayrı bir çalışma konusu olarak sayısal çözümlere kaydırılabilir.

KAYNAKLAR

- Akın Ö** (2006) *Diferensiyel Denklemler Ve Sınır Değer Problemleri*, Palme Yayıncılık, Ankara, s.623-625
- Aksoy Y** (1983) *İntegral Denklemler*, Yıldız Üniversitesi Yayınları, İstanbul, Cilt-1, s.13-66.
- Duffy D G** (1997) *Green's functions With Applications*, Washington, pp.14-17, 304-306.
- Hasanov E, Uzgören G, Büyükaksoy A** (2002) *Diferensiyel Denklemler Teorisi*, Papatya Yayıncılık, İstanbul, s.163-174
- Karadeniz A A** (1983) *Yüksek Matematik*, Çağlayan Kitapevi, Cilt-3, s. 427-428
- Krasnov M, Kiselev A and Makeronko G** (1976) *İntegral Denklemler*, İstanbul, s. 14-52.
- Lovitt W V** (1950) *Linear Integral Equations*, New York, pp.1-20.
- Mauch S** (2004) *Introduction To Methods Of Applied Matematics Or Advanced Mathematical Methods For Scientists And Engineers*, Mauch Publishing Company, California, pp.1314-1323
- Pinsky M A** (1991) *Partial Differential Equations and Boundary-Value Problems With Applications* pp.343-345
- Roac G F** (1970) *Green's Functions Introductory Theory Whith Applications*, London, pp.147-148
- Yaşar İ B** (2005) *Uygulamalı Matematik*, Siyasal Kitabevi, Ankara, s.182-192

ÖZGEÇMİŞ

Seda ŞENTÜRK 1983 yılında İzmir'de doğdu; ilköğrenimini Kurtuluş İlköğretim Okulunda tamamlayarak 1997 yılında Tire Şehit Albay İbrahim Karaoğlanoğlu Lisesi'ne başladı. 2001 yılında buradan mezun olarak 2002 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2006 yılında lisans eğitimini tamamlayarak aynı yıl ZKÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitime başladı. Halen ZKÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Eğitimi sürdürmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres: Ege Üniversitesi
Tire Kutsan Meslek Yüksekokulu
35900 TİRE / İZMİR

Tel: (537) 498 41 51
Faks: (232) 512 86 16
E-posta: seda_senturk83@hotmail.com

Seda ŞENTÜRK