

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

LİMİT ÖĞRETİMİNE ALTERNATİF BİR YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan
Nurcan ALTUN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Ziya ARGÜN

ANKARA–2009

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Nurcan ALTUN' un **“LİMİT ÖĞRETİMİNE ALTERNATİF BİR YAKLAŞIM”** başlıklı tezi 30.06.2009 tarihinde, jürimiz tarafından **Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi** Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Adı Soyadı

İmza

Üye (Tez Danışmanı): Prof. Dr. Ziya ARGÜN

.....

Üye : Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

.....

Üye: Yrd. Doç. Dr. Dursun SOYLU

.....

ÖZET

LİMİT ÖĞRETİMİNE ALTERNATİF BİR YAKLAŞIM

ALTUN, Nurcan

Yüksek Lisans, Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ziya ARGÜN

HAZİRAN– 2009

Bu çalışmada, Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımla, sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla oluşturulan yaklaşımın, öğrencilerin limit hesaplamalarındaki etkileri incelenmiştir. Bu amaçla 2008-2009 öğretim yılında Ankara'nın bilinen bir Anadolu Öğretmen Lisesi 12. sınıflarından, hazır bulunuşluk testi ve karne notlarıyla denk oldukları belirlenen 27 kişilik bir kontrol ve 27 kişilik bir deney grubu oluşturulmuştur. Deney ve kontrol gruplarında toplam 5 saat süren derslerin işlenişi her iki grupta da aynı şekilde başlamıştır. Daha sonra kontrol grubunda Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımla, deney grubunda ise sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla oluşturulan yaklaşımla dersler işlenmiştir.

Deney sonrası her iki gruba da bir son test uygulanmış ve öğrencilerin cevap kâğıtları her iki grup için de hazırlanan cevap anahtarları ışığı altında incelenmiştir. Daha sonra elde edilen bulgular karşılaştırılmıştır. Yapılan karşılaştırmalar sonucunda limitin hesaplanmasında sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan daha etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

ABSTRACT**AN ALTERNATIVE APPROACH FOR TEACHING LIMIT****ALTUN, Nurcan****Master, Principal Discipline of Mathematics Education****Supervisor: Prof. Dr. Ziya ARGÜN****JUNE – 2009**

In this thesis, we investigated the effectness of the teaching approaches which is recommended in secondary mathematics curriculum and the approach which developed by using infinitesimal number concept at the calculations limit of some fundamental functions. For this purpose, in 2008-2009 academic year we selected two 12th class in an Anatolian Teachers High School in Ankara which are equivalent via readiness tests results and reported marks. One of the class was considered as a control group and the other class was selected as a experimental group. Both groups had some course which took 5 hours except the teaching approaches. After this course we addressed a test to both groups and the data were collected from these students' answers.

After the end of the teaching session a post- test was applied to both groups and answer papers of students reviewed and evaluated according to the answer key and the findings were compared. After the result of comparisons it was found that the infinitesimal numbers concept analysis was more effective than the recommended approach from the high school mathematics teaching program in the calculation of limits.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın tüm aşamalarında yardımını benden esirgemeyen, çalışma boyunca sabırla bana yol gösteren, tez danışmanım Prof. Dr. Ziya ARGÜN 'e en derin saygılarımla teşekkür ederim.

Çalışma boyunca görüş ve fikirleriyle bana yardım eden tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma özellikle de beni zor zamanlarımda yüreklendiren Betül ŞERBETÇİ ve Pınar KAPLAN' a ayrıca çok teşekkür ederim.

Diğer taraftan uygulamayı gerçekleştirdiğim devlet okulunun Müdürüne, Müdür Yardımcısına, Öğretmenlerine ve tez çalışmama katılan tüm öğrencilerine yardımlarından dolayı minnettarım.

Nihayet çalışmamın her aşamasında gösterdikleri anlayış, destek, güven ve özveriden dolayı aileme sonsuz teşekkür ederim.

Nurcan ALTUN

İÇİNDEKİLER

JÜRİ ve ENSTİTÜ ONAY SAYFASI.....	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
GRAFİKLER LİSTESİ	viii
TABLolar LİSTESİ	x
1.GİRİŞ	1
1.1.Problem Durumu.....	1
1.2.Problem Cümlesi.....	5
1.3.Araştırmanın Amacı	6
1.4.Araştırmanın Önemi.....	7
1.5.Araştırmanın Varsayımları.....	8
1.6 Araştırmanın Sınırlılıkları	8
1.7. Tanımlar ve Kısaltmalar.....	10
2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE	11
2.1. Limitin Matematiksel Yapısı.....	12
2.1.1. Giriş.....	12
2.1.2. Hazırlık: Hiperreel Sayılar ve Standart Kısım Dönüşümü.....	15
2.1.3. Sonsuz Küçüklerle Limit.....	20
2.1.4. Limit Alıştırmaları	23
2.1.5. Sonsuz Küçükler Calculusuna Bir Giriş:	25
2.2. İlgili Araştırmalar.....	33
2.2.1. Limit Öğretimi ile İlgili Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar	33
2.2.2. Limit Öğretimi ile İlgili Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar	35

3. ARAŞTIRMANIN YÖNTEMİ	42
3.1. Araştırmanın Modeli	42
3.2. Verilerin Toplanması	43
3.3. Veri Toplama Aracı	44
3.4. Çalışma Evreni	47
3.5. Farklı Eğitim Durumunun Oluşturulması	47
3.6. Araştırmanın Uygulanması	47
3.6.1. Deney Grubunda Ders İşlenişinin Devamı	50
3.6.2. Kontrol Grubunda Ders İşlenişinin Devamı	50
3.7. Verilerin Çözümlemesi ve Yorumlanması.....	51
4.BULGULAR ve YORUM.....	52
4.1. 2.Kazanım ile İlgili Bulgular	53
4.1.2. 1.Sorunun (i) Şıkkı ile İlgili Bulgular	55
4.1.3. 1.Sorunun (ii) Şıkkı ile İlgili Bulgular	56
4.2. 4.Kazanım ile İlgili Bulgular	58
4.2.1. 2.Soru ile İlgili Bulgular	60
4.2.2. 3.Soru ile İlgili Bulgular	61
4.3. 5.Kazanım ile İlgili Bulgular	62
4.3.1. 4.Soru ile İlgili Bulgular	66
4.3.2. 5.Soru ile İlgili Bulgular	67
4.3.3. 6.Soru ile İlgili Bulgular	68
4.3.4. 7.Soru ile İlgili Bulgular	70
4.4. 7.Kazanım ile İlgili Bulgular	71
4.4.1. 8.Soru ile İlgili Bulgular	74
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	78
5.1. Sonuçlar	78
5.2. Öneriler	81
KAYNAKÇA	84
EKLER LİSTESİ	91

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1: 43 numaralı deney grubu öğrencisinin 1. sorunun (i) şıkkı için cevabı

Şekil 2: 510 numaralı kontrol grubu öğrencisinin 1. sorunun (ii) şıkkı için cevabı

Şekil 3: 187 numaralı kontrol grubu öğrencisinin 4. soru için cevabı

Şekil 4: 1 numaralı kontrol grubu öğrencisinin 6. soru için cevabı

GRAFİKLER LİSTESİ

Grafik 1 (a): Deney grubu öğrencilerinin 1. sorunun (i) şıkkına verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 1 (b): Kontrol grubu öğrencilerinin 1. sorunun (i) şıkkına verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 2 (a): Deney grubu öğrencilerinin 1. sorunun (ii) şıkkına verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 2 (b): Deney grubu öğrencilerinin 1. sorunun (ii) şıkkına verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 3 (a): Deney grubu öğrencilerinin 2. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 3 (b): Deney grubu öğrencilerinin 2. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 4 (a): Deney grubu öğrencilerinin 3. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 4 (b): Deney grubu öğrencilerinin 3. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 5 (a): Deney grubu öğrencilerinin 4. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 5 (b): Kontrol grubu öğrencilerinin 4. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 6 (a): Deney grubu öğrencilerinin 5. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 6 (b): Kontrol grubu öğrencilerinin 5. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 7 (a): Deney grubu öğrencilerinin 6. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 7 (b): Kontrol grubu öğrencilerinin 6. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 8 (a): Deney grubu öğrencilerinin 7. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 8 (b): Kontrol grubu öğrencilerinin 7. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 9 (a): Deney grubu öğrencilerinin 8. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

Grafik 9 (b): Kontrol grubu öğrencilerinin 8. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1 (a): Deney grubu öğrencilerinin 1. sorunun(i) ve (ii) şıklarını cevaplarırken attıkları adımlar

Tablo 1 (b): Kontrol grubu öğrencilerinin 1. sorunun(i) ve (ii) şıklarını cevaplarırken attıkları adımlar

Tablo 2 (a): Deney grubu öğrencilerinin için 2. ve 3. soruları cevaplarırken attıkları adımlar

Tablo 2 (b): Kontrol grubu öğrencilerinin 2. ve 3. soruları cevaplarırken attıkları adımlar

Tablo 3 (a): Deney grubu öğrencilerinin 4, 5, 6 ve 7. soruları cevaplarırken attıkları adımlar

Tablo 3 (b): Kontrol grubu öğrencilerinin 4, 5, 6 ve 7. soruları cevaplarırken attıkları adımlar

Tablo 4 (a): Deney grubu öğrencilerinin 8.soruyu cevaplarırken attıkları adımlar

Tablo 4 (b): Kontrol grubu öğrencilerinin 8.soruyu cevaplarırken attıkları adımlar

Tablo 5: Sorular ve kazanımlara göre hangi yaklaşımın daha etkili olduğunu ifade edildiği tablo

1.GİRİŞ

Bu bölümde, “Problem Durumu”, “Problem Cümlesi”, “Araştırmanın Amacı”, “Araştırmanın Önemi”, “Varsayımlar”, “Sınırlılıklar” ve “Tanımlar ve Kısaltmalar” alt başlıkları ele alınmıştır.

1.1. Problem Durumu

Çağımızda matematik bireylerin bir problem ile karşılaştıklarında sistematik düşünceler üretebilmelerini, bağımsız düşünebilmelerini ve sonuç çıkarabilmelerini sağlayan bir bilim dalı olarak kabul görmüştür. Zaten matematik öğretiminin amaçlarının temelinde de bireylere matematiksel düşünceyi kazandırabilmek hedeflenmektedir.

Matematiğin uygulanmadığı hiçbir teknik alan yoktur. Matematik yalnızca çağdaş bilim ve tekniğin temel aracı değildir. Tıp, sosyal, siyasal, ekonomi, işletme, yönetim v.b. bilimler de matematiksel yöntemlere dayanmak zorundadır. Kısacası matematik, insan aklının yarattığı en büyük ortak değerdir. Matematiğin evrenselliği ise onun gücüdür. Çağları aşarak bize ulaşmıştır, yine çağları aşarak yeni kuşaklara ulaşacaktır. Büyüyerek, gelişerek, insanlığa hizmet edecek; her zaman taze ve doğru kalacaktır.

Matematik, evrensel ve soyut bir iletişim şekli ayrıca tüm bilimlerin ortak dilidir. Bu yalın dilin kullanıcısı olan bilim insanlarının sayısı her ülkede artmakta; ürettikleri bilgiler çığ gibi büyümekte; o alanının uzmanları dışındaki kişilerce dilin anlaşılması zamanla güçleşmektedir.

İleri endüstri ülkelerinde yeni bir değişim ve dönüşüm yaşanmaktadır. Söz konusu olan bu değişimlerin doğru bir şekilde algılanmasını ve değerlendirilmesini sağlayacağı için matematik öğretimi, bütün dünya ülkelerinde özel bir önem ve önceliğe sahiptir. Bu doğrultuda Türkiye’de de bazı düzenlemeler ve köklü yenilikler yapılması gerekmektedir. Ancak matematiğin öğrencilerce sıkıcı, sevilmeyen ve soyut bir disiplin olarak görülmesi onların matematiğe karşı olumlu tutum geliştirmelerine bir engel teşkil etmektedir. Acar (2005) yaptığı çalışmada, matematiği, insanın zihinsel olarak yarattığı bir sistem olarak tanımlamıştır. Bu sistemi; yapılar, bağlantılar-ilişkiler ve bu yapıların ardışık soyutlamaları ve genellemelerinden oluşan bir sürece benzetmiştir. Soyut bir yapıya sahip olan matematiğin öğrenme ve öğretilmesinin zor olduğu belirtilmiş ve matematiğin materyaller ve oyunlar ile somutlaştırılması gerektiği vurgulanmıştır. Bu durum ise, matematik eğitim ve öğretiminin ortaya konuş biçiminin ne kadar önemli olduğunu bir kez daha göz önüne sermektedir.

Matematik, soyut düşüncelerimizi sistematik bilgi olarak ifade edebilmemizi sağlayan formal bir dildir. Diğer bir ifade ile çok ucuz, hızlı ve kesin sonuç veren bir yazılım teknolojisi, bir programlama dilidir. Bu doğrultuda, günlük hayatta, matematiği kullanabilme ve anlayabilme ihtiyacı önem kazanmakta ve bu ihtiyaç sürekli artmaktadır.

Pek çok ülkede olduğu gibi ülkemizde de matematik öğretimine verilen önemin artmasıyla birlikte matematik öğretiminin nasıl daha iyi gerçekleştirilebileceği sorusuna yanıt aranmaya çalışılmaktadır. Bu bağlamda ülkemizde de pek çok araştırma yapılmış ve projeler gerçekleştirilmiştir.

Analiz (Calculus), ileri düzeydeki matematiğin başlangıcı ve matematiğin ileri konuların anlaşılmasında temel oluşturmaktadır. Ubuz’a (1999) göre, son yıllarda Analiz (Calculus)’de sayısız çalışma yapılmasının başlıca nedenleri;

- ✓ Ezbere işlem uygulamalarına yönelik eğilim,
- ✓ Kavramsal alandaki yetersizlik,

- ✓ İleri matematik öğretim ve öğrenimindeki kaliteyi yükseltmektir.

NCTM' ye göre, Analiz (Calculus) dersi sayesinde lise öğrencileri aşağıdaki yetenekleri edinmelidir (1987);

- ✓ Öğrenciler, analiz konuları üzerinde sayısal ve grafiksel olarak informal keşifler yapabilmeli,
- ✓ Her öğrenci bir grafiğin maksimum ve minimum noktalarını belirleyebilmeli,
- ✓ Problem durumlarındaki sonuçları yorumlayabilmeli,
- ✓ Limit kavramını araştırabilmeli,
- ✓ Sonsuz dizi ve seri kavramlarını irdeleyerek eğri altında kalan alanı araştırabilmelidir.

Ayrıca üniversiteye gitmek isteyen öğrenciler;

- ✓ Limit kavramının,
- ✓ Eğri altında kalan alanın,
- ✓ Değişim oranının,
- ✓ Teğet doğrusunun eğiminin,

kavramsal temellerini anlamalı ve

- ✓ Polinom, rasyonel, köklü ve transandantal fonksiyonların grafiklerini analiz edebilmelidir.

Literatür incelendiğinde üniversite öğrencilerinin fonksiyon, limit, türev ve integral gibi Analiz'deki temel kavramları kavrayamadıkları görülmektedir.

Kasten ve arkadaşlarının yapmış oldukları çalışma da Analiz eğitiminin öğrencilere iyi bir hizmet veremediğini belirtmektedir (1988).

Limit kavramı Analiz'in çeşitli dallarında çok önemli bir rol oynar. Ayrıca limit kavramı çok önemli kavramlardan birisi olan sürekliliği özel bir hal olarak ihtiva eder (Bayar ve Gündüzalp, 1988).

Limit matematikteki türev ve integral gibi birçok önemli kavramın oluşması için bilinmesi gerekli olan en temel kavramdır. Bu kavramların oluşması limit fikri oluşmadan imkânsızdır. Fakat öğrenciler tarafından limit, kavramın doğası nedeniyle her zaman zor anlaşılır ve öğrenciler bu kavramın anlaşılmasında ve limit ile ilgili hesaplamaları yapmakta çok az başarı gösterebilirler (Juter, 2006).

Öğrenciler limite ilgili birçok bilişsel zorlukla karşılaşır. Mesela onlara göre, diziler hiç bitmez, fonksiyonlar limitlerine ulaşamaz, seriler bir final cevabı oluşturamaz (Juter, 2006). Limit bir yöntemden ve bir konudan fazlasıdır. Fakat öğrenciler çoğunlukla yönetime odaklandıklarından, bu kavramı zihinlerinde yerleştiremezler. Bu nedenle de limit ile ilgili işlemleri yapmakta zorlanırlar.

Dünya ile birlikte ülkemizde de matematik öğretimi ile ilgili yapılan çalışmaların hız kazanmasına rağmen özellikle orta öğretimde matematiğin herhangi bir kavramının daha etkili nasıl oluşturulacağı konusunda yapılan çalışmalar halen az sayıdadır (Uğurel, Alan, Akkoyunlu, Güler, 2003). Çeşitli okullarda çalışan matematik öğretmenleri ile yapılan görüşmelerden de öğrencilerin, gerek limit kavramını kavramakta gerekse limit ile ilgili işlemleri yapmakta zorlandıkları ve bu konuyla ilgili bir çalışmanın yapılmasına ihtiyaç duyulduğu sonucuyla karşılaşmıştır. Bu noktadan hareketle Lise Matematik Dersi Öğretim Programında önemli bir yer işgal eden, programda kendisinden sonra yer alan türev ve integral kavramlarının temelini oluşturan ve matematikteki en soyut kavramlardan biri olan limit ile ilgili hesaplama yönelik bir çalışma yapmış bulunmaktayız.

Bu araştırmadaki asıl amacımız, limit kavramının öğretiminde, öğrenilmesinde ve limit ile ilgili hesaplamaların yapılmasında, $\varepsilon - \delta$ yöntemi ve sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla oluşturulan iki öğretim durumunun etkilerini araştırmaktır. Fakat Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit kavramı $\varepsilon - \delta$

yöntemi ile tanıtılmadığından araştırmanın problem cümlesi aşağıdaki şekilde değiştirilmiştir.

1.2. Problem Cümlesi

Bu araştırmanın temel problemi: “Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımla, sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla yapılandırılmış yaklaşımın, öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında katkısı var mıdır? Varsa bu katkılar nelerdir? Öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında Hangi yaklaşım daha etkilidir?” sorularının araştırılmasıdır.

Bu problemin cevabının araştırılmasında aşağıdaki soruların cevaplarına da ihtiyaç duyulmaktadır. Bunlar alt problem cümleleri olarak aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

1. “Sağdan Limit”, “Soldan Limit” ve “Limit” ile ilgili hesaplamalarda deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir fark var mıdır?
2. Parçalı fonksiyonların ve mutlak değer fonksiyonunun limitleri ile ilgili hesaplamalarda deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir fark var mıdır?
3. Gerçek değişkenli ve gerçek değerli fonksiyonlarda sonsuz için limit ve sonsuz limit ile ilgili hesaplamalarda deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir fark var mıdır?
4. Verilen noktalarda $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ ve $0 \cdot \infty$ belirsizlik halleri olan fonksiyonların limitlerini hesaplamada deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir fark var mıdır?

1.3. Araştırmanın Amacı

Bu tezin amacı, Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşım ile sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla yapılandırılmış yaklaşımın, öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarındaki katkısının incelenmesidir.

Programda limit öğretimi için tavsiye edilen yaklaşımda, önce bir sayının civarı hissettirilmekte daha sonra da doğal olarak ortaya çıkan sağ ve sol civardaki sayıların görüntüleri yoluyla fonksiyonun o noktadaki davranışı ortaya çıkarılmaktadır. Programda (Kazanım 2) öğrencilerden

1. Fonksiyonun bir noktadaki sağdan ve soldan limitlerini verilen ikililer yardımıyla hissetmeleri
2. Sağ-sol limit ve limit arasındaki ilişkinin ne olduğunu görebilmeleri ve aynı anda buna limit demeleri beklenmektedir.

Sonsuz küçükler yaklaşımının kullanılması durumunda ise sağ ve sol civarlar sırasıyla pozitif sonsuz küçük ve negatif sonsuz küçükler kullanılarak oluşturulmaktadır. Daha sonra odaklanılan sayıya sonsuz küçüklerin eklenip çıkarılmasıyla oluşan sayıların görüntüleri yardımıyla sağ ve sol limitler hissettirilmektedir.

Asıl incelenen kısım her iki yaklaşımın, öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarındaki etkileridir. Bunun için öğrencilere her iki yaklaşımla da çözülebilecek sorular yöneltilmiştir.

1.4. Araştırmanın Önemi

Ezberlenen bilgi zihinde uzun süre muhafaza edilemez. Sonradan öğrenilen ve tam olarak yerleşmeyen kavramlarla önceden öğrenilen kavramlar arasında bağlantı kurulmayınca da anlamlı öğrenme gerçekleşemez. Senemoğlu, anlamlı bir şekilde öğrenilen bilgiyi anlamsız olarak öğrenilen bilgiden daha kolay geri getirilebilir, daha kalıcı ve genellenebilir olarak ifade etmiştir (1998). Dolayısıyla bilgi ancak anlamlı şekilde öğrenilirse; ezberlenen ve gerçek anlamda hiçbir zaman öğrenilemeyen ve öğrenilemeyecek olan bir birikim olmaktan çıkar. Bu da ancak matematiksel kavramların öğretim sırasında somutlaştırılıp keşfettirilmeye çalışılmasıyla giderilebilir ya da en azından azaltılabilir.

Limit, Lise Matematik Dersi Öğretim Programındaki en soyut kavramlardan biridir. Ve programda bu konuyu takip eden türev ve integral kavramlarının keşfedilme felsefesi de limite dayanmaktadır.

Bu nedenle karşımıza en az limit kavramının kendisi kadar önemli olan bir başka konu çıkar: “Limit öğretimi ve limit öğretiminde kullanılması gereken metot”

Bu araştırma ile limit kavramının öğretiminden ziyade limit ile ilgili hesaplamalar için alternatif bir yaklaşım sunulmaktadır.

Deneyssel olan bu çalışma sonucunda elde edilen bilgilerin yapılmakta ve yapılacak olan eğitim çalışmalarına katkı sağlayacağı ve sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, limitin hesaplamasında etkili olacağı düşünülmektedir.

1.5. Araştırmanın Varsayımları

Bu çalışmanın tamamlanmasının ardından çalışma ile ilgili tüm süreçler yeniden gözden geçirilmiş ve çalışma ile ilgili aşağıdaki varsayımların yapılmasına karar verilmiştir.

1. Deney ve kontrol gruplarının birbirine denk olduğu,
2. Veri toplama araçlarının araştırmanın amacı ve problemi ile doğrudan örtüştüğü,
3. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin hazır bulunuşluk testindeki ve derslerin işlenmesinin ardından uygulanan son testteki sorulara ciddiye ve samimiyetle cevap verdikleri,
4. Uygulamacının (araştırmacının) her iki gruptaki rolünü tam anlamıyla yerine getirdiği,
5. Uygulamacının (araştırmacının) uygulamanın sağlıklı bir şekilde yürütülebilmesi açısından, gruplarla ilişkilerinde objektif olduğu (araştırmayı etkilemediği) varsayılmıştır.

1.6. Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu çalışmanın tamamlanmasının ardından çalışma ile ilgili tüm süreçler yeniden gözden geçirilmiş ve uygulama sürecinde çalışmayı aşağıdaki sınırlılıkların etkilediğine karar verilmiştir.

1. Bu araştırma 12. sınıflar ile,

2. Bu araştırma Ankara ili ortaöğretim okullarından bilinen bir Anadolu Öğretmen Lisesi 12. sınıflarından deney ve kontrol grubu olarak seçilen iki sınıfta bulunan 54 öğrenci ile,
3. Bu araştırma, sınıflarının deney veya kontrol grubu olarak seçilmesine rıza gösteren matematik öğretmenleri ile,
4. Bu araştırma, deney ve kontrol grubundaki uygulamaya katılmaya gönüllü olan öğrenciler ile,
5. Bu araştırma, deney ve kontrol grubu olarak seçilen sınıfların matematik öğretmenlerinin uygun gördükleri zamanlar ile,
6. Bu araştırma, deney ve kontrol grubu olarak seçilen sınıflara hazır bulunuşluk testinin uygulanması, bu sınıflarla derslerin işlenmesi ve derslerin işlenmesinin ardından gruplara son testin uygulanması için ayrılan toplam 7 ders saati ile,
7. Bu araştırma, konu işlenişinde gerekli olan materyallerin (tepegöz, projeksiyon vs) temin edilememesi ile,
8. Bu araştırma, limit kavramıyla ilgili Lise Matematik Ders Programında yer alan kazanımlardan, araştırmacı ve danışmanı tarafından belirlenen 4 kazanım ile,
9. Bu araştırma, kullanılan veri toplama araçları ile,
10. Bu araştırma, uygulama sonucunda elde edilen verilerin analiz yöntemi ile,

11. Bu araştırma, yapılan dersler sonrasında uygulamacı (araştırmacı) tarafından oluşturulan günlük ve öğrencilerin cevaplarından oluşan yazılı dokümanlarla sınırlandırılmıştır.

1.7. Tanımlar ve Kısaltmalar

Sonsuz Küçük : $\forall n \in \mathbb{N}$ için $h \neq 0$ olmak üzere , $|h| < \frac{1}{n}$ ise h sayısı sonsuz küçük bir sayı ya da sonsuz küçüktür.

$\varepsilon - \delta$ Limit Tanımı: $X \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon ve $r \in \mathbb{R}$, X 'in aşikâr olmayan bir yığılma noktası olsun. Bu taktirde

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+) (\exists \delta \in \mathbb{R}_+) (\forall x \in X) [0 < |x - r| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $L \in \mathbb{R}$ ye f 'nin r noktasındaki limiti denir ve $\lim_{x \rightarrow r} f(x) = L$ olarak gösterilir (Todorov, 2001).

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics): Amerika Birleşik Devletleri'nde bulunan Ulusal Matematik Öğretmenleri Birliği.

NCTM matematik öğretimi için aşağıdaki temel standartları benimsemekte ve önermektedir.

- Kavramsal anlama.
- Kavramlar arası ilişkiler kurma.
- Öğrenilenleri gerçek hayata transfer ederek bilgiyi kullanabilme.

BCS: Bilgisayar Cebiri Sistemleri

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Çağdaş matematik sonsuzluk kavramından doğmuştur (Karaçay 1991). Dolayısıyla limit kavramının doğuşu da sonsuzluk kavramına dayanır. Doğa olaylarında bir niceliğin sınırsız olarak büyümesi ya da küçülmesi ile sık sık karşılaşırız. Dolayısıyla sonsuz büyükler ve sonsuz küçükler olarak adlandırılan kavramlar fiziksel olaylarla ilişkilidir.

Limit kavramı Eskiçağ'da Eudoksos' un hacimler, Archimedes' in de alanlar ve eylemsizlik merkezleri üstüne yaptığı çalışmalarla ortaya çıkmıştır (Gelişim Hachette, cilt 7, s.2603).

Limit işleminin beşinci işlem olarak matematiğe girişi matematiğin ilgi alanını büyütmeyle kalmamış pek çok fiziksel probleme de çözüm getirmiştir. Çağdaş bilim ve teknoloji ürünleri varlıklarını limit kavramına borçludur. (Karaçay, 1991).

Limit kelimesi latince limes ya da limites kelimelerinden gelmekte olup anlamı sınır, uç noktadır. Ayrıca değişken bir büyüklüğün istendiği kadar yaklaşabildiği sabit değer olarak da kullanılmaktadır. Öklid ve Archimedes tarafından eğrisel kenarlara sahip şekillerle ilgili olan teoremlerde kullanılmıştır. Limit kavramı, çok önceleri kullanılmasına rağmen sonra unutulmuş ve daha sonra da Newton ile Leibniz'in eserlerinde görülmüştür (Vikipedi).

Bir $f(x)$ fonksiyonunun seçilmiş bir a noktasındaki limiti sezgisel olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

Bir a reel sayısının sağ civarındaki ve her defasında a ya daha yakın olan sayıların f fonksiyonu altındaki görüntüleriyle oluşturulan ikililer ile sol civarındaki ve her defasında a ya daha yakın olan sayıların f fonksiyonu altındaki görüntüleriyle oluşturulan ikililerin $x = a$ doğrusuyla kesişmesini beklediğimiz, ümit ettiğimiz ya da tahmin ettiğimiz noktanın ordinatı bu fonksiyonun a noktasındaki limitidir.

Şimdi de limitin matematiksel yapısını inceleyelim.

2.1. Limitin Matematiksel Yapısı

2.1.1. Giriş

Limitin $\varepsilon - \delta$ tanımı olarak adlandırılan tanımı aşağıdaki gibidir:

“ $X \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon ve $r \in \mathbb{R}$, X ’in aşikâr olmayan bir yığılma noktası olsun. Bu taktirde

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+) (\exists \delta \in \mathbb{R}_+) (\forall x \in X) [0 < |x - r| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$$

eşitsizliği sağlanıyor ise $L \in \mathbb{R}$ ye f ’nin r noktasındaki limiti denir ve $\lim_{x \rightarrow r} f(x) = L$ olarak gösterilir.”

Limitin $\varepsilon - \delta$ olarak adlandırılan ve yukarıda da verilen tanımı genelde Cauchy’ ye atfedilir. Fakat ilk defa John Wallis’ in “Arithmetica Infinitorum” (Sonsuzların Aritmetiği) da 1665’ te ortaya çıkmıştır. Wallis ‘in çalışmasını izleyen sonraki 250 yılda bu tanım birçok kez reddedilmiş ve yeniden keşfedilmiştir. Ta ki 20. yüzyılın başında matematik camiası tarafından kabul edilene kadar. Bu zamana kadar Calculus ‘taki çoğu sonuç sonsuz küçüklerle keşfedilmiştir. Çağdaş matematikçiler, matematik camiasının bu denli titiz ve kesin bir tanımı kabul

etmesinin bu kadar uzun sürmesi gerçeğine şaşırabilirken, özellikle kesin olmayan alternatif sonsuz küçük kavramı ile yaklaşımına hesabı katmaları pratik olarak kullanışlı görülmüştü. Calculus tarihindeki bu ilginç fenomen için en azından üç tane daha şaşırtıcı neden bulabiliriz.

1. Leibniz ‘den Weierstrass ‘a kadar olan zaman diliminde sadece sonsuz küçükler değil reel sayıların da kesin dayanakları yoktu. Her ne kadar $\varepsilon - \delta$ tanımı rasyonel sayıların kavramsal çerçevesinde bile mükemmel bir his oluşturduysa da bu tanım reel sayıların tamlığı gösterilmeden önce çok sıkıntılıydı. Ama bugün reel sayıların tam olduğu bilinmektedir.

2. Limitin $\varepsilon - \delta$ tanımı yerleri değiştirilemeyen “ $\forall, \exists, \forall, \forall$ ” niceleyicilerini içermesinden dolayı şok edici bir biçimde karmaşıktır. Bir limit değerinin varlığının gösterilmesinde bu niceleyiciler dörde çıkmaktadır: “ $\forall, \exists, \forall, \forall$ ”. Sonuç olarak reel analiz dersi Calculus ‘un titiz bir versiyonundan çok matematiksel mantık oluşturmalarının bir koleksiyonuna benzemektedir. Basit Calculus ve reel analiz arasındaki aralık genişler ve çoğu öğrenci matematiğin bu iki dalı arasında genel olarak bir ilişki kuramazlar. Yoğun bir çaba ile çoğunlukla geometrik yol kullanarak $\varepsilon - \delta$ tanımı daha sindirilebilir ve kabul edilebilir bir forma dönüşür. Çoğu matematikçinin sonsuz küçüklerle düşünüp araştırdığı ve çalışmalarında kabul gören $\varepsilon - \delta$ tanımını sadece nihai versiyonu olarak kullanıldığı neredeyse genel bir sırdır; yani toplumun çok az bir kesimi tarafından bilinmektedir.

Calculus tarihinde $\varepsilon - \delta$ tanımının matematikçiler arasındaki geç ve yavaş kabulü bilgisini bir yana bırakıp dikkatimizi $\varepsilon - \delta$ tanımının aşağıdaki has olmayan özelliğine odaklayalım.

3) Limitin $\varepsilon - \delta$ tanımı, limit değerinin nasıl hesaplanacağı konusunda hiçbir ipucu vermez ve tahmini bir limit değeri gerektirir.

Bu durumda makul bir limit değerin tahmin edilmesinin gerektiği ve $\varepsilon - \delta$ metodunu kullanarak tahmin edilen bu sayının istenilen limit değeri olduğunun veya olmadığının kanıtlanmasının zorunlu olduğu bir durumda kalınır. Tahmini limit değeri, fonksiyonun grafiğinin bilinmesi ya da çizilebilmesi durumunda daha kolay bulunabilir. Fakat yine de bu durumda bile limit kavramının ne olduğunun bilinmesine kesinlikle ihtiyaç vardır. Bu durumda karşımıza Calculus dersi alan üniversite birinci sınıf öğrencilerinin limitin ne olduğunu tam olarak bilmezken bu tahmini limit değerini nasıl bulacakları sorusu çıkmaktadır.

Sonuç olarak Analiz 1 (Genel Matematik) dersi alan öğrenciler için iki sorun gündeme gelmektedir. Birincisi limit değerinin hangi sayı olacağını kestirme, ikincisi ise bu kestirilen sayının gerçek limit değeri olup olmadığını test etmedir.

Bazen limit değerinin istenildiği r sayısının yakınlarında sonlu tane sayının f altındaki görüntülerine bakıp fonksiyonun davranışlarında bir örüntünün var olduğu varsayılarak limit değeri olan L sayısı tahmin edilmeye çalışılır (Stewart, 1994). Örneğin $f(r + 10^{-10}) = 1,99999...$ olsun. Bu durumda x r ye yaklaşırken limit değeri olan L nin 2 olduğu belki doğru olabilir. Fakat bu tahmin aşağıdaki iki mitemden dolayı oluşmaktadır.

Birinci miteme göre, 10^{-10} sayısının çok küçük, 10^{10} sayısı ise çok büyüktür. Çok uzun mesafeler hiçbir zaman milimetre birimi kullanılarak ölçülememekte veya çok kıymetli eşyaların değerleri kuruşla hesaplanamamaktadır. Bu gibi durumlarda birimler büyütülerek sayılar küçültülmektedir. Ölçme işi için farklı birimlerin kullanılmasının matematik yapma ile hiçbir ilgisi yoktur.

İkinci mitem ise lise öğrencilerinde gözükmemektedir. Bu miteme göre, tam sayıların doğru cevabı temsil etme ihtimali, doğru cevabı kesirlerin temsil etmesinden daha fazladır. Dolayısıyla öğrenciler her nasılsa doğru cevabın $L = 1,999999999998$ sayısı olmasından daha ziyade $L = 2$ olmasına inanmayı tercih ederler.

Ne yazık ki f fonksiyonunun sonlu sayıdaki noktada almış olduğu değerler fonksiyonun limitini tek bir biçimde belirleyemez. Yani, verilen her fonksiyonun sonlu sayıdaki noktadaki almış olduğu değerlerin hesaplanması veya bilinmesi genel olarak hem limitin kavram olarak anlaşılmasında hem de limitin değer olarak belirlenmesinde kesinlikle yeterli değildir. Aşağıdaki lemma bu olumsuzluğu kesin olarak ifade etmektedir.

Lemma 1: (Don't Guess – Tahmin Etme):

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $r \in \mathbb{R}$ X 'in aşikâr olmayan bir yığılma noktası, $P(x_i, y_i)$, $(i=1, 2, \dots, m)$, $x_i \in X$, $x_i \neq r$ ve $x_i = x_j$ ise $y_i = y_j$ olmak üzere, $\mathbb{R}^2$ 'de sonlu sayıdaki farklı nokta olsun. $L \in \mathbb{R} \mp \infty$ ' dan farklı, rastgele seçilen bir reel sayı olsun. O zaman $i=1, 2, \dots, m$ için $f(x_i) = y_i$ ve $\lim_{x \rightarrow r} f(x) = L$ (veya $\lim_{x \rightarrow r} g(x) = \mp \infty$) olacak şekilde $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir polinom fonksiyonu (veya g kesirli fonksiyonu) vardır.

İspat: Derecesi m olan bir f polinom fonksiyonu seçilir ve lineer denklem sistemi çözümlerse f ' deki katsayılar için $f(x_i) = y_i$, $i=1, 2, \dots, m$, $f(r) = L$ sisteminin her zaman en az bir çözümü vardır ve f , r 'de sürekli olduğu sürece $\lim_{x \rightarrow r} f(x) = L$ 'dir.

2.1.2. Hazırlık: Hiperreel Sayılar ve Standart Kısım Dönüşümü

Bu kısımda sonsuz küçük kavramı ile hiperreel (standart olmayan) sayıların temel özellikleri tanıtılacaktır. Ayrıca bu bölümde standart kısım dönüşümü olarak bilinen, fonksiyonlardan daha ziyade limit kavramının cebirsel karşılığı ile ilgili olan işlem de tanıtılacaktır.

Tanım 1 (Sonsuz Küçük, Sonlu ve Sonsuz Büyük Sayılar) :

i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|dx| < \frac{1}{n}$ olacak şekildeki dx sayısına sonsuz küçük adı

verilmekte ve $dx \approx 0$ sembolü ile gösterilmektedir. Eğer $x - y$ bir sonsuz küçükse x ve y sonsuz yakın denilmekte ve $x \approx y$ ile gösterilmektedir.

ii) Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ için $|x| \leq n$ ise x sonludur.

iii) Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $|x| > n$ ise x sonsuz büyüktür.

iv) x ve $y \neq 0$ ve bunlar sonlu sayılarsa $\frac{x}{y}$ şeklinde gösterilen sayılara

hiperreel (non-standart, standart olmayan) sayılar ismi verilmektedir. Tüm hiperreel sayıların kümesi ${}^*\mathbb{R}$ ile gösterilecektir. Ayrıca $I({}^*\mathbb{R})$ ile Sonsuz Küçük Sayıların kümesi, $F({}^*\mathbb{R})$ ile Sonlu Büyük Sayıların kümesi (Reel sayılar) ve $L({}^*\mathbb{R})$ ile Sonsuz Büyük Sayıların kümesi gösterilecektir.

Bu tanıma göre bütün reel sayıların sonlu olduğu ve sıfırın $\mathbb{R}$ 'deki tek sonsuz küçük olduğu açıktır. Ayrıca $\mathbb{R}$ 'nin sonsuz büyük elemanı yoktur. Aşağıdaki kurallar direkt olarak yukarıdaki tanımdan çıkarılmaktadır.

Teorem 1 (Özellikler):

i) Sonlu Sayı $\mp$ Sonlu Sayı = Sonlu Sayı,

$$\text{Sonlu Sayı} \times \text{Sonlu Sayı} = \text{Sonlu Sayı}$$

ii) Sonsuz Küçük Sayı $\mp$ Sonsuz Küçük Sayı = Sonsuz Küçük Sayı

iii) Sonsuz Küçük Sayı $\times$ Sonsuz Küçük Sayı = Sonsuz Küçük Sayı

iv) Sonsuz Küçük Sayı $\times$ Reel Sayı = Sonsuz Küçük Sayı

ve daha genel olarak

$$\text{Sonsuz küçük Sayı} \times \text{Sonlu Sayı} = \text{Sonsuz Küçük Sayı}$$

v) Pozitif Sonsuz Büyük Sayı + Pozitif Sonsuz Büyük Sayı = Pozitif Sonsuz Büyük Sayı

vi) Pozitif Sonsuz Büyük Sayı $\times$ Pozitif Sonsuz Büyük Sayı = Pozitif Sonsuz Büyük Sayı

vii) $\frac{1}{\text{Sıfır Olmayan Sonsuz Küçük Sayı}} = \text{Sonsuz Büyük Sayı}$

Aksiyom 1: Sıfırdan farklı bir sonsuz küçük bir dx sayısı vardır.

Not: Aksiyom 1 ile birlikte yukarıdaki tanım, “ ${}^*\mathbb{R}$ tüm reel sayıların uygun şekilde düzenli bir açılımıdır.” ifadesinin genel versiyonudur. $\mathbb{R}$ ‘nin tam sıralı açılımı Arşimedyen değildir. Böylece sıfırdan farklı sonsuz küçük ve sonsuz büyük sayıları içerir. Kesin olarak söylemek gerekirse $\mathbb{R}$ ‘nin hiçbir tam sıralı ${}^*\mathbb{R}$ açılımı Calculus’ un ihtiyacı için yeterli değildir. Ayrıca $\mathbb{R}$ ‘nin bir standart olmayan açılımını ele aldığımızda aşağıdaki iki prensibi sağladığı kabul edilmektedir.

Transfer Prensibi : $\mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) de tanımlı her f fonksiyonunun ${}^*\mathbb{R}^d$ ‘de $\mathbb{R}$ ‘deki denklem ve eşitsizlikleri koruyan bir *f açılımı vardır.

Doygunluk Prensibi : ${}^*\mathbb{R}$ ‘de her iç içe açık aralık dizisinin boştan farklı bir kesişimi vardır.

Bu prensiplerle ilgili daha detaylı açıklamalar için Keisler’ in “Calculus” kitabı önerilmektedir.

Teorem 2 (Asimptotik Açılım) : $r \in \mathbb{R}$ ve dx bir sonsuz küçük olmak üzere, ${}^*\mathbb{R}$ ‘deki her x sayısının $x = r + dx$ şeklinde bir asimptotik gösterimi vardır.

Lemma 2 (Teklik) : $r \in \mathbb{R}$ ve $dx \neq 0$ olsun. $r + dx = 0$ olması hem $r = 0$ ve hem de $dx = 0$ olmasını gerektirir. (Her hiperreel sayının gösterimi tektir.)

İspat: $r + dx = 0$ ise $r = -dx$ ‘tir. Bu nedenle $\mathbb{R}$ ‘deki tek sonsuz küçük 0 olduğundan $r = 0$ ‘dır.

Tanım 2 (Standart Kısım Dönüşümü):

$st : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ olacak şekilde,

a) $r \in \mathbb{R}$ ve $dx \approx 0$ için $st(r + dx) = r$

b) $dx > 0$ ve $dx < 0$, $dx \approx 0$ için $st\left(\frac{1}{dx}\right) = \mp\infty$ olarak tanımlanır.

Sonlu hiperreel sayıların birkaç önemli özelliği aşağıdaki sonuçta özetlenmiştir.

Sonuç (Sonlu Sayıların Asimptotik Açılımı):

Her $x \in F(^*\mathbb{R})$ sonlu sayısı $dx = x - st(x)$ olmak üzere, tek olarak $x = st(x) + dx$ şeklinde ifade edilir. Bir sonlu sayının bu şekildeki ifadesi literatürde Asimptotik Açılım olarak bilinmektedir.

Teorem 3 (st Fonksiyonunun Özellikleri): x ve y sonlu sayılar olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sonsuz küçük (infinitesimal) tanımından kolayca görülebilir.

i) Eğer $st(x) = st(y)$ ise $x \approx y$ dir. Ayrıca bütün sonsuz küçük dx 'ler için $st(dx) = 0$ 'dır.

ii) $\forall r \in \mathbb{R}$ için $st(r) = r$ 'dir.

iii) x ve y sonsuz yakın olmasın. Eğer $st(x) < st(y)$ ise $x < y$ 'dir. Sonuç olarak keyfi x ve y için , $x < y$ olması $st(x) < st(y)$ ve $x \leq y$ olması $st(x) \leq st(y)$ olmasını gerektirir.

iv) $st(x \mp y) = st(x) \mp st(y)$

v) $st(x \cdot y) = st(x) \cdot st(y)$

vi) $st(x/y) = st(x)/st(y)$ ($st(y) \neq 0$)

vii) $st(x^n) = (st(x))^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$ için)

viii) $st(\sqrt[n]{x}) = \sqrt[n]{st(x)}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$ için köklü sayıların özelliklerine göre)

Not: Genel cebirsel terminolojide yukarıdaki teorem aşağıdaki gibi özetlenebilir:

${}^*\mathbb{R}$ tam sıralı Arşimedyen olmayan reel değerli kapalı bir cisim, hiperreel sayılar kümesi $F({}^*\mathbb{R})$ sıfır bölensiz bir convex halka, sonsuz küçükler $I({}^*\mathbb{R})$ kümesi $F({}^*\mathbb{R})$ 'in maksimal ideali ve $F({}^*\mathbb{R})/I({}^*\mathbb{R})$ çarpım uzayı st altında $\mathbb{R}$ 'ye izomorftur.

Not (Gerçel Sayı Doğrusunun Genişlemesi):

Standart kısım dönüşümü st , sonsuz büyük sayılarla çalışırsa sonuç ∞ ya da $-\infty$ 'dan biridir. Bu durumlarda $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ genişlemesinde her zamanki legal ve illegal işlemler olarak adlandırılan aşağıdaki işlemler kullanılmak durumundadır.

a) Legal İşlemler: $\mathbb{R}$ 'deki bütün işlemler legaldir. ε pozitif bir reel sayı olduğu durumda aşağıdaki işlemler legaldir.

$$\infty + \infty = \infty \qquad -\infty - \infty = -\infty \qquad \mp\varepsilon + \infty = \infty \qquad \mp\varepsilon - \infty = -\infty$$

$$\infty \times \infty = \infty \qquad (-\infty) \times (-\infty) = \infty \qquad (-\infty) \times (\infty) = -\infty \qquad \mp\varepsilon \times \infty = \mp\infty$$

$$\varepsilon \times (\mp\infty) = \mp\infty \qquad -\varepsilon \times (\mp\infty) = \mp\infty \qquad \frac{1}{\mp\infty} = 0 \qquad \ln(\infty) = \infty$$

$$e^{-\infty} = 0 \qquad e^{\infty} = \infty$$

b) İllegal İşlemler: İllegal işlemler aşağıdakileri içermektedir.

$$\infty - \infty, \frac{1}{0}, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times (\mp\infty), 0^0$$

2.1.3. Sonsuz Küçüklerle Limit

Bu bölümde “sonsuz küçük” terimi yardımıyla bir reel değerli fonksiyonun L limit değerini hesaplamak için bazı formüller üretilmektedir. Bu formüllerin bir tanım olarak ele alınması durumunda, Analizde kullandığımız, limitin $\varepsilon - \delta$ tanımına denk olduğu bilinmektedir. Bu iki tanımdaki fark “sonsuz küçük” terimi yardımıyla limit bulmaya kalkıştığımızda L limit adayımızın tahmin edilmesinin söz konusu olmamasıdır. Fakat bu yolla limit hesaplanırken fonksiyonun tanım kümesi, limitin varlığı sorusu, yatay ve düşey asimptotlar gibi konuların hesaplama işleminde tartışmadan uzak tutulması tavsiye edilmektedir.

Tanım 3 (Limit) :

$f : X \rightarrow \mathbb{R}, (X \subseteq \mathbb{R})$ bir reel değerli fonksiyon olsun. Ve bazı $a, b, r \in \mathbb{R}$ $a < r < b$ için $(a, r) \cup (r, b) \subseteq X$ olsun.

Sıfırdan farklı bütün sonsuz küçük dx ve dy ‘ler için $\mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ ‘da $st(f(r+dx)) = st(f(r+dy)) \dots \dots (1)$ oluyorsa $st(f(r+dx)) \in \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ sayısı f ‘nin r noktasındaki limitidir ve $\lim_{x \rightarrow r} f(x) = st(f(r+dx)) \dots \dots (2)$ şeklinde gösterilir.

Sonuç (Limitin Varlığı):

(1) şartı fonksiyonun r noktasındaki limitinin $st(f(r+dx)) = L$ sayısı olduğunu ve bu sayının dx in seçimine bağlı olmadığını garanti eder. Diğer taraftan (2) yi uygulamadan önce (1) şartının kontrol edilmesine gerek yoktur. Daha doğrusu (2) ile başladıktan sonra hesaplar yapıp L değeri elde edildiğinde, L ‘nin dx sonsuz küçüğünün seçimine bağlı olup olmadığı kontrol edilmelidir. Eğer L dx ‘in seçimine bağlı değilse istenen limit değeridir. Fakat L değeri dx ‘in seçimine bağlı ise $\lim_{x \rightarrow r} f(x)$ limiti mevcut değildir.

Tanım 4 (Tek Taraflı Limit):

i) $f: X \rightarrow \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}$ bir reel değerli fonksiyon olsun ve bazı $r \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ için $(r, r + \varepsilon) \subseteq X$ ve f , $st(f(r + dx)) = st(f(r + dy)) \in \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ özelliğine, bütün pozitif dx ve dy sonsuz küçükleri için sahip olsun. Bu durumda $st(f(r + dx)) = st(f(r + dy)) \in \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\} \dots\dots(3)$ $x \rightarrow r^+$ 'ye sağdan yaklaşırken f 'nin limiti denir ve $\lim_{x \rightarrow r^+} f(x) = st(f(r + dx)) \dots\dots(4)$ olarak gösterilir. Burada dx keyfi seçilmiş pozitif bir sonsuz küçüktür.

ii) $f: X \rightarrow \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}$ bir reel değerli fonksiyon ve bazı $r \in \mathbb{R}$ ve bazı $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ için $(r - \varepsilon, r) \subseteq X$ ve f , $st(f(r + dx)) = st(f(r + dy)) \in \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ 'da özelliğine bütün negatif dx ve dy sonsuz küçükleri sahip olsun. Bu durumda $st(f(r + dx)) = st(f(r + dy)) \in \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\} \dots\dots(5)$ $x \rightarrow r^-$ 'ye soldan yaklaşırken f 'nin limiti denir ve $\lim_{x \rightarrow r^-} f(x) = st(f(r + dx)) \dots\dots(6)$ şeklinde gösterilir. Burada dx keyfi seçilmiş negatif bir sonsuz küçüktür.

Sonuç (Sağ ve Sol Limitler) :

Yukarıdaki tanımlar arasındaki karşılaştırma $\lim_{x \rightarrow r} f(x)$ 'in varlığının yalnız ve yalnız $\lim_{x \rightarrow r^+} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow r^-} f(x)$ limitlerinin var olmasına ve $\lim_{x \rightarrow r^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow r^-} f(x)$ olmasına bağlıdır. Bu durumda $\lim_{x \rightarrow r} f(x) = \lim_{x \rightarrow r^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow r^-} f(x)$ 'dir.(7)

Tanım 5 (Sonsuzda Limit) :

i) $f: X \rightarrow \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}$ bir reel değerli fonksiyon ve bazı $a \in \mathbb{R}$ için $(a, \infty) \subset X$ olsun. $\mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ 'da bütün pozitif dx ve dy sonsuz küçükleri için

$st\left(f\left(\frac{1}{dx}\right)\right)=\left(f\left(\frac{1}{dy}\right)\right).....(8)$ olsun. Bu durumda $st\left[f\left(\frac{1}{dx}\right)\right]\in\mathbb{R}\cup\{\mp\infty\}$ ‘a

f ‘nin x, ∞ ‘a giderken limiti denir ve $\lim_{x\rightarrow\infty}f(x)=st\left[f\left(\frac{1}{dx}\right)\right].....(9)$ olarak gösterilir. Burada dx keyfi seçilmiş pozitif bir sonsuz küçüktür.

ii) $f:X\rightarrow\mathbb{R}, X\subseteq\mathbb{R}$ bir reel değerli fonksiyon ve bazı $b\in\mathbb{R}$ için $(-\infty,b)\subset X$ olsun. Bütün dx ve dy negatif sonsuz küçükleri için $\mathbb{R}\cup\{\mp\infty\}$ ‘da

$st\left[f\left(\frac{1}{dx}\right)\right]=st\left[f\left(\frac{1}{dy}\right)\right].....(10)$ olsun. Bu durumda $st\left[f\left(\frac{1}{dx}\right)\right]\in\mathbb{R}\cup\{\mp\infty\}$

f ‘nin $x, -\infty$ ‘a giderken limiti denir ve $\lim_{x\rightarrow-\infty}f(x)=st\left(f\left(\frac{1}{dx}\right)\right).....(11)$ olarak gösterilir. Burada dx keyfi seçilmiş negatif bir sonsuz küçüktür.

Sonuç (Sonsuzda Limitin Varlığı):

(8) veya (10) şartı f ‘nin ∞ ‘daki limitinin $st\left(f\left(\frac{1}{dx}\right)\right)=L$ olduğunu ve bu limitin dx ‘in seçiminden bağımsız olduğunu garantiler. Önceki gibi L ‘nin hesaplanmasına (9) ve (11) ile başlanılmalı ve hesaplamalar bittiğinde L ‘nin dx ‘in seçimine bağlı olup olmadığını kontrol edilmelidir. Eğer L , dx ‘in seçimine bağlı değilse aranan limit değeridir. Eğer L , dx ‘in seçimine bağlı ise f ‘nin sonsuzda limiti mevcut değildir.

Not (Has Olma ya da Has Olmama) :

Eğer $st\left(f\left(r+dx\right)\right)$ ya da $st\left(f\left(\frac{1}{dr}\right)\right)$ bir reel sayıysa, karşılık gelen limitler

hastır. Aksi halde (yani limit $\mp\infty$ ise) limit has değildir.

Not (Bir Yapma) :

Sağ ve sol limitler

$$\lim_{x \rightarrow r^{\pm}} f(x) = st\left(f\left(r + dx\right)\right), \lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = st\left(f\left(\frac{1}{dx}\right)\right) \dots\dots\dots(12)$$

şeklinde birleştirilmelidir. İki formülde de dx keyfi seçilmiş bir sonsuz küçüktür.

Pozitif ya da negatif olması $r^{\pm}$ ya da $\mp\infty$ olmasına bağlıdır.

Teorem 4: Değişik tipteki limitlerin yukarıdaki tanımları bildik $\varepsilon - \delta$ tanımına eşdeğerdir.

Bu teoremin ispatı Teorem 8 ve 9 da verilecektir.

2.1.4. Limit Alıştırmaları

$st\left(f\left(r + dx\right)\right)$ ve $st\left(f\left(\frac{1}{dx}\right)\right)$ formüllerinin, $\varepsilon - \delta$ tanımının standart

$\lim_{x \rightarrow r^{\pm}} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x)$ limitlerine asıl avantajı, $st\left(f\left(r + dx\right)\right)$ ve $st\left(f\left(\frac{1}{dx}\right)\right)$

işlemlerinin limit değeri için tahmini bir L değeri içermeksizin yalnızca f ve r için bir hesaplama algoritması önermesidir. Bu algoritma aşağıda verilmektedir.

a) dx 'in pozitif ya da negatif olması $r^{\pm}$ ya da $\mp\infty$ da olmasına bağlı olan bir sonsuz küçük olduğunda, $r + dx$ (ya da $\frac{1}{dx}$) için, f altındaki görüntüsü bulunmalıdır.

b) $f(r + dx)$ (ya da $f\left(\frac{1}{dx}\right)$) ' in standart kısım dönüşümü hesaplanmalıdır.

$$\lim_{x \rightarrow r} f(x) = st(f(r + dx)) \dots\dots\dots(13)$$

(dx keyfi seçilmiş sıfırdan farklı bir sonsuz küçük)

$$\lim_{x \rightarrow r^{\mp}} f(x) = st(f(r + dx)) \dots\dots\dots(14),$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = st\left(f\left(\frac{1}{dx}\right)\right) \dots\dots\dots(15)$$

son iki formülde dx keyfi seçilmiş bir sonsuz küçüktür. Pozitif ya da negatif olması $r^{\mp}$ ya da $\mp\infty$ olmasına bağlıdır.

Özet olarak

1) Bu formül çalışması, bir tanım olarak kabul edilirse her zorluk ve genellik derecesine uygun olan $\varepsilon - \delta$ tanımına eşdeğerdir.

2) Bu formül, tahmini bir limit değeri olan L 'den bağımsızdır. Bu nedenle tahmin etmeye ve kontrol etmeye ihtiyaç yoktur.

3) Bu metot çarpma işleminde daha az karışıklığa sebep olmaktadır.

4) Zannedilenin dışında bu formül çalışması limitin $\varepsilon - \delta$ tanımındaki değiştirilemez iç niceleyicileri $\forall, \exists, \nabla$ 'e karşıdır. Bu metotta “ L gerçekten doğru limit değeridir.” ve hesaplanması ile uyur.

Sonuç olarak bu metotla Calculus gerçekte tasarlandığı gibi tekrar hesaplamaya dönmektedir.

Not (Matematikte Sonsuz Küçükler):

Matematikte sonsuz küçüklerin etkisini anlayabilmek için “Mathematica” programını ele alınabilir. Acaba Mathematica limitleri nasıl hesaplamaktadır? Bilgisayar f fonksiyonunun sonsuz çokluktaki değerini, hesaplamakta ve bu değerlerden birini doğru cevap olarak mı söylemektedir? Ya da bilgisayar

sorulabilecek bütün mümkün fonksiyonların limitlerini hatırlamakta mıdır? Cevap ikisi de değildir. Daha çok Mathematica $f(r+dx)$ 'in formal (Taylor) asimptotik açılımını dx 'in bir formal değişken olduğunu düşünerek ve serinin bütün terimlerini kısaltarak serilerle hesaplar.

Bu işlem $\varepsilon - \delta$ tanımıyla yapılabilecek çok az şey içermektedir ve neredeyse standart kısım dönüşümü almakla aynıdır. Bu hesaplamaların çatısı $\mathbb{R}(dx)$ cismi ve reel katsayılı formal Laurent serileri ve dx ile gösterilen formal değişkenlerdir. $\mathbb{R}(dx)$ cisminin Arşimedyen olmadığına ve formal değişken dx 'in $\mathbb{R}(dx)$ 'in bir elemanı olarak pozitif bir sonsuz küçük olduğuna dikkat edilmelidir. Yani Mathematica, inanması zor olsa da $\mathbb{R}(dx)$ cisminin çatısındaki sonsuz küçüklerle hesaplamalarını yapmaktadır.

$st[f(x=dx)] = series[f(x+dx)], 0 < dx < 1, dx \rightarrow 0$ formülü Mathematica 'daki $f(r+dx)$ 'in standart kısım dönüşümü hesaplamasında kullanılır.

2.1.5. Sonsuz Küçükler Calculusuna Bir Giriş:

Bu bölümde Robinson'un standart olmayan analizi olarak da bilinen modern sonsuz küçükler Calculus' u için kısa bir giriş verilecektir.

Standart olmayan analiz, model teori ve matematiksel mantıkla zamanla yakın bir ilişkiye girse de standart analizin çatısıyla inşa edilmesi tamamıyla mümkündür. Metot aşırı güçlü yapı ya da yapısal standart olmayan analiz olarak da bilinir.

1) $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve $P(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}$ 'nin kuvvet kümesi olsun. $\mu: P(\mathbb{N}) \rightarrow \{0,1\}$ iki değerli sonlu toplamsal ölçüdür. Mesela bütün sonlu $A \subset \mathbb{N}$ için $\mu(A) = 0$ ve $\mu(\mathbb{N}) = 1$ dir. μ aşağıdaki gibi alınmalıdır.

Not (μ ‘nün genişlemesi) :

Bu özelliklerle birlikte bir ölçü olduğunu göstermek için $\mathbb{N}$ ‘de bağımsız bir ultra filtre U olmak üzere, μ fonksiyonunu $A \in U$ için $\mu(A)=1$ ve $A \notin U$ için $\mu(A)=0$ ile tanımlamak yeterlidir.

Aşağıdaki dört özelliği sağlayan $\mathbb{N}$ ‘nin boştan farklı bir alt kümesi U , $\mathbb{N}$ ‘de bir bağımsız ultra filtre olarak adlandırılır.

- a) U kesişme durumunda kapalıdır.
- b) Eğer $A, B \subseteq \mathbb{N}$ ve $A \subseteq B$ ve $A \in U$ ise $B \in U$ ‘dur.
- c) Her $A \subseteq \mathbb{N}$ için $A \in U$ ya da $\mathbb{N} \setminus A \in U$ ‘dan biri kesinlikle doğrudur.
- d) $\bigcap_{A \in U} A = \emptyset$

μ fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri tanımdan çıkar.

Lemma 3 (μ Fonksiyonunun Özellikleri) : $A, B \subset \mathbb{N}$ olsun.

- a) $\mu(A \cup B) = 1 \Leftrightarrow [\mu(A) = 1 \text{ ya da } \mu(B) = 1]$ ‘dir. Özel olarak her $A \subseteq \mathbb{N}$ için $\mu(A) = 1$ ya da $\mu(\mathbb{N} \setminus A) = 1$ ‘den biri kesinlikle doğrudur.
- b) $\mathbb{N}$ ‘nin bütün tümleyeni sonlu olan A alt kümeleri için $\mu(A) = 1$ ‘dir. Özel olarak $\mu(\mathbb{N}) = 1$ ‘dir. ($\emptyset \notin U$ olduğu sürece)
- c) $\mu(A \cup B) = 0 \Leftrightarrow [\mu(A) = 0 \text{ ve } \mu(B) = 0]$
- d) $\mu(A) = \mu(B) = 1 \Leftrightarrow \mu(A \cap B) = 1$
- e) $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ ve $\mu(A) = 1$ ise $\mu(B) = 1$ ‘dir.

2) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ‘nin bildik noktasal işlemler altında reel sayı dizilerinin bütün alt kümelerinin bir halkası olduğunu düşünülerek $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ‘de bir “ $\sim$ ” bağıntısı tanımlanmalıdır.

Eğer hemen hemen her terim için $(a_n) = (b_n)$ ise $(a_n) \sim (b_n)$ 'dir. Örneğin eğer $\mu\{n | a_n = b_n\} = 1$ ise.

Kuvvet kümesi ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim$ standart olmayan reel sayıların (hiperreel) bir altkütmesi olarak tanımlanır.

(a_n) dizisinin denklik sınıfını $\langle a_n \rangle$ ile gösterildiğinde $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$ gömmesi $r \rightarrow \langle r, r, r, \dots \rangle$ ile tanımlanmaktadır.

Bundan sonra yapılacak olanlar verilen r reel sayısını notasyon olarak tanıtmak içindir.

${}^*\mathbb{R}$ 'deki toplama ve çarpımlar $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 'den gelir. $\mu(\{n | a_n \leq b_n\}) = 1$ ise

${}^*\mathbb{R}$ 'deki sıra ilişkisi eğer $a_n \leq b_n$ ise $\langle a_n \rangle \leq \langle b_n \rangle$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 5: ${}^*\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 'yi tam sıralı alt cisim olarak içeren, tam sıralı Arşimedyen olmayan bir cisimdir.

İspat: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bir halka olduğu sürece ${}^*\mathbb{R}$ bir halkadır. ${}^*\mathbb{R}$ 'nin sıfır bölensiz olduğunu göstermek için ${}^*\mathbb{R}$ 'da $\langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle = 0$ olduğunu farz edelim. $[\mu(\{n | a_n \cdot b_n = 0\}) = 1]$
 $A = \{n | a_n = 0\}$ ve $B = \{n | b_n = 0\}$ olduğu gösterilmeli ve $\mathbb{R}$ sıfır bölensiz olduğunda $\{n | a_n \cdot b_n = 0\} = A \cup B$ olduğuna dikkat edilmelidir. $\mu(A) = 1$ ya da $\mu(B) = 1$ olması $\langle a_n \rangle = 0$, $\langle b_n \rangle = 0$ olmasını gerektirir. ${}^*\mathbb{R}$ 'da sıfır olmayan elemanların çarpımda tersi özelliği olduğunu göstermek için ${}^*\mathbb{R}$ da $\langle a_n \rangle \neq 0$ olduğunu farz edelim.
 $\mu(\{n | a_n \neq 0\}) = 1$ $\{n | a_n \neq 0\} = C$ yi gösterelim ve $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 'i $b_n = \frac{1}{a_n}$ ile tanımlayalım ve her halde eğer $n \in \mathbb{N}/C$ ise $b_n = 1$ denilebilir. Elimizde

$\mu(\{n | a_n b_n = 1\}) = 1$ anlamına gelen Lemma 3 'ten $C \subseteq \{n | a_n b_n = 1\}$ vardır. Böylece gerektiği gibi $\langle a_n \rangle \cdot \langle b_n \rangle = 1$ 'dir. Sıralama ilişkisinin Trichotomy özelliğini göstermek için $\langle a_n \rangle \neq \langle b_n \rangle$ olduğunu farz edelim ve $A = \{n : a_n \leq b_n\}$ i gösterelim. Elimizde $\mathbb{N} / A = \{n : a_n > b_n\}$ vardır ve böylece $\mu(A) = 1$ ya da $\mu(\mathbb{N} / A) = 1$ den biri Lemma 3 'ten kesinlikle doğrudur. Bu $\langle a_n \rangle \neq \langle b_n \rangle$ olduğu sürece $\langle a_n \rangle < \langle b_n \rangle$ ya da $\langle a_n \rangle > \langle b_n \rangle$ 'dir. Diğer özellikler de benzer şekilde gösterilebilir. $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$ gömmesi kesinlikle cisim ve sırayı korur. $\{n : m < n\}$ kümesinin ölçüsü 1 olduğu sürece ${}^*\mathbb{R}$ 'ın Arşimedyen olmadığını göstermek için ${}^*\mathbb{R}$ 'de $m < \langle n \rangle$ ($\mathbb{N}$ deki bütün m 'ler için) olduğuna dikkat edilmelidir.

3. $\mathbb{R} \subset F({}^*\mathbb{R})$, $I({}^*\mathbb{R}) \subset F({}^*\mathbb{R})$, $\mathbb{R} \cap I({}^*\mathbb{R}) = \{0\}$, $F({}^*\mathbb{R}) \cap L({}^*\mathbb{R}) = \emptyset$ ve $F({}^*\mathbb{R}) \cup L({}^*\mathbb{R}) = {}^*\mathbb{R}$ olduğu açıktır. Yukarıdaki tanımdan ilerlenerek $F({}^*\mathbb{R})$ nin tam sıralı tamlık bölgesi olduğu ve $I({}^*\mathbb{R})$ nin ise $F({}^*\mathbb{R})$ de convex maximal ideal olduğu görülmektedir. $F({}^*\mathbb{R}) / I({}^*\mathbb{R})$ ise $\mathbb{R}$ ye izomorf olan tam sıralı cisimdir. Kanonik izomorfizm $st : F({}^*\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ standart kısım dönüşümü olarak bilinir. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 'deki her sıralı (a_n) dizisi için $st \langle a_n \rangle$ nin var olduğuna dikkat edilmelidir ve limiti olan bütün sınırlı (a_n) 'ler için $st \langle a_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ dir. Aksine $\langle a_n \rangle$ bir sonlu sayı ise (a_n) nin bazı alt dizileri için (örneğin $\mu(\{k_n : n \in \mathbb{N}\}) = 1$) $st \langle a_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{k_n})$ dir.

Teorem 6:

i) $x \in {}^*\mathbb{R}$ olsun. $x \in F({}^*\mathbb{R})$ dir ancak ve ancak bazı $x \in \mathbb{R}$ ve bazı $dx \in I({}^*\mathbb{R})$ için $x = r + dx$ ise

ii) Eğer $x \in F({}^*\mathbb{R})$ ise $x = r + dx$ gösterimi tektir ve $r = st(x)$ dir. $r \in \mathbb{R}$ için $st(r) = r$ dir.

iii) Standart kısım dönüşümü sırayı korur. $F({}^*\mathbb{R})$ de $x \leq y$ ise $\mathbb{R}$ de $st(x) \leq st(y)$ dir.

4. $X \subset \mathbb{R}$ olsun. ${}^*X = \{\langle x_n \rangle \in \mathbb{R} : \text{hemen hemen her yerde } x_n \in X\}$ kümesi X 'in standart olmayan açılımdır. Her $X \subset \mathbb{R}$ için $X \subseteq {}^*X$ ve $X = {}^*X$ 'dir ancak ve ancak X sonlu bir küme ise. Yukarıdaki tanım $X \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) olması durumunu da içine almaktadır. Eğer $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $Y \subseteq \mathbb{R}$ ise ${}^*(X \times Y) = {}^*X \times {}^*Y$ ve ${}^*\mathbb{R}^d = ({}^*\mathbb{R})^d$ 'dir. Basitçe ${}^*\mathbb{R}^d$ yazılabilir.

Teorem 7 (Yığılma Noktası):

$r \in \mathbb{R}$ ve $X \subseteq \mathbb{R}$ olsun. r , X 'in aşikar olmayan bir yığılma noktasıdır ancak ve ancak $dx \neq 0$, $dx \approx 0$ ve $r + dx \in {}^*X$ olacak şekilde bir $dx \in {}^*\mathbb{R}$ varsa (ya da $r \neq x$ olacak şekilde $x \in {}^*X$ varsa)

İspat: $(\Rightarrow)$ Her $n \in \mathbb{N}$ için $X_n = \left\{ x \in X : 0 < |x - r| < \frac{1}{n} \right\}$ boştan farklı bir küme

olsun. Seçme aksiyomundan $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 'de her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X_n$ olan (x_n) vardır.

Şimdi $dx = \langle x_n \rangle - r$ nin sonsuz küçük olduğu gösterilmelidir.

Gerçekten $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \approx 0$ olduğunda $dx \neq 0$ ve $dx \approx 0$ iken $0 < |dx| < \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ dir. Ayrıca

her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X_n$ olduğu sürece $r + dx = \langle x_n \rangle \in {}^*X$ 'dir.

$(\Leftarrow)$ $dx \neq 0$, $dx \approx 0$, bazı $dx \in {}^*\mathbb{R}$ için $r + dx \in {}^*X$ 'dir. $m \in \mathbb{N}$ olduğu varsayılmalı ve $0 < |dx| < \frac{1}{m}$ olduğuna dikkat edilmelidir. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 'deki bazı (ε_n) için elimizde $dx = \langle \varepsilon_n \rangle$ var dır. $\left\{ n : 0 < |\varepsilon_n| < \frac{1}{m}, r + \varepsilon_n \in X \right\}$ kümesinin ölçüsü 1 olduğundan boştan farklı olan r , X 'in aşık ar olmayan bir yığılma noktasıdır.

5. $X \subseteq \mathbb{R}$ iken $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ye bir reel değerli fonksiyon olsun. ${}^*f : {}^*X \rightarrow {}^*\mathbb{R}$ fonksiyonu bütün $\langle x_n \rangle \in {}^*X$ için ${}^*f(\langle x_n \rangle) = \langle f(x_n) \rangle$ şeklinde tanımlanır. Bütün $r \in X$ 'ler için ${}^*f(r) = f(r)$ olduğu sürece f 'nin standart olmayan açılımı olarak adlandırılır. Yukarıdaki tanım $X \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) olduğu durumlarda geçerlidir.

Teorem 8 (A.Robinson):

r , $X \subseteq \mathbb{R}$ 'nin aşık ar olmayan bir yığılma noktası olsun. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyondur ve $L \in \mathbb{R}$ 'dir. $\lim_{x \rightarrow r} f = L$ 'dir ancak ve ancak $dx \neq 0$, $dx \approx 0$ ve $r + dx \in {}^*X$ olacak şekilde bütün $dx \in {}^*\mathbb{R}$ için $f(r + dx) \approx L$ ise. Eğer $\mathbb{R}$ 'de limit var ise $\lim_{x \rightarrow r} f(x) = st({}^*f(r + dx))$ dir.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ olsun. Farz edelim ki bütün $x \in X$ 'ler için $0 < |x - r| < \delta$ ve $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta \in \mathbb{R}_+$ ve bazı $dx \in {}^*\mathbb{R}$ için $dx \approx 0$ ve $r + dx \in {}^*X$ olsun. r , X 'in aşık ar olmayan bir yığılma noktası olmadığı sürece Teorem 7 den dx 'in var olduğuna dikkat edilmelidir. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 'deki bazı (ε_n) dizileri için elimizde $dx = \langle \varepsilon_n \rangle$ vardır. Sonrasında aşağıdaki kümeleri tanımlanmalıdır.

$$A_\delta = \{n : 0 < |\varepsilon_n| < \delta \text{ ve } r + \varepsilon_n \in X\}, \quad B_\varepsilon = \{n : |f(r + \varepsilon_n)| < \varepsilon\},$$

$A_\delta \subseteq B_\varepsilon$ ve $\mu(A_\delta) = 1$ olduğu sürece Lemma 3 'ten $\mu(B_\varepsilon) = 1$ dir. Özetlersek bütün $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ için $|^*f(r + dx) - L| < \varepsilon$ gerektiği gibi $^*f(r + dx) \approx L$ anlamına gelir.

($\Leftarrow$) Karşıt olarak farz edelim ki $\lim_{x \rightarrow r} f(x) = L$ yanlış olsun.

$$X_n = \left\{ x \in X : 0 < |x - r| < \frac{1}{n} \text{ ve } |f(x) - L| \geq \varepsilon \right\} \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için boştan farklı olacak}$$

şekilde $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vardır. Seçme aksiyomundan bütün $n \in \mathbb{N}$ 'ler için $x_n \in X_n$ olacak şekilde $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ 'de (x_n) dizisi vardır. $dx \in {}^*\mathbb{R}$, $dx = \langle x_n \rangle - r$ olarak tanımlanmalıdır.

Elimizde $dx \neq 0$ ve $dx \approx 0$ olduğunda $0 < |dx| < \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ vardır. Ayrıca

$r + dx = \langle x_n \rangle \in {}^*X$ ve $|^*f(r + dx) - L| > \varepsilon$ 'dur. Bu $^*f(r + dx) - L$ nin sonsuz küçük olmadığı anlamına gelir ki bu bir çelişkidir. $\lim_{x \rightarrow r} f(x) = st(^*f(r + dx))$ formülü her iki yön için standart kısım dönüşümüne başvurduktan ve L bir reel sayı olduğu sürece $st(L) = L$ olması göz önüne alındıktan sonra $^*f(r + dx) \approx L$ 'den gelir.

Teorem 9 (Varlık):

$X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon ve r , X 'in aşıkâr olmayan bir yığılma noktası olsun. Aşağıdakiler birbirini gerektirir.

i) $\lim_{x \rightarrow r} f(x)$ limiti $\mathbb{R}$ 'de vardır.

ii)

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+) (\exists \delta \in \mathbb{R}_+) (\forall x, y \in X) [0 < |x - r|, |y - r| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon]$$

olması durumunda f Temel (ya da Cauchy) dizidir.

iii) $x \neq r, y \neq r, x \approx r$ ve $y \approx r$ olmak üzere, her

$x, y \in {}^*X$ için $^*f(x) \approx ^*f(y)$ dir.

iv) $r + dx, r + dy \in {}^*X$ olmak üzere, her

$dx, dy \neq 0, dx, dy \approx 0$ için ${}^*f(r + dx) \approx {}^*f(r + dy)$ dir.

v) $r + dx, r + dy \in {}^*X$ olmak üzere, bütün $dx, dy \neq 0, dx, dy \approx 0$ için

$st({}^*f(r + dx)) = st({}^*f(r + dy)) \in \mathbb{R}$ (hiçbir zaman 0 olamaz.)

vi) $I({}^*\mathbb{R}_+)$ $\mathbb{R}'$ 'de pozitif sonsuz küçüklerin belirttiği küme olduğunda

$(\exists h \in I({}^*\mathbb{R})) (\forall dx, dy \in {}^*\mathbb{R})$

$[r + dx, r + dy \in {}^*X \text{ ve } 0 < |dx|, |dy| < h] \Rightarrow [{}^*f(r + dx) \approx {}^*f(r + dy)]$

dir.

İspat:

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Limit varlığı için Cauchy kriteri.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : Bazı $L \in \mathbb{R}$ için ${}^*f(x) \approx L$, (teo.8) gerektiği gibi

${}^*f(x) \approx {}^*f(y)$

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $x = r + dx$ ve $y = r + dy$ olmasından gelmektedir.

(iv) $\Rightarrow$ (vi) Aşikâr.

(vi) $\Rightarrow$ (i) : Elimizde $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 'deki bazı (h_n) dizileri için $h = \langle h_n \rangle$ vardır.

Genelliği bozmadan her $n \in \mathbb{N}$ için $h_n > 0$ olduğunu farz edilebilir. Şimdi tersine (i)

yanlış olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \neq \emptyset$ olacak şekilde

$A_n = \{ \langle x, y \rangle \in X \times X : 0 < |x - r|, |y - r| < h_n \text{ ve } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon \}$ olan $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vardır.

Bundan sonra (Seçme aksiyomundan)

$X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$ de $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, y_n) \in A_n$ olacak şekilde bir (x_n, y_n) dizisi vardır.

$\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \in {}^*X$ standart olmayan sayılarını tanımlanır ve ${}^*\mathbb{R}$ 'da (x_n) ve (y_n) nin

seçiminden $0 < |\langle x_n \rangle - r|, |\langle y_n \rangle - r| < \langle h_n \rangle$ ve $|{}^*f(\langle x_n \rangle) - {}^*f(\langle y_n \rangle)| \geq \varepsilon$ olduğu

görülür. Böylece ${}^*f(\langle x_n \rangle) - {}^*f(\langle y_n \rangle)$ bir sonsuz küçük değildir ki bu

$h = \langle h_n \rangle, dx = \langle x_n \rangle - r$ ve $dy = \langle y_n \rangle - r$ için (vi) ile çelişir.

$$(i) \Rightarrow (v): \text{ Bazı } L \in \mathbb{R} \text{ için } st(*f(r+dx)) = L \text{ ve } st(*f(r+dy)) = L$$

dir. Teorem 8 den beklendiği gibi $st(*f(x)) \approx st(*f(y)) \in \mathbb{R}$ 'dir.

$$(iv) \Rightarrow (v): st(*f(r+dx)) = st(*f(r+dy)) \in \mathbb{R}, \quad *f(r+dx) \text{ ve } *f(r+dy)$$

nin birer sonlu sayı olması ve $*f(x) \approx *f(y)$ olması anlamına gelir.

2.2. İlgili Araştırmalar

Bu bölümde, Matematik öğretiminde limit öğretimi ile ilgili yurt dışı ve yurt içi araştırmalardan bazıları özetlenecektir.

2.2.1. Limit Öğretimi ile İlgili Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar

Akbulut (2004) “Limit Öğretimi ve Kavram Yanılgıları” isimli yüksek lisans tezinde geleneksel yöntemlerden farklı olarak geliştirilen etkileşimli öğretim stratejisinin bilişsel alanın, kavrama ve uygulama basamaklarını kapsayan limit kavramının öğretimine olan etkisi ve bu süreçte ortaya çıkan kavram yanılgılarını araştırmıştır. Bu amaçla, Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Bölümü Öğrencilerinden deney ve kontrol grupları oluşturulmuştur. Deney grubunda limit konusu, etkileşimli öğretim stratejisi, kontrol grubunda ise geleneksel öğretim yöntemleri kullanılarak işlenmiştir.

Araştırma sonucunda deney grubundaki öğrencilerle kontrol gurubu öğrencileri arasında limit konusunun anlaşılması açısından deney gurubu lehine önemli bir farklılığın olduğu tespit edilmiştir.

Aztekin (2003) “Repertuar Çizelge Tekniği ve Limit Konusuna Uygulanması” isimli yüksek lisans çalışmasında, Repertuar çizelge tekniğinin limit konusuna uygulanmasını araştırmıştır.

Barak (2007) 'ın “Limit Konusundaki Kavram Yanılgılarının Belirlenmesi” isimli yüksek lisans tezinin amacı üniversite öğrencilerinin analizin temel konularından biri olan limit hakkındaki kavram yanılgılarını belirlemektir. Bu amaçla nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır.

Araştırma sonucunda, öğrencilerin limit ve limitle ilgili bazı temel kavramlar hakkında kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir. Bunlar $\varepsilon - \delta$ tanımı, limit kavramı tanımı, fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığı, sağdan ve soldan limit kavramları, limit ve süreklilik kavramları arasındaki ilişki, bir fonksiyonun bir noktada tanımlı olması, fonksiyon grafiklerinin çizimi, sonsuz kavramının anlaşılması ve işlemlerde kullanılması ile ilgili hata ve kavram yanılgılarıdır.

Akkoyunlu, Güler, Uğurel ve Alan (2003) “Ortaöğretimde Limit Kavramının Oluşturulmasına Yönelik Bir Çalışma” adlı çalışmalarında limit kavramının oluşturulmasında değişik bazı yaklaşımlarla bu sıkıntıların giderilmesi ve daha iyi bir öğretimin gerçekleştirilebilmesi amaçlanmaktadır. Bunun için de bazı öğretim yaklaşımlarını kısaca tanıtarak görüşlerini sunmuşlardır.

Kabaca (2006) “Limit Kavramının Öğretiminde Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin Etkisi” isimli doktora tezinde limit kavramının öğretiminde Bilgisayar Cebiri Sistemlerinden Maple programının kullanımının etkileri incelemiştir. Bu amaçla, Uşak Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünün birinci sınıf öğrencilerinden iki grup oluşturulmuştur. Araştırma gruplarından birisine sadece yapılandırmacı öğretim ilkelerine göre ders işlenirken, diğer gruba aynı zamanda Maple programı yardımı ile araştırmacı tarafından geliştirilen yazılımlardan yararlanılarak ders işlenmiştir.

Araştırma sonucunda genel başarı ele alındığında BCS desteğinden yararlanan grubun diğer gruptan daha yüksek ortalamaya sahip olmasına rağmen bu farkın istatistiksel anlamlılığının olmadığı, BCS desteğinin, matematiğe yönelik

tutuma anlamlı düzeyde olumlu bir etkisinin olduğu ve BCS kullanımının öğrencilerin daha iyi motive olmalarını sağladığı tespit edilmiştir.

Çolak (2002), “Limit Öğretiminde İki Farklı Eğitim Durumunun Karşılaştırılması” isimli yüksek lisans çalışmasında iki farklı eğitim durumunun limit öğretimine etkisini karşılaştırmıştır. Bu çalışmada geleneksel yöntemden farklı olarak geliştirilen eğitim durumunun öğrencilerinin limit kavramını öğrenmelerine etkisi incelenmiştir. Bu amaçla oluşturulan deney ve kontrol gruplarına, Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit kavramı için ayrılan sürede iki farklı şekilde ders işlenmiştir. Deney grubunda geleneksel yöntemden farklı olan eğitim durumu, kontrol grubunda ise geleneksel yöntem ile dersler işlenmiştir.

Araştırma sonucunda geleneksel yöntem kullanılarak dersler işlendiğinde öğrencilerin limit kavramı ile ilgili problemleri çözebildikleri fakat limitin formal tanımının ne olduğunu ve yaptıkları işlemlerin ne anlama geldiğini bilmedikleri görülmüştür. Geleneksel yöntemden farklı olarak geliştirilen eğitim durumu ile limit kavramı işlendiğinde ise öğrencilerin limit kavramı ve limit ile ilgili işlemler arasında bağ kurabildikleri ve yaptıkları işlemin ne anlama geldiğini bildikleri yani bilgileri ezberlemedikleri, öğrendikleri görülmüştür.

2.2.2. Limit Öğretimi ile İlgili Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar

Monaghan (1991), “Limit Kelimesinin Algılanmasıyla İlgili Problemler” adlı çalışmasında limit öğrenimi ve öğretimi sırasında kullanılan dilin etkisi üzerinde çalışmıştır. Monaghan, hazırladığı anketi 16 yaşındaki 54 lise öğrencisine uygulamış ve bir yıl sonrasında da 190 lise öğrencisine anketin düzeltilmiş formunu uygulamıştır. Ankette: eğilim, yaklaşma, yakınsama ve limit kelimelerini kullanarak aynı soruyu dört farklı şekilde sormuştur.

Bu çalışmadaki likert tipindeki anketin nicel analizi göstermiştir ki öğrenciler bu dört kelimeye çok farklı anlamlar yüklemektedir. Monaghan, öğrencilerin her

kelimeyi cümle içinde kullanma şekillerini incelemiş ve bu kelimelerin öğrenciler için genelde nasıl anlamlar ifade ettiklerini sınıflandırmıştır.

Çalışma sonucunda limit kelimesinin çoğunlukla öğrenciler tarafından bir sınır olarak düşünüldüğü görülmüştür. Yaklaşma kelimesinin, bir şeyin başka bir şeye doğru en sonunda ulaşma fikri ile hareket etmesi, eğilim kelimesinin kişisel eğilim, yakınsama kelimesinin ise iki sürekli nesnenin birleşmesi olarak öğrenciler tarafından algılandığı görülmüştür.

Tall ve Vinner (1981), “Limit ve Süreklilik ile İlgili Olarak Matematikte Kavram Algılama ve Kavram Tanımlama” adlı ve kavram imajları, kavram tanımları, kavram tanımı imajı merkezli olan çalışmalarında araştırmacılara, birinde 36 değerinde 70 üniversite öğrencisi bulunan iki gruba anket uygulamışlardır. Öğrencilere kısa cevaplı açık uçlu sorular yönlendirilmiş ve verdikleri cevaplar sınıflandırılmıştır.

Öğrencilerin $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots + \frac{9}{10^n} \right)$ limitinin değerinin ne olduğu sorusuna verdikleri cevapların analizi sonucunda, öğrencilerin güçlü kavram imajları ve zayıf kavram tanım imajına sahip oldukları görülmüştür.

Öğrencilerden $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x-1}{x-1} \right) = 3$ ifadesinin ne anlama geldiğini açıklamaları ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ nin tanımını yazmaları istendiğinde ise elde edilen bulgular sonucunda öğrencilerin zihinlerinde limit tanımının farklı bir görünüm, limit kavramının ise daha farklı bir görünüm oluşturduğu, ayrıca limit kavramının görüntüsünün, tanımın oluşturduğu görüntü ile çatışma halinde olduğu veya bağlantısız olduğu sonuçlarına varılmıştır.

Williams (1991), “Üniversite Analiz (Calculus) Dersi Öğrencilerinin Limit Kavramı ile Oluşturdukları Modeller” adlı çalışmasında öğrencilerin karşılaştığı anormal örneklere verdikleri cevaplar incelemiştir. Bunun için bir üniversitenin 341

lisans öğrencisine, içinde limit ile ilgili 6 ifadenin doğru ya da yanlış olduğunu işaretlemeleri ve hangi ifadenin limiti en iyi tanımladığını seçmeleri istenen bir anket uygulamıştır. Williams, anketin sonuçlarını inceledikten sonra 6 ifadeden en net ve açık olan 4 tanesini seçmiştir.

Çalışmanın ikinci aşamasında ise 10 öğrenci seçilmiş ve bu öğrencilerle 5 toplantı yapılmıştır. Toplantılar sonucunda öğrencilerin basit ve pratik limit modellerini tanımlardan daha önemli gördükleri, öğrencilerin daha şekli limit görüşünü benimsemelerinde 5 toplantının yetersiz olduğu ve öğrencilerin formal bilgilerinin kavramsal bilgilerinden oldukça ayık olduğu görülmüştür.

Davis ve Vinner (1986), “Limit Fikri: Görünüşte Bazı Kaçınılmaz Yanlış Kavram Alıştırmaları” adlı çalışmalarında öğrencilerin limit kavramlarını geliştirmeye odaklandıkları bir dizi Analiz dersi geliştirmeye çalışmışlardır. Bunun için bu Analiz dersleri dizisi bir yıl boyunca öğrencilere teoremler ispatlamak, tanımlar ifade etmek, yanlış tanımların zayıflığını örneklerle açıklamak suretiyle öğrencilere limit kavramının ustalıkları verilmiştir. Daha sonraki okul yılının ilk gününde, öğrencilerden informal olarak kendi sezgileri ile bir dizinin limitini tanımlamaları ve tam bir formal tanım vermeleri istenmiştir. Öğrencilerin cevaplarının bir yıl önce göstermiş oldukları anlayışları yansıtmadığı görülmüştür.

Davis ve Vinner buradan hareketle bazı kavramların halen var olduğunu ve öğrencilerin cevaplarını etkilediğini fakat alışılmış hataların ve yanlış kavramların öğrenciler tarafından yapılmasının engellenmesi için bir dizi ders düzenlemelerine rağmen aynı hataların tekrar ortaya çıktığını saptamışlardır.

Sierpinska (1987) “Beşer Olarak Öğrenciler ve Limit ile İlgili Epistemolojik Engeller” adlı çalışmasında seçtiği bir grup öğrencide bilimsel bilgi, sonsuz kavramı ve fonksiyon kavramı ile ilgili eksiklikleri belirtmiş ve limitle ilgili eksikliklerin bilimsel bilgi, sonsuz kavramı, fonksiyon kavramı ve reel sayı kavramı kaynaklı olduğunu vurgulamıştır.

Szydlık (2000), “Matematiksel İnançlar ve Bir Fonksiyonun Limitini Kavramsal Anlama” adlı çalışmasında öğrencilerin matematiksel inançları ve bu inançlar ile limiti anlama arasındaki ilişkiyi araştırmıştır.

Elde ettiği bulgulara dayanarak öğrencilerin Analiz dersini uygulanan, hatırlanılan yöntem ve gerçeklerin bir koleksiyonu olarak gördüğünü ve bu yöntem ve gerçeklerin altında yatan teoriye değer vermediklerini ve bunları anlamaya çalışmadıkları sonucuna varmıştır.

Lauten, Graham ve Ferrini-Mundy (1994) “Öğrencilerin Analizdeki (Calculus) Temel Kavramları Anlamaları: Grafik Hesap Makinesi ile Etkileşim” adlı çalışmalarında 5 öğrenci ile görüşmeler yaptıktan sonra bu öğrencilerden biri ile yapılan görüşme sonuçlarına yer vermişlerdir. Lauten ve diğerleri, çalışmalarının amacının öğrencilerin fonksiyonlar ve limit kavram imajları ve bu kavramları anlamaları ile öğrencilerin grafik hesap makinelerini kullanmadaki eğilimlerini saptamak olduğunu belirtmişlerdir.

Sonuçlar öğrencinin hesap makinesini minimum ölçüde kullandığını ve limit hakkındaki kavram görünümünün formal tanımdan uzak, dinamik bir görünüm sergilediğini göstermiştir.

Dubinsky ve arkadaşları (1996), “Limit Kavramını Anlama: Bağlantılı Yöntem Şeması” adlı nitel ağırlıklı çalışmalarında, limit kavramının öğrenciler tarafından nasıl algılandığı ile ilgili literatür çalışmalarının sentezine yer vermişlerdir. Limitin informal ve dinamik olarak algılanması üzerindeki görüşleri değerlendirmelerinin yanı sıra dinamik anlayışın öğrenciler tarafından daha kolay algılandığını ve bu anlayışın formal tanımla yapılandırma için bir engel olarak görüldüğünü belirtmişlerdir.

Gilman (1997) tarafından yapılan, “Analiz Dersindeki (Calculus) Güçlükler” adlı çalışmada limit tanımının, tanımdaki niceleyiciler nedeniyle öğrenciler tarafından anlaşılamadığı belirtilmiş ve limit tanımına alternatif bir tanım verilmiştir.

Przenioslo (2004), çalışmasında bir üniversitenin matematik bölümünde genel matematik dersini bitirmiş öğrencilerin limit kavramlarını incelemiştir. Sonuç olarak, öğrencilerin bazı kavramları tanımlama ile ilgili soruları doğru cevaplandırırsalar da bunları uygulamada sıkıntı çektikleri gözlemlenmiştir.

Hofe (1998), öğrencilerin limit kavramında yaşadıkları problemleri incelediği çalışmasının sonucunda ana problemin; matematiksel içeriğin grafik ve aritmetik temsilleri, işlem ve nesne, statik ve dinamik yorum ve sezgisel fikirler ile matematiksel özellik alanlarında yaşandığı sonucuna varmış ve normal bir genel matematik dersinde bu alanlara fazla önem verilmediğini belirtmiştir.

Brudney, Keir ve Viruleg (1993), “Limit Kavramının Sezgisel Anlamayı Geliştirmek İçin Tablolama Programı Kullanma” adlı çalışmasında amacının limit kavramının sezgisel olarak anlaşılması için öğrencilere yol göstermek olduğunu belirtmiştir. Bunun için dört farklı aktivite kullanmıştır.

Cornu (1981), öğrenciler için limit kavramının matematikte sonlu hesaplamalar ile sınırlandırılmayan ve öğrencilerin net bir cevap veremedikleri ilk konu olduğunu belirtmiştir.

Slomer (1999) “Limitler Kavramına Sayısal Yaklaşım” adlı çalışmasında grafik ve nümerik değerlerin bir fonksiyonun bir noktadaki limitini hesaplamada kullanışlı bir yol olduğunu belirtmiştir.

Todorov (2001), “Klasik Dönüş: Sonsuz Küçüklerle Limit Öğretimi” adlı çalışmasında alışılmış $\varepsilon - \delta$ tanımına denk bir tanım vermiştir. Çalışmada bu tanımın tahmini bir limit değerini gerektirmeksizin L limitini tek olarak belirleyebileceği belirtilmiştir.

Foley (1986), “Bir Devlet Üniversitesinin Calculus Dersinde Sonsuz Küçükleri (Hyperreel Numbers) Kullanarak Limit ve Süreklilik Öğretimi” adlı çalışmasında Austin Devlet Üniversitesinin 1. dönem Calculus dersinde limit ve

süreklilik öğretimi için iki kavramsal yaklaşımın görelî etkililiğini ölçmeye çalışmıştır. Bu yaklaşımlar bildik $\varepsilon - \delta$ limit yaklaşımı ve Abraham Robinson' un nonstandart analizine dayanan sonsuz küçüklerle limit yaklaşımıdır.

Bu araştırmanın deneysel kısmını oluşturmak amacıyla konuyla ilgili literatür taraması ve Calculus ders kitaplarının incelenmesinin ardından bir öğretim programı kılavuzu ve bir de çoktan seçmeli başarı testi pilot öğretim süreçleri için hazırlanmıştır.

Kontrol grubunda limit kavramı için normal şekliyle, deney grubunda ise bu kavramları geliştirmek amacıyla sonsuz küçükleri kullanarak öğretim yapılmıştır. Limit hesaplama kabiliyeti ile limit ve süreklilik kavrayışını ölçecek nitelikte olan başarı testi iki gruba da uygulanmıştır.

Deney grubunun başarı testinde daha iyi bir performans sergileyeceği varsayılmıştır. Gruplar arasındaki farklılıkların hipotezi çürütmesine rağmen elde edilen bulgular istatistiksel olarak anlamlı bulunmuştur. Cinsiyet ve Calculus genel kültürünün başarıda etkili olduğu görülmüştür.

Lisede Calculus eğitimi almayan öğrenciler araştırmanın başında varsayıldığı gibi davranmıştır. Fakat lisede Calculus eğitimi alan öğrencilerde normal eğitim şeklinin, sonsuz küçüklerle yapılan eğitim şeklinden daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

Araştırmanın sonucunda öğretim programında ve öğretimde sonsuz küçüklerle calculus eğitiminin göz önünde bulundurulması tavsiye edilmiştir.

Parameswaran (2006), “Limit Fikrini ve Sonsuz Küçükleri Anlama Üzerine” adlı çalışmasında öğrencilerin gerçek yaşamlarına dayalı küçük sayılarla ilgili kişisel limit algılamalarını ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Bunun için çalışmalarını iki gruba yürütmüştür. 12. sınıf öğrencilerinden oluşan ilk gruba limit, informal bir yaklaşımla

($\varepsilon - \delta$ tanımı kullanılmadan) öğretilmiştir. Üniversite 1. sınıf öğrencilerinden oluşan diğer gruba ise limit bildik $\varepsilon - \delta$ tanımı kullanılarak öğretilmiştir.

Araştırma sonunda her iki gruptaki birçok öğrencinin limitleri hesaplarken karşılarına çıkan küçük sayıları sıfıra tamamladığını çünkü bu öğrencilerin limiti yakın olma (yakınlaşma) olarak algıladıklarını ortaya çıkarmıştır.

3. ARAŞTIRMANIN YÖNTEMİ

Bu bölümde; araştırma modeli, evren ve örneklem hakkındaki bilgiler, verilerin toplanması, çalışmanın deneysel kısmı, verilerin analizi ve yorumlanmasında kullanılan yöntem ve teknikler açıklanmıştır.

3.1. Araştırmanın Modeli

Çalışmanın problemi, Lise Matematik Dersi Öğretim Programında, limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımla sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla yapılandırılan limit hesaplama yaklaşımının, öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında etkilerinin araştırılması olduğu için bu araştırmada deneysel yöntem kullanılmıştır.

Bu araştırmada kontrol gruplu son test deseni kullanılmıştır. Kontrol gruplu son test modelinde yansız atama ile oluşturulmuş iki grup bulunur(Büyüköztürk 2001:21). Grupların şans yöntemiyle oluşturulması deney öncesi benzerliği sağlamak için yeterli sayılabilir (Akdağ). Bunlardan biri deney diğeri kontrol grubu olarak atanır. Modelin simgesel görünümü:

$$\frac{G_1 \quad D \quad T_1}{G_2 \quad T_2}$$

şeklindedir.

Deney grubu işleme tabi tutulur; deney bittikten sonra da test edilir (T₁). Aynı test olabildiğince benzer bir gruba (kontrol grubuna) da aynı zamanda uygulanır (T₂).

Sonuçta, bu iki grubun ölçümleri arasındaki farkın (varsa) deney değişkeninden, işleminden gelebileceği yargısına varılır. (Kaptan, 1998, s.84)

Bu araştırmada bu desenin kullanılmasının araştırmanın amacına hizmet edecek nedeni; öğrencilerin limit ile ilgili hesaplanmaları yapmalarında sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla oluşturulan yaklaşım ile Lise Matematik Dersi Öğretim Programında tavsiye edilen yaklaşımın farklılıklarının görülmek istenmesidir. Bunun için denk olan iki sınıfa iki farklı şekilde ders işlenmiştir. Ayrıca kontrol grubu kullanmak, araştırmanın güvenilirliğini ve geçerliğini artıracak; böylece sonuçlara daha büyük bir güvenle bakılmış olacaktır. (Kaptan, 1998, s.83)

Bu araştırmada öncelikle uygulamanın yapıldığı okulda bulunan, 4 12. sınıf fen sınıfına açık uçlu sorulardan oluşan bir hazır bulunuşluk testi uygulanmıştır. (bakınız EK 2)

Bu testlerin değerlendirilmesi sonucunda, öğrencilerin karne notlarına da bakılarak birbirine en yakın iki sınıf katılımcı olarak belirlenmiştir. Ardından bu sınıflardan biri yansız atamayla kontrol grubu, diğeri de deney grubu olarak seçilmiştir.

Seçilen her iki gruba araştırmanın amacına hizmet edecek şekilde dersler işlenmiştir (bakınız Deneyin Uygulanması). Derslerin işlenmesinden sonra hem kontrol hem de deney grubuna EK 3 'te verilen bir son test uygulanmış ve elde edilen bulgular karşılaştırılmıştır. Araştırma deney ve kontrol grubunda 27 öğrenci olmak üzere toplam 54 katılımcı ile yürütülmüştür.

3.2. Verilerin Toplanması

Bu araştırmanın deneysel verilerini elde etmek için araştırmacı tarafından öncelikle deney ve kontrol gruplarını seçebilmek için bir hazır bulunuşluk testi uygulanmıştır. Derslerin işlenmesinden sonra bu iki yaklaşımın, iki grubun limit ile

ilgili hesaplamalarda başarıya ulaşmalarındaki katkısını görebilmek ve iki yaklaşımın gruplara olan etkilerinin arasındaki farkın anlaşılmasını sağlayacak bir son test hazırlanmıştır.

Hazırlanan son test, Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit konusunda yer alan ve araştırmacı ile danışmanı tarafından belirlenen 4 kazanımı ölçecek şekilde yapılandırılmıştır. Son testte biri iki şıklı olmak üzere toplam 8 soru, hazır bulunuşluk testinde ise 14 soru sorulmuştur.

Hazır bulunuşluk testi ve son test uzman görüşü alınarak geçerli ve güvenilir hale getirilmiştir.

3.3. Veri Toplama Aracı

Hazır bulunuşluk testindeki sorular araştırmanın amacına hizmet edecek şekilde, Lise Matematik Dersi Öğretim Programında daha önceki işlenen konularla ve özellikle de programda limit konusundan önce yer alan Fonksiyon konusundaki kazanımlarla ilgili olarak hazırlanmıştır. Hazır bulunuşluk testi için hazırlanan açık uçlu 14 sorunun, limit konusunun öğrenciler tarafından öğrenilmesi için gerekli olan fonksiyon bilgilerine, öğrencilerin sahip olup olmadıklarını ölçecek nitelikte olup olmadığını tespit etmek için uzman görüşü alınmıştır.

Hazır bulunuşluk testindeki soruların katılımcılara yöneltilme gerekçeleri aşağıda yer almaktadır:

1, 2 ve 3. sorular limit kavramının öğrenciler tarafından anlaşılmasında temel kavramlardan biri olan “bir noktanın civarı” teriminin öğrenciler tarafından kavranması için gerekli matematiksel bilgilere öğrencilerin sahip olup olmadıklarını görmek için öğrenciler yöneltilmiştir.

4, 5, 6 ve 7. sorular, parçalı fonksiyonlarla ilgili olan “Verilen bir parçalı fonksiyonun grafiğini çizer ve uygulamalar yapar.” şeklindeki kazanım 1 ile ilgili olarak öğrencilerin bilgilerini yoklamak için öğrencilere yöneltilmiştir.

8, 9, 10 ve 11. sorular, mutlak değer fonksiyonu ile ilgili olan “Verilen bir mutlak değer fonksiyonunun grafiğini çizer, mutlak değer içeren denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümesini belirler.” şeklindeki kazanım 1 ilgili olarak öğrencilerin bilgilerini yoklamak amacıyla oluşturulmuş ve öğrencilere yöneltilmiştir.

12, 13 ve 14. sorular, öğrencilerin bir fonksiyonun limitini hesaplamak için sıklıkla başvuracakları grafik çizimiyle ilgili bilgilerini yoklamak için hazır bulunuşluk testine konmuştur.

Derslerin işlenmesinin ardından gruplara uygulanmak üzere hazırlanan son test sorularının da programdaki limit konusuyla ilgili, araştırmacı ve danışmanı tarafından belirlenen 4 kazanım ile ilgili öğrencilerin bilgilerini ölçecek nitelikte olup olmadığını tespit etmek için uzman görüşü alınmıştır. Son testte öğrencilere biri iki şıklı olmak üzere, toplam 8 soru yöneltilmiştir.

Son testteki soruların yapılandırılma gerekçeleri aşağıda yer almaktadır:

1. sorunun (i) ve (ii) şıkları EK 1’de de verilen Kazanım 2 ‘ye yönelik olarak ve öğrencilerin parçalı fonksiyon ve mutlak değer fonksiyonu ile ilgili bilgilerini yoklamak için teste konmuştur.

Her iki şıkta da öğrenciler limitin hesaplanması istenilen nokta için hem sağdan hem de soldan limite bakmalıdır. Fakat (i) şıkında sağdan ve soldan limit değerleri parçalı fonksiyonun her iki parçası da kullanılarak bulunabilirken, (ii) şıkında sadece tek parçası kullanılarak bulunabilmektedir. (i) ve (ii) şıkları öğrencilerin bu iki şık arasındaki farkı görüp göremediklerini anlamak için teste konmuştur.

2. ve 3. sorular Kazanım 4 (EK 1) e yönelik ve birbirine benzer olarak hazırlanmıştır. Her iki soruda da öğrencilerin bir sayıya sağdan yaklaşmanın, o sayıya çok yakın fakat bu sayıdan daha büyük sayılarla, soldan yaklaşmanın o sayıya çok yakın fakat bu sayıdan daha küçük sayılarla yaklaşmak olduğunun öğrenciler tarafından görülüp görülmediğini anlamak için teste konmuştur.

4, 5, 6 ve 7. sorular Kazanım 5 (EK 1) e yönelik olarak hazırlanmış ve bu kazanım ile ilgili öğrencilerin bilgilerini yoklamak için teste konmuştur. Bu sorular için öğrenciler limitin hesaplanması istenilen noktada hem sağdan hem de soldan limit değerleri için işlem yapmalıdır. Bu sorular öğrencilerin, sağdan ve soldan limit değerleri arasındaki ilişkiyi anlayıp anlamadıklarını görmek için hazırlanmış ve öğrencilere yöneltilmiştir.

8. soru kazanım 7 (EK 1) ile ilgilidir. Fakat derslerin işlenişine bakıldığında da görülebileceği gibi ne deney grubuna ne de kontrol grubuna bu kazanımla ilgili olarak ders işlenmiştir. Bu sorunun hem deney grubuna hem de kontrol grubuna uygulanmasının sebebi, 7. kazanıma dair herhangi bir fikre sahip olmayan her iki gruptaki öğrencilerin bu soruyu çözüp çözemeyeceklerinin görülmek istenmesidir. Deney grubunda, kontrol grubuna göre daha çok öğrencinin soruyu çözmesi durumunda öğrencilerin çoğunlukla görmekte zorlandıkları belirsiz ifadelerle ilgili limit sorularının hesaplanmasında “*st*” fonksiyonunun daha kullanışlı olacağının söylenebileceği düşünülmüştür.

Deney ve kontrol gruplarına dersler işlenmiş ve ardından son test uygulanmıştır. Bunun hemen ardından, sınıflar kendi öğretmenleriyle ders işlemeye devam etmişlerdir. Hatta deney grubu olarak belirlenen sınıfın öğretmeni, ortak sınavlarda bu sınıfın diğer sınıflarla arasında oluşacak farkı kapatmak için ve özellikle de öğrencilerin öğretim yılı sonunda ÖSS’ye girecek olmaları nedeniyle, limit konusunu işlemeye en baştan başlayacağını belirtmiştir.

Bu nedenle deney ve kontrol grubu öğrencilerinin, özellikle de deney grubu öğrencilerinin, çok kısa bir süre sonra uygulamadan uzaklaşmaları nedeniyle, yapılması planlanan öğrenci görüşmeleri yapılamamıştır.

3.4. Çalışma Evreni

Araştırmanın çalışma evreni olarak Ankara ili ortaöğretim okullarından bilinen bir Anadolu Öğretmen Lisesi belirlenmiştir.

3.5. Farklı Eğitim Durumunun Oluşturulması

Farklı eğitim durumunun oluşturulması için matematik öğretmenleriyle görüşülmüş, MEB Ortaöğretim Matematik 12. sınıf kitabının yanı sıra, kaynak kitap olarak önerilen ders kitapları incelenmiştir. Daha sonra limit konusunun anlatımının yer aldığı Analiz (Calculus) kitapları ve literatürdeki bu konu hakkında yazılmış olan bazı makaleler incelenmiştir. Sonrasında ise limit konusu ile ilgili yapılmış olan araştırmalar incelenerek farklı bir eğitim durumu oluşturulmuştur.

3.6. Araştırmanın Uygulanması

Hazır bulunuşluk testi ve karne notlarıyla denk oldukları belirlenen ve yansız atamayla belirlenmiş olan deney ve kontrol gruplarına, araştırmacı (uygulamacı) tarafından, iki farklı şekilde ders işlenmiştir. Aşağıda bu ders türlerinin işlenişi ayrıntılı olarak anlatılmaktadır:

Derslerin işlenmesi hem deney hem de kontrol grubunda toplam 5 ders saati sürmüştür.

Uygulamacı tarafından işlenen derslerde öncelikle aşamalı olarak;

- ✓ Bağımsız değişkenin verilen bir sayıya yakın olması
- ✓ Bir noktanın civarı
- ✓ Bir fonksiyonun bir nokta civarındaki davranışı
- ✓ Sağdan limit
- ✓ Soldan limit
- ✓ Limit

kavramlarının öğrenciler tarafından anlaşılması için çalışılmıştır.

Derslerin işlenmesine hem deney hem de kontrol grubunda bir fonksiyonun bir nokta civarında nasıl davrandığı belirlenmeye çalışılarak başlanmıştır. Bu bağlamda önce “bağımsız değişkenin verilen bir sayıya yakın olmasının” ne anlama geldiği açıklanmaya çalışılmış ve bunun öğrenciler tarafından anlaşılması sağlanmaya çalışılmıştır. Bunun sonucunda öğrenciler için “bir noktanın civarı” teriminin anlamı yapılandırılmaya çalışılmıştır.

Bunun için öğrencilere öncelikle “Bir sayının bir sayıya yakın olmasından ne anlıyorsunuz? Bir sayının bir sayıya yakın olup olmadığını nasıl belirlersiniz?” soruları yöneltilmiştir.

Öğrencilerin bu sorularla ilgili kendi aralarında yaptıkları 7-8 dakikalık bir tartışmadan sonra, iki sayının birbirine yakın olmasıyla ilgili olarak “iki sayının arasındaki mesafe küçüldükçe sayılar birbirine yaklaşır” ifadesinde karar kılınmıştır.

Deney grubunda işlenen derste, öğrencilerle yapılan ve yukarıda da belirtilen tartışmadan sonra sonsuz küçük sayı kavramı ile ilgili bir aksiyom olduğu söylenmiş ve EK 4 ‘te sunulan bu aksiyom öğrencilere tanıtılmaya çalışılmıştır. Öğrencilere aksiyomdan sonra sonsuz küçük sayı kavramı tanımı da tanıtılmıştır.

Deney grubunda aksiyom ve sonsuz küçük sayı kavramı tanımı öğrencilere tanıtıldıktan sonra öğrencilerin ilk defa karşılaştıkları sonsuz küçük sayı kavramını

anlayabilmeleri için, öğrenciler kendi aralarında 4-5 dakika kadar karşılıklı tartıştırılmıştır.

Daha sonra deney ve kontrol gruplarında derslerin işlenmesine aynı örneklerle devam edilmiştir. Fakat deney grubundaki derslerin işlenişi sırasında örnekler sonsuz küçük sayı kavramı kullanılarak çözülmüştür.

Deney ve kontrol grubunda ilk 3 örnek, öğrencilerin kendi aralarında ve uygulamacı (araştırmacı) ile birlikte yaptıkları tartışmalar yardımıyla çözülmüştür. Bu örneklerle bir noktanın civarının ne demek olduğunu öğrenciler tarafından anlaşılması sağlanmaya çalışılmış ve asıl amacımız olan bir fonksiyonun bir nokta civarındaki davranışını incelemeye başlayabilecek bir duruma gelinmiştir. Bunun için de öncelikle öğrencilere “bir fonksiyonun bir nokta civarındaki davranışı denilince ne anlıyorsunuz?” sorusu yöneltilmiştir.

Öğrencilerle yapılan 5-6 dakikalık bir tartışmanın ardından Ek 4 ‘te sunulan 4, 5, 6, 7, 8 ve 9 numaralı örnekler öğrencilerin kendi aralarında ve uygulamacı ile birlikte yaptıkları tartışmalar ile çözülmüştür.

Her örnek tahtaya yazıldıktan sonra (her bir soruda odaklanılan sayı a olmak üzere) öğrencilere, “ a sayısının sağ ve sol civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktalar, $x = a$ doğrusu ile buluşur mu (kesişir mi)? Eğer buluşursa, buluşma noktasını tahmin edebilir miyiz?” soruları öğrencilere yöneltilmiştir.

Bu soruların çözümünden sonra, hem deney hem de kontrol grubunda sağ limit, sol limit ve limit tanımları tanıtılmıştır. Bunun ardından 4 numaralı örnek ile 9 numaralı örnek arasındaki bütün örnekler tekrar tek tek ele alınıp her örnekteki odaklanılan sayı (a) ya da sayıların civarında, sayıların verilen fonksiyonlar altındaki görüntüleriyle oluşturulan noktaların (ikililerin) $x = a$ doğrusuyla farklı durumlarının olabileceği belirtilmiştir.

Bu toparlamalar yapıldıktan sonra deney ve kontrol grubu öğrencilerinin sağdan limit, soldan limit ve limit arasındaki ilişkiyi daha iyi kavrayabilmeleri için iki adet soru daha tartışılarak çözülmüştür. Lise Matematik Dersi Öğretim Programında tavsiye edilen yaklaşımla, sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında etkilerinin ne olduğunun araştırılmasına hizmet etmek üzere, deney ve kontrol gruplarına iki farklı şekilde ders işlenmeye başlanmıştır.

3.6.1. Deney Grubunda Ders İşlenişinin Devamı

Öğrencilere “Bir fonksiyonun odaklanılan bir sayıdaki limitini bulmanın, fonksiyonun grafiğini çizmekten ya da odaklanılan sayının sağında ve solunda (sağ ve sol civarında) olan ve o sayıya çok yakın sayıların o fonksiyon altındaki görüntülerine bakmaktan başka bir yolu var mı acaba?” sorusuna yanıt arayacağımız ve bu sorunun yanıtının sonsuz küçük sayı kavramında olduğu söylenmiştir. Ders işlenişine sonsuz küçük sayı kavramı tanımı ve sonsuz küçük sayı kavramı ile ilgili olan aksiom hatırlatılarak başlanmıştır. Öğrencilere sonsuz küçük sayı örnekleri sunulmuş ve st fonksiyonunun özellikleri tanıtılmıştır. (EK 4)

Daha sonra limit ve sonsuz küçük sayı kavramı arasında bağlantı kurularak EK 4 'te sunulan 1–7 numaralı örnekler çözülerek ders işlenişi bitirilmiştir.

3.6.2. Kontrol Grubunda Ders İşlenişinin Devamı

Kontrol grubunda ders işlenişine limitin Lise Matematik Dersi Öğretim Programında yer alan özellikleri tanıtılarak devam edilmiştir. Daha sonra 1–7 numaralı örnekler bu özellikler yardımıyla çözülerek ders işlenişi bitirilmiştir. (EK 4)

3.7. Verilerin Çözümlemesi ve Yorumlanması

Veri toplama aracı olan ve öğrencilere derslerin işlenmesinin ardından yöneltilen son testte bulunan soruların kaç adımda çözüleceği araştırmacı (uygulamacı) ve danışmanı tarafından belirlenmiş ve her iki grup için de birer cevap anahtarı (EK 3) oluşturulmuştur. Deney ve kontrol grubundaki her öğrencinin cevap kâğıdı, oluşturulan cevap anahtarlarının ışığı altında incelenmiş ve bu incelemelerin sonucunda deney ve kontrol grubu öğrencileri için ayrı ayrı tablolar ve sütun grafikleri oluşturulmuştur. Daha sonra iki yaklaşımdan elde edilen bulgular karşılaştırılmıştır.

4. BULGULAR ve YORUM

Bu araştırmanın amacı, Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımla, sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla yapılandırılmış yaklaşımın, öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarındaki katkısının araştırılmasıdır.

Bu amaçla oluşturulan deney ve kontrol gruplarındaki öğrencilere geçerliliği ve güvenilirliği tespit edilmiş olan aşağıda da verilen sorular yöneltilmiştir. Deney ve kontrol grubu öğrencilerine yöneltilen soruların kaç adımda çözüleceği araştırmacı ve danışmanı belirlenmiş ve her iki grup için de cevap anahtarları oluşturulmuştur. Sorularda yer alan limitlerin hesaplamalarındaki farklılıklarını görmek amacıyla deney ve kontrol grubundaki her öğrencinin cevap kâğıdı oluşturulan cevap anahtarının ışığında incelenmiş ve bu incelemelerin sonucunda deney ve kontrol grubu öğrencileri için aşağıdaki tablolar oluşturulmuştur.

Tablolarda “*” sembolü öğrencilerin çözüm için attıkları adımları göstermektedir. Her bir soru için oluşturulan sütun grafikleri ise deney ve kontrol grubu öğrencilerinin, soruları çözerken kullandıkları adım sayılarıyla, bu adımları atan öğrenci sayılarını göstermektedir.

Aşağıda Lise Matematik Dersi Öğretimi Programındaki limit konusu ile ilgili kazanımlar ve her kazanıma yönelik olarak hazırlanmış olan sorular için deney ve kontrol grubu öğrencilerinin çözümlerinin cevap anahtarı ile karşılaştırılması sonucunda elde edilen bulgular bulunmaktadır.

4.1. 2.Kazanım ile İlgili Bulgular

Önce kazanımı tekrar hatırlatmak için ifade edelim;

“Bir fonksiyonun bir noktadaki soldan limitini ve sağdan limitini örneklerle açıklayarak, fonksiyonun bir noktadaki limiti ile soldan limiti ve sağdan limiti arasındaki ilişkiyi belirtir.”

Bu kazanıma yönelik hazırlanan Lise Matematik Dersi Öğretimi Programındaki limit konusu ile ilgili 1.sorunun (i) ve (ii) şıkları aşağıda bulunmaktadır:

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 ; & x > 2 \text{ ise} \\ -|x| + 4 ; & x \leq 2 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre,}$$

(i) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ limiti var mıdır? Varsa limitin değeri nedir?

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ limiti var mıdır? Varsa limitin değeri nedir?

Hazırlanan cevap anahtarına bakıldığında da görülebileceği gibi, 1. sorunun (i) ve (ii) şıkları sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla yapılan hesaplama ile 5 adım, matematik dersi programında tavsiye edilen yaklaşımla yapılan hesaplama ile 3 adım atılarak çözülebilmektedir.(bakınız EK 3)

Tablo 1 (a):
Deney grubu öğrencilerinin 1.sorunun (i)
ve (ii) şıklarını cevaplarken attıkları
adımlar

Numara	1.soru(i)					1.soru(ii)				
Adımlar	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
386	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
85	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
582	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
574	*	*	*	*	*					
570	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
506	*	*	*	*	*	*		*		
150	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
197	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
175	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
576	*	*				*	*	*	*	*
398	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
572	*	*	*	*	*					
452	*	*	*	*	*	*				
394					*	*	*	*	*	*
303	*	*	*	*	*	*		*		
92	*	*	*	*	*	*		*		
43	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
368	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
199	*	*	*	*	*	*		*		
471	*	*	*	*	*	*		*		
91	*	*	*	*	*	*		*		
437	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
259					*					
158	*	*	*	*	*					
İsimsiz1	*	*	*	*	*			*	*	
İsimsiz2					*	*	*	*	*	*
isimsiz3	*	*	*	*	*					

Tablo 1 (b):
Kontrol grubu öğrencilerinin
1.sorunun (i) ve (ii) şıklarını
cevaplarken attıkları adımlar

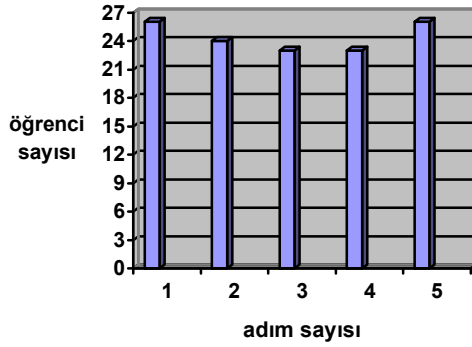
Numara	1.soru(i)			1.soru(ii)		
Adımlar	1	2	3	1	2	3
84	*	*	*	*	*	*
184	*	*	*	*	*	*
156				*	*	*
71	*	*	*	*	*	*
107	*	*	*			
187	*	*	*	*	*	*
1	*	*	*	*	*	*
161	*	*	*	*	*	*
406				*	*	*
510	*	*	*	*	*	*
68				*	*	*
545	*	*	*	*	*	*
80	*	*	*	*	*	*
157	*	*	*	*	*	*
15	*	*	*			
579	*	*	*	*	*	*
306	*	*	*	*	*	*
124				*	*	*
66				*	*	*
186	*	*	*	*	*	*
490	*	*	*	*	*	*
405	*	*	*	*	*	*
160				*	*	*
131	*	*	*			
485	*	*	*	*	*	*
İsimsiz	*	*	*	*	*	*
474	*	*				

4.1.2. 1.Sorunun (i) Şıkkı ile İlgili Bulgular

Aşağıda tablo 1 (a) ve tablo 1 (b) göz önüne alınarak 1. sorunun (i) şıkkını çözerken deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin kaç adımının üstesinden geldiklerini görmek için hazırlanmış sütun grafikleri aşağıda verilmiştir.

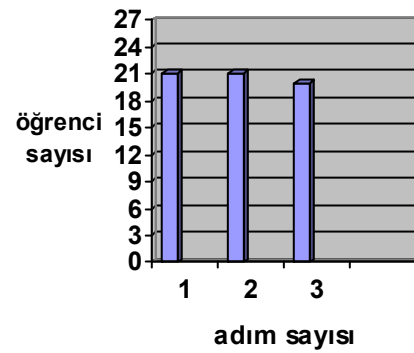
Grafik 1 (a):

Deney grubu öğrencilerinin 1. sorunun (i) şıkkına verdiği cevapların sütun grafiği



Grafik 1 (b):

Kontrol grubu öğrencilerinin 1. sorunun (i) şıkkına verdiği cevapların sütun grafiği



Tablo 1 (a) ve 1 (b) ile grafik 1 (a) ve 1 (b) incelendiğinde, deney grubu öğrencilerinden toplam 23 öğrencinin 1.sorunun (i) şıkkının çözümü için gerekli adımların hepsinin üstesinden gelirken, kontrol grubunda 20 öğrencinin çözüm için gerekli adımların hepsinin üstesinden geldiği görülmektedir.

Ayrıca deney grubundaki 576 numaralı öğrenci 1. sorunun (i) şıkkının çözümü için gerekli 5 adımdan yalnızca ilk ikisinin, yani sorudaki limitin sadece sağdan limiti ile ilgili olan kısmının üstesinden gelebilmiştir.

Deney grubunda 3 öğrenci ise sadece sonucu yazmıştır. Aşağıda bu üç öğrenciden biri olan 43 numaralı deney grubu öğrencisinin cevabı verilmiştir.

$$\begin{aligned} s+(f(2+h)) &= 5 \\ s+(f(2-h)) &= 2 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{Limit yok.} \end{array}$$

Şekil 1: 43 numaralı deney grubu öğrencisinin 1.sorunun (i) şıkkı için cevabı

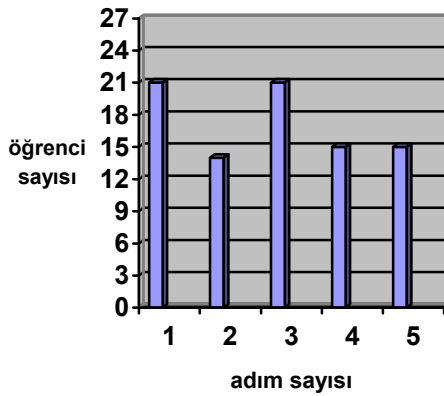
Yukarıdaki tablo ve grafiklere bakılarak 1. sorunun (i) şıkkı için Lise Matematik Dersi Öğretimi Programında limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımla, sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, her iki gruptaki öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında etkilerinin birbirlerine denk olduğu söylenebilir.

4.1.3. 1.Sorunun (ii) Şıkkı ile İlgili Bulgular

Aşağıda tablo 1 (a) ve tablo 1 (b) göz önüne alınarak 1. sorunun (i) şıkkını çözerken deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin kaç adımının üstesinden geldiklerini görmek için hazırlanmış sütun grafikleri bulunmaktadır.

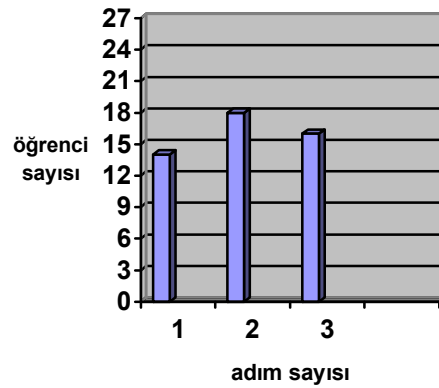
Grafik 2 (a):

Deney grubu öğrencilerinin 1. sorunun (ii) şıkkına verdiği cevapların sütun grafiği



Grafik 2 (b):

Kontrol grubu öğrencilerinin 1. sorunun (ii) şıkkına verdiği cevapların sütun grafiği

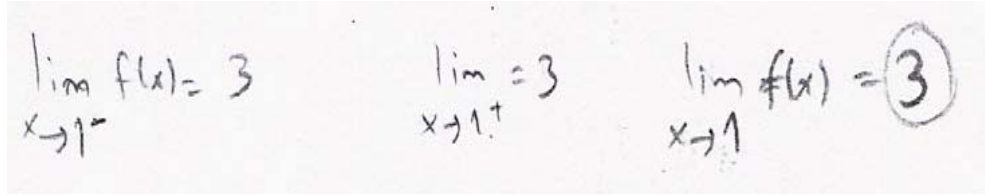


Tablo 1 (a) ile 1 (b) ve grafik 2 (a) ile 2 (b) incelendiğinde, deney ve kontrol grubu öğrencilerinden her ikisinden de toplam 14 öğrencinin 1. sorunun (ii) şıkkının çözümü için gerekli adımların hepsinin üstesinden geldikleri görülmektedir.

Ayrıca deney grubu öğrencilerinden 6 öğrenci sadece 1 ve 3 numaralı adımlara ulaşırken, 1 öğrenci sadece 3 ve 4 numaralı adımlara ulaşmış, yani sorunun sadece soldan limit kısmıyla ilgili çözüm yapmıştır.

Kontrol grubu öğrencilerinden 4 öğrenci sadece 2 numaralı adıma ulaşmış yani sorunun sadece soldan limit kısmının sonucunu yazmıştır.

Ayrıca kontrol grubundaki 2 öğrenci ise sadece sonucu yazmıştır. Aşağıda sadece sonucu yazan 510 numaralı kontrol grubu öğrencisinin cevabı verilmiştir.



The image shows three handwritten mathematical expressions for the limit of a function as x approaches 1. The first expression is $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$. The second expression is $\lim_{x \rightarrow 1^+} = 3$. The third expression is $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$, where the number 3 is circled.

Şekil 2: 510 numaralı kontrol grubu öğrencisinin 1. sorunun (ii) şıkkı için cevabı

1. sorunun (ii) şıkkı ile ilgili tablo ve grafiklere bakılarak bu soru için programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımla, sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, her iki gruptaki öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında etkilerinin birbirlerine denk olduğu söylenebilir.

Çolak da (2000) yaptığı araştırmada polinomal bir fonksiyonun limitini bulma ile kuralı ve grafiği verilen parçalı fonksiyonun bir noktada limitini bulmada deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir farkın çıkmadığını tespit etmiştir.

4.2. 4.Kazanım ile İlgili Bulgular

Önce kazanımı tekrar hatırlatmak için ifade edelim;

“Parçalı fonksiyonların ve mutlak değer fonksiyonunun limitleri ile ilgili uygulamalar yapar.”

4. kazanıma yönelik olarak hazırlanan Lise Matematik Dersi Öğretimi Programındaki limit konusu ile ilgili 2. ve 3. sorular aşağıda bulunmaktadır.

2. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 7x + 12}{|3 - x|}$ limitinin değeri nedir?

3. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{|x^2 - 7x + 12|}$ limitinin değeri nedir?

Hazırlanan cevap anahtarına bakıldığında da görülebileceği gibi 2. soru sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla yapılan hesaplama ile 3 adım, programda tavsiye edilen yaklaşımla yapılan hesaplama ile 2 adım atılarak çözülebilmektedir. 3. soru ise sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla yapılan hesaplama ile 4 adım, programda tavsiye edilen yaklaşımla yapılan hesaplama ile 2 adım atılarak çözülebilmektedir. (bakınız EK 3)

Tablo 2 (a):

Deney grubu öğrencilerinin için 2. ve 3. soruları cevaplarırken attıkları adımlar

Numara	2.soru			3.soru			
Adımlar	1	2	3	1	2	3	4
386	*	*	*	*	*	*	*
85	*	*	*	*	*	*	*
582	*	*	*	*	*	*	*
574	*	*	*	*	*	*	*
570	*	*	*	*	*	*	
506	*	*	*	*	*	*	
150	*	*	*	*	*	*	
197	*	*	*				
175	*	*	*	*	*	*	
576	*	*	*	*	*	*	
398	*	*	*	*	*	*	
572	*	*	*				
452	*	*	*				
394	*	*	*	*	*	*	*
303	*	*	*	*	*	*	*
92	*	*	*	*	*	*	*
43	*	*	*	*	*	*	*
368	*	*	*	*	*	*	
199	*	*	*	*	*	*	*
471	*	*	*	*	*	*	
91	*	*	*	*	*	*	
437	*	*	*	*	*	*	*
259	*	*	*	*	*	*	*
158	*	*	*	*	*	*	
1	*	*	*				
2	*	*	*	*	*	*	*
3	*	*	*	*	*	*	*

Tablo 2 (b):

Kontrol grubu öğrencilerinin 2. ve 3. soruları cevaplarırken attıkları adımlar

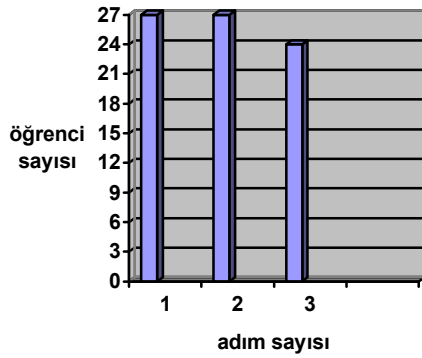
Numara	2.soru		3.soru	
Adımlar	1	2	1	2
84	*	*	*	
184	*	*	*	*
156	*	*		
71	*	*	*	
107				
187	*	*	*	*
1	*	*		
161	*	*	*	*
406	*	*	*	
510	*	*	*	*
68	*	*	*	
545	*	*	*	*
80	*	*	*	*
157	*		*	*
15	*	*	*	*
579	*	*	*	*
306	*	*	*	
124	*	*	*	
66	*		*	*
186	*	*	*	*
490	*	*		
405	*	*	*	*
160	*	*		
131	*	*	*	*
485	*	*	*	*
İsimsiz	*	*	*	*
474	*	*		

4.2.1. 2.Soru ile İlgili Bulgular

Aşağıda tablo 2 (a) ve tablo 2 (b) göz önüne alınarak 2. soruyu çözerken deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin kaç adımının üstesinden geldiklerini görmek için hazırlanmış sütun grafikleri bulunmaktadır.

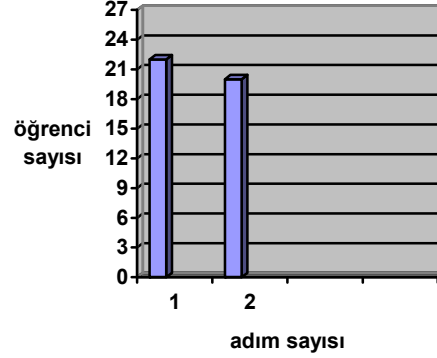
Grafik 3 (a):

Deney grubu öğrencilerinin 2. soruya verdiği cevapların sütun grafiği



Grafik 3 (b):

Kontrol grubu öğrencilerinin 2. soruya verdiği cevapların sütun grafiği



Tablo 2 (a) ve 2 (b) ile grafik 3 (a) ve 3 (b) incelendiğinde, deney grubu öğrencilerinden toplam 24 öğrencinin 2. sorunun çözümü için gerekli adımların hepsinin üstesinden gelirken, kontrol grubunda 20 öğrencinin çözüm için gerekli adımların hepsinin üstesinden geldiği görülmektedir.

Ayrıca deney grubu öğrencilerinden 4 öğrenci sadece 1 ve 2 numaralı adımların üstesinden gelebilmiş yani sorunun sadece sağdan limit kısmıyla ilgili çözüm yapmış fakat sonuca ulaşamamıştır.

2. soru ile ilgili tablo ve grafiklere bakılarak, deney grubunda sadece 1 ve 2 numaralı adımlara ulaşan öğrencilerin de sorunun çözümünün büyük kısmının üstesinden geldikleri düşünülerek, her iki gruptaki öğrencilerin limit ile ilgili

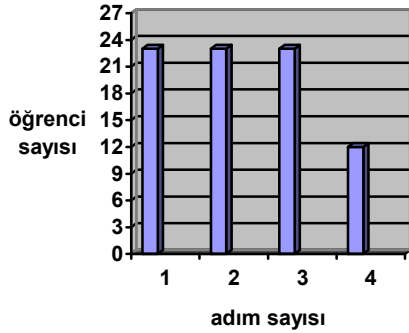
hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla oluşturulan yaklaşımın, programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan daha etkili olduğu söylenebilir.

4.2.2. 3.Soru ile İlgili Bulgular

Aşağıda tablo 2 (a) ve tablo 2 (b) göz önüne alınarak 3. soruyu çözerken deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin kaç adımın üstesinden geldiklerini görmek için hazırlanmış sütun grafikleri bulunmaktadır.

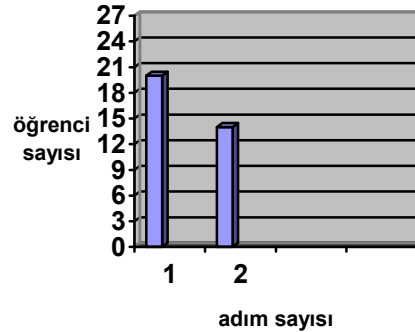
Grafik 4 (a):

Deney grubu öğrencilerinin 3. soruya verdiği cevapların sütun grafiği



Grafik 4 (b):

Kontrol grubu öğrencilerinin 3. soruya verdiği cevapların sütun grafiği



Tablo 2 (a) ve 2 (b) ile grafik 4 (a) ve 4 (b) incelendiğinde, deney grubu öğrencilerinden toplam 12 öğrencinin 3. sorunun çözümü için gerekli adımların hepsinin üstesinden gelirken, kontrol grubunda 14 öğrencinin çözüm için gerekli adımların hepsinin üstesinden geldiği görülmektedir.

Ayrıca deney grubu öğrencilerinden 11 öğrenci ilk 3 adımın üstesinden gelirken, kontrol grubu öğrencilerinden 6 öğrenci sadece ilk adımın üstesinden gelebilmiştir.

3. soru ile ilgili yukarıdaki tablo ve grafiklere bakılarak programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımla, sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla oluşturulan yaklaşımın, her iki gruptaki öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında etkilerinin birbirlerine denk olduğu söylenebilir.

4.3. 5.Kazanım ile İlgili Bulgular

Önce kazanımı tekrar hatırlatmak için ifade edelim;

“Geniştirilmiş gerçel sayılar kümesini belirtir, gerçel değişkenli ve gerçel değerli fonksiyonlarda sonsuz için limit ve sonsuz limit kavramlarını grafik üzerinde açıklar.”

5. kazanıma yönelik olarak hazırlanan lise matematik ders öğretimi programındaki limit konusu ile ilgili 4, 5, 6 ve 7. sorular aşağıda bulunmaktadır.

4. $f(x) = \frac{6}{2-x}$ ile verilen fonksiyonun $x=2$ noktasındaki limiti için ne söylenebilir?

5. $f(x) = \frac{3}{x^2}$ ile verilen fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki limiti için ne söylenebilir?

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 8}$ limitinin değeri için ne söylenebilir?

7. $\lim_{x \rightarrow 4^+} (\log(3x - 12))$ limitinin değeri nedir?

Hazırlanan cevap anahtarına bakıldığında da görülebileceği gibi 4. ve 5. sorular sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla yapılan hesaplama ve programda tavsiye edilen yaklaşımla yapılan hesaplama ile 5 adım atılarak çözülebilmektedir.

6. soru sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla yapılan hesaplama ile 7, programda tavsiye edilen yaklaşımla yapılan hesaplama ile 5 adım atılarak çözülebilmektedir.

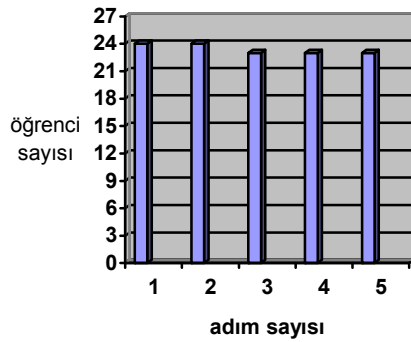
7. soru sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla yapılan hesaplama ve programda tavsiye edilen yaklaşımla yapılan hesaplama ile 2 adım atılarak çözülebilmektedir. (bakınız EK 3)

4.3.1. 4.Soru ile İlgili Bulgular

Aşağıda tablo 3 (a) ve tablo 3 (b) göz önüne alınarak 4. soruyu çözerken deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin kaç adımının üstesinden geldiklerini görmek için hazırlanmış sütun grafikleri bulunmaktadır.

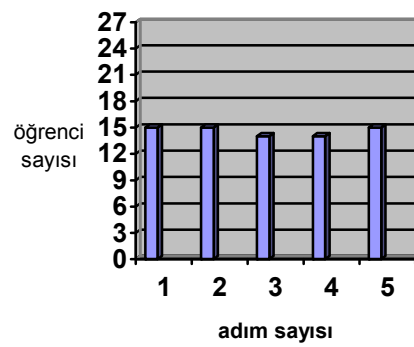
Grafik 5 (a):

Deney grubu öğrencilerinin 4. soruya verdiği cevapların sütun grafiği



Grafik 5 (b):

Kontrol grubu öğrencilerinin 4. soruya verdiği cevapların sütun grafiği



Tablo 3 (a) ve 3 (b) ile grafik 5 (a) ve (b) incelendiğinde, deney grubu öğrencilerinden toplam 23 öğrencinin 4. sorunun çözümü için gerekli adımların hepsinin üstesinden gelirken, kontrol grubunda 14 öğrencinin çözüm için gerekli adımların hepsinin üstesinden geldiği görülmektedir.

Ayrıca deney grubu öğrencilerinden 1 i sadece ilk 2 adımın üstesinden gelebilmiş yani sorunun sadece sağdan limit kısmıyla ilgili çözüm yapmıştır.

Kontrol grubunda ise 1 öğrenci ilk 2 adımın üstesinden gelebilmiş yani sorunun sadece sağdan limit kısmıyla ilgili çözüm yapmıştır. Kontrol grubu öğrencilerinden 1 öğrenci de sadece sonucu yazmıştır. Aşağıda sadece sonucu yazan 187 numaralı öğrencinin cevabı verilmiştir.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{6}{2-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+(2-x)} \frac{6}{2-x} = -\infty$$

Şekil 3: 187 numaralı kontrol grubu öğrencisinin 4.soru için cevabı

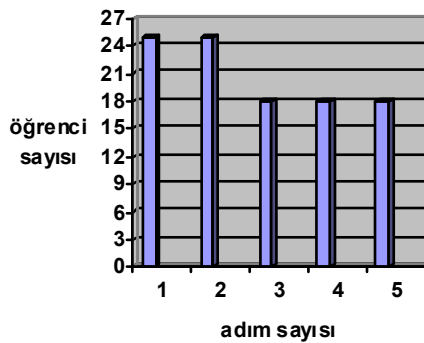
4. soru ile ilgili yukarıdaki tablo ve grafiklere bakılarak, her iki gruptaki öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla oluşturulan yaklaşımın, programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan daha etkili olduğu söylenebilir.

4.3.2. 5.Soru ile İlgili Bulgular

Aşağıda tablo 3 (a) ve tablo 3 (b) göz önüne alınarak, 5. soruyu çözerken deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin kaç adımının üstesinden geldiklerini görmek için hazırlanmış sütun grafikleri bulunmaktadır.

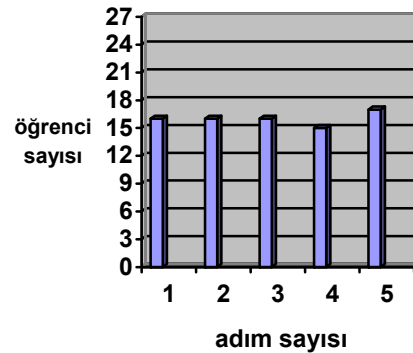
Grafik 6 (a):

Deney grubu öğrencilerinin 5. soruya verdiği cevapların sütun grafiği



Grafik 6 (b):

Kontrol grubu öğrencilerinin 5. soruya verdiği cevapların sütun grafiği



Tablo 3 (a) ve 3 (b) ile grafik 6 (a) ve 6 (b) incelendiğinde, deney grubu öğrencilerinden toplam 18 öğrencinin 5. sorunun çözümü için gerekli adımların hepsinin üstesinden gelirken, kontrol grubunda 15 öğrencinin çözüm için gerekli adımların hepsinin üstesinden geldiği görülmektedir.

Ayrıca deney grubunda 7 öğrenci sadece ilk 2 adımın üstesinden gelebilmiştir. Kontrol grubunda ise 2 öğrenci sadece 5 numaralı adıma ulaşmıştır.

5. soru ile ilgili tablo ve grafiklere bakılarak her iki gruptaki öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında, deney grubunda ilk 2 adıma ulaşan öğrencilerin sorunun çözümünün bir kısmının üstesinden geldikleri düşünülerek, sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan daha etkili olduğu ifade edilebilir.

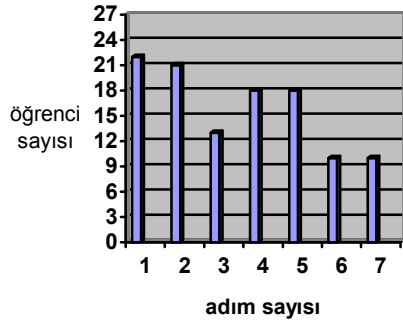
Çolak da 2000 yılında yaptığı çalışmada limiti " ∞ " olan bir fonksiyonun bir noktada limitini bulmada deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu tespit etmiştir.

4.3.3. 6.Soru ile İlgili Bulgular

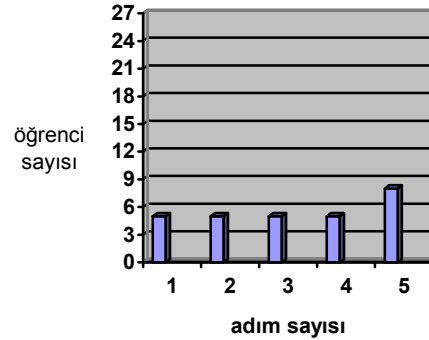
Aşağıda tablo 3 (a) ve tablo 3 (b) göz önüne alınarak, 6. soruyu çözerken deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin kaç adımının üstesinden geldiklerini görmek için hazırlanmış sütun grafikleri bulunmaktadır.

Grafik 7 (a):

Deney grubu öğrencilerinin 6. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

**Grafik 7 (b):**

Kontrol grubu öğrencilerinin 6. soruya verdiği cevapların sütun grafiği



Tablo 3 (a) ve 3 (b) ile grafik 7 (a) ve 7 (b) incelendiğinde, deney grubu öğrencilerinden toplam 10 öğrencinin 6. sorunun çözümü için gerekli adımların hepsinin üstesinden gelirken, kontrol grubunda 5 öğrencinin çözüm için gerekli adımların hepsinin üstesinden geldiği görülmektedir.

Deney grubunda 3 öğrenci ilk 3 adımın üstesinden gelebilmiştir yani sadece sorunun sağdan limit kısmı ile ilgili çözüm yapmıştır.

Deney grubunda 1 öğrenci de ilk 5 adımın üstesinden gelebilmiş yani sorunun sağdan limit kısmı ile ilgili çözüm yapmış fakat soldan limit ile ilgili kısmını sonlandıramamıştır.

Ayrıca deney grubunda 8 öğrenci 1, 2, 4 ve 5 numaralı adımların üstesinden gelmiş yani sorunun hem sağdan hem de soldan limit kısımlarıyla ilgili çözüm yapmışlar fakat her ikisini de sonuçlandıramamışlardır.

Kontrol grubunda ise 3 öğrenci sadece sonucu yazmıştır. Aşağıda sadece sonucu yazan 1 numaralı kontrol grubu öğrencisinin cevabı verilmiştir.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-4)(x-2)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-4)(x-2)} = -\infty$$

> çoktur

Şekil 4: 1 numaralı kontrol grubu öğrencisinin 6. soru için cevabı

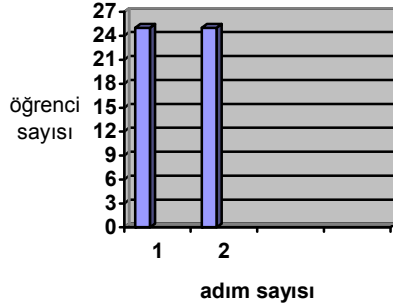
Tablo 3 (a) ve 3 (b) ile grafik 7 (a) ve 7 (b) ye bakılarak 6. soru için, öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan daha etkili olduğu söylenebilir. Ayrıca her ne kadar bu soru için deney grubundaki öğrenciler limit hesaplamalarını yaparken kontrol grubundaki öğrencilerden daha çok adım atmak dolayısıyla daha çok işlem yapmak zorunda olsa da deney grubundaki öğrencilerin sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla oluşturulan yaklaşımı başarılı bir şekilde kullanmaya eğilimlerinin olduğu da görülmüştür.

4.3.4. 7.Soru ile İlgili Bulgular

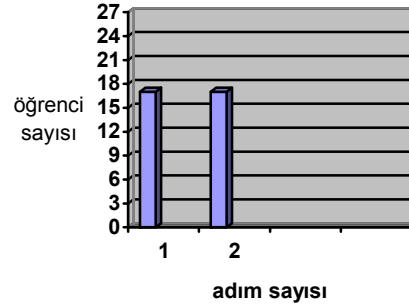
Aşağıda tablo 3 (a) ve tablo 3 (b) göz önüne alınarak, 7. soruyu çözerken deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin kaç adımının üstesinden geldiklerini görmek için hazırlanmış sütun grafikleri bulunmaktadır.

Grafik 8 (a):

Deney grubu öğrencilerinin 7. soruya verdiği cevapların sütun grafiği

**Grafik 8 (b):**

Kontrol grubu öğrencilerinin 7. soruya verdiği cevapların sütun grafiği



Tablo 3 (a) ve 3 (b) ile grafik 6 (a) ve 6 (b) incelendiğinde, deney grubu öğrencilerinden toplam 25 öğrencinin 7. sorunun çözümü için gerekli adımların hepsinin üstesinden gelirken, kontrol grubunda 16 öğrencinin çözüm için gerekli adımların hepsinin üstesinden geldiği görülmektedir.

7. soru ile ilgili tablo ve grafiklere bakılarak, her iki gruptaki öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla oluşturulan yaklaşımın, programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan daha etkili olduğu söylenebilir.

4.4. 7.Kazanım ile İlgili Bulgular

Önce kazanımı tekrar hatırlatalım:

“ Belirsizlik durumlarını belirtir ve verilen noktalarda $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ ve

$0 \cdot \infty$ belirsizlik halleri olan fonksiyonların limitini hesaplar.”

7. kazanıma yönelik olarak hazırlanan lise matematik ders öğretimi programındaki limit konusu ile ilgili 8. soru aşağıda bulunmaktadır.

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x - 1}$ limitinin değeri nedir?

Hazırlanan cevap anahtarına bakıldığında da görülebileceği gibi 8. soru sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla yapılan hesaplama ile 7, programda tavsiye edilen yaklaşımla yapılan hesaplama ile 2 adım atılarak çözülebilmektedir. (bakınız EK 3)

Tablo 4 (a):
Deney grubu öğrencilerinin 8.
soruyu cevaplarken attıkları adımlar

Numara	8.soru						
Adım	1	2	3	4	5	6	7
386	*	*	*	*	*	*	*
85	*	*	*	*	*	*	*
582	*	*	*	*	*	*	*
574	*	*					
570	*	*					
506	*	*					
150	*	*					
197	*	*					
175	*	*					
576	*	*	*	*	*	*	*
398	*	*	*	*	*	*	*
572	*	*		*	*		
452	*	*		*	*		
394							
303	*	*	*	*	*	*	*
92	*	*	*	*	*	*	*
43	*	*	*	*	*	*	*
368	*	*	*	*	*	*	*
199	*	*		*	*		
471	*	*		*	*		
91							
437	*	*					
259	*	*	*	*	*		
158	*	*					
1	*	*		*	*		
2							
3							

Tablo 4 (b):
Kontrol grubu öğrencilerinin 8.
soruyu cevaplarken attıkları adımlar

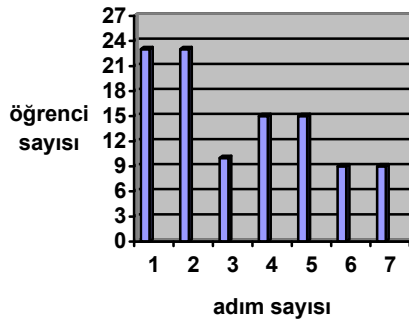
Numara	8.soru	
Adım	1	2
84	*	*
184	*	*
156	*	*
71		
107		
187		
1		
161		
406		
510		
68		
545		
80		
157		
15		
579		
306		
124		
66		
186		
490		
405		
160		
131		
485		
İsimsiz		
474		

4.4.1. 8.Soru ile İlgili Bulgular

Aşağıda tablo 4 (a) ve tablo 4 (b) göz önüne alınarak, 8. soruyu çözerken deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin kaç adımının üstesinden geldiklerini görmek için hazırlanmış sütun grafikleri bulunmaktadır.

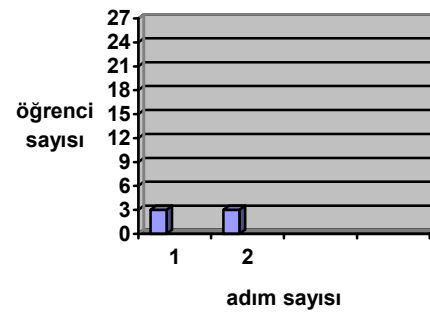
Grafik 9 (a):

Deney grubu öğrencilerinin 8. soruya verdiği cevapların sütun grafiği



Grafik 9 (b):

Kontrol grubu öğrencilerinin 8. soruya verdiği cevapların sütun grafiği



Tablo 4 (a) ve 4 (b) ile grafik 9 (a) ve 9 (b) incelendiğinde, deney grubu öğrencilerinden toplam 9 öğrencinin 8. sorunun çözümü için gerekli adımların hepsinin üstesinden gelirken, kontrol grubunda sadece 3 öğrencinin çözüm için gerekli adımların hepsinin üstesinden geldiği görülmektedir.

Deney grubu öğrencilerinden 8 öğrenci 1 ve 2 numaralı adımların üstesinden gelmiş, yani sadece sorunun sağdan limit kısmıyla ilgili çözüm yapmalarına rağmen bu kısım ile ilgili çözümlerini sonuçlandıramamışlardır.

Deney grubunda 1 öğrenci 1-5 numaralı adımların üstesinden gelebilmiş yani; sorunun sağdan limit kısmı ile ilgili çözümünü sonuçlandırmış, fakat soldan limiti ile ilgili kısmını sonuçlandıramamıştır.

Ayrıca deney grubunda 5 öğrenci de 1, 2, 4, 5 numaralı adımların üstesinden gelmiş yani; sorunun hem sağdan hem de soldan limit kısımları ile ilgili çözüm yapmışlar, fakat iki kısım ile ilgili çözümleri de sonuçlandıramamışlardır.

Tablo 4 (a) ve 4 (b) ile grafik 9 (a) ve 9 (b) ye bakılarak hem deney grubunda bu sorunun üstesinden gelen öğrenci sayısının kontrol grubuna göre fazla olması hem de deney grubunda 1-2, 1-5 ve 1,2,4,5 numaralı adımların üstesinden gelen öğrencilerin de olması nedeniyle 8. soru için, her iki gruptaki öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla oluşturulan yaklaşımın, programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan daha etkili olduğu kesinlikle söylenebilir. Ayrıca 6. soruda olduğu gibi bu soru için de deney grubundaki öğrenciler limit hesaplamalarını yaparken kontrol grubundaki öğrencilerden daha çok adım atmak dolayısıyla daha çok işlem yapmak zorunda olsa da deney grubundaki öğrencilerin sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla oluşturulan yaklaşımı başarılı bir şekilde kullanmaya eğilimlerinin olduğu da görülmüştür.

Aşağıdaki tablo 5 deney ve kontrol grubu öğrencilerine uygulanan son testteki 8 sorunun her birinin cevap anahtarları ışığı altında analiz edilmesinden sonra oluşturulmuştur. Deney ve kontrol grubu öğrencilerine yöneltilen sorulardaki limit ile ilgili hesaplanmalarda 2, 4, 5 ve 7. kazanımlar için sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın mı yoksa Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımın mı daha etkili olduğunu daha net bir şekilde görmek için hazırlanmıştır.

Tablo 5: Sorular ve kazanımlara göre hangi yaklaşımın daha etkili olduğunu ifade edildiği tablo

Sorular	Kazanım	Sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşım daha etkili	Programında limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşım daha etkili
1.soru (i)	2		
1. soru (ii)	2		
2. soru	4	✓	
3. soru	4		
4. soru	5	✓	
5. soru	5	✓	
6. soru	5	✓	
7. soru	5	✓	
8. soru	7	✓	

Tablo 5 e bakılarak öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan daha etkili olduğunu ifade etmek yanlış olmayacaktır. Ayrıca öğrencilerin sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla yapılandırılmış olan yaklaşımı başarılı bir şekilde kullanmaya eğilimli olduklarını da söylemek mümkündür.

Deney ve kontrol gruplarında yapılan ders (uygulama) saati sayısı aynıdır. Fakat uygulamanın yapıldığı okulun ders programı nedeniyle, deney grubunun matematik dersleri birer gün arayla olmasına rağmen, kontrol grubunun matematik dersleri art arda olan iki günde idi. Ayrıca deney grubu öğrencilerine son test soruları, işlenen son dersten ancak iki gün sonra uygulanabilmişken, kontrol grubu öğrencilerine işlenen son dersin ertesi günü uygulanmıştır.

Eğer dersler kontrol ve deney grubuna aynı günlerde işlenip, son test her iki sınıfa aynı zamanda uygulanabilseydi bütün sorular için öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit

kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan daha etkili olduğu kesinlikle söylenebilirdi.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmamızda elde edilen bulgulara dayalı sonuçlar üzerinde durulacaktır. Ayrıca araştırma bulguları çerçevesinde, hem bu uygulamaya hem de bu konuda çalışma yapmak isteyen araştırmacılara ve eğitimcilere yönelik önerilerde bulunulmuştur.

5.1. Sonuçlar

Bu araştırmanın amacı, Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımla, sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında etkilerinin ne olduğunun araştırılmasıdır.

Deney ve kontrol gruplarına amacımıza hizmet edecek şekilde derslerin işlenmesinin ardından, gruplara uygulanan son testlerin, cevap anahtarları ışığında öğrencilerin çözümleri değerlendirilmiş ve bulgular elde edilmiştir. Elde edilen bulgulara dayanarak araştırma ile ilgili olarak aşağıdakileri söylemek mümkündür:

Kazanım 2 ye yönelik olarak öğrencilerin bilgilerini yoklamak amacıyla teste konulan 1. sorunun (i) ve (ii) şıklarından elde edilen bulgulara dayanarak, bu kazanım için programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımla, sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında etkilerinin birbirine denk olduğu söylenebilir.

Bu sonuç Çolak 'ın (2000) yaptığı çalışmada elde edilen sonuçlar ile paralellik göstermektedir.

Kazanım 4 e yönelik ve birbirine benzer olarak yapılandırılan 2. ve 3. sorular ile ilgili bulgular değerlendirildiğinde, bu soru için iki farklı sonuçla karşılaşilmektedir.

2. soru ile ilgili bulgular değerlendirildiğinde bu kazanım için, öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan daha etkili olduğu sonucuna ulaşılabilmektedir. Buna rağmen 3. soru ile ilgili bulgular bizi bu kazanım için her iki yaklaşımın, öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında birbirine denk olduğu sonucuna götürmektedir.

Kazanım 5 e yönelik olarak hazırlanan 4, 5, 6 ve 7 numaralı sorulardan elde edilen bulgular öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında bu 4 kazanım için sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan daha etkili olduğu sonucunu ortaya çıkarmıştır.

Ulaşılan bu sonuç da Çolak'ın (2000) yaptığı çalışmada elde edilen sonuçlar ile paralellik göstermektedir.

4, 5, 6 ve 7. sorularla ilgili öğrenci çözümleri incelendiğinde, deney grubu öğrencilerinin limiti hesaplarken sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımı kullanarak sonuca kolayca ulaşabildikleri görülmüştür. Buna rağmen kontrol grubu öğrencileri bu sorularda programda tavsiye edilen yaklaşımı kullanarak, ancak limitin hesaplanması istenilen noktanın sağ ve sol civarındaki sayılar için fonksiyonların değerine bakarak sonuca ulaşabilmişlerdir.

Amacımızın öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında hangi yaklaşımın daha etkili olduğunu ölçmek olduğunu hatırlarsak, bu 4 soru için kontrol grubunda deney grubuna göre çok daha az sayıda öğrenci, programda tavsiye edilen yaklaşımı kullanıp, daha fazla zaman harcayarak ve çok

daha fazla işlem yaparak soruların üstesinden gelebilmiştir. Buna rağmen deney grubunda sonuca ulaşamayan öğrencilerden bile birçoğu bu soruların çözümlerinin büyük kısmının üstesinden gelebilmiştir. Dolayısıyla hangi yaklaşımın daha etkili olduğuna karar verirken başvurduğumuz soruların başında bu 4 soru gelmektedir.

8. soru kazanım 7 ye yönelik olarak hazırlanmıştır. Bu kazanım ile ilgili olarak deney ve kontrol grubuna ders işlenmemiştir (bakınız Deneyin Uygulanması). Fakat buna rağmen deney grubunda kontrol grubuna göre çok fazla sayıda öğrenci limit ile ilgili hesaplamaları yaparken gerek sonuca ulaşmada gerekse soruyla ilgili çözümün büyük bir bölümünün üstesinden gelmede daha başarılı olmuştur. Bu nedenle bu kazanım için, öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan daha etkili olduğu kesin bir şekilde görülebilmektedir.

Bu uygulamayı yaparken kazandığım tecrübeler çerçevesinde benim için aşağıdakileri söylemek mümkündür:

Limit kavramının öğretimine, sağ limit, sol limit ve limit tanıtıldıktan sonra sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla oluşturulan yaklaşımla devam edilmesi durumunda öğrenciler bazı soruları daha kısa zamanda ve daha işlem yaparak çözebilmektedir. Dolayısıyla limit ile ilgili hesaplamalarda sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla oluşturulan yaklaşımın kullanılmasının öğretmenlere duyurulması tavsiye edilebilir.

Bu sonuçlardan bir toparlama yapılarak öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan daha etkili olduğu sonucuna ulaşmaktayız. Bununla birlikte aşağıdakileri de söylemek bizim için yanlış olmayacaktır:

Eğer dersler kontrol ve deney grubunda aynı günlerde işlenebilseydi ve derslerin ardından sınıflara uygulanan testler her iki sınıfa da aynı zamanda uygulanabilseydi, bütün sorular için öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan daha etkili olacağı düşünülmektedir.

5.2. Öneriler

Limit matematikteki türev ve integral gibi birçok önemli kavramın oluşması için bilinmesi gerekli olan en temel kavramdır. Bu kavramların oluşmasının da limit fikri oluşmadan imkânsız olduğu söylenebilir. Öğrenciler tarafından limit, doğası nedeniyle her zaman zor anlaşılır ve öğrenciler bu kavramın anlaşılmasında ve limit ile ilgili hesaplamaları yapmakta çok az başarı gösterebilirler (Juter, 2006).Bu nedenle limit matematik için çok büyük öneme sahiptir.

Bu çalışmada, deney ve kontrol gruplarına derslerin işlenmesinden sonra uygulanan son testlerin cevap anahtarlarına göre değerlendirilmesiyle elde edilen bulgular incelenmiş ve kıyaslanmıştır. Bu kıyaslamalardan sonra limitin hesaplanmasında sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında programda tavsiye edilen yaklaşıma göre daha etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Ulaştığımız bu sonuçtan sonra ileride yapılacak çalışmalar için aşağıdaki önerilerde bulunulabilir:

- ✓ Bu çalışma sadece Lise Matematik Dersi Öğretim Programında bulunan, araştırmacı (uygulamacı) ve danışmanı tarafından belirlenen 4 kazanım ile ilgili olarak yapılmıştır. İleri bir araştırma programda bulunan limit ile ilgili bütün kazanımları içerecek şekilde yapılabilir.

- ✓ Bu çalışma derslerin işlenmesi ve veri toplama araçlarının öğrencilere uygulanması için ayrılan 7 saat ile sınırlandırılmıştır. İleri bir araştırma daha uzun bir sürede planlanabilir.
- ✓ Bu çalışmanın evreni 12. sınıf öğrencileriyle sınırlandırılmıştır. Fakat limitin hesaplanması konusunda öğrencilerin sıkıntıları sadece 12. sınıf ile sınırlı değildir. Özellikle üniversite 1. sınıfta $\varepsilon - \delta$ metodu kullanarak limit ile ilgili hesaplamaları yapmak öğrencilere çok yabancı gelmekte ve öğrenciler bu metodu kullanarak limit hesaplamada çok zorlanmaktadırlar. Sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın $\varepsilon - \delta$ metoduna eşdeğer olduğu önceki bölümlerde de belirtilmiştir. Bu nedenle üniversite öğrencilerinden oluşturulacak deney ve kontrol grupları ile öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında $\varepsilon - \delta$ metodu ile sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımdan hangisinin daha etkili olduğu araştırılabilir.
- ✓ Bu çalışmanın verilerinin toplandığı aşamada uygulama okulunun imkanları nedeniyle materyal (tepegöz, projeksiyon vs) kullanılamamıştır. İleri bir araştırmada ders işleniş materyallerle desteklenerek ya da bilgisayar ortamında yapılabilir.
- ✓ Bu çalışmada kalıcılık test edilmemiştir. Bu nedenle son test öğrencilere belli aralıklarla (1 ay, 3 ay vb) uygulanarak aradan geçen zamanın yada öğrenilen yeni kavramların limitin hesaplanmasına etkisinin olup olmadığı araştırılabilir.
- ✓ Bu çalışma sonunda öğrencilerle bire bir görüşmeler yapılmamıştır (bakınız Veri Toplama Aracı). İleri bir araştırmada öğrenci görüşmeleri yapıp, görüşmelerden elde edilen bulgular nitel yol kullanarak analiz edilebilir.

- ✓ Bu çalışmada derslerin işlenmesinin ardından öğrencilere uygulanan son testte açık uçlu sorular yoktur. Uygulanan son teste açık uçlu sorular da konulup, bunların da nitel yol kullanılarak analizi yapılabilir.

Ayrıca araştırmamız sonucunda elde edilen bulgular ışığı altında aşağıdaki öneride de bulunabiliriz.

- ✓ Öğrencileri üniversiteye yerleştirmek için günümüzde ve daha önceki yıllarda yapılan sınavlarda (ÜSS, ÖSS, ÖYS, ÖSYS) sorulan sorular çoktan seçmelidir. Dolayısıyla bu sınavlarda öğrencilerden sonucu doğru bir şekilde hesaplamaları istenmektedir. Sınav içeriğinde şu an 12. sınıf müfredatında yer alan limit konusunun, bulunduğu son 10 yılda (1993-1998 yıllarında ÖYS ve 2006-2009 yıllarında ÖSYS) yapılan üniversiteye giriş sınavlarındaki matematik soruları incelendiğinde limit ile ilgili sorulan soruların büyük çoğunluğunun hesaplamaya dayalı olduğu görülebilmektedir.

Araştırmamız sonucunda öğrencilerin limit ile ilgili hesaplamaları yaparken başarıya ulaşmalarında sonsuz küçük sayı kavramıyla oluşturulan yaklaşımın, programda limit kavramının öğretimi ile ilgili tavsiye edilen yaklaşımdan hem daha etkili olduğu hem de bazı soruların çözümlerinde daha kısa çözümlere olanak verdiği görülmüştür. Bu nedenle Lise Matematik Dersi Öğretim Programında limit ile ilgili hesaplamaların sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla yapılması tavsiye edilebilir.

KAYNAKÇA

AKBULUT, K. (2004). Limit Öğretimi ve Kavram Yanılgıları, Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi.

AKBULUT, K. ve IŞIK, A. (2005). Limit Kavramının Etkileşimli Öğretim Stratejisinin Etkinliğinin İncelenmesi ve Bu Süreçte Karşılaşılan Kavram Yanılgıları. Kastamonu Eğitim Dergisi cilt:13, no:2, 497-512.

AKDAĞ, M. (1993). Matematik ve Fen Bilimleri Öğretiminde Karşılaşılan Sorunlar, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi.

AKDAĞ, M. *Eğitimde Program Değerlendirme ve İstatistiksel Yöntemler*. <http://web.inonu.edu.tr/~makdag/egitimde%20program%20degerlendirme.pdf> adresinden 01.05.2009 tarihinde alınmıştır.

AKKOYUNLU, A., GÜLER, M., UĞUREL, I. ve Alan, E., (2003). *Orta Öğretimde Limit Kavramının Oluşturulmasına Yönelik Bir Çalışma*, <http://www.matder.org.tr/bilim/oolkoybc.asp?ID=140> adresinden 11.05.2009 tarihinde alınmıştır.

AKTÜMEN, M. ve KAÇAR, A. (2008). Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin Matematiğe Yönelik Tutuma Etkisi. Hacettepe Üniversitesi Dergisi 35: 13-26.

ALKAN, H. ve ALTUN, M.(1998). **Matematik Öğretmenliği**. T.C. Anadolu Üniversitesi Yayınları no:1072.

AVCI, Y. ve ERGUN, N.(1994). Limitler, Limitler, **Matematik Dünyası**, 1, 12-16

AZTEKİN, S. (2003). Repertuar Çizelge Tekniği ve Limit Konusuna Uygulanması, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi.

BAKİ, A., GÖKÇEK, T. ve ÇELİK, D. (2004). Matematiğin Öğretmen Adaylarının Analiz Dersindeki Başarılarına Etki Eden Faktörlerin Belirlenmesi: Syracuse ve Karadeniz Teknik Üniversitesi Örneği. **VI. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi**, 9 – 11 Eylül. Marmara Üniversitesi, İstanbul.

BAKİ, A. (2003). Okul Matematiğinde Ne Öğretelim Nasıl Öğretelim, **Matematik Bülteni** Sayı -2

BARAK, B. (2007). Limit Konusundaki Kavram Yanılgılarının Belirlenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi.

BAYAR, E. ve GÜNDÜZALP, Y. (1998). **Analiz I**. Trabzon: KATÜ Basımevi

BRUDNEY, P., KEIR, M. and VIRULEG, M. (1993). *Using the Spreadsheet to Develop an Intuitive Understanding of the Limit Concept*.

<http://www.woodrow.org/teacher/mi/1993/13brud.html> adresinden 01.05.2009 tarihinde alınmıştır.

BUKOVA, E. (2006). Öğrencilerin Limit Kavramını Algılamasında ve Diğer Kavramların İlişkilendirilmesinde Karşılaştıkları Güçlükleri Ortadan Kaldıracak Yeni Bir Program Geliştirme, Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi.

BÜYÜKÖZTÜRK, Ş. (2001). *DeneySEL Desenler, Ön test-Son test, Kontrol Grubu Desen ve Veri Analiz Kitabı*, Ankara: PegemA Yayıncılık.

CORNU, B. (1981). Quelques Obstacles a l'apprentissage de la Notion de Limite, **Recherches en Didactique des Mathematiques** 4, pp. 236–268.

ÇOLAK, H. (2002). Limit Öğretiminde İki Farklı Öğretim Durumunun Karşılaştırılması. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi.

DAVIS, Robert B. and VINNER, S. (1986). The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages, **Journal of Mathematical Behavior** 5, 281–303.

DOĞAN, A., SULAK, H. ve CİHANGİR, A. *İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğrencilerinin Özel Fonksiyonlar ile Fonksiyonlarda Limit, Türev ve Türev Uygulamaları Konularındaki Yeterlikleri Üzerine Bir Araştırmaya*
<http://www.fedu.metu.edu.tr/ufbmek-5/ozetler/d223.pdf> adresinden 03.04.2009 tarihinde alınmıştır.

DUBINSKY, E., COTTRILL, J., NICHOLAS, D., SCHWINGENDORF, K., THOMA, K. and VIDA KOVIC, D., (1996), Understanding The Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema, **Journal of Mathematical Behaviour**, 15, 167-192(September)

ERDOĞAN, A. (2007). Kavram Haritalarının Calculus Öğretiminde Kullanılması, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi.

FERRINI-MUNDY, J. and LAUTEN, D.(1994). Student Understanding of Basic Calculus Concepts: Interaction with the Graphics Calculator. **Journal of Mathematical Behavior**, 13, 225–237.

FOLEY , Gregory D. (1986). Using Infinitesimals To Introduce Limits And Continuity in A Community College Calculus Course (Hyperreal Numbers). Doktora Tezi, The University of Texas at Austin

GELİŞİM HACHETTE Alfabetik Genel Kültür Ansiklopedisi (1983). İstanbul: Gelişim Basın ve Yayın A. Ş.

GILLMAN, L. (1997). Rigor in Calculus, **Notices of American Mathematical Society** .44 (8), 932-934 (September).

GÖKER, L.(1997). **Matematik Tarihi ve Türk-İslam Matematikçilerinin Yeri**. İstanbul: Milli Eğitim Basımevi.

HACISALİHOĞLU, H.H., BALCI, Mustafa.(1994). **Temel ve Genel Matematik**. Ankara: Ertem Matbaacılık.

HOFE, R. vom (1998): Probleme mit dem Grenzwert – Genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse - Eine Fallstudie aus dem computergestützten Analysisunterricht. In: **Journal für Mathematik-Didaktik**, to appear 1998, 35 p.

JAMES, Melanie D. (1995). *Should Calculus Be Taught in High School and If So How Should It Be Taught?*, <http://jwilson.coe.uga.edu/emt705/EMT705.James.html> adresinden 11.02.2009 tarihinde alınmıştır.

JUTER, K.(2006). **Students' Attitudes to Mathematics and Performance in Limits of Functions**. Mathematics Education Research Journal, 2005, Vol. 17, No. 2, 91–110.

KABACA, T (2006). **Limit Kavramının Öğretiminde Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin Etkisi**, Doktora Tezi,Gazi Üniversitesi.

KAPTAN, S.(1998). **Bilimsel Araştırma ve İstatistik Teknikleri**. Ankara: Tekışık Web Ofset Tesisler.

KARAÇAY, T. (1991). Sonsuzluğun Olağanüstü Özellikleri, **Matematik Dünyası** 1(1), 15-16.

KARAÇAY, T. (1985). Orta Öğretim Kurumlarında Matematik Öğretimi ve Sorunları, Türk Eğitim Derneği 13-14 (Haziran) .

KARAÇAY, T. (1982). **Genel Topoloji**. Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi Basım Evi

KASTEN, M. ve diğerleri (1988), The Role of Calculus in College Mathematics, ERIC/SMEAC Mathematics Education Digest No. 1.

KEISLER, H.J.(1976). **Foundations of Infinitesimal Calculus**. (Elementary Calculus Boston: Prindle, Weber&Schidt).

KOZ, İ.(1983). **Matematikte Analiz Dersine Ait Çözümlü, Çözümsüz Problemler**. İstanbul: Gürsoy Ofset.

MONAGAN, J . SUN, S. and TALL, D. (1994) *Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra System*,
<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1994c-monhn-sun-pme.pdf>
 adresinden 01.10.2008 tarihinde alınmıştır.

T.C. M.E.B. Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, 9-12. sınıflar Matematik Dersi Öğretim Programı ve Kılavuzu (2005),Ankara.

MONAGAN, J. (1991). Problems with The Language of Limits, **For the Learning of Mathematics**, 11, 3, 20–24.

ORTON, A. (1985). When Should We Teach Calculus? **Mathematics in School**, 14, 11-15.

PARAMESWARAN, R. (2007). On Understanding The Notion of Limits and Infinitesimal Quantities, *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5: 193-216

PRZENIOSLO, M., (2004). Images of The Limit of Function Formed in the Course of Mathematical Studies at The University, **Educational Studies in Mathematics**, 55: 103-132.

SIERPINSKA, A. (1987). Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits. **Educational Studies in Mathematics**, 18,371-397.

SLOMER, D. (1999). Numerical Zooming on The Limits. **The Mathematics Teachers**, 92(5),448.

STEWART, J. (1994). Calculus 3rd edition, p.50-61, Brooks/Cole Publishing.

SZYDLIK, J. (2000). Mathematics Beliefs and Conceptual Understanding of Limit of Function. **Journal Research in Mathematics Education**, 31(3), 258-276.

TALL, D. and VINNER, S.(1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity, **Educational Studies in Mathematics**, 12, 151–169.

TALL, D. (1980). Intuitive Infinitesimals in The Calculus, **Poster presented at the Fourth International Congress on Mathematical Education**,

TALL, D. and SCHWARZENBERGER, R.L.E. (1978). Conflicts in The Learning of Real Numbers and Limits, **Mathematics Teaching**, 82, 44–49.

TATAR, E., OKUR, M. ve TUNA, A. (2008). Ortaöğretim Matematiğinde Öğrenme Güçlüklerinin Saptanmasına Yönelik Bir Çalışma. Kastamonu Eğitim Dergisi cilt:16, no:2, 507-516.

TODOROV, Todor D.(2001). Back to Classics: Teaching Limits Through Infinitesimals. **International Journal of Mathematics Education in Science and Tecnology**, 32 (1),4-20

UBUZ, B. (1999). Genel Matematikte (Calculus) Öğrenci Hataları. Matematik Dünyası, 8(5), 9-11, Aralık

UYHAN, S. (2002). İlginç Limit Problemleri, **Matematik Dünyası**, 2, 15-15

ÜLGER, A. (2004). Matematiğin Kısa Bir Tarihi 5, **Matematik Dünyası** 13(1), 42-45.

WILLIAMS, Steven R. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students, **Journal for Research in Mathematics Education**, 22, 219–236.

YALIN, H. İ. (2001). **Öğretim Teknolojileri ve Materyal Geliştirme**. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım Ltd. Şti.

EKLER LİSTESİ

EK	sayfa
1. Lise Matematik Dersi Öğretim Programındaki Limit ile İlgili Kazanımlar.....	92
2. Hazır Bulunuşluk Testi Soruları.....	93
3. Son Test Soruları.....	96
3. Cevap Anahtarları	
3.1. Son Test Deney Grubu Cevap Anahtarı.....	98
3.2. Son Test Kontrol Grubu Cevap Anahtarı.....	103
4. Deney ve Kontrol Grubundaki Ders İşlenişleri.....	108
5. İzin Dilekçeleri.....	124

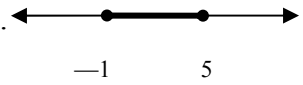
EK 1: Kazanımlar

1. Bir bağımsız değişkenin verilen bir sayıya yaklaşmasını örneklerle açıklar.
2. Bir fonksiyonun bir noktadaki soldan limitini ve sağdan limitini örneklerle açıklayarak fonksiyonun bir noktadaki limiti ile soldan limiti ve sağdan limiti arasındaki ilişkiyi belirtir.
3. Limit ile ilgili özellikleri belirtir ve uygulamalar yapar.
4. Parçalı fonksiyonların ve mutlak değer fonksiyonunun limitleri ile ilgili uygulamalar yapar.
5. Genişletilmiş gerçel sayılar kümesini belirtir, gerçel değişkenli ve gerçel değerli fonksiyonlarda sonsuz için limit ve sonsuz limit kavramlarını grafik üzerinde açıklar.
6. Trigonometrik fonksiyonların limiti ile ilgili özellikleri belirtir.
7. Belirsizlik durumlarını belirtir ve verilen noktalarda $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ belirsizlik hâlleri olan fonksiyonların limitini hesaplar.

EK 2: HAZIR BULUNUŞLUK TESTİ

Sevgili öğrenciler! Bir araştırma tezi için aşağıdaki sorularla ilgili samimi düşüncelerinizi bizimle paylaşmanız gerekmektedir. Soruları önce dikkatlice okuyunuz ve sonra dikkatlice cevaplamaya çalışınız. Cevaplarınız bu araştırmanın dışında kesinlikle kullanılmayacaktır. Yardımlarınız için teşekkür ederiz.

1. Yanda verilen aralığı aşağıda istenilen şekillerde ifade ediniz.



a) Ortak özellik yöntemi ile:

b) Sembolik olarak:

c) Mutlak değer kullanarak:

2. 1,5 sayısına $\frac{1}{2}$ birim yakınlıkta olan reel sayıların kümesini sembolik olarak ve ortak özellik yöntemini kullanarak ifade ediniz.

3. $\{x : |x - a| < \varepsilon, a, \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ kümesini sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

4. $y = f(x)$ neyi ifade etmektedir? Açıklayınız.

5. Bir fonksiyonun grafiği sayı doğrusunun mu yoksa düzlemin mi alt kümesidir? Cevabınızın gerekçelerini yazınız.

6. Bir fonksiyonun grafiğini ortak özellik yöntemini kullanarak ifade ediniz.

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1; & x \geq 2 \text{ ise} \\ x + 2; & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$ ile tanımlı f fonksiyonu veriliyor. Buna göre,

fonksiyonun grafiğini çiziniz.

8. $y = f(x)$ ve $y = |f(x)|$ fonksiyonlarının grafikleri arasındaki fark nedir?

Açıklayınız.

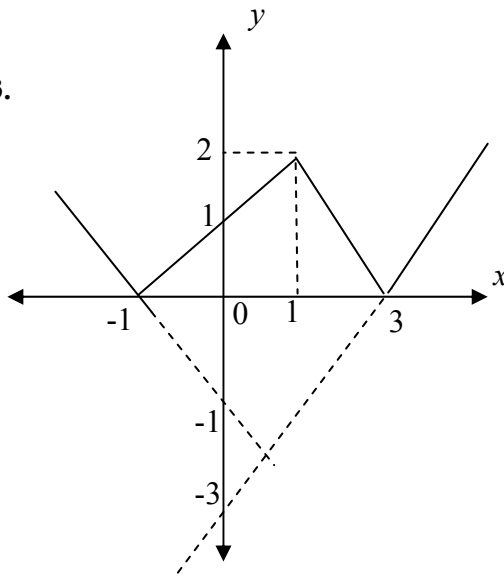
9. $y = ||x - 1| - 2|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

10. $|2x - 1| \leq 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

11. $|5x - 2| \geq 2x + 7$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

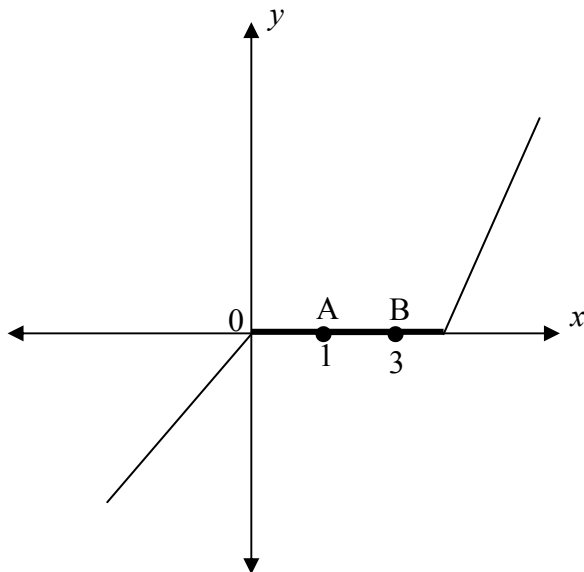
12. $f : (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = \log(2x - 4)$ ile tanımlı fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

13.



Yanda grafiği verilen fonksiyonu cebirsel olarak ifade ediniz.

14.



Yandaki şekilde gösterilen A ve B noktalarını ikililerle ifade edip ikililerin ikinci bileşenlerini bulunuz.

EK 3: SON TEST

Sevgili öğrenciler! Bir araştırma tezi için aşağıdaki soruların çözümlerini samimi olarak bizimle paylaşmanız gerekmektedir. Soruları önce dikkatlice okuyunuz ve sonra dikkatlice cevaplamaya çalışınız. Cevaplarınız bu araştırmanın dışında kesinlikle kullanılmayacaktır. Yardımlarınız için teşekkür ederiz.

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 ; & x > 2 \\ -|x| + 4 ; & x \leq 2 \end{cases}$ ise parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre,

i) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ limiti var mıdır? Varsa limitin değeri nedir?

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ limiti var mıdır? Varsa limitin değeri nedir?

2. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 7x + 12}{|3 - x|}$ limitinin değeri nedir?

3. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{|x^2 - 7x + 12|}$ limitinin değeri nedir?

4. $f(x) = \frac{6}{2-x}$ ile verilen fonksiyonun $x=2$ noktasındaki limiti için ne söylenebilir?

5. $f(x) = \frac{3}{x^2}$ ile verilen fonksiyonun $x=0$ noktasındaki limiti için ne söylenebilir?

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 8}$ limitinin değeri için ne söylenebilir?

7. $\lim_{x \rightarrow 4^+} (\log(3x - 12))$ limitinin değeri nedir?

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x - 1}$ limitinin değeri nedir?

EK 4: CEVAP ANAHTARLARI

EK 4.1: Son Test Deney Grubu Cevap Anahtarı

ÇÖZÜM 1 (i):

1. Adım: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = st[f(2+h)]$
2. Adım: $st[f(2+h)] = st[(2+h)^2 + 1] = st(4 + 4h + h^2 + 1) = 5$
3. Adım: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = st[f(2-h)]$
4. Adım: $st[f(2-h)] = st[-|2-h| + 4] = st(-2 + h + 4) = 2$
5. Adım: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ olduğundan limit yoktur.

ÇÖZÜM 1. (ii) :

1. Adım : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = st[f(1+h)]$
2. Adım: $st[f(1+h)] = st[-|1-h| + 4] = st(-1 - h + 4) = 3$
3. Adım : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = st[f(1-h)]$
4. Adım: $st[f(1-h)] = st[-|1-h| + 4] = st(-1 + h + 4) = 3$
5. Adım: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ olduğundan limit vardır.

6. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ tür.

ÇÖZÜM 2:

1. Adım: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = st[f(3+h)]$

2. Adım: $st\left[\frac{(3+h)^2 - 7(3+h) + 12}{|3 - (3+h)|}\right]$

3. Adım: $st\left[\frac{9+6h+h^2-21-7h+12}{|-h|}\right] = st\left[\frac{h^2-h}{h}\right] = st(h-1) = -1$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1$ dir.

ÇÖZÜM 3:

1. Adım: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = st[f(3+h)]$

2. Adım: $st\left[\frac{3+h-3}{|(3+h)^2 - 7(3+h) + 12|}\right]$

3. Adım: $st\left[\frac{h}{|9+6h+9-21-7h+12|}\right] = st\left[\frac{h}{|h^2-h|}\right] = st\left[\frac{h}{|h||h-1|}\right]$

4. Adım: $st\left[\frac{h}{h.(1-h)}\right] = 1$ olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{|x^2-7x+12|} = 1 \text{ dir.}$$

ÇÖZÜM 4:

$$1. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = st[f(2+h)]$$

$$2. \text{ Adım: } st\left[\frac{6}{2-(2+h)}\right] = st\left(\frac{6}{-h}\right) = -\infty$$

$$3. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = st[f(2-h)]$$

$$4. \text{ Adım: } st\left[\frac{6}{2-(2-h)}\right] = st\left(\frac{6}{h}\right) = \infty$$

$$5. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \text{ olduğundan limit yok.}$$

ÇÖZÜM 5:

$$1. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = st[f(0+h)]$$

$$2. \text{ Adım: } st\left[\frac{3}{(0+h)^2}\right] = st\left(\frac{3}{h^2}\right) = \infty$$

$$3. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = st[f(0-h)]$$

4. Adım: $st\left[\frac{3}{(0-h)^2}\right] = st\left(\frac{3}{h^2}\right) = \infty$

5. Adım: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ olduğunda limit vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

ÇÖZÜM 6:

1. Adım: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = st[f(2+h)]$

2. Adım: $st\left[\frac{(2+h)^2 - 9}{(2+h)^2 - 6(2+h) + 8}\right]$

3. Adım: $st\left[\frac{h^2 + 4h - 5}{h^2 - 2h}\right] = st\frac{1}{h} \cdot st\left[\frac{h^2 + 4h - 5}{h - 2}\right] = \infty \cdot \frac{5}{2} = \infty$

4. Adım: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = st[f(2-h)]$

5. Adım: $st\left[\frac{(2-h)^2 - 9}{(2-h)^2 - 6(2-h) + 8}\right]$

6. Adım: $st\left[\frac{h^2 - 4h - 5}{h^2 + 2h}\right] = st\left(\frac{1}{h}\right) \cdot st\left[\frac{h^2 - 4h - 5}{h + 2}\right] = \infty \cdot -\frac{5}{2} = -\infty$

7. Adım: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ olduğundan limit yoktur.

ÇÖZÜM 7:

$$1. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = st[f(4+h)]$$

$$2. \text{ Adım: } st[\log(3 \cdot (4+h) - 12)] = st(\log 3h) = -\infty$$

ÇÖZÜM 8:

$$1. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = st[f(1+h)]$$

$$2. \text{ Adım: } st\left[\frac{(1+h)^3 + (1+h)^2 + (1+h) - 3}{(1+h) - 1}\right]$$

$$3. \text{ Adım: } st \frac{h^3 + 4h^2 + 6h}{h} = st(h^2 + 4h + 6) = 6$$

$$4. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = st[f(1-h)]$$

$$5. \text{ Adım: } st\left[\frac{(1-h)^3 + (1-h)^2 + (1-h) - 3}{(1-h) - 1}\right]$$

$$6. \text{ Adım: } st\left[\frac{-h^3 + 4h^2 - 6h}{-h}\right] = st(h^2 - 4h + 6) = 6$$

$$7. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{ olduğundan limit vardır.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$$

EK 4.2 Son Test Kontrol Grubu Cevap Anahtarı**ÇÖZÜM 1 (i):**

$$1. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 1) = 5$$

$$2. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-|x| + 4) = 2$$

$$3. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \text{ olduğundan limit yoktur.}$$

ÇÖZÜM 1 (ii) :

$$1. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-|x| + 4) = 3$$

$$2. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-|x| + 4) = 3$$

$$3. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{ olduğundan limit vardır.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \text{ tür.}$$

ÇÖZÜM 2:

$$1. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 7x + 12}{|3 - x|} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 4)(x - 3)}{(x - 3)}$$

$$2. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 4) = -1$$

ÇÖZÜM 3:

$$1. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{|x^2-7x+12|} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{|x-4||x-3|}$$

$$2. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{(4-x).(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(4-x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{|x^2-7x+12|} = 1 \text{ dir.}$$

ÇÖZÜM 4:

1. Adım: $f(x) = \frac{6}{2-x}$ ile verilen fonksiyonda x yerine 2 nin sağ civarından sayılar yazarak $(x, f(x))$ ilişkisine bakılır.

2. Adım: Fonksiyonda x yerine 2 nin sağ civarından, 2 ye yaklaşan sayılar yazdıkça $f(x)$ değerlerinin giderek azaldığı görülür.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

3. Adım: $f(x) = \frac{6}{2-x}$ ile verilen fonksiyonda x yerine 2 nin sol civarından sayılar yazarak $(x, f(x))$ ilişkisine bakılır.

4. Adım: Fonksiyonda x yerine 2 nin sol civarından, 2 ye yaklaşan sayılar yazdıkça $f(x)$ değerlerinin giderek arttığı görülür.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty$$

5.Adım: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ olduğundan limit yok.

ÇÖZÜM 5:

1. Adım: $f(x) = \frac{3}{x^2}$ ile verilen fonksiyonda x yerine 0 ın sağ civarından sayılar yazarak $(x, f(x))$ ilişkisine bakılır.

2. Adım: Fonksiyonda x yerine 0 ın sağ civarından, 0 a yaklaşan sayılar yazdıkça $f(x)$ değerlerinin giderek arttığı görülür.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$$

3. Adım: $f(x) = \frac{3}{x^2}$ ile verilen fonksiyonda x yerine 0 ın sol civarından sayılar yazarak $(x, f(x))$ ilişkisine bakılır.

4. Adım: Fonksiyonda x yerine 0 ın sol civarından, 0 a yaklaşan sayılar yazdıkça $f(x)$ değerlerinin giderek azaldığı görülür.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

5.Adım: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ olduğunda limit vardır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

ÇÖZÜM 6:

1. Adım: $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 8}$ fonksiyonunda x yerine 2 nin sağ civarından sayılar yazarak $(x, f(x))$ ilişkisine bakılır.

2. Adım: Fonksiyonda x yerine 2 nin sağ civarından, 2 ye yaklaşan sayılar yazdıkça $f(x)$ değerlerinin giderek arttığı görülür.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

3. Adım: $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 8}$ fonksiyonunda x yerine 2 nin sol civarından sayılar yazarak $(x, f(x))$ ilişkisine bakılır.

4. Adım: Fonksiyonda x yerine 2 nin sol civarından, 2 ye yaklaşan sayılar yazdıkça $f(x)$ değerlerinin giderek azaldığı görülür.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

5. Adım: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ olduğundan limit yok.

ÇÖZÜM 7: 1.yol

1. Adım: $f(x) = \log(3x-12)$ fonksiyonunda x yerine 2 nin sağ civarından sayılar yazarak $(x, f(x))$ ilişkisine bakılır.

2. Adım: Fonksiyonda x yerine 2 nin sağ civarından, 2 ye yaklaşan sayılar yazdıkça $f(x)$ değerlerinin giderek azaldığı görülür.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

ÇÖZÜM 7: 2.yol

1. Adım: $f(x) = \log(3x - 12)$ fonksiyonunun grafiğini çizilir.

2. Adım: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ olduğu görülür.

ÇÖZÜM 8:

$$1. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \cdot (x^2 + 2x + 3)}{(x - 1)}$$

$$2. \text{ Adım: } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 3) = 6 \text{ dır.}$$

EK 5: DERSLERİN İŞLENİŞİ

Aksiyom: Sıfırdan farklı ve h ile gösterdiğimiz en az bir sonsuz küçük sayı vardır.

Sonsuz küçük sayı tanımı: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $h \neq 0$ olmak üzere, $|h| < \frac{1}{n}$ ise h sayısı sonsuz küçük bir sayı ya da sonsuz küçüktür.

Örnek 1: 6 sayısına 6 dan daha küçük sayılarla yaklaşınız.

Öğrencilerden alınan cevaplar sonrasında öğrencilerle tartışılarak, 6 ya yakın olan yani 6 nın sol civarından seçtiğimiz sayı a olmak üzere, “6 ile a arasındaki uzaklık küçüldükçe, yani a sayısı 6 ya yaklaştıkça, $|6 - a|$ 0 a daha yakın olur.” ifadesinde öğrencilerle fikir biriliğine varılmıştır.

Burada deney grubunda, “ $|6 - a|$ bir sonsuz küçükse a , 6 ya (istediğimiz kadar) çok yakındır “ ifadesi kullanılmıştır.

Örnek 2: -6 sayısına -6 dan daha büyük sayılarla yaklaşınız.

-6 ya -6 dan daha büyük sayılarla yani -6 nın sağ civarından sayılarla yaklaşarak deney ve kontrol grubu öğrencileri ile örnek 1 de olduğu gibi tartışılmıştır ve örnek 1 için söylenenlerin öğrenciler tarafından iyice kavranılmasına çalışılmıştır

Örnek 3: 1 sayısına 1 den küçük ve 1 den büyük sayılarla yaklaşınız.

Bu sorunun çözümü için 1 e önce 1,5 ve 0,5 sayılarıyla yaklaşılmıştır. Her iki sayı da 1 e 0,5 br uzaklıktadır. Bu, öğrencilerle tartışıldıktan sonra

$0,5 < x < 1,5 \Rightarrow |x - 1| < 0,5$ şeklinde, yani 1 e uzaklıkları 0,5 br ve daha küçük olan sayıların kümesi şeklinde ifade etmeye öğrencilerle karar verilmiştir.

Daha sonra benzer şekilde 1 e 1,1 ve 0,9 sayılarıyla yaklaşmış ve $0,9 < x < 1,1 \Rightarrow |x - 1| < 0,1$ şeklinde yani 1 e uzaklıkları 0,1 br ve daha küçük olan sayıların kümesi şeklinde ifade etmeye öğrencilerle karar verilmiştir.

Kontrol grubunda sorunun cevabını toplamak için, “oluşacak sayı kümesinin 1 e olan uzaklığı ne kadar küçülürse 1 e o kadar çok yaklaşırız.” ifadesinde karar kılınmıştır.

Deney grubunda ise bu sorunun cevabını toplamak için “oluşacak sayı kümesinin 1 e olan uzaklığı ne kadar küçülürse yani oluşacak sayı kümesinin 1 e olan uzaklığı bir sonsuz küçük sayı olursa, 1 e o kadar çok yaklaşırız.” ifadesinde karar kılınmıştır.

Örnek 4: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ fonksiyonunun $x=2$ civarındaki davranışını inceleyiniz.

Soru tahtaya yazıldıktan sonra öğrencilere, “2 nin sağ ve sol civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktalar $x=2$ doğrusu ile buluşur mu (kesişir mi)? Eğer buluşursa, buluşma noktasını tahmin edebilir miyiz? “ soruları yöneltilmiştir.

Öğrencilerden gelen cevaplar sonrasında 2 nin hem sağ hem de sol civarından, her defasında 2 ye daha yakın olan sayıların görüntüleri ile $(x, f(x))$ ikilileri oluşturulmuştur.

2 nin sağ civarından her defasında 2 ye daha yakın olan sayıların (örneğin 2,1, 2,01, 2,001 gibi) görüntüleriyle oluşturulan ikililerin ordinat değerlerine bakıldığında

bu değerlerin 3 ün sağ civarında (örneğin 3,1, 3,01, 3,001 gibi) değer aldığı görülmüştür.

2 nin sol civarından her defasında 2 ye daha yakın olan sayıların (örneğin 1,9, 1,99, 1,999 gibi) görüntüleriyle oluşturulan ikililerin ordinat değerlerine bakıldığında bu değerlerin 3 ün sol civarında (örneğin 2,9, 2,99, 2,999 gibi) değer aldığı görülmüştür.

Öğrencilerden 2 nin sağ ve sol civarındaki ve 2 ye yakın olan sayıların görüntülerinin 3 civarında olduğu, dolayısıyla 2 nin civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktaların $x=2$ doğrusuyla kesiştiği noktanın ordinatının 3 olması gerektiği cevapları alınmıştır.

Bundan sonra öğrencilere fonksiyonun grafiği çizdirilmiş ve grafik üzerinde de fonksiyonda, 2 ye yakın sayıların görüntülerinin 3 e yakın olup olmadığı ve 2 nin civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktaların gerçekten $x=2$ doğrusuyla ordinatı 3 olan bir noktada kesişip kesişmediği tartışılmıştır.

Örnek 5: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$ fonksiyonunda 0 a ve 1 e yakın olan sayıların görüntülerini bulunuz.

Soru tahtaya yazıldıktan sonra öğrencilere, “0 ve 1 in sağ ve sol civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktalar $x=0$ ve $x=1$ doğruları ile buluşur mu (kesişir mi)? Eğer buluşursa, buluşma noktasını tahmin edebilir miyiz?” soruları yöneltilmiştir.

Öğrencilerden 0 civarında, her defasında 0 a daha yakın olan sayılarla oluşturulan $(x, f(x))$ ikililerinin ordinat değerlerinin 2 civarında olduğu, dolayısıyla 0 ın civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktaların $x=0$ doğrusuyla kesiştiği noktanın ordinatının 2 olduğu cevapları alınmıştır.

Benzer şekilde 1 civarında her defasında 1 e daha yakın olan sayılarla oluşturulan $(x, f(x))$ ikililerinin ordinat değerlerinin 3 civarında olduğu, dolayısıyla 1 in civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktaların $x=1$ doğrusuyla kesiştiği noktanın ordinatının 3 olduğu cevapları alınmıştır.

Daha sonra öğrencilere fonksiyonun grafiği çizdirilmiş ve grafik üzerinde de fonksiyonda, 0 a yakın sayıların görüntülerinin 2 ye yakın olup olmadığı ve 1 e yakın sayıların görüntülerinin 3 e yakın olup olmadığı tartışılmıştır.

Örnek 6: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ \cos x, & x = 0 \end{cases} \quad \text{fonksiyonunda } 0 \text{ a ve } 2 \text{ ye yakın olan sayıların}$$

görüntülerinin yaklaştığı değerleri bulunuz.

Her sorudan sonra olduğu gibi bu soru da tahtaya yazıldıktan sonra öğrencilere, “0 ve 2 nin sağ ve sol civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktalar $x=0$ ve $x=2$ doğruları ile buluşur mu (kesişir mi)? Eğer buluşursa, buluşma noktasını tahmin edebilir miyiz?” soruları yöneltilmiştir.

Öğrencilerden 0 in civarında her defasında 0 a daha yakın olan sayılarla oluşturulan $(x, f(x))$ ikililerinin ordinat değerlerinin 0 civarında olduğu, dolayısıyla 0 in civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktaların $x=0$ doğrusuyla kesiştiği noktanın ordinatının 0 olduğu cevapları alınmıştır.

Sonrasında 2 nin civarında her defasında 2 ye daha yakın olan sayılarla oluşturulan $(x, f(x))$ ikililerinin ordinat değerlerinin 4 civarında olduğu, dolayısıyla 2 nin civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktaların $x=2$ doğrusuyla kesiştiği noktanın ordinatının 4 olduğu cevapları alınmıştır.

Daha sonra öğrencilere fonksiyonun grafiği çizdirilmiş ve grafik üzerinde de fonksiyonda 0 a yakın sayıların görüntülerinin 0 a yakın olup olmadığı ve 2 ye yakın sayıların görüntülerinin 4 e yakın olup olmadığı tartışılmıştır.

Öğrenciler tarafından çizilen grafikte fonksiyonun $x=0$ da 0 değerini aldığı gören öğrencilerle yapılan 2-3 dakikalık bir tartışmadan sonra fonksiyonun 0 ın civarındaki davranışının $x=0$ daki değeri ile ilgili olmadığı kararına varılmıştır.

Örnek 7: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x > 1 \\ x + 5, & x < 1 \end{cases} \quad \text{fonksiyonunda 1 e yakın olan sayıların görüntülerini}$$

bulunuz.

Öğrencilere, soru tahtaya yazıldıktan sonra, “1 in sağ ve sol civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktalar $x=1$ doğrusu ile buluşur mu (kesişir mi)? Eğer buluşursa, buluşma noktasını tahmin edebilir miyiz?” soruları yöneltilmiştir.

Öğrencilerden her defasında 1 e daha yakın olan sayıların görüntüleriyle oluşturulan $(x, f(x))$ ikililerinin ordinat değerlerinin 6 civarında olduğu, dolayısıyla 1 in civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktaların $x=1$ doğrusuyla kesiştiği noktanın ordinatının 6 olduğu cevapları alınmıştır.

Öğrencilere fonksiyonun grafiği çizdirilmiş ve grafik üzerinde de fonksiyonda 1 e yakın olan sayıların görüntülerinin 6 ya yakın olup olmadığı tartışılmıştır.

Çizilen grafikte fonksiyonun $x=1$ de tanımlı olmadığını gören öğrencilerle yapılan 2-3 dakikalık bir tartışmadan sonra fonksiyonun 1 in civarındaki davranışının, fonksiyonun $x=1$ de tanımlı olup olmaması ile ilgili olmadığı kararına varılmıştır.

Örnek 8: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 2 \\ x - 1, & x < 2 \end{cases} \quad \text{fonksiyonunda } 2 \text{ ve } 3 \text{ e yakın olan sayıların}$$

görüntülerini bulunuz.

Öğrencilere, soru tahtaya yazıldıktan sonra, “2 ve 3 ün sağ ve sol civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktalar $x=2$ ve $x=3$ doğruları ile buluşur mu (kesişir mi)? Eğer buluşursa, buluşma noktasını tahmin edebilir miyiz?” soruları yöneltilmiştir.

Öğrencilerden 2 nin sağ civarındaki ve her defasında 2 ye daha yakın olan sayıların görüntüleriyle oluşturulan $(x, f(x))$ ikililerinin ordinat değerlerinin 3 ün sağ civarında, 2 nin sol civarındaki ve her defasında 2 ye daha yakın olan sayıların görüntüleriyle oluşturulan $(x, f(x))$ ikililerinin ordinat değerlerinin 1 in sol civarında olduğu cevapları alınmıştır.

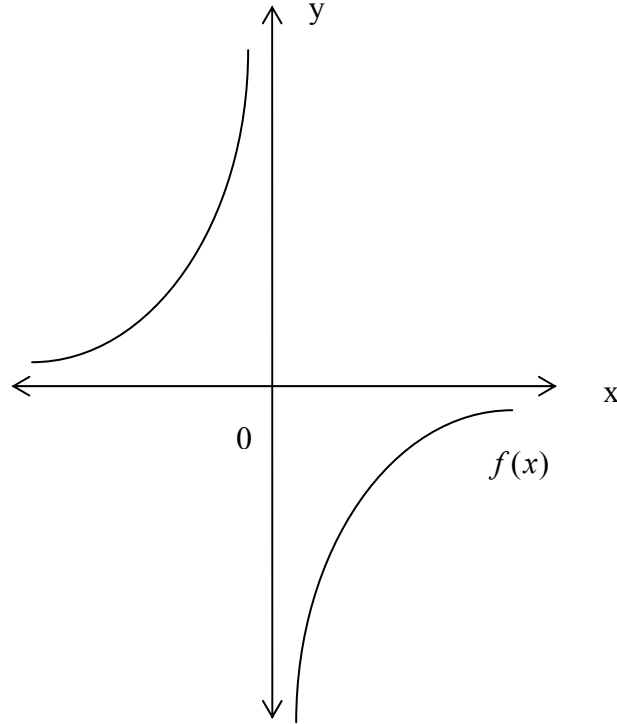
Dolayısıyla öğrenciler 2 nin sağ ve sol civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktaların $x=2$ doğrusuyla aynı yerde kesişmediği cevabını vermişlerdir. Yani fonksiyonun 2 nin sağ ve sol civarında aynı şekilde davranmadığı öğrenciler tarafından belirtilmiştir.

Sonrasında öğrencilerden, 3 ün sağ ve sol civarında ve her defasında 3 e daha yakın olan sayıların görüntüleriyle oluşturulan $(x, f(x))$ ikililerinin ordinat değerlerinin 4 civarında olduğu, dolayısıyla 3 civarındaki sayıların görüntüleri ile oluşturulan noktaların $x=3$ doğrusuyla kesiştiği noktanın ordinatının 4 olduğu cevapları alınmıştır.

Öğrenciler tarafından çizilen grafikte de fonksiyonun 2 nin sağ ve sol civarında aynı şekilde davranmadığı, $x=2$ doğrusu ile 2 nin sağ ve sol civarındaki sayıların görüntülerinin farklı yerlerde kesiştiğinin görüldüğü öğrenciler tarafından

belirtilmiştir. Ayrıca fonksiyonun 3 ün civarındayken 4 civarında değer aldığı konusunda öğrencilerle fikir birliğine varılmıştır.

Örnek:9 Aşağıda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu altında 0 a yakın olan sayılar ile artan ve azalan x değerlerinin görüntülerini bulunuz.



Deney ve kontrol grubu öğrencileri grafiğe bakarak 0 ın sol civarında olan ve her defasında 0 a daha yakın olan sayıların görüntülerinin giderek büyüdüğünü, sağ civarında olan ve her defasında 0 a daha yakın olan sayıların görüntülerinin giderek küçüldüğünü ifade etmişlerdir.

Ayrıca öğrenciler artan x değerleri ve bunların görüntüleriyle oluşturulan $(x, f(x))$ ikililerinin ordinat değerlerine bakarak, x değerleri arttıkça bu değerlerin f fonksiyonu altındaki görüntülerinin 0 a yaklaştığını belirtmişlerdir. Benzer şekilde öğrenciler azalan x değerleri ve bunların görüntüleriyle oluşturulan $(x, f(x))$

ikililerinin ordinat değerlerine bakarak, x değerleri azaldıkça bu değerlerin f fonksiyonu altındaki görüntülerinin 0 a yaklaştığını belirtmişlerdir.

Bu soruların çözümünden sonra, hem deney hem de kontrol grubunda aşağıdaki tanımla konu işlenmesine devam edilmiştir.

Tanım:

Civarında fonksiyonun görüntüsünü incelediğimiz a sayısı için a sayısının sağ civarındaki sayıların görüntülerinin (yakınlaştığı ordinat değerinin) $x = a$ doğrusuyla kesişmesini beklediğimiz noktanın ordinatı, fonksiyonun **sağ limiti** olarak adlandırılmaktadır.

Sağ limit, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ile gösterilir.

Civarında fonksiyonun görüntüsünü incelediğimiz a sayısı için a sayısının sol civarındaki sayıların görüntülerinin (yakınlaştığı ordinat değerinin) $x = a$ doğrusuyla kesişmesini beklediğimiz noktanın ordinatı fonksiyonun **sol limiti** olarak adlandırılmaktadır.

Sol limit, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ile gösterilir.

Eğer $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ise $x = a$ için fonksiyonun limiti vardır ve L dir denir.

Bu tanım verildikten sonra hem deney hem de kontrol grubunda her bir soruyla ilgili olmak üzere, aşağıdaki şekilde toparlamalar yapılmıştır.

İncelediğimiz her bir örnekteki odaklanılan sayı (a) ya da sayıların civarında, sayıların verilen fonksiyonlar altındaki görüntüleriyle oluşturulan noktaların (ikililerin) $x = a$ doğrusuyla farklı durumlarının olabileceği belirtilmiştir.

Mesela, örnek 5 te oluşan ikililer $x = a$ doğrusuyla tek noktada buluşmaktadır. Ve bu tek nokta fonksiyonun o noktadaki görüntüsüdür. Yani odaklandığımız sayının sağ ve sol civarındaki sayılar ile bu sayıların görüntülerinden oluşan ikililer $x = a$ doğrusuyla o sayının görüntüsünde buluşabilmektedir. Dolayısıyla bu örnekte limit vardır. Ve

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \text{ dır.}$$

Örnek 6 da odaklandığımız sayı olan 0 ın civarında fonksiyonun limiti vardır. Fakat limit değeri fonksiyonunun o noktadaki limit değerine eşit değildir. Dolayısıyla fonksiyonun bir noktadaki limiti fonksiyonun o noktadaki görüntüsüne eşit olmayabilir.

Örnek 7 de odaklandığımız sayı olan 1 in civarında fonksiyonun limiti vardır, fakat fonksiyon bu noktada tanımlı değildir. Yani fonksiyonun bir noktada limiti varken, fonksiyon o noktada tanımlı olmayabilir.

Örnek 8 de olduğu gibi odaklandığımız sayının sağ ve sol civarındaki sayılar ve bu sayıların görüntüleriyle oluşan ikililer $x = a$ doğrusuyla farklı noktalarda buluşabilir. Yani odaklanılan noktada sağ ve sol limitler birbirinden farklı olabilir. Dolayısıyla odaklanılan noktada fonksiyonun sağ ve sol limitleri var olmasına rağmen, sağ ve sol limit değerleri birbirine eşit olmadığından fonksiyonun o noktada limiti olmayabilir.

Son bir durum da, örnek 9 daki gibidir. Bu örnekte odaklandığımız sayı büyüdükçe bu sayının sağ ve sol civarındaki sayılar ve bunların görüntülerinin oluşturduğu ikililer $x = a$ doğrusuyla orijinden çok uzak ve birbirlerinden farklı

noktalarda kesişebileceği hissi verebilir. Yani bu noktaların ordinatlarının her reel sayıyı aşacağı ya da her reel sayıdan küçük olacağı hissi uyandırabilir.

Bu toparlamalar yapıldıktan sonra deney ve kontrol grubu öğrencilerinin sağdan limit, soldan limit ve limit arasındaki ilişkiyi daha iyi kavrayabilmeleri için 2008 ÖSS de mat 2 bölümünde çıkan limit sorusu ve bu soruya benzer bir adet soru daha çözülmüştür.

Deney grubunda aşağıdaki örnekler ve tanım tanıtılarak ders işlenişine devam edilmiştir.

$$\text{sonsuz küçük} \pm \text{sonsuz küçük} = \text{sonsuz küçük}$$

$$\text{sonsuz küçük} \times \text{sonsuz küçük} = \text{sonsuz küçük}$$

$$\text{sonsuz küçük} \times (\text{reel sayı}) = \text{sonsuz küçük}$$

Tanım: 1. $a \in \mathbb{R}$ ve h bir sonsuz küçük olmak üzere, $st(a + h) = a$ dır.

2. h bir sonsuz küçük ve $h \neq 0$ olmak üzere,

$$h > 0 \text{ ise } st\left(\frac{1}{h}\right) = \infty$$

$$h < 0 \text{ ise } st\left(\frac{1}{h}\right) = -\infty$$

st Fonksiyonunun Özellikleri

1. Bütün sonsuz küçük h ler için $st(h) = 0$ dır.

2. $\forall a \in \mathbb{R}$ için $st(a) = a$

3. $st(x \pm y) = st(x) \pm st(y)$

$$4. st(x.y) = st(x).st(y) \text{ ve } st\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{st(x)}{st(y)} \quad (st(y) \neq 0)$$

$$5. st(|x|) = |st(x)|$$

6. n tek doğal sayı ya da n çift doğal sayı ve $st(x) \geq 0$ iken,

$$st\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{st(x)}$$

7. $a \in \mathbb{R}$ ve $P(x)$ bir polinom olmak üzere,

$$st(P(a-h)) = st(P(a+h)) = P(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = st(f(a+h)) \text{ ve } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = st(f(a-h))$$

Kontrol grubunda ders işlenişine limitin Lise Matematik Dersi Öğretim Programında yer alan aşağıdaki özellikleri tanıtilerak devam edilmiştir.

Limitin özellikleri

$f(x)$ ve $g(x)$, $x = a$ da limiti olan iki fonksiyon olmak üzere,

$$1. \forall c \in \mathbb{R} \text{ için } \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$2. \forall c \in \mathbb{R} \text{ için } \lim_{x \rightarrow a} [c.f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \right]$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right|$$

6. n tek doğal sayı ya da n çift doğal sayı ve x in a sayısına yakın tüm değerleri için $f(x) \geq 0$ ise,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$7. P(x) \text{ fonksiyonu için } \lim_{x \rightarrow a^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

Yukarıdaki özellikler öğrencilere tanıtılmıştır.

Bundan sonra aşağıdaki sorular deney grubunda sonsuz küçük sayı kavramı yardımıyla, kontrol grubunda ise Lise Matematik Dersi Öğretim Programında tavsiye edilen yaklaşımla çözülerek ders işlenişine bitirilmiştir. Aşağıdaki soruların birkaçının çözümü örnek olması için verilmiştir.

Örnek 1: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 2 \\ 1-x^3, & 2 \leq x < 4 \\ 5x+3, & x \geq 4 \end{cases} \text{ fonksiyonu veriliyor. Fonksiyonun } x=2, x=3 \text{ ve}$$

$x=4$ teki limitlerini bulunuz.

Deney Grubunda Çözüm:

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = st[f(2+h)] = f(2^+) = -7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = st[f(2-h)] = f(2^-) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \text{ olduğundan limit yoktur.}$$

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = st[f(3+h)] = f(3) = -26$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = st[f(3-h)] = f(3) = -26$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -26$$

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = st[f(4+h)] = f(4^+) = 23$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = st[f(4-h)] = f(4^-) = -63$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \text{ olduğundan limit yoktur.}$$

Kontrol Grubunda Çözüm:

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2^+) = -7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2^-) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \text{ olduğundan limit yoktur.}$$

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = -26$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = -26$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -26$$

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4^+) = 23$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4^-) = -63$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \text{ olduğundan limit yoktur.}$$

Örnek 2: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|2x-4|}{x-2}$ fonksiyonu veriliyor.

Fonksiyonun $x = 2$ deki limitini bulunuz.

Deney Grubunda Çözüm:

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = st[f(2+h)] = st\left[\frac{|2 \cdot (2+h) - 4|}{2+h-2}\right] = st\left(\frac{2h}{h}\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = st[f(2-h)] = st\left[\frac{|2 \cdot (2-h) - 4|}{2-h-2}\right] = st\left(\frac{-2h}{-h}\right) = -2$$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ olduğundan limit yoktur.

Kontrol Grubunda Çözüm:

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 = 2$$

$$[x > 2 \text{ için } (2x-4) > 0 \text{ ve } |2x-4| = 2x-4 \text{ tür.}]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x+4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -2 = -2$$

$$[x < 2 \text{ için } (2x-4) < 0 \text{ ve } |2x-4| = -2x+4 \text{ tür.}]$$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ olduğundan limit yoktur.

Örnek 3: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$ fonksiyonu veriliyor. Fonksiyonun

$x = -1$ ve $x=1$ deki limitlerini inceleyiniz.

Örnek 4: $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$ fonksiyonu veriliyor. Fonksiyonun $x = 1$ ve $x = 2$

deki limitlerini bulunuz.

Deney Grubunda Çözüm:

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = st[f(2+h)] = st\left[\frac{2 \cdot (2+h) - 3}{2+h-2}\right] = st\left(\frac{1+2h}{h}\right)$$

$$st(1+2h) \cdot st\left(\frac{1}{h}\right) = 1 \cdot \infty = \infty$$

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = st[f(2-h)] = st\left[\frac{2 \cdot (2-h) - 3}{2-h-2}\right] = st\left(\frac{1-2h}{-h}\right)$$

$$st(1+2h) \cdot st\left(\frac{1}{-h}\right) = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ olduğundan limit yoktur.

Kontrol Grubunda Çözüm:

- Fonksiyonda x yerine 2 nin sağ civarından sayılar yazarak $(x, f(x))$ ilişkisine bakılır. Fonksiyonda x yerine 2 nin sağ civarından, 2 ye yaklaşan sayılar yazdıkça $f(x)$ değerlerinin giderek arttığı görülür.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$$

Fonksiyonda x yerine 2 nin sol civarından sayılar yazarak $(x, f(x))$ ilişkisine bakılır. Fonksiyonda x yerine 2 nin sol civarından, 2 ye yaklaşan sayılar yazdıkça $f(x)$ değerlerinin giderek azaldığı görülür.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ olduğundan limit yoktur.

Örnek 5: $\lim_{x \rightarrow 3^+} (\log(x-3))$ limitini inceleyiniz.

Örnek 6: $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{|\cos x|}{\cos x}$ limitini inceleyiniz.

Örnek 7: $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{\cos x}$ limitini inceleyiniz.

EK 6 İZİN DİLEKÇELERİ

T.C.
ANKARA VALİLİĞİ
Milli Eğitim Müdürlüğü

BÖLÜM : Strateji Geliştirme
SAYI : B.B.08.4.MEM.4.06.00.04-312/ 108092
KONU : Araştırma İzni
Nurcan ALTUN

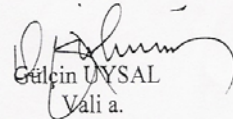
13/11/2008

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
(Eğitim Bilimleri Enstitüsü)

İLGİ : a) Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsünün 27/10/2008 tarih ve 00/6449 sayılı yazısı.
b) 10.11.2008 tarih ve 106190 sayılı Valilik Oluru.

Üniversiteniz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Nurcan ALTUN'un "Limit Öğretimine Alternatif Bir Yaklaşım" konulu tezi ile ilgili araştırma yapabilme isteği ilgi (b) Valilik Oluru ile uygun görülmüş olup, konu hakkında araştırmanın yapılacağı İlçe Milli Eğitim Müdürlüklerine bilgi verilmiştir.

Mühürlü anketler (3 sayfadan) ekte gönderilmiş olup, uygulama yapılacak sayıda çoğaltılması ve çalışmanın bitiminde iki örneğinin (CD/disket) Müdürlüğümüz Strateji Geliştirme Bölümüne gönderilmesi hususunda bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.


Gülçin UYSAL
Vali a.

Milli Eğitim Müdür Yardımcısı

EKLER :

- 1 : Valilik Oluru (1 sayfa)
- 2 : Anketler (3 sayfa)

10/11/2008 V.H.K.İ : K. COŞGUN 
10/11/2008 Şef : K. SARI 

İl Milli Eğitim Müdürlüğü-Beşevler
Strateji Geliştirme Bölümü
Bilgi İçin: Kamil COŞGUN

Tel : 215 15 43- 413 36 66- 212 66 40/110
Fax: 215 15 43
strateji06@meb.gov.tr

T.C.
ANKARA VALİLİĞİ
Milli Eğitim Müdürlüğü

BÖLÜM : Strateji Geliştirme
SAYI : B.B.08.4.MEM.4.06.00.04-312/ 108093
KONU : Araştırma izni
Nurcan ALTUN

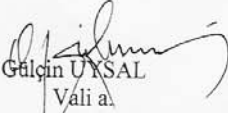
13/11/2008

ÇANKAYA KAYMAKAMLIĞINA
(İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü)

- İlgi: a) M.E.B. Bağlı Okul ve Kurumlarda Yapılacak Araştırma ve Araştırma Desteğine Yönelik İzin ve Uygulama Yönergesi.
b) 10.11.2008 tarih ve 106190 sayılı Valilik Oluru.

Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Nurcan ALTUN'un "**Limit Öğretimine Alternatif Bir Yaklaşım**" konulu tezi ile ilgili anketlerinin, ilçeniz Hasan Ali Yücel Anadolu Öğretmen Lisesinde, uygulama isteği ilgi (b) Valilik oluru ile uygun görülmüştür.

Mühürlü anket örnekleri (3 sayfa) araştırmacıya ulaştırılmış olup, uygulama yapılacak sayıda araştırmacı tarafından çoğaltılarak, araştırmanın ilgi (a) yönerge esasları çerçevesinde gönüllülük esasına dayalı olarak uygulattırılması hususunda bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.


Gülçin UYSAL
Vali a.

Milli Eğitim Müdür Yardımcısı

EKLER :
1-Valilik Oluru (1 sayfa)

10/11/2008 V.H.K.İ : K. COŞGUN 
10/11/2008 Şef : K.SARI 

T.C.
ANKARA VALİLİĞİ
Milli Eğitim Müdürlüğü

BÖLÜM : Strateji Geliştirme
SAYI : B.B.08.4.MEM.4.06.00.04-312/ 106190
KONU : Araştırma İzni
Nurcan ALTUN

10
.../11/2008

VALİLİK MAKAMINA

- İLGİ : a) M.E.B. Bağlı Okul ve Kurumlarda Yapılacak Araştırma ve Araştırma Desteğine Yönelik İzin ve Uygulama Yönergesi.
b) Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsünün 27/10/2008 tarih ve 00/6449 sayılı yazısı.

Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı öğrencisi Nurcan ALTUN'un "Limit Öğretimine Alternatif Bir Yaklaşım" konulu tezi ile ilgili uygulama yapma isteği ilgi (a) yönerge doğrultusunda Müdürlüğümüz Değerlendirme Komisyonu tarafından incelenmiş olup, (3 sayfa 22 maddeden oluşan) araştırmanın ilimiz Çankaya İlçesi Hasan Ali Yücel Anadolu Öğretmen Lisesinde, gönüllülük esasına dayalı olarak uygulanması Müdürlüğümüzce uygun görülmüştür.

Makamlarınızca da uygun görüldüğü takdirde Olurlarınıza arz ederim.

Kâmil AYDOĞAN
Milli Eğitim Müdürü

OLUR
24.11/2008
Mehmet KURDOĞLU
Vali Yardımcısı

EK 1- Anket (3 sayfa)