

**T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TOPOLOJİDE NİCEL DEĞİŞMEZLER

Mustafa KURUMEHMET

YÜKSEKLİSANS TEZİ

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEORİK MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Nurettin ERGUN**

İSTANBUL 2009

**T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TOPOLOJİDE NİCEL DEĞİŞMEZLER

**Mustafa KURUMEHMET
(141103020060080)**

YÜKSEKLİSANS TEZİ

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEORİK MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Nurettin ERGUN**

İSTANBUL 2009

ÖNSÖZ

Kardinal (Nicel) değişmezler çağdaş Genel Topoloji'nin bilinen bazı ünlü sonuçlarının genelleştirilebilmesi ve daha basit ispatlarının verilebilmesi açısından oldukça önemlidir. Bir uzayın kardinal değişmezleri arasındaki ilişkiler, o uzayın topolojik özellikleri hakkında bilgi verir. Bu nedenle kardinal değişmezler arasındaki bağıntı ve eşitsizliklerin elde edilmesi Genel Topoloji'nin daha iyi anlaşılmasını sağlayacaktır. Derleme niteliğindeki bu tez çalışmasında en çok karşılaşılan kardinal değişmezler arasındaki en bilindik sonuçların bir araya getirilmesindeki amaç da budur. Bu doğrultuda konuyla ilgili temel makaleler çalışılmış ve konuyu açıklayıcı örnekler verilmiştir.

Bu tez hazırlanırken gereken itina gösterilmiş olmasına rağmen, çıkabilecek hataların düzeltilebilmesi için hocalarımla değerli görüş ve önerileri beni mutlu edecektir.

Tez danışmanım Prof. Dr. Nurettin Ergun başta olmak üzere, makaleleriyle tez çalışmamı destekleyen Wesleyan Üniversitesi profesörlerinden Anthony W. Hager'e ve yine değerli zamanlarını benden esirgemeyen Prof. Dr. Ahmet Dernek, Yrd. Doç.Dr. Gülsen Kürem, Yrd. Doç. Dr. Bülent Yılmaz, Yrd. Doç. Dr. Kadri Ulaş Akay, Dr. Uğur Şengül, Dr. Faruk Uçar'a teşekkürlerimi arz eder, sevgili arkadaşlarım Burcu Vulaş ve Cemile Nur'a teşekkür ederim. Ayrıca hem maddi hem de manevi olarak beni yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

06,2009

Mustafa KURUMEHMET

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT.....	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
BÖLÜM I. GİRİŞ VE AMAÇ.....	1
I.1.GİRİŞ.....	1
I.2.AMAÇ	2
BÖLÜM II. GENEL BİLGİLER.....	3
II.1 ÖN HAZIRLIK	3
II.2 NİCEL (KARDİNAL) DEĞİŞMEZLER	11
BÖLÜM III. ÇALIŞMALAR.....	37
III.1 Tıkız Uzaylar Üzerinde Tanımlı Bazı Kardinal Değişmezlerin Özellikleri.....	37
III.2 Metriklenebilir Uzaylar Üzerinde Tanımlı Bazı Kardinal Değişmezlerin Özellikleri.....	53
III.3 $\sup = \max$ Problemleri.....	68
III.4 Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi ve Bazı Önemli Sonuçları.....	81
III.5 Bazı Özel Uzaylarda $\phi = \phi^{\aleph_0}$ Gerçekleyen Kardinal Değişmezler.....	106
III.6 Alexandroff Problemi ve İlişkili Bazı Sonuçlar.....	154
BÖLÜM IV. SONUÇLAR ve TARTIŞMA.....	168
BÖLÜM V. SON DEĞERLENDİRMELER ve ÖNERİLER.....	177
KAYNAKÇA.....	179
ÖZGEÇMİŞ.....	181

ÖZET

Topolojide Nicel Değişmezler

Bu tezde çağdaş Genel Topoloji'nin nicel (kardinal) değişmezler gibi hızla gelişim gösteren bir alanına giriş yapılmıştır. Öncelikle Kümeler Kuramı'nın bilinen bazı ünlü lemmaları ile en çok karşılaşılan kardinal değişmezlerin tanımları ve aralarındaki temel bağıntı ve eşitsizlikler verilmiştir. Bu bağıntı ve eşitsizliklerden yararlanarak topolojide bilinen bazı ünlü sonuçların daha basit ispatları elde edilmiştir.

Çalışmalar bölümünde ilk olarak tıkHz uzaylar ve metriklenebilir uzaylar gibi topolojik uzaylar sınıfının iki önemli sınıfı üzerinde tanımlı kardinal değişmezlerin temel özellikleri incelenmiştir. Daha sonra bir topolojik uzay üzerinde tanımlı ve gerçel değerli sürekli fonksiyonlar kümesinin kardinalitesiyle ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Bunun yanında bilinen bazı ünlü teoremlerin kanıtları verilmiş ve teoremlerden yararlanarak birçok aykırı örnek üretilmiştir. Bazı özel topolojik uzayların $\phi = \phi^{\kappa}$ ($\kappa \geq \aleph_0$) koşulunu gerçekleyen bazı ϕ kardinal değişmezlerinin varlığı incelenmiş ayrıca konuyu açıklayıcı örnekler verilmiştir.

Son olarak da topolojik uzayların kardinaliteleri için, kardinal değişmezler aracılığıyla elde edilen en bilindik sonuçlar bir araya getirilmiştir.

06,2009

Mustafa KURUMEHMET

ABSTRACT

Cardinal Invariants in Topology

In this thesis, we have given an introduction to cardinal invariants which is a rapidly growing subject of modern General Topology. At first some famous lemmas of set theory and also definitions of the most encountered cardinal invariants and basic relations and inequalities between them are given. Using these relations and inequalities we have given simple proofs of some famous and well known results in topology.

We begin investigating cardinal invariants on compact and metrizable spaces which constitute the most important classes of all topological spaces. Then some interesting results on the set of all continuous and real valued functions defined on a topological space are obtained. Furthermore proofs of some well known theorems are given and many interesting counter example spaces have been defined by utilizing these theorems. The existence of certain cardinal invariants satisfying the condition $\phi = \phi^\kappa$ ($\kappa \geq \aleph_0$) of some special spaces are also investigated and some explanatory examples are also given.

Finally cardinalities of topological spaces by utilizing certain cardinal invariants are also obtained.

06,2009

Mustafa KURUMEHMET

SEMBOL LİSTESİ

$c(X)$	: X uzayının Suslin sayısı
$cf(\kappa)$	: κ kardinal sayısının eşuçluluk derecesi
$d(X)$	: X uzayının yoğunluk sayısı
$e(X)$	: X uzayının uzanım sayısı
$h\phi$	: Kalıtımsal ϕ sayısı
$L(X)$	: X uzayının Lindelöf sayısı
$nw(X)$	: X uzayının ağ-ağırlık sayısı
$o(X)$	: X uzayının tüm açık kümelerinin ailesinin kardinal sayısı
$p(X)$	: X uzayının sözde tıklılık sayısı
$psw(X)$	: X uzayının nokta ayıran ağırlık sayısı
$RO(X)$	: X uzayının tüm düzenli açık kümelerinin ailesi
$RC(X)$	: X uzayının tüm düzenli kapalı kümelerinin ailesi
$s(X)$	: X uzayının saçılım sayısı
$sw(X)$	: X uzayının ayıran ağırlık sayısı
$t(x, X)$	: x noktasının sıklık sayısı
$t(X)$	: X uzayının sıklık sayısı
$w(X)$	: X uzayının ağırlık sayısı
$W(\alpha) = [0, \alpha)$	: $\beta < \alpha$ koşulunu gerçekleyen tüm β ordinal sayılarının kümesi
$wc(X)$	: X uzayının zayıf örtülüş sayısı
$\chi(x, X)$	: x noktasının ıra sayısı
$\chi(X)$	: X uzayının ıra sayısı
$\pi w(X)$	: X uzayının π -ağırlık sayısı
$\pi\chi(x, X)$	: x noktasının π -ıra sayısı

$\pi\chi(X)$	: X uzayının π -ıra sayısı
$\psi(x, X)$	: x noktasının sözde ıra sayısı
$\psi(X)$	: X uzayının sözde ıra sayısı
$\Delta(X)$	: X uzayının köşegensel derecesi
βX	: X uzayının Cech-Stone tıkızlaşması
$ A $	: A kümesinin kardinalitesi
$\overline{A} = kap A$	: A kümesinin kapanışı
$\overset{o}{A} = iç A$	: A kümesinin içi
$A' = \lim A$	: A kümesinin limit kümesi
A^ω	: Terimleri A dan alınan tüm dizilerin kümesi
$f _A$	: f fonksiyonunun A kümesine kısıtlanması
$\mathcal{P}(A)$	: A kümesinin tüm alt kümelerinin kümesi
$\mathcal{P}_{<\kappa}(A)$	: A kümesinin $< \kappa$ kardinaliteli tüm alt kümelerinin kümesi
$\mathcal{P}_{\leq\kappa}(A)$	: A kümesinin $\leq \kappa$ kardinaliteli tüm alt kümelerinin kümesi

I GİRİŞ VE AMAÇ

I.1 GİRİŞ

Bilindiği gibi her topolojik uzayın topolojik niteliklerini belirleyen çok önemli kardinal sayılar vardır. O uzayın açık kümeler ailesinin kardinal sayısı, o uzayın en küçük kardinal sayılı tabanının kardinal sayısı, o uzayda tanımlı sürekli gerçel değerli fonksiyonlar ailesinin kardinal sayısı bunlardan bazılarıdır. Bu sayılar topolojik eşyapı fonksiyonları altında değişmezler, kısacası X ile Y eşyapılı ise, sözgelimi bunların açık kümeler ailelerinin kardinal sayıları eşittir. Bir topolojik uzayın belirli bir topolojik niteliğini karakterize eden ve eşyapı dönüşümleri altında değişmeyen kardinal sayılara o uzayın **topolojik nicel değişmezleri** (ya da **topolojik kardinal değişmezleri**) denilir. Genel Topoloji'nin gelişiminin başlangıç yıllarında belirlenen bazı kardinal sınırlamalar, ilerleyen yıllarda genelleştirilip çok sayıda ilginç kardinal değişmez tanımlanmıştır. Örneğin herhangi ikinci sayılabilir Hausdorff uzayının en fazla $2^{\aleph_0}$ noktasının bulunduğunu söyleyen ünlü sonuç 1937 yılında B.Pospisil tarafından kardinal değişmezler aracılığıyla genelleştirilmiştir.

Bir uzayın, kardinal değişmezleri aracılığıyla, hangi topolojik özelliklere sahip olup olmadığı anlaşılabilir. Örneğin 1969 yılında A.V.Arhangel'skii kardinal değişmezlerden yararlanarak, $2^{\aleph_0}$ dan fazla noktası bulunan birinci sayılabilir bir Hausdorff uzayının tıkkız *olmadığını* diğer bir deyişle birinci sayılabilir tıkkız bir Hausdorff uzayının en fazla $2^{\aleph_0}$ noktasının bulunduğunu kanıtlamıştır. Bazen uzayların hangi ayırma aksiyomlarını gerçekleyip gerçeklemediğini anlamak için de kardinal değişmezlerden yararlanılır. F.B.Jones da $\geq 2^{\aleph_0}$ kardinaliteli kapalı kesikli alt kümesi bulunan ayrılabilir bir uzayın normal *olmadığını* kanıtlamıştır. Ayrıca bir uzayın kardinal değişmezleri aracılığıyla o uzay üzerinde tanımlanan tüm sürekli gerçel değerli fonksiyonların sayısı hakkında bilgi sahibi oluruz. Şöyle ki sayılabilir noktalı bir uzay üzerinde $2^{\aleph_0}$ sayıda

sürekli gerçel değerli fonksiyonun tanımlanabildiği yine kardinal değişmezlerden yararlanarak kanıtlanabilir.

Derleme niteliğindeki bu tez çalışmasında en çok karşılaşılan kardinal değişmezler üstüne bilinen en tanınmış sonuçlar bir araya getirilmiş ve her bir sonuç ayrıntılı biçimde kanıtlanmıştır. Bu çalışmada W.W.Comfort'un [1] makalesi ve [2] temel alınmıştır.

I.2 AMAÇ

Bu tezde ağırlık sayısı, ıra sayısı, saçılım sayısı, yoğunluk sayısı, Suslin sayısı, Lindelöf sayısı gibi çağdaş Genel Topoloji'de en çok rastlanılan pek çok kardinal değişmez arasındaki bağıntı ve eşitsizliklerin elde edilmesi, kardinal değişmezler aracılığıyla topolojik uzayların kardinaliteleri için sınırlar belirlenmesi ve topolojide bilinen bazı ünlü teoremlerin kardinal değişmezler yardımıyla daha basit ispatlarının verilmesi amaçlanmıştır. Bu doğrultuda konuyla ilgili temel makaleler çalışılmış ve konuyu açıklayıcı örnekler verilmiştir.

II GENEL BİLGİLER

II.1 ÖN HAZIRLIK

Kümeler Kuramında κ^+ ile κ kardinal sayısının ardılı yazılır, kısacası κ^+ kardinal sayısı κ 'dan büyük kardinal sayıların en küçüğüdür. Ancak ve yalnız, bir kardinal sayı κ^+ biçiminde ise ona **ardıl nicel sayı** ya da **ardıl kardinal sayı** denilir. Bu türde olmayan kardinal sayılara **limit nicel sayı** ya da **limit kardinal sayı** denir. κ bir sonsuz kardinal sayı olmak üzere,

$$cf(\kappa) = \min\{|\Lambda| : \kappa = \sum_{\lambda \in \Lambda} \kappa_\lambda, \kappa_\lambda < \kappa (\forall \lambda \in \Lambda)\} = \min\{|\Lambda| : \kappa = \sup_{\lambda \in \Lambda} \kappa_\lambda\}$$

biçiminde tanımlanan $cf(\kappa)$ kardinal sayısına κ kardinalinin **eşuçluluk derecesi** ya da **eşuçluluk sayısı** denir. Aslında bilindiği gibi γ herhangi bir limit ordinal sayısı için $cf(\gamma) = \min\{|\Lambda| : \gamma = \sup_{\alpha \in \Lambda} \gamma_\alpha\}$ nicel sayısına γ sayısının **eşuçluluk sayısı** denir. Tanımdan kolayca $cf(\kappa) \leq \kappa$ olduğu anlaşılır. Bir sonsuz κ kardinal sayısına ancak ve yalnız $cf(\kappa) = \kappa$ koşulunu gerçeklerse **düzenli nicel sayı**, ancak ve yalnız $cf(\kappa) < \kappa$ koşulunu gerçeklerse **tekil nicel sayı** denilir. κ sonsuz kardinal sayısı için $cf(\kappa^+) = \kappa^+$ olduğundan tüm sonsuz ardıl nicel sayılar düzenlidir. Ayrıca $cf(\aleph_0) = \aleph_0$ olduğundan $\aleph_0$ düzenli bir nicel sayıdır. Böylece her tekil nicel sayının bir limit kardinal sayı olduğu anlaşılır. Oysa her limit kardinal sayının tekil nicel sayı olup olmadığı sorusu sıradışı ve derin bir sorudur. Düzenli sayılamaz limit kardinal sayılara (eğer bu nitelikte sayılar varsa) **güçsüz erişilmez sayı** denilir. *ZFS Aksiyomatik Kümeler Kuramında, en az bir güçsüz erişilmez nicel sayının varlığı iddiasının, gerek doğruluğunu gerekse yanlışlığını kanıtlayabilmenin olanaksız olduğu bilinmektedir.* Öte yandan $\kappa_1 < \kappa \Rightarrow 2^{\kappa_1} < \kappa$ çıkarsama koşulunu gerçekleyen bir sonsuz κ kardinal sayısına **güçlü limit sayısı** denilir. Güçlü limit sayısı niteliğindeki güçsüz erişilmez nicel sayılara (eğer tanımlanabilirse) **erişilmez nicel sayı** ya da **güçlü erişilmez**

nicel sayı denilir.

Bu kısımda ilk olarak birçok teoremin ispatında kullanılacak bazı önemli lemmalar verilecektir. Bilindiği gibi bir X kümesinin $A, B \subseteq X$ alt kümelerine $A \neq B$ ve $|A \cap B| < \aleph_0$ koşullarını gerçeklerse **hemen hemen ayrık küme çifti** denir.

Lemma II.1 (Tarski Lemması): κ_1, κ_2 kardinal sayılar ve $\kappa_2 \geq \aleph_0$ olsun. $|D| = \kappa_2$ gerçekleyen bir D kümesi için aşağıdaki iddialar eşdeğerdir:

(i) D kümesinin sayılabilir sonsuz elemanlı alt kümelerinin, üyeleri ikişer ikişer hemen hemen ayrık olup $|\Omega| = \kappa_1$ gerçekleyen bir Ω alt ailesi vardır.

(ii) $\kappa_1 \leq \kappa_2^{\aleph_0}$ geçerlidir.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii): Her bir $E \in \Omega$ için E kümesinin *tek türlü* belirli ve sayılabilir sonsuz elemanlı bir S_E alt kümesi belirlenirse, (i) hipotezi gereği *farklı* $E, F \in \Omega$ üyeleri için $S_E \neq S_F$ bulunur. Böylece $\varphi(E) = S_E$ olarak tanımlanan $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}_{\leq \aleph_0}(D)$ fonksiyonu *bire-bir* olup $\kappa_1 = |\Omega| \leq |D|^{\aleph_0} = \kappa_2^{\aleph_0}$ bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\kappa_1 \leq \kappa_2^{\aleph_0}$ geçerli olsun. Γ, D kümesinin, terimleri ikişerli farklı tüm sıralı n -lilerinin ($\forall n \in \mathbb{N}$) kümesi ve Σ ise D 'nin terimleri ikişerli farklı tüm dizilerinin kümesi olsun, kısacası

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \forall n \in \mathbb{N}, x_i \in D \ (\forall i \in \mathbb{N}_n), x_i \neq x_k \ (i \neq k)\}$$

ve

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in D \ (\forall i \in \mathbb{N}), x_i \neq x_k \ (i \neq k)\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $|\Gamma| = |\mathcal{P}_{< \aleph_0}(D)| = |D| = \kappa_2$ ve $|\Sigma| \leq |D|^{\aleph_0} = \kappa_2^{\aleph_0}$ ve aslında $\kappa_1 \leq \kappa_2^{\aleph_0} = |\Sigma|$ olur. $|\Gamma| = |D| = \kappa_2$ olduğundan, Γ kümesinden D kümesine *bire bir ve örten* bir fonksiyon tanımlanabilir. O halde Γ kümesinin alt kümelerinin (i) şıkkındaki koşulları gerçekleyen bir ailesini tanımlamak yeterli olur, çünkü eğer $\mathcal{U}$, Γ kümesinin alt kümelerinin (i) şıkkındaki koşulları gerçekleyen bir ailesiyse, $g : \Gamma \longrightarrow D$

bire-bir ve örten bir fonksiyon olmak üzere, $\{g(U) : U \in \mathcal{U}\}$ ailesi de D kümesinin alt kümelerinin benzer özelliklere sahip bir ailesi olacaktır. Bu amaçla her $\varsigma \in \Sigma$ için

$$S_\varsigma = \{\alpha : \alpha \in \Gamma, \alpha \text{ ile } \varsigma \text{ nin ilk } |\alpha| \text{-sıralısı aynı}\} \subseteq \Gamma$$

aileleri tanımlanırsa, kolayca $|S_\varsigma| = \aleph_0$ gerçekleştiği görülür. Ayrıca $\Gamma = \bigcup_{\varsigma \in \Sigma} S_\varsigma$ ve farklı $\varsigma_1, \varsigma_2 \in \Sigma$ elemanları için $|S_{\varsigma_1} \cap S_{\varsigma_2}| < \aleph_0$ olduğu kolayca görülür. Bu biçimde tanımlanan $\mathcal{S} = \{S_\varsigma\}_{\varsigma \in \Sigma}$ ailesi, Γ kümesinin alt kümelerinin aranan ailesi olarak alınabilir. Böylece herhangi bir $\kappa_1 \leq \kappa_2^{\aleph_0}$ kardinal sayısı için (i) şıkında aranan özelliklere sahip bir alt kümeler ailesi tanımlanabildiği anlaşılır. ■

Özel olarak sayılabilir sonsuz elemanlı bir kümenin, ikişerli olarak hemen hemen ayrık olan herbirisi sonsuz elemanlı $2^{\aleph_0}$ sayıda, alt kümesinin tanımlanabildiği Sierpinski tarafından şu biçimde kanıtlanmıştır: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi olmak üzere, $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ olduğundan, $\mathbb{Q}$ kümesi için bu iddiayı kanıtlamak yeterlidir. Tüm irrasyonel sayıların kümesi $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ile gösterilmek üzere, her bir $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sayısına yakınsayan bir $\{q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ rasyonel sayılar dizisi vardır (çünkü rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ 'de yoğundur) ve üstelik *farklı* $x, y \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ irrasyonelleri için $\{q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $\{q_n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizilerinin *en fazla* sonlu sayıda üyeleri aynı olabilir. O halde $A_x = \{q_1(x), q_2(x), \dots\} \subseteq \mathbb{Q}$ ($\forall x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) kümelerinden oluşan $\{A_x\}_{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}}$ ailesi, $\mathbb{Q}$ kümesinin, ikişerli olarak hemen hemen ayrık olan sonsuz alt kümelerinin bir ailesi olup $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R} - \mathbb{Q}|$ gerçekleştiğinden, aranan aile bulunmuş olur.

Lemma II.2 (*Sanin Lemması*): κ sayılamaz düzenli bir kardinal sayı ve $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ ($|\Delta| = \kappa$) sonlu elemanlı kümelerin bir ailesi olsun. Bu durumda $|\Delta'| = \kappa$ ve farklı $\lambda_1, \lambda_2 \in \Delta'$ için $S_{\lambda_1} \cap S_{\lambda_2} = F$ koşulları gerçekleşecek biçimde boş olabilen bir F kümesi ile $\Delta' \subseteq \Delta$ alt kümesi vardır.

Kanıt. Eğer her $\lambda \in \Delta$ için (ya da daha genel olarak $\Delta^* \subseteq \Delta, |\Delta^*| = \kappa$ gerçekleyen alt küme ve her $\lambda \in \Delta^*$ için) $S_\lambda = \emptyset$ ise $F = \emptyset$ alınarak iddia doğrulanır. κ

sayılamaz düzenli kardinal sayı olduğundan en az bir $n_0 < \aleph_0$ için bir $\Delta_{n_0} \subseteq \Delta$ alt kümesi, $|S_\lambda| = n_0$ ($\forall \lambda \in \Delta_{n_0}$) ve $|\Delta_{n_0}| = \kappa$ koşulları sağlanacak şekilde vardır. ($\Delta_n = \{\lambda : \lambda \in \Delta, |S_\lambda| = n\}$ ($\forall n < \aleph_0$) kümeleri için $\Delta = \bigcup_{n < \aleph_0} \Delta_n$ ve $|\Delta| = \kappa$ ve $cf(\kappa) = \kappa$ olduğundan bu son iddia kolayca görülür.) $n_0 = 0$ ise $\Delta' = \Delta_0$ almak yeterlidir. Şimdi genelden birşey kaybetmeden $|S_\lambda| = n$ ($\forall \lambda \in \Delta$) varsayarak *tümevarım* ile aranan F kümesini bulalım. Δ kümesinin farklı $\lambda_1, \lambda_2 \in B$ için $S_{\lambda_1} \cap S_{\lambda_2} = \emptyset$ koşulunu gerçekleyen B alt kümelerinin maksimali M olsun. (ünlü *Zorn Lemması* nedeniyle bu özellikte küme vardır)

$n = 1$ için $\Delta' = M$ ya da $\Delta' = \Delta - M$ alınır, çünkü $|M| = \kappa$ ise $F = \emptyset$ ve $\Delta' = M$ almak yeterlidir, yok eğer $|M| < \kappa$ ise kardinalite aritmetiğinin temel teoremlerinden $|\Delta - M| = \kappa$ olup $\Delta' = \Delta - M$ ve $F = \bigcap_{\lambda \in \Delta'} S_\lambda$ tek nokta kümesi olur. $n > 1$ için iddia doğru olsun. Yine $|M| = \kappa$ ise $\Delta' = M$ ve $F = \emptyset$ almak yeterli olur. $|M| < \kappa$ durumunda ise en az bir $x \in \bigcup_{\lambda \in M} S_\lambda$ noktası için $|\{\lambda : \lambda \in (\Delta - M), x \in S_\lambda\}| = \kappa$ gerçekleşir. (Aksi halde $\left| \bigcup_{\lambda \in M} S_\lambda \right| \leq |M| \vee \sup_{\lambda \in M} |S_\lambda| < \kappa \vee \aleph_0 = \kappa$ olup M nin tanımı gereği her bir $\lambda \in (\Delta - M)$ için S_λ kümesi bazı S_ξ ($\xi \in M$) kümeleriyle kesişir. Kısacası her $y \in \bigcup_{\lambda \in M} S_\lambda$ ($= A$) için $\Delta(y) = \{\lambda : \lambda \in (\Delta - M), y \in S_\lambda\}$ ve $|\Delta(y)| < \kappa$ olsaydı $(\Delta - M) \subseteq \bigcup_{y \in A} \Delta(y)$ gerçekleştiğinden $\kappa = |\Delta - M| \leq |A| \vee \sup_{y \in A} |\Delta(y)| < \kappa$ çelişkisi bulunurdu.) O halde $\Delta(x) \subseteq \Delta$, $|\Delta(x)| = \kappa$ ve $x \in S_\lambda$ ($\forall \lambda \in \Delta(x)$) olup $\{S_\lambda \setminus \{x\}\}_{\lambda \in \Delta(x)}$ ailesinin her üyesi $n - 1$ elemanlıdır. Böylece tümevarımın $n - 1$ inci adımı gereği $|\Delta'(x)| = \kappa$ eşitliğini sağlayan $\Delta'(x) \subseteq \Delta(x)$ alt kümesi ve sonlu F_x kümesi $S_{\lambda_1} \cap S_{\lambda_2} = F_x$ (farklı $\lambda_1, \lambda_2 \in \Delta'(x)$) sağlanacak şekilde vardır. Sonuçta $\Delta' = \Delta'(x)$ ve $F = F_x \cup \{x\}$ alınarak aranan kümeler bulunmuş olur. ■

Bu lemma güçsüz erişilmez kardinal sayıların var olup olmadığına bakılmaksızın kanıtlandı. Sanin Lemması'nda κ 'nın sayılamazlık koşulundan *vazgeçilemez*. Gerçekten, $\Delta = \mathbb{N}$ ve $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) kümeleri alındığında $n \neq m$ için ya $S_n \cap S_m = S_n$ ya da $S_n \cap S_m = S_m$ olduğundan $|\Delta'| = \aleph_0$ gerçekleyen uygun $\Delta' (\subseteq \Delta)$

alt kümesi ve F kümesi *bulunamaz*.

E kümesinin boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi $\mathcal{A}$ olmak üzere, $p \in E$ için $ord(p, \mathcal{A}) = |\{A : A \in \mathcal{A}, p \in A\}|$ olarak tanımlanır. Aşağıdaki lemmanın Juhasz tarafından Sanin Lemması'ndan yararlanılarak yapılan ispatı verilecektir.

Lemma II.3 (Miscenko Lemması): κ bir sonsuz kardinal sayı ve E kümesinin boştan farklı alt kümelerinin $ord(p, \mathcal{A}) \leq \kappa$ ($\forall p \in E$) gerçekleyen bir ailesi $\mathcal{A}$ olsun. Bu durumda E kümesinin $\mathcal{A}$ 'nın elemanlarından oluşan sonlu minimal örtülüşlerinin sayısı en fazla κ dır.

Kanıt. Bu iddia doğru olmasın. Bu durumda E kümesinin sonlu minimal örtülüşlerinin $\{\mathfrak{R}_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ ailesi (buradaki sonlu örtülüşler $\alpha < \beta < \kappa^+$ için $\mathfrak{R}_\alpha \neq \mathfrak{R}_\beta$ gerçekleşecek biçimde indislenmiştir) bulunabilir. Sanin Lemması nedeniyle $W(\kappa^+) = [0, \kappa^+)$ nın bir T alt kümesi ve sonlu bir $\mathfrak{R}^*$ ailesi, $|T| = \kappa^+$ ve farklı $\alpha_1, \alpha_2 \in T$ için $\mathfrak{R}_{\alpha_1} \cap \mathfrak{R}_{\alpha_2} = \mathfrak{R}^*$ koşulları sağlanacak biçimde vardır. $\mathfrak{R}_\alpha$ ($\forall \alpha \in T$) örtülüşleri sonlu minimal örtülüş olduğundan $\bigcup \mathfrak{R}^* \neq E$ gerçekleşir. O halde $p \notin \bigcup \mathfrak{R}^*$ olacak şekilde bir $p \in E$ noktası var olup $p \in R_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha$ ($\forall \alpha \in T$) üyeleri, farklı $\alpha_1, \alpha_2 \in T$ için $R_{\alpha_1} \neq R_{\alpha_2}$ olacak biçimde bulunabilir çünkü hem $\mathfrak{R}_{\alpha_1} - \mathfrak{R}^* \not\subseteq \mathfrak{R}_{\alpha_2} - \mathfrak{R}^*$ hem de $\mathfrak{R}_{\alpha_2} - \mathfrak{R}^* \not\subseteq \mathfrak{R}_{\alpha_1} - \mathfrak{R}^*$ geçerlidir; ancak bu sonuç $\kappa^+ \leq ord(p, \mathcal{A}) \leq \kappa$ çelişmesine yol açar. Demek ki E kümesinin $\mathcal{A}$ ailesinin üyelerinden oluşan sonlu minimal örtülüşlerinin sayısı en fazla κ tanedir. ■

E kümesinin alt kümelerinin bir ailesi $\mathcal{A}$ olmak üzere, eğer her sonlu sayıda farklı $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}$ ($n, m \in \mathbb{N}$) elemanları için $A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n \cap (E - B_1) \cap (E - B_2) \cap \dots \cap (E - B_m) \neq \emptyset$ gerçekleşiyorsa, $\mathcal{A}$ ailesine **bağımsız aile** denir.

Lemma II.4 (Hausdorff Lemması): κ sonsuz bir kardinal sayı ve E kümesi $|E| = \kappa$ gerçekleşsin. E 'nin alt kümelerinin $|\mathcal{A}| = 2^\kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{A}$ bağımsız ailesi vardır.

Kanıt. F , E 'nin *sonlu bir* alt kümesi ve $\mathcal{F}$, E 'nin *sonlu* alt kümelerinin bir *sonlu ailesi* olmak üzere $(F, \mathcal{F})$ sıralı ikilileri tanımlansın. Bu tür tüm sıralı ikililerin kümesine P denirse açıktır ki $|P| = \kappa$ olur. Böylece P 'nin alt kümelerinin 2^κ kardinaliteli *bağımsız ailesini* tanımlamak yeterlidir. (Çünkü $|E| = |P| = \kappa$ olduğundan P 'den E 'ye tanımlı *bire-bir* ve *örten* bir f fonksiyonu vardır, eğer P 'nin alt kümelerinin aranan özelliklerde bir bağımsız ailesi $\mathcal{A}$ ise $\{f(A) : A \in \mathcal{A}\}$, E 'nin 2^κ kardinaliteli bağımsız ailesi olur.) Her bir $u \subseteq E$ için $X_u = \{(F, \mathcal{F}) \in P : F \cap u \in \mathcal{F}\}$ olmak üzere $\mathcal{A} = \{X_u : u \subseteq E\}$ ailesi aranan özelliklerdedir. Gerçekten, farklı $u, v \subseteq E$ alt kümeleri için $X_u \neq X_v$ olur; çünkü eğer $x \in (u - v)$ ise $F = \{x\}$ ve $\mathcal{F} = \{F\}$ alınarak $(F, \mathcal{F}) \in X_u$ ancak $(F, \mathcal{F}) \notin X_v$ olduğu gözlenir. Böylece $|\mathcal{A}| = 2^\kappa$ dır. Ayrıca *ikişerli farklı* $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m \subseteq E$ ($n, m \in \mathbb{N}$) alt kümeleri alındığında $i \leq n$ ve $j \leq m$ için $x_{i,j} \in (u_i - v_j)$ veya $x_{i,j} \in (v_j - u_i)$ sağlayan elemanlar bulunur. Bu durumda E 'nin $\{x_{i,j} : i \leq n, j \leq m\} \subseteq F$ gerçekleyen *her sonlu* F alt kümesi için (bu kümelerden κ sayıda vardır) açıktır ki $F \cap u_i \neq F \cap v_j$, $i \leq n, j \leq m$ olur. $\mathcal{F} = \{F \cap u_i : i \leq n\}$ alınırsa her $i \leq n$ için $(F, \mathcal{F}) \in X_{u_i}$ ve her $j \leq m$ için $(F, \mathcal{F}) \notin X_{v_j}$ olup, sonuçta $(F, \mathcal{F}) \in X_{u_1} \cap \dots \cap X_{u_n} \cap (P - X_{v_1}) \cap \dots \cap (P - X_{v_m}) \neq \emptyset$ bulunur. Böylece $\mathcal{A}$ 'nın bağımsız aile olduğu anlaşılır.

■

B. Pospisil, Hausdorff Lemması'ndan yararlanarak *sonsuz* κ kardinaliteli küme üzerinde 2^{2^κ} sayıda *büyük süzgecin* (aslında *düzenli büyük süzgecin* (κ kardinaliteli bir küme üzerindeki $\mathcal{G}$ büyük süzgecine, ancak ve yalnız $|A| = \kappa$ ($\forall A \in \mathcal{G}$) koşulunu sağlarsa **düzenli büyük süzgeç** denir.)) tanımlanabildiğini kanıtladı. Gerçekten, κ kardinaliteli bir E kümesi üzerinde $\{A_\alpha : 0 \leq \alpha < 2^\kappa\}$ bağımsız ailesi tanımlansın. Her bir $f : 2^\kappa \longrightarrow \{0, 1\}$ fonksiyonuna karşılık $A_f = \{A_\alpha : f(\alpha) = 0\} \cup \{E - A_\alpha : f(\alpha) = 1\}$ olarak tanımlanırsa, A_f ailesi *sonlu arakesit özelliğine* sahip olur. Böylece $A_f \subseteq \mathcal{F}_f$ olacak şekilde bir $\mathcal{F}_f$ *büyük süzgeci* vardır ve $f \neq g$ ise $\mathcal{F}_f \neq \mathcal{F}_g$ dir; çünkü $f(\beta) \neq g(\beta)$ olacak şekilde en az bir $\beta < 2^\kappa$ ordinali var olup örneğin $f(\beta) = 0$, $g(\beta) = 1$ olursa,

$A_\beta \in \mathcal{F}_f - \mathcal{F}_g$ ve $(E - A_\beta) \in \mathcal{F}_g - \mathcal{F}_f$ olur. Sonuçta farklı $f, g \in {}^{2^\kappa}\{0, 1\}$ için $\mathcal{F}_f \neq \mathcal{F}_g$ olduğu görülerek 2^{2^κ} sayıda *büyük süzgecin* bulunduğu anlaşılır.

Boştan farklı bir E kümesi için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $[E]^n$ ile E kümesinin n elemanlı alt kümelerinin kümesi gösterilecektir. Oldukça kullanışlı olan aşağıdaki lemmalar birçok teoremin kanıtlanmasında kullanılacaktır.

Lemma II.5 (*Erdős-Rado Lemması*): κ bir sonsuz kardinal sayı olmak üzere, $|E| > 2^\kappa$ gerçekleyen bir E kümesi için $[E]^2 = \bigcup_{\alpha < \kappa} P_\alpha$ olsun. Bu durumda bir $\alpha < \kappa$ sayısı ile bir $A \subseteq E$ alt kümesi, $|A| > \kappa$ ve $[A]^2 \subseteq P_\alpha$ koşulları sağlanacak biçimde vardır.

Kanıt. $p \in E$ keyfi sabit bir nokta olsun. Bilindiği gibi α ve β ordinal sayıları ne olursa olsun, ${}^\alpha\beta$ ile α ($= [0, \alpha)$) kümesinden β ($= [0, \beta)$) kümesine tanımlanan tüm fonksiyonların kümesi yazılır. Her $\alpha < \kappa^+$ ordinal sayısı için E kümesinin alt kümelerinin bir $\{R_f : f \in {}^\alpha\kappa\}$ ailesi ile $\{x_f \in E : f \in {}^\alpha\kappa\}$ kümesi, sonlu ötesi tümevarımla, aşağıdaki koşullar gerçekleşecek biçimde tanımlanabilir: $f \in {}^\alpha\kappa$ olmak üzere

- (1) Eğer α bir limit ordinal sayı ise $R_f = \bigcap_{\beta < \alpha} R_{(f|_\beta)}$,
- (2) Eğer $\alpha = \gamma + 1$ ise $R_f = \{x \in R_{(f|_\gamma)} : x \neq x_{(f|_\gamma)}, \{x, x_{(f|_\gamma)}\} \in P_{f(\gamma)}\}$,
- (3) $x_f \begin{cases} \in R_f & ; R_f \neq \emptyset \text{ ise} \\ = p & ; R_f = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$
- (4) Eğer $\beta < \alpha$ ise $x_{(f|_\beta)} \notin R_f$,
- (5) Eğer $\beta < \alpha$ ve $x \in R_f$ ise $\{x, x_{(f|_\beta)}\} \in P_{f(\beta)}$ olur.

Gerçekten, $\alpha = 0$ ise ${}^\alpha\kappa = \{\emptyset\}$ olup $R_\emptyset = E$ ve $x_\emptyset = p$ olarak tanımlansın. Bir $0 < \alpha < \kappa^+$ alındığında, her bir $\beta < \alpha$ ordinal sayısı için $\{R_h : h \in {}^\beta\kappa\}$ ailesi ve $\{x_h \in E : h \in {}^\beta\kappa\}$ kümesi, (1)-(5) koşulları gerçekleşecek biçimde önceki aşamalarda belirlenmişse (1) veya (2) şikkından yararlanarak R_f kümesi ve (3) şikkından yararlanak $x_f \in E$ noktası belirlenir. Ayrıca sonlu ötesi tümevarımın önceki aşamaları nedeniyle (4) ve (5) koşullarının sağlandığı kolayca görülür ve böylece sonlu ötesi tümevarım

süreci tamamlanır. $H = \{x_f \in E : f \in {}^\alpha\kappa, \alpha < \kappa^+\}$ yazılsın, kolayca görülebilir ki $|H| \leq 2^\kappa$ gerçekleşir. Bu nedenle bir (aslında $\geq 2^\kappa$ sayıda) $y \in E - H$ noktası vardır. O halde $y \neq x_f$ ($\forall x_f \in H$) olur. Bu durumda, sonlu ötesi tümevarımla, $\{f_\alpha\}_{\alpha < \kappa^+}$ fonksiyonlar ailesi aşağıdaki koşullar gerçekleşecek biçimde tanımlanabilir: Her $\alpha < \kappa^+$ için

$$(6) f_\alpha \in {}^\alpha\kappa \text{ ve } (f_\alpha|_\beta) = f_\beta \text{ } (\forall \beta < \alpha),$$

$$(7) y \in R_{f_\alpha}.$$

Bir $0 < \mu_0 < \kappa$ sayısı alındığında, her bir $\beta < \mu_0$ ordinal sayısı için f_β fonksiyonları (6) ve (7) koşulları gerçekleşecek biçimde önceki aşamalarda belirlenmiş olsun. Eğer $\mu_0 = \gamma + 1$ ise, $y \neq x_{f_\gamma}$ olduğundan, bir $\delta < \kappa$ ordinal sayısı $\{y, x_{f_\gamma}\} \in P_\delta$ olacak biçimde vardır. Bu durumda $(f_{\mu_0}|_\gamma) = f_\gamma$ ve $f_{\mu_0}(\gamma) = \delta$ biçiminde tanımlanan $f_{\mu_0} \in {}^{\mu_0}\kappa$ fonksiyonu, (6) ve (7) koşullarını sağlar. (Gerçekten, (6) koşulunun sağlandığı açık olup (2) şikkından yararlanarak (7)'nin de sağlandığı kolayca görülür.) Öte yandan μ_0 bir limit ordinal ise $f_{\mu_0}(\beta) = f_{\beta+1}(\beta)$ ($\forall \beta < \mu_0$) biçiminde tanımlanan $f_{\mu_0} \in {}^{\mu_0}\kappa$ fonksiyonu, (1) şikkı ve tümevarımın önceki aşamaları nedeniyle (7) koşulunu gerçekler. Ayrıca keyfi sabit bir $\gamma < \mu_0$ ordinali ve her $\beta < \gamma$ sayısı için sonlu ötesi tümevarımın önceki aşamaları gereği $(f_\gamma|_\beta) = f_\beta$ olduğundan, $f_{\mu_0}(\beta) = f_{\beta+1}(\beta) = f_\gamma(\beta)$ gerçekleşir, dolayısıyla $(f_{\mu_0}|_\gamma) = f_\gamma$ olur. Kısacası (6) koşulu sağlanır. $\{f_\alpha\}_{\alpha < \kappa^+}$ fonksiyonlar ailesi aracılığıyla $g : \kappa^+ \longrightarrow \kappa$ fonksiyonu, $(g|_\alpha) = f_\alpha$ ($\forall \alpha < \kappa^+$) olacak biçimde tanımlasın. Bu durumda bir $\eta < \kappa$ ordinal sayısı ile $|T| = \kappa^+$ gerçekleyen bir $T \subseteq [0, \kappa^+)$ ($= \kappa^+$) alt kümesi, $g(\alpha) = \eta$ ($\forall \alpha \in T$) olacak biçimde vardır. $\alpha, \beta \in T$ ve $\beta < \alpha$ için $(y \in R_{(g|_\alpha)} = R_{f_\alpha} \neq \emptyset)$ (3) ve (4) koşulları nedeniyle $x_{(g|_\alpha)} \neq x_{(g|_\beta)}$ olur, üstelik (3) ve (5) koşulları nedeniyle $\{x_{(g|_\beta)}, x_{(g|_\alpha)}\} \in P_\eta$ bulunur. Böylece elde edilen $A = \{x_{(g|_\alpha)} : \alpha \in T\}$ ($\subseteq E$) kümesinin lemmada sözü edilen özelliklere sahip olduğu anlaşılır. ■

Son olarak oldukça kullanışlı olan aşağıdaki lemma ispatsız olarak verilecektir.

Lemma II.6 (Erdős-Hajnal-Rado Lemması): κ tekil güçlü bir limit kardinal sayı

ve $\lambda = cf(\kappa)$ olsun. Eğer $[W(\kappa)]^n = \bigcup_{\beta < \tau} P_\beta$, ($n < \aleph_0$, $\tau < \kappa$) ise, bir $D \subseteq W(\kappa)$ alt kümesi ile D 'nin bir $\{D_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda\}$ parçalanışı aşağıdaki özelliklere sahip olacak biçimde vardır:

- (1) $|D_\alpha| = \kappa_\alpha < \kappa$ ($\forall \alpha < \lambda$) ve $\sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha = \kappa$,
- (2) Eğer $0 \leq \alpha < \beta < \lambda$ ise $D_\alpha < D_\beta$ (D_α 'nın ordinalleri D_β 'nin ordinallerinden önce gelir.),
- (3) Eğer $a, b \in [D]^n$ ve $|a \cap D_\alpha| = |b \cap D_\alpha|$ ($\forall \alpha < \lambda$) ise $a, b \in P_\beta$ olacak şekilde bir $\beta < \tau$ ordinali vardır.

II.2 NİCEL (KARDİNAL) DEĞİŞMEZLER

Tanımlar ve Basit Eşitsizlikler

Tüm topolojik uzayların sınıfından sonsuz kardinal (nicel) sayılar sınıfına tanımlanan ϕ fonksiyonu için X ve Y topolojik uzayları eşyapılı (aralarında bire-bir, örten, sürekli ve açık dönüşüm tanımlanabilen uzaylar) olduğunda $\phi(X) = \phi(Y)$ geçerli ise ϕ fonksiyonuna bir **nicel (kardinal) değişmez** denir. Biz çalışmalarımızı genelde T_1 uzaylarında yapacağımızdan ve sonlu elemanlı T_1 uzayları *kesikli* olduğundan sonlu uzaylarda kardinal değişmezlerin incelemeleri kolaydır. Bu yüzden kardinal değişmezleri, özel olarak uzayın kardinalitesinin *sonsuz* olduğunu varsayacağız. Bilindiği gibi $|X|$ ile X topolojik uzayının *kardinalitesi* gösterilir. Şimdi bazı kardinal değişmezlerin tanımları ve aralarındaki basit eşitsizlikler görülecektir.

Tanım II.1 $\mathcal{B}$, bir X topolojik uzayının boştan farklı açık kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer her bir boştan farklı G açık kümesi için $\exists \mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B}$, $G = \bigcup \mathcal{B}_G$ gerçekleşiyorsa $\mathcal{B}$ ailesine X uzay için bir **tabandır** denilir. Her topolojik uzayın boştan farklı açıklarının kümesi, o uzay için bir tabandır. Dolayısıyla her uzayın en az bir tabanı vardır. X uzayının tabanlarının kardinal sayılarının minimaline X uzayının **ağırlık sayısı** denir

ve $w(X)$ ile gösterilir. Kısacası

$$w(X) = \min \{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}, X \text{ de taban}\} + \aleph_0$$

dır.

Her topolojik uzayın $|\mathcal{B}| = w(X)$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}$ tabanı vardır. Sayılabilir üyeli tabanı bulunan uzaylara *ikinci sayılabilir uzaylar* denildiğinden şu sonuca ulaşılır: Bir X topolojik uzayı ancak ve yalnız $w(X) = \aleph_0$ ise ikinci sayılabilirdir. Tüm X uzayları için daima $w(X) \leq |X|$ ya da daima $|X| \leq w(X)$ *gerçeklenmez*. Örneğin $\mathbb{R}$ kümesini bilinen Öklid topolojisi ile donatarak elde edilen uzay $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ ile gösterilirse $w((\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)) = \aleph_0$ olmasına karşın $|\mathbb{R}| = c = 2^{\aleph_0} > w((\mathbb{R}, \mathbb{R}^1))$ dir. Diğer taraftan sayılabilir elemanlı küme üzerinde ikinci sayılabilir *olmayan* uzaylar tanımlanabildiğinden (örneğin Arens-Fort uzayı [3] ya da Örnek III.8) üstteki iki eşitsizliğin daima doğru olması *gerekmez*; ancak *tıkız* veya *birinci sayılabilir* (özel olarak *metriklenebilir*) bir X uzayında daima $w(X) \leq |X|$ olduğu gözlenecektir.

Aşağıda kanıtlanacak olan teorem, ileride tanımlanacak olan *kahımsal Lindelöf* sayısı aracılığı ile daha kolay biçimde gözlenecek ve bir sonraki teoremin ispatında önemli rol oynayacaktır.

Teorem II.1 (*Lindelöf Teoremi*): X bir topolojik uzay ve $w(X) = \kappa \geq \aleph_0$ olsun. Bu durumda X uzayının her alt kümesinin her $\mathcal{G}$ açık örtülüşünün $|\mathcal{G}_0| \leq \kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{G}_0$ alt örtülüşü vardır.

Kanıt. X uzayının $|\mathcal{B}| = \kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}$ tabanı göz önüne alınsın. Herhangi bir $A \subseteq X$ alt kümesinin herhangi bir $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ açık örtülüşü alınsın, kısacası $A \subseteq \bigcup \mathcal{G} = \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha$ ve her bir $\alpha \in \Delta$ için G_α , X uzayında boştan farklı açık küme olsun. Var olan $|\mathcal{G}_A| \leq \kappa$ gerçekleyen $\mathcal{G}_A$ ($\subseteq \mathcal{G}$) alt ailesi için $A \subseteq \bigcup \mathcal{G}_A$ gerçekleştiğini gözlemek güç değildir. Gerçekten, $\mathcal{B}$ tabanının $\mathcal{G}$ örtülüşü aracılığı

ile $\mathcal{B}(\mathcal{G}) = \{B \in \mathcal{B} : \exists \alpha \in \Delta, B \subseteq G_\alpha\} \subseteq \mathcal{B}$ alt ailesi tanımlanırsa, $A \subseteq \bigcup \mathcal{B}(\mathcal{G})$ olur; çünkü herhangi bir $x \in A$ için $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} G_\alpha$ nedeniyle $x \in G_{\alpha(x)}$ olacak biçimde $\alpha(x) \in \Delta$ belirlenirse, uygun bir $\mathcal{B}_{\alpha(x)} \subseteq \mathcal{B}$ alt ailesi için $x \in G_{\alpha(x)} = \bigcup \mathcal{B}_{\alpha(x)} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{\alpha(x)}} B$ elde edilir. Böylece en az bir $B \in \mathcal{B}_{\alpha(x)}$ için $x \in B \subseteq G_{\alpha(x)}$ ($\in \mathcal{G}$) gözleyip $B \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$, $x \in B \subseteq \bigcup \mathcal{B}(\mathcal{G})$ bulunup istenen $A \subseteq \bigcup \mathcal{B}(\mathcal{G})$ elde edilir. Şimdi her bir $B \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ için ünlü Seçme Aksiyomu yardımıyla *tek türlü belirli bir* $\alpha(B) \in \Delta$ indisi ile $G_{\alpha(B)} \in \mathcal{G}$ kümesini belirleyerek $\mathcal{G}_A = \{G_{\alpha(B)} : B \in \mathcal{B}(\mathcal{G})\}$ tanımlanırsa, her $B \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ için $B \subseteq G_{\alpha(B)}$ nedeniyle $A \subseteq \bigcup \mathcal{B}(\mathcal{G}) \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}(\mathcal{G})} G_{\alpha(B)} = \bigcup \mathcal{G}_A$ bulunur. Üstelik $\varphi(G_{\alpha(B)}) = B$ olacak şekilde tanımlanan $\varphi : \mathcal{G}_A \longrightarrow \mathcal{B}$ fonksiyonu *bire-bir* olduğundan $|\mathcal{G}_A| \leq |\mathcal{B}| = \kappa$ bulunur. Kısacası $\mathcal{G}_A$ alt örtülüştü aranan özellikleri sağlayacak biçimde vardır. ■

Teorem II.2 (Ağırlık Teoremi): *Bir X uzayının herhangi bir $\mathcal{B}$ tabanının, taban görevi gören ve $|\mathcal{B}^*| \leq w(X)$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}$ alt ailesi vardır.*

Kanıt. $w(X) = \kappa$ olsun. Bu durumda X uzayının $\mathcal{B}_0 = \{B_{0,\alpha}\}_{\alpha < \kappa}$ biçiminde bir tabanının var olduğu bilinmektedir. Her $\alpha < \kappa$ için $B_{0,\alpha}$ ($\in \mathcal{B}_0$) uzayın boştan farklı bir açık kümesi ve $\mathcal{B}$ bu uzayın bir tabanı olduğundan $\exists \mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{B}, B_{0,\alpha} = \bigcup \mathcal{B}_\alpha$ sağlanır. Oysa Lindelöf Teoremi nedeniyle $B_{0,\alpha} \subseteq \bigcup \mathcal{B}_\alpha^*$, $|\mathcal{B}_\alpha^*| \leq \kappa$ koşullarını gerçekleyen $\mathcal{B}_\alpha^* \subseteq \mathcal{B}_\alpha$ ($\subseteq \mathcal{B}$) alt ailesi vardır. Üstelik $B_{0,\alpha} \subseteq \bigcup \mathcal{B}_\alpha^* \subseteq \bigcup \mathcal{B}_\alpha = B_{0,\alpha}$ nedeniyle her $\alpha < \kappa$ için $B_{0,\alpha} = \bigcup \mathcal{B}_\alpha^*$ olmaktadır. Artık $\mathcal{B}^* = \bigcup_{\alpha < \kappa} \mathcal{B}_\alpha^*$ ($\subseteq \mathcal{B}$) alt ailesinin sözü edilen uzay için bir taban olduğu kolayca gözlenir; çünkü $\emptyset \neq G$ açık kümesi ne olursa olsun $\mathcal{B}_0$ taban olduğundan $G = \bigcup_{\alpha \in \Delta} B_{0,\alpha}$ ($\Delta \subseteq [0, \kappa)$) gerçekleyen $\{B_{0,\alpha}\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \mathcal{B}_0$ alt ailesi vardır. Sonuçta $B_{0,\alpha} = \bigcup \mathcal{B}_\alpha^*$ ($\forall \alpha \in \Delta$) nedeniyle $G = \bigcup_{\alpha \in \Delta} (\bigcup \mathcal{B}_\alpha^*)$ olup kısalık amacıyla $\mathcal{B}_G^* = \bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathcal{B}_\alpha^*$ yazılırsa, $G = \bigcup \mathcal{B}_G^*$ ve $\mathcal{B}_G^* \subseteq \mathcal{B}^*$ olduğundan $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}$ alt ailesi X uzayının bir tabanıdır, üstelik $|\mathcal{B}^*| \leq \left| \bigcup_{\alpha < \kappa} \mathcal{B}_\alpha^* \right| \leq \kappa \vee \sup_{\alpha < \kappa} |\mathcal{B}_\alpha^*| \leq \kappa$ gerçekleşir. ■

Bu teorem şu şekilde de kanıtlanabilirdi: X uzayının herhangi bir $\mathcal{B}$ tabanı ve $|\mathcal{A}| = w(X)$ gerçekleyen bir $\mathcal{A}$ tabanı için aşağıdaki gibi $\mathcal{B}$ 'nin bir alt ailesini oluşturalım:

$A_1 \subseteq A_2$ koşulunu gerçekleyen herhangi $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ eleman çifti için $\mathcal{B}$ 'nin $A_1 \subseteq B \subseteq A_2$ gerçekleyen $B (\in \mathcal{B})$ elemanlarından (varsa) birini Seçme Aksiyomu ile seçerek buna $B_{(A_1, A_2)}$ denilsin. (Eğer $\mathcal{B}$ 'nin bu tür B elemanları yoksa $B_{(A_1, A_2)}$ kümesini tanımlamıyoruz.) Bu şekilde tanımlanan $B_{(A_1, A_2)}$ elemanlarından oluşan aile $\mathcal{B}^* (\subseteq \mathcal{B})$ ile gösterilirse, bu ailenin X için bir taban olduğu gözlenebilir, üstelik $|\mathcal{B}^*| \leq |\mathcal{A} \times \mathcal{A}| = w(X)$ gerçekleşir.

$o(X)$, X uzayının tüm açık kümelerinin sayısı $+\aleph_0$ olarak tanımlanır. Özel olarak X üzerindeki topoloji τ ise $o(X) = |\tau| + \aleph_0$ dır. Eğer X bir T_0 uzayı ise daima $\max \{|X|, w(X)\} \leq o(X)$ olup bu sayılar arasındaki ilişki aşağıdaki teoremden görülmektedir.

Teorem II.3 *X herhangi bir topolojik uzay olsun. Bu durumda*

- (a) $w(X) \leq o(X) \leq 2^{|X|}$ olur.
- (b) X bir T_0 uzayı ise $|X| \leq 2^{w(X)}$ ve $|X| \leq o(X)$ gerçekleşir.

Kanıt. (a) şıkkı ilgili kardinal değişmezlerin tanımından ve $o(X) \leq |\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$ gerçeğinden kolayca görülür. Şimdi X bir T_0 uzayı ise $|\mathcal{B}| \leq w(X)$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}$ tabanı için $\psi : X \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{B})$ fonksiyonu $\psi(x) = \{B : B \in \mathcal{B}, x \in B\}$ olarak tanımlansın. X bir T_0 uzayı olduğundan, farklı $x, y \in X$ elemanları için $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ olup ψ fonksiyonu bire-bir dir. Böylece $|X| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{B})| = 2^{|\mathcal{B}|} \leq 2^{w(X)}$ bulunur. Ayrıca $\theta(x) = X - \overline{\{x\}}$ biçiminde tanımlanan $\theta : X \longrightarrow \{B : B \subseteq X \text{ açık}\}$ fonksiyonuda bire-bir olur ve böylece $|X| \leq o(X)$ bulunur. ■

Tanım II.2 *Bir X topolojik uzayının yoğunluk sayısı $d(X)$ ile gösterilir ve X 'in yoğun alt kümelerinin kardinal sayılarının minimali olarak tanımlanır. Kısacası*

$$d(X) = \min\{|S| : S \subseteq X, \overline{S} = X\} + \aleph_0$$

biçiminde tanımlanır.

Böylece bir X uzayı ancak ve yalnız $d(X) = \aleph_0$ ise *ayrılabilir*dir. Açıktır ki $d(X) \leq w(X)$ ve $d(X) \leq |X|$ olup bu sayılar arasındaki fark *Hausdorff* (T_2) *olmayan* uzaylarda istenildiği kadar büyük olabilir. Örneğin $\kappa > \aleph_0$ gerçekleyen herhangi bir κ kardinal sayısı için $|X| = \kappa$ gerçekleyen X kümesi üzerinde *tümleyen sonlu* topoloji (bu topoloji τ ile gösterilirse, $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : |X - A| < \aleph_0\}$ olur) tanımlanırsa $d(X) = \aleph_0, w(X) = |X| = \kappa$ olur. X uzayı Hausdorff olduğunda bu fark için bir sınır söz konusudur.

Teorem II.4 (*Pospisil [1937]*): X bir Hausdorff uzayı ise $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$ ve $w(X) \leq o(X) \leq 2^{2^{d(X)}}$ gerçekleşir. Özel olarak her ayrılabilir T_2 uzayı en fazla $2^{2^{\aleph_0}}$ elemana ve en fazla $2^{2^{\aleph_0}}$ açık kümeye sahiptir.

Kanıt. $d(X) = \kappa$ ve S ise X uzayının $|S| \leq \kappa$ gerçekleyen bir yoğun alt kümesi olsun. X bir Hausdorff uzayı olduğundan farklı $p, q \in X$ nokta çifti için $p \in \overline{A}, q \notin \overline{A}$ olacak biçimde bir $A \subseteq S$ alt kümesi vardır. Böylece $\varphi(p) = \{A : A \subseteq S, p \in \overline{A}\}$ olarak tanımlanan $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$ fonksiyonu *bire-bir* olur ve böylece $|X| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))| = 2^{2^{|S|}} \leq 2^{2^\kappa}$ bulunur. İkinci iddia bir önceki teoremden kolayca görülür. ■

Yukarıda $|X|$ için bulunan sınır iyi bir sınırdır. Örneğin *kesikli topoloji* ile donatılan *pozitif tam sayılar* uzayı N ile gösterilirse, N kesikli uzayının *Cech-Stone* *tıkızlaşması* βN olmak üzere $d(\beta N) = \aleph_0$ ve $|\beta N| = 2^{2^{\aleph_0}}$ olur. (bkz. Örnek III.1) Öte yandan Hausdorff uzayı *olmayan* bir X uzayı için $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$ eşitsizliği gerçekleşmek zorunda *değildir*. Örneğin $|D| = \kappa > 2^{2^{\aleph_0}}$ gerçekleyen D kümesi üzerinde *tümleyen sonlu topolojisi* tanımlayarak elde edilen uzaya X denirse, kolayca görülebilir ki X Hausdorff olmayan bir T_1 uzayıdır, üstelik $d(X) = \aleph_0$ olup $|D| = \kappa = |X| > 2^{2^{d(X)}} = 2^{2^{\aleph_0}}$ gerçekleşir.

Bir X uzayında $B = \frac{o}{A}$ ($A \subseteq X$) biçimindeki bir alt kümeye **düzenli açık** (**regularly open**) küme denir ve X 'in tüm düzenli açıklarının kümesi $RO(X)$ ile gösterilir. Düzenli X uzayında tüm düzenli açıkların kümesi bir taban oluşturur, böylece

$w(X) \leq |RO(X)|$ olur. X düzenli uzay olduğunda $w(X)$ için Teorem II.4 dekinden daha iyi bir sınır vardır.

Teorem II.5 (De Groot [1965]): X herhangi bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki iddialar doğrudur:

- (a) $|RO(X)| \leq 2^{d(X)}$ olur.
- (b) X uzayı düzenli ise $w(X) \leq 2^{d(X)}$ geçerlidir.

Kanıt. $d(X) = \kappa$ ve $S \subseteq X$ ise X uzayının $|S| \leq \kappa$ gerçekleyen bir yoğun alt kümesi ise $RO(X) \subseteq \{\bar{A} : A \subseteq S\}$ olur. Gerçekten, $R \in RO(X)$ ise $R = \bar{\bar{R}} = \bar{R \cap X} = \overline{R \cap S}^o = \overline{R \cap S}^o \in \{\bar{A} : A \subseteq S\}$ bulunur. $(*)$ eşitliği yazılırken herhangi bir uzayın açık G ve keyfi B alt kümeleri için geçerli olan ünlü $\overline{G \cap B} = \overline{G} \cap \overline{B}$ eşitliği kullanıldı. Sonuçta $|RO(X)| \leq |\mathcal{P}(S)| \leq 2^\kappa$ elde edilir. (b) şıkkı ise düzenli uzaylarda daima $w(X) \leq |RO(X)|$ olduğundan apaçıktır. ■

Tanım II.3 Bir topolojik uzayda üyeleri boştan farklı ve ikişerli ayrık açık kümeler olan bir aileye **gözenekli aile** denir. Bir X uzayının gözenekli ailelerinin kardinalitelerinin supremumuna X in **Suslin sayısı** (ya da **gözeneklenme sayısı = cellularity number**) denir ve bu sayı $c(X)$ ile gösterilir. Kısacası

$$c(X) = \sup\{|\mathfrak{S}| : \mathfrak{S}, X \text{ de gözenekli aile}\} + \aleph_0$$

biçiminde tanımlanır. $c(X) = \aleph_0$ ise X uzayına **sayılabilir zincir koşulunu gerçekler** ya da kısaca **ccc (=countable chain condition)** uzayı denir.

Bazı X uzaylarında $c(X)$ elemanlı hiçbir gözenekli ailenin tanımlanamadığı ilerde görülecektir. Her X topolojik uzayının herhangi bir yoğun kümesi boştan farklı tüm açıklarla kesişeceğinden $c(X) \leq d(X)$ eşitsizliği daima doğrudur. $c(X) < d(X)$ gerçekleyen örnekler kolayca bulunabilir. Örneğin $\kappa \geq 2^{2^{\aleph_0}}$ için κ -ağırlıklı Cantor küpü $(D(2))^\kappa$ (burada $D(2)$ ile iki elemanlı kesikli uzay gösteriliyor) çarpım uzayı olup

$c((D(2))^\kappa) = \aleph_0$, $d((D(2))^\kappa) > \aleph_0$ olduğu ünlü Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi'nden (bkz. Kısım III.4) kolayca görülür. Bu örnekten Suslin sayısının $|X|$ ($d(X)$), $o(X)$ ya da $w(X)$) için tek başına sınır *belirleyemediği* anlaşılır.

Aşağıda verilen Suslin sayısı ile ilgili önerme oldukça yararlıdır.

Önerme II.1 $c(X) = \kappa$ ve X uzayının açık kümelerinin bir ailesi $\mathfrak{S}$ olsun. Bu durumda $|\mathfrak{R}| \leq \kappa$ ve $\bigcup \mathfrak{S} \subseteq \overline{\bigcup \mathfrak{R}}$ koşulları gerçekleşecek biçimde $\mathfrak{S}$ 'nin bir $\mathfrak{R}$ alt ailesi vardır.

Kanıt. Ω , X uzayının boştan farklı ve $\mathfrak{S}$ 'nin en az bir elemanı tarafından kapsanan açık kümelerinin ailesi olsun. Ünlü Zorn Lemması nedeniyle $\Omega' \subseteq \Omega$ gerçekleyen Ω' gözenekli ailelerinin bir *maksimali* vardır. Bu maksimal aileye Ω_0 denirse, hipotezden $|\Omega_0| \leq c(X) = \kappa$ bulunur. Ayrıca Ω_0 gözenekli ailesinin maksimalliğinden $\bigcup \mathfrak{S} \subseteq \overline{\bigcup \Omega_0}$ gerçekleşir. Aksi halde bir $x \in \bigcup \mathfrak{S} - \overline{\bigcup \Omega_0}$ elemanı var olur ve sonuçta $x \in B - \overline{\bigcup \Omega_0}$ gerçekleyen bir $B \in \mathfrak{S}$ ile x noktasının $x \in G \subseteq B - \overline{\bigcup \Omega_0}$ gerçekleyen bir G açık komşuluğu aracılığıyla, $G \cap \bigcup \Omega_0 = \emptyset$ olduğundan, $\Omega_0 \subsetneq \Omega_0 \cup \{G\}$ elde edilir; ancak bu durum Ω_0 ailesinin maksimalliği ile çelişir. Sonuç olarak Ω_0 'ın üyelerini kapsayan $\mathfrak{S}$ 'nin elemanlarından *tek türlü seçimle* oluşturulan aileye $\mathfrak{R}$ denirse, aranan alt aile bulunmuş olur. ■

Tanım II.4 Bir X uzayının **saçılım sayısı**, tüm kesikli alt kümelerin kardinal sayılarının supremumu olarak tanımlanır ve $s(X)$ ile gösterilir. Kısacası

$$s(X) = \sup\{|D| : D \subseteq X, D \text{ kesikli}\} + \aleph_0$$

dır. Eğer $s(X) = \aleph_0$ ise X uzayına **sayılabilir saçılıma sahip** denir.

Açıktır ki $c(X) \leq s(X) \leq \min\{|X|, w(X)\}$ gerçekleşir. Saçılım ve yoğunluk sayıları doğrudan *kıyaslanamazlar*. (Gerçekten, X uzayı olarak [4] de tanımlanan Moore-Niemytzki düzlemi (kısaca MN -düzlemi) alınırsa, $d(X) = \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = s(X)$)

gerçeklenir. Öte yandan $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde tabanı $\mathcal{B} = \{G - A : G \in \mathbb{R}^1, |A| \leq \aleph_0\}$ biçiminde tanımlanan T_1 uzayına Y denirse, $s(Y) = \aleph_0 < d(Y)$ olur.) Ancak ayırma aksiyomlarından yararlanarak birbirlerine sınır belirlerler. Örneğin Teorem II.5'den X düzenli uzayında $s(X) \leq 2^{d(X)}$ ve Teorem II.12'den X Hausdorff uzayında $d(X) \leq 2^{s(X)}$ eşitsizlikleri geçerlidir.

Benzer şekilde X uzayının **uzanım sayısı**, tüm *kapalı kesikli alt kümelerin* kardinal sayılarının *supremumu* olarak tanımlanır ve $e(X)$ ile gösterilir. Kısacası

$$e(X) = \sup\{|D| : D \subseteq X, D \text{ kapalı-kesikli}\} + \aleph_0$$

dır.

Tanım II.5 Bir X uzayının **Lindelöf sayısı** (ya da **örtülüş sayısı**) $L(X)$ ile gösterilir ve X uzayının her açık örtülüşünden $\leq \kappa$ üyeli alt örtülüş elde edilebilen sonsuz κ kardinal sayılarının en küçüğü olarak tanımlanır.

O halde X uzayı ancak ve yalnız $L(X) = \aleph_0$ ise bir *Lindelöf* uzayıdır. Kolayca görülür ki $L(X) \leq \min\{|X|, w(X)\}$ eşitsizliği her X uzayı için doğrudur. Buradan ünlü “her ikinci sayılabilir uzay Lindelöf uzayıdır” gerçeği tekrar gözlenmiş olur. Diğer taraftan Lindelöf sayısı ile yoğunluk ve Suslin sayıları doğrudan *kıyaslanamazlar*; çünkü $\kappa > \aleph_0$ olmak üzere $A(\kappa)$ uzayı ($|D| = \kappa_0$ gerçekleyen *herhangi bir* D kümesi göz önüne alındığında sabit bir $x_0 \in D$ noktasındaki yerel tabanı $\mathcal{B}_{x_0} = \{\{x_0\} \cup (D - S) : S \subseteq D, |S| < \aleph_0\}$ ve her $x \in D \setminus \{x_0\}$ noktasındaki yerel tabanı $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ biçiminde tanımlanan uzay kısaca $A(\kappa_0)$ ile gösterilir, bu uzayda apaçık olarak x_0 'dan farklı tüm noktalar birer *yalıtılmış* noktadır) *tıkız* dolayısıyla Lindelöf olduğundan $L(A(\kappa)) = \aleph_0$ ancak $d(A(\kappa)) = c(A(\kappa)) = \kappa$ dır. Tersine *MN-düzlemi*'nde $d(X) = c(X) = \aleph_0$ ancak $L(X) = w(X) = 2^{\aleph_0}$ dır. Ayrıca Lindelöf sayısı $|X|$ içinde tek başına sınır *olamaz*. Gerçekten, $\kappa > \aleph_0$ kardinaliteli bir kesikli uzayın *tek nokta tıkızlaşması* X ise $L(X) = \aleph_0 < \kappa = |X|$ olur.

Herhangi bir X uzayının her kapalı A alt uzayı için $L(A) \leq L(X)$ gerçeklendiği kolayca görülür. Böylece tüm kesikli uzayların (dolayısı ile kesikli alt uzayların) Lindelöf sayısı bu uzayın kardinalitesine eşit olduğundan, X uzayının her $D \subseteq X$ kapalı ve kesikli alt kümesi için $|D| \leq L(X)$ olup daima $e(X) \leq L(X)$ olduğu sonucuna ulaşılır. $e(X) < L(X)$ olabilir. Örneğin X ile $W(w_1) = [0, w_1)$ ordinal sayılar ($\alpha < w_1$ gerçekleyen tüm α ordinallerinin) kümesi üzerinde tanımlanan *alışlagelen sıralama uzayı* gösterilecek olursa, X *sayılabilir tıkHz* uzay olur, dolayısı ile tüm kapalı kesikli alt uzayları da öyle olduğundan $e(X) = \aleph_0$ olduğu anlaşılır; ancak $s(X) = L(X) = \aleph_1$ dir.

Ayrıca şu kolayca gözlenir: Ancak ve yalnız X uzayında $\kappa < |A|$ gerçekleyen her A alt kümesi en az bir *limit noktasına* sahipse $e(X) \leq \kappa$ olur, çünkü $A \subseteq X$ alt kümesinin *limit kümesi* A' ile gösterilmek üzere, $\overline{A} = A \cup A'$ olup $|A| > \kappa$ ise $A' \neq \emptyset$ bulunur, aksi halde A kapalı ve kesikli olur, bu da $\kappa < |A| \leq e(X) \leq \kappa$ çelişmesine yol açar. Ters iddia benzer biçimde görülür.

Aşağıdaki lemmada normal uzayların, yoğunluk sayısı ile kapalı kesikli alt kümelerinin kardinaliteleri arasındaki ilişki görülecektir. Bu ilişki ilk kez 1930 lu yıllarda F.B.Jones tarafından gözlenmiş olup, bu sonuca göre *normal ayrılabilir* bir X uzayının $\geq 2^{\aleph_0}$ kardinaliteli kapalı kesikli bir alt kümesi *yoktur*. Bu lemma sık sık uzayların normal olup olmadığının kanıtlanmasında kullanılır. Örneğin $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ **alt limit uzayı** (genelde Sorgenfrey Eksenini olarak bilinir (bkz. Örnek III.5)) olmak üzere, $X = (\mathbb{R}, \mathbb{R}_a) \times (\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ çarpım uzayı ayrılabilir; ancak $A = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq X$ alt kümesi kapalı kesikli ve $|A| = 2^{\aleph_0}$ olduğundan aşağıdaki lemmaya göre X çarpım uzayı normal *değildir*. Benzer şekilde MN -düzlemi'de ayrılabilir; ancak $2^{\aleph_0}$ kardinaliteli kapalı kesikli alt kümesi bulunduğu için normal uzay *değildir*.

Lemma II.7 (Jones Lemması): X uzayı normal ise her kapalı kesikli $D \subseteq X$ alt kümesi için $2^{|D|} \leq 2^{d(X)}$ olur. Özel olarak X normal ayrılabilir bir uzay ise;

(1) X uzayında $\geq 2^{\aleph_0}$ kardinaliteli kapalı kesikli alt küme yoktur.

(2) Eğer $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ geçerliyse X uzayının $\aleph_1$ kardinaliteli kapalı kesikli alt kümesi yoktur.

Kanıt. Lemmada sözü edilen D kapalı-kesikli kümesi için $D' = \emptyset$ gerçekleştiğinden tüm $E \subseteq D$ alt kümeleri, $E' \subseteq D' = \emptyset$ ve sonuçta $E' = \emptyset$ olması nedeniyle, (özellikle $D - E \subseteq D$ alt kümesi de) X ana uzayında birer kapalı küme olur. Şimdi $S \subseteq X$ alt kümesi, normal X uzayında $|S| \leq d(X)$ gerçekleyen bir *yoğun* küme olsun. O halde X uzayının E ve $D - E$ ayrık kapalı küme çiftlerine karşılık X uzayında $E \subseteq G_E$, $D - E \subseteq U_E$ ve $G_E \cap U_E = \emptyset$ koşullarını gerçekleyen G_E, U_E açık kümeleri vardır, üstelik $E_1 \neq E_2$ için $S \cap G_{E_1} \neq S \cap G_{E_2}$ olur, çünkü $E_1 \neq E_2$ nedeniyle $E_1 - E_2 \neq \emptyset$ ve $E_2 - E_1 \neq \emptyset$ iddialarından en az birisi geçerlidir, sözgelimi birincisi geçerli ise $\emptyset \neq E_1 - E_2 = (E_1 \cap D) - E_2 = E_1 \cap (D - E_2) \subseteq G_{E_1} \cap U_{E_2}$ olup, S yoğun kümesi boştan farklı $G_{E_1} \cap U_{E_2}$ ile boştan farklı olarak kesişeceğinden ve $G_{E_2} \cap U_{E_2} = \emptyset$ nedeniyle $U_{E_2} \subseteq (X - G_{E_2})$ ve $(S \cap G_{E_1}) - S = \emptyset$ olduğundan, sonuçta

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq S \cap (G_{E_1} \cap U_{E_2}) \subseteq (S \cap G_{E_1}) \cap (X - G_{E_2}) = (S \cap G_{E_1}) - G_{E_2} \\ &= [(S \cap G_{E_1}) - S] \cup [(S \cap G_{E_1}) - G_{E_2}] = (S \cap G_{E_1}) - (S \cap G_{E_2}) \end{aligned}$$

kısacası $\emptyset \neq (S \cap G_{E_1}) - (S \cap G_{E_2})$ böylelikle $(S \cap G_{E_1}) \neq (S \cap G_{E_2})$ bulunur. Bu nedenle $\varphi(E) = S \cap G_E$ olarak tanımlanan $\varphi : \mathcal{P}(D) \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ fonksiyonu *bire-bir* olup $|\mathcal{P}(D)| = 2^{|D|} \leq |\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|} \leq 2^{d(X)}$ sonucu bulunur. Ayrıca (1) sonucu apaçık olup (2) deki hipotez geçerli olduğunda, $|A| = \aleph_1$ eşitliğini sağlayan bir A kapalı-kesikli alt kümesi var olsaydı $2^{|A|} = 2^{\aleph_1} \leq 2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ çelişkisi bulunurdu. ■

Jones Lemması'nın yukarıdaki modern şekli Van Douwen [1981] tarafından gösterilmiştir. Böylece normal bir X uzayı için $2^{e(X)} \leq 2^{d(X)}$ eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca bu lemmanın genişlemiş şekli Teorem III.14'de görülecektir.

Bir ϕ kardinal değişmezine, ancak ve yalnız X uzayının her Y alt uzayı için $\phi(Y) \leq \phi(X)$ gerçeklerse **monoton kardinal değişmez** ya da kısaca **monoton**

(**tekdüze**) denilir. Kardinalite, ağırlık ve saçılım sayılarının *monoton* olduğu kolayca görülebilir. Diğer taraftan yoğunluk, Suslin, Lindelöf ve uzanım sayıları *monoton değildir*. Örneğin N kesikli uzayının *Cech-Stone tıkızlaşması* βN uzayı ayrılabilir bir tıkız uzay olduğundan, $d(\beta N) = c(\beta N) = \aleph_0$ olur; ancak $\beta N \setminus N \subseteq \beta N$ alt uzayı için $d(\beta N \setminus N) = c(\beta N \setminus N) = 2^{\aleph_0}$ dır.(bkz. Örnek III.1) Dolayısıyla yoğunluk ve Suslin sayıları *monoton değildir*. Ayrıca $[0, w_1]$ yani $\alpha \leq w_1$ gerçekleyen tüm α ordinallerinin kümesini *sıralama topolojisi* ile donatarak elde edilen uzaya W denirse, W uzayının tıkız dolayısı ile Lindelöf olduğu bilindiğinden $L(W) = \aleph_0$ olur; ancak $[0, w_1) \subseteq W$ alt uzayı için $L([0, w_1)) = \aleph_1$ olduğundan Lindelöf sayısının da *monoton olmadığı* görülür. Buna rağmen kolayca görülür ki Suslin sayısı *açık veya yoğun* alt uzaylarda *monoton*dur, yoğunluk sayısı *açık* alt uzaylarda *monotondur*, Lindelöf ve uzanım sayıları *kapalı* alt uzaylarda *monotondur*.

Herhangi bir *monoton olmayan* ϕ kardinal değişmezi için yeni bir $h\phi$ kardinal değişmezini $h\phi(X) = \sup\{\phi(Y) : Y \subseteq X\}$ olarak tanımlarsak $h\phi$ *monoton* olur ve **kalıtımsal ϕ sayısı** (örneğin hc = **kalıtımsal Suslin sayısı**) olarak adlandırılır. Eğer ϕ *monoton* ise $h\phi(X) = \phi(X)$ olduğu (örneğin $\phi = |\cdot|$ ya da $\phi = w$ ya da $\phi = s$ için) apaçıktır. Herhangi bir X uzayında $hc(X) = s(X) = he(X)$ eşitliği doğrudur. (Gerçekten $hs(X) = s(X)$ olduğundan, $hc(X), he(X) \leq s(X)$ olur ayrıca herhangi kesikli $A \subseteq X$ alt kümesi için

$|A| = c(A) = e(A) \leq \min\{hc(X), he(X)\}$ olup $s(X) \leq \min\{hc(X), he(X)\}$ ters eşitsizliği bulunur.) Böylece iki yeni kardinal değişmez hd (*kalıtımsal yoğunluk*) ve hL (*kalıtımsal Lindelöf*) sayıları elde edilir. Eğer $hd(X) = \aleph_0$ ise X uzayına *kalıtımsal ayrılabilir*, $hL(X) = \aleph_0$ ise X uzayına *kalıtımsal Lindelöf* uzayı denilir. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ alt limit uzayı hem kalıtımsal ayrılabilir hem de kalıtımsal Lindelöf uzayıdır; ancak ikinci sayılabilir $(w((\mathbb{R}, \mathbb{R}_a))) = c$ olduğundan *değildir*. (bkz. Örnek III.5) Bilindiği gibi herhangi bir uzayın tüm kapalı kümelerinin ailesi $\mathcal{F}$ ile sayılabilir sayıda açık kümenin

arakesiti olarak yazılabilen kümelerin ailesi $\mathcal{G}_\delta$ ile ve sayılabilir sayıda kapalı kümenin birleşimi olarak yazılabilen kümelerin ailesi $\mathcal{F}_\sigma$ ile gösterilir ve bu ailelerin elemanlarına sırasıyla kapalı küme, $\mathcal{G}_\delta$ -türü küme ve $\mathcal{F}_\sigma$ -türü küme denir. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}_\delta$ gerçekleyen (dolayısıyla tüm açıkları $\mathcal{F}_\sigma$ -türü küme olan) normal uzaylara **yetkin normal uzay** denir. Her tıkHz, yetkin normal uzay kalıtımsal Lindelöf uzayıdır, çünkü bir uzayın kalıtımsal Lindelöf olması için gerek ve yeter şart tüm *açık* alt uzaylarının Lindelöf olmasıdır gerçeği ve Lindelöf uzaylarının $\mathcal{F}_\sigma$ -türü alt uzaylarının (dolayısıyla yetkin normal uzaylarda açık alt uzayların) Lindelöf olmasından iddia apaçıktır. hd ve hL sayıları aracılığıyla $o(X)$ için yararlı sınırlar bulunur.

Teorem II.6 *Herhangi bir X uzayın için $o(X) \leq |X|^{hd(X)}$ ve $o(X) \leq (w(X))^{hL(X)}$ olur.*

Kanıt. $hd(X) = \kappa$ olsun. Böylece X uzayının herhangi bir kapalı kümesi H için $d(H) \leq \kappa$ olur ve kesinlikle var olup $|S| \leq \kappa$ gerçekleyen yoğun bir $S \subseteq H$ alt kümesi aracılığıyla $\bar{S} \subseteq H$ gözleyip $H = kap_H(S) = \bar{S} \cap H = \bar{S} \subseteq H$ sonuçta $H = \bar{S}$ ve böylece $H \in \{\bar{S} : S \subseteq X, |S| \leq \kappa\}$ olur. Bu durumda $o(X) = |\mathcal{F}| \leq |\{\bar{S} : S \subseteq X, |S| \leq \kappa\}| \leq |X|^\kappa$ bulunur. Şimdi $hL(X) = \kappa$ ve $\mathcal{B}$ ise X uzayının $|\mathcal{B}| \leq w(X)$ gerçekleyen tabanı olsun. O halde X uzayının her açık kümesi $\mathcal{B}$ 'nin $\leq \kappa$ sayıda elemanının birleşimi olarak yazılabildiğinden $o(X) \leq |\mathcal{B}|^\kappa \leq (w(X))^{hL(X)}$ bulunur. ■

Şimdi ard arda ağırlık kavramının daha genel biçimleri olan *ağ ağırlığı*, π -*ağırlık*, ve *ayırıcı ağırlık* kavramlarını kısaca tanıyalım.

X 'in alt kümelerinin bir ailesi $\mathcal{N}$ olmak üzere, eğer X uzayının her açık kümesi $\mathcal{N}$ 'nin bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\mathcal{N}$ ailesine X uzayının bir **ağ**'ı denir. Ağ, tanımı gereği tabana benzetilebilir ancak ağ'ın elemanları açık küme olmak zorunda *değildir*. Örneğin $\{\{x\} : x \in X\}$ daima X uzayı için bir ağ tanımlar. X uzayının **ağ-ağırlık sayısı** $nw(X)$ ile gösterilir ve

$$nw(X) = \min\{|\mathcal{N}| : \mathcal{N}, X \text{ in ağ}\} + \aleph_0$$

olarak tanımlanır. Açık ki ağ-ağırlığı *monotondur* ve her taban bir ağ belirler, bu nedenle daima $\max\{hd(X), hL(X)\} \leq nw(X) \leq \min\{|X|, w(X)\}$ olduğu kolayca gözlenir. Teorem II.3'dekine benzer şekilde X bir T_0 uzayı ise $o(X) \leq 2^{nw(X)}$ ve $|X| \leq 2^{nw(X)}$ olur. Eğer X uzayı *tıkızsa veya metriklenebilirse* $nw(X) = w(X)$ olduğu ilerde görülecektir.

X uzayının boştan farklı açık kümelerinin bir ailesi $\mathcal{V}$ olmak üzere, eğer X uzayının *herhangi bir* boştan farklı açık R kümesi için $\mathcal{V}$ ailesinin $V \subseteq R$ gerçekleyen *bazı* $V \in \mathcal{V}$ elemanları varsa $\mathcal{V}$ 'ye X uzayının bir π - **tabanı** denir. Örneğin $\{\{n\} : n \in N\}$ ailesi, βN uzayının bir π -tabanıdır. X uzayının π -**ağırlık sayısı** $\pi w(X)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\pi w(X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}, X\text{'in } \pi\text{-tabanı}\} + \aleph_0$$

Açık ki daima $d(X) \leq \pi w(X) \leq w(X)$ geçerlidir. Ağ-ağırlığı ve π -ağırlığı kavramları birbirine benzemesine rağmen π -ağırlığı monoton *değildir*; çünkü $\pi w(\beta N) = \aleph_0$ ancak $\pi w(\beta N \setminus N) = 2^{\aleph_0}$ dır. (bkz. Örnek III.1) Ağ-ağırlık ve π -ağırlık sayıları doğrudan *kıyaslanamazlar*; çünkü ilerde kanıtlanacak olan Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi'nden yararlanarak sayılabilir üyeli, birinci sayılabilir *olmayan* ve $nw(X) = \aleph_0$, $\pi w(X) = 2^{\aleph_0}$ özelliklerine sahip bir X T_3 uzayı tanımlanabilir (bkz. Örnek III.8) olup, ayrıca $nw(\beta N) = 2^{\aleph_0}$ ve $\pi w(\beta N) = \aleph_0$ olduğundan iddia doğrudur. Ayrıca daima $\pi w(X) \leq w(X) \leq 2^{nw(X)}$ olup X bir *düzenli uzay* ise $nw(X) \leq 2^{d(X)} \leq 2^{\pi w(X)}$ dir.

$\mathcal{A}$, E kümesinin bir örtülüğü olmak üzere, eğer her $p \in E$ için $\bigcap\{A : A \in \mathcal{A}, p \in A\} = \{p\}$ gerçekleşiyorsa, $\mathcal{A}$ 'ya E kümesinin **ayıran örtülüğü** denir. X uzayının **ayıran ağırlık sayısı** $sw(X)$ ile gösterilip sonsuz κ kardinal sayılarının *en küçüğü* olarak tanımlanır öyle ki X uzayının $|\mathcal{V}| \leq \kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{V}$ ayıran açık örtülüğü vardır. Ayıran ağırlık kavramı yalnızca T_1 uzaylarında *tanımlanır*. (Aslında X uzayının ayıran örtülüğünün varlığı ile T_1 uzayı olması iddiaları *eşdeğerdir*; çünkü iyi biliniyor ki T_1 uzaylarında herhangi bir elmanı içeren tüm açıkların arakesiti o elemanın oluş-

turduğu tek nokta kümesine eşittir.) Ayıran ağırlık sayısının temel özellikleri aşağıdaki teoremden görülmektedir. İspatlar ayıran ağırlık sayısının tanımından kolayca görülür.

Teorem II.7 X bir T_1 uzayı ise aşağıdaki önermeler doğrudur:

(a) $|X| \leq 2^{sw(X)}$ ve $w(X) \leq o(X) \leq 2^{sw(X)}$ geçerlidir.

(b) X bir T_2 uzay ise $sw(X) \leq |RO(X)|$ (böylece $sw(X) \leq 2^{d(X)}$ ve $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$) olur.

(c) X bir T_2 uzay ise $sw(X) \leq nw(X)$ sağlanır.

X uzayının **nokta ayıran ağırlık sayısı** $psw(X)$ ile gösterilir ve sonsuz κ kardinal sayılarının *en küçüğü* olarak tanımlanır öyle ki X uzayının bir $\mathcal{V}$ ayıran açık örtülüğü, $ord(p, \mathcal{V}) \leq \kappa$ ($\forall p \in X$) gerçekleşecek şekilde vardır. Eğer $psw(X) = \aleph_0$ ise X uzayına **nokta-sayılabılır ayıran açık örtülüşe sahiptir** denilir. Nokta ayıran ağırlık sayısı yalnızca T_1 uzaylarında tanımlanır. σ -yerel sonlu tabana sahip T_1 uzayları nokta-sayılabılır ayıran açık örtülüşe sahiptir, böylece X *metriklenebilir* uzay ise $psw(X) = \aleph_0$ olur. Buradan nokta ayıran ağırlık sayısının, $|X|$ için tek başına sınır *belirleyemediği* anlaşılır, çünkü her *kesikli* uzay *metriklenebilir* uzaydır.

X uzayının **köşegensel derecesi** $\Delta(X)$ ile gösterilir ve X uzayının, $st(p, \mathcal{V}_\alpha) = \bigcup \{V : V \in \mathcal{V}_\alpha, p \in V\}$ olmak üzere, $\bigcap_{\alpha < \kappa} st(p, \mathcal{V}_\alpha) = \{p\}$ ($\forall p \in X$) koşulunu gerçekleyen $\{\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ açık örtülüşleri ailelerini indisleyen sonsuz κ kardinal sayılarının *minimumu* olarak tanımlanır. $\Delta(X)$ yalnızca T_1 uzayları için tanımlanır. $\Delta(X) = \aleph_0$ ise X uzayına **$\mathcal{G}_\delta$ -köşegene sahiptir** denir. X bir *metriklenebilir* uzay ise, $\mathcal{G}_\delta$ -köşegene sahiptir. Gerçekten, her $n \in \mathbb{N}$ için X 'in tüm elemanlarının $1/n$ yarıçaplı açık yuvarlarının ailesi $\mathcal{V}_n$ ise $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} st(p, \mathcal{V}_n) = \{p\}$ ($\forall p \in X$) gerçekleşir. Böylece köşegensel derecenin tek başına $|X|$ için sınır *belirleyemediği* anlaşılır, çünkü her *kesikli* uzay *metriklenebilir* bir uzaydır.

X uzayının **zayıf örtülüş sayısı** $wc(X)$ ile gösterilir ve sonsuz κ kardinallerinin *en küçüğü* olarak tanımlanır öyle ki X uzayının her açık örtülüğünden $\leq \kappa$ kardinaliteli

bir *alt aile*, üyelerinin *birleşim kümesi* X uzayında yoğun olacak şekilde elde edilir. Açık ki $wc(X) \leq L(X)$ ve Önerme II.1'den $wc(X) \leq c(X)$ dir. Eğer $wc(X) = \aleph_0$ ise X uzayına **zayıf Lindelöf uzayı** denir. Kolayca herhangi bir X uzayı için $hwc(X) = s(X)$ gerçeklendiği görülür.

Şu ana kadar tanımlanan kardinal değişmezler uzayın geneli üzerinde tanımlandı, şimdi tanımlanacak kardinal değişmezler ise yerel komşuluk aileleri üzerinde tanımlanacaktır.

X uzayının boştan farklı açık kümelerinin bir ailesi $\mathcal{V}$ ve $p \in X$ olsun. $\mathcal{V}$ ailesine p noktasının **yerel π -tabanı** denir ancak ve yalnız p noktasının herhangi bir R açık komşuluğu için $V \subseteq R$ gerçekleyen bazı $V \in \mathcal{V}$ elemanları vardır. Eğer ek olarak her $V \in \mathcal{V}$ için $p \in V$ oluyorsa $\mathcal{V}$ ailesine p noktasının **yerel tabanı** denir. Diğer taraftan her bir $W \in \mathcal{W}$ için $p \in W$ ve $\bigcap \mathcal{W} = \bigcap \{W : W \in \mathcal{W}\} = \{p\}$ özelliklerine sahip boştan farklı açıkların bir $\mathcal{W}$ ailesine, p noktası için bir **sözde tabandır** denir. Bu tanımlardan yararlanarak aşağıdaki yerel kardinal değişmezler tanımlanacaktır.

$$\chi(p, X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}, p \text{ için yerel taban}\};$$

$$\pi\chi(p, X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}, p \text{ için yerel } \pi\text{-taban}\};$$

$$\psi(p, X) = \min\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}, p \text{ için sözde taban}\};$$

$$t(p, X) = \min\{\kappa : \text{her } p \in \bar{Y} \text{ için } \exists A \subseteq Y, |A| \leq \kappa \text{ ve } p \in \bar{A}\}.$$

Bu sayılara sırasıyla $p \in X$ noktasının, **ıra sayısı** (ya da **karakter sayısı**), **π -ıra sayısı**, **sözde ıra sayısı** ve **sıkılık sayısı** denir. X uzayının **ıra**, **π -ıra**, **sözde ıra** ve **sıkılık sayıları** ise sırasıyla

$$\chi(X) = \sup\{\chi(p, X) : p \in X\} + \aleph_0;$$

$$\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(p, X) : p \in X\} + \aleph_0;$$

$$\psi(X) = \sup\{\psi(p, X) : p \in X\} + \aleph_0;$$

$$t(X) = \sup\{t(p, X) : p \in X\} + \aleph_0.$$

olarak tanımlanır.

Böylece X uzayı ancak ve yalnız $\chi(X) = \aleph_0$ ise birinci sayılabilir. Öte yandan X uzayına **sayılabilir π -ıra'ya sahip** (sayılabilir sözde ıra'ya sahip, sayılabilir sıklığa sahip) denir ancak ve yalnız $\pi\chi(X) = \aleph_0$ ($\psi(X) = \aleph_0, t(X) = \aleph_0$) dır.

Sözde ıra sayısı yalnızca T_1 uzaylarında *tanımlanır*, çünkü sözde tabanın varlığı ile uzayın T_1 olması *eşdeğer* iddialardır. Her $p \in X$ için $\max\{\pi\chi(p, X), \psi(p, X), t(p, X)\} \leq \chi(p, X)$ ve sonuçta $\max\{\pi\chi(X), \psi(X), t(X)\} \leq \chi(X)$ gerçekleştiği açıktır. X , sonsuz κ kardinaliteli kesikli bir uzayın *tek nokta tıkızlaşması* ise $t(X) = \aleph_0$ ve $\chi(X) = \kappa$ eşitliklerinin gerçekleştiği kolayca görülebilir, ayrıca tıkız uzaylarda $t(X) = h\pi\chi(X)$ ve $\chi(X) = \psi(X)$ olduğundan (bkz. Teorem III.1 ve Teorem III.5) $\pi\chi(X) = \aleph_0$ ve $\psi(X) = \kappa$ dır. Bu kardinal değişmezler arasındaki *kolayca görülebilen* bazı eşitsizlikler aşağıdaki iki teoremden verilecektir. İlk teoremin (a) şikkından ünlü “Her *ikinci sayılabilir uzay birinci sayılabilir*” gerçeği tekrar gözlenmiş olur.

Teorem II.8 *Herhangi bir X topolojik uzayı için aşağıdakiler doğrudur:*

- (a) $\chi(X) \leq w(X) \leq \chi(X) \cdot |X|$,
- (b) $\pi w(X) = d(X) \cdot \pi\chi(X)$,
- (c) $t(X) \leq hd(X)$,
- (d) $t(X) \leq h\pi\chi(X)$,
- (e) X bir T_1 uzayı ise $\psi(X) \leq \min\{psw(X), \Delta(X)\}$,
- (f) X bir T_2 uzayı ise $\psi(X) \leq hL(X)$.

Kanıt. (c), (d) ve (e) şıkları ilgili kardinal değişmezlerin tanımından kolayca görülür. Her bir $x \in X$ noktasının $|\mathcal{B}_x| \leq \chi(x, X)$ gerçekleyen $\mathcal{B}_x$ yerel tabanı aracılığıyla tanımlanan $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ ailesi, kolayca görülür ki X uzayı için bir taban oluşturur. Böylece $w(X) \leq |\mathcal{B}| \leq |X| \vee \sup_{x \in X} |\mathcal{B}_x| \leq |X| \vee \chi(X) = \chi(X) \cdot |X|$ olup (a) şıkkı elde edilir. Her π -taban aynı zamanda yerel π -taban tanımlayacağından $\pi\chi(X) \leq \pi w(X)$ olur. Yoğun küme ve π -tabanı kavramlarının tanımlarından yararlanarak kolayca $d(X) \leq \pi w(X)$ gerçekleştiği anlaşılır ve böylece $d(X) \cdot \pi\chi(X) \leq \pi w(X)$

elde edilir. Tersine her $x \in X$ için $|\mathcal{V}_x| \leq \pi\chi(x, X)$ sağlayan $\mathcal{V}_x$ yerel π -tabanları ve $|S| \leq d(X)$ gerçekleyen yoğun S kümesi için $\mathcal{V} = \bigcup_{x \in S} \mathcal{V}_x$ olarak tanımlanan $\mathcal{V}$ ailesi, X uzayı için bir π -taban olur. Böylece $\pi w(X) \leq |\mathcal{V}| \leq d(X) \cdot \pi\chi(X)$ bulunarak (b) şıkkı kanıtlanır. (f) şıkında $hL(X) = \kappa$ olsun. Her bir $x \in X$ için $\mathcal{W}_x$, x noktasının tüm açık komşuluklarının ailesi olsun. Hipotez gereği X Hausdorff uzayı olduğundan

$$\{x\} = \bigcap_{W \in \mathcal{W}_x} W = \bigcap_{W \in \mathcal{W}_x} \overline{W} \Rightarrow X - \{x\} = \bigcup_{W \in \mathcal{W}_x} (X - \overline{W})$$

elde edilir; ancak $hL(X) = \kappa$ olduğundan $X - \{x\} = \bigcup_{\alpha \in \Delta} (X - \overline{W_\alpha})$, $|\Delta| \leq \kappa$, gerçekleştirilecek biçimde $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \subseteq \mathcal{W}_x$ alt ailesi vardır. Böylece $\{x\} = \bigcap_{\alpha \in \Delta} W_\alpha$ olup $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$, x noktasının bir sözde tabanıdır. Bu durumda $\psi(x, X) \leq |\Delta| \leq \kappa$ ($\forall x \in X$) olur ve böylece $\psi(X) \leq \kappa$ bulunur. ■

Teorem II.9 X herhangi bir topolojik uzay ve S , X uzayının yoğun bir alt kümesi olsun. Her $p \in S$ noktası için aşağıdakiler doğrudur:

- (a) $d(X) \leq d(S) \leq d(X) \cdot t(X)$,
- (b) $\pi w(S) \leq \pi w(X)$ ve $\pi\chi(p, S) \leq \pi\chi(p, X)$,
- (c) X bir düzenli uzay ise $\pi w(S) = \pi w(X)$, $\chi(p, S) = \chi(p, X)$ ve $\pi\chi(p, S) = \pi\chi(p, X)$.

Kanıt. (b) ve (c) şıkları tanımlardan yararlanarak kolayca görülebilir. (a) şu şekilde kanıtlanabilir: S yoğun alt uzayının her yoğun alt kümesi X ana uzayında da yoğundur. Gerçekten $A \subseteq S$, S alt uzayının $|A| \leq d(S)$ gerçekleyen yoğun alt kümesi ise $S = \text{kap}_S A = \text{kap}_X A \cap S \subseteq \text{kap}_X A \implies \text{kap}_X S = \text{kap}_X A = X$ olur ki bu $A \subseteq X$ alt kümesinin X ana uzayında yoğun olması demektir. Sonuçta $d(X) \leq |A| \leq d(S)$ bulunur. Ayrıca $d(X) \cdot t(X) = \kappa$ ise X uzayının $|A| \leq \kappa$ gerçekleyen A yoğun alt kümesi vardır. O halde $\text{kap}_X S = X = \text{kap}_X A$ olup her $x \in A$ için $x \in \text{kap}_X S$ ve $t(X) \leq \kappa$ olduğundan $\exists A_x \subseteq S$, $|A_x| \leq \kappa$ ve $x \in \text{kap}_X A_x$ sağlanır. Böylece $D = \bigcup_{x \in A} A_x$ kümesi için $A \subseteq \bigcup_{x \in A} \text{kap}_X A_x \subseteq \text{kap}_X (\bigcup_{x \in A} A_x) = \text{kap}_X D \implies \text{kap}_X A = \text{kap}_X D = X \implies$

$kap_S D = kap_X D \cap S = X \cap S = S$ kısacası D, S alt uzayında bir yoğun alt küme olur ve sonuçta $d(S) \leq |D| = \left| \bigcup_{x \in A} A_x \right| \leq |A| \vee \sup_{x \in A} |A_x| \leq \kappa$ bulunur. ■

Şu ana kadar görülen kardinal değişmezler aracılığı ile $|X|$ için *yararlı ve keskin sınırlar* bulunabilir. Örneğin X bir T_2 uzayı ise $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$ ve X bir T_0 uzayı ise $|X| \leq 2^{nw(X)}$ gerçekleştiği görüldü. $|X|$ in sınırları **kolay ve zor kanıtlanabilenler** olarak iki kategoriye ayrılır. $|X| \leq (nw(X))^{\psi(X)}$ (X, T_1 ise), $|X| \leq 2^{d(X) \cdot \psi(X)}$ (X, T_3 ise) ve $|X| \leq (d(X))^{\chi(X)}$ (X, T_2 ise) *kolay kanıtlanabilenlere*; $|X| \leq 2^{L(X) \cdot \chi(X)}$ (X, T_2 ise), $|X| \leq 2^{c(X) \cdot \chi(X)}$ (X, T_2 ise), $|X| \leq 2^{s(X) \cdot \psi(X)}$ (X, T_1 ise) ve $|X| \leq 2^{2^{s(X)}}$ (X, T_2 ise) *zor kanıtlanabilenlere* örnek verilebilir. Burada kolay kanıtlanabilenler incelenecek, zor kanıtlanabilenler ileride görülecektir. (bkz: Kısım III.6)

Teorem II.10 *Eğer X bir T_1 uzayı ise $|X| \leq (nw(X))^{\psi(X)}$ geçerlidir. Özel olarak sayılabilir sözde ir'a'ya ve $\leq 2^{\aleph_0}$ kardinaliteli ağ'a sahip T_1 uzayları en fazla $2^{\aleph_0}$ elementlidir.*

Kanıt. $\psi(X) = \kappa$ olsun. $|\mathcal{N}| \leq nw(X)$ gerçekleyen $\mathcal{N}$ ağ'ı ve herhangi bir $p \in X$ noktası için $\psi(p, X) \leq \kappa$ olduğundan, $\exists \mathcal{N}_p \subseteq \mathcal{N}$ alt ailesi öyle ki $|\mathcal{N}_p| \leq \kappa$ ve $\bigcap \mathcal{N}_p = \{p\}$ gerçekleşir. Böylece $\varphi(p) = \mathcal{N}_p$ olarak tanımlanan $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{N})$ fonksiyonu bire-bir olur ve sonuçta $|X| \leq |\mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{N})| \leq |\mathcal{N}|^\kappa \leq (nw(X))^\kappa$ bulunur. ■

Ancak bu sınır çok keskin *değildir*. Örneğin $A(\aleph_0)$ uzayı için $|A(\aleph_0)| = \aleph_0$, $nw(A(\aleph_0)) = \aleph_0$ ve $\psi(A(\aleph_0)) = \aleph_0$ olup $\aleph_0 = |A(\aleph_0)| < (nw(A(\aleph_0)))^{\psi(A(\aleph_0))} = 2^{\aleph_0}$ gerçekleşir.

Sonuç II.1 *Eğer X bir T_3 uzayı ise $|X| \leq 2^{d(X) \cdot \psi(X)}$ olur.*

Kanıt. $|X| \leq (nw(X))^{\psi(X)} \leq (w(X))^{\psi(X)} \stackrel{*}{\leq} 2^{d(X) \cdot \psi(X)}$ bulunur. Burada (*) eşitsizliği Teorem II.5'den yararlanılarak yazıldı. ■

Aşağıdaki lemma $|X|$ için sınır bulmada oldukça yararlıdır, çünkü yoğunluk sayısı diğer kardinal değişmezler ile birleştirilerek yeni sınırlar bulunabilir. Bu lemmadan

yararlanarak $|X| \leq (d(X))^{\chi(X)}$ (X, T_2 ise) eşitsizliği ispatlanacaktır.

Lemma II.8 κ bir sonsuz kardinal sayı olmak üzere, bir X topolojik uzayı aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde var olsun:

(1) Her bir $p \in X$ için p noktasının açık komşuluklarının bir $\mathcal{B}_p$ ailesi, $|\mathcal{B}_p| \leq \kappa$ ve $\bigcap \{\overline{B} : B \in \mathcal{B}_p\} = \{p\}$ olacak şekilde vardır.

(2) Bir $S \subseteq X$ alt kümesi, $X = \bigcup \{\overline{A} : A \subseteq S, |A| \leq \kappa\}$ sağlanacak şekilde vardır.

Bu durumda $|X| \leq |S|^\kappa$ olur.

Kanıt. (2) varsayımı gereği her bir $p \in X$ için $p \in \overline{A_p}$, $|A_p| \leq \kappa$ gerçekleyen bir $A_p \subseteq S$ alt kümesi vardır. Böylece p noktasının her açık V komşuluğu için $A_p \cap V \subseteq S$, $|A_p \cap V| \leq \kappa$ olup $p \in \overline{A_p \cap V}$ gerçekleşir. $\Psi(p) = \{(A_p \cap V) : V \in \mathcal{B}_p\}$ biçiminde tanımlanan $\Psi : X \longrightarrow \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{P}_{\leq \kappa}(S))$ fonksiyonu,

$$\{p\} \subseteq \bigcap \{\overline{A_p \cap V} : V \in \mathcal{B}_p\} \subseteq \bigcap \{\overline{V} : V \in \mathcal{B}_p\} = \{p\}$$

kısacası $\bigcap \{\overline{A_p \cap V} : V \in \mathcal{B}_p\} = \{p\}$ olduğundan bire-bir dir. Böylece $|X| \leq |\mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{P}_{\leq \kappa}(S))| \leq (|S|^\kappa)^\kappa = |S|^{\kappa^2}$ sonucu elde edilir. ■

Teorem II.11 (Pospisil Teoremi): Herhangi bir X Hausdorff uzayı için

$|X| \leq (d(X))^{\chi(X)}$ geçerlidir. Özel olarak her birinci sayılabilir ve $\leq 2^{\aleph_0}$ kardinaliteli yoğun alt kümeye sahip Hausdorff uzayı $\leq 2^{\aleph_0}$ kardinalitelidir.

Kanıt. Yukarıdaki lemmada $\chi(X) = \kappa$ ve S 'yi $|S| \leq d(X)$ gerçekleyen bir yoğun küme almak yeterlidir. ■

Saçılım sayısı ile ayırma aksiyomlarından yararlanarak bazı kardinal değişmezler için sınırlar bulunabilir. Örneğin $hd(X) \leq 2^{s(X)}$ (X, T_2 ise), $nw(X) \leq 2^{s(X)}$ (X, T_3 ise) gibi. Bu amaçla öncelikle Sapirovskii tarafından kanıtlanan aşağıdaki iki lemma görülecektir.

Lemma II.9 (*Sapirovskiî Lemması*): $\mathcal{V}$, X topolojik uzayının bir açık örtülüğü ve $s(X) \leq \kappa$ olsun. Bu durumda $|A| \leq \kappa$ gerçekleyen bir $A \subseteq X$ alt kümesi ve $|\mathcal{W}| \leq \kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ alt ailesi, $X = \overline{A} \cup (\bigcup \mathcal{W})$ sağlanacak şekilde vardır.

Kanıt. Aksini varsayarsak, sonlu ötesi tümevarımla, $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\} \subseteq X$ alt kümesi ve $\{V_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\} \subseteq \mathcal{V}$ alt ailesi

$$(*) \quad x_0 \in V_0, \quad x_\alpha \in (V_\alpha - [(\bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta) \cup \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}]) \quad (0 \leq \alpha < \kappa^+)$$

olacak biçimde inşa edilebilir. Gerçekten, keyfi $x_0 \in X$ ve $x_0 \in V_0 \in \mathcal{V}$ gerçekleyen V_0 elemanları için $X \neq \overline{\{x_0\}} \cup V_0$ olduğundan $x_1 \in X - (\overline{\{x_0\}} \cup V_0)$ elemanı ve $x_1 \in V_1 - (\overline{\{x_0\}} \cup V_0)$ gerçekleyen $V_1 \in \mathcal{V}$ elemanı bulunur. Şimdi herhangi bir $\alpha < \kappa^+$ için $x_\beta \in X$ ve $V_\beta \in \mathcal{V}$ ($\forall \beta < \alpha$) elemanları belirlenmiş olsun. Bu durumda $|\alpha| \leq \kappa$ olduğundan varsayım gereği $X - [(\bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta) \cup \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}] \neq \emptyset$ olup $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ olması nedeniyle $x_\alpha \in V_\alpha - [(\bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta) \cup \overline{\{x_\beta : \beta < \alpha\}}]$ olacak şekilde $x_\alpha \in X$, $V_\alpha \in \mathcal{V}$ elemanları bulunarak sonlu ötesi tümevarım sürdürülür; ancak bu şekilde inşa edilen $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ kümesi, X uzayında kesikli olur bu da $s(X) \leq \kappa$ varsayımıyla çelişir. Sonuç olarak aranan özelliklerde $A \subseteq X$ alt kümesi ve $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ alt ailesi vardır. ■

Sonuç II.2 Eğer X bir Hausdorff uzay ise $\psi(X) \leq 2^{s(X)}$ dir.

Kanıt. $s(X) = \kappa$ olsun. Keyfi sabit bir $p \in X$ alınırsa, her bir $q \neq p$ için X bir Hausdorff uzayı olduğundan $p \notin \overline{V_q}$ olacak şekilde q noktasının bir V_q açık komşuluğu vardır. Böylece $X - \{p\} = \bigcup \{V_q : q \neq p\}$ olup bir önceki lemma nedeniyle $A, B \subseteq X - \{p\}$ alt kümeleri $|A| \leq \kappa$, $|B| \leq \kappa$ ve $X - \{p\} \subseteq \overline{A} \cup (\bigcup_{q \in B} V_q)$ koşulları sağlanacak şekilde vardır. $\mathcal{V}_A = \{X - \overline{C} : C \subseteq A, p \notin \overline{C}\}$, $\mathcal{V}_B = \{X - \overline{V_q} : q \in B\}$ ve $\mathcal{V} = \mathcal{V}_A \cup \mathcal{V}_B$ olarak tanımlanırsa, $\mathcal{V}$ ailesi, p noktası için bir sözde taban olur ve böylece $\psi(X) \leq |\mathcal{V}| \leq 2^\kappa$ gerçekleşir. ■

Lemma II.10 (*Sapirovski*): X bir Hausdorff uzayı ve $s(X) \leq \kappa$ olsun. Bu durumda $|S| \leq 2^\kappa$ ve $X = \bigcup \{\overline{A} : A \subseteq S, |A| \leq \kappa\}$ gerçekleştirilecek biçimde bir $S \subseteq X$ alt kümesi vardır.

Kanıt. Sonuç II.2 nedeniyle her bir $p \in X$ noktasının bir $\mathcal{V}_p$ sözde tabanı, $|\mathcal{V}_p| \leq 2^\kappa$ sağlanacak şekilde vardır. Böylece X in alt kümelerinin $\{S_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ ailesi ile uzayın açık küme ailelerinin $\{\mathcal{V}_\alpha : 0 < \alpha < \kappa^+\}$ ailesi aşağıdaki koşullar sağlanacak biçimde tanımlanabilir:

- (1) $|S_\alpha| \leq 2^\kappa$ ($0 \leq \alpha < \kappa^+$),
- (2) $\mathcal{V}_\alpha = \{V : V \in \mathcal{V}_p, p \in \bigcup_{\beta < \alpha} S_\beta\}$ ($0 < \alpha < \kappa^+$),
- (3) Eğer $A \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\bigcup_{\beta < \alpha} S_\beta)$ ve $\mathcal{W} \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_\alpha)$ için $X \neq \bar{A} \cup (\bigcup \mathcal{W})$ ise $S_\alpha - (\bar{A} \cup (\bigcup \mathcal{W})) \neq \emptyset$ olur.

Herhangi bir $\alpha_0 < \kappa^+$ için $S_\alpha \subseteq X$ alt kümeleri ve $\mathcal{V}_\alpha$ aileleri ($\forall \alpha < \alpha_0$) yukarıdaki koşullar sağlanacak biçimde bulunmuş ise, $\mathcal{V}_{\alpha_0} = \{V : V \in \mathcal{V}_p, p \in \bigcup_{\beta < \alpha_0} S_\beta\}$ alınır ve böylece $|\mathcal{V}_{\alpha_0}| \leq \left| \bigcup_{\beta < \alpha_0} S_\beta \right| \vee \sup\{|\mathcal{V}_p| : p \in \bigcup_{\beta < \alpha_0} S_\beta\} \leq 2^\kappa$ ve $|\mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_{\alpha_0})| \leq 2^\kappa$ bulunur. Eğer $A \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\bigcup_{\beta < \alpha_0} S_\beta)$ ve $\mathcal{W} \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_{\alpha_0})$ için $\bar{A} \cup (\bigcup \mathcal{W}) \neq X$ ise, Seçme Aksiyomu yardımıyla tek türlü belirli bir $x(A, \mathcal{W}) \in X - (\bar{A} \cup (\bigcup \mathcal{W}))$ elemanını seçerek, bu seçilmiş noktalardan oluşan

$$S_{\alpha_0} = \{x(A, \mathcal{W}) : A \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\bigcup_{\beta < \alpha_0} S_\beta), \mathcal{W} \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_{\alpha_0}), X - (\bar{A} \cup (\bigcup \mathcal{W})) \neq \emptyset\}$$

alt kümesi tanımlansın. Apaçık olarak $|S_{\alpha_0}| \leq 2^\kappa$ gerçekleşir. Böylece $S_\alpha \subseteq X$ ($0 \leq \alpha < \kappa^+$) alt kümelerinin ve $\mathcal{V}_\alpha$ ($0 < \alpha < \kappa^+$) ailelerinin, sonlu ötesi tümevarımla, tanımlanması süreci sona erer. $S = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} S_\alpha$ kümesi lemmada aranan özelliğe sahiptir. Gerçekten, $q \in X - S$ ise her bir $p \in S$ noktasının $q \notin V_p \in \mathcal{V}_p$ olacak şekilde bir V_p komşuluğu vardır. Bu durumda $S \subseteq \bigcup_{p \in S} V_p$ olup Sapirovskii Lemması nedeniyle, $A, B \subseteq S$ alt kümeleri $|A| \leq \kappa$, $|B| \leq \kappa$ ve $S \subseteq \overline{A} \cup (\bigcup_{p \in B} V_p)$ gerçekleştirilecek biçimde

vardır. $\mathcal{W} = \{V_p : p \in B\}$ olsun. Böylece $q \in \bar{A}$ dır. Aksi halde bir $\mu_0 < \kappa^+$ ordinali

$$(A \cup B) \subseteq \bigcup_{\alpha < \mu_0} S_\alpha, \mathcal{W} \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_{\mu_0}) \text{ ve } p \in X - (\bar{A} \cup (\bigcup \mathcal{W})) \neq \emptyset$$

koşulları gerçekleşecek biçimde var olduğundan, (3) koşulu nedeniyle,

$$\emptyset \neq S_{\mu_0} - (\bar{A} \cup (\bigcup \mathcal{W})) \subseteq S - (\bar{A} \cup (\bigcup \mathcal{W})) = \emptyset$$

çelişkisi bulunur. Ayrıca

$$|S| = \left| \bigcup_{\alpha < \kappa^+} S_\alpha \right| \leq \kappa^+ \vee \sup_{\alpha < \kappa^+} |S_\alpha| \leq 2^\kappa$$

olup S aranan kümedir. ■

Teorem II.12 (*Hajnal-Juhász*): *Eğer X bir Hausdorff uzayı ise $hd(X) \leq 2^{s(X)}$ gerçekleşir.*

Kanıt. Saçılım sayısı *monoton* olduğundan $d(X) \leq 2^{s(X)}$ gerçekleştiğini görmek yeterlidir, oysa bu bir önceki lemmanın kolay bir sonucudur. ■

Teorem II.13 *Eğer X bir T_3 uzayı ise $nw(X) \leq 2^{s(X)}$ olur.*

Kanıt. $s(X) = \kappa$ olsun. Böylece Lemma II.10 nedeniyle bir $S \subseteq X$ alt kümesi, $|S| \leq 2^\kappa$ ve $X =^* \bigcup \{\bar{A} : A \subseteq S, |A| \leq \kappa\}$ koşulları gerçekleşecek biçimde vardır. O halde $\mathcal{N} = \{\bar{N} : N \subseteq S, |N| \leq \kappa\}$ ailesi, X uzayı için bir ağdır. Gerçekten, herhangi bir $p \in X$ ve p noktasının herhangi bir R açık komşuluğu alınırsa, X *düzenli uzay* olduğundan $p \in V \subseteq \bar{V} \subseteq R$ olacak şekilde bir açık V kümesi vardır. Ayrıca $(*)$ eşitliğinden $p \in \bar{A}, |A| \leq \kappa$ gerçekleyen bir $A \subseteq S$ alt kümesinde var olup $p \in \bar{A} \cap V \subseteq \overline{\bar{A} \cap V} = \overline{A \cap V}$ sonucu bulunur. Böylece $N = A \cap V$ alınırsa, $|N| = |A \cap V| \leq \kappa$, $p \in \bar{N} = \overline{A \cap V} \subseteq \bar{V} \subseteq R$ bulunarak $\mathcal{N}$ ailesinin X uzayı için $|\mathcal{N}| \leq 2^\kappa$ gerçekleyen bir ağ olduğu anlaşılır. ■

Hajnal-Juhász tarafından kanıtlanan ünlü $|X| \stackrel{(1)}{\leq} 2^{s(X) \cdot \psi(X)}$ (X, T_1 ise) eşitsizliğinin (bkz. Teorem III.45) T_3 uzaylarındaki doğruluğu, yukarıdaki teoremden yararlanarak kolayca görülür. Gerçekten, Teorem II.10 ve Teorem II.13'den yararlanarak $|X| \leq (nw(X))^{\psi(X)} \leq (2^{s(X)})^{\psi(X)} = 2^{s(X) \cdot \psi(X)}$ bulunur. Ayrıca (1) eşitsizliği ve Sonuç II.2'den $|X| \leq 2^{2^{s(X)}} (X, T_2$ ise) olup, Teorem II.6 ve Teorem II.12'den $o(X) \leq 2^{2^{s(X)}}$ bulunur.

Öte yandan Sapirovskii, herhangi bir X tıkmaz Hausdorff uzayı için $hd(X) \leq s(X)^+$ olduğunu (bkz. Teorem III.8) kanıtladı. Yine Sapirovskii tarafından Lemma II.10'dan yararlanarak kanıtlanan aşağıdaki teorem oldukça önemlidir. Bu teoremden yararlanarak $hd(X) \leq 2^{s(X)}$ (X, T_2 için) eşitsizliğinin alternatif ispatı verilebilir. Gerçekten, De Groot tarafından kanıtlanan ve Sonuç III.36'da görülecek olan $|X| \leq 2^{hL(X)} (X, T_2$ ise) eşitsizliğinden ve $s(X)$ 'in *monotonluğundan* yararlanarak $d(X) \leq 2^{s(X)}$ gerçekleştiğini göstermek yeterlidir. Bu halde $s(X) = \kappa$ olsun. Aşağıdaki teoremden X uzayının $hL(Y) \leq \kappa$ özelliğine sahip Y *yoğun* alt uzayı vardır, böylece $d(X) \leq |Y| \leq 2^{hL(Y)} \leq 2^\kappa$ bulunur.

Teorem II.14 (*Sapirovskii*): *Eğer $s(X) \leq \kappa$ ise X uzayının $hL(Y) \leq \kappa$ olacak şekilde yoğun bir Y alt uzayı vardır.*

Kanıt. $d(X) = \lambda \geq \kappa^+$ olsun. ($d(X) \leq \kappa$ ise kanıtlanacak birşey yok) Bu durumda X uzayının $S = \{x_\alpha \in X : 0 \leq \alpha < \lambda\}$ biçiminde bir *yoğun* alt kümesi vardır. Bu kümeden yararlanarak, sonlu ötesi tümevarımla, $Y = \{x_{\alpha_\beta} : 0 \leq \beta < \lambda\}$ alt kümesi $\alpha_\beta = \min\{\gamma : \gamma < \lambda, x_\gamma \notin \overline{\{x_{\alpha_\xi} : 0 \leq \xi < \beta\}}\}$ olacak şekilde tanımlansın. Açıktır ki $\alpha_\beta \geq \beta$ ($\forall \beta < \lambda$) dir. Bu gerçekten kolayca görülür ki Y , X uzayının *yoğun* alt kümesidir. Tamamından dolayı Y kümesinin κ^+ kardinaliteli herhangi bir Z alt kümesinin bir $A \subseteq Z$ alt kümesi, $d(A) = \kappa^+$ olacak şekilde vardır. $hL(Y) \leq \kappa$ olduğundan kanıt tamamlanır. Gerçekten, $hL(Y) > \kappa$ olsaydı Y uzayının açık kümelerinin $\{G_\alpha\}_{\alpha < \kappa^+}$

ailesi ve $Z = \{y_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\} \subseteq Y$ alt kümesi, $y_\alpha \in (G_\alpha - \bigcup_{\beta < \alpha} G_\beta)$ ($\forall \alpha < \kappa^+$) olacak şekilde tanımlanabilir ve böylece $A \subseteq Z$ alt kümesi $d(A) = \kappa^+$ olacak şekilde bulunabilirdi; ancak bu durumda Z uzayının $V_\alpha = \{y_\beta : 0 \leq \beta < \alpha\}$ açık kümelerinin $\{V_\alpha\}_{\alpha < \kappa^+}$ ailesi ($|V_\alpha| \leq \kappa$ ($\forall \alpha < \kappa^+$) olduğu açıktır) A alt kümesinin bir *açık örtülüşü* olup Sapirovskii Lemması nedeniyle $|B| \leq \kappa$ gerçekleyen bir $B \subseteq A$ alt kümesi ve bir $\alpha_0 < \kappa^+$ ordinali, $A \subseteq \overline{B} \cup V_{\alpha_0}$ olacak şekilde vardır. Sonuçta $B \cup (V_{\alpha_0} \cap A) \subseteq A$ alt kümesi A alt uzayında *yoğun* olup $\kappa^+ = d(A) \leq |B \cup (V_{\alpha_0} \cap A)| \leq \kappa$ çelişkisi bulunur.

■

Aşağıdaki üç teoremden herhangi bir X topolojik uzayının *Suslin*, π -*ağırlık* ve π -*ıra* sayılarından yararlanarak $w(X)$, $|RO(X)|$ ve $|X|$ için sınırlar gösterilecektir. $|RO(X)|$ için bulunan sınırlar ileride X üzerinde tanımlı tüm gerçel değerli sürekli fonksiyonların kümesi $C(X)$ 'in kardinalitesi için sınır belirlemede kullanılacaktır.

Teorem II.15 (Efimov): *Herhangi bir X uzayı için $|RO(X)| \leq (\pi w(X))^{c(X)}$ geçerlidir.*

Kanıt. $c(X) = \kappa$ olsun. $\mathcal{V}$, X uzayının $|\mathcal{V}| \leq \pi w(X)$ gerçekleyen bir π -tabanı olmak üzere

$$\mathcal{G} = \{\overset{o}{\overline{G}} : G, \mathcal{V} \text{ nün } \leq \kappa \text{ sayıda elemanının birleşimi}\}$$

olarak tanımlanırsa, $RO(X) \subseteq \mathcal{G}$ olur. Gerçekten, her bir $R \in RO(X)$ için $\overset{o}{\overline{R}} = R$ olup R , X uzayında bir *açık* kümedir. $\mathcal{V}$, X uzayının π -tabanı olduğundan $\mathcal{V}_R = \{V : V \in \mathcal{V}, V \subseteq R\}$ ailesi için $R \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{V}_R}$ gerçekleşir. Önerme II.1 nedeniyle bir $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}_R$ alt ailesi, $|\mathcal{W}| \leq \kappa$ ve $\bigcup \mathcal{V}_R \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{W}}$ koşulları sağlanacak şekilde vardır. Böylece $G = \bigcup \mathcal{W}$ olarak alınırsa, $\overset{o}{\overline{R}} = \overline{\bigcup \mathcal{V}_R} = \overline{\bigcup \mathcal{W}} = \overset{o}{\overline{G}}$ olup sonuçta $R = \overset{o}{\overline{G}} \in \mathcal{G}$ bulunur. Bu durumda $|RO(X)| \leq |\mathcal{G}| \leq (\pi w(X))^\kappa$ elde edilir. ■

Teorem II.16 *Eğer X bir düzenli uzay ise $w(X) \leq |RO(X)| \leq (\pi \chi(X))^{c(X)}$ gerçekleşir.*

Kanıt. Düzenli uzaylarda, *tüm düzenli açıkların kümesi bir taban* belirlediğinden $|RO(X)| \leq (\pi\chi(X))^{c(X)}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Düzenli X uzayı için $d(X) \leq (\pi\chi(X))^{c(X)}$ olduğundan (bakınız aşağıya) bir önceki teorem ve Teorem II.8 (b)'den yararlanarak $|RO(X)| \leq (\pi w(X))^{c(X)} = (d(X) \cdot \pi\chi(X))^{c(X)} \leq (\pi\chi(X))^{c(X)}$ bulunur. 1977 yılında Charlesworth $d(X) \leq (\pi\chi(X))^{c(X)}$ (X düzenli ise) olduğunu aşağıdaki gibi kanıtladı:

$c(X) = \kappa$ ve her bir $x \in X$ için $\mathcal{B}_x$, x noktasının $|\mathcal{B}_x| \leq \pi\chi(X)$ gerçekleyen *yerel π -taban* olarak tanımlanırsa, X 'in alt kümelerinin $\{A_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ ailesi ve açık küme ailelerinin $\{\mathcal{V}_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ ailesi, aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde inşa edilebilir:

- (1) $|A_\alpha| \leq (\pi\chi(X))^\kappa$ ($0 \leq \alpha < \kappa^+$),
- (2) $\mathcal{V}_\alpha = \{V : V \in \mathcal{B}_x, x \in \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta\}$ ($0 \leq \alpha < \kappa^+$),
- (3) Eğer W kümesi $\mathcal{V}_\alpha$ ailesinin $\leq \kappa$ sayıda elemanının birleşimi ve $X \neq \overline{W}$ ise $A_\alpha - \overline{W} \neq \emptyset$ olur.

Lemma II.10'dakine benzer şekilde $\{A_\alpha\}_{\alpha < \kappa^+}$ ve $\{\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha < \kappa^+}$ aileleri tanımlanır. $S = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} A_\alpha$ olarak tanımlanırsa, $|S| \leq (\pi\chi(X))^\kappa$ olup $\overline{S} = X$ gerçekleşir dolayısıyla S kümesi, X uzayında *yoğun* olur ve böylece $d(X) \leq |S| \leq (\pi\chi(X))^\kappa$ bulunur. Gerçekten, eğer $\overline{S} \neq X$ olsaydı X uzayının boştan farklı açık bir R kümesi $S \cap \overline{R} = \emptyset$ olacak şekilde bulunurdu. Bu durumda

$$\mathcal{G} = \{V : V \in \mathcal{B}_x, x \in S, V \cap R = \emptyset\} \text{ ve } G = \bigcup \mathcal{G}$$

olarak tanımlanırsa, kolayca görülebilir ki $S \subseteq \overline{G}$ ve $R \cap \overline{G} = \emptyset$ gerçekleşir. Önerme.II.1 nedeniyle $G \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{W}}$, $|\mathcal{W}| \leq \kappa$ özelliklerine sahip bir $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{G}$ alt ailesi vardır. $W = \bigcup \mathcal{W}$ kümesi için $S \subseteq \overline{W}$ ve $\overline{W} \cap R = \emptyset$ gerçekleşir. Üstelik bir $\alpha_0 < \kappa^+$ ordinali, $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}_{\alpha_0}$ olacak şekilde vardır; ancak bu durumda $\overline{W} \cap R = \emptyset$ olduğundan (3) şıkkı nedeniyle $\emptyset \neq A_{\alpha_0} - \overline{W} \subseteq S - \overline{W} = \emptyset$ çelişkisi bulunur. Ulaşılan bu çelişki nedeniyle $\overline{S} = X$ olduğu anlaşılır. ■

Sonuç II.3 (*Sapirovski*): X bir T_3 uzayı ise $|X| \leq (\pi\chi(X))^{c(X)\cdot\psi(X)}$ olur.

Kanıt. $|X| \leq (nw(X))^{\psi(X)} \leq (w(X))^{\psi(X)} \leq (\pi\chi(X))^{c(X)\cdot\psi(X)}$ bulunur. ■

Sonuç II.4 Eğer X bir T_3 uzayı ise $|X| \leq 2^{c(X)\cdot\pi\chi(X)\cdot\psi(X)}$ geçerlidir.

Bu eşitsizlikten sözde ıra sayısı *çıkarılamaz*. Örneğin βN uzayı için $\pi\chi(X) = \pi w(X) = c(X) = \aleph_0$ ancak $|\beta N| = 2^{2^{\aleph_0}}$ dır.(bkz. Örnek III.1)

III ÇALIŞMALAR

Bu bölümde ilk olarak topolojik uzayların iki önemli sınıfı olan tıkHz uzayların ve metriklenebilir uzayların üzerinde tanımlanan kardinal değişmezler arasındaki bağıntılar incelenecektir. Çoğu topolog, araştırmalarını öncelikle bu özel uzaylar üzerinde yapar ve sonradan genelleştirir. Bu nedenle bu uzaylar üzerindeki incelemeler oldukça önemlidir. İlk olarak tıkHz uzaylar üzerinde tanımlanan kardinal değişmezler arasındaki bağıntılar görülecektir.

III.1 TıkHz Uzaylar Üzerinde Tanımlı Bazı Kardinal Değişmezlerin Özellikleri

Bilindiği gibi bir topolojik uzaya, her açık örtülüşünden sonlu üyeli bir alt örtülüş elde edilirse **tıkHz uzay** (**kompakt uzay**) denir. Bir X Hausdorff uzayının tıkHz olması için gerek ve yeter koşul bu uzayda her *sonlu arakesit özelliğine* sahip $\{F_s\}_{s \in S}$ kapalı kümeler ailesi için $\emptyset \neq \bigcap_{s \in S} F_s$ olmasıdır. Ayrıca X uzayında tıkHz kümelerin bir $\{K_t\}_{t \in T}$ ailesi ve V açık kümesi için $\emptyset \neq \bigcap_{t \in T} K_t \subseteq V$ ise sonlu bir $T^* \subseteq T$ alt kümesi için $\bigcap_{t \in T^*} K_t \subseteq V$ olduğu bilinmektedir. Üstelik tıkHz bir $K \subseteq X$ alt kümesi için $K \subseteq V$ olacak şekilde bir V açık kümesi varsa, $K \subseteq R \subseteq \overline{R} \subseteq V$ ve $\overline{R}$ tıkHz alt küme olacak şekilde bir R açık kümesi vardır.(bkz :[4])

Aşağıdaki teorem Alexandroff tarafından kanıtlanmış olup sonucuysa Kısım III.6'da görülecek olan ünlü Arhangel'skii Teoremi'nin kolay bir sonucudur.

Teorem III.1 *Eğer X bir tıkHz Hausdorff uzay ise $\psi(X) = \chi(X)$ eşitliği geçerlidir.*

Kanıt. Herhangi bir T_1 uzayında $\psi(X) \leq \chi(X)$ olduğundan X tıkHz Hausdorff uzayı için $\chi(X) \leq \psi(X)$ gerçekleştiğini göstermek yeterlidir. Bu amaçla her bir

$x \in X$ için $\chi(x, X) \leq \psi(x, X)$ olduğu gösterilirse aranan bulunur. Şimdi $x \in X$ noktasının $|\mathcal{V}_x| \leq \psi(x, X)$ gerçekleyen bir $\mathcal{V}_x$ sözde tabanı göz önüne alınsın.. Bu durumda $\mathcal{B}_x = \{\bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\mathcal{V}_x)\}$ ailesi, x noktası için $|\mathcal{B}_x| \leq |\mathcal{P}_{<\aleph_0}(\mathcal{V}_x)| = |\mathcal{V}_x| \leq \psi(x, X)$ gerçekleyen bir yerel tabandır. Gerçekten, x noktasının herhangi bir R açık komşuluğu için, X bir Hausdorff uzayı olduğundan, $\{x\} \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{V}_x} \overline{V} \subseteq R$ olup X uzayı tıkHz olduğundan yukarıdaki açıklamalar nedeniyle sonlu bir $\mathcal{V}_x(0) \subseteq \mathcal{V}_x$ alt ailesi $\{x\} \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{V}_x(0)} V \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{V}_x(0)} \overline{V} \subseteq R$ sağlanacak şekilde vardır. Böylece $G = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_x(0)} V \in \mathcal{B}_x$ ve $G \subseteq R$ olduğundan $\mathcal{B}_x$ ailesinin x noktası için bir yerel taban olduğu görülür. ■

Sonuç III.1 *Eğer X bir tıkHz Hausdorff uzayı ise $|X| \leq 2^{\psi(X)}$ olur. Özel olarak sayılabilir sözde-ıraya sahip her tıkHz Hausdorff uzay en fazla $2^{\aleph_0}$ kardinalitelidir.*

Aşağıdaki teoremde bir X tıkHz Hausdorff uzayı için $pw(X) = w(X) = nw(X)$ eşitliğinin gerçekleştiği görülecektir. $psw(X) = w(X)$ eşitliğinin sayılabilir versiyonu Arhangel'skii ve Proizvolov tarafından "TıkHz Hausdorff X uzayı, nokta-sayılabilir ayıran örtülüşe sahip ise sayılabilir tabanı vardır (yani ikinci sayılabilir) dolayısıyla metriklenebilirdir" olarak kanıtlandı. Sneider, her tıkHz Hausdorff, G_δ -köşgensel uzayın sayılabilir tabana sahip olduğunu kanıtladı. Bir X tıkHz Hausdorff uzayı için $nw(X) = w(X)$ eşitliğinin gerçekleştiği 1959 da Arhangel'skii tarafından kanıtlanmıştır. Bu eşitliğin önemli bir sonucu aşağıdaki teoremden sonra görülecektir.

Teorem III.2 *Herhangi bir X tıkHz Hausdorff uzayı için $pw(X) = w(X) = nw(X)$ gerçekleşir.*

Kanıt. $w(X) \leq nw(X)$ olduğunu kanıtlamak için $nw(X) = \kappa$ ve $\mathcal{N}$, X uzayının $|\mathcal{N}| \leq \kappa$ gerçekleyen bir ağ'ı olsun. $\mathcal{N}$ ağ'ından yararlanarak X uzayının açık kümelerinin $|\mathcal{V}| \leq \kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{V}$ ailesi $(*)$ özelliğine sahip olacak şekilde inşa

edilebilir:

(*) Farklı $p, q \in X$ noktaları için $p \in V_p, q \in V_q$ ve $V_p \cap V_q = \emptyset$ gerçekleyen

$V_p, V_q \in \mathcal{V}$ elemanları vardır.

$\mathcal{V}$ ailesi şu şekilde oluşturulur: $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ gerçekleyen $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ eleman çifti için $N_i \subseteq V_i$ ($i = 1, 2$), $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ olacak şekilde V_i ($i = 1, 2$) açık kümeleri varsa, bu kümelerden *tek türlü seçimle* $V_1(N_1, N_2)$ ($\supseteq N_1$), $V_2(N_1, N_2)$ ($\supseteq N_2$) (dikkat: $V_1(N_1, N_2) \cap V_2(N_1, N_2) = \emptyset$) kümeleri alınarak, eğer yoksa herhangi bir seçim *yapmayarak* $\leq \kappa$ kardinaliteli $\mathcal{V}$ ailesi (*) koşulu sağlanacak şekilde (X Hausdorff olduğundan kolayca görülür) bulunur. Şimdi $\mathcal{B}$, $\mathcal{V}$ ailesinin elemanlarının sonlu arakesitlerinin kümesi olsun. Kısacası $\mathcal{B} = \{\bigcap \mathcal{G} : \mathcal{G} \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\mathcal{V})\}$ yazılsın. X uzayı tıkHz olduğundan $\mathcal{B}$ ailesi, X uzayının bir tabanıdır. Gerçekten, herhangi bir $x \in X$ ve x noktasının herhangi bir B açık komşuluğu için, X bir Hausdorff uzayı olduğundan, $\{x\} = \bigcap \{\bar{V} : V \in \mathcal{V}, x \in V\} \subseteq B$ olup X uzayı tıkHz olduğundan sonlu bir $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$ alt ailesi $\{x\} \subseteq \bigcap \{V : V \in \mathcal{V}_0\} \subseteq \bigcap \{\bar{V} : V \in \mathcal{V}_0\} \subseteq B$ gerçekleştirilecek biçimde vardır. Böylece $(B \supseteq) G = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_0} V \in \mathcal{B}$ olduğundan $\mathcal{B}$, X uzayının $|\mathcal{B}| = |\mathcal{V}| \leq \kappa$ gerçekleyen bir tabanıdır. Sonuçta $w(X) \leq |\mathcal{B}| \leq \kappa$ bulunur.

Ayrıca herhangi bir Y Hausdorff uzayı için $psw(Y) \leq nw(Y)$ dir; çünkü Y uzayının herhangi bir $|\mathcal{N}(Y)| \leq nw(Y)$ gerçekleyen ağ'ı için yukarıdaki gibi tanımlanan $\mathcal{V}$ ailesi, $|\mathcal{V}| \leq nw(Y)$ gerçekleyen bir ayıran açık örtülüş tanımlar. Böylece kanıtı tamamlamak için $nw(X) \leq psw(X)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $psw(X) = \lambda$ ve $\mathcal{R}$, X uzayının $ord(x, \mathcal{R}) \leq \lambda$ ($\forall x \in X$) gerçekleyen bir ayıran açık örtülüşü olsun. X uzayı tıkHz olduğundan $|\mathcal{R}| \leq \lambda$ dır. Gerçekten, Miscenko Lemması'na göre $\mathcal{R}$ ailesinden elde edilen tüm sonlu minimal örtülüşlerin sayısı $\leq \lambda$ olup bu tür örtülüşlerin ailesi $\{\mathcal{R}_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda\}$ olsun. O zaman $\mathcal{R} \subseteq \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{R}_\alpha$ olur çünkü keyfi bir $V_0 \in \mathcal{R}$, $x \in V_0$ ve her bir $y \neq x$ elemanı için $\mathcal{R}$ ayıran örtülüş olduğundan $y \in V_y$ ancak $x \notin V_y$ olacak şekilde $V_y \in \mathcal{R}$ elemanı vardır. Böylece elde edilen $\{V_y\}_{y \in X \setminus \{x\}} \cup \{V_0\}$ ailesi, X

uzayının bir açık örtülüğü olup X uzayı tıkHz olduğundan sonlu alt örtülüş vardır. Bu alt örtülüşe $\mathcal{R}_\alpha$ denirse, açıktır ki $V_0 \in \mathcal{R}_\alpha$ sonuçta $\mathcal{R} \subseteq \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{R}_\alpha$ bulunur. Bu durumda $|\mathcal{R}| \leq \left| \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{R}_\alpha \right| \leq \lambda$ gerçekleşir. O halde $\mathcal{N}(\mathcal{R}) = \{X - \bigcup \mathcal{W} : \mathcal{W} \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\mathcal{R})\}$ olarak tanımlanırsa, $|\mathcal{N}(\mathcal{R})| \leq \lambda$ olur ve üstelik X uzayı için bir ağ belirler, böylece $nw(X) \leq |\mathcal{N}(\mathcal{R})| \leq psw(X)$ bulunur. ■

Bu teoremden yararlanarak şu ünlü sorunun cevabı bulundu: Eğer X tıkHz Hausdorff uzayı, $\leq \kappa$ sayıda, herbirinin ağırlığı $\leq \kappa$ olan alt uzayların birleşimi olarak yazılabiliyorsa $w(X) \leq \kappa$ mıdır?. Cevap olumlu olup bu sonuca **Ağırlık Ekleme Teoremi** denilir. Gerçekten, X tıkHz Hausdorff, $w(A_s) \leq \kappa$ ($\forall s \in S$) ve $|S| \leq \kappa$ için $X = \bigcup_{s \in S} A_s$ olsun. Bu durumda her A_s ($\forall s \in S$) alt uzayının $|\mathcal{B}_s| \leq w(A_s) \leq \kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}_s$ tabanı vardır. Böylece $\mathcal{B} = \bigcup_{s \in S} \mathcal{B}_s$ olarak tanımlanan $\mathcal{B}$ ailesi, X uzayının bir ağ'ı olup

$$w(X) = nw(X) \leq |\mathcal{B}| = \left| \bigcup_{s \in S} \mathcal{B}_s \right| \leq |S| \vee \sup\{|\mathcal{B}_s| : s \in S\} \leq \kappa$$

bulunur.

Sonuç III.2 Her tıkHz Hausdorff ve nokta-sayılabılır ayıran örtülüşe sahip uzay, ikinci sayılabılır olup metriklenebilir.

Sonuç III.3 Herhangi bir X tıkHz Hausdorff uzayı için $\Delta(X) = w(X)$ geçerlidir. Özel olarak tıkHz Hausdorff ve $\mathcal{G}_\delta$ -köşegensel uzay, ikinci sayılabılır ve böylece metriklenebilir.

Kanıt. $\Delta(X) \leq w(X) = psw(X)$ olduğundan herhangi bir Y T_1 uzayında $psw(Y) \leq L(Y) \cdot \Delta(Y)$ gerçekleştiğini görmek yeterlidir. $L(Y) \cdot \Delta(Y) = \kappa$ olsun. Böylece Y uzayının her bir $y \in Y$ elemanı için $\{y\} = \bigcap_{\alpha < \kappa} st(y, \mathcal{V}_\alpha)$ gerçekleyen açık örtülüşlerinin bir $\{\mathcal{V}_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa\}$ ailesi vardır. $L(Y) \leq \kappa$ olduğundan özel olarak $|\mathcal{V}_\alpha| \leq \kappa$ ($\forall \alpha < \kappa$) alınabilir. Böylece $\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha < \kappa} \mathcal{V}_\alpha$ ailesi, kolayca görülebilir ki $ord(y, \mathcal{V}) \leq \kappa$ ($\forall y \in Y$) gerçekleyen bir ayıran açık örtülüş olur ve böylece $psw(Y) \leq \kappa$ bulunur. ■

Sonuç III.4 Eğer X bir tıkHz Hausdorff uzayı ise $w(X) \leq |RO(X)| \leq 2^{s(X)}$ gerçektir.

Kanıt. Teorem II.15 den yararlanarak

$$|RO(X)| \leq (\pi w(X))^{c(X)} \leq (w(X))^{c(X)} = (nw(X))^{c(X)} \leq 2^{s(X) \cdot c(X)} = 2^{s(X)}$$

bulunur. ■

İkinci bölümde tanımlanan yerel kardinal değişmezlerin çoğunun *monoton* olduğu görüldü; ancak $\pi\chi(\beta N) = \aleph_0$, $\pi\chi(\beta N \setminus N) = 2^{\aleph_0}$ olduğundan (bkz. Örnek III.1) π -ıra sayısı *monoton değildir*. Benzer şekilde π -ağırlık sayısı da *monoton değildir*. Böylece $h\pi\chi$ ve $h\pi w$ gibi yeni kardinal değişmezler elde edilir. Sapirovskii 1975 yılında herhangi bir X tıkHz Hausdorff uzayı için $h\pi\chi(X) = t(X)$, $h\pi w(X) = hd(X)$ eşitliklerinin gerçekleştiğini kanıtladı. (İkinci eşitlik birincisinin kolay bir sonucudur.) Herhangi bir X uzayında $t(X) \leq h\pi\chi(X)$ gerçekleştiği kolayca görülebilir. Ters eşitsizlik tıkHz Hausdorff uzaylarında doğrudur. Bu iddia şu önemli kavramdan yararlanarak kanıtlanacaktır: X uzayında tanımlanan bir $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa\}$ dizisine, ancak ve yalnız her bir $\beta < \kappa$ ordinal sayısı için $\overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \cap \overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}} = \emptyset$ gerçekleşirse κ - **uzunluğunda erkin dizi** denir. X uzayında tanımlanan her erkin dizi, tanımından kolayca görülür ki bir *kesikli* alt küme belirler. Öncelikle tıkHz uzaylarda erkin dizilerin temel özellikleri görülecektir

Teorem III.3 Eğer X bir tıkHz Hausdorff uzayı ve $t(X) \leq \kappa$ ise X uzayında κ^+ -uzunluğunda erkin dizi yoktur.

Kanıt. X uzayı, tıkHz olduğundan her *sonsuz* alt kümesinin en az bir tam yığılma noktası vardır. ($A \subseteq X$ alt küme ve $x \in X$ olmak üzere, eğer x noktasının herhangi bir B açık komşuluğu için $|A \cap B| = |A|$ oluyorsa, x noktasına A kümesinin bir **tam yığılma noktası** denir. Bir Hausdorff uzayının tıkHz olması ile her sonsuz alt kümesinin

tam yığılma noktasına sahip olması iddialarının eşdeğer olduğu bilinmektedir.(bkz :[4]) Böylece eğer X uzayında κ^+ -uzunluğunda $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ erkin dizisi tanımlanabilseydi, $A = \{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ kümesinin en az bir tam yığılma noktası bulunurdu. Örneğin x böyle bir noktaysa açıktır ki $x \in \overline{A}$ olup $t(X) \leq \kappa$ olduğundan $|A_0| \leq \kappa$ gerçekleyen bir $A_0 \subseteq A$ alt kümesi için $x \in \overline{A_0}$ dır. Bu durumda bir $\alpha_0 < \kappa^+$ ordinal sayısı için $A_0 \subseteq \{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \alpha_0\}$ olup $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ nın erkin dizi olması nedeniyle $x \in \overline{\{x_\alpha : \alpha < \alpha_0\}} \cap \overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \alpha_0\}} = \emptyset$ çelişkisi bulunur. ■

Önerme III.1 *X herhangi bir T_3 uzayı ve $K \subseteq X$ bir tıkHz alt küme olsun. Bu durumda her bir $p \in X - K$ noktası için $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı $A, B \subseteq X$ alt kümeleri, $p \in A$, $K \subseteq B$ ve $A \cap B = \emptyset$ koşulları sağlanacak şekilde vardır.*

Kanıt. X bir T_3 uzayı olması ve bu uzayda $\overline{V_{n+1}} \subseteq V_n$ ($n < \aleph_0$) gerçekleyen açık kümelerin $\{V_n : n < \aleph_0\}$ ailesi için $\bigcap_{n < \aleph_0} \overline{V_n} = \bigcap_{n < \aleph_0} V_n$ kümesinin $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı küme olması gerçeklerinden yararlanarak iddia kolayca kanıtlanır. ■

Teorem III.4 (Arhangel'skii): *X bir tıkHz Hausdorff uzayıysa ve $h\pi\chi(X) > \kappa$ gerçekleşiyorsa, X uzayında κ^+ -uzunluğunda erkin dizi tanımlanabilir.*

Kanıt. Teorem II.9(b) nedeniyle her $Y \subseteq X$ alt kümesi için $\pi\chi(Y) \leq \pi\chi(\overline{Y})$ olduğundan $\pi\chi(X) > \kappa$ varsayımı altında teoremi kanıtlamak yeterlidir. Bu durumda en az bir $p \in X$ noktası için $\pi\chi(p, X) \geq \kappa^+$ gerçekleşir. $\mathcal{G}$, bu uzaydaki boştan farklı tüm $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı kümelerin ailesi olsun. $\mathcal{G}$ ailesi, aşağıdaki özelliğe sahiptir:

(*) Eğer $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ ve $|\mathcal{H}| \leq \kappa$ ise p noktasının bir R açık komşuluğu,

$H - R \neq \emptyset$ ($\forall H \in \mathcal{H}$) gerçekleşecek şekilde vardır.

(Gerçekten, (*) iddiası doğru olmasaydı, p noktasının her R açık komşuluğu için $H_R \subseteq R$ gerçekleyen en az bir $H_R \in \mathcal{H}$ elemanı bulunurdu. X uzayının tıkHz olması nedeniyle $H_R \subseteq V_R \subseteq \overline{V_R} \subseteq R$ ($\overline{V_R}$ tıkHz) olacak şekilde V_R açık kümesi vardır. Bu

şekilde tanımlanan V_R açıklarının ailesi, p noktası için bir yerel π -tabanı tanımlar ve böylece $\kappa^+ \leq \pi\chi(p, X) \leq |\{V_R : R, p \text{ nin açık komşuluğu}\}| \leq |\mathcal{H}| \leq \kappa$ çelişkisi elde edilir.) $\mathcal{G}$ ailesinin $\{A_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ ve $\{B_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ alt aileleri, sonlu ötesi tümevarımla, aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde tanımlanabilir:

- (1) $p \in A_\alpha$ ve $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$ ($0 \leq \alpha < \kappa^+$),
- (2) Eğer H , $\{A_\beta : 0 \leq \beta < \alpha\} \cup \{B_\beta : 0 \leq \beta < \alpha\}$ ailesinin elemanlarının boştan farklı sonlu arakesiti ise $H \cap B_\alpha \neq \emptyset$ olur.

Gerçekten, p noktasını içermeyen herhangi bir tıkHz küme (örneğin tek nokta kümeleri) için bir önceki önerme nedeniyle (1)-(2) koşullarını gerçekleyen A_0, B_0 kümeleri bulunur. Şimdi herhangi bir $0 < \alpha < \kappa^+$ ordinali için $\{A_\beta : \beta < \alpha\}, \{B_\beta : \beta < \alpha\}$ aileleri (1)-(2) sağlanacak şekilde bulunmuş olsun. $\mathcal{H}, \{A_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{B_\beta : \beta < \alpha\}$ ailesinin elemanlarının tüm boştan farklı sonlu arakesitlerinin kümesi olsun. Bu durumda $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, $|\mathcal{H}| \leq \kappa$ olup $(*)$ ifadesi nedeniyle p noktasının bir R açık komşuluğu, $H - R \neq \emptyset$ ($\forall H \in \mathcal{H}$) olacak şekilde vardır. Böylece bir önceki önerme nedeniyle A, B $\mathcal{G}_\delta$ -türü *kapalı* kümeleri, $p \in A$, $X - R \subseteq B$ ve $A \cap B = \emptyset$ koşulları sağlanacak şekilde bulunur. Bu durumda $A_\alpha = A$ ve $B_\alpha = B$ olarak alınırsa, $H - R \neq \emptyset$ ($\forall H \in \mathcal{H}$) olduğundan $H \cap B_\alpha \neq \emptyset$ ($\forall H \in \mathcal{H}$) olup (2) gerçekleşir ve böylece sonlu ötesi tümevarım süreci tamamlanır.

Keyfi $\alpha < \kappa^+$ ordinali için (1) koşulunun ilk kısmı ve (2)'den yararlanarak, sonlu tümevarımla, $\{A_\beta : \beta \leq \alpha\} \cup \{B_\beta : \beta > \alpha\}$ ailesinin her sonlu sayıda üyesinin arakesitin *boştan farklı* olduğu görülür. Böylece X bir tıkHz Hausdorff uzayı olduğundan

$\bigcap_{\beta \leq \alpha} A_\beta \cap \bigcap_{\beta > \alpha} B_\beta \neq \emptyset$ ($\forall \alpha < \kappa^+$) olup, Seçme Aksiyomu yardımıyla her bir $\alpha < \kappa^+$ için $x_\alpha \in \bigcap_{\beta \leq \alpha} A_\beta \cap \bigcap_{\beta > \alpha} B_\beta$ noktası seçilerek elde edilen $\{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ dizisi, X uzayında κ^+ -uzunluğunda *erkin* dizidir; çünkü her bir $\beta < \kappa^+$ için $\overline{\{x_\alpha : \alpha < \beta\}} \subseteq B_\beta$, $\overline{\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}} \subseteq A_\beta$ ve $A_\beta \cap B_\beta = \emptyset$ gerçekleşir. ■

Sonuç III.5 X bir tıkHz Hausdorff uzayı ve $t(X) > \kappa$ ise X uzayında κ^+ -uzunluğunda

erkin dizi vardır.

Kanıt. Herhangi bir Y uzayı için $t(Y) \leq h\pi\chi(Y)$ olduğundan bir önceki teoremden iddia açıktır. ■

Sonuç III.6 *Herhangi bir X tıkız Hausdorff uzayı için $t(X) = F(X)$ gerçekleşir. (Burada $F(X) = \sup\{\kappa : X \text{ uzayında } \kappa\text{-uzunluğunda erkin dizi var}\} + \aleph_0$ olarak tanımlanır.)*

Kanıt. Teorem III.3 ve Teorem III.4'dan kolayca görülür. ■

Teorem III.5 (Sapirovski): *X bir tıkız Hausdorff uzayı ise $t(X) = h\pi\chi(X)$ olur. Özel olarak tıkız Hausdorff uzaylarının sayılabilir sıklığa sahip alt uzayları, sayılabilir π -ıra'ya sahiptir.*

Kanıt. $t(X) \leq h\pi\chi(X)$ olduğu biliniyor. Eğer $t(X) = \kappa$ için $h\pi\chi(X) > \kappa$ olsaydı, X uzayında Teorem III.4 nedeniyle κ^+ -uzunluğunda erkin dizi tanımlanabilir; ancak Teorem III.3 nedeniyle böyle bir dizi *tanımlanamazdı*. Elde edilen bu çelişki nedeniyle $h\pi\chi(X) = \kappa$ olduğu anlaşılır. ■

Teorem III.6 *Herhangi bir X tıkız Hausdorff uzayı için $h\pi w(X) = hd(X)$ geçerlidir.*

Kanıt. Teorem II.8(b)-(c) de görüldüğü gibi herhangi bir Y uzayı için $\pi w(Y) = d(Y) \cdot \pi\chi(Y)$ ve $t(Y) \leq hd(Y)$ iddiaları doğru olduğundan $\pi w(X) = d(X) \cdot \pi\chi(X)$ ve böylece

$$h\pi w(X) = hd(X) \cdot h\pi\chi(X) = hd(X) \cdot t(X) = hd(X)$$

bulunur. ■

Teorem III.7 (Arhangel'skii): *X bir tıkız Hausdorff uzayı ise $t(X) \leq s(X)$ gerçekleşir. Özel olarak her tıkız Hausdorff, sayılabilir saçılıma sahip uzay sayılabilir sıklığa sahiptir.*

Kanıt. $s(X) = \kappa$ olsun. Eğer $t(X) > \kappa$ olsaydı, X uzayında κ^+ -uzunluğunda erkin dizi tanımlanabilirdi; ancak bu dizinin elemanlarıyla elde edilen küme *kesikli* olduğundan, bu kez $\kappa^+ \leq s(X) = \kappa$ çelişkisi bulunurdu. Sonuç olarak $t(X) \leq s(X)$ dir. ■

Bu teoremden yararlanarak, $\mathbb{R}$ üzerinde her bir $x \in \mathbb{R}$ noktasındaki yerel tabanı

$$\mathcal{B}_x = \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) - A : \varepsilon > 0, A \subseteq ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}), |A| \leq \aleph_0\}$$

biçiminde tanımlanan uzayın tıkHz *olmadığı* anlaşılır. Gerçekten, bu uzay X ile gösterilirse, X bir kalıtımsal Lindelöf uzayıdır (bkz:[2]) dolayısıyla $\aleph_0 \leq s(X) = hc(X) \leq hL(X) = \aleph_0$ gerçekleşir; ancak $t(X) > \aleph_0$ olduğundan (Gerçekten, eğer $t(X) = \aleph_0$ olsaydı, keyfi bir $x \in X$ noktası ve sabit bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $x + \varepsilon \in \overline{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)}$ olduğundan, sayılabilir noktalı bir $A \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ alt kümesi $x + \varepsilon \in \overline{A}$ gerçekleşecek biçimde var olurdu; ancak bu imkansızdır; çünkü herhangi bir $\delta > 0$ gerçel sayısı için $B_{x+\varepsilon}(\delta) = ((x + \varepsilon - \delta, x + \varepsilon + \delta) - ((x + \varepsilon - \delta, x + \varepsilon + \delta) \cap A)) \in \mathcal{B}_{x+\varepsilon}$ olup $B_{x+\varepsilon}(\delta) \cap A = \emptyset$ gerçekleşir.) yukarıdaki teorem nedeniyle X uzayının tıkHz *olmadığı* anlaşılır.

X bir Hausdorff uzayı ise $hd(X) \leq 2^{s(X)}$ olduğu biliniyor. Bu kez ek olarak X tıkHz olduğunda $hd(X) \leq (s(X))^+$ gerçekleştiği görülecektir. Bu amaçla öncelikle aşağıdaki lemma kanıtlanacaktır.

Lemma III.1 X bir T_3 uzayı, $A \subseteq Y \subseteq X$ ve $hL(Y) \leq \kappa$ olsun. Bu durumda X uzayının açık kümelerinin $|\mathcal{V}| \leq \kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{V}$ ailesi, $\overline{A} \subseteq \bigcap \mathcal{V}$ ve $Y \cap \overline{A} = Y \cap (\bigcap \mathcal{V})$ sağlanacak biçimde vardır.

Kanıt. $Y \subseteq \overline{A}$ ise $\mathcal{V}$ ailesi kolayca tanımlanabilir. Şimdi $Z = Y - \overline{A} \neq \emptyset$ olsun. O halde X uzayı düzenli olduğundan her bir $x \in Z$ noktasının bir R_x açık komşuluğu, $\overline{R_x} \cap \overline{A} = \emptyset$ olacak şekilde vardır. Bu şekilde elde edilen $\{R_x : x \in Z\}$ ailesi, Z 'nin bir açık örtülüğü olup $hL(Y) \leq \kappa$ olduğundan bir $E \subseteq Z$ alt kümesi, $|E| \leq \kappa$ ve

$Z \subseteq \bigcup_{x \in E} R_x$ gerçekleşecek şekilde vardır. Böylece $\mathcal{V} = \{X - \overline{R_x} : x \in E\}$ almak yeterlidir. ■

Teorem III.8 (*Sapirovski*): X bir tıktır Hausdorff uzay ise

$$hd(X) \leq (s(X))^+ \text{ gerçeklenir.}$$

Kanıt. $s(X) = \kappa$ olsun. Bu durumda Teorem III.7 nedeniyle $t(X) \leq \kappa$ dir. $Z \subseteq X$ olmak üzere Teorem II.9(a) nedeniyle $d(Z) \leq d(\overline{Z}).t(\overline{Z})$ olduğundan $d(\overline{Z}) \leq \kappa^+$ gerçeklendiğini göstermek yeterlidir. Saçılım sayısı monoton olduğundan $s(\overline{Z}) \leq s(X) \leq \kappa$ gerçeklenir, böylece Teorem II.14 nedeniyle $\overline{Z}$ nin yoğun bir Y alt kümesi, $hL(Y) \leq \kappa$ olacak şekilde vardır. Y kümesi, $\overline{Z}$ alt uzayında yoğun olduğundan $d(\overline{Z}) \leq d(Y)$ dir. Kısacası $hL(Y) \leq \kappa$ gerçekleyen tüm $Y (\subseteq X)$ alt uzayları için $d(Y) \leq \kappa^+$ olduğu gösterilirse kanıt tamamlanmış olur. Bu amaçla böyle bir Y alt uzayında, alt kümelerin artan $\{A_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ ailesi ile X uzayının açık küme ailelerinin $\{\mathcal{V}_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ ailesi, sonlu ötesi tümevarımla, aşağıdaki özelliklere sahip olacak şekilde tanımlanabilir:

- (1) $|A_\alpha| \leq \kappa$ ve $|\mathcal{V}_\alpha| \leq \kappa$ ($\forall \alpha < \kappa^+$),
- (2) $\overline{A_\alpha} \subseteq \bigcap \mathcal{V}_\alpha$ ve $Y \cap \overline{A_\alpha} = Y \cap (\bigcap \mathcal{V}_\alpha)$ ($\forall \alpha < \kappa^+$),
- (3) Bir $\mathcal{G} \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{V}_\beta)$ için $Y - \bigcup \mathcal{G} \neq \emptyset$ ise $A_\alpha \cap (Y - \bigcup \mathcal{G}) \neq \emptyset$ olur.

Gerçekten, $|A_0| \leq \kappa$ gerçekleyen herhangi bir $A_0 \subseteq Y$ alt kümesi için bir önceki lemma nedeniyle (1)-(3) koşullarını sağlayan bir $\mathcal{V}_0$ ailesi vardır. Keyfi sabit bir $\alpha < \kappa^+$ ordinal sayısı göz önüne alındığında, her $\beta < \alpha$ için A_β kümeleri ve $\mathcal{V}_\beta$ aileleri belirlenmiş olsun. Bu durumda bir $\mathcal{G} \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{V}_\beta)$ için $Y - \bigcup \mathcal{G} \neq \emptyset$ ise, ünlü Seçme Aksiyomu ile tek türlü belirli bir $x(\mathcal{G}) \in Y - \bigcup \mathcal{G}$ elemanını seçerek,

$$A_\alpha = \{x(\mathcal{G}) \in Y - \bigcup \mathcal{G} : \mathcal{G} \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{V}_\beta), Y - \bigcup \mathcal{G} \neq \emptyset\}$$

biçiminde tanımlanırsa,

$$|A_\alpha| \leq \left| \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{V}_\beta) \right| = \left| \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{V}_\beta \right| \leq |\alpha| \vee \sup_{\beta < \alpha} |\mathcal{V}_\beta| \leq \kappa$$

olur. Üstelik $A_\alpha \subseteq Y$ olduğundan $\mathcal{V}_\alpha$ ailesi, bir önceki lemmadan yararlanarak tanımlanabilir. Böylece sonlu ötesi tümevarım süreci tamamlanır. Açıktır ki $\beta < \alpha < \kappa^+$ için $A_\beta \subseteq A_\alpha$ olur. Şimdi $S = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} A_\alpha$ olarak tanımlanırsa, kolayca görülür ki $|S| \leq \kappa^+$ gerçekleşir. $\text{kap}_Y S = \bar{S} \cap Y$ olduğundan, eğer $Y \subseteq \bar{S}$ ise kanıt tamamlanır. $t(X) \leq \kappa$ ve $\{\overline{A_\alpha} : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ X uzayında kapalı kümelerin artan ailesi olduğundan $\bigcup_{\alpha < \kappa^+} \overline{A_\alpha}$ kümesi kapalıdır. Böylece $\bar{S} = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} \overline{A_\alpha}$ olur. Eğer $q \in Y - \bar{S} \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $q \in Y$ elemanı var olsaydı, $q \notin \overline{A_\alpha}$ ($\forall \alpha < \kappa^+$) olup (2) koşulunun ikinci kısmından $q \notin V_\alpha$ olacak şekilde en az bir $V_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha$ ($\forall \alpha < \kappa^+$) elemanı bulunurdu. (2) koşulunun ilk kısmından $\{V_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ ailesinin $\bar{S}$ kümesi için bir açık örtülüş olduğu anlaşılır. Bu durumda X uzayı tıkız (dolayısıyla $\bar{S}$ kümesi tıkız) olduğundan sonlu sayıda $\beta_1 < \dots < \beta_n$ ordinal sayıları ve böylelikle $\{V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_n}\} \subseteq \{V_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ alt ailesi, $\bar{S}$ nin örtülüşü olacak şekilde vardır. $\mathcal{G} = \{V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_n}\}$ olarak tanımlanırsa $q \in Y - \bigcup \mathcal{G} \neq \emptyset$ olur; ancak bu durumda (3) koşulu nedeniyle

$$\emptyset \neq A_{\beta_n} \cap (Y - \bigcup \mathcal{G}) \subseteq (\bigcup \mathcal{G}) \cap (Y - \bigcup \mathcal{G}) = \emptyset$$

çelişkisi bulunur. Demek ki böyle bir q elemanı olmayıp $Y \subseteq \bar{S}$ gerçekleşir. ■

Sonuç III.7 Her tıkız Hausdorff, yetkin normal uzayın $\leq \aleph_1$ kardinaliteli bir π -tabanı vardır.

Kanıt. X tıkız Hausdorff, yetkin normal bir uzay ise kalıtımsal Lindelöf uzayı olur ve böylece

$$h\pi w(X) = hd(X) \leq (s(X))^+ \leq (hL(X))^+ \leq \aleph_0^+ = \aleph_1$$

bulunur. ■

Bu kısmın son teoremi *Cech ve Pospisil* tarafından kanıtlanan aşağıdaki ünlü teoremdir. Bu teorem ile kısım III.6 da kanıtlanacak olan Arhangel'skii Teoremi'nden

yararlanılarak birinci sayılabilir, tıkHz Hausdorff uzayların kardinalitesi hakkında önemli sonuçlar görülecektir.

Teorem III.9 (Cech-Pospisil Teoremi): $\chi(p, X) \geq \kappa$ ($\forall p \in X$) gerçekleyen bir X tıkHz Hausdorff uzay için $|X| \geq 2^\kappa$ geçerlidir.

Kanıt. Bu iddia κ -düzeyli ağaç tanımlanarak ispatlanabilir, şöyle ki her $\alpha < \kappa$ düzeyindeki her bir nokta iki defa dallanacak. Böylece elde edilen ağaç üzerindeki her yol X uzayında boştan farklı, azalan kapalı kümeler dizisi tanımlar. Farklı yollar üzerinde farklı noktalar bulunup bu yolların sayısı 2^κ dır. (Bu inşanın sayılabilir versiyonuna **Cantor ağacı** denir.) Ayrıntılar aşağıdaki gibi yapılır: ${}^\alpha 2$ ile $\alpha = [0, \alpha)$ kümesinden $\{0, 1\}$ kümesine tanımlanan tüm fonksiyonların kümesi gösterilmek üzere, her bir $\alpha < \kappa$ için $\{K_f : f \in {}^\alpha 2\}$ boştan farklı kapalı kümeler ailesi aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde tanımlanabilir:

- (1) Eğer $f \in {}^\alpha 2$ ve $\beta < \alpha$ ise $K_f \subseteq K_{(f|_\beta)}$,
- (2) Eğer $f, g \in {}^\alpha 2$ ve $f \neq g$ ise $K_f \cap K_g = \emptyset$.

Her bir $\alpha < \kappa$ için yukarıdaki koşullara sahip $\{K_f : f \in {}^\alpha 2\}$ ailelerinin belirlendiği varsayıldığında, her $f \in {}^\kappa 2$ için $K_f = \bigcap_{\alpha < \kappa} K_{(f|_\alpha)}$ olarak tanımlansın. (1) koşulu nedeniyle $\{K_{(f|_\alpha)} : \alpha < \kappa\}$, X uzayında boştan farklı kapalı kümelerin *azalan* dizisidir, böylece X uzayının tıkHzlığından $K_f \neq \emptyset$ dur. Eğer $f, g \in {}^\kappa 2$ ve $f \neq g$ ise (2) koşulu nedeniyle $K_f \cap K_g = \emptyset$ olur. Sonuç olarak $|{}^\kappa 2| = 2^\kappa$ olup $|X| \geq 2^\kappa$ gerçekleştiği kolayca görülür. Şimdi $\{K_f : f \in {}^\alpha 2\}$ ($\forall \alpha < \kappa$) ailelerinin inşası iki durum altında yapılacaktır.

Durum 1: $\kappa = \aleph_0$ olsun. Bu durumda yukarıdaki iki koşula ek olarak '(3) her $f \in {}^\alpha 2$ için $\overset{o}{K}_f \neq \emptyset$ ' koşuluda eklensin. Sonlu tümevarımla ispat tamamlanır. Gerçekten, $\alpha = 0$ ise ${}^0 2 = \{\emptyset\}$ olup $K_\emptyset = X$ alınır. Herhangi bir $0 < \alpha < \kappa$ ordinali için $\{K_f : f \in {}^\beta 2\}$ ($\forall \beta < \alpha$) aileleri (1)-(3) koşulları gerçekleştirilecek şekilde önceki aşamalarda belirlenmiş olsun. $\alpha = \gamma + 1$ için $g \in {}^\gamma 2$ ve $f_0, f_1 \in {}^\alpha 2$ öyle ki $(f_0|_\gamma) = (f_1|_\gamma) = g$

olmak üzere $f_0(\gamma) = 0$, $f_1(\gamma) = 1$ olsun. Amaç K_{f_0} , K_{f_1} boştan farklı kapalı kümelerini (1)-(3) koşulları sağlanacak şekilde tanımlamaktır. Bu amaçla (3)'e göre $\overset{o}{K}_g \neq \emptyset$ ve X uzayının hiç yalıtılmış noktası *bulunmadığından* (çünkü hipotez gereği her $p \in X$ için $\chi(p, X) \geq \kappa$) boştan farklı açık V_0 , V_1 kümeleri, $\overline{V_0} \cup \overline{V_1} \subseteq K_g$ ve $\overline{V_0} \cap \overline{V_1} = \emptyset$ gerçekleşecek şekilde bulunabilir. Böylece $K_{f_i} = \overline{V_i}$ ($i = 1, 2$) almak yeterlidir.

Durum 2: $\kappa > \aleph_0$ olsun. Bu durumda da (1)-(2) koşullarına ek olarak '(3) her $f \in {}^\alpha 2$ için K_f kümesi $\leq |\alpha| + \aleph_0$ sayıda açık kümenin arakesiti olarak yazılabilir' koşulu eklensin. $\alpha = 0$ için ${}^\alpha 2 = \{\emptyset\}$ olup $K_\emptyset = X$ alınır. Keyfi sabit bir $0 < \alpha < \kappa$ ordinal sayısı için $\{K_f : f \in {}^\beta 2\}$ ($\forall \beta < \alpha$) aileleri (1)-(3) koşulları sağlanacak şekilde önceki aşamalarda tanımlanmış olsun. Eğer α bir *limit ordinal* ise her bir $f \in {}^\alpha 2$ için $K_f = \bigcap_{\beta < \alpha} K_{(f|_\beta)}$ almak yeterlidir; çünkü (1) ve (3) koşullarının gerçekleştiği açık olup farklı $f, g \in {}^\alpha 2$ için $f(\gamma) \neq g(\gamma)$ olacak şekilde en az bir $\gamma < \alpha$ ordinali vardır. Tümevarımın $\gamma+1$ ($< \alpha$ çünkü α limit ordinal) inci adımı gereği $K_{(f|_{\gamma+1})} \cap K_{(g|_{\gamma+1})} = \emptyset$ böylece $K_f \cap K_g = \bigcap_{\beta < \alpha} K_{(f|_\beta)} \cap \bigcap_{\beta < \alpha} K_{(g|_\beta)} \subseteq K_{(f|_{\gamma+1})} \cap K_{(g|_{\gamma+1})} = \emptyset$ olup (2) sağlanır. Şimdi $\alpha = \xi + 1$ ardıl ordinali için $g \in {}^\xi 2$ ve $f_0, f_1 \in {}^\alpha 2$ öyle ki $(f_0|_\xi) = (f_1|_\xi) = g$ olmak üzere, $f_0(\xi) = 0$, $f_1(\xi) = 1$ biçiminde tanımlansın. Amaç K_{f_0} , K_{f_1} boştan farklı kapalı kümelerini (1)-(3) koşulları sağlanacak şekilde tanımlamaktır. Her bir $p \in X$ için $\chi(p, X) \geq \kappa$ ve K_g kümesi $< \kappa$ sayıda açık kümenin arakesiti olduğundan $|K_g| > 1$ olmalıdır, (aksi halde $K_g = \{x\}$, $x \in X$ olsaydı $\chi(x, X) = \psi(x, X) < \kappa$ olurdu) böylece Önerme III.1 nedeniyle G_0, G_1 ayrık $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı kümeleri, $G_0 \cap K_g \neq \emptyset$, $G_1 \cap K_g \neq \emptyset$ gerçekleşecek şekilde vardır. Sonuçta $K_{f_i} = G_i \cap K_g$ ($i = 1, 2$) alınarak sonlu ötesi tümevarımla kanıt tamamlanır. ■

Örnek III.1 $\aleph_0$ kardinaliteli N kesikli uzayının Cech-Stone tıkızlaşması βN olmak üzere, aşağıdaki önermeler doğrudur:

(a) $\phi \in \{d, c, L, e, wc, \pi w, \pi \chi\}$ ise $\phi(\beta N) = \aleph_0$ olur.

(b) $\phi \in \{s, hd, hL, nw, w, h\pi w, psw, \Delta, t, h\pi \chi, \psi, \chi\}$ ise $\phi(\beta N) = 2^{\aleph_0}$ olur.

(c) $|\beta N| = o(\beta N) = 2^{\aleph_0}$ eşitlikleri geçerlidir.

(d) βN uzayında her sonsuz kapalı küme $2^{\aleph_0}$ kardinalitelidir.

Çözüm. N kümesi βN uzayının bir yoğun alt kümesi olduğundan βN uzayı tıkkız ve ayrılabilir bir uzaydır dolayısıyla $d(\beta N) = c(\beta N) = L(\beta N) = wc(\beta N) = \aleph_0$ gerçekleşir. Ayrıca $\mathcal{B} = \{\{n\} : n \in N\}$ ailesi, βN uzayının bir π -tabanı olduğundan $\aleph_0 \leq \pi\chi(\beta N) \leq \pi w(\beta N) \leq |\mathcal{B}| = \aleph_0$ olup (a) şıkki kanıtlanır.

Her X düzenli uzayı için $w(X) \leq 2^{d(X)}$ olduğundan $w(\beta N) \leq 2^{\aleph_0}$ dır. $\beta N \setminus N$ kümesi N üzerinde tanımlanan tüm erkin büyük süzgeçlerin (Tüm üyelerinin arakesiti boş olan büyük süzgeçlere **erkin büyük süzgeç** denir.) kümesi olduğundan, $\beta N \setminus N$ alt uzayının $2^{\aleph_0}$ kardinaliteli gözenekli ailesi vardır. Gerçekten, herhangi bir $A \subseteq N$ için $A^* = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \in \beta N \setminus N, A \in \mathcal{M}\}$ olarak tanımlanırsa, $\{A^* : A \subseteq N\}$ ailesinin $\beta N \setminus N$ uzayının bir tabanı olduğu görülür. (Çünkü βN uzayının açık kümelerinin, $U \subseteq N$ olmak üzere $U \cup \{\mathcal{M} \in \beta N \setminus N : \exists A \in \mathcal{M}, A \subseteq U\}$ biçiminde olduğu biliniyor.) Tarski Lemması'na göre N 'nin alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ ailesi, $|A| = \aleph_0$ ($\forall A \in \mathcal{A}$), farklı $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ için $|A_1 \cap A_2| < \aleph_0$ ve $|\mathcal{A}| = 2^{\aleph_0}$ koşulları gerçekleşecek şekilde vardır. Böylece elde edilen $\{A^* : A \in \mathcal{A}\}$ ailesi, $\beta N \setminus N$ uzayının gözenekli ailesi olur. (Çünkü farklı $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ elemanları için $\mathcal{M} \in A_1^* \cap A_2^*$ sağlayan bir $\mathcal{M} \in \beta N \setminus N$ elemanı var olsaydı, tanımları gereği $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}$ süzgeç olduğundan $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}$ olurdu; ancak $A_1 \cap A_2$ sonlu örneğin $A_1 \cap A_2 = \{n_1, \dots, n_m\} \subseteq N$ ve $\mathcal{M}$ erkin büyük süzgeç olduğundan $\bigcap \mathcal{M} = \emptyset$ dur. Bu durumda $n_i \notin S_i$ ($i = 1, \dots, m$) olacak şekilde $S_i \in \mathcal{M}$ elemanları bulunur ve $\mathcal{M}$ süzgeç olduğundan $\emptyset = A_1 \cap A_2 \cap S_1 \cap \dots \cap S_m \in \mathcal{M}$ çelişkisi elde edilir.) Böylece saçılım sayısı monoton olduğundan $s(\beta N) = hc(\beta N) \geq 2^{\aleph_0}$ olup sonuçta $s(X) = w(X) = 2^{\aleph_0}$ bulunur. Öte yandan $\chi(\mathcal{M}_0, \beta N) < 2^{\aleph_0}$ gerçeklemeyen bir $\mathcal{M}_0 \in \beta N$ elemanı şu şekilde tanımlanabilir: Hausdorff Lemması nedeniyle N kümesinin alt kümelerinin $|\mathcal{G}| = 2^{\aleph_0}$ gerçekleyen bir $\mathcal{G}$ bağımsız ailesi vardır. Bu

durumda

$$\mathcal{L} = \{N - \bigcap \mathcal{V} : \mathcal{V} \subseteq \mathcal{G}, |\mathcal{V}| \geq \aleph_0\}$$

olarak tanımlanırsa $\mathcal{G} \cup \mathcal{L}$ ailesi sonlu arakesit özelliğine sahip olur. Örneğin $A \in \mathcal{G}$ ve $(N - \bigcap \mathcal{V}) \in \mathcal{L}$ ($\mathcal{V} \subseteq \mathcal{G}, |\mathcal{V}| \geq \aleph_0$) elemanları için $A \cap (N - \bigcap \mathcal{V}) \supseteq A \cap (N - V) \neq \emptyset$ gerçekleşir. (Burada $V \in \mathcal{V}$ keyfi bir eleman olup $\mathcal{G}$ ailesinin bağımsızlığından yararlanılmıştır.) Böylece $\mathcal{G} \cup \mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}_0$ olacak şekilde bir $\mathcal{M}_0$ büyük süzgeci vardır. Üstelik bu süzgeç *erkindir* çünkü $|\mathcal{V}| \geq \aleph_0$ gerçekleyen herhangi bir $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{G}$ alt ailesi için $(N - \bigcap \mathcal{V}) \in \mathcal{L}$ olup

$$\bigcap \mathcal{M}_0 \subseteq \bigcap (\mathcal{G} \cup \mathcal{L}) = \bigcap \mathcal{G} \cap \bigcap \mathcal{L} \subseteq \bigcap \mathcal{V} \cap (N - \bigcap \mathcal{V}) = \emptyset$$

gerçeklenir. $\mathcal{G} \cup \mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}_0$ olduğundan $\mathcal{M}_0 \in \beta N$ elemanının $< 2^{\aleph_0}$ kardinaliteli yerel tabanı *yoktur*. Sonuç olarak

$$2^{\aleph_0} \leq \chi(\mathcal{M}_0, \beta N) \leq \chi(\beta N) \leq w(\beta N) = 2^{\aleph_0}$$

bulunur. βN uzayı tıkHz olduğundan $psw(\beta N) = nw(\beta N) = \Delta(\beta N) = w(\beta N) = 2^{\aleph_0}$, $\chi(\beta N) = \psi(\beta N) = 2^{\aleph_0}$ ve $2^{\aleph_0} = s(\beta N) \leq hL(\beta N) \leq w(\beta N) = 2^{\aleph_0}$ olur. Ayrıca $t(\beta N) = 2^{\aleph_0}$ ($= h\pi\chi(\beta N)$) olduğu Van Mill tarafından [2] de gösterilmiştir. Böylece (b) şıkkının ispatı tamamlanmış olur.

N kümesi üzerinde tanımlanan tüm erkin büyük süzgeçlerin sayısının $2^{2^{\aleph_0}}$ olduğu Hausdorff Lemması'nın kanıtından hemen sonra görülmüştü. Böylece

$$2^{2^{\aleph_0}} = |\beta N| \leq o(\beta N) \leq 2^{w(\beta N)} = 2^{2^{\aleph_0}}$$

bulunur. Herhangi bir $\kappa \geq \aleph_0$ kardinaliteli kesikli $D(\kappa)$ uzayı için $|\beta D(\kappa)| = 2^{2^\kappa}$, $w(\beta D(\kappa)) = 2^\kappa$ olduğu Teorem III.33'de Hewitt-Marczewski-Pondiczery Teoremi'nden yararlanarak kanıtlanacaktır.

(d) şıkkının ispatı için βN nin her *sonsuz kapalı* kümesinin, βN ile eşyapılı (homeomorf) bir alt kümesinin varlığını göstermek yeterlidir. $F \subseteq \beta N$ sonsuz bir kapalı alt küme

olsun. F kümesinin elemanlarının $a_1, a_2, \dots$ dizisi ve βN uzayının açık kümelerinin $V_1, V_2, \dots$ dizisi $a_i \in V_i$ ($\forall i \in N$), $i \neq j$ için $V_i \cap V_j = \emptyset$ gerçekleşecek şekilde, sonlu tümevarımla, tanımlanabilir. $A = \{a_1, a_2, \dots\} \subseteq F$ ve $g : A \longrightarrow [0, 1]$ keyfi bir sürekli fonksiyon olsun. $g_0 : N \longrightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonu (kesikli uzaydan herhangi bir uzaya tanımlanan tüm fonksiyonlar süreklidir) aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$g_0(n) = \begin{cases} g(a_i) & ; \quad n \in N \cap V_i \text{ ise} \\ 0 & ; \quad n \in N - \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \text{ ise} \end{cases}$$

$G_0 : \beta N \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu, g_0 fonksiyonunun βN uzayına sürekli genişlemesi, kısacası $G_0|N = g_0$ olsun. N kümesi, βN uzayında yoğun olduğundan her $x \in \overline{V_i} = \overline{N \cap V_i}$ için $G_0(x) = g(a_i)$ olur, böylece $G_0|A = g$ dir. Demek ki her $g : A \longrightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonunun $G = G_0|A : A \longrightarrow [0, 1]$ olacak şekilde bir sürekli genişlemesi vardır. Sonuç olarak $\overline{A} = \beta A$ olur. Ayrıca A ile N eşyapılı olduğundan, $\beta A = \overline{A} \subseteq F$ alt kümesiyle βN de eşyapılıdır. ■

(d) sıkı Hausdorff Lemması'ndan yararlanarak şöyle de kanıtlanabilirdi. Yukarıda görüldüğü gibi herhangi bir sayılabilir kesikli $E \subseteq \beta N$ alt kümesi için $|\overline{E}| \geq 2^{2^{\aleph_0}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $B \subseteq E$ ise $\overline{B} \cap (E - B) = \emptyset = B \cap \overline{(E - B)}$ olur, ayrıca B ve $E - B$ kümeleri kesikli E alt uzayında tümüyle ayrılmış kümelerdir. Böylece βN 'nin sayılabilir üyeli her alt kümesi üzerinde tanımlanan sınırlı ve sürekli fonksiyonların βN uzayına sürekli genişlemesi olduğundan, ünlü Urysohn Genişleme Teoremi'nden (bkz. [5]) yararlanarak $\overline{B} \cap \overline{(E - B)} = \emptyset$ bulunur. $\mathcal{A} = \{A_\alpha : 0 \leq \alpha < 2^{\aleph_0}\}$, E kümesinin alt kümelerinin bir bağımsız ailesi olsun. Bu durumda her bir $f \in {}^{2^{\aleph_0}}2$ fonksiyonu için

$$A(f, \alpha) = \begin{cases} A_\alpha & ; \quad f(\alpha) = 0 \text{ ise} \\ E - A_\alpha & ; \quad f(\alpha) = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan kümelerin $\mathcal{A}_f = \{A(f, \alpha) : 0 \leq \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ ailesi göz önüne alınsın.

$\mathcal{A}_f$ ailesi sonlu arakesit özelliğine sahip ve βN uzayı tıkız olduğundan $x_f \in \bigcap_{\alpha < 2^{\aleph_0}} \overline{A(f, \alpha)}$ olacak şekilde en az bir $x_f \in \beta N$ elemanı vardır. Üstelik $f, g \in {}^{2^{\aleph_0}}2$ ve $f \neq g$ ise bir

$\alpha < 2^{\aleph_0}$ ordinal sayısı için $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ olur. Bu durumda $A(f, \alpha) = A_\alpha$, $A(g, \alpha) = E - A_\alpha$ alınır, $\overline{A(f, \alpha)} \cap \overline{A(g, \alpha)} = \emptyset$ olur ve böylece $x_f \neq x_g$ bulunur. Sonuç olarak $2^{\aleph_0} \leq |\{x_f : f \in {}^{2^{\aleph_0}}2\}| \leq |\overline{E}|$ gerçekleşir.

III.2 Metriklenebilir Uzaylar Üzerinde Tanımlı Bazı

Kardinal Değişmezlerin Özellikleri

Bu kısımda öncelikle metriklenebilir uzaylarda bazı kardinal değişmezlerin temel özellikleri görülecektir. Daha sonra herhangi bir X topolojik uzayı üzerinde tanımlanan tüm sürekli ve reel değerli fonksiyonların kümesi $C(X)$ 'in kardinalitesi için bazı sınırlar belirlenecektir.

Metriklenebilir uzaylar üzerinde tanımlanan bazı kardinal değişmezlerin temel özellikleri, aşağıdaki teoremden görülmektedir; ancak gerekli olduğundan öncelikle bazı tanımlar hatırlanmalıdır. Herhangi bir X topolojik uzayının boştan farklı alt kümelerinin bir $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesine, (farklı $\alpha, \beta \in \Lambda$ elemanları için $A_\alpha \neq A_\beta$ varsayılır) ancak ve yalnız her bir $x \in X$ noktasının açık komşuluklarının ailesi $\mathcal{B}_x$ olmak üzere,

$$\text{koş} : \forall x \in X, \exists B_x \in \mathcal{B}_x, \exists \Lambda_x \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda), B_x \cap A_\alpha = \emptyset \ (\forall \alpha \in \Lambda - \Lambda_x)$$

koşulunu gerçeklerse X uzayında **yerel sonlu aile** denir. $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesine, aşağıdaki (eşdeğer oldukları kolayca görülebilen) koşullardan herhangi birisini (ve sonuçta üçünü birden) gerçeklerse X uzayında **kesikli aile** denir.

$$\text{koş 1: } \forall x \in X, \exists \alpha_x \in \Lambda, x \in X - \overline{\bigcup_{\alpha \neq \alpha_x} A_\alpha};$$

$$\text{koş 2: } \forall x \in X, \exists (\alpha_x, B_x) \in \Lambda \times \mathcal{B}_x, B_x \cap \bigcup_{\alpha \neq \alpha_x} A_\alpha = \emptyset;$$

$$\text{koş 3: } \mathcal{A} \text{ yerel sonludur ve } \alpha, \beta \in \Lambda, \alpha \neq \beta \text{ ise } \overline{A_\alpha} \cap \overline{A_\beta} = \emptyset \text{ olur.}$$

Her bir $n < \aleph_0$ için $\mathcal{A}_n$ ailesi kesikli (yerel sonlu) ise $\mathcal{A} = \bigcup_{n < \aleph_0} \mathcal{A}_n$ ailesine σ -kesikli aile (σ -yerel sonlu aile) denir. Ünlü Bing Metriklenebilir Teoremi'nden

(bkz. [4]) her metriklenabilir uzayın bir σ -kesikli tabanının (dolayısıyla bir σ -yerel sonlu tabanının) var olduğu bilinmektedir.

Tanım III.1 Bir X uzayının açık kümelerinin yerel sonlu ailelerinin kardinalitelerinin supremumuna X uzayının **sözde tıklık sayısı** denir ve bu sayı $p(X)$ ile gösterilir.

Kısacası

$$p(X) = \sup\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}, X \text{ uzayında açıkların bir yerel sonlu ailesi}\} + \aleph_0$$

olarak tanımlanır.

Sözde tıklık bir X uzayı için $p(X) = \aleph_0$ olduğu bilinmektedir. Öte yandan herhangi bir X uzayı için $p(X) \leq wc(X) \leq c(X)$ geçerlidir. Gerçekten $\mathcal{U}$, X uzayının açık kümelerinin herhangi bir yerel sonlu ailesi ve $\mathcal{V}$ de her üyesi $\mathcal{U}$ ailesinin sonlu sayıda üyesiyle kesişen bir açık örtülüş olsun. ($\mathcal{U}$ ailesi yerel sonlu olduğundan bu tür örtülüşler bulunabilir.) $wc(X)$ in tanımı gereği $\mathcal{V}$ örtülüşünün bir $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ alt ailesi, $|\mathcal{W}| \leq wc(X)$ ve $\bigcup \mathcal{W} = X$ olacak şekilde vardır. Bu durumda $\mathcal{U}(W) = \{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\}$ ($\forall W \in \mathcal{W}$) aileleri sonlu olup $\mathcal{U} = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} \mathcal{U}(W)$ gerçekleşir. Böylece $|\mathcal{U}| \leq wc(X)$ ve sonuçta $p(X) \leq wc(X)$ bulunur. Öte yandan $c(X) = \kappa$ olsun. X uzayının herhangi bir $\mathcal{V}$ açık örtülüşü için Önerme II.1 nedeniyle bir $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}$ alt ailesi, $|\mathcal{G}| \leq \kappa$ ve $X = \bigcup \mathcal{V} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{G}}$ gerçekleşecek şekilde vardır. Böylece $wc(X) \leq \kappa$ bulunur.

X sonlu bir metriklenebilir uzay olduğunda, bir kesikli uzay olacağından bu uzay üzerinde tanımlı kardinal değişmezlerin incelemeleri kolaydır dolayısıyla X uzayı sonsuz noktalı varsayılacaktır.

Teorem III.10 Herhangi bir sonsuz metriklenabilir bir X uzayı için aşağıdaki önermeler doğrudur:

$$(a) \psi(X) = t(X) = \pi\chi(X) = \chi(X) = psw(X) = \Delta(X) = \aleph_0;$$

- (b) $w(X) \leq |X| \leq (w(X))^{\aleph_0}$;
- (c) $w(X) = nw(X) = \pi w(X) = hd(X) = hL(X) = s(X) = L(X) = d(X) = c(X) = e(X) = wc(X) = p(X)$;
- (d) X uzayında $c(X)$ kardinaliteli bir gözenekli aile vardır;
- (e) $o(X) = 2^{w(X)}$ dir.

Kanıt. X uzayını tanımlayan topoloji τ olsun. (X, τ) uzayı *metriklenebilir* olduğundan X kümesi üzerinde tanımlı bir ρ metriği, ρ nun ürettiği topoloji τ_ρ olmak üzere τ ile τ_ρ denk olacak şekilde vardır. $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $B_x(\varepsilon) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\}$ olarak tanımlanan kümeye x noktasının ε -yarıçaplı açık yuvarı (ya da ε -yarıçaplı açık komşuluğu) denir. x noktasının $\{B_x(\frac{1}{n})\}_{n=1}^\infty$ açık komşuluklar ailesi, (X, τ) uzayında x noktası için bir yerel taban tanımlar, böylece her bir $x \in X$ için $\chi(x, X) = \aleph_0$ olup $\chi(X) = \sup_{x \in X} \chi(x, X) = \aleph_0$ bulunur. Demek ki her metriklenebilir uzay birinci sayılabiliridir. Öte yandan $psw(X) = \Delta(X) = \aleph_0$ olduğu bu kardinal değişmezler tanımlanırken görüldüğü ve $\max\{\psi(X), t(X), \pi\chi(X)\} \leq \chi(X) = \aleph_0$ olduğu için (a) şikkının kanıtlaması tamamlanır.

Teorem II.8(a)'dan $w(X) \leq \chi(X)$. $|X| = \aleph_0$. $|X| = |X|$ bulunur. X uzayının $|\mathcal{B}^*| \leq w(X)$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}^*$ tabanının, $\chi(X) = \aleph_0$ olduğundan, her bir $x \in X$ için $\{x\} = \bigcap \mathcal{B}_x$, $|\mathcal{B}_x| \leq \aleph_0$ olacak şekilde bir $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{B}^*$ alt ailesi vardır. Böylece $\varphi(x) = \mathcal{B}_x$ biçiminde tanımlanan $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}_{\leq \aleph_0}(\mathcal{B}^*)$ fonksiyonu bire-bir olup $|X| \leq |\mathcal{B}^*|^{\aleph_0} \leq (w(X))^{\aleph_0}$ bulunur.

$\mathcal{B} = \bigcup_{n < \aleph_0} \mathcal{B}_n$, X uzayının, ünlü Bing Metriklenebilme Teoremi nedeniyle var olan bir σ -kesikli tabanı olsun. (c) şikkının kanıtlanması için $w(X) \leq c(X)$, $w(X) \leq e(X)$ ve $L(X) \leq p(X)$ gerçekleştiğini göstermek (ters eşitsizlikler açıktır) yeterlidir. $c(X) = \kappa \geq \aleph_0$ olsun. Her $n < \aleph_0$ için $\mathcal{B}_n$ ailesi kesikli olduğundan $|\mathcal{B}_n| \leq \kappa$ ve böylece $w(X) \leq |\mathcal{B}| \leq \kappa$ olur. Benzer şekilde $w(X) \leq e(X)$ bulunur. Ünlü Stone Teoremi'ne göre (bkz. [4]) bir metriklenebilir uzayın her açık örtülüğünün yerel sonlu ve σ -kesikli

açık incelmeleri vardır. Bu durumda X uzayının herhangi bir $\mathcal{G}$ açık örtülüşünün yerel sonlu ve σ -kesikli bir $\mathcal{V}$ açık incelmeleri, $|\mathcal{V}| \leq p(X)$ olacak şekilde vardır. $\mathcal{V}, \mathcal{G}$ nin bir incelmeleri olduğundan her bir $V \in \mathcal{V}$ için $V \subseteq U_V$ gerçekleyen $U_V \in \mathcal{G}$ elemanları vardır. Bu elemanlardan *tek türlü seçimle* oluşturulan $\{U_V \in \mathcal{G} : V \in \mathcal{V}, V \subseteq U_V\} \subseteq \mathcal{G}$ alt ailesi bir alt örtülüş tanımlar ve böylece $L(X) \leq |\{U_V \in \mathcal{G} : V \in \mathcal{V}, V \subseteq U_V\}| \leq p(X)$ bulunur. (Daha genel olarak bir Y yantıkız (parakompakt) uzayı için $L(Y) = p(Y)$ geçerlidir.)

(d) şıkkının daha genel durumu bir sonraki bölümde kanıtlanacaktır. Genel olarak herhangi bir Y uzayının Suslin sayısı $c(Y)$, bir *tekil kardinal sayı* ise Y uzayında $c(Y)$ kardinaliteli en az bir gözenekli aile tanımlanabilir. Şimdi X metriklenebilir uzayı için $c(X) = \kappa$ (dolayısı ile $w(X) = \kappa$) olsun. Her *sonsuz* Hausdorff uzayının $\aleph_0$ kardinaliteli bir gözenekli ailesi bulunduğundan $\kappa > \aleph_0$ varsayılabilir. (Gerçekten $\kappa = \aleph_0$ ise sonsuz T_2 uzaylarında böyle bir aile şu temel bilgiden yararlanarak oluşturulabilir: **Temel Bilgi:** Sonsuz noktalı her T_2 uzayında en az bir sonsuz noktalı yoğun *olmayan* açık küme vardır. Kısacası Y sonsuz noktalı T_2 uzayı ise bu uzayda $x_0 \notin \overline{G_0}$ olacak biçimde bir $x_0 \in Y$ noktası ile sonsuz noktalı $G_0 \subseteq Y$ açık kümesi vardır. Herhangi bir $x \in Y$ noktasının açık komşuluklar ailesi $\mathcal{B}_x$ ile gösterilmek üzere, farklı $x_1, y_1 \in Y$ noktaları alındığında $y_1 \notin \overline{B_{x_1}}$ olacak biçimde bir $B_{x_1} \in \mathcal{B}_{x_1}$ komşuluğu bulunur, üstelik B_{x_1} ve $Y - \overline{B_{x_1}}$ açık kümelerinden *en az birisi* sonsuz elemanlıdır. (Çünkü her ikisinde sonlu olsaydı, özellikle B_{x_1} kapaçık (hem kapalı hem de açık) olur, üstelik $Y - \overline{B_{x_1}}$ ($= Y - B_{x_1}$) sonlu elemanlı varsayıldığından $Y = B_{x_1} \cup (Y - B_{x_1})$ sonlu elemanlı olurdu!) Şimdi eğer B_{x_1} sonsuz noktalı ise G_0 olarak B_{x_1} ve x_0 olarak y_1 alınır, yok eğer $Y - \overline{B_{x_1}}$ sonsuz elemanlı ise, bu kez G_0 olarak $Y - \overline{B_{x_1}}$ ve x_0 olarak x_1 alınarak $x_0 = x_1 \in B_{x_1} \subseteq \overline{B_{x_1}}$ nedeniyle $x_0 \notin (Y - \overline{B_{x_1}}) = \overline{(Y - B_{x_1})}$ gözlenerek istenenler gerçekleşir. Bu temel bilgi ile tümevarım ilkesi birlikte kullanılırsa, her $n \in \mathbb{N}$ için X uzayında $G_n \subseteq G_{n-1}$ ve $\aleph_0 \leq |G_n|$ gerçekleyen G_n açık kümeleriyle $x_n \in G_{n-1} - \overline{G_n}$

noktaları kolayca tanımlanır, çünkü varlığı temel bilgide görülen G_0 açık alt uzayı da bir T_2 uzayı olduğundan (G_0 açık alt uzayının tüm açıklarının Y ana uzayında da açık olduğu biliniyor) temel bilginin gereği olarak öyle sonsuz noktalı $G_1 \subseteq G_0$ açık kümesi ile $x_1 \in G_0$ noktası vardır ki $x_1 \notin \text{kap}_{G_0} G_1 = \overline{G_1} \cap G_0$ kısacası $x_1 \in G_0 - \overline{G_1}$ gerçekleşir. Temel bilgi şimdi sonsuz noktalı G_1 açık alt uzayına uygulanarak $G_2 \subseteq G_1$ gerçekleyen sonsuz noktalı G_2 açık kümesiyle $x_2 \in G_1 - \overline{G_2}$ gerçekleyen x_2 elemanı belirlenerek işlem tümevarım yardımıyla sürdürülürse $G_n \subseteq G_{n-1}$ ($\forall n > 1$) gerçekleyip G_{n-1} alt uzayında yoğun *olmayan* sonsuz noktalı G_n açık kümeleri, onlar aracılığıyla $U_n = G_{n-1} - \overline{G_n}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) açık kümeleri ve $x_n \in U_n$ noktaları belirlenir. Kolayca farklı $n, m \in \mathbb{N}$ elemanları için $U_n \cap U_m = \emptyset$ olduğu görülür, böylece $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aranan aile olarak alınabilir.) Eğer $cf(\kappa) > \aleph_0$ ise bazı $n < \aleph_0$ değerleri için $|\mathcal{B}_n| = \kappa$ olur ve $\mathcal{B}_n$ kesikli aile olduğundan aranan gözenekli aile bulunmuş olur. Öte yandan $cf(\kappa) = \aleph_0$ ise κ bir *tekil kardinal* olup bu uzayda κ kardinaliteli gözenekli ailenin varlığı bir sonraki bölümde görülecektir.

$o(X) \leq 2^{w(X)}$ eşitsizliği her zaman geçerli olup (d) şıkından $|\mathcal{S}| = w(X)$ gerçekleyen bir $\mathcal{S}$ gözenekli ailesi vardır. Böylece $\varphi(S) = \bigcup S$ biçiminde tanımlanan $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{S}) \longrightarrow \{A : A \subseteq X \text{ açık}\}$ fonksiyonu *bire-bir* olduğundan $|\mathcal{P}(\mathcal{S})| = 2^{|\mathcal{S}|} \leq o(X) \leq 2^{w(X)} = 2^{|\mathcal{S}|}$ bulunur. Böylece (e) şıkkı kanıtlanmış olur. ■

Aşağıdaki teorem, *tam* metriklenebilir uzayların kardinalitesi hakkında bilgi verir. Benzer sonuçlar kısım III.5’de de görülecektir.

Teorem III.11 (*Schmidt-Stone Teoremi*): *X hiç yalıtılmış noktası bulunmayan ve tüm boştan farklı açık kümeleri $\geq \kappa$ ağırlıklı olan bir tam metriklenebilir uzay olsun. Bu durumda $|X| \geq \kappa^{\aleph_0}$ geçerlidir.*

Kanıt. Bu iddia $\aleph_0$ düzeyli ağaç inşa edilerek kanıtlanabilir, şöyle ki her $n < \aleph_0$ düzeyindeki her bir nokta κ farklı noktaya dallanacak, ağaç üzerinde yukarıya doğru çıkan her yol X uzayında boştan farklı kapalı kümelerin *azalan* bir dizisini tanımlar.

Farklı yollar, farklı noktalar içerir ve bu yolların sayısı $\kappa^{\aleph_0}$ dır. Ayrıntılar aşağıdaki gibi yapılır:

ρ , X üzerinde tanımlı ve X uzayını tanımlayan topolojiye denk topoloji tanımlayan bir *tam metrik* olmak üzere, her bir $n < \aleph_0$ için X uzayının boştan farklı açık kümelerinin bir $\{V_f : f \in {}^n\kappa\}$ ailesi, tümevarımla, aşağıdaki koşullar sağlanacak şekilde tanımlanabilir:

- (1) Her $f \in {}^n\kappa$ için $\text{cap}V_f = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in V_f\} \leq 1/n$,
- (2) Farklı $f, g \in {}^n\kappa$ elemanları için $\overline{V_f} \cap \overline{V_g} = \emptyset$,
- (3) Eğer $f \in {}^n\kappa$ ve $i < n$ ise $\overline{V_f} \subseteq V_{(f|i)}$.

Her $n < \aleph_0$ için $\{V_f : f \in {}^n\kappa\}$ ailelerinin belirlendiği varsayılırsa, her $f \in {}^{\aleph_0}\kappa$ fonksiyonu için $K_f = \bigcap_{n < \aleph_0} \overline{V_{(f|n)}}$ olarak tanımlansın. (1) ve (3) koşulları nedeniyle $\{\overline{V_{(f|n)}} : n < \aleph_0\}$, boştan farklı kapalı kümelerin *azalan* dizisidir, ayrıca $\lim_{n < \aleph_0} \text{cap}(\overline{V_{(f|n)}}) = \lim_{n < \aleph_0} \text{cap}(V_{(f|n)}) = 0$ olup X uzayı *tam* olduğundan ünlü Cantor Teoremi'ne göre (bkz:[4]) $K_f \neq \emptyset$ bulunur. Böylece (2) koşulundan $f, g \in {}^{\aleph_0}\kappa$ ve $f \neq g$ için $K_f \cap K_g = \emptyset$ ve sonuçta $|X| \geq |{}^{\aleph_0}\kappa| = \kappa^{\aleph_0}$ bulunur.

Şimdi $\{V_f : f \in {}^n\kappa\}$ ($\forall n < \aleph_0$) ailelerinin aranan koşullar gerçekleştirilecek biçimde bulunabildiği tümevarımdan yararlanılarak görülecektir. $n = 0$ durumunda ${}^n\kappa = \{\emptyset\}$ olup $V_\emptyset = X$ alınır. Keyfi bir $0 < n < \aleph_0$ için $\{V_f : f \in {}^i\kappa\}$ ($\forall i < n$) aileleri (1)-(3) koşulları sağlanacak şekilde belirlenmiş olsun. $g \in {}^{n-1}\kappa$ olmak üzere, her $\alpha < \kappa$ için $f_\alpha \in {}^n\kappa$ ($|{}^n\kappa| = \kappa$ olduğundan $\alpha < \kappa$ ordinalleriyle n den κ ya tanımlanan tüm fonksiyonların kümesi *bire-bir* eşlenebilir) fonksiyonları $(f_\alpha|n-1) = g$ ve $f_\alpha(n-1) = \alpha$ gerçekleştirilecek biçimde tanımlansın. Amaç $\{V_{f_\alpha} : 0 \leq \alpha < \kappa\}$ açık kümeler ailesini (1)-(3) koşulları sağlanacak şekilde tanımlamaktır. Hipotez gereği $w(V_g) \geq \kappa$ olduğundan V_g alt uzayında (dolayısı ile X ana uzayında) κ kardinaliteli gözenekli aile vardır. Örneğin $\{V_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa\}$ böyle bir aile olsun. Burada $\alpha \neq \beta$ için $\overline{V_\alpha} \cap \overline{V_\beta} = \emptyset$, $\text{cap}(V_\alpha) \leq 1/n$ ve $\overline{V_\alpha} \subseteq V_g$ ($\forall \alpha < \kappa$) varsayılabilir ve böylece $V_{f_\alpha} = V_\alpha$ ($\forall \alpha < \kappa$) almak yeterli olur. ■

Teorem III.12 (A.H.Stone): X tam metriklenebilir bir uzay ve $w(X) = \kappa$ ise $|X| = \kappa$ veya $|X| = \kappa^{\aleph_0}$ dir.

Kanıt. Teorem III.10(b)'den $\kappa \leq |X| \leq \kappa^{\aleph_0}$ olduğu biliniyor. $|X| > \kappa$ olduğu varsayılırsa, $\kappa^{\aleph_0} > \kappa$ olur. Herhangi bir $p \in X$ noktasını içeren tüm açık kümelerin ailesi τ_p ile gösterilmek üzere,

$$A = \{p \in X : \kappa < |B|, (\forall B \in \tau_p)\}$$

biçiminde tanımlansın. A , boştan farklı, kapalı ve A alt uzayının boştan farklı her açık kümesinin kardinalitesi $> \kappa$ dir. Gerçekten, eğer A kümesi boş olsaydı, her $p \in X$ noktasının en az bir B_p açık komşuluğu $|B_p| \leq \kappa$ gerçekleşecek biçimde var olurdu. Bu durumda $w(X) = L(X)$ ve $X = \bigcup_{p \in X} B_p$ olduğundan X uzayının $\{B_p\}_{p \in X}$ açık örtülüşünün bir $\{B_{p_\alpha}\}_{\alpha < \kappa}$ alt örtülüşü var olup $\kappa < |X| = \left| \bigcup_{\alpha < \kappa} B_{p_\alpha} \right| \leq \kappa \vee \sup\{|B_{p_\alpha}| : \alpha < \kappa\} = \kappa$ çelişkisi bulunurdu. Diğer iki iddia A kümesinin tanımından kolayca görülür. $\mu \leq \kappa < \mu^{\aleph_0}$ gerçekleyen μ kardinallerinin en küçüğü λ olsun. O halde A alt uzayının boştan farklı her açık kümesinin ağırlığı $\geq \lambda$ dir. (Gerçekten A uzayının boştan farklı bir V açık kümesi için $w(V) < \lambda$ olsaydı, $\kappa < |V| \leq (w(V))^{\aleph_0} \leq \kappa$ çelişkisi bulunurdu.) Sonuç olarak bir önceki teoremden yararlanarak $|A| \geq \lambda^{\aleph_0} \geq \kappa^{\aleph_0}$ ve böylece $|X| \geq \kappa^{\aleph_0}$ bulunur. ■

Sonuç III.8 $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ Öklid uzayında her sayılamaz kapalı küme $2^{\aleph_0}$ kardinalitelidir.

Herhangi bir X uzayından $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ Öklid uzayına tanımlanan tüm sürekli fonksiyonların kümesi $C(X)$, tüm sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi $C^*(X)$ ile gösterilir. $C(X)$ kümesi üzerinde, Kurotowski kapanış işlemcisi aracılığıyla, şöyle bir topoloji tanımlanabilir:

$$k : \mathcal{P}(C(X)) \longrightarrow \mathcal{P}(C(X)), k(A) = \{f \in C(X) : \exists \{f_n\}_{n=1}^\infty \in A^\omega, f_n \xrightarrow{\text{düzgün}} f\}$$

olacak biçimde tanımlanan k işlemcisi, $k(\emptyset) = \emptyset$, $A \subseteq k(A) = k(k(A))$, $k(A \cup B) = k(A) \cup k(B)$ koşullarını sağlar, kısacası bir Kurotowski kapanış işlemcisidir. Böylece $C(X)$ (benzer şekilde $C^*(X)$) üzerinde, her $A \subseteq C(X)$ için $kapA = \overline{A} = k(A)$ olacak biçimde bir τ topolojisi tanımlıdır. Bu şekilde tanımlanan τ topolojisine **düzgün yakınsaklık topolojisi** denilir. Bundan sonra kısalık amacıyla $C(X)$ ile (benzer biçimde $C^*(X)$ ile) düzgün yakınsaklık topolojisiyle donatılan $(C(X), \tau)$ ($(C^*(X), \tau)$) uzayı gösterilecektir. Herhangi bir $f \in C(X)$ noktası için

$$B_f(i) = \{g \in C(X) : |f(x) - g(x)| < \frac{1}{i} \ (\forall x \in X)\} \ (\forall i \in \mathbb{N})$$

kümeleri aracılığıyla tanımlanan $\{B_f(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ ailesi, f noktası için bir yerel taban belirler. (bkz:[4]) Bilindiği gibi $C(X)$ bir metriklenebilir uzaydır, dolayısıyla bu uzay üzerinde tanımlanan kardinal değişmezlerin temel özellikleri Teorem III.10'dan elde edilir. Örneğin $\chi(C(X)) = \aleph_0$ gerçekleşir. Öte yandan $C^*(X)$ kümesi üzerinde, her $f, g \in C^*(X)$ için

$$\rho^*(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}$$

biçiminde tanımlanan ρ^* uzaklık fonksiyonunun bir metrik olduğu bilinmektedir. $C^*(X)$ kümesi üzerinde tanımlanan ρ^* metriğine **düzgün yakınsaklık metriği** denir. Bu adlandırmanın gerekçesi, $C^*(X)$ kümesi üzerinde tanımlanan düzgün yakınsaklık topolojisi ile ρ^* metriğinin belirlediği topolojinin *denk* olmasıdır. (Bu son gerçek $B_f(i)$ yerel taban kümelerinin tanımından kolayca görülür.) Ayrıca $(C^*(X), \rho^*)$ uzayının bir *tam metrik uzay* olduğu bilinmektedir. Öte yandan $C^*(X)$, fonksiyonların bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. $C^*(X)$ vektör uzayı üzerinde, her $f \in C^*(X)$ için

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

biçiminde tanımlanan $\|\cdot\|_\infty$ uzaklık fonksiyonu bir *norm* olup bu norma **düzgün yakınsaklık normu** denir, üstelik $(C^*(X), \|\cdot\|_\infty)$ 'in bir *tam normlu* uzay (*Banach uzayı*)

olduğu bilinmektedir. Bu kısımda X uzayı üzerinde tanımlanan bazı kardinal değişmezler aracılığıyla $|C(X)|$ için sınırlar bulunacaktır. Bu tür sınırları belirlemek için ilk sistematik çalışmalar W.W.Comfort ve A.Hager tarafından [6] makalesinde yapılmıştır. Açık ki herhangi bir X uzayı için $c = 2^{\aleph_0} \leq |C(X)|$ gerçekleşir. Öte yandan herhangi bir X uzayı için $|C(X)| = |C^*(X)|$ eşitliği geçerlidir. (Çünkü her $f \in C(X)$ için $\arctan(f) \in C^*(X)$ olur, üstelik $f \neq g$ gerçekleyen her $f, g \in C(X)$ fonksiyon çifti için $\arctan(f) \neq \arctan(g)$ bulunur. Kısacası $\varphi : C(X) \longrightarrow C^*(X)$, $\varphi(f) = \arctan(f)$ biçiminde tanımlanan φ fonksiyonu bire-bir olup $|C(X)| \leq |C^*(X)|$ gerçekleşir, ters eşitsizlik apaçıktır.)

Teorem III.13 *Herhangi bir sonsuz X uzayı için $|C(X)| \leq 2^{d(X)}$ gerçekleşir. Ek olarak X uzayın ayrılabilirse $|C(X)| = 2^{\aleph_0}$ olur.*

Kanıt. Bilindiği gibi herhangi bir Y Hausdorff uzayı ve X uzayından Y uzayına tanımlanan herhangi iki sürekli f, g fonksiyonu için $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ kümesi, X uzayında kapalıdır. Dolayısıyla f, g sürekli fonksiyonları, X uzayının bir *yoğun* kümesinde aynı değerleri alıyorsa tüm X kümesi üzerinde de aynı değerleri alırlar. Kısacası X uzayının $|D| = d(X)$ gerçekleyen bir yoğun D kümesi için $f|_D = g|_D$ ise $f = g$ olur. O halde $\varphi : C(X) \longrightarrow {}^D\mathbb{R}$, $\varphi(f) = f|_D$ biçiminde tanımlanan φ fonksiyonu bire-bir olur ve böylece $|C(X)| \leq |{}^D\mathbb{R}| = (2^{\aleph_0})^{d(X)} = 2^{d(X)}$ aranan sonucu bulunur. İkinci iddia birincisinin kolay bir sonucudur. ■

Aşağıdaki teoremden Jones Lemması'nın daha genel hali görülmektedir.

Teorem III.14 *X bir normal uzay ise herhangi bir kapalı ve kesikli $D \subseteq X$ alt kümesi için $2^{|D|} \leq |C(X)|$ geçerlidir.*

Kanıt. Herhangi bir $E \subseteq D$ alt kümesi için E ve $D - E$, X uzayında ayrık kapalı kümelerdir. Bu nedenle Urysohn Teoremi'ne göre

$$f_E : X \longrightarrow [0, 1], \quad f_E(E) \subseteq \{1\}, \quad f_E(D - E) \subseteq \{0\}$$

koşullarını gerçekleyen bir sürekli f_E fonksiyonu vardır. Bu durumda $\Psi : \mathcal{P}(D) \longrightarrow C(X), \Psi(E) = f_E$ biçiminde tanımlanan Ψ fonksiyonu *bire-bir* olduğundan (Çünkü $E_1 - E_2 \neq \emptyset$ gerçekleyen herhangi $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(D)$ çifti için $f_{E_1} = f_{E_2}$ olsaydı, herhangi bir $x \in E_1 - E_2$ için $1 = f_{E_1}(x) = f_{E_2}(x) = 0$ çelişkisi bulunurdu.) $|\mathcal{P}(D)| = 2^{|D|} \leq |C(X)|$ sonucu bulunur. ■

Herhangi bir *sonsuz* B tam Bool cebri için $|B| = |B|^{\aleph_0}$ olduğunu ilk olarak R.S.Pierce [7] makalesinde kanıtlamıştır. Böylece herhangi bir X sonsuz Hausdorff uzayının tüm düzenli açıklarının kümesi $RO(X)$, bir tam Bool cebri olduğundan

$$|RO(X)| = |RO(X)|^{\aleph_0}$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlikten yararlanarak aşağıdaki yararlı teorem kanıtlanacaktır. Bilindiği gibi $f \in C(X)$ olmak üzere $f^{-1}(0)$ formundaki kümeler X uzayının **sıfır kümeleri** (ya da **fonksiyonel kapalı kümeleri**) ve $X - f^{-1}(0)$ formundaki kümeler X uzayının **tümleyen sıfır kümeleri** (ya da **fonksiyonel açık kümeleri**) denir.

Teorem III.15 *Herhangi bir X sonsuz Hausdorff uzayı için $|C(X)| \leq |RO(X)|$ gerçektir.*

Kanıt. Her bir $f \in C(X)$ fonksiyonuna karşılık f^* fonksiyonu, $f^* : \mathbb{Q} \longrightarrow RO(X)$, $f^*(r) = \overline{(f^{-1}((- \infty, r)))}^o$ gerçekleştirilecek biçimde tanımlansın. Kolayca görülebilir ki $\phi : C(X) \longrightarrow {}^{\mathbb{Q}}RO(X)$, $\phi(f) = f^*$ biçiminde tanımlanan ϕ fonksiyonu *bire-bir* dir. (Gerçekten $f, g \in C(X)$ ve $f \neq g$ ise, en az bir $x \in X$ noktası $f(x) \neq g(x)$ olacak biçimde vardır. Örneğin $f(x) < g(x)$ olsun. Bu durumda $f(x) < r < g(x)$ gerçekleyen herhangi bir r rasyonel sayısı için

$$x \in \overline{(f^{-1}((- \infty, r)))}^o - \overline{(g^{-1}((- \infty, r)))}^o = f^*(r) - g^*(r) \neq \emptyset$$

olur, kısacası $\phi(f) \neq \phi(g)$ bulunur.) Böylece

$$|C(X)| \leq |{}^{\mathbb{Q}}RO(X)| = |RO(X)|^{\aleph_0} = |RO(X)|$$

aranan sonucu bulunur. ■

Yukarıdaki teoremden kolayca, herhangi bir X sonsuz Hausdorff uzayı için $|C(X)| \leq o(X)$ eşitsizliğinin geçerli olduğu anlaşılır. Aşağıdaki sonuçta daha özel X uzayları için $|C(X)| = |RO(X)| = o(X)$ olduğu görülmektedir.

Sonuç III.9 X , sonsuz, yetkin normal bir Hausdorff uzayı ise $|C(X)| = |RO(X)| = o(X)$ geçerlidir.

Kanıt. X uzayının tüm kapalı kümelerinin ailesi $\mathcal{F}$ olsun. $o(X) = |\mathcal{F}|$ olduğundan, $|\mathcal{F}| \leq |C(X)|$ gerçekleştiğini göstermek yeterlidir. Ünlü Vedenisoff Teoremi (bkz. [3] veya [4]) nedeniyle X uzayının tüm kapalı kümeleri birer *sıfır* kümesidir, dolayısıyla her bir $H \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ üyesine karşılık bir $f_H \in C(X)$ fonksiyonu, $H = f_H^{-1}(0)$ gerçekleştirilecek biçimde vardır. Bu durumda $\varphi(H) = f_H$ biçiminde tanımlanan $\varphi : \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow C(X)$ fonksiyonu, bire-bir olduğundan $|\mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}| = |\mathcal{F}| \leq |C(X)|$ bulunur. ■

Bu son sonuç nedeniyle herhangi bir sonsuz ve metriklenebilir bir X uzayı için $|C(X)| = |RO(X)| = o(X)$ eşitliklerinin geçerli olduğu anlaşılır.

Sonuç III.10 Aşağıdaki önermeler geçerlidir:

- (a) Eğer X bir Hausdorff uzayı ise $|C(X)| \leq (\pi w(X))^{c(X)}$ olur.
- (b) Eğer X bir T_3 uzayı ise $|C(X)| \leq (\pi \chi(X))^{c(X)}$ olur.

Kanıt. Teorem III.15, Teorem II.15 ve Teorem II.16'dan yararlanarak kolayca kanıtlanır. Eğer X uzayı sonluysa, tanımları gereği $\pi w(X) = \pi \chi(X) = c(X) = \aleph_0$ olduğundan, $|C(X)| = (\pi w(X))^{c(X)} = (\pi \chi(X))^{c(X)} = 2^{\aleph_0}$ gerçekleşir ■

Herhangi bir X uzayı için $|C(X)| \leq (w(X))^{wc(X)}$ olduğu birazdan görülecektir. Eğer X bir T_3 uzayı ise $|C(X)|$ için bulunan bu son sınır yukarıda görülen $(\pi w(X))^{c(X)}$ ve $(\pi \chi(X))^{c(X)}$ sınırlarından daha *keskindir*, çünkü

$$(w(X))^{wc(X)} \leq |RO(X)|^{wc(X)} \leq \min\{(\pi w(X))^{c(X)}, (\pi \chi(X))^{c(X)}\}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Örneğin X uzayı, $2^{\aleph_0}$ kardinaliteli bir kesikli uzayın tek-nokta tıkkızlaşması ise $d(X) = c(X) = w(X) = 2^{\aleph_0}$ ve $|RO(X)| = 2^{2^{\aleph_0}}$ olur, böylece yukarıda belirlenen sınırlara göre $|C(X)| \leq 2^{2^{\aleph_0}}$ bulunur. Öte yandan X uzayı tıkkız olduğundan $wc(X) = \aleph_0$ olur ve böylece $|C(X)| \leq (w(X))^{wc(X)} = 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}}$ gerçekleştiği anlaşılır; ancak herhangi bir X uzayı için $(w(X))^{wc(X)} \leq |RO(X)|$ olmak zorunda *değildir*. Örneğin $2^{\aleph_1} \leq \kappa = \kappa^{\aleph_0} < \kappa^{\aleph_1}$ gerçekleyen κ kardinal sayısı göz önüne alınsın. (Böyle bir κ kardinalinin varlığını görmek için $\{\kappa_\alpha : 0 \leq \alpha < \aleph_1\}$ dizisini, $2^{\aleph_1} \leq \kappa_0$, $\kappa_\beta^{\aleph_0} < \kappa_\alpha$ ($\forall \beta < \alpha$) koşulları gerçekleştirilecek biçimde tanımlamak ve $\kappa = \sup\{\kappa_\alpha : 0 \leq \alpha < \aleph_1\}$ almak yeterlidir.) Bu durumda Y , $w(Y) = \kappa$ ve $c(Y) = \aleph_0$ gerçekleyen herhangi bir Hausdorff uzayı (örneğin $Y = (D(2))^\kappa$ (bkz. Örnek III.11)) olmak üzere, $X = D(\aleph_1) \oplus Y$ biçiminde tanımlansın. Böylece $w(X) = \aleph_1 + \kappa = \kappa$, $c(X) = wc(X) = \aleph_1$ ve $|RO(X)| \leq \kappa^{\aleph_0}$ olur ve sonuçta $|C(X)| \leq |RO(X)| \leq \kappa^{\aleph_0} < \kappa^{\aleph_1} = (w(X))^{wc(X)}$ bulunur.

Lemma III.2 *D ve E herhangi iki küme olsun. D kümesinden E kümesine tanımlanan fonksiyonların bir ailesi $\mathcal{R}$ ve E kümesinin bir ayıran örtülüğü $\mathcal{L}$ olmak üzere, eğer D kümesinin alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ ailesi, $f^{-1}(S) \in \mathcal{A}$ ($\forall (f, S) \in \mathcal{R} \times \mathcal{L}$) gerçekleştirilecek biçimde varsa, $|\mathcal{R}| \leq |\mathcal{A}|^{|\mathcal{L}|}$ olur.*

Kanıt. Her bir $f \in \mathcal{R}$ fonksiyonuna karşılık $f^* \in {}^{\mathcal{L}}\mathcal{A}$ fonksiyonu, $f^*(S) = f^{-1}(S)$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{L}$, E kümesinin bir ayıran örtülüğü olduğundan, $\varphi : \mathcal{R} \longrightarrow {}^{\mathcal{L}}\mathcal{A}$, $\varphi(f) = f^*$ biçiminde tanımlanan φ fonksiyonu *bire-bir* olur (Gerçekten farklı $f, g \in \mathcal{R}$ fonksiyonları için en az bir $x \in D$ elemanı, $f(x) \neq g(x)$ olacak biçimde vardır. $f(x), g(x) \in E$ ve $\mathcal{L}$, E kümesinin ayıran örtülüğü olduğundan bir $S \in \mathcal{L}$ üyesi, $f(x) \in S$, $g(x) \notin S$ gerçekleştirilecek biçimde bulunur. Böylece $x \in f^{-1}(S) - g^{-1}(S)$ olur, kısacası $\varphi(f) \neq \varphi(g)$ gerçekleşir.) ve böylece $|\mathcal{R}| \leq |{}^{\mathcal{L}}\mathcal{A}| = |\mathcal{A}|^{|\mathcal{L}|}$ bulunur. ■

Teorem III.16 *Herhangi bir X uzayı için $|C(X)| \leq (w(X))^{wc(X)}$ geçerlidir.*

Kanıt. $wc(X) = \kappa$ ve X uzayının $|\mathcal{B}| \leq w(X)$ gerçekleyen bir tabanı $\mathcal{B}$ olsun. Bu taban aracılığıyla $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{A}$ aileleri,

$$\mathcal{G} = \{\overline{\bigcup G} : G \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{B})\}, \mathcal{A} = \{\bigcup A : A \in \mathcal{P}_{\leq \aleph_0}(\mathcal{G})\}$$

biçiminde tanımlansın. Apaçık olarak $|\mathcal{A}| \leq (w(X))^\kappa$ olur. $\mathcal{L} = \{(-\infty, r) : r \in \mathbb{Q}\}$ ailesi, $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ Öklid uzayının bir ayıran örtülüştü olduğundan, her $f \in C(X)$ ve her $r \in \mathbb{Q}$ için $f^{-1}((-\infty, r)) \in \mathcal{A}$ gerçekleştiği gösterilirse, bir önceki lemmadan yararlanarak $|C(X)| \leq |\mathcal{A}|^{|\mathcal{L}|} \leq (w(X))^\kappa$ sonucu bulunur. Kolayca görülebilir ki her bir $(f, r) \in C(X) \times \mathbb{Q}$ sıralı ikilisi için

$$f^{-1}((-\infty, r)) = \bigcup_{n < \aleph_0} W_n \text{ (} W_n \subseteq X \text{ açık ve } \overline{W_n} \subseteq W_{n+1} \text{ (} \forall n < \aleph_0 \text{))}$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda her $n < \aleph_0$ sayısı için $\mathcal{V}_n = \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq W_{n+1}\} \cup \{X - \overline{W_n}\}$ aileleri tanımlansın. Apaçık olarak $\mathcal{V}_n$ aileleri, X uzayının birer açık örtülüştür. O halde $wc(X) = \kappa$ olduğundan her bir $n < \aleph_0$ ordinali için $\mathcal{B}_n \subseteq \{B \in \mathcal{B} : B \subseteq W_{n+1}\}$ alt ailesi, $|\mathcal{B}_n| \leq \kappa$ ve $\overline{(\bigcup \mathcal{B}_n \cup (X - \overline{W_n}))} = X$ koşulları sağlanacak biçimde vardır. Sonuç olarak $G_n = \bigcup \mathcal{B}_n$ ($\forall n < \aleph_0$) kümeleri için $W_n \subseteq \overline{G_n} \subseteq \overline{W_{n+1}} \subseteq W_{n+2}$ gerçekleşir ve böylece

$$f^{-1}((-\infty, r)) = \bigcup_{n < \aleph_0} W_n = \bigcup_{n < \aleph_0} \overline{G_n} \in \mathcal{A}$$

bulunur. ■

Bu teoremin alternatif ispatı için W.W.Comfort ve A.Hager'in [6] makalesine bakılabilir.

Yukarıda görüldüğü gibi $|C(X)| < (w(X))^{wc(X)}$ olabilir. Örneğin $2^{\kappa_1} \leq \kappa_2 \leq \kappa_2^{\aleph_0} < \kappa_2^{\kappa_1}$ gerçekleyen κ_1, κ_2 kardinal sayı çifti için $Y, D(\kappa_2)$ kesikli uzayının tek-nokta tıkızlaşması olmak üzere, $X = D(\kappa_1) \oplus Y$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda

$$w(X) = w(D(\kappa_1)) + w(Y) = \kappa_1 + \kappa_2 = \kappa_2 \text{ ve}$$

$$wc(X) = wc(D(\kappa_1)) + wc(Y) = \kappa_1 + \aleph_0 = \kappa_1$$

olur, böylece

$$\begin{aligned} |C(X)| &= |C(D(\kappa_1)) \times C(Y)| = |C(D(\kappa_1))| \cdot |C(Y)| \\ &\leq 2^{\kappa_1} \cdot \kappa_2^{\aleph_0} = \kappa_2^{\aleph_0} < \kappa_2^{\kappa_1} = (w(X))^{w(X)} \end{aligned}$$

bulunur.

Aşağıdaki örnekte $(w(X))^{p(X)} < |C(X)|$ gerçekleyen bir X uzayı tanımlanacaktır, buradan $(w(X))^{w(X)}$ in $|C(X)|$ için yine de iyi bir üst sınır olduğu anlaşılır.

Örnek III.2 $(w(X))^{p(X)} < |C(X)|$ gerçekleyen bir X uzayı vardır.

Çözüm. κ bir sonsuz kardinal sayı olmak üzere, $\kappa_1 = \kappa^+$ ve $\kappa_2 = 2^{2^{\kappa_1}}$ olsun. Bu durumda kesikli $D(\kappa_2)$ uzayının $\beta D(\kappa_2)$ Cech-Stone tıkızlaşmasının

$$\begin{aligned} X &= D(\kappa_2) \cup \{x \in \beta D(\kappa_2) : \exists E \subseteq D(\kappa_2), |E| = \kappa_1, x \in \text{kap}_{\beta D(\kappa_2)} E, x \notin \text{kap}_{\beta D(\kappa_2)} S \\ &(\forall S \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(D(\kappa_2)))\} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan alt uzayı göz önüne alınsın. (Kolayca görülebilir ki $|E| = \kappa_1$ gerçekleyen herhangi bir $E \subseteq D(\kappa_2)$ alt kümesi aracılığıyla tanımlanan

$$\{\text{kap}_{\beta D(\kappa_2)} S : S \subseteq E, |E - S| \leq \kappa\}$$

kapalı kümeler ailesi, sonlu arakesit özelliğine sahiptir. Böylece $\text{kap}_{\beta D(\kappa_2)} E - D(\kappa_2) \neq \emptyset$ dolayısıyla $X - D(\kappa_2) \neq \emptyset$ bulunur.) Gösterilmek istenen $w(X) \leq \kappa_2$ ve $p(X) = \kappa$ olduğudur. Bu amaçla $Y \subseteq \beta D(\kappa_2)$ alt uzayı,

$$Y = D(\kappa_2) \cup \{\text{kap}_{\beta D(\kappa_2)} E : E \subseteq D(\kappa_2), |E| = \kappa_1\}$$

biçiminde tanımlansın. Her $A \subseteq D(\kappa_2)$ için $\text{kap}_{\beta D(\kappa_2)} A$ kümesi, $\beta D(\kappa_2)$ uzayında açık olduğundan,

$$w(Y) \leq w(D(\kappa_2)) + \sum \{w(\text{kap}_{\beta D(\kappa_2)} E) : E \subseteq D(\kappa_2), |E| = \kappa_1\}$$

gerçeklenir. Öte yandan her $E \subseteq D(\kappa_2)$ alt kümesi için

$$w(kap_{\beta D(\kappa_2)} E) \leq 2^{d(kap_{\beta D(\kappa_2)} E)} \leq 2^{|E|}$$

olduğundan

$$w(X) \leq w(Y) \leq \kappa_2 + \kappa_2^{\kappa_1} \cdot 2^{\kappa_1} = \kappa_2^{\kappa_1} = \kappa_2$$

bulunur. Diğer taraftan $|E| = \kappa$ gerçekleyen her bir $E \subseteq D(\kappa_2)$ alt kümesi aracılığıyla tanımlanan $\{\{x\} : x \in E\}$ ailesi, X uzayının açık kümelerinin bir *yerel sonlu* ailesi olur, böylece $p(X) \geq \kappa$ bulunur. Eğer $p(X) > \kappa$ olsaydı, X uzayının açık kümelerinin bir yerel sonlu $\mathcal{U}$ ailesi, $|\mathcal{U}| = \kappa_1$ gerçekleştirilecek biçimde bulunurdu. Bu durumda her bir $U \in \mathcal{U}$ üyesinden Seçme Aksiyomu ile *tek türlü belirli* bir $x_U \in D(\kappa_2) \cap U$ noktası seçilerek $E = \{x_U : U \in \mathcal{U}\}$ kümesi tanımlansın. $\mathcal{U}$ ailesi, yerel sonlu dolayısıyla *noktasal sonlu* olduğundan, $|E| = \kappa_1$ gerçekleşir. Böylece yukarıda görüldüğü gibi $((kap_{\beta D(\kappa_2)} E) - D(\kappa_2)) \cap X \neq \emptyset$ olur. Öte yandan $\mathcal{U}$ ailesi yerel sonlu olduğundan E kümesi, X uzayında kapalıdır. O halde $E = kap_X E = (kap_{\beta D(\kappa_2)} E) \cap X \subseteq D(\kappa_2)$ olur ve böylece

$$\emptyset \neq ((kap_{\beta D(\kappa_2)} E) - D(\kappa_2)) \cap X = E - D(\kappa_2) = \emptyset$$

çelişkisi bulunur. Demek ki $p(X) = \kappa$ gerçekleşir. Sonuç olarak $D(\kappa_2) \subseteq X \subseteq \beta D(\kappa_2)$ olduğundan, $|C(X)| = |C(D(\kappa_2))| = 2^{\kappa_2}$ gerçekleşir ve böylece

$$|C(X)| = 2^{\kappa_2} > \kappa_2 = \kappa_2^{\kappa} \geq (w(X))^{p(X)}$$

bulunur. ■

$|C(X)|$ için yukarıda bulunan sınırlardan yararlanarak değişik sınırlar elde edilebilir. Örneğin herhangi bir X uzayı için $|C(X)| \leq (w(X))^{L(X)}$, X bir T_3 uzayı ise $|C(X)| \leq (\chi(X))^{c(X)}$ olur. Kısım III.4 de ünlü Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi'nden yararlanarak $(d(X))^{c(X)} < |C(X)|$ ve $(\pi w(X))^{wc(X)} < |C(X)|$ gerçekleyen X uzayları tanımlanacaktır.

III.3 $\sup = \max$ Problemleri

Saçılım ve Suslin sayıları sırasıyla kesikli alt kümelerin, gözenekli ailelerin kardinalitelerinin supremumu olarak tanımlandığından akla şu soru gelir: Saçılım (Suslin) sayısı ile aynı kardinaliteye sahip kesikli alt küme (gözenekli aile) var mıdır? Diğer bir deyişle

I- Eğer $c(X) = \kappa$ ise X uzayında tanımlı κ kardinaliteli bir gözenekli aile var mıdır?

II- Eğer $s(X) = \kappa$ ise X uzayında κ kardinaliteli kesikli alt küme var mıdır?

Eğer II. sorunun cevabı olumluysa yani X uzayının κ elemanlı kesikli alt kümesi varsa, bu uzayda en az 2^κ sayıda açık küme vardır. (Gerçekten, $A = \{x_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa\} \subseteq X$ kesikli alt küme ise her bir $\alpha < \kappa$ için $A \cap V_\alpha = \{x_\alpha\}$ olacak şekilde V_α açıkları vardır. Böylece elde edilen $\mathcal{V} = \{V_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa\}$ ailesinin farklı alt kümelerinin birleşiminden farklı açık kümeler elde edilir.) Ayrıca bu kısımda ' X uzayının tüm açıklarının sayısı $o(X)$, uygun bir λ kardinali için $o(X) = 2^\lambda$ olarak yazılabilir mi?' sorusuna bazı özel durumlarda cevap aranacaktır. Örneğin bir X uzayı metriklenebilir ise $o(X) = 2^{w(X)}$ olduğundan $o(X)$ istenen formda yazılabilir. Supremum ile tanımlanan diğer kardinal değişmezler (örneğin uzanım, kalıtımsal Lindelöf, kalıtımsal yoğunluk, ıra, sözde ıra sayıları vs.) içinde I-II sorularına benzer sorular sorulabilir. Bu tür sorulara **$\sup = \max$ problemleri** denir.

Teorem III.17 *Her sonsuz Hausdorff uzayının $\aleph_0$ kardinaliteli en az bir gözenekli ailesi vardır.*

Kanıt. Sonsuz Hausdorff uzaylarının $\aleph_0$ kardinaliteli gözenekli ailelerinin bulunduğu Teorem III.10'un kanıtı içinde görüldü. ■

Bu iddia Hausdorff *olmayan* uzaylar için doğru olmak zorunda *değildir*; çünkü $\kappa \geq \aleph_0$ kardinaliteli bir kümeyi tümleyen sonlu topolojiyle donatarak elde edilen uzaya X denirse, X Hausdorff *olmayan* bir T_1 uzayı olup herhangi iki açık kümesinin arakesiti,

boştan farklı olur.

Teorem III.18 (Erdős-Tarski Teoremi) *Suslin sayısı $c(X) = \kappa$ olan bir X uzayın göz önüne alınsın. Eğer κ bir güçsüz erişilmez kardinal sayı değilse veya X bir metriklenabilir uzaysa, bu uzayda κ kardinaliteli en az bir gözenekli aile vardır.*

Kanıt. İlk olarak κ bir ardıl kardinal sayı, kısacası uygun bir κ_0 kardinali için $\kappa = \kappa_0^+$ ise, X uzayında κ kardinaliteli bir gözenekli aile vardır. Aksi halde her gözenekli $\mathcal{V}$ ailesi için $|\mathcal{V}| \leq \kappa_0$ olur ve sonuçta $\kappa = c(X) \leq \kappa_0 < \kappa_0^+ = \kappa$ çelişkisi elde edilir.

Şimdi $\kappa > \aleph_0$ bir tekil kardinal sayı kısacası $cf(\kappa) < \kappa$ olsun. Bu durumda bir $\{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ artan kardinal sayılar dizisi,

$$\kappa = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda, \mu_\lambda < \kappa \ (\forall \lambda \in \Lambda) \text{ ve } |\Lambda| = cf(\kappa)$$

gerçeklenecek biçimde vardır. Kanıt iki durumda tamamlanır:

Durum 1: X uzayında boştan farklı bir U açık kümesi, her boştan farklı $V \subseteq U$ açık alt kümesi için $c(V) = c(X) = \kappa$ gerçeklenecek biçimde var olsun. Özel olarak $c(U) = \kappa > cf(\kappa)$ olduğundan U açık alt uzayında (dolayısıyla X ana uzayında) $cf(\kappa)$ kardinaliteli $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ gözenekli ailesi vardır. Hipotez gereği $c(U_\lambda) = \kappa > \mu_\lambda \ (\forall \lambda \in \Lambda)$ olduğundan, her bir $\lambda \in \Lambda$ için U_λ alt uzayında μ_λ kardinaliteli bir $\mathcal{U}_\lambda$ gözenekli ailesi bulunur. $\mathcal{U} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda$ olarak tanımlanırsa,

$$|\mathcal{U}| = \left| \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{U}_\lambda \right| = |\Lambda| \vee \sup\{|\mathcal{U}_\lambda| : \lambda \in \Lambda\} = cf(\kappa) \vee \sup_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mu_\lambda = \kappa$$

olup $\mathcal{U}$, X uzayında aranan κ kardinaliteli gözenekli ailedir.

Durum 2: X uzayının hiçbir açık kümesi birinci durumdaki özelliğe sahip olmasın. Bu durumda her U açık kümesinin en az bir $\emptyset \neq V_U \subseteq U$ açık alt kümesi, $c(V_U) < c(X) = \kappa$ gerçeklenecek biçimde vardır. O halde ünlü Zorn Lemması nedeniyle her $W \in \mathcal{W}$ için $c(W) < \kappa$ gerçekleyen $\mathcal{W}$ gözenekli ailelerinin bir *maksimali* vardır. Bu maksimal aileye $\mathcal{G}$ denirse, $\bigcup \mathcal{G}$ kümesi X uzayında *yoğun* olur. (Çünkü $X - \overline{\bigcup \mathcal{G}} \neq \emptyset$

olsaydı, bir $x \in X - \overline{\bigcup \mathcal{G}}$ noktası ve x noktasının bir B_x açık komşuluğu, $B_x \subseteq X - \overline{\bigcup \mathcal{G}}$ ve $c(B_x) < \kappa$ gerçekleşecek biçimde bulunurdu. Böylece $\mathcal{G}^* = \mathcal{G} \cup \{B_x\}$ ailesi için, $\mathcal{G}^*$ bir gözenekli aile, $c(G) < \kappa$ ($\forall G \in \mathcal{G}^*$) ve $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{G}^*$ olur; ancak bu durum $\mathcal{G}$ ailesinin maksimalliği ile çelişirdi.) Eğer $|\mathcal{G}| \geq \kappa$ ise kanıt tamamlanır. Şimdi $|\mathcal{G}| < \kappa$ olsun. Bu durumda

$$\sup\{c(G) : G \in \mathcal{G}\} = \kappa$$

gerçeklenir. (Gerçekten, $\sup\{c(G) : G \in \mathcal{G}\} = \mu < \kappa$ olsaydı, $\mu \cdot |\mathcal{G}| < \kappa$ ve κ limit kardinal olduğundan $(\mu \cdot |\mathcal{G}|)^+ < \kappa$ olurdu. Böylece X uzayında $(\mu \cdot |\mathcal{G}|)^+$ kardinaliteli bir $\mathcal{V}$ gözenekli ailesi bulunurdu. Her bir $U \in \mathcal{G}$ için

$$\mathcal{V}(U) = \{V \in \mathcal{V} : U \cap V \neq \emptyset\} \subseteq \mathcal{V}$$

olarak tanımlanırsa, $\bigcup \mathcal{G}$ kümesi X uzayında yoğun olduğundan $\mathcal{V} = \bigcup_{U \in \mathcal{G}} \mathcal{V}(U)$ ve $c(U) \leq \mu$ ($\forall U \in \mathcal{G}$) olduğundan $|\mathcal{V}(U)| \leq \mu$ gerçekleşirdi. Sonuç olarak

$$(\mu \cdot |\mathcal{G}|)^+ = |\mathcal{V}| = \left| \bigcup_{U \in \mathcal{G}} \mathcal{V}(U) \right| \leq |\mathcal{G}| \vee \sup\{|\mathcal{V}(U)| : U \in \mathcal{G}\} = \mu \cdot |\mathcal{G}| < (\mu \cdot |\mathcal{G}|)^+$$

çelişkisi elde edilirdi.) Bu gerçekten yararlanarak her bir $\lambda \in \Lambda$ elemanı için $\mu_\lambda < \mu_\lambda^+ \leq c(G_\lambda)$ gerçekleyen bir $G_\lambda \in \mathcal{G}$ elemanı ve G_λ açık alt uzayında (dolayısıyla X ana uzayında) $|\mathcal{G}_\lambda| = \mu_\lambda$ eşitliğini sağlayan bir $\mathcal{G}_\lambda$ gözenekli ailesi vardır. Böylece elde edilen $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}_\lambda$ ailesi, gözenekli ve $\left| \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}_\lambda \right| = \kappa$ olduğundan kanıt tamamlanır.

X uzayının metriklenebilir olduğu durum için teoremin kanıtı Teorem III.10(d)'de görüldü. ■

κ bir güçsüz erişilmez kardinal sayısı olduğunda Erdős-Tarski Teoremi'ndeki iddianın her zaman doğru olmasının *gerekmeyişi* Örnek III.4'de görülecektir.

Yukarıdaki teorem, 1943 yılında Erdős-Tarski tarafından gösterilen aşağıdaki sonucun özel bir hali olarak düşünülebilir.

'Eğer F verilen bir kümenin alt kümelerinin sonlu arakesit ve sonlu birleşime göre kapalı bir ailesi ise, (topolojideki gibi açık kümelerin sonlu kesişim ve keyfi birleşimine

göre kapalı olmak zorunda *değil*) F ailesinin ikişerli ayrık elemanlarının bir $\mathcal{U}$ ailesi aşağıdaki özelliğe sahip olacak biçimde vardır:

$$|\mathcal{U}| = \sup\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V}, F' \text{ nin ikişerli ayrık elemanlarının ailesi}\}$$

ve $|\mathcal{U}|$ güçsüz erişilmez *değildir*.

κ , sonsuz bir ardıl kardinal sayı olmak üzere, herhangi bir X uzayı için $s(X) = \kappa$ ise X uzayında κ kardinaliteli bir kesikli alt kümenin var olduğu açıktır. $GKV + \neg(\text{erişilmez kardinal sayı})$ iddiasının doğru olduğu varsayılırsa, aşağıdaki teoremden yararlanarak, Hausdorff uzayları için yukarıdaki II inci sorunun tam çözümü elde edilir.

Teorem III.19 (Hajnal-Juhász): κ tekil ve güçlü bir limit kardinal sayı olmak üzere, saçılım sayısı $s(X) = \kappa$ olan bir X Hausdorff uzayında κ kardinaliteli kesikli bir alt küme vardır.

Kanıt. $|X| = \kappa$ durumunda teoremi kanıtlamak yeterlidir. Ünlü Zermelo Teoremi nedeniyle X kümesi üzerinde *en az bir* iyi sıralama tanımlanabilir. Örneğin $\prec$, böyle bir sıralama ise $(X, \prec)$ ile κ eşsıralı (Aralarında sıralama koruyan, bire-bir ve örten fonksiyon tanımlanabilen kümelere **eşsıralı kümeler** denir.) kümeler olur. X bir Hausdorff uzayı olduğundan $x, y \in X$, $x \prec y$ için $x \in U_{xy}$, $y \in V_{xy}$ ve $U_{xy} \cap V_{xy} = \emptyset$ koşullarını gerçekleyen U_{xy}, V_{xy} ($\subseteq X$) açık kümeleri vardır. Böylece aşağıdaki dört küme $[X]^3$ kümesinin bir parçalanışı olur.

$$P_1 = \{\{x, y, z\} : x \prec y \prec z, x \in U_{yz}, z \in V_{xy}\}$$

$$P_2 = \{\{x, y, z\} : x \prec y \prec z, x \in U_{yz}, z \notin V_{xy}\}$$

$$P_3 = \{\{x, y, z\} : x \prec y \prec z, x \notin U_{yz}, z \in V_{xy}\}$$

$$P_4 = \{\{x, y, z\} : x \prec y \prec z, x \notin U_{yz}, z \notin V_{xy}\}$$

$\lambda = cf(\kappa)$ olmak üzere, Erdős-Hajnal-Rado Lemması nedeniyle bir $D \subseteq X$ alt kümesi ve D kümesinin bir $\{D_\alpha : 0 \leq \alpha < \lambda\}$ parçalanışı aşağıdaki koşullar gerçekleşecek

biçimde vardır:

- (1) $|D_\alpha| = \kappa_\alpha < \kappa$ ($\forall \alpha < \lambda$) ve $\sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha = \kappa$,
- (2) Eğer $0 \leq \alpha < \beta < \lambda$ ve $x \in D_\alpha$, $y \in D_\beta$ ise $x \prec y$,
- (3) $a, b \in [D]^3$ ve $|a \cap D_\alpha| = |b \cap D_\alpha|$ ($\forall \alpha < \lambda$) ise $a, b \in P_i$ ($1 \leq i \leq 4$) olacak biçimde en az bir i sayısı vardır.

Herhangi bir $\alpha < \lambda$ ordinali için D_α kümesinin $\prec_{D_\alpha}$ kısıtlanmış sıralamasına göre hem ardıl elemanı (kendinden büyük en küçük eleman) hem de öncül elemanı (kendinden küçük en büyük eleman) bulunan elemanlarının kümesi $D_\alpha(0)$ ile gösterilirse, açıktır ki $|D_\alpha(0)| = \kappa_\alpha$ gerçekleşir. Eğer bu özellikteki y elemanlarının D alt uzayının birer *yakıtılmış noktası* olduğu gösterilirse teorem kanıtlanmış olur.

(2) koşulundan kolayca görülebilir ki her bir $y \in D_\alpha(0)$ noktasının D_α kümesindeki öncülü x ve ardılı z , y noktasının D kümesindeki sırasıyla öncül ve ardıl elemanlarıdır. $R_y = V_{xy} \cap U_{yz}$ olarak tanımlanırsa, $R_y \cap D = \{y\}$ dir. Gerçekten $x, z \notin R_y$ olduğu apaçık olup keyfi bir $p \in D$ noktası için ilk olarak $p \prec x$ varsayalım. Eğer $p \notin V_{xy}$ ise kanıt tamamlanır. Eğer $p \in V_{xy}$ ise $p \notin U_{xy}$ olduğundan $a = \{p, x, y\} \in P_3$ veya $a \in P_4$ dir. Bu durumda $b = \{p, y, z\} \in [D]^3$ elemanı için, a, b elemanları (3) koşulunu sağlar ve böylece $b \in P_3$ veya $b \in P_4$ bulunur. Sonuç olarak $p \notin U_{yz}$ olup $p \notin R_y$ elde edilir. Benzer inceleme $z \prec p$ durumu için yapılabilir. Kısacası $R_y \cap D = \{y\}$ ($\forall y \in D$) olduğundan D kesikli bir alt küme ve en önemlisi $|D| = \kappa$ olur ve böylece kanıt tamamlanır. ■

Sonuç III.11 κ tekil ve güçlü bir limit kardinal sayı olmak üzere, $|X| \geq \kappa$ gerçekleyen bir X Hausdorff uzayında κ kardinaliteli bir kesikli alt küme vardır.

Kanıt. $s(X) = \kappa$ olduğundan iddia yukarıdaki teoremden açıktır. Gerçekten, eğer $s(X) < \kappa$ olsaydı κ bir güçlü kardinal sayı olduğundan $\kappa \leq |X| \leq 2^{2^{s(X)}} < \kappa$ çelişkisi bulunurdu. ■

İlk olarak De Groot tarafından ortaya atılan 'Herhangi bir X Hausdorff uzayı için $o(X)$, uygun bir κ kardinal sayısı aracılığıyla $o(X) = 2^\kappa$ formunda yazılabilir mi?' sorusu için De Groot, metriklenabilir uzaylarda cevabın olumlu olduğunu; çünkü X uzayı metriklenebilirse $o(X) = 2^{w(X)}$ olduğunu kanıtladı. Bu sorunun tam çözümü 1969 yılında Hajnal ve Juhász tarafından kanıtlandı. Onlar bu sorunun cevabının ZFS aksiyomlarında kalınarak *kararlaştırılamayacağını* kanıtladılar; çünkü Hajnal ve Juhász, genelleştirilmiş kontinyum varsayımı (kısaca GKV ile gösterilir, bu varsayıma göre herhangi bir sonsuz κ kardinal sayısı için $\kappa^+ = 2^\kappa$ geçerlidir) altında keyfi bir X Hausdorff uzayı için $o(X)$ sayısının 2^κ formunda veya güçsüz erişilmez (dolayısıyla GKV'den güçlü erişilmez) bir kardinal sayı olduğunu kanıtladılar. Öte yandan Roitman, ZFS aksiyomlarında kalarak, $2^{\aleph_0} < o(Y) < 2^{\aleph_1}$ gerçekleşecek biçimde bir Y normal Hausdorff uzayı tanımlamıştır.(bkz. [2]) Böylece bu sorunun cevabının, ZFS aksiyomlarında kalınarak, *kararlaştırılmaz* olduğu anlaşılır. Sonuç olarak eğer GKV geçerli ve güçlü erişilmez kardinal sayı *yoksa*, herhangi bir X Hausdorff uzayı için uygun bir κ kardinal sayısı, $o(X) = 2^\kappa$ gerçekleşecek biçimde vardır.

Teorem III.20 *Bir sonsuz X uzayının $2^{|\mathcal{U}|} = 2^{w(X)}$ gerçekleyen bir $\mathcal{U}$ gözenekli ailesi varsa, $o(X) = 2^{w(X)}$ olur. Ek olarak X uzayının her açık kümesi bir tümleyen sıfır küme ise (özel olarak X , sonsuz yetkin normal uzaysa) $|C(X)| = 2^{w(X)}$ olur.*

Kanıt. Daima $o(X) \leq 2^{w(X)}$ olduğu biliniyor, öte yandan X uzayını tanımlayan topoloji τ ile gösterilirse, $\varphi(\mathcal{V}) = \bigcup \mathcal{V}$ biçiminde tanımlanan $\varphi : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \longrightarrow \tau$ fonksiyonu bire-bir olduğundan

$$|\mathcal{P}(\mathcal{U})| = 2^{|\mathcal{U}|} \leq |\tau| = o(X) \leq 2^{w(X)} = 2^{|\mathcal{U}|}$$

gerçeklenir ve böylece ilk iddia kanıtlanmış olur.

X üzerinde tanımlı iki sürekli reel değerli fonksiyon, X uzayının bir *yoğun* alt kümesinde aynı değerleri alıyorsa, tüm X kümesi üzerinde de aynı değerleri alacağını-

dan $|C(X)| \leq 2^{d(X)}$ ($\leq 2^{w(X)}$) gerçeklenir. Tersine X uzayının tüm açık kümeleri tümleyen sıfır kümesi olduğundan, özel olarak her bir $\mathcal{V} \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ için $\bigcup \mathcal{V}$ açık kümesi de tümleyen sıfır kümesi olur, böylece uygun bir $f_{\mathcal{V}} \in C(X)$ elemanı için $\bigcup \mathcal{V} = X - f_{\mathcal{V}}^{-1}(0)$ gerçeklenir. Sonuçta $\phi : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \longrightarrow C(X)$, $\phi(\mathcal{V}) = f_{\mathcal{V}}$ biçiminde tanımlanan ϕ fonksiyonu bire-bir olduğundan $|\mathcal{P}(\mathcal{U})| = 2^{|\mathcal{U}|} \leq |C(X)| \leq 2^{w(X)} = 2^{|\mathcal{U}|}$ olup ikinci iddia’da kanıtlanmış olur. ■

Sonuç III.12 X , sonsuz bir metriklenebilir uzay ise $o(X) = 2^{w(X)}$ ve $|C(X)| = 2^{w(X)}$ gerçeklenir..

Kanıt. İlk eşitlik bir önceki teorem ve Teorem III.10(d)’den kolayca görülür. Öte yandan X bir metriklenebilir uzay olduğundan X kümesi üzerinde tanımlı ve X uzayını tanımlayan topolojiye *denk* topoloji tanımlayan bir ρ metriği vardır. Böylece herhangi bir $U \subseteq X$ açık kümesi için $f(x) = \rho(x, X - U) = \inf\{\rho(x, y) : y \in X - U\}$ biçiminde tanımlanan $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu *sürekli* ve $U = X - f^{-1}(0)$ olduğundan, U bir tümleyen sıfır kümesi olur. Sonuçta bir önceki teorem nedeniyle ikinci eşitliğinde geçerli olduğu anlaşılır. ■

Aşağıdaki lemmadan yararlanarak Teorem III.18’in *düzenli* uzaylar için daha güçlü (ya da daha genel) durumu elde edilir.

Lemma III.3 Bir X düzenli uzayının açık kümelerinin yerel sonlu bir $\mathcal{U}$ ailesi, $|\mathcal{U}| = \kappa \geq \aleph_0$ gerçeklenecek biçimde varsa, X uzayının yerel sonlu ve gözenekli bir $\mathcal{V}$ ailesi, $|\mathcal{V}| = \kappa$ olacak şekilde vardır.

Kanıt. $|\mathcal{U} - \{\emptyset\}| = |\mathcal{U}|$ olduğundan $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}_{\alpha < \kappa}$ ailesinin tüm yeleri boştan farklı alınabilir. Bu durumda Seçme Aksiyomu’ndan yararlanarak her $\alpha < \kappa$ için tek türlü belirli $x_{\alpha} \in U_{\alpha}$ elemanları seçilsin. $\mathcal{U}$ ailesi, yerel sonlu olduğundan her bir x_{α} noktası $\mathcal{U}$ ’nun yalnızca sonlu sayıda üyesine aittir. Böylece $\mathcal{W} = \{U_{\alpha(\beta)}\}_{\beta < \kappa} \subseteq \mathcal{U}$ alt ailesi, $\alpha(\beta_1), \alpha(\beta_2) < \kappa$ ve $\alpha(\beta_1) \neq \alpha(\beta_2)$ için $x_{\alpha(\beta_1)} \neq x_{\alpha(\beta_2)}$ gerçeklenecek

biçimde bulunur. Gerçekten, sonlu ötesi tümevarım'dan yararlanarak bu aile şu şekilde belirlenebilir: Her bir $\alpha < \kappa$ için $x_\alpha \in U_\alpha$ noktasını içeren $\mathcal{U}$ ailesinin üyelerinin indislerinin kümesi, $\Delta(\alpha)$ ($\subseteq W(\kappa)$) olsun. $\mathcal{U}$ ailesi, yerel sonlu (dolayısıyla noktasal sonlu) olduğundan $\Delta(\alpha)$ indis kümeleri sonlu elemanlıdır. $x_0 \in U_0$ olmak üzere $U_{\alpha(0)} = U_0$ olsun. Bu durumda

$$(*) \quad \alpha_\beta = \min(W(\kappa) - \bigcup_{\gamma < \beta} \Delta(\alpha_\gamma)) \in W(\kappa) - \bigcup_{\gamma < \beta} \Delta(\alpha_\gamma)$$

ifadesinden yararlanarak $\mathcal{W} = \{U_{\alpha(\beta)}\}_{\beta < \kappa}$ ailesi inşa edilebilir. $|W(\kappa) - \Delta(0)| = \kappa$ olduğundan $(*)$ ifadesindeki gibi tanımlanan α_1 ordinali için $x_{\alpha_1} \in U_{\alpha_1} - \bigcup_{\alpha \in \Delta(0)} U_\alpha$ gerçekleşir, böylece $U_{\alpha(1)} = U_{\alpha_1}$ almak yeterlidir. Şimdi keyfi sabit bir $\beta_0 < \kappa$ ordinali için $U_{\alpha(\beta)} = U_{\alpha_\beta} \in \mathcal{U}$, $\Delta(\alpha_\beta) \subseteq W(\kappa)$ ($\forall \beta < \beta_0$) kümeleri belirlenmiş olsun. $\left| \bigcup_{\beta < \beta_0} \Delta(\alpha_\beta) \right| \leq |\beta_0| \vee \aleph_0 < \kappa$ ve böylece $\left| W(\kappa) - \bigcup_{\beta < \beta_0} \Delta(\alpha_\beta) \right| = \kappa$ olup $(*)$ ifadesinden α_{β_0} ordinali ve böylece $U_{\alpha(\beta_0)} = U_{\alpha_{\beta_0}}$ kümesi tanımlanarak sonlu ötesi tümevarım süreci tamamlanır. Apaçık olarak $|\mathcal{W}| = |\{U_{\alpha(\beta)}\}_{\beta < \kappa}| = \kappa$ ve farklı $\alpha(\beta_1), \alpha(\beta_2) < \kappa$ ordinalleri için $x_{\alpha(\beta_1)} \neq x_{\alpha(\beta_2)}$ gerçekleşir. X bir düzenli uzay olduğundan her $\beta < \kappa$ için $x_{\alpha(\beta)}$ noktasının bir $V_{\alpha(\beta)}$ açık komşuluğu

$$\overline{V_{\alpha(\beta)}} \subseteq U_{\alpha(\beta)}, \quad V_{\alpha(\beta)} \cap \{x_{\alpha(\gamma)} : \gamma < \kappa\} = \{x_{\alpha(\beta)}\}$$

gerçeklenecek biçimde bulunur. Sonuçta

$$W_{\alpha(\beta)} = V_{\alpha(\beta)} - \bigcup \{\overline{V_{\alpha(\gamma)}} : \gamma < \kappa, \gamma \neq \beta\} = V_{\alpha(\beta)} - \overline{\bigcup_{\gamma < \kappa, \gamma \neq \beta} V_{\alpha(\gamma)}} \quad (\forall \beta < \kappa)$$

biçiminde tanımlanırsa, $\mathcal{V} = \{W_{\alpha(\beta)}\}_{\beta < \kappa}$ ailesi, aranan yerel sonlu gözenekli aile olarak alınabilir. Gerçekten, $|\{W_{\alpha(\beta)}\}_{\beta < \kappa}| = \kappa$ ve $\{W_{\alpha(\beta)}\}_{\beta < \kappa}$ ailesinin gözenekli olduğunu görmek kolaydır, öte yandan $W_{\alpha(\beta)} \subseteq V_{\alpha(\beta)} \subseteq U_{\alpha(\beta)}$ ($\forall \beta < \kappa$) olduğundan $\{W_{\alpha(\beta)}\}_{\beta < \kappa}$ ailesi yerel sonludur. ■

Sonuç III.13 *Bir sonsuz X düzenli uzayının açık kümelerinin $2^{|\mathcal{U}|} = 2^{w(X)}$ gerçekleyen bir $\mathcal{U}$ yerel sonlu ailesi varsa $o(X) = 2^{w(X)}$ gerçekleşir. Ek olarak X uzayının her açık kümesi bir tümleyen sıfır küme ise $|C(X)| = 2^{w(X)}$ olur.*

Yukarıda metriklenebilir bir X uzayı için $o(X) = 2^{w(X)}$ gerçeğlendiği görüldü; ancak X uzayında $2^{|\mathcal{U}|} = 2^{w(X)}$ eşitliğini sağlayan yerel sonlu bir $\mathcal{U}$ açık kümeler ailesinin bulunmasının *gerekemediği* aşağıdaki örnekte görülmektedir.

Örnek III.3 Her yerel sonlu $\mathcal{U}$ açık kümeler ailesi için $2^{|\mathcal{U}|} < 2^{w(E)}$ koşulunu sağlayan metriklenebilir bir E uzayı tanımlanabilir.

Çözüm. $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ artan sonsuz kardinal sayılar dizisi ve $\mu = \sup_{k \in \mathbb{N}} \mu_k$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için A_k kesikli uzayları, $|A_k| = \mu_k$ ve $n \neq m$ için $A_n \cap A_m = \emptyset$ gerçekleştirilecek biçimde tanımlansın. Bu uzaylardan yararlanarak $E_k = [0, 1/k] \times A_k$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) çarpım uzayları tanımlanırsa, $([0, 1/k]$ uzayı olarak bilinen Öklid uzayının alt uzayı kastediliyor) açıktır ki

$$w(E_k) = w([0, 1/k]) \vee w(A_k) = \aleph_0 \vee \mu_k = \mu_k \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

gerçeklenir. $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ kümesi üzerinde

$$(r_1, s_1)R(r_2, s_2) \iff r_1 = r_2 = 0 \text{ ya da } r_1 = r_2, s_1 = s_2$$

olacak biçimde R eşdeğerlik bağıntısı tanımlansın. $(r, s) \in X$ noktasının denklik sınıfı, $[(r, s)]$ ile gösterilmek üzere $E = X/R$ kümesi üzerinde

$$\rho([(r_1, s_1)], [(r_2, s_2)]) = \begin{cases} |r_1 - r_2| & ; \quad s_1 = s_2 \text{ ise} \\ r_1 + r_2 & ; \quad s_1 \neq s_2 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan ρ uzaklık fonksiyonu bir metriktir. (bkz. [4]) Bu metriğe E kümesi üzerinde tanımlı **dikenli kirpi metriği** ve (E, ρ) uzayına'da **dikenli kirpi uzayı** denir. (E, ρ) uzayı, kısaca E ile gösterilirse, $w(E) = \aleph_0 \cdot \mu = \mu$ olur. $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ olmak üzere herhangi bir $s \in A$ için $\phi = [(0, s)] = \{(0, t) : t \in A\}$ olarak tanımlanırsa, ϕ noktasının her

$$B_\phi(\varepsilon) = \{[(r, t)] \in E : \rho(\phi, [(r, t)]) < \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0)$$

açık komşuluğu için bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı, $[E_n] = \{[(r, s)] : (r, s) \in E_n\}$ olmak üzere, $[E_n] \subseteq B_\phi(\varepsilon)$ ($\forall n \geq n_\varepsilon$) gerçekleşecek biçimde vardır. Gerçekten, ünlü Arşimed İlkesi nedeniyle keyfi sabit bir $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı, $1/n_\varepsilon < \varepsilon$ olacak şekilde var olduğundan her $n \geq n_\varepsilon$ için keyfi $(r, s) \in E_n$ noktası alınır, $\rho([(r, s)], \phi) = r \leq 1/n \leq 1/n_\varepsilon < \varepsilon$ gerçekleştiğinden $[(r, s)] \in B_\phi(\varepsilon)$ olup $[E_n] \subseteq B_\phi(\varepsilon)$ ($\forall n \geq n_\varepsilon$) sonucu elde edilir. Böylece E uzayının açık kümelerinden oluşan herhangi bir yerel sonlu $\mathcal{U}$ ailesi için bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı, $|\mathcal{U}| \leq \mu_k$ gerçekleşecek biçimde vardır. Eğer $\mu_1 = \aleph_0$, $\mu_k = 2^{\mu_{k-1}}$ ($k > 1$) olarak tanımlanırsa, uygun bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$2^{|\mathcal{U}|} \leq 2^{\mu_k} = \mu_{k+1} < \mu < 2^\mu = 2^{w(E)}$$

olduğu görülür. ■

Ayrıca $\kappa_1 < \kappa_2 < 2^{\kappa_1} = 2^{\kappa_2}$ koşulunu sağlayan κ_1 ve κ_2 kardinal sayıları varsa, $w(X) = \kappa_2$, $c(X) = \kappa_1$ gerçekleyen ve κ_1 kardinaliteli yerel sonlu ve gözenekli bir aileye sahip olan bir X uzayı tanımlanabilir. (bkz. Örnek III.7)

Teorem III.21 (*Hajnal-Juhász*): $GKV + \neg(\text{erişilmez kardinal sayı})$ iddiasının doğru olduğu varsayılırsa, herhangi bir X Hausdorff uzayına karşılık uygun bir κ_X kardinal sayısı $o(X) = 2^{\kappa_X}$ gerçekleşecek biçimde vardır.

Kanıt. $|X| = \kappa$ olsun. Bu durumda $\kappa = |X| \leq o(X) \leq 2^{|X|} = 2^\kappa$ ve GKV nedeniyle $o(X) = \kappa$ veya $o(X) = 2^\kappa$ dır. $o(X) = \kappa$ olması durumunda κ bir tekil kardinal sayı *olamaz*; çünkü κ sayısı tekil olsaydı, GKV nedeniyle κ bir tekil güçlü limit kardinal sayı olurdu. Böylece Teorem III.19 nedeniyle X uzayında κ kardinaliteli bir kesikli alt küme dolayısıyla bu uzayın en az 2^κ sayıda açık kümesi bulunur bu da $o(X) = \kappa$ gerçeğiyle çelişirdi. Demek ki κ bir düzenli kardinal sayı olup uygun bir κ_X kardinali için $o(X) = \kappa = 2^{\kappa_X}$ gerçekleşir. ■

Bu kısımda son olarak κ bir güçsüz erişilmez kardinal sayı (eğer varsa) olmak üzere $c(X) = \kappa$ gerçekleyen herhangi bir X uzayının κ kardinaliteli gözenekli ailesi

var mıdır? ' sorusuna yanıt aranacaktır. Açıktır ki κ kardinaliteli kesikli bir X uzayı için $c(X) = \kappa$ olup X uzayının κ kardinaliteli gözenekli ailesi vardır. (Gerçekten, $\mathcal{G} = \{\{x\}\}_{x \in X}$ bu tür bir ailedir.) Ancak $c(Y) = \kappa$ gerçekleyen bazı Y uzaylarının κ kardinaliteli *hiçbir* gözenekli ailesi *bulunmaz*. Bu gerçeği kanıtlamak için öncelikle aşağıdaki yararlı tanım ve teorem görülecektir.

Tanım III.2 κ bir sonsuz kardinal sayı ve X bir topolojik uzay olsun. Eğer X uzayının boştan farklı açık kümelerinin $|\mathcal{U}| = \kappa$ gerçekleyen her $\mathcal{U}$ ailesinin en az bir $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ alt ailesi, $|\mathcal{V}| = \kappa$ ve $\bigcap \mathcal{V} \neq \emptyset$ koşulları gerçekleşecek biçimde varsa, X uzayına κ -*sığasına sahiptir* (ya da κ -*kalibresine sahiptir*) denir.

Bir uzay birden fazla sığaya sahip olabilir. Örneğin $|X| = \kappa$ gerçekleyen X kesikli uzayı için κ^+, κ^{++} farklı iki sığadır. Açıktır ki bir Y uzayı κ_0 -sığasına sahipse $c(Y) \leq \kappa_0$ olur.

Aşağıdaki teoremden yararlanarak Suslin sayısı κ olan ancak κ kardinaliteli *hiçbir* gözenekli ailenin *bulunmadığı* bir uzay tanımlanacaktır. Çarpım uzayları hakkındaki temel bilgiler için kısım III.4'e bakılmalıdır.

Teorem III.22 (Sanin Teoremi): κ sayılamaz, düzenli bir kardinal sayı ve $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ κ -sığasına sahip topolojik uzayların bir ailesi olsun. Bu durumda $X = \prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$ çarpım uzayı da κ -sığasına sahiptir.

Kanıt. Gösterilmesi gereken X uzayının boştan farklı açık kümelerinin $|\mathcal{U}| = \kappa$ gerçekleyen herhangi bir $\mathcal{U}$ ailesinin $|\mathcal{V}| = \kappa$, $\bigcap \mathcal{V} \neq \emptyset$ koşullarını sağlayan en az bir $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ alt ailesinin varlığıdır. Bu amaçla keyfi bir $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $|\Lambda| = \kappa$ açık kümeler ailesi için U_λ ($\forall \lambda \in \Lambda$) kümeleri birer kutu küme olarak alınabilir. O halde her bir $\lambda \in \Lambda$ için

$$U_\lambda = \prod_{\alpha \in S_\lambda} U_\lambda(\alpha) \times \prod_{\alpha \in \Delta \setminus S_\lambda} X_\alpha, \quad S_\lambda \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Delta), \quad U_\lambda(\alpha) \subseteq X_\alpha \quad (\forall \alpha \in S_\lambda) \text{ açık alt küme}$$

olarak yazılabilir. Ayrıca $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$ için $U_{\lambda_1} \neq U_{\lambda_2}$ varsayılabilir. Böylece $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ sonlu alt kümeler ailesi tanımlanmış olup, Sanin Lemması nedeniyle, $|\Lambda'| = \kappa$ gerçekleyen bir $\Lambda' \subseteq \Lambda$ alt kümesi ile her farklı $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda'$ eleman çifti için $S_{\lambda_1} \cap S_{\lambda_2} = F$ gerçekleşecek biçimde boş olabilen sonlu bir F kümesi vardır. $\prod_{\alpha \in \emptyset} X_\alpha$ yazımından kaçınmak için kanıt iki durumda tamamlanır.

Durum 1: $F = \emptyset$ olsun. Bu durumda her bir $\alpha \in \Delta$ elemanı *en fazla bir* S_λ ($\lambda \in \Lambda'$) kümesine ait olabilir. Böylece her bir $\alpha \in \Delta$ için

$$p_\alpha \in \begin{cases} U_\lambda(\alpha) ; \alpha \in S_\lambda, \lambda \in \Lambda' \text{ ise} \\ X_\alpha ; \alpha \in \Delta \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} S_\lambda \text{ ise} \end{cases}$$

olacak biçimde Seçme Aksiyomu yardımıyla seçilen p_α elemanları aracılığıyla tanımlanan $p = \{p_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$ noktası için, apaçık olarak $p = \{p_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda'} U_\lambda \neq \emptyset$ gerçekleşir. Sonuç olarak $\mathcal{V} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ aranan alt aile olarak alınabilir.

Durum.2: $F \neq \emptyset$ olsun. κ -sığasına sahip sonlu sayıda uzayın çarpım uzayı da κ -sığasına sahiptir. Gerçekten, keyfi bir $2 \leq n$ sayısı için Y_i ($i = 1, \dots, n$) uzayları κ -sığasına sahip ise $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$ çarpım uzayı da öyledir. Y uzayında $|\mathcal{G}| = \kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ açık kümeler ailesi göz önüne alınsın. Özel olarak $\mathcal{G}$ ailesinin üyeleri birer kutu küme olarak alınabilir. Bu durumda her bir $\alpha < \kappa$ için

$$G_\alpha = G_1(\alpha) \times \dots \times G_n(\alpha), \quad G_i(\alpha) \subseteq Y_i \quad (i = 1, \dots, n) \text{ açık alt küme}$$

olacak biçimde yazılabilir. Böylece Y_1 uzayı κ -sığasına sahip olduğundan, bu uzayda tanımlı $\{G_1(\alpha)\}_{\alpha < \kappa}$ açık kümeler ailesine karşılık, $|\Delta(1)| = \kappa$ ve $\bigcap_{\alpha \in \Delta(1)} G_1(\alpha) \neq \emptyset$ koşulları gerçekleşecek biçimde bir $\Delta(1) \subseteq W(\kappa)$ alt kümesi vardır. Benzer şekilde Y_2 uzayında tanımlı $\{G_2(\alpha)\}_{\alpha \in \Delta(1)}$ açık kümeler ailesine karşılık, $|\Delta(2)| = \kappa$ ve $\bigcap_{\alpha \in \Delta(2)} G_2(\alpha) \neq \emptyset$ gerçekleşecek biçimde bir $\Delta(2) \subseteq \Delta(1)$ alt kümesi vardır. Bu şekilde devam edilirse Y_n uzayı da κ -sığasına sahip olduğundan, bu uzayda tanımlı $\{G_n(\alpha)\}_{\alpha \in \Delta(n-1)}$ açık kümeler ailesine karşılık bir $\Delta(n) \subseteq \Delta(n-1)$ alt kümesi, $|\Delta(n)| =$

κ ve $\bigcap_{\alpha \in \Delta(n)} G_n(\alpha) \neq \emptyset$ koşulları gerçekleşecek biçimde vardır. Sonuç olarak

$$\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Delta(n)} = \{G_1(\alpha) \times \dots \times G_n(\alpha)\}_{\alpha \in \Delta(n)} \subseteq \{G_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$$

alt ailesi için

$$\bigcap_{\alpha \in \Delta(n)} G_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \Delta(n)} (G_1(\alpha) \times \dots \times G_n(\alpha)) = \prod_{i=1}^n \left(\bigcap_{\alpha \in \Delta(n)} G_i(\alpha) \right) \neq \emptyset$$

olduğundan ara iddia kanıtlanmış olur. O halde $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ çarpım uzayı κ -sığasına sahip olduğundan bu uzayda tanımlı $\{\prod_{\alpha \in F} U_\lambda(\alpha)\}_{\lambda \in \Lambda'}$ açık kümeler ailesine karşılık, $|\Lambda''| = \kappa$ gerçekleyen bir $\Lambda'' \subseteq \Lambda'$ alt kümesi ve $p = \{p_\alpha\}_{\alpha \in F} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda''} \left(\prod_{\alpha \in F} U_\lambda(\alpha) \right)$ gerçekleşecek biçimde bir $p \in \prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ noktası vardır. Her bir $\alpha \in \Delta - F$ elemanı, en fazla bir $\lambda \in \Lambda''$ için S_λ kümesine (aslında en fazla bir $\lambda \in \Lambda'$ için S_λ kümesine) aittir. Böylece her bir $\alpha \in \Delta$ için

$$q_\alpha \begin{cases} = p_\alpha & ; \alpha \in F \text{ ise} \\ \in U_\lambda(\alpha) & ; \alpha \notin F, \alpha \in S_\lambda, \lambda \in \Lambda'' \text{ ise} \\ \in X_\alpha & ; \alpha \notin F \cup \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda''} S_\lambda \right) \text{ ise} \end{cases}$$

olacak şekilde, Seçme Aksiyomu yardımıyla seçilen elemanlar aracılığıyla oluşturulan $q = \{q_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \in \prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha$ noktası için, açıkça görülür ki $q \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda''} U_\lambda \neq \emptyset$ gerçekleşir. Böylece $\mathcal{V} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda''}$ alınarak kanıt tamamlanır. ■

Örnek III.4 κ bir güçsüz erişilmez kardinal sayı (varsa) olmak üzere, her bir $\lambda < \kappa$ kardinal sayısı için $|X_\lambda| = \lambda$ gerçekleyen X_λ kesikli uzayları aracılığıyla tanımlanan $X = \prod_{\lambda < \kappa} X_\lambda$ çarpım uzay göz önüne alınsın. Bu durumda $c(X) = \kappa$ gerçekleşir; ancak X uzayında κ kardinaliteli gözenekli aile tanımlanamaz. Kısacası X uzayında tanımlı her gözenekli ailenin kardinalitesi $< \kappa$ dır.

Çözüm. Kolayca görülebilir ki her bir $\lambda < \kappa$ kardinal sayısı için X_λ kesikli uzayı κ -sığasına sahiptir; çünkü keyfi sabit bir $\lambda < \kappa$ kardinal sayısı için X_λ uzayında tanımlı, $|\mathcal{U}| = \kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{U}$ boştan farklı açık kümeler ailesi göz önüne

alındığında, her bir $x \in X_\lambda$ noktası için $\mathcal{U}(x) = \{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ olarak tanımlanırsa, açıktır ki $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in X_\lambda} \mathcal{U}(x)$ gerçekleşir. κ bir düzenli kardinal sayı (kısacası $cf(\kappa) = \kappa$) olduğundan en az bir $x \in X_\lambda$ için $|\mathcal{U}(x)| = \kappa$ gerçekleşir. Böylece $\{x\} \subseteq \bigcap \mathcal{U}(x) \neq \emptyset$ olduğundan X_λ uzayının κ -sığasına sahip olduğu anlaşılır. Bu durumda Sanin Teoremi nedeniyle X çarpım uzayı da κ -sığasına sahip olur ve böylece $c(X) \leq \kappa$ gerçekleştiği anlaşılır. Daha da önemlisi X uzayında κ kardinaliteli hiçbir gözenekli ailenin *tanımlanamadığı* anlaşılır. Diğer taraftan $c(X) \geq \kappa$ gerçekleşir; çünkü her $\lambda < \kappa$ kardinali için $\pi_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$ izdüşüm fonksiyonu sürekli olduğundan, $\{\pi_\lambda^{-1}(\{x\})\}_{x \in X_\lambda}$ ailesi X uzayında bir gözenekli aile olur. Sonuç olarak her $\lambda < \kappa$ kardinal sayısı için $\lambda = |X_\lambda| = |\{\pi_\lambda^{-1}(\{x\})\}_{x \in X_\lambda}| \leq c(X)$ gerçekleştiğinden $\kappa \leq c(X)$ elde edilir. ■

κ bir güçsüz erişilmez kardinal sayı olmak üzere, yukarıdaki örneğe benzer biçimde $c(Y) = \kappa$ gerçekleyen ancak κ kardinaliteli hiçbir gözenekli ailesi *bulunmayan* bir Y tıkkız Hausdorff uzayı tanımlanabilir. Bunun için yukarıdaki X_λ ($\forall \lambda < \kappa$ kardinali için) kesikli uzaylarının tek nokta (ya da Cech-Stone) tıkkızlaşması Y_λ ile gösterilirse, $Y = \prod_{\lambda < \kappa} Y_\lambda$ çarpım uzayı olarak tanımlamak yeterlidir. Herhangi bir X uzayının herhangi bir yoğun $S \subseteq X$ alt kümesi için $c(S) = c(X)$ olması gerçeğinden yararlanarak yukarıdaki gibi iddia kanıtlanır.

Yukarıdaki örnek Teorem III.18 için tamamlayıcı niteliktedir.

III.4 Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi ve Bazı Önemli Sonuçları

Bu kısımda ilk olarak çarpım uzayları üzerinde tanımlı bazı kardinal değişmezlerin temel özellikleri görülecektir. Daha sonra ünlü Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi ve bu teoremden yararlanarak bazı önemli sonuçlar verilecektir. Çarpım uzaylarının yoğunluk sayısı hakkında bilgi veren bu ünlü teorem Hewitt (bkz: [8]) ve Pondiczery

tarafından bağımsız olarak kanıtlanmıştır. Ayrıca Marczewski, bağımsız olarak $\leq c$ sayıda ayrılabilir uzayın çarpım uzayının da ayrılabilir olduğunu kanıtlamıştır. Bu yüzden bu teoreme Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi denir. Topolojide birçok *aykırı* örnek bu teoremden yararlanarak tanımlanabilir. Örneğin

(1) Hiçbir noktasının sayılabilir yerel tabanı bulunmayan, sayılabilir bir uzay tanımlanabilir;

(2) Tıkız, sayılabilir zincir koşulunu gerçekleyen ancak ayrılabilir *olmayan* bir uzay tanımlanabilir.

Bu kısımda son olarak çarpım uzaylarının Suslin sayısı ile ilgili bazı temel teoremler görülecektir. Öncelikle gerekli olduğundan bazı tanımlar verilmelidir.

$\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ topolojik uzayların bir ailesi ($X_\alpha \neq \emptyset$ ($\forall \alpha \in \Lambda$)) varsayıldığı unutulmamalıdır!) olmak üzere, bu uzayların Tikhonov çarpım uzayı $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ ile gösterilir. $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ çarpım uzayında her bir $\alpha \in \Lambda$ için $A_\alpha \subseteq X_\alpha$ olmak üzere $\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ ($\subseteq \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$) formundaki kümeler **kutu küme** denir. $\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ kümesinin $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ uzayında açık olması için gerek ve yeter koşul *en fazla sonlu sayıda* A_α ($\subseteq X_\alpha$) kümesinin *açık öz alt küme* olmasıdır. Eğer $V = B_{\alpha_1} \times B_{\alpha_2} \times \dots \times B_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_n} X_\alpha \subseteq \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ bir açık kutu küme ise $B_{\alpha_i} \subseteq X_{\alpha_i}$ ($i = 1, \dots, n$) alt kümeleri birer açık öz alt küme varsayılır. $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ uzayının tüm boştan farklı açık kutu kümelerinin ailesinin bu uzay için bir taban tanımladığı bilinmektedir. $\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ ($\subseteq X$) bir kutu küme olmak üzere, $\{\alpha \in \Lambda : A_\alpha \neq X_\alpha\}$ kümesine $\prod_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ kümesinin **belirleyici indisler** kümesi denir. $V = \prod_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$ kümesi, X uzayında bir açık kutu küme ve $\Lambda' \subseteq \Lambda$ olsun. Bu durumda $\prod_{\alpha \in \Lambda'} V_\alpha$ kümesi, $Y = \prod_{\alpha \in \Lambda'} X_\alpha$ uzayında bir açık kutu küme olur ve bu kümeye V kümesinin Y uzayına **izdüşümü** denir.

Sonlu sayıda uzayın çarpım uzayı üzerinde tanımlanan w , nw , πw , $\pi \chi$ ve χ kardinal değişmezlerinin özelliklerini incelemek kolaydır. Gerçekten, sabit bir $2 \leq n \in \mathbb{N}$ sayısı için keyfi $X_1, X_2, \dots, X_n$ uzayları göz önüne alınıp bunların çarpım uzayına X denirse,

herhangi bir $\phi \in \{w, nw, \pi w, \pi\chi, \chi\}$ için

$$\phi(X) = \phi\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) \stackrel{(*)}{=} \prod_{i=1}^n \phi(X_i) = \max\{\phi(X_i) : 1 \leq i \leq n\}$$

gerçeklenir. Gerçekten, kardinal değişmezlerin sonsuz varsayıldığı unutulmadan, $\phi = w$ için (diğerleri benzer şekilde kanıtlanır) iddiayı kanıtlamak yeterlidir. Her bir $i \leq n$ pozitif tam sayısı için X_i uzayının, $|\mathcal{B}_i| = w(X_i) \geq \aleph_0$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}_i$ tabanı vardır. Böylece $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n : B_i \in \mathcal{B}_i \ (\forall i \in \mathbb{N}_n)\}$ olarak tanımlanan $\mathcal{B}$ ailesi X uzayının bir tabanı olduğundan $w(X) \leq |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \dots \times \mathcal{B}_n| = \prod_{i=1}^n |\mathcal{B}_i| = \prod_{i=1}^n w(X_i) = \max_{1 \leq i \leq n} w(X_i)$ olup ağırlık sayısı *monoton* bir özellik olduğundan ters eşitsizlik apaçıktır. (πw ve $\pi\chi$ kardinal değişmezleri monoton olmasada çarpım uzayının tanımından kolayca $\pi\chi(X_i) \leq \pi\chi(X)$, $\pi w(X_i) \leq \pi w(X)$ ($1 \leq i \leq n$) olduğu görülür.) Yukarıdaki (*) eşitliği her kardinal değişmez için doğru olmak zorunda değildir. Örneğin Lindelöf ve saçılım sayıları için aşağıdaki örnekte görüleceği gibi $s(X) < s(X \times X)$ ve $L(X) < L(X \times X)$ gerçekleyen bir X uzayı vardır. Bu örnekte şu temel bilgi kullanılacaktır:

Temel Bilgi: $\mathbb{R}$ kümesinde, *herhangi bir* A alt kümesinin $A_0 = \{x \in A : \exists y_x > x, (x, y_x) \cap A = \emptyset\}$ alt kümesi sayılabilir elemanlıdır.

Gerçekten, $A_0 = \emptyset$ ise iddia apaçıktır. Şimdi $A_0 \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda her bir $x \in A_0$ için var olan ve $y_x > x$, $(x, y_x) \cap A = \emptyset$ gerçekleyen uygun bir $y_x \in \mathbb{R}$ aracılığıyla $I_x = (x, y_x)$ ($\forall x \in A_0$) aralıkları (her bir $x \in A_0$ için I_x aralık olduğundan sayılamaz elemanlıdır) ve $\mathcal{I} = \{I_x\}_{x \in A_0}$ ailesi tanımlanırsa, kolayca görülebilir ki *farklı* $x_1, x_2 \in A_0$ elemanları için $I_{x_1} \cap I_{x_2} = \emptyset$ gerçekleşir; çünkü A_0 kümesinin tanımı gereği x_1, x_2 elemanlarına karşılık $y_{x_i} > x_i$, $(x_i, y_{x_i}) \cap A = \emptyset$ ($i = 1, 2$) gerçekleyen y_{x_1}, y_{x_2} gerçel sayıları var ve üstelik $I_{x_i} = (x_i, y_{x_i})$ ($i = 1, 2$) olmak üzere, sözgelimi $x_1 < x_2$ ise $y_{x_1} \leq x_2$ olur (eğer $x_2 < y_{x_1}$ olsaydı $x_1 < x_2 < y_{x_1}$ gözlenerek $x_2 \in (x_1, y_{x_1}) \cap A = \emptyset$ çelişkisi bulunurdu) böylelikle $I_{x_1} \cap I_{x_2} = (x_1, y_{x_1}) \cap (x_2, y_{x_2}) = \emptyset$ elde edilir. Benzer biçimde $x_2 < x_1$ ise $y_{x_2} \leq x_1$ olur ve sonuçta yine $I_{x_1} \cap I_{x_2} = \emptyset$ bulunur. Sonuç olarak

$x_1, x_2 \in A_0$ için $x_1 \neq x_2$ ise $I_{x_1} \neq I_{x_2}$ gerçekleşir ve böylece $\mathbb{Q}$ kümesinin niteliği gereği Seçme Aksiyomu kullanılarak her $x \in A_0$ için *tek türlü* belirli bir $r_x \in I_x \cap \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı seçilirse, $\mathcal{I} = \{I_x\}_{x \in A_0}$ aralıklar ailesinin iki farklı üyesi ayrık olduğundan $\phi(I_x) = r_x$ ($\forall x \in A_0$) biçiminde tanımlanan $\phi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonu apaçık biçimde bire-bir olur, böylelikle $|\mathcal{I}| = |A_0| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ istenen sonucu bulunur.

Örnek III.5 $L(X) < L(X \times X)$ ve $s(X) < s(X \times X)$ koşullarını gerçekleyen bir X uzayı vardır.

Çözüm. $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde $\mathfrak{R}_x = \{[x, x + \varepsilon) : 0 < \varepsilon\}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) komşuluk aileleri tarafından tanımlanan esas komşuluk sisteminin tanımladığı topolojiye **alt limit topolojisi** denir ve bu topoloji $\mathbb{R}_a$ ile gösterilir. Bu topoloji aracılığıyla elde edilen $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ uzayına **alt limit uzayı** (ya da **Sorgenfrey eksen**) denilir. Kolayca görülür ki

$$\mathbb{R}_a = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) : a_n, b_n \in \mathbb{R}, a_n \leq b_n (\forall n \in \mathbb{N}) \right\}$$

olur. Açıktır ki her bir $x \in \mathbb{R}$ gerçel sayısı için $\mathcal{B}_x = \{[x, x + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi x noktası için bir yerel taban tanımlar, böylece $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ uzayının *birinci sayılabilir* olduğu anlaşılır.

Ayrıca $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ uzayı, kalıtımsal ayrılabilir ve kalıtımsal Lindelöf olup ikinci sayılabilir *olmayan* bir uzaydır. Gerçekten, açıktır ki $\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b\}$ ailesi bu uzay için bir taban tanımlar. Eğer alt limit uzayı ikinci sayılabilir olsaydı, Ağırlık Teoremi nedeniyle bu uzay için taban görevi gören sayılabilir üyeli bir $\mathcal{B}_0 = \{[a_n, b_n) : a_n \leq b_n (\forall n \in \mathbb{N})\}$ ($\subseteq \mathcal{B}$) alt ailesi bulunurdu. Bu ise olanaksızdır; çünkü $X_0 = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi apaçık biçimde sayılabilir elemanlı olup $|\mathbb{R} - X_0| = c$ gerçekleşir. Böylece her $x \in \mathbb{R} - X_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için ya $x \notin [a_n, b_n)$ ya da $[a_n, b_n) \not\subseteq [x, x + \frac{1}{2})$ geçerlidir. Gerçekten, bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı için $x \in [a_n, b_n)$ ise $x \notin X_0$ olduğundan

$a_n < x < b_n$ olup

$$\emptyset \neq (a_n, x) \subseteq (a_n, x) - [x, x + \frac{1}{2}) \subseteq [a_n, b_n) - [x, x + \frac{1}{2})$$

bularak $[a_n, b_n) \not\subseteq [x, x + \frac{1}{2})$ gözlenir. Kısacası $\mathcal{B}_0$ alt ailesi $x \in [a_n, b_n) \subseteq [x, x + \frac{1}{2})$ koşullarının ikisini birden gerçekleyen hiçbir $[a_n, b_n) \in \mathcal{B}_0$ üyesine sahip olamadığından $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ uzayı için bir taban tanımlayamaz. O halde Ağırlık Teoremi'nden $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ uzayının ikinci sayılabilir *olmadığı* anlaşılır.

Şimdi herhangi bir $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi üzerinde $(A, (\mathbb{R}_a)_A)$ alt uzayı göz önüne alınsın. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ Öklid uzayı (apaçık olarak $\mathbb{R}^1 \subsetneq \mathbb{R}_a$ gerçekleşir) ikinci sayılabilir olduğundan $(A, \mathbb{R}_A^1)$ alt uzayı da ikinci sayılabilir dolayısıyla ayrılabilir. Bu nedenle sayılabilir üyeli bir $A_1 \subseteq A$ alt kümesi, $(A, \mathbb{R}_A^1)$ alt uzayında yoğun olacak biçimde vardır. Yoğun kümelerle boştan farklı açık kümelerin arakesiti boştan farklı olduğundan, $(x, y) \cap A \neq \emptyset$ ise $(x, y) \cap A \in \mathbb{R}_A^1$ nedeniyle $(x, y) \cap A_1 = ((x, y) \cap A) \cap A_1 \neq \emptyset$ bulunur. Oysa yukarıdaki temel bilgi nedeniyle $A_0 = \{x \in A : \exists y_x > x, (x, y_x) \cap A = \emptyset\}$ kümesi sayılabilir elemanlı olduğundan $A_0 \cup A_1 (\subseteq A)$ alt kümeside sayılabilir elemanlı ve üstelik $(A, (\mathbb{R}_a)_A)$ alt uzayında yoğun olur; çünkü $x \in A$ ve $n \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun $[x, x + \frac{1}{n}) \cap (A_0 \cup A_1) \neq \emptyset$ gözlemek kolaydır. Gerçekten, eğer $(x, x + \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ ise, biraz önceki gözlem nedeniyle

$$\emptyset \neq (x, x + \frac{1}{n}) \cap A_1 \subseteq [x, x + \frac{1}{n}) \cap A_1 \subseteq [x, x + \frac{1}{n}) \cap (A_0 \cup A_1)$$

olur, yok eğer $(x, x + \frac{1}{n}) \cap A = \emptyset$ ise A_0 kümesinin tanımı gereği $x \in A_0$ olur ve bu kez $x \in [x, x + \frac{1}{n}) \cap A_0 \subseteq [x, x + \frac{1}{n}) \cap (A_0 \cup A_1)$ bulunur, kısacası sayılabilir üyeli $A_0 \cup A_1$ kümesi $(A, (\mathbb{R}_a)_A)$ alt uzayındaki her yerel taban üyesiyle (dolayısıyla her açık kümeyle) boştan farklı olarak kesiştiğinden yoğun alt küme olur, dolayısıyla $(A, (\mathbb{R}_a)_A)$ alt uzayı ayrılabilir. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ uzayının *her* alt uzayı ayrılabilir olduğundan bu uzay kalıtımsal ayrılabilir. Kısacası $hd((\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)) = \aleph_0$ gerçekleşir.

Bu kez keyfi bir $(A, (\mathbb{R}_a)_A)$ alt uzayının Lindelöf uzayı olduğu şöyle gözlenebilir:

$(A, (\mathbb{R}_a)_A)$ alt uzayının herhangi bir $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık örtülüğü alınsın. Özel olarak U_α ($\forall \alpha \in \Lambda$) açık kümeleri $x_\alpha < y_\alpha$ gerçekleyen uygun gerçel sayı çifti aracılığıyla $U_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha) \cap A$ gerçekleştirilecek biçimde alınabilir. Böylece

$$A = \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} ([x_\alpha, y_\alpha) \cap A) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} [x_\alpha, y_\alpha)$$

gerçeklenir. $Y_0 = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (x_\alpha, y_\alpha)$ olarak tanımlanırsa, açıktır ki $Y_0 \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} [x_\alpha, y_\alpha)$ gerçekleşir. Dikkat edilirse $F = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} [x_\alpha, y_\alpha) - Y_0$ fark kümesi sayılabilir elemanlıdır; çünkü her bir $x \in F$ gerçel sayısı için, uygun bir $\alpha_x \in \Lambda$ aracılığıyla $x \in [x_{\alpha_x}, y_{\alpha_x}) - Y_0$ olur ve sonuçta $x = x_{\alpha_x}$ bulunur. Demek ki her bir $x \in F$ için $x \notin I_x = (x_{\alpha_x}, y_{\alpha_x})$ ($\subseteq Y_0$) ve $x = x_{\alpha_x}$ olacak biçimde bir $\alpha_x \in \Lambda$ indisi ile boştan farklı I_x aralıkları belirlenebilmektedir. Tıpkı yukarıdaki temel bilgi'nin kanıtında olduğu gibi farklı $x_1, x_2 \in F$ gerçel sayı çifti için $I_{x_1} \cap I_{x_2} = \emptyset$ olduğu görülebilir. O halde $\mathcal{I} = \{I_x\}_{x \in F}$ ailesinin farklı iki üyesi ayrık olduğundan $\mathcal{I}$ ailesi ve dolayısıyla F fark kümesi sayılabilir elemanlıdır. Oysa $\mathcal{G} = \{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ açık aralıklar ailesi ikinci sayılabilir $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ uzayında $Y_0 = \bigcup \mathcal{G} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (x_\alpha, y_\alpha)$ nedeniyle Y_0 için bir açık örtülüş olduğundan, Lindelöf Teoremi nedeniyle uygun α_n ($\forall n \in \mathbb{N}$) indisleri aracılığıyla $Y_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_{\alpha_n}, y_{\alpha_n}) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_{\alpha_n}, y_{\alpha_n})$ gerçekleşir. Sonuç olarak $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} [x_\alpha, y_\alpha) = Y_0 \cup F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_{\alpha_n}, y_{\alpha_n}) \cup F$ bulunur ve sayılabilir elemanlı F ($\subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} [x_\alpha, y_\alpha)$) alt kümesi için de $F \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} [x'_{\alpha_m}, y'_{\alpha_m})$ olacağından $A = \bigcup \mathcal{U}$ kümesi, $\mathcal{U}$ ailesinin uygun sayılabilir tane üyesiyle örtüleceğinden $(A, (\mathbb{R}_a)_A)$ alt uzayı Lindelöf olur, böylece $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ uzayının kalıtımsal Lindelöf olduğu anlaşılır. Kısacası $hL((\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)) = \aleph_0$ gerçekleşir.

Öte yandan

$$\aleph_0 \leq s((\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)) = hc((\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)) \leq hd((\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)) = \aleph_0$$

gerçeklenir; ancak $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a) \times (\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ uzayında $S = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ alt kümesi *kapalı-kesikli* olduğundan

$$\aleph_0 = s((\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)).s((\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)) < 2^{\aleph_0} = s((\mathbb{R}, \mathbb{R}_a) \times (\mathbb{R}, \mathbb{R}_a))$$

ve benzer biçimde

$$\aleph_0 = L((\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)).L((\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)) < 2^{\aleph_0} = e((\mathbb{R}, \mathbb{R}_a) \times (\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)) \leq L((\mathbb{R}, \mathbb{R}_a) \times (\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)) (\leq 2^{\aleph_0})$$

bulunur. Bu örnekten iki Lindelöf (sayılabilir saçılma sahip, sayılabilir uzanımına sahip) uzayın çarpım uzayının aynı özelliğe sahip olmasının *gerekmediği* anlaşılır. ■

Çarpım uzayları üzerinde tanımlanan $w, nw, \pi w, \pi \chi$ ve χ kardinal değişmezlerinin değeri çarpıma katılan *kesiklenmemiş* topolojiden daha ince topolojiyle donatılan çarpan uzaylara bağlıdır; çünkü herhangi bir $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ topolojik uzaylar ailesi için $\Lambda_0 = \{\alpha \in \Lambda : X_\alpha \text{ kesiklenmemiş}\} \subseteq \Lambda$ olarak tanımlanırsa, çarpım uzaylarının *katılmalılık* (*asosyatiflik*) özelliğine göre $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ uzayı ile $\prod_{\alpha \in \Lambda_0} X_\alpha \times \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \Lambda_0} X_\alpha$ uzayı eşyapılıdır. Böylece yukarıdaki gözleminden herhangi bir $\phi \in \{w, nw, \pi w, \pi \chi, \chi\}$ için

$$\phi\left(\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha\right) = \phi\left(\prod_{\alpha \in \Lambda_0} X_\alpha \times \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \Lambda_0} X_\alpha\right) = \phi\left(\prod_{\alpha \in \Lambda_0} X_\alpha\right) \cdot \phi\left(\prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \Lambda_0} X_\alpha\right) = \phi\left(\prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \Lambda_0} X_\alpha\right)$$

gerçeklenir, burada $\prod_{\alpha \in \Lambda_0} X_\alpha$ kesiklenmemiş olduğundan son eşitlik apaçıktır. Bu nedenle aşağıdaki lemma ve teoremden uzayların kesiklenmemiş topolojiden daha ince topoloji ile donatılmış olduğu varsayılacaktır.

Lemma III.4 $|\Lambda| \geq \aleph_0$ olmak üzere, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ kesiklenmemiş topolojiden daha ince topoloji ile donatılmış topolojik uzayların bir ailesi ve $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur:

- (a) $\phi \in \{w, nw, \pi w, \pi \chi, \chi, c, d, L\}$ ise $\phi(X) \geq \phi(X_\alpha)$ ($\forall \alpha \in \Lambda$) geçerlidir.
- (b) $\phi \in \{w, nw, \pi w, \pi \chi, \chi\}$ ise $\phi(X) \geq |\Lambda|$ gerçekleşir.

Kanıt. Herhangi bir $\alpha \in \Lambda$ indisi için $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ izdüşüm fonksiyonu sürekli, açık ve örten bir fonksiyon olduğundan (a) şıkkının doğruluğu kolayca görülebilir. Ayrıca $\phi \in \{w, nw, \chi\}$ için bu önerme bu kardinal değişmezlerin monotonluğundan yararlanarakta görülebilir. (Aslında şu ana kadar tanımladığımız tüm kardinal değişmezler için (a) şıkkı geçerlidir.)

(b) şikkını $\phi = w$ durumunda kanıtlamak yeterli olur. (Diğer durumlarda kanıtlar benzer biçimde yapılabilir.) $\phi = w$ olsun. Öncelikle her bir X_α uzayının $w(X_\alpha) = |\mathcal{B}_\alpha|$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}_\alpha$ tabanı göz önüne alınsın. X_α ($\forall \alpha \in \Lambda$) uzayları kesiklenmemiş topolojiden daha ince topolojiyle donatıldığından

$$\forall \alpha \in \Lambda, \exists B_\alpha^* \in \mathcal{B}_\alpha, B_\alpha^* \neq X_\alpha$$

gerçeklenir. Tüm çözüm boyunca B_α^* kümeleri $\mathcal{B}_\alpha$ tabanlarının bu özel üyelerini gösterecektir. Kısalık amacıyla $w(X) = \kappa$ olarak yazılsın. Herhangi $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \subseteq \Lambda$ sonlu indis kümesi ve her bir $k \in \mathbb{N}_n$ indisi için $B_{\alpha_k} \in \mathcal{B}_{\alpha_k}$ taban kümeleri birer öz alt küme olmak üzere $B_{\alpha_1} \times B_{\alpha_2} \times \dots \times B_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_k} X_\alpha$ türündeki özel kutu kümeleri ailesi $\mathcal{B}$ ile gösterilirse, $\mathcal{B}$ ailesinin X çarpım uzayı için bir taban olduğu ve Ağırlık Teoremi'nden bu tabanın taban görevi gören ve $|\mathcal{B}^*| = \kappa$ koşulunu gerçekleyen bir $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}$ alt ailesinin var olduğu iyi bilinmektedir. Her $\alpha \in \Lambda$ için $B_\alpha^* \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta \in \mathcal{B}$ olduğu apaçıktır; ancak bu özel kutu kümenin $\mathcal{B}^*$ ailesinin bir üyesi olması gerekmez. Buna karşın $\mathcal{B}^*$ ailesinin taban olmasının gereği olarak $B = B_{\beta_1} \times B_{\beta_2} \times \dots \times B_{\beta_n} \times \prod_{\beta \neq \beta_k} X_\alpha \subseteq B_\alpha^* \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta$ (*) gerçekleyen en az bir $B = B_{\beta_1} \times B_{\beta_2} \times \dots \times B_{\beta_n} \times \prod_{\beta \neq \beta_k} X_\alpha \in \mathcal{B}^*$ kesinlikle vardır. (*) kapsamının gereği olarak uygun bir $1 \leq k_0 \leq n$ sayesinde $\alpha = \beta_{k_0}$ ve $B_{\beta_{k_0}} \subseteq B_\alpha^* (= B_{\beta_{k_0}}^*)$ gerçekleşir. Yukarıda varlığı kanıtlanan $B = B_{\beta_1} \times B_{\beta_2} \times \dots \times B_{\beta_n} \times \prod_{\beta \neq \beta_k} X_\alpha \in \mathcal{B}^*$ üyesinin belirleyici indisler kümesini, $\alpha \in \Lambda$ indisi aracılığıyla tanımlandığı için kısaca $\Lambda(\alpha) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ ve B taban üyesi ise $B(\Lambda(\alpha))$ ile gösterilirse, şu sonuca ulaşılır:

$$\forall \alpha \in \Lambda, \exists \Lambda(\alpha) \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda), \exists B(\Lambda(\alpha)) \in \mathcal{B}^*, B(\Lambda(\alpha)) \subseteq B_\alpha^* \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta$$

Unutulmamalıdır ki $B(\Lambda(\alpha)) \subseteq B_\alpha^* \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta$ kapsamı özellikle $\alpha \in \Lambda(\alpha)$ sonucunu verir. Şimdi sonlu ötesi tümevarımdan yararlanarak $\alpha \neq \beta$ için $B(\Lambda(\alpha)) \neq B(\Lambda(\beta))$ olacak biçimde daha özel $\Lambda(\alpha) \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda)$ belirleyici indis kümeleri belirlenebilir. Ünlü Zermelo Teoremi nedeniyle Λ indis kümesi iyi sıralanmıştır. İndelenmesi gereken iki durum vardır. Eğer $|\Lambda| = \aleph_0$ ise, bire-bir indislemeye $\Lambda = \{\alpha_n : n < \aleph_0\}$ yazıp,

önce $B(\Lambda(\alpha_0)) \subseteq B_{\alpha_0}^* \times \prod_{\beta \neq \alpha_0} X_\beta$ ve böylece $\alpha_0 \in \Lambda(\alpha_0)$ gerçekleyen $B(\Lambda(\alpha_0)) \in \mathcal{B}^*$ üyesi ile $\Lambda(\alpha_0) \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda)$ indis kümesini, sonra $\alpha_{n_0} = \alpha_0$ tanımlayıp $\alpha_{n_1} = \min(\Lambda - \Lambda(\alpha_0)) \in \Lambda - \Lambda(\alpha_0)$ olmak üzere $B(\Lambda(\alpha_{n_1})) \subseteq B_{\alpha_{n_1}}^* \times \prod_{\beta \neq \alpha_{n_1}} X_\beta$ ($\alpha_{n_1} \in \Lambda(\alpha_{n_1})$ olduğuna dikkat ederek) $B(\Lambda(\alpha_{n_1})) \in \mathcal{B}^*$ üyesiyle $\Lambda(\alpha_{n_1}) \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda)$ indis kümesini, m -inci adıma gelindiğinde $\Lambda(\alpha_{n_0}), \dots, \Lambda(\alpha_{n_m})$ sonlu indis kümeleri belirlenmiş olduğunda $\left| \bigcup_{k \leq m} \Lambda(\alpha_{n_k}) \right| < \aleph_0 = |\Lambda|$ nedeniyle sonsuz elemanlı $\Lambda - \bigcup_{k \leq m} \Lambda(\alpha_{n_k})$ kümesinin iyi tanımlı olması nedeniyle $\alpha_{n_{m+1}} = \min(\Lambda - \bigcup_{k \leq m} \Lambda(\alpha_{n_k}))$ elemanı aracılığıyla $B(\Lambda(\alpha_{n_{m+1}})) \subseteq B_{\alpha_{n_{m+1}}}^* \times \prod_{\beta \neq \alpha_{n_{m+1}}} X_\beta$ gerçekleyen $B(\Lambda(\alpha_{n_{m+1}})) \in \mathcal{B}^*$ üyesiyle $\Lambda(\alpha_{n_{m+1}}) \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda)$ ($\alpha_{n_{m+1}} \in \Lambda(\alpha_{n_{m+1}})$) alt indis kümesi tanımlanarak tümevarım sürdürülürse, sonuçta her bir $m < \aleph_0$ sonlu ordinaline karşılık bir $\Lambda(\alpha_{n_m}) \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda)$ indis kümesi, $m \neq k$ için $\Lambda(\alpha_{n_m}) \neq \Lambda(\alpha_{n_k})$ ve böylece $B(\Lambda(\alpha_{n_m})) \neq B(\Lambda(\alpha_{n_k}))$ koşulları gerçekleştirilecek biçimde belirlenmiş olur. Gerçekten, sözgelimi $k < m$ ise $\alpha_{n_m} \in \Lambda(\alpha_{n_m})$ ve $\alpha_{n_m} = \min(\Lambda - \bigcup_{i < m} \Lambda(\alpha_{n_i})) \in \Lambda - \bigcup_{i < m} \Lambda(\alpha_{n_i}) \subseteq \Lambda - \Lambda(\alpha_{n_k})$ gerçekleştiğinden $\alpha_{n_m} \in \Lambda(\alpha_{n_m}) - \Lambda(\alpha_{n_k})$ olup belirleyici indis kümeleri farklı olduğundan $B(\Lambda(\alpha_{n_m})) \neq B(\Lambda(\alpha_{n_k}))$ elde edilir. Böylece $\varphi : W(\aleph_0) \longrightarrow \mathcal{B}^*$, $\varphi(m) = B(\Lambda(\alpha_{n_m}))$ olarak tanımlanan fonksiyon *bire-bir* olduğundan $\aleph_0 = |\Lambda| \leq |\mathcal{B}^*| = \kappa = w(X)$ bulunur. Şimdi $\aleph_0 < |\Lambda| = \kappa_0$ olsun. Bu durumda indislemeye kolaylık açısından $\Lambda = W(\kappa_0)$ alınabilir. Herhangi bir $\alpha_0 < \kappa_0$ ordinali alındığında, önceki adımlarda her bir $\alpha < \alpha_0$ için $\Lambda(\gamma_\alpha) \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda)$ sonlu indis kümeleri $B(\Lambda(\gamma_\alpha)) \subseteq B_{\gamma_\alpha}^* \times \prod_{\beta \neq \gamma_\alpha} X_\beta$ böylelikle $\gamma_\alpha \in \Lambda(\gamma_\alpha)$ koşulları yerine gelecek biçimde tanımlanmış olduğunda, $\left| \bigcup_{\alpha < \alpha_0} \Lambda(\gamma_\alpha) \right| < \kappa_0$ gerçekleştiğinden sayılamaz sonsuz elemanlı $\Lambda - \bigcup_{\alpha < \alpha_0} \Lambda(\gamma_\alpha)$ kümesinin $\gamma_{\alpha_0} = \min(\Lambda - \bigcup_{\alpha < \alpha_0} \Lambda(\gamma_\alpha)) \in \Lambda - \bigcup_{\alpha < \alpha_0} \Lambda(\gamma_\alpha)$ elemanı iyi tanımlı olup bu ordinal sayı aracılığıyla $B(\Lambda(\gamma_{\alpha_0})) \subseteq B_{\gamma_{\alpha_0}}^* \times \prod_{\beta \neq \gamma_{\alpha_0}} X_\beta$ gerçekleyen $B(\Lambda(\gamma_{\alpha_0})) \in \mathcal{B}^*$ üyesiyle $\Lambda(\gamma_{\alpha_0}) \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda)$ indis kümesi tanımlanarak sonlu ötesi tümevarım sürdürülür. Sonuçta yukarıdakine benzer biçimde $\alpha < \kappa_0$ ordinal sayısını $B(\Lambda(\gamma_\alpha)) \in \mathcal{B}^*$ üyesine eşleştiren fonksiyon *bire-bir* olduğundan yine $\kappa_0 = |\Lambda| \leq |\mathcal{B}^*| = \kappa = w(X)$ bulunur. ■

(b) şikkının $\phi = \pi\chi$ durumu için kanıtlaması kısaca şu biçimde de yapılabilirdi: (Bu durumda kanıt verilirse, $\pi\chi(X) \leq \min\{\pi w(X), \chi(X), w(X)\}$ olduğundan $\phi = \pi w$, $\phi = \chi$ ve $\phi = w$ durumları için de iddia kanıtlanmış olur.) Her bir $\alpha \in \Lambda$ için X_α uzayında tanımlı bir G_α açık öz alt kümesi göz önüne alınsın. Keyfi bir $p = \{p_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \in \prod_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$ noktası için $\pi\chi(p, X) \geq |\Lambda|$ ve sonuçta $\pi\chi(X) \geq |\Lambda|$ gerçekleşir; çünkü p noktasının herhangi bir $\mathcal{V}_p$ yerel π -tabanı göz önüne alınırsa, her bir $\alpha \in \Lambda$ için $\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha) = G_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta$ kümesi p noktasının bir açık komşuluğu olduğundan $V_\alpha \subseteq G_\alpha \times \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta$ gerçekleyen $V_\alpha \in \mathcal{V}_p$ üyesi vardır. Kolayca görülebilir ki her $V \in \mathcal{V}_p$ üyesine karşılık $\Lambda(V) = \{\alpha \in \Lambda : V = V_\alpha\}$ olarak tanımlanan küme *sonlu* elemanlıdır. Böylece $\mathcal{V}_p$ 'den Λ 'ya örten dolayısıyla Λ 'dan $\mathcal{V}_p$ 'ye bire-bir fonksiyon tanımlanabilir ve sonuçta $|\mathcal{V}_p| \geq |\Lambda|$ elde edilir.

(b) önermesinin yoğunluk, Suslin ve Lindelöf sayıları için doğru olmasının gerekmediği Örnek III.11'de görülecektir.

Teorem III.23 $|\Lambda| \geq \aleph_0$ olmak üzere, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ kesiklenmemiş topolojiden daha ince topolojiyle donatılmış topolojik uzayların bir ailesi ve $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ olsun. Bu durumda $\phi \in \{w, nw, \pi w, \pi\chi, \chi\}$ ise $\phi(X) = |\Lambda| \vee \sup_{\alpha \in \Lambda} \phi(X_\alpha)$ gerçekleşir. Ek olarak her $\alpha \in \Lambda$ için X_α bir T_1 uzayı ise $\psi(X) = |\Lambda| \vee \sup_{\alpha \in \Lambda} \psi(X_\alpha)$ gerçekleşir.

Kanıt. Bir önceki lemma nedeniyle her bir $\phi \in \{w, nw, \pi w, \pi\chi, \chi\}$ kardinal değişmezi için $|\Lambda| \vee \sup_{\alpha \in \Lambda} \phi(X_\alpha) = |\Lambda| \cdot \sup_{\alpha \in \Lambda} \phi(X_\alpha) \leq \phi(X)$ gerçekleştiği açık olup, ters eşitsizliği göstermek kolaydır. Bu eşitsizliği w, nw ve πw genel kardinal değişmezleri ile $\pi\chi$ ve χ yerel kardinal değişmezleri için iki ayrı durumda göstermek gerekir. Şimdi $\phi = w$ ($\phi = nw$ ve $\phi = \pi w$ durumları için de benzer kanıtlama yapılır) olsun. Her bir X_α uzayında $w(X_\alpha) = |\mathcal{B}_\alpha|$ gerçekleyen $\mathcal{B}_\alpha$ tabanları göz önüne alınsın. Λ indis kümesinin ikişerli farklı $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ indisleriyle $B_{\alpha_k} \in \mathcal{B}_{\alpha_k}$ ($\forall k \in \mathbb{N}_n$) taban kümeleri aracılığıyla tanımlanan $B^* = B_{\alpha_1} \times B_{\alpha_2} \times \dots \times B_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_k} X_\alpha$ kutu kümelerinin ailesi $\mathcal{B}$, iyi bilindiği gibi X çarpım uzayı için bir tabandır. Böylece $w(X) \leq |\mathcal{B}| \leq |\Lambda| \vee \sup_{\alpha \in \Lambda} w(X_\alpha)$

bulunur. Burada son eşitsizliği göstermek için kısalık amacıyla $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{B}_\alpha$ ailesini tanımlayıp, $(*)$ eşitliğinde yazılı her $B \in \mathcal{B}$ üyesine

$$\varphi(B) = ((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \dots, B_{\alpha_n})) \in \Lambda^n \times \mathcal{A}^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Lambda^n \times \mathcal{A}^n)$$

elemenini eşleştiren $\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Lambda^n \times \mathcal{A}^n)$ fonksiyonunun bire-bir olduğunu göstermek yeterlidir. Bu ise kolaydır; çünkü $B = B_{\alpha_1} \times B_{\alpha_2} \times \dots \times B_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_k} X_\alpha$ ve $B^* = B_{\beta_1} \times B_{\beta_2} \times \dots \times B_{\beta_m} \times \prod_{\beta \neq \beta_k} X_\beta$ taban üyeleri için $\varphi(B) = \varphi(B^*)$ ise zorunlu olarak $n = m$ ve $B = B^*$ olması gerektiği açıktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &\leq \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Lambda^n \times \mathcal{A}^n) \right| \leq \aleph_0 \vee \sup_{n \in \mathbb{N}} |\Lambda^n \times \mathcal{A}^n| \stackrel{**}{=} \aleph_0 \vee \sup_{n \in \mathbb{N}} |\Lambda \times \mathcal{A}| \\ &= \aleph_0 \vee |\Lambda \times \mathcal{A}| = |\Lambda| \vee \left| \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{B}_\alpha \right| \leq |\Lambda| \vee \sup_{\alpha \in \Lambda} w(X_\alpha) \end{aligned}$$

aranan sonucu bulunur. Yukarıda $(**)$ eşitliğinde, $|\Lambda|$ ve $|\mathcal{A}|$ sonsuz kardinal sayılar olduğundan $|\Lambda^n \times \mathcal{A}^n| = |\Lambda^n| \cdot |\mathcal{A}^n| = |\Lambda| \cdot |\mathcal{A}| = |\Lambda \times \mathcal{A}|$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) gerçeği kullanılmıştır.

Şimdi $\phi = \chi$ ($\phi = \pi\chi$ durumunda benzer yol izlenir) olsun. Yukarıda yapılanlara benzer yollarla herhangi bir $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \in X$ noktası için $\chi(x, X) = |\Lambda| \vee \sup_{\alpha \in \Lambda} \chi(x_\alpha, X_\alpha)$ gerçeğlendiği kanıtlanabilir. Böylece

$$\begin{aligned} \chi(X) &= \sup_{x \in X} \chi(x, X) = \sup_{x \in X} (|\Lambda| \cdot \sup_{\alpha \in \Lambda} \chi(x_\alpha, X_\alpha)) \\ &= |\Lambda| \cdot \sup_{\alpha \in \Lambda} (\sup_{y \in X_\alpha} \chi(y, X_\alpha)) = |\Lambda| \vee \sup_{\alpha \in \Lambda} \chi(X_\alpha) \end{aligned}$$

bulunur. Teoremin ikinci iddiası biraz önce yapılanlara benzer biçimde kanıtlanır. ■

Yukarıdaki teoreme göre kesiklenmemiş topolojiden daha ince topolojiyle donatılmış *en fazla* sayılabilir sayıda ikinci sayılabilir (birinci sayılabilir) uzayın çarpım uzayının ikinci sayılabilir (birinci sayılabilir) olduğu anlaşılır. Daha genel olarak herhangi bir çarpım uzayının ikinci sayılabilir olması için gerek ve yeter koşul çarpıma katılan tüm uzayların ikinci sayılabilir olması ve en fazla sayılabilir sayıda uzayın kesiklenmemiş topolojiden daha ince topolojiyle donatılmış uzay olmasıdır.

X ve Y herhangi iki topolojik uzay olmak üzere kolayca $d(X \times Y) = d(X).d(Y)$ gerçeklendiği kanıtlanabilir. Gerçekten, $A \times B \subseteq X \times Y$ alt kümesi için $kap_{X \times Y}(A \times B) = kap_X A \times kap_Y B$ eşitliğinden yararlanarak kolayca $d(X \times Y) \leq d(X).d(Y)$ olduğu görülür, ters eşitsizlik ise Lemma III.4(a)'dan açıktır. Daha genel olarak sonlu sayıda herhangi $X_1, X_2, \dots, X_n$ uzayları için $d(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) = \max_{1 \leq i \leq n} d(X_i)$ gerçeklendiği benzer biçimde görülebilir.

Aşağıdaki ünlü teorem daha büyük kardinaliteli indis kümesine sahip çarpım uzaylarının yoğunluk sayısı hakkında bilgi verir. Bilindiği gibi aynı indis kümesiyle indislenmiş $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ve $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ topolojik uzaylar ailesi ve üstelik her bir $\alpha \in \Lambda$ için $f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$ fonksiyonları tanımlıysa $\prod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha : \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$, $(\prod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha)(\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}) = \{f_\alpha(x_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ gerçekleyen $f = \prod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha$ fonksiyonuna f_α fonksiyonlarının **çarpım fonksiyonu** denir. Kolayca görülebilir ki f fonksiyonunun sürekli (bire-bir, örten, kapalı) olması için gerek ve yeter koşul *tüm* f_α fonksiyonlarının sürekli (bire-bir, örten, kapalı) olmasıdır. Öte yandan f fonksiyonunun açık olması için gerek ve yeter koşul tüm f_α fonksiyonlarının açık ve *en fazla sonlu tanesi dışında* hepsinin örten olmasıdır.

Teorem III.24 (Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi): κ bir sonsuz kardinal sayı ve $|\Lambda| \leq 2^\kappa$ olsun. Her bir $\alpha \in \Lambda$ için $d(X_\alpha) \leq \kappa$ gerçekleyen X_α uzaylarının $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ çarpım uzayı için $d(X) \leq \kappa$ gerçekleşir. Özel olarak $\leq 2^{\aleph_0}$ sayıda ayrılabilir uzayın çarpım uzayı da ayrılabilir.

Kanıt. $|D| = \kappa$ gerçekleyen D kümesi kesikli topolojiyle donatıldığında elde edilen uzay kısaca $D(\kappa)$ ile gösterilirse, her bir $\alpha \in \Lambda$ için $D(\kappa)$ kesikli uzayından X_α uzayının $\leq \kappa$ kardinaliteli yoğun alt kümesine (hipotez gereği böyle kümeler var) sürekli örten bir f_α fonksiyonu tanımlanabilir; çünkü kesikli bir uzaydan herhangi bir uzaya tanımlanan *tüm* fonksiyonlar sürekli. Her $\alpha \in \Lambda$ için $P_\alpha = D(\kappa)$ olmak üzere $P = \prod_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha = (D(\kappa))^\Lambda$ olarak tanımlanırsa, $f = \prod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha : P \longrightarrow X$, $f(\{p_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}) = \{f_\alpha(p_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ gerçekleyen f çarpım fonksiyonu sürekli olur. Böylece eğer

$d(P) \leq \kappa$ olduğu gösterilirse, herhangi bir Y uzayında yoğun bir B alt uzayının herhangi bir yoğun alt kümesinin Y ana uzayında da yoğun olması ve sürekli örten fonksiyonlar altında yoğun kümelerin görüntüsünde yoğun olması gerçeklerinden yararlanarak ($d(P) \geq \kappa$) $d(X) \leq \kappa$ sonucu elde edilir. Demek ki $d(P) \leq \kappa$ gerçekleştiğini kanıtlamak yeterlidir. Bu amaçla $|\Lambda| = 2^\kappa$ varsayılabilir; çünkü $|\Lambda| < 2^\kappa$ ise 2^κ sayıda kesiklenmemiş (özel olarak tek noktadan oluşan) uzay çarpıma dahil edilir, bu durumda yoğunluk sayısının değişmeyeceği kolayca görülür. Özel olarak $\{0, 1\}$ kümesini kesikli topolojiyle donatarak elde edilen kesikli uzay $D(2)$ ile gösterilirse, (genel olarak herhangi iki noktalı kesikli uzay $D(2)$ ile gösterilir) apaçıktır ki $D(2)$ bir T_2 uzayıdır. Böylece her bir $\alpha \in D$ için $D_\alpha = D(2)$ olmak üzere $\prod_{\alpha \in D} D_\alpha = (D(2))^D$ çarpım uzayı bir T_2 uzayı olur. Ayrıca bir önceki teorem nedeniyle $w((D(2))^D) = |D| = \kappa$ olup, $(D(2))^D$ uzayının $|\mathcal{B}| = \kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}$ tabanı bulunur. $(D(2))^D$ uzayı bir T_2 uzayı olduğundan ikişer ikişer farklı $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n \in (D(2))^D$ noktalarına karşılık $\mathcal{B}$ tabanının $\zeta_k \in B_{\zeta_k} \in \mathcal{B}$ ve üstelik $k \neq i$ için $B_{\zeta_k} \cap B_{\zeta_i} = \emptyset$ ($k, i \in \mathbb{N}_n$) koşullarını gerçekleyen yani ikişerli ayrık olan n tane üyesi vardır. Bu durumda

$$\mathcal{B}^* = \{\{B_1, B_2, \dots, B_n\} : n \in \mathbb{N}, B_k \in \mathcal{B} (\forall k \in \mathbb{N}_n), B_k \cap B_i = \emptyset (k \neq i)\} \subset \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\mathcal{B})$$

ailesi göz önüne alınsın. Öte yandan $|(D(2))^D| = 2^\kappa$ olup $(D(2))^D$ bir indis kümesi olarak $\Lambda = (D(2))^D = (\{0, 1\})^D$ gerçekleştirilecek biçimde alınabilir, böylece

$$P = (D(\kappa))^{(D(2))^D} = (D(\kappa))^{\{0,1\}^D}$$

olur. Keyfi sabit bir $\alpha_0 \in D(\kappa)$ noktası göz önüne alınsın. Şimdi her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} \in \mathcal{B}^*$ ve her $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in (D(\kappa))^n$ için özel

$$p(\{B_1, B_2, \dots, B_n\}, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \in P = (D(\kappa))^{(D(2))^D} = \prod_{\zeta \in \Lambda} P_\zeta$$

(her $\zeta \in \Lambda$ için $P_\zeta = D(\kappa)$) noktalarının ζ -nıncı bileşenleri

$$(p(\{B_1, B_2, \dots, B_n\}, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)))_\zeta = \begin{cases} \alpha_k & ; \quad \zeta \in B_k \text{ ise} \\ \alpha_0 & ; \quad \zeta \notin \bigcup_{k=1}^n B_k \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde ve tüm bu özel noktaların kümesi

$$S = \{p(\{B_1, B_2, \dots, B_n\}, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) : n \in \mathbb{N}, \{B_1, B_2, \dots, B_n\} \in \mathcal{B}^*, \alpha_i \in D(\kappa) \ (\forall i \in \mathbb{N}_n)\}$$

olarak tanımlansın. Kolayca görülebilir ki her bir $p(\{B_1, B_2, \dots, B_n\}, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \in S$ noktasına $((B_1, B_2, \dots, B_n), (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \in \mathcal{B}^n \times (D(\kappa))^n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{B}^n \times (D(\kappa))^n)$ sıralı ikilisini eşleştiren fonksiyon bire-bir olur ve böylece

$$\begin{aligned} |S| &\leq \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{B}^n \times (D(\kappa))^n) \right| \leq \aleph_0 \vee \sup_{n \in \mathbb{N}} |\mathcal{B}^n \times (D(\kappa))^n| \\ &= \aleph_0 \vee \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\mathcal{B}^n| \cdot |(D(\kappa))^n|) = \aleph_0 \vee \sup_{n \in \mathbb{N}} (\kappa^n \cdot \kappa^n) \\ &= \aleph_0 \vee \sup_{n \in \mathbb{N}} (\kappa \cdot \kappa) = \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa \end{aligned}$$

gerçeklenir. Üstelik S kümesi $P = \prod_{\zeta \in \Lambda} P_\zeta = (D(\kappa))^\Lambda$ çarpım uzayında yoğundur; çünkü bu çarpım uzayında herhangi bir taban kümesi, her bir $D(\kappa)$ çarpan uzayında *tek nokta* kümeleri birer taban kümesi olduğu için $B = \{\alpha_1\}_{\zeta_1} \times \{\alpha_2\}_{\zeta_2} \times \dots \times \{\alpha_n\}_{\zeta_n} \times \prod_{\zeta \neq \zeta_k} P_\zeta$ biçiminde olup $S \cap B \neq \emptyset$ gözlemek güç değildir. Gerçekten, B taban kümesinin belirleyici indisleri $(D(2))^D$ uzayının ikişerli farklı olan $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ noktaları olup bunların var olan ikişerli ayrık yerel taban kümeleri sırasıyla $B_1, B_2, \dots, B_n$ ile yazılırsa, onlar ve B taban kümesinin belirleyici çarpan kümelerinde kullanılan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in D(\kappa)$ noktaları aracılığıyla tanımlanan $p(\{B_1, B_2, \dots, B_n\}, (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \in P$ özel noktası $S \cap B$ kümesine aittir. Kısacası $S \subseteq P$ yoğun bir alt küme olup $|S| \leq \kappa$ gerçekleşir ve böylece $d(P) \leq |S| \leq \kappa$ bulunarak teoremin kanıtı tamamlanır. ■

Sonuç III.14 κ sonsuz bir kardinal sayı olmak üzere, her bir $\alpha \in \Lambda$ için $d(X_\alpha) \leq \kappa$ ise $c(\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha) \leq \kappa$ gerçekleşir. Özel olarak herhangi sayıda ayrılabilir uzayın çarpım uzayı sayılabilir zincir koşulunu gerçekler yani ccc uzayıdır.

Kanıt. Kısalık amacıyla $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ olarak yazılsın. Eğer $c(X) > \kappa$ gerçekleşseydi, $c(X) \geq \kappa^+$ olur ve böylece X uzayının κ^+ kardinaliteli bir gözenekli ailesi bulunurdu. $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ ($|\Lambda'| = \kappa^+$) böyle bir aile olsun. Özel olarak her bir $\lambda \in \Lambda'$ için

$\Lambda_\lambda \in P_{<\aleph_0}(\Lambda)$ sonlu indis kümesi ve her $\alpha \in \Lambda_\lambda$ için X_α uzayında uygun $U_\lambda(\alpha)$ açık öz alt kümeleri aracılığıyla $U_\lambda = \prod_{\alpha \in \Lambda_\lambda} U_\lambda(\alpha) \times \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \Lambda_\lambda} X_\alpha$ biçiminde açık kutu küme olarak alınabilir. Açıktır ki her bir $\lambda \in \Lambda'$ için $\Lambda_\lambda \neq \emptyset$ gerçekleşir; çünkü en az bir $\lambda_0 \in \Lambda'$ için $\Lambda_{\lambda_0} = \emptyset$ olsaydı $U_{\lambda_0} = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = X \in \mathcal{U}$ gerçekleşirdi; ancak bu durum $\mathcal{U}$ ailesinin tanımı gereği imkansızdır. Böylece $\Lambda'' = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} \Lambda_\lambda$ ($\subseteq \Lambda$) olarak tanımlanırsa $|\Lambda''| \leq \kappa^+$ ve $\Lambda'' \neq \emptyset$ gerçekleşir. Her bir $\lambda \in \Lambda'$ için $U_\lambda = \prod_{\alpha \in \Lambda_\lambda} U_\lambda(\alpha) \times \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \Lambda_\lambda} X_\alpha$ açık kümesinin $Y = \prod_{\alpha \in \Lambda''} X_\alpha$ uzayına izdüşümünün $V_\lambda = \prod_{\alpha \in \Lambda_\lambda} U_\lambda(\alpha) \times \prod_{\alpha \in \Lambda'' \setminus \Lambda_\lambda} X_\alpha$ kümesi olduğu apaçık olup, bu küme Y uzayında açıktır. Bu kümelerden yararlanarak tanımlanan $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ ailesi Y uzayında κ^+ kardinaliteli bir gözenekli aile tanımlar; ancak bu durumda $\Lambda'' \leq \kappa^+ \leq 2^\kappa$ olması nedeniyle Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi'nden yararlanarak $\kappa^+ \leq c(Y) \leq d(Y) \leq \kappa < \kappa^+$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak X uzayında κ^+ kardinaliteli gözenekli aile *tanımlanamaz* yani $c(X) \leq \kappa$ gerçekleşir. ■

Şimdi Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi'nden yararlanarak ard arda bazı özelliklere sahip uzay örnekleri tanımlanacaktır.

Örnek III.6 $\aleph_0 \leq \kappa_1 \leq \kappa_2$ gerçekleyen κ_1, κ_2 kardinal sayı çiftine karşılık, $c(X) = \kappa_1$ ve $d(X) \geq \kappa_2$ gerçekleyen bir X uzayı tanımlanabilir. Ek olarak $\kappa_1 = \kappa_2$ ise veya $\kappa < \kappa_2$, $2^{2^\kappa} = 2^{2^{\kappa_2}}$ koşullarını gerçekleyen hiçbir κ kardinal sayısı yoksa, $c(X) = \kappa_1$ ve $d(X) = \kappa_2$ gerçekleşecek biçimde bir X uzayı tanımlanabilir.

Çözüm. Eğer $\kappa_1 = \kappa_2$ ise κ_1 kardinaliteli $D(\kappa_1)$ kesikli uzayı aranan koşulları sağlar. Şimdi $\kappa_1 < \kappa_2$ olsun. Bu durumda Λ boştan farklı bir indis kümesi ve her bir $\alpha \in \Lambda$ için $X_\alpha = D(\kappa_1)$ olmak üzere $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ çarpım uzayı göz önüne alın-sın. Lemma III.4(a) ve Sonuç III.14 nedeniyle Λ indis kümesinin kardinalitesine *bakıl-maksızın* $c(X) = \kappa_1$ eşitliği gerçekleşir. X uzayının aranan uzay olması için ayrıca $d(X) \geq \kappa_2$ gerçekleşmelidir. Bu amaçla Λ indis kümesi $|X| > 2^{2^{\kappa_2}}$ gerçekleşecek biçimde tanımlanırsa, Teorem II.4'den $2^{2^{\kappa_2}} < |X| \leq 2^{2^{d(X)}}$ ve böylece $d(X) > \kappa_2$ ol-ması nedeniyle aranan X uzayı bulunmuş olur. Burada özel olarak Λ indis kümesi

$|\Lambda| = 2^{2^{\kappa_2}}$ olacak biçimde alınırsa, $|X| = \kappa_1^{|\Lambda|} = 2^{|\Lambda|} > 2^{2^{\kappa_2}}$ gerçekleşir.

Ayrıca $\kappa < \kappa_2$, $2^\kappa = 2^{2^{\kappa_2}}$ koşullarını gerçekleyen hiçbir κ kardinal sayısı bulunmuyorsa, Λ indis kümesi $|\Lambda| = 2^{\kappa_2}$ gerçeklenecek biçimde alınır ve sonuçta $d(X) = \kappa_2$ gerçekleyen X uzayı bulunmuş olur. Gerçekten, Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi nedeniyle $d(X) \leq \kappa_2$ olur; ancak varsayım gereği $d(X) < \kappa_2$ olamaz; çünkü $d(X) < \kappa_2$ geçerli olsaydı $2^{2^{d(X)}} < 2^{2^{\kappa_2}} = \kappa_1^{2^{\kappa_2}} = |X| \leq 2^{2^{d(X)}}$ çelişkisi elde edilirdi. ■

Örnek III.7 $\kappa_1 < \kappa_2 < 2^{\kappa_1} = 2^{\kappa_2}$ koşulunu gerçekleyen κ_1, κ_2 kardinal sayı çifti varsa, $c(X) = \kappa_1$ ve $w(X) = \kappa_2$ özelliklerine sahip, üstelik κ_1 kardinaliteli gözenekli ve yerel sonlu ailesi bulunan bir X uzayı tanımlanabilir.

Çözüm. $|\Lambda| = \kappa_2$ gerçekleyen Λ indis kümesi ve her $\alpha \in \Lambda$ için $X_\alpha = D(\kappa_1)$ olacak biçimde tanımlanan *kesikli* X_α uzayları aracılığıyla elde edilen $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ çarpım uzayı aranan koşulları sağlar. Gerçekten, her bir $\alpha \in \Lambda$ için $c(X_\alpha) = d(X_\alpha) = \kappa_1$ ve $|\Lambda| < 2^{\kappa_1}$ olması nedeniyle Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi'nden $\kappa_1 \leq c(X) \leq d(X) \leq \kappa_1$ bulunur. Üstelik Teorem III.23'den $w(X) = |\Lambda| \vee \sup_{\alpha \in \Lambda} w(X_\alpha) = \kappa_2 \vee \kappa_1 = \kappa_2$ olduğu anlaşılır. Ayrıca kolayca görülebilir ki keyfi sabit bir $\alpha_0 \in \Lambda$ indisi için X_{α_0} uzayı kesikli olduğundan $\mathcal{U} = \{\{x\}_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha\}_{x \in X_{\alpha_0}}$ ailesi X uzayında κ_1 kardinaliteli gözenekli ve yerel sonlu bir ailedir. ■

Örnek III.8 Hiçbir noktasının sayılabilir yerel tabanı bulunmayan, sayılabilir elemanlı bir uzay tanımlanabilir.

Çözüm. $(D(2))^{2^{\aleph_0}}$ çarpım uzayı göz önüne alınsın. Teorem III.23'den yararlanarak herhangi bir $p \in (D(2))^{2^{\aleph_0}}$ noktası için $\pi_\chi(p, (D(2))^{2^{\aleph_0}}) = 2^{\aleph_0} = \chi(p, (D(2))^{2^{\aleph_0}})$ gerçekleştiği, kısacası $(D(2))^{2^{\aleph_0}}$ uzayının hiçbir noktasının sayılabilir yerel tabanının bulunmadığı anlaşılır. Öte yandan Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi nedeniyle $(D(2))^{2^{\aleph_0}}$ çarpım uzayı ayrılabiliridir yani $|X| \leq \aleph_0$ gerçekleyen bir $X \subseteq (D(2))^{2^{\aleph_0}}$ yoğun alt kümesi vardır. Bu biçimde tanımlanan X alt uzayı aranan özelliklere sahiptir;

çünkü $(D(2))^{2^{\aleph_0}}$ çarpım uzayı dolayısıyla X alt uzayı bir T_3 uzayı olduğundan, Teorem II.9(c)'ye göre herhangi bir $x \in X$ için $\pi\chi(x, X) = \pi\chi(x, (D(2))^{2^{\aleph_0}}) = 2^{\aleph_0} \leq \chi(x, X)$ gerçekleşir. ■

Örnek III.9 *Tıkız, sayılabilir zincir koşulunu gerçekleyen ancak ayrılabilir olmayan bir uzay tanımlanabilir.*

Çözüm. Eğer κ kardinal sayısı $\kappa \geq (2^{\aleph_0})^+$ gerçeklenecek biçimde alınırsa, $(D(2))^\kappa$ çarpım uzayı aranan koşulları sağlar; çünkü çarpıma katılan tüm uzaylar $(D(2))$ tıkız olduğundan $(D(2))^\kappa$ uzayı da tıkız olur, Sonuç III.14 nedeniyle $c((D(2))^\kappa) \leq \aleph_0$ olduğundan $(D(2))^\kappa$ uzayı sayılabilir zincir koşulunu gerçekler, üstelik bu uzay ayrılabilir değildir. Gerçekten, eğer $(D(2))^\kappa$ düzenli uzayı ayrılabilir yani $d((D(2))^\kappa) \leq \aleph_0$ olsaydı $(2^{\aleph_0})^+ \leq \kappa = w((D(2))^\kappa) \leq 2^{d((D(2))^\kappa)} \leq 2^{\aleph_0}$ çelişkisi bulunurdu. ■

Örnek III.10 (a) $|C(X)| > (d(X))^{c(X)}$ gerçeklenecek biçimde bir X uzayı vardır.

(b) $|C(X)| > (\pi w(X))^{wc(X)}$ gerçeklenecek biçimde bir X uzayı vardır.

Çözüm. (a)- κ bir sonsuz kardinal sayı ve $|\Lambda| = 2^{2^\kappa}$ olmak üzere, her $\alpha \in \Lambda$ için $d(X_\alpha) = \kappa$ ve en az bir $\beta \in \Lambda$ için $c(X_\beta) = \kappa$ gerçekleyen sonsuz X_α Tikhonov uzaylarının $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ çarpım uzayı göz önüne alınsın. Bu durumda Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi'nden $d(X) \leq 2^\kappa$ ve Sonuç III.14'den $c(X) = \kappa$ bulunur. Her $\alpha \in \Lambda$ için $p_\alpha, q_\alpha \in X_\alpha$ nokta çifti ve bir $f_\alpha \in C(X_\alpha)$ fonksiyonu, $f_\alpha(p_\alpha) \neq f_\alpha(q_\alpha)$ olacak biçimde seçilsin. (X_α uzayları birer sonsuz Tikhonov uzayı olduğundan bu tür nokta çiftleri ve f_α fonksiyonları vardır.) Bu fonksiyonlar aracılığıyla elde edilen $\{f_\alpha \circ \pi_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ ailesi, X üzerinde tanımlı, reel değerli ve ikişerli farklı sürekli fonksiyonların bir ailesi olur, böylece $|\{f_\alpha \circ \pi_\alpha : \alpha \in \Lambda\}| = |\Lambda| = 2^{2^\kappa} \leq |C(X)|$ bulunur. (Burada $\alpha \neq \beta$ için $f_\alpha \circ \pi_\alpha \neq f_\beta \circ \pi_\beta$ olduğu şöyle görülebilir: Ünlü Seçme Aksiyomu'ndan yararlanarak her $\gamma \in \Lambda$ için *tek türlü belirli* $\xi_\gamma \in X_\gamma$ noktaları seçilsin. Bu noktalar yardımıyla $x = \{x_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}, y = \{y_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda} \in X$ elemanları, $x_\gamma = y_\gamma = \xi_\gamma$

($\forall \gamma \in \Lambda \setminus \{\alpha\}$), $x_\alpha = p_\alpha$ ve $y_\alpha = q_\alpha$ olacak biçimde tanımlansın. Bu durumda, eğer $\alpha \neq \beta$ gerçekleyen bir $\beta \in \Lambda$ indisi için $f_\alpha \circ \pi_\alpha = f_\beta \circ \pi_\beta$ olsaydı, $f_\alpha(p_\alpha) = (f_\alpha \circ \pi_\alpha)(x) = (f_\beta \circ \pi_\beta)(x) = f_\beta(\xi_\beta) = (f_\beta \circ \pi_\beta)(y) = (f_\alpha \circ \pi_\alpha)(y) = f_\alpha(q_\alpha) \neq f_\alpha(p_\alpha)$ çelişkisi bulunurdu.) Öte yandan $|C(X)| \leq 2^{d(X)} \leq 2^{2^\kappa}$ olduğundan,

$$|C(X)| = 2^{2^\kappa} > 2^\kappa = (2^\kappa)^\kappa \geq (d(X))^{c(X)}$$

istenilen sonucu elde edilir.

(b)- κ bir sonsuz kardinal sayı ve $\kappa_0 = 2^{2^\kappa}$ olmak üzere, $X = D(\kappa) \oplus \beta D(\kappa_0)$ erkin toplam (diğer bir deyişle direk toplam) uzayı göz önüne alınsın. $\mathcal{V} = \{\{x\} : x \in D(\kappa_0)\}$ ailesinin $\beta D(\kappa_0)$ uzayı için minimal π -taban olduğu kolayca görülür. Böylece

$$\pi w(X) = \pi w(D(\kappa)) + \pi w(\beta D(\kappa_0)) = \kappa + \kappa_0 = \kappa_0$$

ve

$$wc(X) = wc(D(\kappa)) + wc(\beta D(\kappa_0)) = \kappa + \aleph_0 = \kappa$$

bulunur. Diğer yandan her $E \subseteq D(\kappa_0)$ alt kümesi, $D(\kappa_0)$ kesikli uzayında, hem açık hem de kapalı (kısaca kapaçık) olduğundan $\chi_E : D(\kappa_0) \longrightarrow \{0, 1\}$ karakteristik fonksiyonları süreklidir. $\beta D(\kappa_0)$ Cech-Stone tıkızlaşmasının özelliği gereği her bir $E \subseteq D(\kappa_0)$ için χ_E fonksiyonunun $\beta D(\kappa_0)$ uzayına bir sürekli genişlemesi vardır, kısacası bir $\Psi_E \in C(\beta D(\kappa_0))$ sürekli fonksiyonu, $\Psi_E|_E = \chi_E$ olacak biçimde bulunur. Bu fonksiyonlar aracılığıyla tanımlanan $\{\Psi_E : E \subseteq D(\kappa_0)\}$ ailesi, $\beta D(\kappa_0)$ üzerinde tanımlı, reel değerli ve ikişerli farklı sürekli fonksiyonların bir ailesi olur. Böylece $|\{\Psi_E : E \subseteq D(\kappa_0)\}| = 2^{\kappa_0} \leq |C(X)| \leq 2^{d(D(\kappa_0))} = 2^{\kappa_0}$ olup

$$|C(X)| = 2^{\kappa_0} > \kappa_0 = \kappa_0^\kappa = (\pi w(X))^{wc(X)}$$

aranan sonucu bulunur. ■

Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi'nin bir başka uygulaması olarak Hausdorff Lemması'nın kolay bir kanıtı verilebilir. Hatırlanacağı gibi E kümesinin boştan

farklı alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ ailesine, ancak ve yalnız her sonlu sayıda ikişerli farklı $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}$ üyeleri için $A_1 \cap \dots \cap A_n \cap (E - B_1) \cap \dots \cap (E - B_m) \neq \emptyset$ gerçekleşiyorsa E kümesi üzerinde tanımlı bağımsız aile denir. Hausdorff Lemması'na göre $|E| = \kappa \geq \aleph_0$ gerçekleyen bir E kümesi üzerinde 2^κ kardinaliteli bir bağımsız aile tanımlanabilir. Gerçekten, özel olarak $\{0, 1\}$ kümesini kesikli topolojiyle donatarak elde edilen uzay $D(2)$ ile gösterilmek üzere, $(D(2))^{2^\kappa}$ çarpım uzayı göz önüne alınsın. Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi nedeniyle $d((D(2))^{2^\kappa}) \leq \kappa$ olup özel olarak E bu uzayın yoğun alt kümesi olarak alınabilir; çünkü $(D(2))^{2^\kappa}$ uzayının κ kardinaliteli yoğun bir A alt kümesi vardır, böylece $|A| = |E| = \kappa$ olduğundan A ve E kümeleri arasında tanımlı *bire-bir* ve *örten* bir fonksiyonun varlığını gözlemek yeterlidir. Bu durumda E kümesinin alt kümelerinin $\{E \cap \pi_\alpha^{-1}(\{0\})\}_{\alpha < 2^\kappa}$ ailesi, 2^κ kardinaliteli bir *bağımsız aile* olur. Gerçekten, ikişerli farklı $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$ ordinaleri için $(E \cap \pi_{\alpha_1}^{-1}(\{0\})) \cap \dots \cap (E \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(\{0\})) \cap (E - \pi_{\beta_1}^{-1}(\{0\})) \cap \dots \cap (E - \pi_{\beta_m}^{-1}(\{0\})) = (E \cap (\{0\}_{\alpha_1} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_1} \{0, 1\}_\alpha)) \cap \dots \cap (E \cap (\{0\}_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_n} \{0, 1\}_\alpha)) \cap (E - (\{0\}_{\beta_1} \times \prod_{\alpha \neq \beta_1} \{0, 1\}_\alpha)) \cap \dots \cap (E - (\{0\}_{\beta_m} \times \prod_{\alpha \neq \beta_m} \{0, 1\}_\alpha)) = E \cap [(\{0\}_{\alpha_1} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_1} \{0, 1\}_\alpha) \cap \dots \cap (\{0\}_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_n} \{0, 1\}_\alpha) \cap (\{1\}_{\beta_1} \times \prod_{\alpha \neq \beta_1} \{0, 1\}_\alpha) \cap \dots \cap (\{1\}_{\beta_m} \times \prod_{\alpha \neq \beta_m} \{0, 1\}_\alpha)] = E \cap [\{0\}_{\alpha_1} \times \dots \times \{0\}_{\alpha_n} \times \{1\}_{\beta_1} \times \dots \times \{1\}_{\beta_m} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_n, \beta_m} \{0, 1\}_\alpha] \neq \emptyset$ bulunur; çünkü E kümesi $(D(2))^{2^\kappa}$ çarpım uzayında yoğundur.

Örnek III.11 κ -ağırlıklı Cantor küpü $(D(2))^\kappa$ ($\kappa \geq \aleph_0$) için aşağıdaki iddialar doğrudur:

(a) $|(D(2))^\kappa| = 2^\kappa$ olur.

(b) $\phi \in \{s, hL, hd, nw, w, \pi w, h\pi w, psw, \Delta, t, \pi\chi, h\pi\chi, \psi, \chi\}$ ise $\phi((D(2))^\kappa) = \kappa$ gerçekleşir.

(c) $\phi \in \{c, L, e, wc\}$ ise $\phi((D(2))^\kappa) = \aleph_0$ geçerlidir.

(d) $d((D(2))^\kappa) = \log \kappa$ ($= \min\{\lambda : \kappa \leq 2^\lambda\}$) dir.

Çözüm. (a) şıkkı apaçık olup kısalık amacıyla $X = (D(2))^\kappa$ olarak tanımlansın.

Açıktır ki X bir tıkız Hausdorff uzayıdır. Böylece Teorem III.23'den yararlanarak

$w(X) = nw(X) = \pi w(X) = \pi\chi(X) = \psi(X) = \chi(X) = \kappa$ bulunur. X bir tıkHz Hausdorff uzayı olduğundan Teorem III.2 ve Sonuç III.3 nedeniyle $psw(X) = \Delta(X) = w(X) = \kappa$ olur. Ayrıca Teorem III.5 ve Teorem III.6'dan $\kappa = \pi\chi(X) \leq h\pi\chi(X) = t(X) \leq w(X) = \kappa$ ve $\kappa = \pi w(X) \leq h\pi w(X) = hd(X) \leq w(X) = \kappa$ gerçekleşir. Öte yandan $s(X) \leq hL(X) \leq w(X) = \kappa$ olduğundan (b) şıkkının ispatını tamamlamak için $s(X) \geq \kappa$ gerçekleştiğini göstermek yeterlidir. Bu amaçla her bir $\alpha < \kappa$ için $f_\alpha = \{(f_\alpha)_\beta\}_{\beta < \kappa} \in (D(2))^\kappa = X$ noktası

$$(f_\alpha)_\beta = \begin{cases} 0 & ; \alpha \neq \beta \text{ ise} \\ 1 & ; \alpha = \beta \text{ ise} \end{cases}$$

gerçeklenecek biçimde tanımlansın. $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq X$ alt kümesi X uzayında κ kardinaliteli kesikli bir küme olduğundan $\kappa \leq s(X)$ sonuç olarak $s(X) = hL(X) = \kappa$ bulunur. Sonuç III.14'den $c(X) = \aleph_0$ olduğu apaçık olup X uzayı tıkHz olduğundan $L(X) = e(X) = wc(X) = \aleph_0$ eşitlikleri geçerlidir, böylece (c) şıkkının kanıtlaması tamamlanır. Son olarak (d) şıkkı şöyle kanıtlanabilir: Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi'nden $d(X) \leq \log \kappa$ olur, öte yandan X bir düzenli uzay olduğundan $\kappa = w(X) \leq 2^{d(X)}$ ve böylece $\log \kappa \leq d(X)$ gerçekleşir. Sonuç olarak $d(X) = \log \kappa$ bulunur.

■

Yukarıdaki örneğin (b) şıkkının kanıtı Teorem III.2'ye ihtiyaç duyulmadan şu şekilde de yapılabilir: $X = (D(2))^\kappa$ çarpım uzayının boştan farklı tüm açık kutu kümelerinin ailesi bu uzay için bir taban tanımladığından $s(X) \leq w(X) \leq \kappa$ olur. Öte yandan yukarıdaki gibi $s(X) \geq \kappa$ gerçekleştiği gözlenerek $s(X) = w(X) = \kappa$ bulunur. $\pi\chi(X) \geq \kappa$ olduğu kanıtlanırsa yukarıda yapılanlara benzer yollarla (b) şıkkının kanıtı tamamlanır. $\kappa = \aleph_0$ için iddia apaçık olup $\kappa > \aleph_0$ varsayalım. Her $x \in X$ için $\pi\chi(x, X) \geq \kappa$ geçerlidir; çünkü en az bir $x_0 = \{x_{0,\alpha}\}_{\alpha < \kappa} \in X$ noktası için $\pi\chi(x_0, X) < \kappa$ olsaydı yani x_0 noktasının $\aleph_0 \leq |\mathcal{V}| < \kappa$ gerçekleyen, özel olarak üyeleri açık kutu kümeler olan bir $\mathcal{V}$ yerel π -tabanı var olsaydı, her $V \in \mathcal{V}$ için $\Delta(V)$ ile V kümesinin belirleyici indisler kümesi gösterilmek üzere, $\left| \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \Delta(V) \right| \leq$

$|\mathcal{V}| \vee \sup\{|\Delta(V)| : V \in \mathcal{V}\} = |\mathcal{V}| < \kappa$ gerçeklenir ve boylece en az bir (aslında κ sayıda) $\alpha_0 \in [0, \kappa) - \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \Delta(V)$ elemanı bulunurdu. Sonuç olarak $\pi_{\alpha_0}^{-1}(\{x_{0,\alpha_0}\}) = \{x_{0,\alpha_0}\}_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha$ ($\forall \alpha < \kappa, X_\alpha = D(2)$) kümesi x_0 noktasının bir açık komşuluğu olup *hiçbir* $V \in \mathcal{V}$ için $V \subseteq \pi_{\alpha_0}^{-1}(\{x_{0,\alpha_0}\})$ *gerçekleşmez*, bu da $\mathcal{V}$ ailesinin x_0 noktasının bir yerel π -tabanı olması varsayımıyla elişirdi. Ulaşılan bu çelişki nedeniyle $\pi\chi(x, X) \geq \kappa$ ($\forall x \in X$) ve boylece $\pi\chi(X) \geq \kappa$ olduğu anlaşılır.

κ bir sonsuz kardinal sayı olmak üzere $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, topolojik uzayların bir ailesi ve $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ olsun. Bilindiği gibi Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi'ne göre her bir $\alpha \in \Lambda$ için $d(X_\alpha) \leq \kappa$ ve $|\Lambda| \leq 2^\kappa$ oluyorsa $d(X) \leq \kappa$ geçerlidir, yani bu teoremin kullanılabilmesi için çarpıma katılan uzayların sayısı $|\Lambda|$, belirli bir kardinal sınıra sahip olmalıdır. Aşağıdaki teorem ise alınan *keyfi* sayıda topolojik uzayın çarpım uzayının yoğunluk sayısı hakkında bilgi verir. Bu teoremin aşağıda verilen kanıtlaması Juhasz tarafından [9] da yapılmıştır.

Teorem III.25 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ topolojik uzayların bir ailesi ve $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ çarpım uzayın olmak üzere

(a) $d(X) \leq \log |\Lambda| \vee \sup_{\alpha \in \Lambda} d(X_\alpha)$ olur.

(b) Eğer her bir $\alpha \in \Lambda$ için X_α uzayının boştan farklı ayrık iki açık kümesi varsa, $d(X) = \log |\Lambda| \vee \sup_{\alpha \in \Lambda} d(X_\alpha)$ gerçeklenir.

Kanıt. (a)- $\log |\Lambda| \vee \sup_{\alpha \in \Lambda} d(X_\alpha) = \kappa$ olsun. Bu durumda her bir $\alpha \in \Lambda$ için $d(X_\alpha) \leq \kappa$ olduğundan X_α uzaylarının $|S_\alpha| \leq \kappa$ gerçekleyen S_α ($\subseteq X_\alpha$) yoğun alt kümeleri vardır. Böylece her bir $\alpha \in \Lambda$ için sürekli ve örten bir $f_\alpha : D(\kappa) \longrightarrow S_\alpha$ fonksiyonu tanımlanabilir. Bu fonksiyonlar aracılığıyla elde edilen $f = \prod_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha : (D(\kappa))^\Lambda \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} S_\alpha$ ($= S$) arpım fonksiyonu da sürekli ve örten olur. O halde $S \subseteq X$ alt kümesinin X uzayında yoğun olması ve $\log |\Lambda| \leq \kappa$ yani $|\Lambda| \leq 2^\kappa$ sağlanması nedeniyle Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi'nden yararlanarak $d(X) \leq d(S) \leq d((D(\kappa))^\Lambda) \leq \kappa$ sonucu elde edilir.

(b)- Her bir $\alpha \in \Lambda$ için U_α^0 ve U_α^1 kümeleri X_α uzayının hipotez gereği var olan boştan farklı ayırık açık kümeleri olsun. Bu durumda her $h \in {}^\Lambda\{0, 1\}$ fonksiyonu ve her $\Delta \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda)$ sonlu kümesi için,

$$G_{(h,\Delta)} = \bigcap_{\alpha \in \Delta} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha^{h(\alpha)}) = \prod_{\alpha \in \Delta} U_\alpha^{h(\alpha)} \times \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \Delta} X_\alpha$$

biçiminde açık kutu kümeleri tanımlansın. Apaçık olarak $G_{(h,\Delta)} \neq \emptyset$ olur. X uzayının herhangi bir yoğun A alt kümesi göz önüne alınsın. Bu durumda her $h \in {}^\Lambda\{0, 1\}$ ve her $\Delta \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda)$ için $A \cap G_{(h,\Delta)} \neq \emptyset$ olduğundan, ünlü Seçme Aksiyomu yardımıyla tek türlü belirli bir $p_{(h,\Delta)} \in A \cap G_{(h,\Delta)}$ noktası seçilsin. Şimdi her bir $p = \{p_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \in A$ noktasına karşılık $\tilde{p} = \{\tilde{p}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \in (D(2))^\Lambda$ noktası

$$\tilde{p}_\alpha = \begin{cases} 0 & ; p_\alpha \in U_\alpha^0 \text{ ise} \\ 1 & ; \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

gerçeklenecek biçimde tanımlanırsa, bu noktalardan oluşan $\tilde{A} = \{\tilde{p} : p \in A\}$ kümesi $(D(2))^\Lambda$ uzayında yoğundur. Gerçekten, $(D(2))^\Lambda$ uzayının herhangi bir G açık kutu kümesi göz önüne alınsın. Bu kümeyi tanımlayan belirleyici indisler kümesinin Δ_0 ($\in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda)$) olduğu varsayılırsa, açıktır ki her bir $\alpha \in \Delta_0$ indisinin tanımladığı küme tek nokta ($\{0\}$ veya $\{1\}$) kümesidir. Bu indislerden $\{0\}$ kümesini tanımlayanların kümesi Δ_1 ($\subseteq \Delta_0$) ile gösterilirse, apaçık olarak $G = \prod_{\alpha \in \Delta_1} \{0\}_\alpha \times \prod_{\alpha \in \Delta_0 \setminus \Delta_1} \{1\}_\alpha \times \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \Delta_0} \{0, 1\}_\alpha$ biçiminde olur. Böylece $h_0(\alpha) = 0$ ($\forall \alpha \in \Delta_1$), $h_0(\alpha) = 1$ ($\forall \alpha \in \Lambda \setminus \Delta_1$) gerçeklenecek biçimde tanımlanan $h_0 \in {}^\Lambda\{0, 1\}$ fonksiyonu ve Δ_0 indis kümesi için,

$$G_{(h_0,\Delta_0)} = \prod_{\alpha \in \Delta_0} U_\alpha^{h_0(\alpha)} \times \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \Delta_0} X_\alpha = \prod_{\alpha \in \Delta_1} U_\alpha^0 \times \prod_{\alpha \in \Delta_0 \setminus \Delta_1} U_\alpha^1 \times \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus \Delta_0} X_\alpha$$

olur. Sonuç olarak tek türlü belirli $p_{(h_0,\Delta_0)} \in A \cap G_{(h_0,\Delta_0)}$ noktasına karşılık tanımlanan $\tilde{p}_{(h_0,\Delta_0)} \in (D(2))^\Lambda$ noktası için $\tilde{p}_{(h_0,\Delta_0)} \in \tilde{A} \cap G$ gerçekleşir. Kısacası $\tilde{A}$ kümesinin $(D(2))^\Lambda$ çarpım uzayında yoğun olduğu anlaşılır. Ayrıca $\varphi(\tilde{p}) = p$ olacak biçimde tanımlanan $\varphi : \tilde{A} \longrightarrow A$ fonksiyonu bire-bir olup, Örnek III.11(d)'den yararlanarak $\log |\Lambda| = d((D(2))^\Lambda) \leq |\tilde{A}| \leq |A|$ gerçekleştiği anlaşılır. Son iki eşitsizlik herhangi

bir yoğun A kümesi için sağlandığından, $d((D(2))^\Lambda) = \log |\Lambda| \leq d(X)$ gerçekleşir. $\sup_{\alpha \in \Lambda} d(X_\alpha) \leq d(X)$ eşitsizliği daima geçerli olduğundan $\log |\Lambda| \vee \sup_{\alpha \in \Lambda} d(X_\alpha) \leq d(X)$ bulunur. (a) şıkında ters eşitsizliğin doğruluğu ispatlandığından bu şıkkın kanıtı da tamamlanır. ■

Özel olarak çarpıma katılan uzaylar, en az iki noktalı Hausdorff uzayı ise (b) şıkındaki eşitlik geçerli olur. Böylece eğer $\aleph_0 \leq \kappa_1 < \kappa_2 < 2^{\kappa_1} = 2^{\kappa_2}$ koşulunu gerçekleyen κ_1, κ_2 kardinal sayı çifti yoksa, $X = (D(\aleph_0))^{2^{\aleph_1}}, Y = (D(\aleph_0))^{2^{2^{\aleph_0}}}$ uzayları için $d(X) = \log 2^{\aleph_1} \vee \aleph_0 = \aleph_1$ ve $d(Y) = \log 2^{2^{\aleph_0}} \vee \aleph_0 = 2^{\aleph_0}$ gerçekleşir.

Bu kısımda son olarak $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ sayılabilir zincir koşulunu gerçekleyen topolojik uzayların bir ailesi ise $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ çarpım uzayında sayılabilir zincir koşulunu gerçekler mi?’ sorusuna yanıt aranacaktır. Eğer çarpıma katılan tüm X_α uzayları ayrılabilirse, Sonuç III.14’den bu sorunun cevabının "*olumlu*" olduğu anlaşılır. Aşağıdaki iki teoremden $c(X) \leq 2^{\aleph_0}$ gerçekleştiği ve özel olarak $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesinin üyeleriyle tanımlanan *her sonlu* çarpım uzayı sayılabilir zincir koşulunu gerçeklerse, X uzayında bir ccc uzayı olduğu gösterilecektir. Aslında bu sorunun cevabı, ZFS Aksiyomları’nda kalınarak *kararlaştırılamaz*; çünkü Kurepa, eğer S bir Suslin uzayı (Sayılabilir zincir koşulunu gerçekleyen ancak ayrılabilir *olmayan* sıralama uzaylarına **Suslin uzayı** denir. Bu tür uzayların varlığının ZFS Aksiyomları’nda kalınarak *kararlaştırılamaz* olduğu bilinmektedir.) ise $S \times S$ çarpım uzayının sayılabilir zincir koşulunu *gerçeklemediğini* şu şekilde kanıtladı: S uzayında, sonlu ötesi tümevarımla, her bir $\alpha < \aleph_1$ için $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in S$ noktaları, $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$, $b_\beta \notin (a_\alpha, c_\alpha)$ ($\forall \beta < \alpha$) koşulları gerçekleştirilecek biçimde tanımlanabilir. S uzayının *tüm yalıtılmış* noktalarının kümesi A ile gösterilirse, apaçık olarak $|A| \leq c(S) \leq \aleph_0$ gerçekleşir. Ayrıca $d(S) \geq \aleph_1$ olduğundan A kümesi, S uzayında yoğun *olamaz*. O halde $(a_0, c_0) \neq \emptyset$, $(a_0, c_0) \cap A = \emptyset$ olacak biçimde $a_0, c_0 \in S$ noktaları vardır. (Burada (a_0, c_0) açık aralığı sonsuz elemanlıdır; çünkü eğer sonlu elemanlı örneğin $(a_0, c_0) = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq S$ olsaydı, tüm $x_i \in S$ ($\forall i \in \mathbb{N}_n$) el-

emanları birer *yalıtılmış nokta* olur, böylece $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq (a_0, c_0) \cap A = \emptyset$ ilişkisi elde edilirdi.) Böylece Seçme Aksiyomu yardımıyla bir $b_0 \in (a_0, c_0)$ elemanı seçilerek, $a_0, b_0, c_0 \in S$ noktaları belirlenmiş olur. Bir $\alpha < \aleph_1$ alındığında, her bir $\beta < \alpha$ ordinali için $a_\beta, b_\beta, c_\beta \in S$ noktaları, $a_\beta < b_\beta < c_\beta$ ve $b_\gamma \notin (a_\beta, c_\beta)$ ($\forall \gamma < \beta$) koşulları gerçekleştirilecek biçimde önceki aşamalarda tanımlanmış olsun. Bu durumda $A \cup \{b_\beta : \beta < \alpha\}$ kümesi için $|A \cup \{b_\beta : \beta < \alpha\}| \leq \aleph_0$ gerçekleşir, dolayısıyla bu küme S uzayında yoğun *olamaz*. O halde $(a_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$, $(a_\alpha, c_\alpha) \cap (A \cup \{b_\beta : \beta < \alpha\}) = \emptyset$ olacak biçimde $a_\alpha, c_\alpha \in S$ noktaları ve bu noktalar aracılığıyla $((a_\alpha, c_\alpha)$ açık aralığının sonsuz elemanlı olduğuna dikkat ederek) tek türlü belirli bir $b_\alpha \in (a_\alpha, c_\alpha) - (A \cup \{b_\beta : \beta < \alpha\}) \subseteq S$ elemanı aranan koşullar sağlanacak biçimde belirlenir. Böylece sonlu ötesi tümevarım süreci tamamlanır. Sonuç olarak $\mathcal{G} = \{(a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha)\}_{\alpha < \aleph_1}$ ailesi, $S \times S$ uzayında, $\aleph_1$ kardinaliteli bir *gözenekli aile* olur; çünkü örneğin $\beta < \alpha < \aleph_1$ için $(b_\beta \notin (a_\alpha, c_\alpha))$ olduğunu unutmadan $b_\beta \leq a_\alpha$ ise $(a_\beta, b_\beta) \cap (a_\alpha, b_\alpha) = \emptyset$ olduğundan

$$((a_\beta, b_\beta) \times (b_\beta, c_\beta)) \cap ((a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha)) = ((a_\beta, b_\beta) \cap (a_\alpha, b_\alpha)) \times ((b_\beta, c_\beta) \cap (b_\alpha, c_\alpha)) = \emptyset$$

gerçeklenir. $c_\alpha \leq b_\beta$ ve $\alpha < \beta$ durumları içinde benzer yol izlenir. Böylece $c(S \times S) \geq \aleph_1 > \aleph_0$ bulunur. Öte yandan $MA_{\aleph_1}$ (Martin Aksiyomu) geçerliyse (Bu durumda Suslin uzayının *var olmadığı* bilinmektedir.) sonlu sayıda (dolayısıyla herhangi sayıda) sayılabilir zincir koşulunu gerçekleyen uzayın çarpım uzayında sayılabilir zincir koşulunu gerçeklediği bilinmektedir. (bkz. [2])

Teorem III.26 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, *topolojik uzayların bir ailesi* ve $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ *çarpım uzay* olsun. Eğer her $\Delta \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda)$ sonlu indis kümesi için $c(\prod_{\alpha \in \Delta} X_\alpha) \leq \kappa$ ise $c(X) \leq \kappa$ olur.

Kanıt. Aksi varsayılırsa yani $c(X) > \kappa$ olursa, aşağıda görüleceği gibi bir çelişki elde edilir. Gerçekten, eğer $c(X) \geq \kappa^+$ olsaydı, X uzayında $\{V_\lambda\}_{\lambda < \kappa^+}$ biçiminde bir

gözenekli aile bulunurdu. Burada özel olarak tüm V_λ açıkları, birer kutu küme alınabilir. Böylece her bir $\lambda < \kappa^+$ için V_λ kümesi,

$$V_\lambda = \prod_{\alpha \in S_\lambda} V_\lambda(\alpha) \times \prod_{\alpha \in \Lambda \setminus S_\lambda} X_\alpha, \quad S_\lambda \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\Lambda), \quad V_\lambda(\alpha) \subseteq X_\alpha \text{ açık öz alt küme } (\forall \alpha \in S_\lambda)$$

biçiminde olur. $\{S_\lambda\}_{\lambda < \kappa^+}$ ailesi, κ^+ kardinaliteli (κ^+ 'nın düzenli kardinal sayısı olduğuna dikkat ederek!) bir sonlu kümeler ailesi olduğundan, Sanin Lemması nedeniyle bir $S \subseteq [0, \kappa^+)$ alt kümesi ile sonlu bir $F (\subseteq \Lambda)$ kümesi, $|S| = \kappa^+$ ve farklı $\lambda_1, \lambda_2 \in S$ ordinalleri için $S_{\lambda_1} \cap S_{\lambda_2} = F$ koşulları gerçekleşecek biçimde vardır. Burada eğer $F = \emptyset$ ise $\lambda_1, \lambda_2 \in S$ ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$ için $S_{\lambda_1} \cap S_{\lambda_2} = \emptyset$ olup kolayca bir $x \in X$ noktası, $x \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$ olacak biçimde tanımlanabilir; ancak bu durum $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \emptyset$ gerçeğiyle *çelişir*. Diğer taraftan $F \neq \emptyset$ ise hipotez gereği $c(\prod_{\alpha \in F} X_\alpha) \leq \kappa$ gerçekleşir; ancak her bir $\lambda < \kappa^+$ için V_λ kümesinin $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ uzayına izdüşümü V_λ^* ile gösterilirse, kolayca görülebilir ki $\{V_\lambda^*\}_{\lambda \in S}$ ailesi, $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ uzayında bir gözenekli aile olur. Böylece $|\{V_\lambda^*\}_{\lambda \in S}| = |S| = \kappa^+ \leq c(\prod_{\alpha \in F} X_\alpha) \leq \kappa$ çelişkisi bulunur. Sonuç olarak teoremdeki hipotez sağlanıyorsa, $c(X) \leq \kappa$ gerçekleştiği anlaşılır. ■

Teorem III.27 (Kurepa): Her $\alpha \in \Lambda$ için $c(X_\alpha) \leq \kappa$ ve $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ ise $c(X) \leq 2^\kappa$ olur. Özel olarak keyfi sayıda sayılabilir zincir koşulunu gerçekleyen uzayın çarpım uzayının Suslin sayısı, en fazla $2^{\aleph_0}$ olur.

Kanıt. Bir önceki teorem nedeniyle Λ indis kümesinin sonlu olması durumunda teoremi kanıtlamak yeterlidir. $\Lambda = \{1, \dots, n\}$ ($2 \leq n \in \mathbb{N}$) olsun. $c(X) > 2^\kappa$ olduğu varsayılırsa, X uzayında, $|\mathcal{U}| > 2^\kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{U}$ gözenekli ailesi bulunur. Özel olarak $\mathcal{U}$ ailesinin tüm üyeleri kutu küme olarak alınabilir. Her bir $U \in \mathcal{U}$ üyesinin X_i ($\forall i \in \mathbb{N}_n$) uzayına izdüşümü U_i ile gösterilsin.

$$P_i = \{\{U, V\} : U, V \in \mathcal{U}, U_i \cap V_i = \emptyset\} \quad (\forall i \in \mathbb{N}_n)$$

biçiminde tanımlanan P_i aileleri aracılığıyla $[\mathcal{U}]^2 = \bigcup_{i=1}^n P_i$ olur. Bu durumda Erdős-Rado Lemması'na göre bir $i_0 \leq n$ sayısı ile bir $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ alt ailesi, $|\mathcal{U}_0| > \kappa$ ve $[\mathcal{U}_0]^2 \subseteq P_{i_0}$

koşulları gerçekleşecek biçimde vardır. $\mathcal{U}_0$ ailesi aracılığıyla tanımlanan $\{U_{i_0} : U \in \mathcal{U}_0\}$ ailesi, X_{i_0} uzayında, $|\{U_{i_0} : U \in \mathcal{U}_0\}| = |\mathcal{U}_0| > \kappa$ gerçekleyen bir gözenekli aile olur; ancak bu durum $c(X_{i_0}) \leq \kappa$ varsayımıyla çelişir. Ulaşılan bu çelişki nedeniyle $c(X) \leq 2^\kappa$ olduğu anlaşılır. ■

III.5 Bazı Özel Uzaylarda $\phi = \phi^{\aleph_0}$ Gerçekleyen

Kardinal Değişmezler

Bu kısımda bazı özelliklere sahip bir X topolojik uzayı üzerinde tanımlanan ve $\phi(X) = (\phi(X))^{\aleph_0}$ gerçekleyen ϕ kardinal değişmezlerinin varlığı görülecektir. Örneğin herhangi bir tam normlu X uzayı için $|X| = |X|^{\aleph_0}$; sonsuz, aşırı bağlantısız ve tıkHz bir Y Hausdorff uzayı için $w(Y) = (w(Y))^{\aleph_0}$ gerçekleşir. Öncelikle gerekli olduğundan, ünlü König-Zermelo Teoremi (bkz. [10]) ve bazı sonuçlar görülecektir.

Teorem III.28 (König-Zermelo Teoremi): $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ve $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ kardinal sayıların $\kappa_\alpha < \lambda_\alpha$ ($\forall \alpha \in \Lambda$) gerçekleyen aileleri olsun. Bu durumda $\sum_{\alpha \in \Lambda} \kappa_\alpha < \prod_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha$ olur.

Kanıt. $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ve $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ küme aileleri, $|A_\alpha| = \kappa_\alpha < \lambda_\alpha = |B_\alpha|$ ($\forall \alpha \in \Lambda$) ve $\alpha \neq \beta$ için $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ koşulları sağlanacak biçimde bulunabilir. Burada B_α kümelerinin boştan farklı olduğu apaçıktır. Böylece $\left| \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right| = \sum_{\alpha \in \Lambda} \kappa_\alpha$ ve $\prod_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha = \left| \prod_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \right|$ olduğundan, $\left| \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right| < \left| \prod_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \right|$ gerçekleştiğini göstermek yeterlidir. Kardinalite Aritmetiğinin Birinci Temel Teoremi'ne göre (bkz. [10]) herhangi iki X ve Y kümesi için $|X| < |Y|$, $|Y| < |X|$ ve $|X| = |Y|$ ifadelerinden *yalnız bir tanesi* geçerli olduğundan, $A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ kümesinden $B = \prod_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$ kümesine örten (dolayısıyla B kümesinden A kümesine bire-bir) fonksiyon *tanımlanamayacağı* gösterilirse, $|A| < |B|$ olduğu anlaşılır. Herhangi bir $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu göz önüne alınsın, amaç $B - f(A) \neq \emptyset$ olduğunu göstermektir. Her $\alpha \in \Lambda$ için $A_\alpha \subseteq A$ olduğundan $f(A_\alpha) \subseteq f(A) \subseteq B$ gerçekleşir. Böylece her zamanki gibi π_α ile $\pi_\alpha : B \longrightarrow B_\alpha$ örten izdüşüm fonksiyonu yazılmak

üzere, $\pi_\alpha(f(A_\alpha)) \subseteq \pi_\alpha(B) = B_\alpha$ ($\forall \alpha \in \Lambda$) gerçekleşir. Oysa $g_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ ($\forall \alpha \in \Lambda$) bileşke fonksiyonları aracılığıyla $g_\alpha(A_\alpha) = (\pi_\alpha \circ f)(A_\alpha) \subseteq B_\alpha$ ($\forall \alpha \in \Lambda$) olduğu ve üstelik $|g_\alpha(A_\alpha)| \leq |A_\alpha| < |B_\alpha|$ gerçekleştiğinden $B_\alpha - \pi_\alpha(f(A_\alpha)) \neq \emptyset$ ($\forall \alpha \in \Lambda$) bulunur; çünkü bu fark kümesi boş olsaydı $B_\alpha \subseteq \pi_\alpha(f(A_\alpha)) = g_\alpha(A_\alpha)$ ve sonuçta $|B_\alpha| \leq |g_\alpha(A_\alpha)|$ olurdu, oysa gerçek, biraz önce gözlendiği gibi tam tersidir. Sonuçta Seçme Aksiyomu yardımıyla var oldukları anlaşılan $b_\alpha \in B_\alpha - \pi_\alpha(f(A_\alpha))$ ($\forall \alpha \in \Lambda$) elemanları aracılığıyla tanımlanan $b = \{b_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ elemanı için $b \in B - f(A)$ gerçekleştiğinden (çünkü, eğer $b \in f(A)$ olsaydı, $b \in f(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f(A_\alpha)$ olur ve sonuçta uygun bir $\beta \in \Lambda$ indisi aracılığıyla $b \in f(A_\beta)$ ve $b_\beta = \pi_\beta(b) \in \pi_\beta(f(A_\beta))$ bulunurdu; ancak bu $b_\beta \in B_\beta - \pi_\beta(f(A_\beta))$ gerçeğine aykırıdır) amaçlanan $B - f(A) \neq \emptyset$ sonucu gösterilmiş olur. Demek ki hiçbir $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu örten *olamamaktadır*. O halde Kardinalite Aritmetiğinin Birinci Temel Teoremi'ne göre $\sum_{\alpha \in \Lambda} \kappa_\alpha = |A| < |B| = \prod_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha$ olur ve kanıt tamamlanır. ■

König-Zermelo Teoremi'nden yararlanarak kolayca her $\kappa \geq \aleph_0$ kardinal sayısı için $\kappa < \kappa^{cf(\kappa)}$ gerçekleştiği görülebilir. Gerçekten, eşuçluluk derecesinin tanımı gereği $\kappa = \sum_{\alpha \in \Lambda} \kappa_\alpha$, $\kappa_\alpha < \kappa$ ($\forall \alpha \in \Lambda$), $cf(\kappa) = |\Lambda|$ koşulları gerçekleştirilecek biçimde $\{\kappa_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ kardinal sayılar ailesi vardır. Her bir $\alpha \in \Lambda$ için $\lambda_\alpha = \kappa$ ($> \kappa_\alpha$) alınırsa, König-Zermelo Teoremi nedeniyle $\kappa = \sum_{\alpha \in \Lambda} \kappa_\alpha < \prod_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha = \kappa^{|\Lambda|} = \kappa^{cf(\kappa)}$ aranan sonucu bulunur. Böylece aşağıdaki lemanın (a) şıkkı kanıtlanmış olur.

Lemma III.5 κ_1 ve $\kappa_2 \geq \aleph_0$ kardinal sayıları için aşağıdaki iddialar geçerlidir:

- (a) Eğer $\kappa_1 \geq cf(\kappa_2)$ ise $\kappa_2^{\kappa_1} > \kappa_2$ olur.
- (b) Eğer $\kappa_2^{\kappa_1} > \kappa_2$ ise ve $\kappa < \kappa_2 < \kappa^{\kappa_1}$ koşulunu sağlayan hiçbir κ kardinal sayısı yoksa, $\kappa_1 \geq cf(\kappa_2)$ gerçekleşir.

Kanıt. (a) şıkkının doğruluğu yukarıda görülmüştü. (b) şıkkı şu biçimde kanıtlanabilir: Her bir $\alpha \leq \kappa_2$ ordinali için

$$E_\alpha = \{S : S \subseteq [0, \alpha), |S| \leq \kappa_1\}$$

kümeleri tanımlansın. Eğer $\kappa_1 < cf(\kappa_2)$ olsaydı, $E_{\kappa_2} = \bigcup_{\alpha < \kappa_2} E_\alpha$ olur (Gerçekten $\bigcup_{\alpha < \kappa_2} E_\alpha \subseteq E_{\kappa_2}$ apaçık olup, herhangi bir $S \in E_{\kappa_2}$ için $|S| \leq \kappa_1 < cf(\kappa_2)$ olduğundan $\sup S = \beta < \kappa_2$ olur. Bu durumda $\beta < \beta + 1 \leq \gamma < \kappa_2$ gerçekleyen uygun bir γ ordinal sayısı için $S \in E_\gamma \subseteq \bigcup_{\alpha < \kappa_2} E_\alpha$ olup $E_{\kappa_2} \subseteq \bigcup_{\alpha < \kappa_2} E_\alpha$ ters kapsaması elde edilir.) ve böylece

$$\kappa_2^{\kappa_1} = |\mathcal{P}_{\leq \kappa_1}([0, \kappa_2))| = |E_{\kappa_2}| = \left| \bigcup_{\alpha < \kappa_2} E_\alpha \right| \leq \kappa_2 \vee \sup_{\alpha < \kappa_2} |E_\alpha| = \kappa_2 \vee \sup_{\alpha < \kappa_2} |\alpha|^{\kappa_1} \stackrel{*}{=} \kappa_2 < \kappa_2^{\kappa_1}$$

çelişkisi bulunurdu. Burada (*) eşitliği yazılırken (b) şıkkındaki varsayımlar kullanılmıştır. Demek ki (b) deki varsayımlar altında $\kappa_1 \geq cf(\kappa_2)$ olmalıdır. ■

Sonuç III.15 (i) κ_1, κ_2 kardinal sayılar ve $\kappa_2 \geq \aleph_0$ olsun. Eğer GKV geçerli ise $\kappa_2^{\kappa_1} > \kappa_2$ olması için gerek ve yeter koşul $\kappa_1 \geq cf(\kappa_2)$ eşitsizliğinin gerçekleşmesidir.

(ii) $\kappa < \kappa^{\aleph_0}$ gerçekleyen κ kardinal sayısı için $\lambda < \kappa < \lambda^{\aleph_0}$ olacak biçimde hiçbir λ kardinal sayısı yoksa, κ sayısı $\kappa = \sup_{n \in \mathbb{N}} \kappa_n$, $\kappa_n < \kappa$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) biçiminde yazılabilir.

Kanıt. (i)- **yeterlilik** bir önceki lemmanın (a) şıkkında kanıtlandı. GKV geçerli, kısacası herhangi bir sonsuz κ kardinali için $\kappa^+ = 2^\kappa$ olduğundan, eğer $\kappa_1 < cf(\kappa_2)$ olsaydı, her $\kappa < \kappa_2$ için $\kappa^{\kappa_1} \leq \kappa_2$ olur ve yukarıdaki teorem nedeniyle $\kappa_1 < cf(\kappa_2) \leq \kappa_1$ çelişkisi bulunurdu. Demek ki $\kappa_1 \geq cf(\kappa_2)$ olup **gereklilik** iddiası da kanıtlanmış olur. (ii)'nin kanıtlanması için bir önceki lemmanın (b) şıkkında κ_1 yerine $\aleph_0$ almak yeterlidir. ■

Bir X Tikhonov uzayının Cech-Stone tıkkılaşması βX ile gösterilir. $X \subseteq \beta X$ alt kümesi, βX uzayında yoğun olduğundan $c(X) = c(\beta X)$ olur. Öte yandan $c(X) = c(\beta X) < c(\beta X \setminus X)$ gerçekleyen bir X Tikhonov uzayı bulunabilir. Mesela, Örnek III.1'de kesikli N uzayı için $c(N) = c(\beta N) = \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = c(\beta N \setminus N)$ olduğu görülmüştü. W.W.Comfort ve Hugh Gordon [11] makalesinde, Tarski Lemması'ndan yararlanarak, herhangi bir X Tikhonov uzayı için $\beta X \setminus X$ uzayının Suslin sayısı ile ilgili aşağıdaki teoremleri kanıtladı. Öncelikle gerekli olduğundan bazı tanım ve sonuçlar verilmelidir.

Bilindiği gibi bir X uzayına, ancak ve yalnız her bir $x \in X$ noktasının bir U_x açık komşuluğu, $\overline{U_x}$ kümesi X uzayında *tıkız* olacak biçimde varsa **yerel tıkız** denir. Her yerel tıkız Hausdorff uzayının bir Tikhonov uzayı olduğu ve ayrıca herhangi bir X Tikhonov uzayının yerel tıkız olması için gerek ve yeter koşulun X kümesinin βX uzayında açık olması gerektiği bilinmektedir. (bkz. [4]) Öte yandan bir $U \subseteq X$ alt kümesine, $\overline{U}$ kümesi X uzayında tıkız ise **göreceli tıkız küme** denir. Ayrıca Z_1 ve Z_2 kümeleri, X uzayının iki sıfır kümesi ise

$$(1) \quad kap_{\beta X}(Z_1 \cap Z_2) = kap_{\beta X}(Z_1) \cap kap_{\beta X}(Z_2)$$

gerçeklendiği bilinmektedir. (bkz. [5])

Teorem III.29 *Bir X Tikhonov uzayında tanımlı, göreceli tıkız açık kümelerden oluşan ve $|\mathcal{G}| = \kappa \geq \aleph_0$ gerçekleyen bir yerel sonlu $\mathcal{G}$ ailesi varsa, $\beta X \setminus X$ uzayının $\kappa^{\aleph_0}$ kardinaliteli bir gözenekli ailesi bulunur.*

Kanıt. $\mathcal{G}$ ailesinin üyeleri, özel olarak içleri boştan farklı, ikişerli ayırık tıkız kümeler olarak alınabilir. Bu son iddia Lemma III.3'ün kanıtı içinde yapılanlardan görülebileceği gibi şöyle de görülebilir: $\phi(T) \in T$ ($\forall T \in \mathcal{G}$) gerçeklenecek biçimde tanımlanan $\phi : \mathcal{G} \longrightarrow X$ fonksiyonu aracılığıyla $A = \{\phi(T) : T \in \mathcal{G}\}$ ($\subseteq X$) olarak tanımlansın. Bu durumda her bir $a \in A$ için $\phi(T_a) = a$ gerçekleyen bir $T_a \in \mathcal{G}$ üyesi, ünlü Seçme Aksiyomu'ndan yararlanarak tek türlü belirli olacak biçimde seçilebilir. Böylece uygun bir $\mathcal{G}^* \subseteq \mathcal{G}$ alt ailesi, $\varphi(a) = T_a$ olarak tanımlanan $\varphi : A \longrightarrow \mathcal{G}^*$ fonksiyonu bire-bir ve örten olacak biçimde vardır. $\mathcal{G}$ yerel sonlu olduğundan $|A| = \kappa$ eşitliği geçerlidir. Öte yandan $\mathcal{G}$ 'nin yerel sonlu aile ve X 'in Tikhonov uzayı olmasından yararlanarak, her bir $a \in A$ için U_a ve G_a tıkız kümeleri

$$a \in \overset{o}{U}_a \subseteq U_a \subseteq \overset{o}{G}_a \subseteq G_a \subseteq T_a, \quad G_a \cap A = \{a\}$$

gerçeklenecek biçimde bulunabilir. Bu durumda her $a \in A$ için $V_a = U_a - \bigcup_{b \in A, b \neq a} \overset{o}{G}_b$ kümeleri göz önüne alınsın. Açıktır ki her bir $a \in A$ için V_a kümesi, a noktasının bir

tıkız komşuluğudur. Üstelik $a \neq b$ için

$$V_a \cap V_b = (U_a - \bigcup_{c \in A, c \neq a} \overset{\circ}{G}_c) \cap (U_b - \bigcup_{c \in A, c \neq b} \overset{\circ}{G}_c) \subseteq (U_a - \overset{\circ}{G}_b) \cap (U_b - \overset{\circ}{G}_a) \subseteq (U_a - \overset{\circ}{G}_a) = \emptyset$$

gerçeklenir. Sonuç olarak $\mathcal{V} = \{V_a : a \in A\}$ ailesi, X uzayında tanımlı, içleri boştan farklı ve ikişerli ayrık tıkız kümelerin $|\mathcal{V}| = \kappa$ gerçekleyen bir yerel sonlu ailesi olur. (Burada $\mathcal{V}$ ailesi, $\mathcal{G}$ ailesinin bir incelmesi olup, yerel sonlu bir ailenin tüm incelmeleride yerel sonlu olduğundan, $\mathcal{V}$ ailesi yerel sonludur.) Demek ki $\mathcal{G} = \mathcal{V} = \{V_a : a \in A\}$ varsayımı altında verilen iddiayı kanıtlamak yeterlidir.

Tarski Lemması'na göre A kümesinin sonsuz elemanlı alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ ailesi, üyeleri ikişerli olarak hemen hemen ayrık ve $|\mathcal{A}| = \kappa^{\aleph_0}$ olacak biçimde vardır. Her $E \in \mathcal{A}$ için

$$W_E = \beta X - \text{kap}_{\beta X}(X - \bigcup_{a \in E} V_a)$$

olarak tanımlansın. Apaçık olarak W_E kümeleri βX uzayında açıktır. Eğer her bir $E \in \mathcal{A}$ için $W_E \cap (\beta X \setminus X) \neq \emptyset$ olduğu ve $E_1 \neq E_2$ için $W_{E_1} \cap (\beta X \setminus X) \cap W_{E_2} = \emptyset$ gerçekleştiği gösterilirse, $\{W_E \cap (\beta X \setminus X)\}_{E \in \mathcal{A}}$ ailesi, $\beta X \setminus X$ uzayında aranan gözenekli aile olur. Bu amaçla $E_1, E_2 \in \mathcal{A}$ ve $E_1 \neq E_2$ olsun. Apaçık olarak

$$(*) \quad X = (X - \bigcup_{a \in E_1} V_a) \cup (X - \bigcup_{a \in E_2} V_a) \cup (\bigcup_{a \in E_1} V_a \cap \bigcup_{a \in E_2} V_a)$$

eşitliği geçerlidir. $E_1 \cap E_2$ arakesiti sonlu olduğundan $\bigcup_{a \in E_1} V_a \cap \bigcup_{a \in E_2} V_a = \bigcup_{a \in E_1 \cap E_2} V_a$ kümesi tıkızdır. Böylece $(*)$ ifadesinde βX uzayına göre kapanış alınarak

$$\beta X = \text{kap}_{\beta X} X = \text{kap}_{\beta X}(X - \bigcup_{a \in E_1} V_a) \cup \text{kap}_{\beta X}(X - \bigcup_{a \in E_2} V_a) \cup \bigcup_{a \in E_1 \cap E_2} V_a$$

bulunur. Bu kez son eşitliğin βX 'e göre tümleyeni alınarak

$$(\beta X - \text{kap}_{\beta X}(X - \bigcup_{a \in E_1} V_a)) \cap (\beta X - \text{kap}_{\beta X}(X - \bigcup_{a \in E_2} V_a)) \cap (\beta X - \bigcup_{a \in E_1 \cap E_2} V_a) = \emptyset$$

kısacası $W_{E_1} \cap W_{E_2} \subseteq \bigcup_{a \in E_1 \cap E_2} V_a$ ve böylece

$$(W_{E_1} \cap (\beta X \setminus X)) \cap (W_{E_2} \cap (\beta X \setminus X)) \subseteq (\beta X \setminus X) \cap \bigcup_{a \in E_1 \cap E_2} V_a \subseteq (\beta X \setminus X) \cap X = \emptyset$$

olduğu görülmüştür. Öte yandan X bir Tikhonov uzayı olduğundan, her bir $a \in A$ noktası için sürekli bir $f_a : X \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu, $f_a(a) = 1, f_a(x) = 0$ ($\forall x \in X - V_a$) koşulları gerçekleştirilecek biçimde vardır. Bu durumda her bir $E \in \mathcal{A}$ için $f_E = \sum_{a \in E} f_a$ olarak tanımlanırsa, $\mathcal{V}$ ailesi yerel sonlu olduğundan, f_E fonksiyonları X uzayında sürekli olur. Ayrıca $Z_E = \{x : x \in X, f_E(x) = 1\}$ ($\forall E \in \mathcal{A}$) kümeleri içinde apaçık olarak $E \subseteq Z_E \subseteq X$ gerçekleşir. Her bir $E \in \mathcal{A}$ üyesi, X uzayının sonsuz elemanlı bir kapalı alt kümesi olup hiç yığılma noktası yoktur dolayısıyla E kümesi, X uzayında tıkkız *olamaz*. (bkz. [4]) Her $E \in \mathcal{A}$ için Z_E kümesi X uzayının bir sıfır kümesi olduğundan bu uzayda kapalıdır ancak tıkkız *değildir*; çünkü Z_E kümesi tıkkız olsaydı, $E \subseteq Z_E$ kapalı alt kümesinde tıkkız olurdu bu ise az önce gözlemlendiği gibi yanlıştır. Her bir $E \in \mathcal{A}$ için Z_E kümesi, X uzayında kapalı ancak tıkkız olmadığından en az bir $p_E \in \beta X \setminus X$ noktası, $p_E \in \text{kap}_{\beta X} Z_E$ gerçekleştirilecek biçimde vardır. Her $E \in \mathcal{A}$ için f_E sürekli fonksiyonunun βX uzayına var olan sürekli genişlemesi g_E ile gösterilirse, $g_E(p_E) = 1$ ($\forall E \in \mathcal{A}$) olur. f_E fonksiyonu $X - \bigcup_{a \in E} V_a$ kümesi üzerinde 'sıfır' değerini aldığından kısacası $f_E(X - \bigcup_{a \in E} V_a) \subseteq \{0\}$ olduğundan

$$g_E(\text{kap}_{\beta X}(X - \bigcup_{a \in E} V_a)) \stackrel{(\dagger)}{\subseteq} \text{kap}_{\mathbb{R}^1}(g_E(X - \bigcup_{a \in E} V_a)) = \text{kap}_{\mathbb{R}^1}(f_E(X - \bigcup_{a \in E} V_a)) \subseteq \{0\}$$

olur. Kısacası g_E fonksiyonu $\text{kap}_{\beta X}(X - \bigcup_{a \in E} V_a)$ kümesi üzerinde 'sıfır' değerini alır.

(Burada $(\dagger)$ kapsamı alınırken g_E fonksiyonunun sürekliliğinden yararlanılmıştır.)

Sonuç olarak her $E \in \mathcal{A}$ için $p_E \in \beta X - \text{kap}_{\beta X}(X - \bigcup_{a \in E} V_a) = W_E \neq \emptyset$ olur ve böylece kanıt tamamlanır. ■

Bu teoremden $\mathcal{G}$ ailesinin üyelerini göreceli tıkkız almak yerine, X uzayı yerel tıkkız alınırsa da teoremden iddia geçerli olur; ancak teoremden tüm hipotezlerden vazgeçilemeyeceği Örnek III.12'de görülecektir. Bilindiği gibi bir X uzayı üzerinde tanımlanan tüm sürekli gerçel değerli fonksiyonlar, sınırlıysa yani $C(X) = C^*(X)$ oluyorsa X uzayına **sözde tıkkız uzay** denir. Ayrıca bir Tikhonov uzayının sözde tıkkız olabilmesi için gerek ve yeter koşulun bu uzayda tanımlanan ve üyeleri açık kümeler olan tüm

yerel sonlu ailelerin *sonlu* olması gerektiği bilinmektedir. O halde her sonsuz Hausdorff uzayının $\aleph_0$ kardinaliteli bir gözenekli ailesi var olduğundan, aşağıdaki sonuç geçerlidir.

Sonuç III.16 *Bir X Tikhonov uzayı, yerel tıkHz olup sözde tıkHz değilse, $\beta X \setminus X$ uzayında tanımlı $2^{\aleph_0}$ kardinaliteli en az bir gözenekli aile vardır. Özel olarak $\beta N \setminus N$ uzayında $2^{\aleph_0}$ kardinaliteli bir gözenekli aile tanımlanabilir.*

Teorem III.30 *Bir X Tikhonov uzayı ve sonsuz bir κ kardinal sayısı için aşağıdaki iddialar eşdeğerdir:*

- (i) $\beta X \setminus X$ uzayında tanımlı κ kardinaliteli gözenekli aile vardır.
- (ii) X uzayının tümleyen-sıfır kümelerinin bir $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ($|\Lambda| = \kappa$) ailesi, aşağıdaki özelliklere sahip olacak biçimde vardır:
 - (a) Her $\alpha \in \Lambda$ için U_α kümesi, tıkHz olmayan bir sıfır kümesi içerir.
 - (b) $\alpha, \beta \in \Lambda$, $\alpha \neq \beta$ için $U_\alpha \cap U_\beta$ arakesiti, X uzayında göreceli tıkHzdır.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii) : $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi, $\beta X \setminus X$ uzayında tanımlı ve $|\mathcal{V}| = |\Lambda| = \kappa$ gerçekleyen bir gözenekli aile olsun. Bu durumda her $\alpha \in \Lambda$ için $V_\alpha = G_\alpha \cap (\beta X \setminus X)$ gerçekleşecek biçimde, βX uzayının açık G_α kümeleri vardır. Her $\alpha \in \Lambda$ için $p_\alpha \in V_\alpha$ noktaları, Seçme Aksiyomu'ndan yararlanarak tek türlü belirli olacak biçimde seçilsin. βX uzayı tümüyle düzenli olduğundan, her bir $\alpha \in \Lambda$ indisi için $f_\alpha(p_\alpha) = 1$, $f_\alpha(x) = 0$ ($\forall x \in \beta X - G_\alpha$) koşullarını gerçekleyen sürekli bir $f_\alpha : \beta X \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu vardır. Böylece her $\alpha \in \Lambda$ için

$$U_\alpha = \{x \in X : f_\alpha(x) > \frac{1}{3}\}, \quad Z_\alpha = \{x \in X : f_\alpha(x) \geq \frac{1}{2}\}$$

biçiminde tanımlanan kümeler göz önüne alınsın. Açıktır ki Z_α ve U_α kümeleri, X uzayının sırasıyla sıfır ve tümleyen sıfır kümeleridir, üstelik $Z_\alpha \subseteq U_\alpha \subseteq X$ ($\forall \alpha \in \Lambda$) geçerlidir. Bu biçimde tanımlanan $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi, (ii) şıkkındaki koşulları sağlar. Gerçekten, her $\alpha \in \Lambda$ için $Z_\alpha \subseteq U_\alpha$ ve Z_α sıfır kümesi olduğundan, eğer $p_\alpha \in \text{kap}_{\beta X} Z_\alpha$ olduğu

gösterilirse, Z_α kümesinin tıkHz olmadığı ve böylece $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesinin (a) koşulunu sağladığı anlaşılır. Bu durumda

$$\beta X = kap_{\beta X} X = kap_{\beta X}(X - Z_\alpha) \cup kap_{\beta X} Z_\alpha \text{ ve } f_\alpha(p_\alpha) = 1$$

gerçekleri ve her $x \in kap_{\beta X}(X - Z_\alpha)$ için $f_\alpha(x) \leq \frac{1}{2}$ olması nedeniyle $p_\alpha \in kap_{\beta X} Z_\alpha$ aranan sonucu bulunur. Öte yandan, eğer $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi (b) koşulunu sağlamasaydı, $\alpha \neq \beta$ gerçekleyen uygun bir $\alpha, \beta \in \Lambda$ indis çifti ve bir $p \in \beta X \setminus X$ noktası,

$$p \in kap_{\beta X}(kap_X(U_\alpha \cap U_\beta)) = kap_{\beta X}(U_\alpha \cap U_\beta) (\subseteq kap_{\beta X}(U_\alpha) \cap kap_{\beta X}(U_\beta))$$

olacak biçimde bulunurdu; ancak bu durumda $f_\alpha(p) \geq \frac{1}{3}$ ve $f_\beta(p) \geq \frac{1}{3}$ olup,

$$p \in G_\alpha \cap G_\beta \cap (\beta X \setminus X) = V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$$

çelişkisi elde edilirdi. Sonuç olarak $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi (a) ve (b) koşullarını sağlar.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi, X uzayının tümleyen sıfır kümelerinin (a) ve (b) koşullarını gerçekleyen bir ailesi olsun. Bu durumda, X uzayında, her bir $\alpha \in \Lambda$ için tıkHz *olmayan* ve $Z_\alpha \subseteq U_\alpha$ gerçekleyen Z_α sıfır kümeleri vardır. $X - U_\alpha$ ve Z_α kümeleri, X uzayının ayrık sıfır kümeleri olduğundan, yukarıdaki (1) ifadesinden yararlanılarak

$$\emptyset = kap_{\beta X}((X - U_\alpha) \cap Z_\alpha) = kap_{\beta X}(X - U_\alpha) \cap kap_{\beta X} Z_\alpha$$

bulunur. O halde ünlü Urysohn Teoremi nedeniyle sürekli bir $f_\alpha : \beta X \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu, $f_\alpha(x) = 0$ ($\forall x \in kap_{\beta X}(X - U_\alpha)$), $f_\alpha(x) = 1$ ($\forall x \in kap_{\beta X} Z_\alpha$) koşulları gerçekleştirilecek biçimde vardır. Her $\alpha \in \Lambda$ için

$$V_\alpha = \{x \in \beta X : f_\alpha(x) > 0\}$$

kümeleri tanımlansın. Eğer $\{V_\alpha \cap (\beta X \setminus X)\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesinin $\beta X \setminus X$ uzayında bir gözenekli aile olduğu gösterilirse, kanıt tamamlanır. Her $\alpha \in \Lambda$ için V_α kümesi, βX uzayında, $\emptyset \neq kap_{\beta X} Z_\alpha \subseteq V_\alpha$ gerçekleyen boştan farklı bir tümleyen sıfır (dolayısıyla açık) kümesidir.

Farklı $\alpha, \beta \in \Lambda$ indisleri için keyfi bir $p \in V_\alpha \cap V_\beta$ noktası (varsa) göz önüne alınsın. Bu durumda $(f_\alpha \cdot f_\beta)(p) = f_\alpha(p) \cdot f_\beta(p) > 0$ olup $p \notin (kap_{\beta X}(X - U_\alpha) \cup kap_{\beta X}(X - U_\beta))$ bulunur. Böylece $p \in kap_{\beta X}(U_\alpha \cap U_\beta) \stackrel{(*)}{=} kap_X(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq X$ (burada $(*)$ eşitliği yazılırken (ii) 'nin (b) koşulundan yararlanıldı) olur, kısacası $V_\alpha \cap V_\beta \subseteq X$ gerçekleşir. Sonuç olarak her $\alpha \neq \beta$ gerçekleyen $\alpha, \beta \in \Lambda$ indis çifti için

$$(V_\alpha \cap (\beta X \setminus X)) \cap (V_\beta \cap (\beta X \setminus X)) = V_\alpha \cap V_\beta \cap (\beta X \setminus X) \subseteq X \cap (\beta X \setminus X) = \emptyset$$

olduğundan $\{V_\alpha \cap (\beta X \setminus X)\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi, $\beta X \setminus X$ uzayında tanımlı ve $|\Lambda| = \kappa$ kardinaliteli bir gözenekli ailedir. ■

Örnek III.12 $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}^1)$ rasyonel sayılar uzayı (diğer bir deyişle $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ Öklid uzayının $\mathbb{Q}$ alt uzayı) olmak üzere, $\beta \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$ uzayının c kardinaliteli gözenekli ailesi yoktur.

Çözüm. Bu iddia, $\mathbb{Q}$ uzayında, hem açık hem de göreceli tıkız olan *tek* kümenin boş küme olması gerçeği ile bir önceki teoremden yararlanarak kolayca gözlenir. Gerçekten, eğer $\beta \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$ uzayının c kardinaliteli bir gözenekli ailesi bulunsaydı, yukarıdaki (ii) koşulu gereği X uzayının tümleyen-sıfır (özel olarak açık) kümelerinin bir $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ($|\Lambda| = c$) ailesi, (a) ve (b) koşullarını gerçekleyecek biçimde var olurdu; ancak (b) koşulu gereği, her $\alpha \neq \beta$ gerçekleyen $\alpha, \beta \in \Lambda$ indis çifti için $U_\alpha \cap U_\beta$ kesişimi, $\mathbb{Q}$ uzayında göreceli tıkız yani boş küme olurdu. Bu da $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ($|\Lambda| = c$) ailesinin $\mathbb{Q}$ uzayında gözenekli olması anlamına gelir. Bu ise $c(\mathbb{Q}) \leq \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = c = |\Lambda|$ olması nedeniyle imkansızdır. ■

Teorem III.29 ve Teorem III.30'dan aşağıdaki sonuçlar kolayca gözlenir:

Sonuç III.17 *Yerel tıkız olan ancak sözde tıkız olmayan bir X Tikhonov uzayında, hiçbir üyesi göreceli tıkız olmayıp herhangi farklı iki üyesinin arakesiti göreceli tıkız olacak biçimde c kardinaliteli bir $\mathcal{U}$ açık kümeler ailesi tanımlanabilir.*

Sonuç III.18 $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ Öklid uzayı ve κ kardinal sayısı için aşağıdaki iddialar eşdeğerdir:

(a) $\beta\mathbb{R}\backslash\mathbb{R}$ uzayında κ kardinaliteli bir gözenekli aile tanımlanabilir.

(b) $\kappa \leq c$ dir.

Sonuç III.19 κ_1 ve κ_2 kardinal sayılar olmak üzere, $\kappa_2 \geq \aleph_0$ gerçeklensin. Bu durumda $\beta D(\kappa_2)\backslash D(\kappa_2)$ uzayının, κ_1 kardinaliteli bir gözenekli ailesinin bulunması için gerek ve yeter koşul $\kappa_1 \leq \kappa_2^{\aleph_0}$ olmasıdır. Bu iddia da özel olarak $\kappa_2 = c$ alınırsa, $\kappa_1 \leq c$ gerçekenir.

Kanıt. $D(\kappa_2)$ kümesinin tüm alt kümeleri, kesikli $D(\kappa_2)$ uzayında, hem sıfır hem de tümleyen sıfır kümesidir. Ayrıca bu uzayın yalnızca sonlu alt kümeleri tıktır. O halde Teorem III.30 nedeniyle $\beta D(\kappa_2)\backslash D(\kappa_2)$ uzayının κ_1 kardinaliteli gözenekli ailesi varsa, $D(\kappa_2)$ uzayında, Teorem III.30(ii) 'deki özelliklere sahip bir $\mathcal{U}$ açık kümeler ailesi, $|\mathcal{U}| = \kappa_1$ gerçeklenecek biçimde vardır. $\mathcal{U}$ ailesinin herhangi farklı iki üyesinin arakesiti, $D(\kappa_2)$ uzayında göreceli tıktır yani sonlu olacağından, $\mathcal{U}$ ailesinin üyeleri ikişerli olarak hemen hemen ayrık olmalıdır. Böylece Tarski Lemması'ndan yararlanarak $|\mathcal{U}| = \kappa_1 \leq \kappa_2^{\aleph_0}$ bulunur. Ters iddia Teorem III.29'den yararlanarak kolayca görülür. ■

Sonuç III.20 κ bir sonsuz kardinal sayı ve D bir kesikli uzay olmak üzere, $\beta D\backslash D$ uzayının κ kardinaliteli bir gözenekli ailesinin var olması için gerek ve yeter koşul $\kappa^{\aleph_0}$ kardinaliteli bir gözenekli ailesinin bulunmasıdır. Özel olarak $\beta D\backslash D$ uzayının $\aleph_0$ kardinaliteli bir gözenekli ailesi varsa, $2^{\aleph_0} = c$ kardinaliteli bir gözenekli ailesinde bulunur.

Kanıt. $\beta D\backslash D$ uzayının κ kardinaliteli bir gözenekli ailesi tanımlanabiliyorsa, bir önceki sonuç nedeniyle $\kappa \leq |D|^{\aleph_0}$ olur. Böylece $\kappa^{\aleph_0} \leq |D|^{\aleph_0}$ gerçeklendiğinden yine bir önceki sonuç nedeniyle $\beta D\backslash D$ uzayının $\kappa^{\aleph_0}$ kardinaliteli bir gözenekli ailesi bulunur. Yeterlilik ise apaçıktır. ■

Sonuç III.21 Her $\alpha \in \Lambda$ için Y_α , tıktır ve ayrılabilir bir Hausdorff uzayı olsun. Bu durumda $Y = \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ çarpım uzayı olmak üzere, eğer $Y = \beta X\backslash X$ olacak biçimde bir X uzayı varsa, X sözde tıktır.

Kanıt. $Y = \beta X \setminus X \subseteq \beta X$ alt kümesi, tıkız olduğundan βX uzayında *kapalıdır*. Bu durumda X uzayı, βX uzayının bir açık alt uzayı olduğundan yerel tıkızdır. Ayrıca Sonuç III.14'e göre Y çarpım uzayı sayılabilir zincir koşulunu gerçekler dolayısıyla $\beta X \setminus X (= Y)$ uzayının $2^{\aleph_0}$ kardinaliteli gözenekli ailesi *yoktur*. Böylece Sonuç III.16'dan X uzayının sözde tıkız olduğu anlaşılır. ■

W.W.Comfort [12] makalesinde herhangi bir sonsuz κ kardinal sayısı için $d(\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)) = \kappa^{\aleph_0}$ gerçekleştiğini ve $\beta D(\kappa)$ uzayından $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$ uzayına *sürekli ve örten* bir fonksiyonunun tanımlanabilmesi için gerek ve yeter koşulun $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$ olduğunu kanıtladı. Bilindiği gibi X bir Tikhonov uzayı olmak üzere, eğer A kümesi, X uzayında hem açık hem de kapalı ise (bu tür kümeler kısaca **kapaçık küme** denir) $kap_{\beta X} A$ kümesi de, βX uzayında *kapaçık* olur. Herhangi bir $\kappa \geq \aleph_0$ kardinal sayısı için $\beta D(\kappa)$ uzayının kapaçık kümelerden oluşan bir tabanı vardır. Gerçekten, herhangi bir $A \subseteq D(\kappa)$ alt kümesi, $D(\kappa)$ uzayında kapaçık olduğundan $kap_{\beta D(\kappa)} A$ kümesi, $\beta D(\kappa)$ uzayında kapaçık olur. Bu kümelerden oluşan $\mathcal{B} = \{kap_{\beta D(\kappa)} A : A \subseteq D(\kappa)\}$ ailesi, $\beta D(\kappa)$ uzayı için bir taban tanımlar; çünkü, herhangi bir $x \in \beta D(\kappa)$ noktası ve bu noktanın herhangi bir V açık komşuluğu göz önüne alınırsa, $\beta D(\kappa)$ düzenli uzay olduğundan bu uzayda $x \in W \subseteq kap_{\beta D(\kappa)} W \subseteq V$ gerçekleyen bir W açık kümesi vardır. $A = W \cap D(\kappa)$ olarak alınırsa, $kap_{\beta D(\kappa)} A \in \mathcal{B}$ ve

$$\begin{aligned} kap_{\beta D(\kappa)} W &= kap_{\beta D(\kappa)} (W \cap \beta D(\kappa)) = kap_{\beta D(\kappa)} (W \cap kap_{\beta D(\kappa)} D(\kappa)) \\ &= kap_{\beta D(\kappa)} (W \cap D(\kappa)) = kap_{\beta D(\kappa)} A \subseteq V \end{aligned}$$

gerçekleştiğinden $x \in kap_{\beta D(\kappa)} A \subseteq V$ olur ve böylece $\mathcal{B}$ ailesinin $\beta D(\kappa)$ uzayı için bir taban tanımladığı anlaşılır. Buradan $w(\beta D(\kappa)) \leq |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{P}(D(\kappa))| = 2^\kappa$ sonucu gözlenir, aslında $w(\beta D(\kappa)) = 2^\kappa$ gerçekleştiği birazdan görülecektir. Benzer biçimde $\mathcal{B}^* = \{(kap_{\beta D(\kappa)} A) \setminus D(\kappa) : A \subseteq D(\kappa), \aleph_0 \leq |A|\}$ ailesinin, $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$ uzayı için bir taban tanımladığı görülebilir.

Teorem III.31 κ bir sonsuz kardinal sayı ise $d(\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)) = \kappa^{\aleph_0}$ olur.

Kanıt. Sonuç III.19 nedeniyle $\kappa^{\aleph_0} \leq c(\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)) \leq d(\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa))$ gerçekleşir. $D(\kappa)$ kümesinin sayılabilir sonsuz elemanlı tüm alt kümelerinin ailesi $\mathcal{L}$ ile gösterilsin. Kolayca görülebilir ki her $N \in \mathcal{L}$ için $kap_{\beta D(\kappa)}N - D(\kappa) \neq \emptyset$ olur. Bu durumda her bir $N \in \mathcal{L}$ için $p_N \in kap_{\beta D(\kappa)}N - D(\kappa)$ olacak biçimde, Seçme Aksiyomu yardımıyla seçilen $p_N \in \beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$ noktaları aracılığıyla tanımlanan $S = \{p_N \in \beta D(\kappa) : N \in \mathcal{L}\}$ kümesi, $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$ uzayında yoğundur. Gerçekten, $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$ uzayının herhangi bir boştan farklı açık U kümesi göz önüne alınırsa, biraz önce tanımlanan $\mathcal{B}^* = \{(kap_{\beta D(\kappa)}A) \setminus D(\kappa) : A \subseteq D(\kappa), \aleph_0 \leq |A|\}$ ailesi, $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$ uzayının bir tabanı olduğundan $|E| \geq \aleph_0, kap_{\beta D(\kappa)}E - D(\kappa) \subseteq U$ koşullarını gerçekleyen bir $E \subseteq D(\kappa)$ alt kümesi vardır. Böylece sayılabilir sonsuz elemanlı herhangi bir $N \subseteq E$ alt kümesi aracılığıyla $p_N \in kap_{\beta D(\kappa)}N - D(\kappa) \subseteq kap_{\beta D(\kappa)}E - D(\kappa) \subseteq U$ ve böylece $p_N \in S \cap U \neq \emptyset$ sonucu elde edilir. S kümesi, $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$ uzayının tüm boştan farklı açık kümeleriyle boştan farklı olarak kesiştiğinden bu uzayda yoğundur. Dolayısıyla

$$d(\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)) \leq |S| \leq |\mathcal{L}| \leq \kappa^{\aleph_0}$$

olur ve böylece kanıt tamamlanır. ■

Teorem III.32 $\kappa, 1 < \kappa$ koşulunu gerçekleyen bir kardinal sayı olmak üzere, $\beta D(\kappa)$ uzayından $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$ uzayına sürekli ve örten bir fonksiyonun tanımlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$ olmasıdır.

Kanıt. κ bir sonlu kardinal sayı ise $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa) = \emptyset$ olacağından iddia apaçıktır. Şimdi $\kappa \geq \aleph_0$ olduğu varsayalım. Gereklik hipotezi gereği sürekli ve örten bir $f : \beta D(\kappa) \longrightarrow \beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$ fonksiyonu var olsun. Bu durumda, sürekli ve örten fonksiyonlar altında yoğun kümenin görüntüsünde yoğun olacağından,

$$\kappa^{\aleph_0} = d(\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)) = d(f(\beta D(\kappa))) \leq d(\beta D(\kappa)) \leq |D(\kappa)| = \kappa \leq \kappa^{\aleph_0}$$

kısacası $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$ bulunur. Tersine yeterlilik hipotezi gereği $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$ olsun. $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$ uzayının bir önceki teorem nedeniyle var olan ve $|E| = \kappa^{\aleph_0}$ gerçekleyen yoğun bir E

kümesi göz önüne alınsın. Bu durumda $D(\kappa) \subseteq \beta D(\kappa)$ kesikli alt uzayından $E \subseteq \beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$ yoğun alt uzayına sürekli ve örten bir g fonksiyonu tanımlanabilir. $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$ uzayı tıkHz olduğundan, (çünkü, $D(\kappa)$ yerel tıkHz olduğundan $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa) \subseteq \beta D(\kappa)$ alt kümesi kapalıdır) g fonksiyonunun $\beta D(\kappa)$ uzayına sürekli genişlemesi vardır. Kısacası bir $\tilde{g} : \beta D(\kappa) \longrightarrow \beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$ sürekli fonksiyonu, $\tilde{g}|_{D(\kappa)} = g$ olacak biçimde tanımlanabilir. Ayrıca tıkHz uzaylardan Hausdorff uzaylarına tanımlı sürekli fonksiyonlar *kapalı* olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\beta D(\kappa)) &= \tilde{g}(kap_{\beta D(\kappa)} D(\kappa)) = kap_{\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)} \tilde{g}(D(\kappa)) = kap_{\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)} g(D(\kappa)) \\ &= kap_{\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)} E = \beta D(\kappa) \setminus D(\kappa) \end{aligned}$$

gerçeklenir yani $\tilde{g}$ fonksiyonu örtendir. ■

Sonuç III.22 *Aşağıdaki iddialar eşdeğerdir:*

(a) $\beta D(\aleph_1)$ uzayından $\beta D(\aleph_1) \setminus D(\aleph_1)$ uzayına tanımlı sürekli ve örten bir fonksiyon vardır.

(b) *Kontinyum hipotezi* ($\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$) geçerlidir.

Kanıt. Bu sonuç, $2^{\aleph_0} = \aleph_1^{\aleph_0}$ gerçeğinden (çünkü $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ olur) ve bir önceki teoremden yararlanarak kolayca kanıtlanır. ■

$\kappa \geq \aleph_0$ olmak üzere $I = [0, 1]$ kapalı aralığı aracılığıyla tanımlanan I^κ çarpım uzayına κ -ağırlıklı **Tikhonov küpü** denir. Apaçık olarak $|I^{2^\kappa}| = 2^{2^\kappa}$ gerçekleşir, üstelik Teorem III.23 nedeniyle $w(I^{2^\kappa}) = 2^\kappa$ ve Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi'ne göre $d(I^{2^\kappa}) \leq \kappa$ olur.

Teorem III.33 *Her $\kappa \geq \aleph_0$ kardinal sayısı için $|\beta D(\kappa)| = 2^{2^\kappa}$ ve $w(\beta D(\kappa)) = 2^\kappa$ geçerlidir.*

Kanıt. I^{2^κ} Tikhonov küpü'nün $|S| = \kappa$ gerçekleyen yoğun bir S alt kümesi göz önüne alınsın. Bu durumda $D(\kappa)$ kesikli uzayından I^{2^κ} çarpım uzayına, $f(D(\kappa)) = S$

gerçekleyen sürekli bir f fonksiyonu tanımlanabilir. I^{2^κ} , bir tıkız Hausdorff uzayı olduğundan f fonksiyonunun $\beta D(\kappa)$ uzayına bir sürekli genişlemesi vardır, kısacası sürekli bir $F : \beta D(\kappa) \longrightarrow I^{2^\kappa}$ fonksiyonu, $F|_{D(\kappa)} = f$ olacak biçimde vardır. $F(\beta D(\kappa))$ kümesi, I^{2^κ} uzayında tıkız olduğundan bu uzayda kapalıdır. O halde $S = f(D(\kappa)) = F(D(\kappa)) \subseteq F(\beta D(\kappa))$ olduğundan $kap_{I^{2^\kappa}} S = I^{2^\kappa} = F(\beta D(\kappa))$ gerçekleşir yani F fonksiyonu *örtendir*. Böylece $|\beta D(\kappa)| \geq |F(\beta D(\kappa))| = 2^{2^\kappa}$ gerçekleşir. Öte yandan Teorem II.4'den yararlanarak $|\beta D(\kappa)| \leq 2^{2^{d(\beta D(\kappa))}} \leq 2^{2^{d(D(\kappa))}} = 2^{2^\kappa}$ ters eşitsizliği bulunur. Diğer taraftan, kolayca görülebilir ki herhangi bir Y tıkız Hausdorff uzayı, herhangi bir X Hausdorff uzayının, sürekli ve örten bir fonksiyon altındaki görüntüsü ise $w(Y) \leq w(X)$ olur. (Gerçekten, X uzayının $|\mathcal{B}| = w(X)$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}$ tabanı ile sürekli ve örten bir $h : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu aracılığıyla tanımlanan $\mathcal{N} = \{h(B) : B \in \mathcal{B}\}$ ailesi, Y uzayı için bir ağ belirler, böylece Teorem III.2'den yararlanarak $w(Y) = nw(Y) \leq |\mathcal{N}| \leq |\mathcal{B}| = w(X)$ aranan sonucu bulunur.) Böylece

$$2^\kappa = w(I^{2^\kappa}) = w(F(\beta D(\kappa))) \leq w(\beta D(\kappa)) \stackrel{(*)}{\leq} 2^{d(\beta D(\kappa))} \leq 2^{d(D(\kappa))} = 2^\kappa$$

olup $w(\beta D(\kappa)) = 2^\kappa$ bulunur. Burada $(*)$ eşitsizliği yazılırken Teorem II.5'den yararlanılmıştır. ■

Teorem III.12'de X tam metriklenebilir bir sonsuz uzay ise $|X| = w(X)$ veya $|X| = (w(X))^{\aleph_0}$ olduğu görüldü. Aşağıda ise daha özel olarak herhangi bir E tam normlu uzayı (diğer bir deyişle Banach uzayı) için $|E| = |E|^{\aleph_0}$ eşitliğinin geçerli olduğu görülecektir. Ayrıca bu eşitlikten yararlanarak herhangi bir X uzayı için $|C(X)| = |C(X)|^{\aleph_0}$ olduğu görülecektir. Gerekli olduğundan öncelikle aşağıdaki lemma kanıtlanacak, bu amaçla bazı tanımlar verilecektir. $(E, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere, herhangi bir $r > 0$ gerçel sayısı için $S(r) = \{x \in E : \|x\| < r\}$ olarak tanımlanan kümeye **r -yarıçaplı açık yuvar** denir. Özel olarak $S(1)$ kümesine **açık birim yuvar** denir. Benzer biçimde herhangi bir $x \in E$ noktasının **r -yarıçaplı açık komşuluğu**, $S_x(r) = \{y \in E : \|x - y\| < r\}$ olarak tanımlanır. r , sabit bir pozitif gerçel sayı

olmak üzere bir $D \subseteq E$ alt kümesine, ancak ve yalnız *her farklı* $x, y \in D$ nokta çifti için $\|x - y\| \geq r$ oluyorsa **r -saçılımlı küme** denir. Herhangi bir r -saçılımlı D kümesi için $|D| \leq c(E) = d(E)$ gerçekleştiği açıktır.

Lemma III.6 (a) E herhangi bir normlu uzay olmak üzere, her bir $r \in \mathbb{R}^+$ sayısı için r -saçılımlı bir $D \subseteq E$ alt kümesi, $|D| = d(E)$ gerçeklenecek biçimde vardır.

(b) $(E, \|\cdot\|)$, ayrılabilir olmayan ($d(E) > \aleph_0$) bir normlu uzay ise $S(1)$ açık birim yuvarının $\frac{1}{2}$ -saçılımlı bir D alt kümesi, $|D| = d(E)$ gerçeklenecek biçimde vardır.

Kanıt. (a)- Keyfi sabit bir $r \in \mathbb{R}^+$ sayısı için E uzayında tanımlanan r -saçılımlı kümelerin, ünlü Zorn Lemması nedeniyle var olan, *maksimali* D olsun. Bu maksimal küme aracılığıyla tanımlanan $S = \{qx : x \in D, q \in \mathbb{Q}\}$ kümesi, E uzayında yoğundur; çünkü herhangi bir $y \in E$ noktası ve herhangi bir $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ rasyonel sayısı için $S_y(\varepsilon) \cap S \neq \emptyset$ olur. Gerçekten, sabit $y \in E$ noktası ile $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ rasyonel sayısı için, eğer $y \in S$ ise apaçık olarak $y \in S_y(\varepsilon) \cap S \neq \emptyset$ olur. Şimdi $y \notin S$ olsun. Ünlü Arşimed İlkesi nedeniyle $r < n_\varepsilon \cdot \varepsilon$ gerçeklenecek biçimde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Bu durumda S kümesinin tanımı gereği $n_\varepsilon \cdot y \notin S$ olur, üstelik $D \subseteq S$ olduğundan $n_\varepsilon \cdot y \notin D$ gerçekleşir. O halde D kümesinin tanımı gereği *en az bir* $a_y \in D$ noktası, $\|n_\varepsilon \cdot y - a_y\| < r$ gerçeklenecek biçimde vardır. Bu durumda $\left\|y - \frac{a_y}{n_\varepsilon}\right\| < \frac{r}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ olup $\frac{a_y}{n_\varepsilon} \in S_y(\varepsilon) \cap S \neq \emptyset$ sonucu elde edilir. Böylece $|D| \geq \aleph_0$ olduğundan

$$d(E) \leq |S| \leq |\mathbb{Q} \times D| = \aleph_0 \cdot |D| = |D| \leq d(E)$$

aranan sonucu bulunur.

(b)- $S(1)$ kümesinin $\frac{1}{2}$ -saçılımlı alt kümelerinin maksimali, D olsun. D kümesinin elemanlarının pozitif tamsayı katlarının sonlu toplamalarının kümesi, T ile gösterilsin.

Kısaca

$$T = \{n_1 \cdot x_1 + \dots + n_k \cdot x_k : k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}, x_i \in D \ (\forall i \in \mathbb{N}_k)\}$$

olur. T kümesi için aşağıdaki $(*)$ iddiası geçerlidir.

$(*)$ Her $x \in E$ noktası için $\|x - t\| < \frac{1}{2}$ olacak biçimde *en az bir* $t \in T$ elemanı vardır.

Bu iddia tümevarım hipotezi aracılığıyla şu biçimde kanıtlanır: Herhangi bir $x \in S(1)$ noktası için D kümesinin maksimalliğinden yararlanarak kolayca, $\|x - t\| < \frac{1}{2}$ gerçekleyen $t \in T$ elemanının varlığı kanıtlanabilir. $(*)$ iddiası, her $x \in S(2^n)$ noktası için doğru olsun. Bu durumda herhangi bir $x \in S(2^{n+1})$ noktası için $\frac{x}{2} \in S(2^n)$ olduğundan, tümevarımın n -inci adım varsayımı gereği $\|\frac{x}{2} - t\| < \frac{1}{2}$ olacak biçimde bir $t \in T$ elemanı vardır. Böylece $\|x - 2t\| < 1$ yani $x - 2t \in S(1)$ olur; ancak bu durumda da $\|x - (2t + u)\| = \|(x - 2t) - u\| < \frac{1}{2}$ olacak biçimde bir $u \in T$ elemanı vardır, üstelik $2t + u \in T$ gerçekleşir. Sonuç olarak tümevarım hipotezi yardımıyla $(*)$ iddiasının doğru olduğu anlaşılır. T kümesi aracılığıyla tanımlanan $T^* = \{qt : q \in \mathbb{Q}, t \in T\}$ kümesinin E uzayının bir yoğun kümesi olduğu, tıpkı (a) şikkındaki gibi görülür. Bu durumda

$$\aleph_0 < d(E) \leq |T^*| \leq \aleph_0 \cdot |T| \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot |D| = |D| \leq c(E) \leq d(E)$$

oldüğundan, $|D| = d(E)$ gerçekleşir ve böylece kanıt tamamlanır. ■

Yukarıdaki lemmanın (b) şikkında, E uzayının ayrılabilir *olmama* koşulu çıkarılamaz; çünkü ayrılabilir olan $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ normlu uzayı için (b) şikkındaki iddia doğru değildir. Öte yandan herhangi bir (X, ρ) metrik uzayı (ya da daha genel olarak metriklenebilir uzay) ve herhangi bir $r \in \mathbb{R}^+$ pozitif gerçel sayısı göz önüne alınsın. Eğer D kümesi, (X, ρ) metrik uzayında tanımlı bir r -saçılımlı kümeysen, $\mathcal{B} = \{B_x(\frac{r}{4})\}_{x \in D}$ ailesi, X uzayında *yerel sonlu* olur. (Gerçekten, her bir $y \in X$ noktasına karşılık *en fazla bir* $x \in D$ noktası, $B_y(\frac{r}{4}) \cap B_x(\frac{r}{4}) \neq \emptyset$ gerçekleşecek biçimde vardır; çünkü farklı $x_1, x_2 \in D$ noktaları için $B_y(\frac{r}{4}) \cap B_{x_1}(\frac{r}{4}) \neq \emptyset$ ve $B_y(\frac{r}{4}) \cap B_{x_2}(\frac{r}{4}) \neq \emptyset$ gerçekleşseydi, $\rho(y, x_i) < \frac{r}{2}$ ($i = 1, 2$) olduğundan $r \leq \rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, y) + \rho(y, x_2) < r$ çelişkisi elde edilirdi. Demek ki X uzayının her noktasının *en az bir* açık komşuluğu, $\mathcal{B}$ ailesinin *en fazla bir* üyesiyle

boştan farklı olarak kesişir, böylece $\mathcal{B}$ ailesinin yerel sonlu olduğu anlaşılır.) Kısacası X uzayında tanımlanan r -saçılımlı herhangi bir kümeyle aynı kardinaliteye sahip yerel sonlu bir açık kümeler ailesi vardır. Bu gerçekten yararlanarak yukarıdaki lemmanın (a) şıkkının metriklenebilir uzaylar için doğru olmasının *gerekmeyişi*, Örnek III.3'den anlaşılır; çünkü (E, ρ) dikenli kirpi uzayında tanımlanan ve üyeleri açık kümeler olan, herhangi bir yerel sonlu $\mathcal{U}$ ailesi için $|\mathcal{U}| < d(E) = w(E)$ olduğu bilinmektedir.

Teorem III.34 (*Kruse Teoremi*): *Herhangi bir E tam normlu uzayı için $|E| = |E|^{\aleph_0}$ geçerlidir.*

Kanıt. Bu teoremin farklı iki kanıtı aşağıdaki gibi yapılabilir.

Yol 1: Aşağıdaki temel bilgiden yararlanarak bu teorem kanıtlanabilir:

Temel Bilgi: X herhangi bir *tam metriklenebilir* uzay olsun. Bu durumda X uzayının boştan farklı açık kümelerinin *minimal* ağırlık sayısına sahip olanı U kümesi ise $|U| = |U|^{\aleph_0}$ gerçekleşir.

Gerçekten, eğer $|U| < \aleph_0$ ise U alt uzayı bir Hausdorff uzayı olduğundan, U kümesinin tüm elemanları, U açık alt uzayında (dolayısıyla X ana uzayında) birer *yakıtılmış nokta* olur. Böylece U kümesinin tanımı gereği, eğer $|U| < \aleph_0$ ise, $|U| = 1$ gerçekleşir ve sonuç olarak $|U| = |U|^{\aleph_0}$ eşitliği sağlanır. Şimdi $|U| \geq \aleph_0$ olsun. Ünlü Mazurkiewicz Teoremi (bkz. [3] veya [4]) nedeniyle U açık alt uzayı tam metriklenebilirdir. Ayrıca U kümesinin tanımı gereği, U alt uzayının herhangi bir boştan farklı açık V kümesi için $w(V) = w(U)$ gerçekleşir. Sonuç olarak Teorem III.11 ve Teorem III.10(b)'den yararlanarak

$$(w(U))^{\aleph_0} \leq |U| \leq (w(U))^{\aleph_0}$$

olur, böylece $|U| = |U|^{\aleph_0} = (w(U))^{\aleph_0}$ aranan sonucu bulunur.

Herhangi bir normlu uzayın herhangi bir boştan farklı açık kümesi, bu uzayın bir homeomorfik kopyasını içerir. (Gerçekten, $(Y, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ise herhangi

bir $x \in Y$ noktası ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ gerçel sayısı için $S_x(\varepsilon)$ açık yuvarı ile Y uzayı eşyapılıdır (homeomorftir); çünkü $\varphi_x(y) = x + \frac{\varepsilon(x-y)}{1+\|x-y\|}$ biçiminde tanımlanan $\varphi_x : Y \longrightarrow S_x(\varepsilon)$ fonksiyonu bir eşyapı fonksiyonudur.) Böylece E tam normlu uzayının temel bilgideki özelliklere sahip açık kümesi, V ile gösterilirse

$$|V| = |V|^{\aleph_0} = |E| = |E|^{\aleph_0}$$

olur ve böylece kanıt tamamlanır.

Yol 2: Her normlu uzay özel bir metrik uzay olduğundan, E normlu uzayı için $d(E) = w(E)$ gerçekleşir. O halde Pospisil Teoremi veya Teorem III.10(b)'den yararlanarak $|E| \leq (d(E))^{\aleph_0}$ sonucu bulunur. (Aslında bu son gerçek şöyle de görülebilir: E uzayının $|A| = d(E)$ gerçekleyen yoğun bir A kümesi göz önüne alınsın. E normlu uzayı, birinci sayılabilir olduğundan her $x \in \overline{A} = E$ noktasına karşılık $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ olacak biçimde bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in A^{\omega}$ dizisi bulunur. (Burada A^{ω} ile A kümesinin elemanlarıyla tanımlanan tüm dizilerin kümesi gösterilmektedir.) Öte yandan E bir Hausdorff uzayı olduğundan, herhangi bir dizi *en fazla bir* noktaya yakınsar. Böylece $|E| \leq |A^{\omega}| \leq |A|^{\aleph_0} = (d(E))^{\aleph_0}$ olur.) O halde $|E| \geq c$ olduğundan, (Herhangi bir sonsuz X normlu uzayı için $c \leq |X|$ gerçekleşir; çünkü öncelikle X , $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ *cismi* üzerinde bir *vektör uzay*dır.) eğer E bir *ayrılabilir* uzaysa, $c \leq |E| \leq (d(E))^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c$ gerçekleşir ve böylece $|E| = |E|^{\aleph_0} = c$ bulunur. Şimdi E uzayı *ayrılabilir olmasın* yani $d(E) > \aleph_0$ gerçeklensin. Bu durumda Lemma III.6(b) nedeniyle, E uzayının açık birim yuvarının $|D| = d(E)$ olacak biçimde $\frac{1}{2}$ -saçılımlı bir $D \subseteq S(1)$ alt kümesi vardır. Bu küme aracılığıyla φ fonksiyonu,

$$\varphi : D^{\omega} \longrightarrow E, \quad \varphi(\{p_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{6^n}$$

olacak biçimde tanımlansın. Her $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \in D^{\omega}$ dizisi için $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{6^n} \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|p_n\|}{6^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} = \frac{1}{5}$ olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{6^n}$ serisi mutlak yakınsaktır. Öte yandan E bir tam normlu uzay olduğundan bu uzayda tanımlı her mutlak yakınsak seri, yakınsaktır.

(Bilindiği gibi bir normlu uzayın Banach uzayı olması için gerek ve yeter koşul bu uzayda tanımlanan tüm mutlak yakınsak serilerin yakınsak olmasıdır.) Böylece her bir $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \in D^{\omega}$ dizisine karşılık tanımlanan, $\varphi(\{p_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{6^n}$ serisi yakınsak olur. Üstelik φ fonksiyonu *bire-bir*dir; çünkü farklı $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}, \{q_n\}_{n=1}^{\infty} \in D^{\omega}$ dizileri için $\varphi(\{p_n\}_{n=1}^{\infty}) \neq \varphi(\{q_n\}_{n=1}^{\infty})$ olur. Gerçekten, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \neq \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ olduğundan, $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : p_n \neq q_n\}$ pozitif tamsayısı vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|\varphi(\{p_n\}_{n=1}^{\infty}) - \varphi(\{q_n\}_{n=1}^{\infty})\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{6^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{6^n} \right\| = \left\| \sum_{n_0 \leq n} \frac{(p_n - q_n)}{6^n} \right\| \stackrel{(1)}{\geq} \frac{\|p_{n_0} - q_{n_0}\|}{6^{n_0}} - \\ &\left\| \sum_{n_0 < n} \frac{(p_n - q_n)}{6^n} \right\| \geq \frac{\|p_{n_0} - q_{n_0}\|}{6^{n_0}} - \sum_{n_0 < n} \frac{\|p_n - q_n\|}{6^n} \stackrel{(2)}{\geq} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6^{n_0}} - \frac{2}{6^{n_0}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6^k} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{6^{n_0}} > 0 \text{ gerçeklenir.} \end{aligned}$$

Kısacası $\|\varphi(\{p_n\}_{n=1}^{\infty}) - \varphi(\{q_n\}_{n=1}^{\infty})\| > 0$ gerçeklendiği için $\varphi(\{p_n\}_{n=1}^{\infty}) \neq \varphi(\{q_n\}_{n=1}^{\infty})$ olur. (Yukarıda (1) eşitsizliği yazılırken *ters üçgen eşitsizliğinden* ve (2) eşitsizliği yazılırken $p_n, q_n \in D \subseteq S(1)$, $\frac{1}{2} \leq \|p_n - q_n\| \leq 2$ gerçeklerinden yararlanılmıştır.) Bu durumda

$$(d(E))^{\aleph_0} = |D^{\omega}| \leq |E| \leq (d(E))^{\aleph_0}$$

olur ve böylece $|E| = |E|^{\aleph_0} = (d(E))^{\aleph_0}$ aranan sonucu bulunur. ■

Sonuç III.23 *Herhangi bir X topolojik uzayı için $|C(X)| = |C(X)|^{\aleph_0}$ gereklidir.*

Kanıt. Bilindiği gibi $(C^*(X), \|\cdot\|_{\infty})$ bir Banach uzayıdır. Böylece bir önceki teoremden yararlanarak $|C^*(X)| = |C^*(X)|^{\aleph_0} = (d(C^*(X)))^{\aleph_0}$ gerçekleştiği anlaşılır. Sonuç olarak daima $|C^*(X)| = |C(X)|$ olduğundan, $|C(X)| = |C(X)|^{\aleph_0}$ gereklidir.

■

Öte yandan $|E| = |E|^{\aleph_0}$ eşitliğini gerçekleyen bir E normlu uzayı, tam olmak zorunda *değildir*. Aşağıdaki örnekte böyle bir E normlu uzayı tanımlanacaktır.

Örnek III.13 $|E| = |E|^{\aleph_0}$ eşitliğini sağlayan ancak tam olmayan bir E normlu uzayı tanımlanabilir.

Çözüm. $C([-1, 1])$ vektör uzayı üzerinde $\|f\|_{L_1} = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$ biçiminde tanımlanan $\|\cdot\|_{L_1}$ uzaklık fonksiyonu, bir normdur. Bu normla tanımlanan $(C([-1, 1]), \|\cdot\|_{L_1})$

uzayı, kısaca $L_1[-1, 1]$ ile gösterilir ve bu uzaya $L_1[-1, 1]$ -**uzayı** denir. (Genel olarak $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $1 \leq p < \infty$ için $L_p[a, b]$ -**uzayı**, $\|f\|_{L_p} = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ olmak üzere, $L_p[a, b] = (C([a, b]), \|\cdot\|_{L_p})$ biçiminde tanımlanır.) $|L_1[-1, 1]| = |C([-1, 1])| = 2^{\aleph_0}$ olduğundan $|L_1[-1, 1]| = |L_1[-1, 1]|^{\aleph_0}$ gerçekleşir ancak $L_1[-1, 1]$ uzayı tam *değildir*. Gerçekten, her $n \in \mathbb{N}$ için terimleri

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & ; -1 \leq x \leq \frac{-1}{n} \text{ ise} \\ nx & ; \frac{-1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \text{ ise} \\ 1 & ; \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, $L_1[-1, 1] = (C([-1, 1]), \|\cdot\|_{L_1})$ uzayında, yakınsak *olmayan* bir Cauchy dizidir. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [-1, 1]$ için $f_n \in C([-1, 1])$ ve $|f_n(x)| \leq 1$ olduğu açıktır. Öte yandan $n < m$ gerçekleyen $n, m \in \mathbb{N}$ sayı çifti için

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_{L_1} &= \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx = \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - f_m(x)| dx \\ &\leq \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x)| dx + \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_m(x)| dx \leq 2 \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} dx = \frac{4}{n} \end{aligned}$$

olur. Böylece $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_{L_1} = 0$ olduğundan $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, $L_1[-1, 1]$ uzayında, bir Cauchy dizisidir. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin limiti,

$$f_0(x) = Sgn(x) = \begin{cases} -1 & ; -1 \leq x < 0 \text{ ise} \\ 0 & ; x = 0 \text{ ise} \\ 1 & ; 0 < x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f_0 fonksiyonudur; çünkü her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [-1, 1]$ için $|f_n(x) - f_0(x)| \leq 2$ olduğundan

$$\|f_n - f_0\|_{L_1} = \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_0(x)| dx = \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - f_0(x)| dx \leq \frac{4}{n}$$

bulunur. Böylece $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_0\|_{L_1} = 0$ olur, bu da $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f_0$ olması demektir; ancak f_0 fonksiyonu '0' noktasında sürekli *olmadığından* $f_0 \notin C([-1, 1])$ bulunur. Sonuç

olarak $C([-1, 1])$ içindeki $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy dizisi, $L_1[-1, 1]$ uzayında yakınsak *değildir*.

■

Herhangi bir X uzayı için $C^*(X)$ uzayı, metriklenebilir olduğundan, Teorem III.10 nedeniyle $C^*(X)$ uzayı üzerinde şu ana kadar incelenen kardinal değişmezleri belirlemek için $d(C^*(X))$ yoğunluk sayısını bulmak yeterlidir. W.W.Comfort ve A.Hager [13] makalesinde bu konuyla ilgili oldukça önemli çalışmalar yapmıştır. Bazıları aşağıda gösterilecektir. Bir X uzayının bir Y alt uzayına, ancak ve yalnız her $f \in C^*(Y)$ (benzer biçimde her $f \in C(Y)$) fonksiyonunun X üzerine bir sürekli ve sınırlı (sürekli) genişlemesi varsa C^* -**gömülebilir** (C -**gömülebilir**) denir. Kısacası her bir $f \in C^*(Y)$ fonksiyonuna karşılık bir $F \in C^*(X)$ fonksiyonu, $F|_Y = f$ olacak biçimde varsa, Y alt uzayına C^* -gömülebilir denir. Tikhonov uzaylarının *tıkız* alt kümelerinin birer C^* -gömülebilir alt uzay belirlediği bilinmektedir. Ayrıca herhangi bir tıkız Hausdorff uzayının *yoğun* alt uzayından herhangi bir tıkız Hausdorff uzayına (özel olarak $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) tanımlanan tüm sürekli fonksiyonların, ana uzaya sürekli genişlemelerinin var olduğu bilinmektedir. Bu nedenle tıkız Hausdorff uzaylarının yoğun kümeleri birer C^* -gömülebilir alt uzay tanımlar.(bkz.[5])

Lemma III.7 *Herhangi bir X uzayı için aşağıdaki iddialar doğrudur.*

- (a) X uzayının C^* -gömülebilir bir S alt uzayı için $d(C^*(S)) \leq d(C^*(X))$ olur.
- (b) X uzayının yoğun bir S alt uzayı için $d(C^*(X)) \leq d(C^*(S))$ olur.

Kanıt. (a)- Lemma III.6(a) nedeniyle $(C^*(S), \|\cdot\|_{\infty})$ normlu uzayında $|\mathcal{K}| = d(C^*(S))$ gerçekleştirilecek biçimde 1-saçılımlı bir $\mathcal{K} \subseteq C^*(S)$ alt kümesi vardır. Bu durumda her bir $f \in \mathcal{K}$ fonksiyonunun X üzerine, hipotez gereği var olan sürekli ve sınırlı genişlemesi $g(f) (\in C^*(X))$ ile gösterilirse, bu fonksiyonlar aracılığıyla tanımlanan $g(\mathcal{K}) = \{g(f) \in C^*(X) : f \in \mathcal{K}\}$ kümesi $C^*(X)$ ($= (C^*(X), \|\cdot\|_{\infty})$) uzayında 1-saçılımlı bir küme olur. Böylece

$$d(C^*(S)) = |\mathcal{K}| = |g(\mathcal{K})| \leq d(C^*(X))$$

bulunur. (Bu iddia, $C^*(X)$ uzayının $|A| = d(C^*(X))$ gerçekleyen bir yoğun A alt kümesi aracılığıyla tanımlanan $A(S) = \{f|_S : f \in A\}$ kümesinin $C^*(S)$ uzayında yoğun olduğu gösterilerekte kanıtlanabilir.)

(b) $C^*(X)$ uzayının $|\mathcal{L}| = d(C^*(X))$ gerçekleyen 1-saçılımlı bir $\mathcal{L} \subseteq C^*(X)$ alt kümesi göz önüne alınsın. Bu küme aracılığıyla $\mathcal{L}(S) = \{f|_S : f \in \mathcal{L}\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda S kümesi, X uzayında yoğun olduğundan, $\varphi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}(S), \varphi(f) = f|_S$ biçiminde tanımlanan φ fonksiyonu *bire-bir ve örten* olur. Ayrıca $\mathcal{L}(S)$ kümesi, $C^*(S)$ uzayında 1-saçılımlı bir küme olduğundan

$$d(C^*(X)) = |\mathcal{L}| = |\mathcal{L}(S)| \leq d(C^*(S))$$

bulunur. ■

Sonuç III.24 *Bir X uzayının yoğun ve C^* -gömülebilir bir S alt uzayı için $d(C^*(S)) = d(C^*(X))$ gerçekleşir. Özel olarak herhangi bir X Tikhonov uzayı için $d(C^*(X)) = d(C^*(\beta X))$ eşitliği geçerlidir.*

Lemma III.8 *Herhangi bir X uzayında, alt kümelerin $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ gerçekleyen bir $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi için aşağıdaki önermeler doğrudur:*

(a) $d(C^*(X)) \leq \prod_{\alpha \in \Lambda} d(C^*(X_\alpha))$ olur.

(b) Eğer $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi kesikli ise $d(C^*(X)) = \prod_{\alpha \in \Lambda} d(C^*(X_\alpha))$ geçerlidir.

Kanıt. Öncelikle (b) şıkkı kanıtlanırsa (a) şıkkını göstermek kolay olur. (b) şıkkındaki varsayım gereği $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi kesikli olduğundan, X_α kümeleri ikişerli olarak ayrıktır. Buradan tüm X_α kümelerinin X uzayında birer *kapaçık* küme olduğu anlaşılır. Şimdi her bir $\alpha \in \Lambda$ için $C^*(X_\alpha)$ uzayının $|\mathcal{K}_\alpha| = d(C^*(X_\alpha))$ gerçekleyen bir yoğun $\mathcal{K}_\alpha$ alt kümesi göz önüne alınsın. Her $\alpha \in \Lambda$ için $f_\alpha \in \mathcal{K}_\alpha$ olmak üzere, $\oplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ($\oplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha$)(x) = $f_\alpha(x)$ (eğer $x \in X_\alpha$ ise) biçiminde tanımlanan $\oplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha$ fonksiyonu, kolayca görülebilir ki sürekli ve sınırlıdır. Kısacası $\oplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha \in C^*(X)$ olur. Bu biçimde

tanımlanan fonksiyonlar aracılığıyla elde edilen

$$\mathcal{K} = \{\oplus_{\alpha \in \Lambda} f_{\alpha} \in C^*(X) : f_{\alpha} \in \mathcal{K}_{\alpha} \ (\forall \alpha \in \Lambda)\}$$

kümesi, $C^*(X)$ uzayında yoğun olur. (Gerçekten, herhangi bir $f \in C^*(X)$ fonksiyonu ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ gerçel sayısı göz önüne alınsın. Her $\alpha \in \Lambda$ için $f|_{X_{\alpha}} \in C^*(X_{\alpha})$ olduğundan, $\|f|_{X_{\alpha}} - f_{\alpha}\|_{\infty} < \varepsilon$ gerçekleyen bir $f_{\alpha} \in \mathcal{K}_{\alpha} \cap S_{f|_{X_{\alpha}}}(\varepsilon)$ noktası vardır. Sonuç olarak $\|f - \oplus_{\alpha \in \Lambda} f_{\alpha}\|_{\infty} < \varepsilon$ yani $\oplus_{\alpha \in \Lambda} f_{\alpha} \in \mathcal{K} \cap S_f(\varepsilon) \neq \emptyset$ olduğundan $\mathcal{K}$ kümesi, $C^*(X)$ uzayının bir yoğun alt kümesidir.) Böylece

$$d(C^*(X)) \leq |\mathcal{K}| \leq \left| \prod_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{K}_{\alpha} \right| = \prod_{\alpha \in \Lambda} |\mathcal{K}_{\alpha}| = \prod_{\alpha \in \Lambda} d(C^*(X_{\alpha}))$$

bulunur. Ters eşitsizliği görmek amacıyla

$$\Lambda_1 = \{\alpha \in \Lambda : d(C^*(X_{\alpha})) = \aleph_0\}, \quad \Lambda_2 = \Lambda \setminus \Lambda_1, \quad Y_1 = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_1} X_{\alpha} \text{ ve } Y_2 = \bigcup_{\alpha \in \Lambda_2} X_{\alpha}$$

kümeleri tanımlansın. Apaçık olarak $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ olup

$$d(C^*(X)) = d(C^*(Y_1)) \cdot d(C^*(Y_2))$$

eşitliği geçerlidir. Bu durumda, eğer $|\Lambda_1| < \aleph_0$ ise

$$d(C^*(Y_1)) = \aleph_0 = \aleph_0^{|\Lambda_1|} = \prod_{\alpha \in \Lambda_1} d(C^*(X_{\alpha}))$$

olur. Tersine $|\Lambda_1| \geq \aleph_0$ olsun. Bu durumda her bir $M \subseteq \Lambda_1$ alt kümesine karşılık f_M fonksiyonu, $f_M : Y_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_M(x) = 1$ ($\forall x \in \bigcup_{\alpha \in M} X_{\alpha}$) ve $f_M(x) = 0$ ($\forall x \in (Y_1 - \bigcup_{\alpha \in M} X_{\alpha})$) biçiminde tanımlansın. ($M \neq N$ ise $f_M \neq f_N$ olduğuna dikkat edilmelidir!) Apaçık olarak her $M \in \mathcal{P}(\Lambda_1)$ için $f_M \in C^*(Y_1)$ olur ve üstelik $\mathcal{T} = \{f_M : M \in \mathcal{P}(\Lambda_1)\}$ kümesi $C^*(Y_1)$ uzayının *kesikli alt kümesidir*; çünkü her $M \in \mathcal{P}(\Lambda_1)$ için $S_{f_M}(\frac{1}{2}) \cap \mathcal{T} = \{f_M\}$ gerçekleşir. Dolayısıyla Teorem III.10'dan yararlanarak

$$d(C^*(Y_1)) = s(C^*(Y_1)) \geq |\mathcal{T}| = 2^{|\Lambda_1|} = \aleph_0^{|\Lambda_1|} = \prod_{\alpha \in \Lambda_1} d(C^*(X_{\alpha}))$$

bulunur. Sonuç olarak ister $|\Lambda_1| < \aleph_0$ isterse $|\Lambda_1| \geq \aleph_0$ olsun

$$d(C^*(Y_1)) \geq \prod_{\alpha \in \Lambda_1} d(C^*(X_\alpha))$$

gerçekleşir. Öte yandan Lemma III.6(b) nedeniyle her bir $\alpha \in \Lambda_2$ için $C^*(X_\alpha)$ uzayının açık birim yuvarının $\frac{1}{2}$ -saçılımlı bir $\mathcal{H}_\alpha$ alt kümesi, $|\mathcal{H}_\alpha| = d(C^*(X_\alpha))$ gerçekleşecek biçimde vardır. Bu durumda her bir $\alpha \in \Lambda_2$ için $f_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha$ olmak üzere, yukarıdaki gibi tanımlanan $\oplus_{\alpha \in \Lambda_2} f_\alpha \in C^*(Y_2)$ fonksiyonları aracılığıyla belirlenen

$$\mathcal{H} = \{\oplus_{\alpha \in \Lambda_2} f_\alpha \in C^*(Y_2) : f_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha \ (\forall \alpha \in \Lambda_2)\}$$

kümesi, $C^*(Y_2)$ uzayının açık birim yuvarının $\frac{1}{2}$ -saçılımlı bir alt kümesi olur. Böylece

$$d(C^*(Y_2)) \geq |\mathcal{H}| = \left| \prod_{\alpha \in \Lambda_2} \mathcal{H}_\alpha \right| = \prod_{\alpha \in \Lambda_2} |\mathcal{H}_\alpha| = \prod_{\alpha \in \Lambda_2} d(C^*(X_\alpha))$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$d(C^*(X)) = d(C^*(Y_1)) \cdot d(C^*(Y_2)) \geq \prod_{\alpha \in \Lambda_1} d(C^*(X_\alpha)) \cdot \prod_{\alpha \in \Lambda_2} d(C^*(X_\alpha)) = \prod_{\alpha \in \Lambda} d(C^*(X_\alpha))$$

aranan eşitsizliği bulunur.

(a)- Her bir $\alpha \in \Lambda$ için X_α alt uzayı ile eşyapılı bir Y_α uzayı, üstelik $\alpha \neq \beta$ için $Y_\alpha \cap Y_\beta = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilir. Bu durumda $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi, $Y = \oplus_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ erkin toplam uzayının bir kesikli ailesi olduğundan, yukarıda kanıtlanan (b) şıkkı nedeniyle

$$d(C^*(Y)) = \prod_{\alpha \in \Lambda} d(C^*(Y_\alpha)) = \prod_{\alpha \in \Lambda} d(C^*(X_\alpha))$$

olur. Öte yandan her bir $\alpha \in \Lambda$ için X_α ile Y_α uzayları eşyapılı olduğundan bir $f_\alpha : Y_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ eşyapı fonksiyonu vardır. Bu eşyapı fonksiyonları aracılığıyla tanımlanan $f = \oplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha : Y \longrightarrow X$ fonksiyonu göz önüne alınsın. $C^*(X)$ uzayının $|\mathcal{S}| = d(C^*(X))$ gerçekleyen 1-saçılımlı bir $\mathcal{S}$ alt kümesi aracılığıyla tanımlanan $\mathcal{S}(f) = \{g \circ f : g \in \mathcal{S}\}$ kümesi, $C^*(Y)$ uzayının 1-saçılımlı bir alt kümesi olur. Böylece

$$d(C^*(X)) = |\mathcal{S}| = |\mathcal{S}(f)| \leq d(C^*(Y)) = \prod_{\alpha \in \Lambda} d(C^*(X_\alpha))$$

bulunur. ■

Aşağıdaki teorem bir Tikhonov uzayı üzerinde tanımlanan tüm sürekli ve gerçel değerli fonksiyonların sayısını, bu uzay üzerinde tanımlanan kardinal değişmezler aracılığıyla belirlemek açısından oldukça yararlıdır. Açık ki X bir sonlu T_1 uzayı ise $\beta X = X$ olur ve $d(C^*(X)) \stackrel{(*)}{=} w(\beta X) = w(X) = \aleph_0$ gerçekleşir. Tüm Tikhonov uzayları için $(*)$ eşitliğinin geçerli olduğu aşağıda görülecektir; ancak öncelikle bazı tanımlar verilmelidir.

Bilindiği gibi X ve her $\alpha \in \Lambda$ için Y_α birer topolojik uzay olmak üzere, keyfi $f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha$ fonksiyonlarının belirlediği $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesine, ancak ve yalnız $x \neq x'$ gerçekleyen her $x, x' \in X$ çiftine karşılık uygun bir $\alpha_0 \in \Lambda$ indisi, $f_{\alpha_0}(x) \neq f_{\alpha_0}(x')$ koşulu sağlanacak biçimde varsa **nokta ayıran aile** denir. Öte yandan, X uzayında $x \notin K$ gerçekleyen her x noktası ve kapalı K kümesine karşılık $\exists \beta_0 \in \Lambda$, $f_{\beta_0}(x) \notin \overline{f_{\beta_0}(K)}$ koşulu gerçekleşiyorsa, $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ fonksiyon ailesine **nokta ve kapalı küme ayıran fonksiyon ailesi** denir. Kolayca görülebilir ki X bir T_0 uzayı ise ve $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ fonksiyonlar ailesi bu uzayda nokta ve kapalı kümeleri ayırıyorsa, nokta ayıran özelliğine de sahiptir. X bir Tikhonov uzayı ise $C^*(X)$ uzayının herhangi bir *yoğun* alt kümesi, X uzayının nokta ve kapalı kümelerini ayıran bir fonksiyonlar ailesi belirler. Herhangi X ve Y_α ($\forall \alpha \in \Lambda$) uzayları için $g_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha$ ($\forall \alpha \in \Lambda$) fonksiyonları tanımlandığında, onlar aracılığıyla, her $x \in X$ için $(\Delta_{\alpha \in \Lambda} g_\alpha)(x) = \{g_\alpha(x)\}_{\alpha \in \Lambda} \in \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ biçiminde tanımlanan $\Delta_{\alpha \in \Lambda} g_\alpha : X \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ fonksiyonuna, $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ fonksiyonlar ailesinin **köşegen fonksiyonu** denilir. Kolayca kanıtlanabilir ki $\Delta_{\alpha \in \Lambda} g_\alpha$ köşegen fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul tüm g_α fonksiyonlarının sürekli olmasıdır. Ünlü Köşegen Teoremi'ne göre (bkz. [3] veya [4]) "Her $\alpha \in \Lambda$ için $f_\alpha : X \longrightarrow Y_\alpha$ fonksiyonları sürekli ve $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi hem nokta ayıran hem de nokta ve kapalı küme ayıran ise $\Delta_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha : X \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ köşegen fonksiyonu bir *gömme* fonksiyonu olur."

Teorem III.35 (Smirnov Teoremi): X bir Tikhonov uzayı ise $d(C^*(X)) = w(\beta X)$

geçerlidir.

Kanıt. Eğer X uzayı sonlu ise $d(C^*(X)) = w(\beta X) = w(X) = \aleph_0$ olur ve kanıt tamamlanır. Şimdi X uzayı sonsuz elemanlı olsun. $C^*(X)$ uzayının $|\mathcal{T}| = d(C^*(X))$ gerçekleyen bir yoğun kümesi $\mathcal{T}$ ve her $f \in \mathcal{T}$ için $R_f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ Öklid uzayı olmak üzere, $P = \prod_{f \in \mathcal{T}} R_f$ çarpım uzayı göz önüne alınsın. $\mathcal{T}$ sürekli fonksiyonlar ailesi, nokta ayıran ve nokta ve kapalı küme ayıran bir fonksiyonlar ailesi olduğundan Köşegen Teoremi'nden $F = \Delta_{f \in \mathcal{T}} f : X \longrightarrow \prod_{f \in \mathcal{T}} R_f$ köşegen fonksiyonunun bir *gömme* fonksiyonu olduğu anlaşılır. Ayrıca $\mathcal{T}$ ailesinin tüm üyeleri birer *sürekli, sınırlı ve gerçel değerli* fonksiyon olduğundan $kap_P F(X) \subseteq P$ alt uzayı, P Tikhonov uzayının bir *tıkız* alt uzayı olur. Dolayısıyla $F(X)$ kümesi, $kap_P F(X)$ tıkız uzayında yoğun olduğundan, $F(X)$ alt uzayı üzerinde tanımlanan *tüm* sürekli, sınırlı ve gerçel değerli fonksiyonların $kap_P F(X)$ tıkız uzayına (aslında P uzayına) sürekli ve sınırlı genişlemeleri vardır. Böylece $F(X) \subseteq P$ alt uzayının Cech-Stone tıkızlaşması $\beta F(X)$ için $\beta F(X) = kap_P F(X)$ gerçekleştiği anlaşılır. Bu son sonuçtan yararlanarak

$$w(\beta X) = w(\beta F(X)) = w(kap_P F(X)) \leq w(P) = w(R_f^{|\mathcal{T}|}) \stackrel{(*)}{=} |\mathcal{T}| = d(C^*(X))$$

bulunur. Burada $(*)$ eşitliği yazılırken Teorem III.23'den yararlanılmıştır.

Ters eşitsizliği görmek amacıyla βX uzayının $|\mathcal{B}| = w(\beta X)$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}$ tabanı göz önüne alınsın. $\mathcal{B}$ tabanının

$$(1) \quad kap_{\beta X} U \subseteq V$$

koşulunu gerçekleyen her $U, V \in \mathcal{B}$ çifti için $kap_{\beta X} U \cap (\beta X - V) = \emptyset$ olduğundan, ünlü Urysohn Teoremi nedeniyle

$$(2) \quad f(x) = 0 \quad (\forall x \in kap_{\beta X} U) \quad \text{ve} \quad f(x) = 1 \quad (\forall x \in \beta X - V)$$

koşullarını gerçekleyen sürekli $f : \beta X \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonları vardır. (1) koşulunu sağlayan her $U, V \in \mathcal{B}$ çiftine karşılık (2) koşullarını gerçekleyen tek türlü belirli bir

$f_{U,V} : \beta X \longrightarrow [0, 1]$ sürekli fonksiyonu, Seçme Aksiyomu yardımıyla seçilsin. Açık ki bu şekilde seçilen fonksiyonların sayısı $|\mathcal{B} \times \mathcal{B}| = |\mathcal{B}|^2 = |\mathcal{B}|$ kardinalini *geçmez* ve üstelik bu fonksiyonlardan elde edilen aile, βX uzayının *noktalarını ayırır*. (Gerçekten, her farklı $x, y \in \beta X$ nokta çifti için, βX bir Hausdorff uzayı olduğundan, $x \in U, y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ koşullarını gerçekleyen $U, V \in \mathcal{B}$ üye çifti vardır. Ayrıca βX uzayı düzenli olduğundan, $x \in W \subseteq \text{kap}_{\beta X} W \subseteq U$ gerçekleştirilecek biçimde bir $W \in \mathcal{B}$ üyesi vardır. Bu durumda $y \in V \subseteq (\beta X - U)$ olduğundan, $f_{W,U}(x) = 0 \neq 1 = f_{W,U}(y)$ bulunur.) Bu biçimde tanımlanan $f_{U,V}$ fonksiyonlarının sonlu çarpımlarının rasyonel katlarının sonlu toplamalarının kümesi, $\mathcal{R}$ ile gösterilsin. Kolayca görülür ki $\mathcal{R}$ kümesi, $C^*(\beta X)$ fonksiyonlar halkasının (Fonksiyonların bilinen toplam ve çarpım işlemlerine göre $C^*(\beta X)$ kümesinin bir halka olduğu bilinmektedir.) bir alt halkası olur ve üstelik bu alt halka, ünlü Stone-Weierstrass Teoremi'nin (bkz. [4]) koşullarını sağlar. Böylece $\mathcal{R}$ kümesinin $C^*(\beta X)$ uzayında *yoğun* olduğu anlaşılır. Bu durumda Sonuç III.24'den yararlanarak

$$d(C^*(X)) = d(C^*(\beta X)) \leq |\mathcal{R}| \leq \aleph_0 \cdot |\mathcal{B}|^2 = |\mathcal{B}| = w(\beta X)$$

bulunur ve kanıt tamamlanır. ■

Sonuç III.25 *Bir X Tikhonov uzayının tıkmaz alt kümelerinin $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ gerçekleyen bir $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi için aşağıdaki önermeler doğrudur:*

- (a) $w(\beta X) \leq \prod_{\alpha \in \Lambda} w(X_\alpha)$ olur.
- (b) Eğer $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ailesi kesikli ise $w(\beta X) = \prod_{\alpha \in \Lambda} w(X_\alpha)$ gerçekleşir.

Kanıt. Lemma III.8 ve Smirnov Teoremi'nin kolay bir sonucudur. ■

Sonuç III.26 *Herhangi bir X Tikhonov uzayı için $(w(X))^{wc(X)} = |C(X)|^{wc(X)}$ eşitlikleri geçerlidir.*

Kanıt.

$$\begin{aligned} |C(X)|^{wc(X)} &\stackrel{(1)}{\leq} (w(X))^{wc(X)} \leq (w(\beta X))^{wc(X)} \stackrel{(2)}{=} (d(C^*(X)))^{wc(X)} = (d(C^*(X)))^{wc(X) \cdot \aleph_0} \\ &= ((d(C^*(X)))^{\aleph_0})^{wc(X)} \stackrel{(3)}{=} |C^*(X)|^{wc(X)} = |C(X)|^{wc(X)} \end{aligned}$$

olduğundan $(w(X))^{wc(X)} = |C(X)|^{wc(X)} = (w(\beta X))^{wc(X)}$ gerçekleştiği anlaşılır. Burada (1), (2) ve (3) geçişleri yapılırken sırasıyla Teorem III.16, Smirnov Teoremi ve Kruse Teoremi'nden yararlanılmıştır. ■

Herhangi bir X uzayı için $|C^*(X)| = |C^*(X)|^{\aleph_0} = (d(C^*(X)))^{\aleph_0}$ gerçekleştiği biliniyor; ancak herhangi bir X uzayı için $d(C^*(X)) = (d(C^*(X)))^{\aleph_0}$ olmak zorunda değildir. Örneğin κ bir sonsuz kardinal sayı olmak üzere, X uzayı, κ kardinaliteli bir kesikli uzayın tek-nokta tıkızlaşması olsun. Bu durumda $d(C^*(X)) = w(\beta X) = w(X) = \kappa$ olduğundan, $d(C^*(X)) = (d(C^*(X)))^{\aleph_0}$ gerçekleşmesi için $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$ olmalıdır; ancak son eşitliğin κ kardinalinin her değeri için doğru olmasının *gerekmediği* (mesela $\kappa = \aleph_0$) bilinmektedir.

Lemma III.9 X bir Tikhonov uzayı olmak üzere, eğer βX uzayı metriklenebilirse $X = \beta X$ olur.

Kanıt. Varsayım gereği βX uzayı metriklenebilir olduğundan $X \subseteq \beta X$ alt uzayda metriklenebilir, dolayısıyla X uzayı normaldir. Eğer $\beta X \neq X$ olsaydı yani bir $p \in \beta X \setminus X$ noktası bulunsaydı, şöyle bir çelişki elde edilirdi: X kümesi, βX metriklenebilir (dolayısıyla birinci sayılabilir) uzayında yoğun olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ ve $x_n \neq x_m$ ($n \neq m$) koşullarını gerçekleyen bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X^{\omega}$ dizisi vardır. (Bilindiği gibi bir T_2 uzayında, belirli bir indisten sonra *sabitlenmeyen* yakınsak bir dizinin aynı limite yakınsayan ve tüm terimleri ikiye ikiye farklı olan en az bir alt dizisi vardır. (bkz. [3])) $p \notin X$ olduğundan $\{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ ve $\{x_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}$ kümeleri, normal X uzayının *ayrık* iki kapalı kümesi olur. Bu durumda Urysohn Teoremi nedeniyle $f(x_{2n}) = 0$ ve $f(x_{2n-1}) = 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) biçiminde bir sürekli $f : X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu vardır.

Böylece $p \in \text{kap}_{\beta X} f^{-1}(0)$ ve $p \in \text{kap}_{\beta X} f^{-1}(1)$ olur; ancak bu durumda f fonksiyonunun βX uzayına sürekli genişlemesi, p noktasında, hem '0' hem de '1' değerini alır, bu ise fonksiyon tanımı ile çelişir. Demek ki $\beta X \setminus X$ kümesinin hiçbir elemanı *yoktur*, kısacası $\beta X = X$ olur. ■

Sonuç III.27 *X bir sonsuz Tikhonov uzayı olmak üzere, $C^*(X)$ uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul X uzayının tıkHz ve metriklenebilir olmasıdır.*

Kanıt. Bir tıkHz Hausdorff uzayının ağırlık sayısı ile köşegensel derecesi eşit olduğundan ve metriklenebilir uzayların köşegensel derecesi $\aleph_0$ olduğundan şu sonuç kolayca görülür: Bir tıkHz Hausdorff uzayının metriklenebilmesi için gerek ve yeter koşul bu uzayın ikinci sayılabilir olmasıdır. Bu son gerçekten, Smirnov Teoremi'nden ve bir önceki lemmadan yararlanarak sonuç, kolayca kanıtlanır. ■

Bu kısımda son olarak κ bir sonsuz kardinal sayı olmak üzere $w(X) = (w(X))^\kappa$ gerçekleyen özel X uzayları belirlenecektir. Örneğin R.S.Pierce sonsuz, tıkHz ve aşırı bağlantısız bir X uzayı için $w(X) = (w(X))^{\aleph_0}$ gerçekleştiğini kanıtlamıştır. Ayrıca W.W.Comfort ve A.Hager [14] makalesinde bazı varsayımlar altında son eşitliğin daha genel uzaylar için de doğru olduğunu kanıtlamıştır. Aşağıda bu özellikteki bazı uzaylar görülecektir. Bu amaçla bazı tanımlar hatırlanmalıdır.

Bir X uzayının bir $x \in X$ noktasını içeren *tüm* bağlantılı kümelerin birleşim kümesine, X uzayının **x -parçası** denir. X uzayının tüm parçalarının birer *bağlantılı ve kapalı* küme olduğu bilinmektedir. Üstelik farklı iki noktanın parçaları ya eşittir ya da ayrıktır, bu nedenle X uzayının tüm parçalarının ailesi, X uzayı için bir parçalanış (ayrışım) belirler. Eğer bir X uzayının tek elemanlı alt kümelerinden başka *hiçbir* bağlantılı alt kümesi yoksa, X uzayına **kalıtımsal bağlantısız uzay** denir. Demek ki X uzayının kalıtımsal bağlantısız olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ için x -parçasının $\{x\}$ tek nokta kümesi olmasıdır. Böylece herhangi bir kalıtımsal bağlantısız X uzayının bir T_1 uzayı olduğu anlaşılır. Öte yandan boştan farklı bir T_1 uzayına,

ancak ve yalnız kapaçık kümelerden oluşan bir tabanı varsa **sıfır boyutlu uzay** denir. Örneğin $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ alt limit uzayı sıfır boyutludur; çünkü $\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b\}$ kapaçık kümeler ailesi bu uzay için bir tabandır. Her sıfır boyutlu uzayın bir kalıtımsal bağlantısız Tikhonov uzayı olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca bir *tıkız* Hausdorff uzayın sıfır boyutlu olması ile kalıtımsal bağlantısız olması iddialarının eşdeğer olduğu (bkz. [4]) bilinmektedir.

Bir X Hausdorff uzayına, tüm açık (fonksiyonel açık) kümelerinin kapanışları açık oluyorsa **aşırı bağlantısız uzay** (**temel bağlantısız uzay**) denilir. Apaçıktır ki her aşırı bağlantısız uzay bir temel bağlantısız uzaydır. Ayrıca aşırı bağlantısız *düzenli* uzayların ve temel bağlantısız *tümüyle düzenli* uzayların sıfır boyutlu uzaylar oldukları bilinmektedir. Öte yandan X sonsuz ve temel bağlantısız bir Tikhonov uzayı ise βX uzayının her sonsuz kapalı alt uzayının βN ile eşyapılı (homeomorf) bir alt uzayının var olduğu bilinmektedir. (bkz. [5]) Dolayısıyla X sonsuz, tıkız ve temel bağlantısız bir uzay ise $w(X) \geq w(\beta N) = 2^{\aleph_0}$ ve $|X| \geq |\beta N| = 2^c$ olur.

κ bir sonsuz kardinal sayı olmak üzere bir X uzayına, ancak ve yalnız sıfır boyutluysa ve kapaçık kümelerinin $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ koşulunu gerçekleyen her $\mathcal{U}$ ailesi için $\overline{\bigcup \mathcal{U}}$ kümesi *açık*sa **κ -bağlantısız uzay** denilir. Bilindiği gibi normal bir uzayda bir K kümesinin bir fonksiyonel kapalı (fonksiyonel açık) küme olabilmesi için gerek ve yeter koşul K kümesinin kapalı ve $\mathcal{G}_\delta$ -türü (açık ve $\mathcal{F}_\sigma$ -türü) bir küme olmasıdır. Bu son gerçekten yararlanarak kolayca görülür ki bir tıkız uzayın $\aleph_0$ -bağlantısız olabilmesi için gerek ve yeter koşul bu uzayın temel bağlantısız olmasıdır. Benzer biçimde bir tıkız uzayın aşırı bağlantısız olabilmesi için gerek ve yeter koşul bu uzayın her κ kardinal sayısı için κ -bağlantısız olmasıdır. Ayrıca tanımdan yararlanarak kolayca bir κ -bağlantısız uzayın düzenli-kapalı (Bir uzayda bir F alt kümesine, $F = \overline{\overline{F}^o}$ koşulunu gerçeklerse **düzenli-kapalı küme** denilir.) alt uzaylarının κ -bağlantısız olduğu görülür.

Lemma III.10 *X sonsuz, tıkız ve kalıtımsal bağlantısız bir Hausdorff uzayı ise, X*

uzayının tüm kapaçık kümelerinin ailesi $\mathcal{O}$ ile gösterilmek üzere, $w(X) = |\mathcal{O}|$ olur.

Kanıt. X uzayı tıkmaz ve kalıtımsal bağlantısız bir Hausdorff uzayı olduğundan sıfır boyutludur dolayısıyla kapaçık kümelerden oluşan bir tabanı vardır. Bu nedenle $w(X) \leq |\mathcal{O}|$ olur. Tersine $(C^*(X), \rho^*)$ metrik uzayının $d(C^*(X)) = |\mathcal{S}|$ koşulunu gerçekleyen bir yoğun $\mathcal{S}$ kümesi göz önüne alınsın. Her bir $U \in \mathcal{O}$ üyesi bir kapaçık küme olduğundan $\chi_U : X \longrightarrow \{0, 1\}$ karakteristik fonksiyonu süreklidir dolayısıyla $\chi_U \in C^*(X)$ olur. Bu durumda $\mathcal{S}$ kümesi, $(C^*(X), \rho^*)$ uzayında yoğun olduğundan her $U \in \mathcal{O}$ için $B_{\chi_U}(\frac{1}{2}) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ olur. Böylece Seçme Aksiyomu'ndan yararlanarak her bir $U \in \mathcal{O}$ için $\rho^*(\chi_U, f_U) < \frac{1}{2}$ gerçekleştirilecek biçimde *tek türlü* belirli bir $f_U \in \mathcal{S}$ noktası seçilirse, $\varphi(U) = f_U$ biçiminde tanımlanan $\varphi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{S}$ fonksiyonu bire-bir olur; çünkü $U \neq V$ gerçekleyen bir $U, V \in \mathcal{O}$ üye çifti için $f_U = f_V$ olsaydı, $1 = \rho^*(\chi_U, \chi_V) \leq \rho^*(\chi_U, f_U) + \rho^*(f_U, f_V) + \rho^*(f_V, \chi_V) < \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$ çelişkisi bulunurdu. Sonuç olarak Smirnov Teoremi'nden yararlanarak

$$|\mathcal{O}| \leq |\mathcal{S}| = d(C^*(X)) = w(X)$$

bulunur. ■

Bir X uzayında A ve B alt küme çiftine, ancak ve yalnız bir sürekli $f : X \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $f(A) \subseteq \{0\}$, $f(B) \subseteq \{1\}$ koşulları gerçekleştirilecek biçimde varsa **tümüyle ayrılmış küme çifti** denilir. A ve B tümüyle ayrılmış bir küme çifti ise herhangi bir $C \subseteq A$ ve herhangi bir $D \subseteq B$ alt kümesi için C ve D alt küme çiftinin de tümüyle ayrılmış olduğu apaçıktır. Ayrıca herhangi bir uzayda bir alt küme çiftinin tümüyle ayrılmış olabilmesi için gerek ve yeter koşulun bu kümelerin bu uzayda tanımlı ayrık sıfır kümeleri tarafından kapsanmaları olduğu bilinmektedir.(bkz. [5])

Lemma III.11 X tıkmaz ve κ -bağlantısız bir uzay ise, bu uzayın $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ gerçekleyen her $\mathcal{U}$ kapaçık kümeler ailesi için $\bigcup \mathcal{U}$ alt uzayı C^* -gömülebilirdir.

Kanıt. Ünlü Urysohn Genişleme Teoremi (=Herhangi bir Y uzayının bir $S \subseteq Y$ alt uzayının C^* -gömülebilir olabilmesi için gerek ve yeter koşul S alt uzayında tümüyle ayrılmış her küme çiftinin Y ana uzayında da tümüyle ayrılmış olmasıdır.(bkz. [5])) nedeniyle $\bigcup \mathcal{U}$ alt uzayının ayrık sıfır kümelerinin X uzayında ayrık kapaçık kümeler tarafından kapsandığını göstermek yeterlidir. Eğer A ve B kümeleri, $\bigcup \mathcal{U}$ alt uzayının ayrık sıfır kümeleriye, bir sürekli $f : \bigcup \mathcal{U} \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $f(A) = \{0\}$ ve $f(B) = \{1\}$ olacak biçimde vardır. A , $\bigcup \mathcal{U}$ uzayının bir sıfır kümesi olduğundan bu uzayda kapalıdır, böylece X uzayında bir K kapalı kümesi $A = K \cap \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (K \cap U)$ olacak biçimde vardır. Her bir $U \in \mathcal{U}$ için $K \cap U$ kümesi X uzayında tıkız olduğundan, A kümesi X uzayının $\leq \kappa$ sayıda tıkız alt kümesinin birleşimi olarak yazılabilir. Bu durumda X uzayı sıfır boyutlu olduğundan, X uzayında kapaçık kümelerin bir $\mathcal{V}$ ailesi

$$A \subseteq \bigcup \mathcal{V} \subseteq \bigcup \mathcal{U}, \quad f(x) < \frac{1}{3} \quad (\forall x \in \bigcup \mathcal{V}) \quad \text{ve} \quad |\mathcal{V}| \leq \kappa$$

koşulları gerçekleşecek biçimde vardır. Sonuç olarak X uzayı κ -bağılantısız olduğundan $kap_X(\bigcup \mathcal{V})$ kümesi X uzayında kapaçık olur ve üstelik $A \subseteq kap_X(\bigcup \mathcal{V}) \subseteq (X - B)$ gerçekleşir. Böylece X uzayında A ve B kümelerini kapsayan ayrık kapaçık kümelerin varlığı görülmüş olur. ■

Bu son lemmadan yararlanarak lemmadaki özelliklere sahip X uzayı ve $\mathcal{U}$ ailesi için $\bigcup \mathcal{U}$ alt uzayının Cech-Stone tıkızlaşmasının $\beta \bigcup \mathcal{U} = kap_X(\bigcup \mathcal{U})$ olduğu anlaşılır. Yine bu lemmadan yararlanarak tıkız ve aşırı bağlantısız bir uzayın tüm *açık* alt uzaylarının C^* -gömülebilir olduğu kolayca görülür. Aslında herhangi bir T_2 uzayının aşırı bağlantısız olması için gerek ve yeter koşul bu uzayın tüm açık alt uzaylarının C^* -gömülebilir olmasıdır. Bu son iddianın *gerekliliği* bir önceki lemmanın kanıtına benzer biçimde, *yeterliliği* ise "Bir T_2 uzayının aşırı bağlantısız olabilmesi için gerek ve yeter koşul bu uzayda her ayrık açık küme çiftinin ayrık kapanışlara sahip olmasıdır." gerçeğinden yararlanarak kanıtlanabilir.

Teorem III.36 X sonsuz, tıkız ve κ -bağılantısız bir uzay olsun. Eğer X uzayında

ikişerli ayrık kapaçık kümelerin bir $\mathcal{U}$ ailesi, $|\mathcal{U}| = \kappa$ ve $w(U) = w(X)$ ($\forall U \in \mathcal{U}$) koşulları gerçekleşecek biçimde varsa, $(w(X))^\kappa = w(X)$ olur.

Kanıt. $\mathcal{U}$ ailesi, X uzayında tıkız alt kümelerin bir kesikli ailesi olduğundan Sonuç III.25(b) ve Lemma III.11'den yararlanarak

$$w(X) \geq w(\text{kap}_X(\bigcup \mathcal{U})) = w(\beta \bigcup \mathcal{U}) = \prod_{U \in \mathcal{U}} w(U) = (w(X))^\kappa \geq w(X)$$

bulunur. ■

Sonuç III.28 Eğer X sonsuz, tıkız ve temel bağlantısız bir uzay ise ve bu uzayda boştan farklı açık bir U kümesi, her $\emptyset \neq V \subseteq U$ açık alt kümesi için $w(V) = w(X)$ olacak biçimde varsa, $(w(X))^{\aleph_0} = w(X)$ olur.

Kanıt. Her sonsuz Hausdorff uzayında $\aleph_0$ kardinaliteli bir gözenekli aile vardır. Böylece X uzayı $\aleph_0$ -bağlantısız olduğundan iddia bir önceki teoremin kolay bir sonucudur. ■

Teorem III.37 (Pierce Teoremi): X sonsuz, tıkız ve aşırı bağlantısız bir uzay ise $(w(X))^{\aleph_0} = w(X)$ olur.

Kanıt. Bu teorem aşağıdaki gibi farklı iki yolla kanıtlanabilir.

Yol 1: $w(X) \geq 2^{\aleph_0}$ olduğu bilinmektedir. Eğer $w(X) = 2^{\aleph_0}$ ise iddia apaçıktır. Şimdi $w(X) > 2^{\aleph_0}$ olsun. Bu durumda bir önceki sonucun hipotezindeki koşulları gerçekleyen hiçbir boştan farklı açık kümenin bulunmadığı varsayılarak teoremi kanıtlamak yeterlidir. Demek ki varsayım gereği X uzayında her boştan farklı açık kümenin boş olmayan ve ağırlık sayısı $< w(X)$ olan bir açık alt kümesi vardır. Ünlü Zorn Lemması nedeniyle X uzayında boştan farklı ve ikişerli ayrık olan kapaçık kümelerin, $\aleph_0 \leq w(U) < w(X)$, $(w(U))^{\aleph_0} = w(U)$ ($\forall U \in \mathcal{U}$) koşullarını gerçekleyen $\mathcal{U}$ ailelerinin bir maksimali vardır. Bu maksimal aile $\mathcal{U}_0$ ile gösterilsin. Bu durumda $X - \bigcup \mathcal{U}_0$

kümesi, X uzayının en fazla *sonlu* sayıda yalıtılmış noktasını içerir. (Gerçekten, X uzayında yalnızca yalıtılmış noktaları içeren ve sayılabilir sonsuz elemanlı olan bir S alt kümesi (varsa) için $S \subseteq (X - \bigcup \mathcal{U}_0)$ olsaydı şöyle bir çelişki bulunurdu: X uzayı aşırı bağlantısız olduğundan $kap_X S$ kümesi bu uzayda kapaçıktır ve üstelik $(kap_X S) \cap U = \emptyset$ ($\forall U \in \mathcal{U}_0$) gerçekleşir. Ayrıca S alt uzayı ile N kesikli uzayı eşyapılı olup bu uzaylar birinci sayılabilir olduklarından βS ve βN Cech-Stone tıkızlaşmalarında eşyapılı olur. (bkz. [4]) Böylece

$$w(kap_X S) = w(\beta S) = w(\beta N) = 2^{\aleph_0} = (w(kap_X S))^{\aleph_0} < w(X)$$

bulunur. Sonuç olarak $\mathcal{U}_0 \subsetneq \mathcal{U}_0 \cup \{kap_X S\}$ olur; ancak bu durum $\mathcal{U}_0$ ailesinin maksimaliği ile çelişir.) Bu yalıtılmış noktaları $\mathcal{U}_0$ ailesinin bazı üyelerine yerleştirerek elde edilen yeni aile $\mathcal{U}'_0$ ile gösterilsin. $\mathcal{U}'_0$ ailesinin üyelerinin X uzayında birer kapaçık küme olduğu ve $\bigcup \mathcal{U}'_0$ kümesinin bu uzayda yoğun olduğu kolayca görülür. Böylece Lemma III.11'den yararlanarak

$$X = kap_X(\bigcup \mathcal{U}'_0) = \beta \bigcup \mathcal{U}'_0$$

bulunur. Smirnov Teoremi ve Lemma III.8(b)'den yararlanarak

$$w(X) = w(\beta \bigcup \mathcal{U}'_0) = d(C^*(\bigcup \mathcal{U}'_0)) = \prod_{U \in \mathcal{U}'_0} d(C^*(U)) = \prod_{U \in \mathcal{U}'_0} w(U)$$

olur ve böylece

$$(w(X))^{\aleph_0} = \prod_{U \in \mathcal{U}'_0} (w(U))^{\aleph_0} = \prod_{U \in \mathcal{U}'_0} w(U) = w(X)$$

gerçeklenir.

Yol 2: Bu teoremin daha kısa bir ispatı şöyle yapılabilir: X uzayının tüm kapaçık kümelerinin ailesi $\mathcal{O}$ ile gösterilsin. Herhangi bir $G \in RO(X)$ düzenli açık kümesi için $G = \overset{o}{\overline{G}}$ olduğu bilinmektedir. Öte yandan X uzayı aşırı bağlantısız olduğundan $\overline{G} = \overset{o}{\overline{G}}$ olur ve böylece

$$\overline{G} = \overset{o}{\overline{G}} = G$$

gerçeklenir. Kısacası aşırı bağlantısız uzaylarda her düzenli açık küme bir kapaçık kümedir. Bu son gerçekten yararlanarak $|RO(X)| \leq |\mathcal{O}|$ olduğu anlaşılır. Öte yandan Lemma III.10 ve X uzayının düzenli olmasından yararlanarak

$$|RO(X)| \leq |\mathcal{O}| = w(X) \leq |RO(X)|$$

bulunur. Sonuç olarak X bir Hausdorff uzayı olduğundan

$$w(X) = |RO(X)| = |RO(X)|^{\aleph_0} = (w(X))^{\aleph_0}$$

gerçeklenir. ■

Kolayca görülebilir ki Pierce Teoremi'nde hipotezlerin hiçbirinden vazgeçilemez. Örneğin $D(\aleph_0)$ kesikli uzayı, sonsuz noktalı ve aşırı bağlantısız bir uzay olup tıkız *değildir*, üstelik $w(D(\aleph_0)) = \aleph_0 \neq 2^{\aleph_0} = (w(D(\aleph_0)))^{\aleph_0}$ olur. Öte yandan $A(\aleph_0)$ uzayı, sonsuz noktalı ve tıkız olup aşırı bağlantısız *değildir*, ayrıca $w(A(\aleph_0)) = \aleph_0 \neq 2^{\aleph_0} = (w(A(\aleph_0)))^{\aleph_0}$ geçerlidir; ancak **yerel genelleştirilmiş kontinyum varsayımı** (Eğer sonsuz bir κ_1 kardinal sayısı için $\kappa < \kappa_1 \Rightarrow 2^\kappa \leq \kappa_1$ koşulu geçerliyse, κ_1 kardinali için yerel genelleştirilmiş kontinyum varsayımı (kısaca YGKV) geçerlidir denilir. GKV geçerliyse her sonsuz kardinal sayı için YGKV'nin geçerli olacağı apaçıktır.) altında sonsuz, tıkız ve temel bağlantısız X uzayları için de $(w(X))^{\aleph_0} = w(X)$ gerçekleşir. Bu iddiayı kanıtlayabilmek için öncelikle aşağıdaki lemma kanıtlanmalıdır.

Lemma III.12 *X sonsuz, tıkız ve $cf(w(X))$ -bağlantısız bir uzay olsun. Bu durumda X uzayında boştan farklı ikişerli ayrık kapaçık kümelerin her bir $\mathcal{U}$ ailesi için*

(a) $|\mathcal{U}| < w(X)$ *olur.*

(b) $\sup\{w(U) : U \in \mathcal{U}, w(U) < w(X)\} < w(X)$ *geçerlidir.*

Kanıt. (a)- $|\mathcal{U}| = w(X)$ olduğu varsayalım. (Daima $|\mathcal{U}| \leq c(X) \leq w(X)$ geçerlidir.) Kısalık amacıyla $\kappa_0 = cf(w(X))$ yazılsın. Bu durumda $\mathcal{U}$ ailesinin $|\mathcal{V}| \leq \kappa_0$ koşulunu gerçekleyen her bir $\mathcal{V}$ alt ailesine karşılık $U(\mathcal{V}) = kap_X(\bigcup \mathcal{V})$ kümesi tanımlansın. X uzayı κ_0 -bağlantısız olduğundan her bir $\mathcal{V} \in \mathcal{P}_{\leq \kappa_0}(\mathcal{U})$ için $U(\mathcal{V})$ kümesi

kapaçtır, üstelik $\mathcal{V}_1 \neq \mathcal{V}_2$ için $U(\mathcal{V}_1) \neq U(\mathcal{V}_2)$ olur. Böylece $\varphi(\mathcal{V}) = U(\mathcal{V})$ biçiminde tanımlanan $\varphi : \mathcal{P}_{\leq \kappa_0}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{O}$ fonksiyonu *bire-bir* olacağından

$$w(X) = |\mathcal{O}| \geq |\mathcal{P}_{\leq \kappa_0}(\mathcal{U})| = |\mathcal{U}|^{\kappa_0} = (w(X))^{cf(w(X))} > w(X)$$

çelişkisi bulunur. (Burada son eşitsizlik yazılırken Lemma III.5(a) kullanılmıştır.) O halde $|\mathcal{U}| < w(X)$ olmalıdır.

(b)- Eğer $w(X) = \kappa^+$ olacak biçimde bir κ kardinal sayısı varsa iddia apaçıktır. Şimdi $w(X)$ bir ardıl kardinal sayı olmasın. Bu durumda $\sup\{w(U) : U \in \mathcal{U}, w(U) < w(X)\} = w(X)$ olsaydı bir çelişki elde edilirdi. Gerçekten, $cf(w(X))$ 'in tanımı gereği

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \kappa_\lambda = w(X), \quad \kappa_\lambda < w(X) \quad (\forall \lambda \in \Lambda) \quad \text{ve} \quad |\Lambda| = cf(w(X))$$

koşulları gerçekleşecek biçimde bir Λ indis kümesi ve κ_λ kardinal sayıları vardır. Varsayım gereği $\sup\{w(U) : U \in \mathcal{U}, w(U) < w(X)\} = w(X)$ olduğundan, her bir $\lambda \in \Lambda$ indisine karşılık bir $U_\lambda \in \mathcal{U}$ üyesi, $\kappa_\lambda^+ \leq w(U_\lambda)$ gerçekleşecek biçimde vardır. X uzayı $cf(w(X))$ -bağılantısız olduğundan Lemma III.11 nedeniyle $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ C^* -gömülebilir bir alt uzaydır. Böylece König-Zermelo Teoremi ve Sonuç III.25(b)'den yararlanarak

$$w(X) \geq w(kap_X(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda)) = w(\beta \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda) = \prod_{\lambda \in \Lambda} w(U_\lambda) \geq \prod_{\lambda \in \Lambda} \kappa_\lambda^+ > \sum_{\lambda \in \Lambda} \kappa_\lambda = w(X)$$

çelişkisi bulunur. Ulaşılan bu çelişki nedeniyle (b) önermesinin doğru olduğu anlaşılır.

■

Teorem III.38 X sonsuz, tıkHz ve temel bağılantısız bir uzay olsun. Eğer $\kappa < w(X) \Rightarrow 2^\kappa \leq w(X)$ çıkarsaması geçerliyse, $(w(X))^{\aleph_0} = w(X)$ gerçekleşir.

Kanıt. Eğer $w(X) < (w(X))^{\aleph_0}$ olduğu varsayılırsa aşağıdaki gibi bir çelişki elde edilir: Bu varsayım altında, Sonuç III.28 nedeniyle X uzayında boştan farklı ve açık olan her bir U kümesinin bir $\emptyset \neq V \subseteq U$ açık alt kümesi, $w(V) < w(X)$ gerçekleşecek biçimde vardır. Zorn Lemması nedeniyle X uzayında, boştan farklı ve ikişerli ayrık

olan kapaçık kümelerin, $w(U) < w(X)$ ($\forall U \in \mathcal{U}$) koşulunu gerçekleyen $\mathcal{U}$ ailelerinin bir maksimali vardır. Bu maksimal aile $\mathcal{U}_0$ olsun. Teoremin hipotezi ve $w(X) < (w(X))^{\aleph_0}$ varsayımı nedeniyle Lemma III.5(b)'den yararlanarak $cf(w(X)) = \aleph_0$ olduğu anlaşılır. X uzayı $\aleph_0$ -bağılantısız olduğundan bir önceki lemmadan yararlanarak

$$|\mathcal{U}_0| < w(X) \text{ ve } \kappa = \sup\{w(U) : U \in \mathcal{U}_0\} < w(X)$$

bulunur. Öte yandan $\bigcup \mathcal{U}_0$ kümesi, X uzayında yoğun olup

$$d(\bigcup \mathcal{U}_0) \leq w(\bigcup \mathcal{U}_0) \leq \sum_{U \in \mathcal{U}_0} w(U) \leq |\mathcal{U}_0| \cdot \kappa < w(X)$$

gerçekleştiğinden hipotez gereği

$$w(X) \leq 2^{d(X)} \leq 2^{d(\bigcup \mathcal{U}_0)} \leq 2^{|\mathcal{U}_0| \cdot \kappa} \leq w(X)$$

olur; ancak bu durumda

$$w(X) < (w(X))^{\aleph_0} = (2^{|\mathcal{U}_0| \cdot \kappa})^{\aleph_0} = 2^{|\mathcal{U}_0| \cdot \kappa} = w(X)$$

çelişkisi bulunur. O halde $(w(X))^{\aleph_0} = w(X)$ olmalıdır. ■

Demek ki GKV geçerli ise her sonsuz, tıkız ve temel bağlantısız X uzayı için $(w(X))^{\aleph_0} = w(X)$ olur; ancak sonsuz, tıkız ve temel bağlantısız her X uzayı için $(w(X))^{\aleph_0} = w(X)$ eşitliğinin geçerli olması için GKV veya YGKV ek koşulunun gerekli olup olmadığı *bilinmemektedir*. Kısacası GKV'nin geçerli *olmadığı* durumda sonsuz bir κ kardinal sayısı için $\kappa \leq w(X) < \kappa^{\aleph_0}$ koşulunu gerçekleyen sonsuz, tıkız ve temel bağlantısız bir X uzayının varlığı veya yokluğu *bilinmemektedir*.

Herhangi bir sonsuz κ kardinal sayısı için κ -bağılantısız olan ve κ kardinaliteli gözenekli ailesi bulunan her tıkız X uzayı için $(w(X))^\kappa = w(X)$ eşitliğinin geçerli olmasının *gerekmediği* Sonuç III.31'de görülecektir; ancak aşağıda görülebileceği gibi bazı özel durumlarda bu eşitlik gerçekleşir.

Teorem III.39 X tıkız ve κ -bağılantısız bir uzay olsun. Eğer bu uzayda $|\mathcal{U}| \geq \kappa$ koşulunu gerçekleyen bir $\mathcal{U}$ gözenekli ailesi varsa ve her $\mu < w(X)$ kardinal sayısı için $2^\mu \leq$

$w(X)$ oluyorsa, aşağıdaki durumlardan herhangi birisi gerçekleştiğinde $(w(X))^\kappa = w(X)$ olur:

(a) $w(X)$ bir düzenli kardinal sayıdır.

(b) $|\mathcal{U}| = w(X)$ geçerlidir.

(c) X uzayında boştan farklı her açık U kümesinin bir $\emptyset \neq V \subseteq U$ açık alt kümesi $w(V) < w(X)$ olacak biçimde vardır.

(d) $\kappa = \aleph_0$ geçerlidir.

Kanıt. X uzayı sıfır boyutlu olduğundan, $\mathcal{U}$ ailesinin üyelerinin birer kapaçık küme olduğu varsayılabilir. Bu durumda $\kappa < w(X)$ olur; çünkü $\kappa \geq w(X)$ olsaydı Lemma III.10'dan yararlanarak

$$w(X) = |\mathcal{O}| \geq |\mathcal{U}|^\kappa \geq (w(X))^{w(X)} = 2^{w(X)} > w(X)$$

çelişkisi bulunurdu. Şimdi (a) şıkkı geçerli olsun. O halde $cf(w(X)) = w(X)$ olur. Bu durumda, eğer $(w(X))^\kappa > w(X)$ olsaydı Lemma III.5(b)'den yararlanarak

$$\kappa \geq cf(w(X)) = w(X) > \kappa$$

çelişkisi elde edilirdi. Demek ki $w(X)$ bir düzenli kardinal sayı ise $(w(X))^\kappa = w(X)$ gerçekleşir.

Şimdi $w(X)$ bir tekil kardinal sayı ve $|\mathcal{U}| = w(X)$ olsun. Bu durumda

$$w(X) = |\mathcal{O}| \geq |\mathcal{U}|^\kappa = (w(X))^\kappa \geq w(X)$$

olduğundan (b) durumu için iddia kanıtlanmış olur.

(c) şıkkı geçerli olsun. Bu durumda her $U \in \mathcal{U}$ için $w(U) < w(X)$ gerçekleştiği varsayılabilir. Zorn Lemması nedeniyle X uzayında, boştan farklı ve ikişerli ayrık olan kapaçık kümelerin, $w(V) < w(X)$ ($\forall V \in \mathcal{V}$) koşulunu gerçekleyen $\mathcal{V}$ ailelerinin var olan maksimali $\mathcal{V}_0$ olsun. O halde $\kappa \leq |\mathcal{U}| \leq |\mathcal{V}_0|$ olur. $|\mathcal{V}_0| = w(X)$ ise (b) şıkkı nedeniyle iddia kanıtlanmış olur, bu nedenle $|\mathcal{V}_0| < w(X)$ durumu için iddiayı

kanıtlamak yeterlidir. Eğer $\kappa < cf(w(X))$ ise Lemma III.5(b) nedeniyle $(w(X))^\kappa = w(X)$ olur. Tersine $\kappa \geq cf(w(X))$ ise Lemma III.12 nedeniyle

$$\kappa_0 = \sup\{w(V) : V \in \mathcal{V}_0\} < w(X)$$

olur, üstelik $\bigcup \mathcal{V}_0$ kümesi X uzayında yoğun olduğundan

$$d(X) \leq d(\bigcup \mathcal{V}_0) \leq w(\bigcup \mathcal{V}_0) \leq \sum_{V \in \mathcal{V}_0} w(V) \leq |\mathcal{V}_0| \cdot \kappa_0 < w(X)$$

bulunur. X uzayının düzenliliği ile teoremin hipotezinden yararlanarak

$$w(X) \leq 2^{d(X)} \leq 2^{d(\bigcup \mathcal{V}_0)} \leq 2^{w(\bigcup \mathcal{V}_0)} \leq 2^{|\mathcal{V}_0| \cdot \kappa_0} \leq w(X)$$

bulunur. Böylece

$$(w(X))^\kappa = (2^{|\mathcal{V}_0| \cdot \kappa_0})^\kappa = 2^{|\mathcal{V}_0| \cdot \kappa_0} = w(X)$$

olduğu anlaşılır. (d) şıkkı geçerliyse $(w(X))^{\aleph_0} = w(X)$ olduğu bir önceki teoremden kanıtlanmıştır, ayrıca (c) şıkkındaki iddianın doğru olmadığı varsayıp Sonuç III.28'den yararlanarakta bu eşitliğin gerçekleştiği görülebilir. ■

Bu kısımda son olarak $\kappa < w(X) \Rightarrow 2^\kappa \leq w(X)$ varsayımı altında, $cf(w(X))$ -bağılantısız olan ve $cf(w(X))$ kardinaliteli bir gözenekli ailenin tanımlanabildiği tıkız bir X uzayının bazı temel özellikleri görülecektir. Örneğin böyle bir X uzayı için $w(X)$ kardinal sayısının düzenli *olamayacağı* apaçıktır.

Lemma III.13 *Bir X tıkız uzayı $c(X)$ -bağılantısız ise aşırı bağılantısızdır.*

Kanıt. X uzayında herhangi bir açık G kümesi göz önüne alınsın. G kümesinin boştan farklı ve ikişerli ayrık olan kapaçık alt kümelerinin maksimal ailesi $\mathcal{U}$ olsun. Bu durumda $\bigcup \mathcal{U}$ kümesi G uzayında yoğundur, böylece $kap_X(G) = kap_X(\bigcup \mathcal{U})$ olur. $|\mathcal{U}| \leq c(X)$ olduğundan $kap_X(G)$ kümesi X uzayında açık olur, dolayısıyla X uzayı aşırı bağılantısızdır. ■

Sonuç III.29 X sonsuz, tıkmaz ve $cf(w(X))$ -bağılantısız bir uzay olsun. Eğer X uzayında boştan farklı her açık U kümesi için $w(U) = w(X)$ geçerliyse, bu uzayda her gözenekli $\mathcal{U}$ ailesi için $|\mathcal{U}| < cf(w(X))$ olur, üstelik bu durumda X uzayı aşırı bağılantısızdır.

Kanıt. Böyle bir X uzayında tanımlı her gözenekli $\mathcal{U}$ ailesi için $|\mathcal{U}| < cf(w(X))$ olduğu Teorem III.36'dan kolayca gözlenir, böylece $c(X) \leq cf(w(X))$ bulunur. İkinci iddia ise bir önceki lemmadan kolayca gözlenir. ■

Teorem III.40 X sonsuz, tıkmaz ve $cf(w(X))$ -bağılantısız bir uzay olsun. Bu durumda X uzayında aşağıdaki özelliklere sahip bir maksimal H kapaçık kümesi vardır: Boştan farklı her $V \subseteq H$ açık alt kümesi için $w(V) = w(X)$ gerçekleşir, H alt uzayında her $\mathcal{V}$ gözenekli ailesi için $|\mathcal{V}| < cf(w(X))$ olur ve üstelik bu alt uzay aşırı bağılantısızdır. Ek olarak X uzayında $|\mathcal{U}| = cf(w(X))$ koşulunu gerçekleyen gözenekli bir $\mathcal{U}$ ailesi varsa $c(X \setminus H) = c(X)$ olur.

Kanıt. X uzayında boş olmayan kapaçık U kümelerinin

$$\text{her } \emptyset \neq V \subseteq U \text{ açık alt kümesi için } w(V) = w(X)$$

koşulunu gerçekleyenlerinin ailesi $\mathcal{G}$ olsun. ($\mathcal{G}$ ailesinin boş olabileceği aşağıda görülecektir.)

Şimdi $H = kap_X(\bigcup \mathcal{G})$ olarak tanımlansın. Kolayca görülebilir ki her $\emptyset \neq G \subseteq H$ açık alt kümesi için $w(G) = w(X)$ olur. H kümesi, $cf(w(X))$ -bağılantısız X uzayında düzenli kapalı bir küme olduğundan, H alt uzayda $cf(w(X))$ -bağılantısız olur. Dolayısıyla bir önceki sonuç nedeniyle H alt uzayında tanımlı her gözenekli $\mathcal{V}$ ailesi için $|\mathcal{V}| < cf(w(H)) = cf(w(X))$ gerçekleşir, üstelik bu alt uzay aşırı bağılantısızdır. Öte yandan $\bigcup \mathcal{G}$ alt uzayında boştan farklı ve ikişerli ayırık olan kapaçık kümelerin bir $\mathcal{G}_0$ ailesi, $\bigcup \mathcal{G}_0$ kümesi bu alt uzayda yoğun olacak biçimde tanımlansın. Bu durumda

$$H = kap_X(\bigcup \mathcal{G}_0) \text{ ve } |\mathcal{G}_0| < cf(w(X))$$

olur ve böylece H kümesinin X uzayında açık olduğu anlaşılır. Ayrıca X uzayında $|\mathcal{U}| \geq cf(w(X))$ koşulunu gerçekleyen herhangi bir $\mathcal{U}$ gözenekli ailesi varsa

$$|\{U \cap H : U \in \mathcal{U} \text{ ve } U \cap H \neq \emptyset\}| < cf(w(X))$$

olur, dolayısıyla

$$|\{U \cap H : U \in \mathcal{U} \text{ ve } U \cap (X \setminus H) \neq \emptyset\}| = |\mathcal{U}|$$

gerçeklenir ve böylece $c(X \setminus H) = c(X)$ sonucu elde edilir. H kümesi, teoremin hipotezlerini gerçeklediğinden ve X uzayında bu hipotezleri gerçekleyen tüm kapaçık kümeleri kapsadığından bu özellikteki maksimal küme olur. ■

Yukarıdaki teoremden tanımlanan H kümesi boş olabilir. Örneğin herhangi bir sonsuz κ kardinal sayısı için $D(\kappa)$ kesikli uzayının $X = \beta D(\kappa)$ Cech-Stone tıkkılaşması göz önüne alınsın. Bu durumda X sonsuz, tıkkı ve aşırı bağlantısız bir uzaydır, üstelik kolayca görülebilir ki bu uzayda $H = \emptyset$ olur. Teorem III.41'de görüleceği gibi bazı özel durumlarda $H \neq \emptyset$ olur.

Lemma III.14 *X tıkkı, $cf(w(X))$ -bağlantısız ve $cf(w(X))$ kardinaliteli bir gözenekli ailenin tanımlanabildiği bir uzay ise $w(X)$ bir düzenli kardinal sayı değildir. Ek olarak her $\kappa < w(X)$ kardinal sayısı için $2^\kappa \leq w(X)$ oluyorsa, $w(X)$ 2'nin bir kuvveti olarak yazılamaz.*

Kanıt. Lemma III.12(a) nedeniyle $cf(w(X)) < w(X)$ olur dolayısıyla $w(X)$ kardinali düzenli değildir. Öte yandan $\kappa < w(X) \Rightarrow 2^\kappa \leq w(X)$ varsayımı altında, uygun bir $\kappa_0 < w(X)$ kardinal sayısı için $w(X) = 2^{\kappa_0}$ olsaydı, $(\kappa_0.cf(w(X)) < w(X))$

$$(w(X))^{cf(w(X))} = 2^{\kappa_0.cf(w(X))} \leq w(X) < (w(X))^{cf(w(X))}$$

çelişkisi bulunurdu. ■

Teorem III.41 *X tıkkı, $cf(w(X))$ -bağlantısız ve $cf(w(X))$ kardinaliteli bir gözenekli ailenin tanımlanabildiği bir uzay ve H bu uzayda Teorem III.40'daki gibi tanımlanan alt*

küme olsun. Eğer $\kappa < w(X) \Rightarrow 2^\kappa \leq w(X)$ çıkarsaması geçerliyse $H \neq \emptyset$, $(w(X))^{\aleph_0} = w(X)$ ve $w(X \setminus H) < w(X)$ olur.

Kanıt. X uzayında boştan farklı, ikişerli ayrık ve $w(U) < w(X)$ koşulunu gerçekleyen kapaçık U kümelerinin, ünlü Zorn Lemması nedeniyle var olan maksimal ailesi $\mathcal{U}$ olsun. Bu durumda Lemma III.12 nedeniyle $|\mathcal{U}| < w(X)$ ve $\kappa_0 = \sup\{w(U) : U \in \mathcal{U}\} < w(X)$ olur ve böylece hipotez gereği $2^{|\mathcal{U}| \cdot \kappa_0} \leq w(X)$ gerçekleşir. Şimdi, eğer $H = \emptyset$ olsaydı, X uzayında her bir boştan farklı açık U kümesinin bir $\emptyset \neq V \subseteq U$ kapaçık alt kümesi, $w(V) < w(X)$ gerçeklenecek biçimde bulunur ve böylece $\bigcup \mathcal{U}$ kümesi X uzayında yoğun olurdu. Bu durumda

$$w(\bigcup \mathcal{U}) = \sum \{w(U) : U \in \mathcal{U}\} \leq |\mathcal{U}| \cdot \kappa_0 \text{ ve } w(X) \leq 2^{w(\bigcup \mathcal{U})} \leq 2^{|\mathcal{U}| \cdot \kappa_0}$$

olması nedeniyle $w(X) = 2^{|\mathcal{U}| \cdot \kappa_0}$ gerçekleşirdi; ancak bu durum bir önceki lemma ile çelişmektedir. Demek ki $H \neq \emptyset$ olur. Böylece $w(H) = w(X)$ ve H uzayının aşırı bağlantısız olması nedeniyle Pierce Teoremi'nden yararlanarak

$$(w(H))^{\aleph_0} = w(H) = w(X) = (w(X))^{\aleph_0}$$

bulunur. Şimdi $\mathcal{W}$ ailesi, X uzayında boştan farklı, ikişerli ayrık ve $W \cap H = \emptyset$ koşulunu gerçekleyen kapaçık W kümelerinin *maksimal ailesi* olsun. Kolayca görülebilir ki her $W \in \mathcal{W}$ için $w(W) < w(X)$ varsayılabilir. Bu durumda Lemma III.12 nedeniyle

$$|\mathcal{W}| < w(X) \text{ ve } \kappa_1 = \sup\{w(W) : W \in \mathcal{W}\} < w(X)$$

olur ve böylece $w(\bigcup \mathcal{W}) \leq |\mathcal{W}| \cdot \kappa_1 < w(X)$ bulunur. Ayrıca $\bigcup \mathcal{W}$ kümesi, $X \setminus H$ alt uzayında yoğun olduğundan

$$w(X \setminus H) \leq 2^{d(\bigcup \mathcal{W})} \leq 2^{w(\bigcup \mathcal{W})} \leq 2^{|\mathcal{W}| \cdot \kappa_1} \leq w(X)$$

gerçeklenir; ancak bir önceki lemma nedeniyle $w(X)$ kardinal sayısı, 2'nin bir kuvveti olarak *yazılamadığından* $w(X \setminus H) < w(X)$ olur. ■

Kısacası Teorem III.40 ve Teorem III.41'den yararlanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç III.30 X tıkkız, $cf(w(X))$ -bağlantısız ve $cf(w(X))$ kardinaliteli bir gözenekli ailenin tanımlanabildiği bir uzay olsun. Eğer her $\kappa < w(X)$ kardinal sayısı için $2^\kappa \leq w(X)$ oluyorsa, aşağıdaki iddialar doğrudur:

(a) $w(X)$ bir tekil kardinal sayıdır.

(b) $(w(X))^{\aleph_0} = w(X)$ olur.

(c) $X = H \cup Y$ olacak biçimde aşağıdaki koşulları gerçekleyen boştan farklı ve ayrık olan $H, Y \subseteq X$ kapaçık alt kümeleri vardır:

(1) H alt uzayı aşırı bağlantısızdır, her $\emptyset \neq U \subseteq H$ kapaçık alt kümesi için $w(U) = w(X)$ gerçekleşir ve bu alt uzayda tanımlanan boştan farklı ve ikişerli ayrık olan kapaçık kümelerin her $\mathcal{U}$ ailesi için $|\mathcal{U}| < cf(w(X))$ olur.

(2) $w(Y) < w(X)$ ve $c(Y) = c(X)$ gerçekleşir.

Aşağıda bir önceki sonuçtaki özelliklere sahip bir X uzayı tanımlanacaktır; ancak gerekli olduğundan öncelikle bazı tanım ve temel bilgiler verilmelidir. X ve Y birer topolojik uzay olmak üzere, sürekli bir $f : X \longrightarrow Y$ dönüşümüne her $A \subsetneq X$ kapalı öz alt kümesi için $f(A) \neq Y$ oluyorsa **indirgenemez dönüşüm** denilir. Öte yandan bir $f : X \longrightarrow Y$ dönüşümüne sürekli, kapalı ve $f^{-1}(y) (\forall y \in Y)$ lif kümeleri tıkkız ise **yetkin dönüşüm** denilir. Eğer X bir Hausdorff uzayı ve $f : X \longrightarrow Y$ bir örten yetkin dönüşüm ise $w(Y) \leq w(X)$ gerçekleştiği bilinmektedir. (bkz. [4]) X bir T_3 uzayı olmak üzere, bu uzaydaki tüm açık kümelerin ailesi $O(X)$ ile gösterilsin. $O(X)$ 'in üyeleriyle tanımlanan ve X uzayındaki bir noktaya yakınsayan tüm büyük süzgeçlerin kümesi pX ile gösterilsin. Kolayca görülebilir ki $U_* = \{F \in pX : U \in F\} (\forall U \in O(X))$ biçimindeki tüm kümelerin ailesi aracılığıyla pX üzerinde bir esas komşuluk bağıntısı tanımlanır. Bu esas komşuluk bağıntısının belirlediği topolojiyle donatılarak elde edilen pX uzayına, X uzayının **izdüşüm örtülüğü** denilir. Her $U \in O(X)$ için $pX - U_* = (X - \overline{U})_*$ gerçekleştiği kolayca görülebilir. Herhangi bir $F \in pX$ büyük süzgecinin X uzayında yakınsadığı nokta (X bir Hausdorff uzayı olduğundan her süzgeç

en fazla bir noktaya yakınsar) x_F ile gösterilsin. Bu durumda $\pi_X(F) = x_F$ biçiminde tanımlanan $\pi_X : pX \longrightarrow X$ dönüşümünün indirgenemez ve yetkin bir dönüşüm olduğu üstelik pX uzayının aşırı bağlantısız bir T_3 uzayı olduğu (bkz. [4]) bilinmektedir. Bu nedenle $w(X) \leq w(pX)$ olur. Özel olarak X bir tıkız Hausdorff uzayı ise pX uzayı tıkız ve aşırı bağlantısız olur. Öte yandan herhangi bir T_3 uzayının izdüşüm örtülüşünün homeomorfizma (eşyapı fonksiyonu) farkıyla tek türlü belirli olduğu bilinmektedir. U_* kümelerinin tanımından yararlanarak herhangi bir X T_3 uzayı için $c(pX) = c(X)$ gerçekleştiği kolayca görülür.

Efimov [15] makalesinde herhangi bir X tıkız Hausdorff uzayı için

$$(\clubsuit) \quad w(pX) = |\mathcal{O}_{pX}| = |RC(X)|$$

olduğunu göstermiştir. (Burada $\mathcal{O}_{pX}$ ile pX uzayındaki tüm kapaçık kümelerin ailesi ve $RC(X)$ ile X uzayındaki tüm düzenli kapalı kümelerin ailesi gösterilmektedir.) Ayrıca yine bu makalede, κ bir sonsuz kardinal sayı olmak üzere, κ -ağırlıklı $D^\kappa = (D(2))^\kappa$ Cantor küpü'nde tüm düzenli kapalı kümelerin birer $\mathcal{G}_\delta$ -türü küme olduğu kanıtlanmıştır. D^κ uzayı tıkız ve sıfır boyutlu olduğundan, bu uzayda her $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı küme, sayılabilir sayıda kapaçık kümenin arakesiti olarak yazılabilir. Bu durumda D^κ uzayının tüm kapalı kümelerinin kümesi $\mathcal{F}_{D^\kappa}$ ile gösterilirse, $(\clubsuit)$ bağıntısından yararlanarak

$$w(pD^\kappa) = |RC(D^\kappa)| \leq |\mathcal{F}_{D^\kappa} \cap \mathcal{G}_\delta| \leq |\mathcal{O}_{D^\kappa}|^{\aleph_0} \stackrel{(1)}{=} (w(D^\kappa))^{\aleph_0} \stackrel{(2)}{=} \kappa^{\aleph_0}$$

bulunur. (Burada (1) ve (2) eşitlikleri yazılırken sırasıyla Lemma III.10 ve Örnek III.11(b)'den yararlanılmıştır.) O halde $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ koşulunu gerçekleyen herhangi bir *sonsuz* κ kardinal sayısı için

$$\kappa = w(D^\kappa) \leq w(pD^\kappa) \leq \kappa^{\aleph_0} = \kappa$$

olur, ayrıca Örnek III.11(c)'den yararlanarak $c(pD^\kappa) = c(D^\kappa) = \aleph_0$ bulunur.

Örnek III.14 $\aleph_0 \leq \kappa_1 \leq \kappa_2$ gerçekleyen κ_1, κ_2 kardinal sayıları göz önüne alınsın. Eğer $\kappa_1 = \kappa_2$ ise $Y(\kappa_1, \kappa_2)$ uzayı, $D(\kappa_2)$ kesikli uzayının Cech-Stone tıkızlaşması olarak

tanımlansın, kısacası $Y(\kappa_1, \kappa_2) = \beta D(\kappa_2)$ olsun. Eğer $\kappa_1 < \kappa_2$ ise $z_0 \notin D(\kappa_2)$ ve $Z = D(\kappa_2) \cup \{z_0\}$ olsun. Z kümesinde $z_0 \in Z$ noktasının yerel tabanının

$$\mathcal{B}_{z_0} = \{E \cup \{z_0\} : E \subseteq D(\kappa_2), |D(\kappa_2) - E| \leq \kappa_1\}$$

olduğu, buna karşılık her bir $x \in D(\kappa_2)$ noktasının yerel tabanının ise $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ biçiminde tanımlandığı (kısacası tüm $x \in D(\kappa_2)$ noktalarının yalıtılmış olduğu) uzay göz önüne alınsın. Bu durumda $Y(\kappa_1, \kappa_2) = \beta Z$ biçiminde tanımlansın. Kısacası

$$Y(\kappa_1, \kappa_2) = \begin{cases} \beta D(\kappa_2) & ; \kappa_1 = \kappa_2 \text{ ise} \\ \beta Z & ; \kappa_1 < \kappa_2 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $w(Y(\kappa_1, \kappa_2)) = \kappa_2^{\kappa_1}$ ve $c(Y(\kappa_1, \kappa_2)) = \kappa_2$ olur. Üstelik $\kappa_1 < \kappa_2$ ise $Y(\kappa_1, \kappa_2)$ uzayı κ_1 -bağılantısızdır; ancak κ_1^+ -bağılantısız değildir.

Çözüm. Gerek $\kappa_1 = \kappa_2$ gerekse $\kappa_1 < \kappa_2$ için $c(Y(\kappa_1, \kappa_2)) = \kappa_2$ olduğu kolayca görülebilir, çünkü her iki durumda da $D(\kappa_2)$ kümesi $Y(\kappa_1, \kappa_2)$ uzayında yoğun olduğundan $c(Y(\kappa_1, \kappa_2)) \leq d(Y(\kappa_1, \kappa_2)) \leq |D(\kappa_2)| = \kappa_2$ olur. Öte yandan her iki durum içinde $\{\{x\} : x \in D(\kappa_2)\}$ ailesi, $Y(\kappa_1, \kappa_2)$ uzayında bir gözenekli aile olduğundan $\kappa_2 = |\{\{x\} : x \in D(\kappa_2)\}| \leq c(Y(\kappa_1, \kappa_2))$ bulunur. O halde ister $\kappa_1 = \kappa_2$ isterse $\kappa_1 < \kappa_2$ olsun $c(Y(\kappa_1, \kappa_2)) = \kappa_2$ gerçekleşir. Eğer $\kappa_1 = \kappa_2$ ise $Y(\kappa_1, \kappa_2) = \beta D(\kappa_2)$ uzayının aşırı bağılantısız olduğu ve Teorem III.33 nedeniyle

$$w(Y(\kappa_1, \kappa_2)) = w(\beta D(\kappa_2)) = 2^{\kappa_2} = \kappa_2^{\kappa_2} = \kappa_2^{\kappa_1}$$

gerçeklendiği bilinmektedir. O halde $\kappa_1 = \kappa_2$ durumu için kanıt tamamlanmıştır.

Şimdi $\kappa_1 < \kappa_2$ olsun. Bilindiği gibi X bir Tikhonov uzayı olmak üzere, eğer A bu uzayda bir kapaçık küme ise $\text{kap}_{\beta X} A$ kümesi βX uzayında bir kapaçık küme olur. Böylece $|D(\kappa_2) - E| \leq \kappa_1$ koşulunu gerçekleyen her $E \subseteq D(\kappa_2)$ alt kümesi için $E \cup \{z_0\}$ kümesi $Z = D(\kappa_2) \cup \{z_0\}$ uzayında kapaçık olduğundan, (Z uzayının bir Tikhonov uzayı olduğu apaçıktır.) $\text{kap}_{\beta Z}(E \cup \{z_0\}) = \text{kap}_{\beta Z} E \cup \{z_0\}$ kümesi βZ

($= Y(\kappa_1, \kappa_2)$) uzayında kapaçık olur. Öte yandan yukarıdaki biçimde tanımlanan her E kümesi için $z_0 \in kap_Z E = kap_{\beta Z} E \cap Z$ olduğundan, $kap_{\beta Z} E = kap_{\beta Z}(E \cup \{z_0\})$ gerçekleşir ve böylece $kap_{\beta Z} E$ kümelerinin βZ uzayında birer kapaçık küme olduğu anlaşılır. Tıkız βZ uzayının kalıtımsal bağlantısız olduğunu kanıtlamak için her bir $x \in \beta Z$ noktası için, βZ uzayında x noktasını içeren tüm kapaçık kümelerin arakesitinin $\{x\}$ tek nokta kümesi olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $x \in D(\kappa_2)$ ise iddia apaçıktır. z_0 noktasının βZ uzayında $|D(\kappa_2) - K| \leq \kappa_1$ koşulunu gerçekleyen herhangi bir kapalı K komşuluğu için $kap_{\beta Z}(K \cap D(\kappa_2))$ kümesi, z_0 noktasının βZ uzayında bir kapaçık komşuluğu olur, üstelik K kümesi tarafından kapsanır. Öte yandan herhangi bir $q \in \beta Z \setminus Z$ noktası göz önüne alınsın. q noktasının βZ uzayında kapalı bir F komşuluğu, $z_0 \notin F$ olacak biçimde vardır. Bu durumda $kap_{\beta Z}(F \cap D(\kappa_2))$ kümesi, q noktasının βZ uzayında bir kapaçık komşuluğu olur, üstelik F kümesi tarafından kapsanır. Böylece βZ uzayında keyfi sabit bir noktayı içeren tüm kapaçık kümelerin arakesitinin, bu sabit noktadan oluşan tek elemanlı küme olduğu anlaşılır. O halde βZ kalıtımsal bağlantısız (dolayısıyla sıfır boyutlu) bir uzaydır.

$Y(\kappa_1, \kappa_2) = \beta Z$ uzayının κ_1 -bağlantısız olduğunu kanıtlamak için bu uzayda $|\mathcal{U}| \leq \kappa_1$ koşulunu gerçekleyen her $\mathcal{U}$ kapaçık kümeler ailesi için

$$G_{\mathcal{U}} = \left(\bigcup \mathcal{U} \right) \cap Z$$

biçiminde tanımlanan kümenin Z uzayında kapaçık olduğunu göstermek yeterlidir. Apaçıktır ki $G_{\mathcal{U}}$ kümesi Z uzayında açıktır. Eğer $z_0 \in G_{\mathcal{U}}$ ise, Z uzayında z_0 noktasını içeren her küme gibi $G_{\mathcal{U}}$ kümesinde kapalı olur. Diğer yandan $z_0 \notin G_{\mathcal{U}}$ ise her $U \in \mathcal{U}$ için $Z - U$ kümesi z_0 noktasının Z uzayında bir açık komşuluğu olur. z_0 noktasının Z uzayında κ_1 veya daha az sayıdaki açık komşuluklarının arakesiti yine bu noktanın bir açık komşuluğu olduğundan

$$z_0 \notin kap_{\beta Z} \left(\bigcup \mathcal{U} \right) = kap_{\beta Z} G_{\mathcal{U}} \quad (\supseteq kap_Z G_{\mathcal{U}})$$

bulunur. Buradan G_U kümesinin Z uzayında kapalı olduğu anlaşılır.

$Y(\kappa_1, \kappa_2) = \beta Z$ uzayının κ_1^+ -bağlantısız *olmadığı* şöyle görülebilir: $D(\kappa_2)$ kümesinin $|E_1| = |E_2| = \kappa_1^+$ koşulunu gerçekleyen *ayrık* E_1, E_2 alt küme çifti için $z_0 \in \text{kap}_Z E_1 \cap \text{kap}_Z E_2$ olur. $E_1 \cup E_2$ kümesinin tüm elemanları, βZ uzayında birer yalıtılmış nokta olduğundan

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in E_1 \\ 1 & ; x \in E_2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $f : E_1 \cup E_2 \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu sürekli olur; ancak bu fonksiyonun βZ uzayına (aslında z_0 noktasına) bir sürekli genişlemesi *olmadığından*, Lemma III.11 nedeniyle βZ uzayı κ_1^+ -bağlantısız *olamaz*.

Son olarak, eğer $|\mathcal{O}_{\beta Z}| = \kappa_2^{\kappa_1}$ gerçekleştiği gösterilirse, Lemma III.10 nedeniyle $w(\beta Z) = \kappa_2^{\kappa_1}$ olduğu anlaşılır. $D(\kappa_2)$ kümesinin $|A| \leq \kappa_1$ koşulunu gerçekleyen her A alt kümesi Z uzayında bir kapaçık küme olduğundan, $\text{kap}_{\beta Z} A$ kümesi βZ uzayında kapaçık olur. Üstelik $A_1, A_2 \in \mathcal{P}_{\leq \kappa_1}(D(\kappa_2))$ ve $A_1 \neq A_2$ için $\text{kap}_{\beta Z} A_1 \neq \text{kap}_{\beta Z} A_2$ olur, böylece

$$\kappa_2^{\kappa_1} = |\mathcal{P}_{\leq \kappa_1}(D(\kappa_2))| \leq |\mathcal{O}_{\beta Z}|$$

bulunur. Tersine βZ uzayında $z_0 \notin U$ olacak biçimde bir U kapaçık kümesi göz önüne alınsın. Bu durumda $|D(\kappa_2) \cap U| \leq \kappa_1$ olur. Böylece $\mathcal{O}'_{\beta Z} = \{U \in \mathcal{O}_{\beta Z} : z_0 \notin U\}$ olmak üzere, $\varphi(U) = U \cap D(\kappa_2)$ biçiminde tanımlanan $\varphi : \mathcal{O}'_{\beta Z} \longrightarrow \{A \subseteq D(\kappa_2) : |A| \leq \kappa_1\}$ fonksiyonu bire bir olduğundan

$$|\mathcal{O}'_{\beta Z}| \leq |\{A \subseteq D(\kappa_2) : |A| \leq \kappa_1\}| \leq \kappa_2^{\kappa_1}$$

gerçeklenir. Öte yandan her bir $U \in \mathcal{O}_{\beta Z} - \mathcal{O}'_{\beta Z}$ üyesi için bir $E_U \subseteq D(\kappa_2)$ alt kümesi, $\text{kap}_{\beta Z} E_U \subseteq U$, $|D(\kappa_2) - E_U| \leq \kappa_1$ koşulları gerçekleştirilecek biçimde var olduğundan $|D(\kappa_2) - U| \leq |D(\kappa_2) - E_U| \leq \kappa_1$ dolayısıyla $|\mathcal{O}_{\beta Z} - \mathcal{O}'_{\beta Z}| \leq \kappa_2^{\kappa_1}$ olur ve böylece

$$|\mathcal{O}_{\beta Z}| = |\mathcal{O}'_{\beta Z} \cup (\mathcal{O}_{\beta Z} - \mathcal{O}'_{\beta Z})| \leq \kappa_2^{\kappa_1} \vee \kappa_2^{\kappa_1} = \kappa_2^{\kappa_1}$$

bulunur. Sonuç olarak $w(Y(\kappa_1, \kappa_2)) = \kappa_2^{\kappa_1}$ olup çözüm tamamlanır. ■

Sonuç III.31 $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ biçimindeki tekil bir κ kardinal sayısı ile

$$(\spadesuit) \quad cf(\kappa) \leq \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \kappa_2^{\kappa_1} < \kappa$$

koşullarını gerçekleyen κ_1, κ_2 kardinal sayıları göz önüne alınsın. Bu durumda $X = pD^\kappa \oplus Y(\kappa_1, \kappa_2)$ erkin toplam (direk toplam) uzayı için

(a) $w(X) = \kappa$, $c(X) = \kappa_2$ ve X uzayı κ_1 -bağılantısız olur.

(b) $\kappa_1 < \kappa_2$ ise X uzayı κ_1^+ -bağılantısız değildir, eğer $\kappa_1 = \kappa_2$ ise X uzayı aşırı bağılantısız olur.

Yukarıdaki sonuçta tanımlanan $X = pD^\kappa \oplus Y(\kappa_1, \kappa_2)$ uzayı κ_1 -bağılantısız olup, üstelik bu uzayda κ_1 kardinaliteli bir gözenekli ailenin belirlenebilmesine karşın

$$w(X) = \kappa < \kappa^{cf(\kappa)} \leq \kappa^{\kappa_1} = (w(X))^{\kappa_1}$$

bulunur. Ayrıca $X = pD^\kappa \oplus Y(\kappa_1, \kappa_2)$ uzayı, $cf(w(X))$ -bağılantısız ve $cf(w(X))$ kardinaliteli gözenekli ailelerin tanımlanabildiği bir uzaydır.

Aşağıdaki örnekte $(\spadesuit)$ koşulunun anlamsız *olmadığı* yani bu koşulu gerçekleyen kardinal sayıların var olduğu görülecektir.

Örnek III.15 $\kappa = \kappa^{\aleph_0}$ ve her $\lambda < \kappa$ kardinal sayısı için $2^\lambda \leq \kappa$ olacak biçimde tekil bir κ kardinal sayısı vardır. Bu durumda

$$(i) \quad \kappa_1 = \kappa_2 = cf(\kappa),$$

$$(ii) \quad \kappa_1 = \kappa_2 = 2^\lambda; \quad cf(\kappa) \leq \lambda < \kappa \text{ ise}$$

$$(iii) \quad \kappa_1 = \lambda, \quad \kappa_2 = 2^\lambda; \quad cf(\kappa) \leq \lambda < \kappa \text{ ise}$$

şıklarının herhangi biri geçerli olduğunda $(\spadesuit)$ koşulu sağlanır.

Çözüm. η sayılamaz bir düzenli kardinal sayı olsun. $W(\omega_\eta) = [0, \omega_\eta)$ ordinal sayılar kümesi üzerinden sonlu ötesi tümevarımla aşağıdaki gibi kardinal sayılar tanımlansın: μ_0 keyfi bir kardinal sayı olsun. Keyfi sabit bir α ($\in W(\omega_\eta)$) ordinali için μ_β

$(\forall \beta < \alpha)$ kardinal sayıları belirlenmiş olsun. Bu durumda, eğer α bir ardıl ordinal sayı ise yani uygun bir $\gamma < \alpha$ ordinali için $\alpha = \gamma + 1$ ise $\mu_\alpha = 2^{\mu_\gamma}$ biçiminde, yok eğer α bir limit ordinal sayı ise $\mu_\alpha = \sup\{\mu_\beta : \beta < \alpha\}$ biçiminde tanımlanarak tümevarım sürdürülür. Sonuç olarak $\kappa = \sup\{\mu_\alpha : \alpha \in [0, \omega_\eta)\}$ biçiminde tanımlanan κ kardinal sayısı göz önüne alınırsa, η bir düzenli kardinal sayı olduğundan $cf(\kappa) = \eta < \kappa$ olur. Ayrıca her $\lambda < \kappa$ kardinal sayısı için $2^\lambda < \kappa$ olur ve üstelik $cf(\kappa) = \eta > \aleph_0$ olduğundan, Lemma III.5(b) nedeniyle $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$ gerçekleşir. Öte yandan Lemma III.14 nedeniyle κ kardinal sayısı 2 'nin bir kuvveti olarak yazılamaz dolayısıyla (i)-(iii) şıklarından herhangi biri geçerli olduğunda ($\spadesuit$) koşulunun sağlandığı kolayca görülür. ■

III.6 Alexandroff Problemi ve İlişkili Bazı Sonuçlar

Bu kısımda ilk olarak 1923 yılında P.S.Alexandroff ve P.S.Urysohn tarafından ortaya atılan "Her birinci sayılabilir tıkHz T_2 uzayının kardinalitesi $\leq c$ midir?" sorusuna cevap aranacaktır. Bu ünlü problemin cevabının 'olumlu' olduğu 1969 yılında A.V. Arhangel'skii tarafından kanıtlanmıştır. Arhangel'skii [16] makalesinde herhangi bir X Hausdorff uzayı için $|X| \leq 2^{L(X) \cdot \chi(X)}$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu kanıtlamıştır. Bu eşitsizlikten yararlanarak birinci sayılabilir bir X Hausdorff uzayı, eğer bir Lindelöf uzayı ise $|X| \leq 2^{\aleph_0}$ olduğu anlaşılır. $|X| \leq 2^{L(X) \cdot \chi(X)}$ eşitsizliğinin gerçekleştiğine dair Arhangel'skii tarafından verilen kanıt oldukça uzun olup, aşağıda R.Pol tarafından yapılan ispat verilecektir. Ayrıca bu kısımda $|X|$ için farklı sınırlarda belirlenecektir.

Teorem III.42 (Arhangel'skii Teoremi): X bir T_2 uzayı ise $|X| \leq 2^{L(X) \cdot \chi(X)}$ geçerlidir.

Kanıt. $L(X) \cdot \chi(X) = \kappa$ olsun. Her $x \in X$ noktasının $|\mathcal{B}_x| \leq \kappa$ koşulunu gerçekleyen $\mathcal{B}_x$ yerel tabanı göz önüne alınsın. Bu uzayda, sonlu ötesi tümevarımla, aşağıdaki koşullar gerçekleşecek biçimde $\{H_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ kapalı kümeler ailesi ile $\{\mathcal{V}_\alpha : 0 <$

$\alpha < \kappa^+$ } açık küme ailelerinin ailesi tanımlanabilir:

- (1) $|H_\alpha| \leq 2^\kappa$ ($0 \leq \alpha < \kappa^+$),
- (2) $\mathcal{V}_\alpha = \{B : B \in \mathcal{B}_x, x \in \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta\}$ ($0 < \alpha < \kappa^+$),
- (3) Bir $\mathcal{U} \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_\alpha)$ için $X \neq \bigcup \mathcal{U}$ ise $H_\alpha - \bigcup \mathcal{U} \neq \emptyset$.

Önce sayılabilir üyeli herhangi bir H_0 kapalı alt kümesi alınsın. Bir $\alpha < \kappa^+$ için H_β ($\forall \beta < \alpha$) kümeleri, (1)-(3) koşulları gerçekleştirilecek biçimde, önceki aşamalarda belirlenmişse $\mathcal{V}_\alpha = \bigcup \{\mathcal{B}_x : x \in \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta\}$ yazılsın. Kolayca görülebilir ki $\beta < \gamma < \kappa^+$ ise $\mathcal{V}_\beta \subseteq \mathcal{V}_\gamma$ olur, üstelik

$$|\mathcal{V}_\alpha| = \left| \bigcup_{x \in \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta} \mathcal{B}_x \right| \leq \left| \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta \right| \vee \sup \{|\mathcal{B}_x| : x \in \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta\} \leq 2^\kappa$$

gerçeklenir. Şimdi de $\mathcal{V}_\alpha$ ailesinin $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ ve $X \neq \bigcup \mathcal{U}$ koşullarını gerçekleyen her bir $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}_\alpha$ alt ailesi için, tek türlü belirli bir $x(\mathcal{U}) \in X - \bigcup \mathcal{U}$ noktası Seçme Aksiyomu yardımıyla seçilerek, bu seçilmiş noktalardan oluşan

$$A_\alpha = \{x(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_\alpha) \text{ ve } X \neq \bigcup \mathcal{U}\}$$

alt kümesi tanımlansın. $x(\mathcal{U}) \mapsto \mathcal{U}$ eşleştirmesi A_α kümesinden $\mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_\alpha)$ kümesine bire-bir olduğundan $|A_\alpha| \leq |\mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_\alpha)| \leq |\mathcal{V}_\alpha|^\kappa \leq 2^\kappa$ gerçekleşir. Bu aşamada

$$H_\alpha = \overline{A_\alpha \cup \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta} \quad (\supseteq \overline{\bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta})$$

kapalı kümesi tanımlanırsa, Pospisil Teoremi nedeniyle

$$|H_\alpha| = \left| \text{kap}(A_\alpha \cup \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta) \right| \leq (d(H_\alpha))^{\chi(H_\alpha)} \leq \left| A_\alpha \cup \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta \right|^{\chi(X)} \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$$

olur. Ayrıca herhangi $\beta < \alpha$ için $H_\beta \subseteq H_\alpha$ olduğu kolayca görülür; çünkü $A_\beta \subseteq A_\alpha$ dır.

O halde istenen ailelerin istenen koşullar gerçekleştirilecek biçimde sonlu ötesi tümevarım yoluyla tanımlanması süreci bitirilmiş olur. Artık bu aşamada $H = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} H_\alpha$ yazılırsa,

$X = H$ olduğunu göstermek güç değildir. Gerçekten, üyeleri azalmayan kapalı kümeler

olan $\{H_\alpha\}_{\alpha < \kappa^+}$ ailesi için, $t(X) \leq \chi(X) \leq \kappa$ olduğundan, $H = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} H_\alpha$ kümesi kapalı olur. Şimdi eğer $X - H \neq \emptyset$ olsaydı, bir $x_0 \in X - H$ elemanı var olur ve üstelik X bir T_2 uzayı olduğundan her bir $x \in H$ için $x \neq x_0$ nedeniyle $x_0 \notin B_x$ olacak biçimde bir $B_x \in \mathcal{B}_x$ vardır. Böylece elde edilen $\{B_x\}_{x \in H} \cup \{X - H\}$ ailesi, X uzayı için bir açık örtülüş olur. Bu durumda $L(X) \leq \kappa$ olduğundan bir $A \subseteq H$ alt kümesi, $|A| \leq \kappa$ ve $X = \bigcup_{x \in A} B_x \cup (X - H)$ koşulları gerçekleşecek biçimde vardır. Bu alt küme aracılığıyla tanımlanan $\mathcal{U}_0 = \{B_x\}_{x \in A}$ ailesi için $H \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$ ve $x_0 \notin \bigcup \mathcal{U}_0$ olur ve böylece $X \neq \bigcup \mathcal{U}_0$ bulunur. Öte yandan $|\mathcal{U}_0| = |A| \leq \kappa$ olduğundan uygun bir $\alpha_0 < \kappa^+$ ($= cf(\kappa^+)$) ordinali için $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{V}_{\alpha_0}$ olur, üstelik $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_{\alpha_0})$ dır. Böylece (3) koşulu nedeniyle $H_{\alpha_0} - \bigcup \mathcal{U}_0 \neq \emptyset$ olur; ancak bu durum $H_{\alpha_0} \subseteq H \subseteq \bigcup \mathcal{U}_0$ gerçeğiyle çelişir. Ulaşılan bu çelişki nedeniyle $X = H = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} H_\alpha$ olduğu anlaşılır ve böylece

$$|X| = \left| \bigcup_{\alpha < \kappa^+} H_\alpha \right| \leq \kappa^+ \vee \sup\{|H_\alpha| : \alpha < \kappa^+\} \leq 2^\kappa$$

bulunur. ■

Bu teorem L.Gillman tarafından kanıtlanan şu gerçekten yararlanarakta ispatlanabilir: Bir (X, τ) uzayında

Özellik(I) Eğer $A \subseteq X$ ve $|A| \leq \kappa$ ise $|\overline{A}| \leq 2^\kappa$

Özellik(II) Eğer A kümesi, X uzayında kapalı ve $|A| \leq 2^\kappa$ ise

$$\Psi(A) = \min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subseteq \tau, \bigcap \mathcal{U} = A\} \leq 2^\kappa$$

özellikleri geçerliyse ve $|X| > 2^\kappa$ ise bu uzayda κ^+ -uzunluğunda erkin dizi tanımlanabilir. Bu son gerçekten yararlanarak Arhangel'skii Teoremi aşağıdaki gibi kanıtlanır: X bir T_2 uzayı olmak üzere $L(X) \cdot \chi(X) = \kappa$ olsun. Bu durumda, X uzayında, **Özellik(I)** ve **Özellik(II)** geçerli olup bu uzayda κ^+ -uzunluğunda erkin dizi *tanımlanamaz*, dolayısıyla biraz önceki sonuç nedeniyle $|X| \leq 2^\kappa$ olur. Gerçekten, bu uzayda kapalı olan ve $|A| \leq 2^\kappa$ koşulunu gerçekleyen bir A kümesi için her $x \in A$ noktasının $|\mathcal{B}_x| \leq \kappa$ gerçekleşecek biçimde bir $\mathcal{B}_x$ yerel tabanı göz önüne alınsın. Bu durumda $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in A} \mathcal{B}_x$

ailesi için $|\mathcal{B}| \leq |A| \vee \sup_{x \in A} |\mathcal{B}_x| \leq 2^\kappa$ olur. A kümesi X uzayında kapalı olduğundan $L(A) \leq L(X) \leq \kappa$ olup, $\Psi(A) \leq |\mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{B})| \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$ gerçekleştiği kolayca görülür, böylece **Özellik(II)**'nin X uzayında geçerli olduğu anlaşılır. Ayrıca X bir T_2 uzayı olduğundan, $|A| \leq \kappa$ gerçekleyen herhangi bir $A \subseteq X$ alt kümesi için Pospisil Teoremi ve ıra sayısının monotonluğundan yararlanarak $|\overline{A}| \leq (d(\overline{A}))^{\chi(\overline{A})} \leq |A|^{\chi(X)} \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa$ bulunur, dolayısıyla **Özellik(I)**'inde X uzayında geçerli olduğu anlaşılır. Öte yandan X uzayında κ^+ -uzunluğunda erkin bir dizi *tanımlanamaz*; çünkü $L(X) \leq \kappa$ olduğundan, bu uzayda κ^+ -uzunluğunda herhangi bir $\{x_\xi : \xi < \kappa^+\}$ dizisi için bir $p \in X$ noktası, her açık komşuluğunda $\{x_\xi : \xi < \kappa^+\}$ dizisinin κ^+ sayıda elemanını içerecek biçimde var olur. Böylece bazı $\eta < \kappa^+$ ordinalleri için $p \in \overline{\{x_\xi : \xi < \eta\}} \cap \overline{\{x_\xi : \xi \geq \eta\}} \neq \emptyset$ olur, dolayısıyla $\{x_\xi : \xi < \kappa^+\}$ dizisinin erkin *olmadığı* anlaşılır. (Eğer ek olarak X bir tıkız uzay olsaydı bu sonuç Teorem III.3'den kolayca görülürdü.)

Sonuç III.32 *Birinci sayılabilir bir tıkız T_2 uzayı ya sayılabilir ya da $2^{\aleph_0}$ kardinalitelidir.*

Kanıt. X sayılamaz sonsuz elemanlı, birinci sayılabilir ve tıkız bir T_2 uzayı olsun. Arhangel'skii Teoremi nedeniyle $|X| \leq 2^{\aleph_0}$ olur, o halde $|X| \geq 2^{\aleph_0}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla, X uzayında bir $x \in X$ noktasını içeren tüm açık kümelerin ailesi τ_x ile gösterilmek üzere, $A = \{x \in X : \aleph_0 < |B| \ (\forall B \in \tau_x)\}$ alt kümesi tanımlansın. Kolayca görülebilir ki A boştan farklı bir kapalı kümedir, üstelik A alt uzayının *hiç* yalıtılmış noktası yoktur. Gerçekten, $p \in A$ noktası A alt uzayında bir yalıtılmış nokta olsaydı, X uzayında açık bir V kümesi $A \cap V = \{p\}$ olacak biçimde var olurdu. Bu durumda, X uzayı birinci sayılabilir olduğundan, p noktasının $\overline{B_0} \subseteq V$ ve $B_{n+1} \subseteq B_n$ ($\forall n < \aleph_0$) koşullarını gerçekleyen bir $\{B_n\}_{n < \aleph_0}$ yerel tabanı vardır.

$$B_0 - \{p\} = \bigcup_{n < \aleph_0} (B_n - B_{n+1}) \text{ ve } |B_0 - \{p\}| = \left| \bigcup_{n < \aleph_0} (B_n - B_{n+1}) \right| > \aleph_0$$

olduğundan en az bir $n_0 < \aleph_0$ sayısı için $|B_{n_0} - B_{n_0+1}| > \aleph_0$ gerçekleşir. X bir tıkız uzay olduğundan $B_{n_0} - B_{n_0+1}$ kümesinin en az bir *tam yığılma noktası* vardır. Eğer $q \in X$ böyle bir noktaysa, $q \in A \cap V$ ve $q \neq p$ olur; ancak bu durum $A \cap V = \{p\}$ hipotezi ile çelişir. Ulaşılan bu çelişki nedeniyle A uzayında hiçbir yalıtılmış noktanın *bulunmadığı* ve böylece $\chi(p, A) \geq \aleph_0$ ($\forall p \in A$) gerçekleştiği anlaşılır. Sonuç olarak Cech-Pospisil Teoremi'nden yararlanarak $|X| \geq |A| \geq 2^{\aleph_0}$ aranan eşitsizliği bulunur.

■

Sonuç III.33 $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^1)$ uzayında her sayılamaz noktalı kapalı küme $2^{\aleph_0}$ kardinalitelidir.

Kanıt. Bu uzayda her kapalı küme sayılabilir sayıda tıkız alt kümenin birleşimi olarak yazılabildiğinden, bir önceki sonuçtan yararlanarak iddia kolayca kanıtlanır. ■

Sonuç III.34 X birinci sayılabilir ve Lindelöf olan bir Hausdorff uzay ise $|C(X)| = 2^{\aleph_0}$ geçerlidir.

Kanıt. Arhangel'skii Teoremi nedeniyle $|X| \leq 2^{\aleph_0}$ olur, üstelik X uzayı birinci sayılabilir olduğundan $w(X) \leq \chi(X)$. $|X| \leq 2^{\aleph_0}$ geçerlidir. O halde Teorem III.16'dan yararlanarak $2^{\aleph_0} \leq |C(X)| \leq (w(X))^{w(X)} \leq 2^{\aleph_0}$ bulunur. ■

Sonuç III.35 X bağlantılı, birinci sayılabilir ve Lindelöf olan en az iki elemanlı bir T_3 uzay ise $|X| = 2^{\aleph_0}$ geçerlidir.

Kanıt. Arhangel'skii Teoremi nedeniyle $|X| \leq 2^{\aleph_0}$ olduğundan, $|X| \geq 2^{\aleph_0}$ ters eşitsizliğini göstermek yeterlidir. Lindelöf T_3 uzayları birer T_4 uzayı olduğundan, X bir T_4 dolayısıyla bir Tikhonov uzayıdır. O halde farklı $x_1, x_2 \in X$ noktaları için $f(x_1) = 0$ ve $f(x_2) = 1$ gerçekleyen sürekli bir $f : X \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu vardır. Sonuç olarak, bağlantılı kümelerin sürekli görüntüleri de bağlantılı olduğundan, $f(X) = [0, 1]$ olur ve böylece $|X| \geq |f(X)| = |[0, 1]| = 2^{\aleph_0}$ bulunur. ■

Ünlü Alexandroff Problemi'nin çözülmesiyle çok sayıda ilginç ve önemli sonuç bulunmuştur. Örneğin S.Mrowka [17] makalesinde Arhangel'skii Teoremi'nden yararlanarak $c = 2^{\aleph_0}$ sayısını aşağıdaki gibi karakterizi etmiştir.

Teorem III.43 κ sonsuz bir kardinal sayı olmak üzere, aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:

- (a) κ kardinaliteli, birinci sayılabilir ve tıkHz olan bir T_2 uzayı vardır.
- (b) $D(\kappa)$ kesikli uzayının birinci sayılabilir olan ve $|cD(\kappa)| = \kappa$ gerçekleyen bir $cD(\kappa)$ tıkHzlaşması vardır.
- (c) $D(\kappa)$ uzayının bir $cD(\kappa)$ tıkHzlaşması vardır öyle ki $cD(\kappa) \setminus D(\kappa)$ kümesi, $cD(\kappa)$ uzayında, κ sayıda ikişerli ayrık $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı kümenin birleşimi olarak yazılır.
- (d) $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa)$ kümesi, $\beta D(\kappa)$ uzayında, κ sayıda ikişerli ayrık $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı kümenin birleşimi olarak yazılır.
- (e) Ξ , $|\Xi| = \kappa$ gerçekleyen bir indis kümesi olmak üzere, her $\xi \in \Xi$ için $D(\kappa)$ kümesinin alt kümelerinin bir $\{A_n^{(\xi)}\}_{n=1}^\infty$ dizisi aşağıdaki koşullar gerçekleşecek biçimde vardır:
 - (i) $\bigcup_{n=1}^\infty A_n^{(\xi)} = D(\kappa)$ ($\forall \xi \in \Xi$)
 - (ii) Pozitif tam sayıların her $\{n_\xi \in \mathbb{N} : \xi \in \Xi\}$ indis ailesine karşılık sonlu sayıda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k \in \Xi$ elemanları, $\left| A_{n_{\xi_1}}^{(\xi_1)} \cap \dots \cap A_{n_{\xi_k}}^{(\xi_k)} \right| < \aleph_0$ olacak biçimde vardır.
 - (iii) Her $\xi_1, \xi_2 \in \Xi, \xi_1 \neq \xi_2$ indis çiftine karşılık bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı

$$A_1^{(\xi_1)} \cup \dots \cup A_{n_{\xi_1}}^{(\xi_1)} \cup A_1^{(\xi_2)} \cup \dots \cup A_{n_{\xi_2}}^{(\xi_2)} = D(\kappa)$$

gerçeklenecek biçimde vardır.

Kanıt. Eğer (a) önermesi doğruysa, Sonuç III.32 nedeniyle $\kappa = \aleph_0$ ya da $\kappa = c$ olur. Aşağıda κ sayısının ne olduğu açıkça belirtilmeden (a), (b), (c), (d) ve (e) önermelerinin eşdeğer olduğu kanıtlanacaktır.

(a) $\Rightarrow$ (b): X , (a) önermesindeki özelliklere sahip bir uzay olsun. Bu uzay aracılığıyla tanımlanan $A(X)$ **Alexandroff çift X uzayı** (bkz. [4]) kesikli $D(\kappa)$ uzayının (b) deki

koşulları sağlayan bir tıkızlaşmasıdır. (Gerçekten, $X_i = X \times \{i\}$ ($i = 1, 2$) olmak üzere $X_1 \cup X_2$ kümesi üzerinde, **Alexandroff çift çember uzayı**'na benzer biçimde tanımlanan $A(X)$ uzayı, birinci sayılabilir tıkız bir T_2 uzayıdır. $A(X)$ uzayında X_1 , kapalı-seyrek bir küme ve X_2 , açık-yoğun bir kümedir. Üstelik X_1 alt uzayı, X uzayı ile eşyapılı olup X_2 , κ kardinaliteli kesikli bir alt uzayıdır. O halde kesikli $D(\kappa)$ uzayı ile tıkız $A(X)$ uzayının X_2 yoğun alt uzayı eşyapılı olduğundan, $A(X)$ uzayı $D(\kappa)$ uzayının (b) şikkında aranan özelliklere sahip bir tıkızlaşması olur.) (b) $\Rightarrow$ (a) apaçıktır, böylece (a) ve (b) önermelerinin eşdeğer olduğu anlaşılır.

(a) $\Rightarrow$ (d): X , (a) önermesindeki özelliklere sahip bir uzay olsun. Bu durumda $|D(\kappa)| = |X|$ olduğundan bire-bir ve örten bir $f : D(\kappa) \longrightarrow X$ fonksiyonu vardır. Kesikli bir uzaydan herhangi bir uzaya tanımlanan tüm fonksiyonlar sürekli olduğundan f fonksiyonu da süreklidir. O halde f fonksiyonunun $\beta D(\kappa)$ uzayına bir sürekli genişlemesi vardır. Kısacası sürekli bir $g : \beta D(\kappa) \longrightarrow X$ fonksiyonu, $g|_{D(\kappa)} = f$ olacak biçimde vardır. Her $x \in X$ için $F_x = g^{-1}(x) \cap (\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa))$ biçiminde tanımlansın. $\beta D(\kappa)$ bir T_4 uzayı olduğundan, bu uzayda her sıfır kümesi $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı bir kümedir. Böylece F_x kümelerinin $\beta D(\kappa)$ uzayında ikişerli ayrık $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı kümeler olduğu ve $\beta D(\kappa) \setminus D(\kappa) = \bigcup_{x \in X} F_x$ gerçekleştiği anlaşılır. Demek ki (a) önermesi doğru ise (d) geçerlidir.

(d) $\Rightarrow$ (c) çıkarsaması apaçık olup (c) $\Rightarrow$ (e) aşağıdaki gibi kanıtlanır: $cD(\kappa)$, $D(\kappa)$ uzayının (c) şikkındaki koşulları gerçekleyen bir tıkızlaşması olsun. Bu durumda $cD(\kappa)$ uzayında $cD(\kappa) \setminus D(\kappa) = \bigcup_{\xi \in \Xi} F_\xi$, $|\Xi| = \kappa$ olacak biçimde ikişerli ayrık $\mathcal{G}_\delta$ -türü kapalı F_ξ kümeleri vardır. Böylece her $\xi \in \Xi$ için, $cD(\kappa)$ uzayında, $G_n^{(\xi)}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) açık kümeleri

$$F_\xi = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^{(\xi)}, \quad G_{n+1}^{(\xi)} \subseteq G_n^{(\xi)} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

gerçekleşecek biçimde vardır. Her $\xi \in \Xi$ için $A_n^{(\xi)} = D(\kappa) - G_n^{(\xi)}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) biçiminde tanımlanırsa, $\{A_n^{(\xi)}\}_{n=1}^{\infty}$ ($\forall \xi \in \Xi$) dizileri (e) önermesindeki koşulları sağlar. Gerçekten,

her $\xi \in \Xi$ için

$$D(\kappa) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^{(\xi)} = D(\kappa) - \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n^{(\xi)} = D(\kappa) - F_{\xi} \supseteq D(\kappa) - (cD(\kappa) - D(\kappa)) = D(\kappa)$$

olduğundan (i) sağlanır. $\{n_{\xi} \in \mathbb{N} : \xi \in \Xi\}$ pozitif tam sayılardan oluşan herhangi bir indis ailesi olsun. Bu indis ailesi tarafından belirlenen $\{G_{n_{\xi}}^{(\xi)} : \xi \in \Xi\}$ ailesi, tıkız $cD(\kappa) \setminus D(\kappa)$ kümesi için bir açık örtülüş olduğundan, sonlu sayıda $\xi_1, \dots, \xi_k \in \Xi$ indisi

$$cD(\kappa) \setminus D(\kappa) \subseteq G_{n_{\xi_1}}^{(\xi_1)} \cup \dots \cup G_{n_{\xi_k}}^{(\xi_k)}$$

gerçeklenecek biçimde vardır. Böylece elde edilen

$$A_{n_{\xi_1}}^{(\xi_1)} \cap \dots \cap A_{n_{\xi_k}}^{(\xi_k)} = D(\kappa) - (G_{n_{\xi_1}}^{(\xi_1)} \cup \dots \cup G_{n_{\xi_k}}^{(\xi_k)}) = cD(\kappa) - (G_{n_{\xi_1}}^{(\xi_1)} \cup \dots \cup G_{n_{\xi_k}}^{(\xi_k)})$$

kümesi, $D(\kappa)$ uzayında tıkızdır. Dolayısıyla $|A_{n_{\xi_1}}^{(\xi_1)} \cap \dots \cap A_{n_{\xi_k}}^{(\xi_k)}| < \aleph_0$ olur ve böylece (ii)'nin sağlandığı anlaşılır. F_{ξ} kümelerinin ikişerli ayrık olmaları gerçeğinden yararlanarak (iii) koşulunun sağlandığı kolayca görülür. Son olarak (e) önermesi doğru olduğunda (a)'nın da doğru olduğu gösterilirse kanıt tamamlanmış olur.

(e) $\Rightarrow$ (a): Varsayım gereği doğru olan (e) önermesinde indis kümesi $\Xi = D(\kappa)$ biçiminde alınabilir. Ξ üzerinde her bir $\xi \in \Xi$ noktasının yerel tabanının

$$\mathcal{B}_{\xi} = \{\{\xi\} \cup (\Xi - (A_1^{(\xi)} \cup \dots \cup A_n^{(\xi)})) : n \in \mathbb{N}\}$$

biçiminde tanımlandığı uzay göz önüne alınsın. Bu uzay birinci sayılabilir tıkız bir T_2 uzayıdır. Gerçekten, Ξ uzayının birinci sayılabilir olduğu apaçıktır. Farklı $\xi_1, \xi_2 \in \Xi$ noktaları için, (i) koşulu nedeniyle, $\xi_1 \in A_n^{(\xi_1)}$ ve $\xi_2 \in A_m^{(\xi_2)}$ olacak biçimde $n, m \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. $n_i = \min\{n \in \mathbb{N} : \xi_i \in A_n^{(\xi_i)}\}$ ($i = 1, 2$) biçiminde tanımlansın. Öte yandan (iii) koşulu nedeniyle, bir $n_3 \in \mathbb{N}$ sayısı $A_1^{(\xi_1)} \cup \dots \cup A_{n_3}^{(\xi_1)} \cup A_1^{(\xi_2)} \cup \dots \cup A_{n_3}^{(\xi_2)} = \Xi$ gerçeklenecek biçimde vardır. Sonuç olarak $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ alınırsa, $\{\xi_i\} \cup (\Xi - (A_1^{(\xi_i)} \cup \dots \cup A_{n_0}^{(\xi_i)})) \in \mathcal{B}_{\xi_i}$ ($i = 1, 2$) olup

$$[\{\xi_1\} \cup (\Xi - (A_1^{(\xi_1)} \cup \dots \cup A_{n_0}^{(\xi_1)}))] \cap [\{\xi_2\} \cup (\Xi - (A_1^{(\xi_2)} \cup \dots \cup A_{n_0}^{(\xi_2)}))] = \emptyset$$

gerçeklenir, böylece Ξ uzayının bir T_2 uzayı olduğu anlaşılır. Ayrıca (ii) koşulundan yararlanarak Ξ uzayının tıkHz olduğu görülebilir. Demek ki (e) önermesi doğru ise (a) da doğru olur, böylece kanıt tamamlanır. ■

Teorem III.43 ve Sonuç III.32'den yararlanarak, eşdeğer (a), (b), (c), (d) ve (e) önermelerinden herhangi birisini (dolayısıyla hepsini) gerçekleyen sayılamaz *tek* kardinal sayının c olduğu anlaşılır.

Bu kısımda son olarak, Ayırma Aksiyomları'ndan yararlanarak, uzayların kardinaliteleri için bazı sınırlar verilecektir.

Teorem III.44 (*Hajnal-Juhász Teoremi*): *Herhangi bir T_2 uzayı X için $|X| \leq 2^{c(X) \cdot \chi(X)}$ geçerlidir. Özel olarak her birinci sayılabilir, sayılabilir zincir koşulunu gerçekleyen Hausdorff uzayı en fazla $2^{\aleph_0}$ noktalıdır.*

Kanıt. $c(X) \cdot \chi(X) = \kappa$ olsun. Her $x \in X$ noktasının $|\mathcal{B}_x| \leq \kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}_x$ yerel tabanı göz önüne alınsın. Teorem III.42 de yapılanlara benzer biçimde, sonlu ötesi tümevarımla, X uzayında alt kümelerin bir $\{A_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ ailesi ile açık küme ailelerinin bir $\{\mathcal{V}_\alpha : 0 < \alpha < \kappa^+\}$ ailesi aşağıdaki koşullar gerçekleşecek biçimde tanımlanabilir:

- (1) $|A_\alpha| \leq 2^\kappa$ ($0 \leq \alpha < \kappa^+$),
- (2) $\mathcal{V}_\alpha = \bigcup \{\mathcal{B}_x : x \in \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta\}$ ($0 < \alpha < \kappa^+$),
- (3) Her $\gamma < \kappa$ için $\mathcal{G}_\gamma \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_\alpha)$ olmak üzere, eğer $X \neq \bigcup_{\gamma < \kappa} (\overline{\bigcup \mathcal{G}_\gamma})$ ise $A_\alpha - \bigcup_{\gamma < \kappa} (\overline{\bigcup \mathcal{G}_\gamma}) \neq \emptyset$ olur.

$A = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} A_\alpha$ yazılsın. Amaç $X = A$ olduğunu göstermektir. Eğer $X - A \neq \emptyset$ olsaydı, en az bir $x_0 \in X - A$ elemanı var olurdu. x_0 noktasının $\mathcal{B}_{x_0} = \{\mathcal{B}_{x_0, \gamma}\}_{\gamma < \kappa}$ yerel tabanı aracılığıyla

$$\mathcal{W}_\gamma = \{B \in \bigcup_{x \in A} \mathcal{B}_x : B \cap \mathcal{B}_{x_0, \gamma} = \emptyset\} \quad (\forall \gamma < \kappa)$$

açık küme aileleri tanımlansın. $(\bigcup \mathcal{W}_\gamma) \cap B_{x_0, \gamma} = \emptyset$ gerçekleştiğinden $x_0 \notin \overline{\bigcup \mathcal{W}_\gamma}$ ($\forall \gamma < \kappa$) olduğu anlaşılır. X bir T_2 uzayı olduğundan $A \subseteq \bigcup_{\gamma < \kappa} (\bigcup \mathcal{W}_\gamma)$ gerçekleştiği kolayca görülür. Öte yandan Önerme II.1 nedeniyle, her $\gamma < \kappa$ ordinali için bir $\mathcal{G}_\gamma \subseteq \mathcal{W}_\gamma$ alt ailesi

$$\bigcup \mathcal{W}_\gamma \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{G}_\gamma} \text{ ve } |\mathcal{G}_\gamma| \leq \kappa$$

koşulları gerçekleşecek biçimde vardır. Bu durumda

$$A \subseteq \bigcup_{\gamma < \kappa} (\bigcup \mathcal{W}_\gamma) \subseteq \bigcup_{\gamma < \kappa} (\overline{\bigcup \mathcal{G}_\gamma})$$

olur. Her $\gamma < \kappa$ için $|\mathcal{G}_\gamma| \leq \kappa$ olduğundan $\left| \bigcup_{\gamma < \kappa} \mathcal{G}_\gamma \right| \leq \kappa$ geçerlidir. $\bigcup_{\gamma < \kappa} \mathcal{G}_\gamma = \{V_\gamma : \gamma < \kappa\}$ yazılırsa, her $\gamma < \kappa$ için $V_\gamma \in \bigcup_{\gamma < \kappa} \mathcal{G}_\gamma \subseteq \bigcup_{x \in A} \mathcal{B}_x$ nedeniyle, uygun bir $x_\gamma \in A$ ($= \bigcup_{\alpha < \kappa^+} A_\alpha$) elemanı ve $\alpha_\gamma < \kappa^+$ ordinali için $x_\gamma \in A_{\alpha_\gamma}$ ve $V_\gamma \in \mathcal{B}_{x_\gamma}$ olur. $\sup_{\gamma < \kappa} \alpha_\gamma < \mu_0 < \kappa^+$ gerçekleşecek biçimde bir μ_0 ordinali var olduğundan, her $\gamma < \kappa$ için $\alpha_\gamma < \mu_0$ ve sonuçta $x_\gamma \in A_{\alpha_\gamma} \subseteq \bigcup_{\beta < \mu_0} A_\beta$ ve $V_\gamma \in \mathcal{B}_{x_\gamma} \subseteq \bigcup \{\mathcal{B}_x : x \in \bigcup_{\beta < \mu_0} A_\beta\} = \mathcal{V}_{\mu_0}$ ve böylelikle $\mathcal{G}_\gamma \subseteq \mathcal{V}_{\mu_0}$ ($\forall \gamma < \kappa$) bulunur. Sonuç olarak $x_0 \in X - \bigcup_{\gamma < \kappa} (\overline{\bigcup \mathcal{G}_\gamma}) \neq \emptyset$ olduğundan, (3) koşulu gereği $A_{\mu_0} - \bigcup_{\gamma < \kappa} (\overline{\bigcup \mathcal{G}_\gamma}) \neq \emptyset$ olmalıdır; ancak bu durum $A_{\mu_0} \subseteq \bigcup_{\alpha < \kappa^+} A_\alpha = A \subseteq \bigcup_{\gamma < \kappa} (\overline{\bigcup \mathcal{G}_\gamma})$ gerçeği ile çelişir. Ulaşılan bu çelişki nedeniyle $X = A = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} A_\alpha$ olur ve böylece $|X| = \left| \bigcup_{\alpha < \kappa^+} A_\alpha \right| \leq 2^\kappa$ bulunur. ■

X bir T_2 uzayı olmak üzere, $|X|$ için $2^{L(X) \cdot \chi(X)}$ ve $2^{c(X) \cdot \chi(X)}$ sınırlarından hangisinin daha keskin olduğu uzaya bağlı olarak değişir. Örneğin X uzayı olarak MN -düzlemi alınırsa, $L(X) = e(X) = s(X) = |X| = 2^{\aleph_0}$ ve $c(X) = d(X) = \chi(X) = \aleph_0$ olur. Böylece

$$|X| = 2^{c(X) \cdot \chi(X)} = 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{L(X) \cdot \chi(X)}$$

bulunur. Öte yandan X sözlük sıralı birim kare uzayı olarak alınırsa, ($X = [0, 1] \times [0, 1]$) birim karesi üzerinde, ancak ve yalnız *i*) $x_1 < x_2$ ya da *ii*) $x_1 = x_2$ ve $y_1 < y_2$ bağdaşmaz koşullarından birisi geçerli olduğunda $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ yazarak tanımlanan **sözlük sıralaması** göz önüne alınsın. Bu, iyi bilindiği gibi bir tümel sıralamadır. X

üzerinde bu sıralama bağıntısının belirlediği sıralama topolojisi tanımlansın. Böylece elde edilen X uzayına **sözlük sıralı birim kare uzayı** denilir. (bkz. [3] veya [4]))

$L(X) = \chi(X) = \aleph_0$ ve $c(X) = |X| = 2^{\aleph_0}$ geçerlidir. Böylece

$$|X| = 2^{L(X) \cdot \chi(X)} = 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} = 2^{c(X) \cdot \chi(X)}$$

olur.

Teorem III.45 (Hajnal-Juhász): Herhangi bir T_1 uzayın X için $|X| \leq 2^{s(X) \cdot \psi(X)}$ geçerlidir.

Kanıt. $s(X) \cdot \psi(X) = \kappa$ olsun. Her $x \in X$ noktasının $|\mathcal{G}_x| \leq \kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{G}_x$ sözde tabanı göz önüne alınsın. Yine Teorem III.42'nin kanıtında yapılanlara benzer biçimde, sonlu ötesi tümevarım kullanılarak, $\{A_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ alt kümeler ailesi ile $\{\mathcal{V}_\alpha : 0 < \alpha < \kappa^+\}$ açık küme ailelerinin ailesi aşağıdaki koşullar gerçekleşecek biçimde tanımlanabilir:

$$(1) |A_\alpha| \leq 2^\kappa \ (\forall \alpha < \kappa^+),$$

$$(2) \mathcal{V}_\alpha = \bigcup \{\mathcal{G}_x : x \in \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta\} \ (0 < \alpha < \kappa^+),$$

$$(3) \text{ Eğer } \mathcal{U} \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_\alpha) \text{ ve } B_\gamma \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta) \ (\forall \gamma < \kappa) \text{ için } X \neq \bigcup \mathcal{U} \cup \bigcup_{\gamma < \kappa} \overline{B_\gamma} \text{ ise}$$

$$A_\alpha - (\bigcup \mathcal{U} \cup \bigcup_{\gamma < \kappa} \overline{B_\gamma}) \neq \emptyset \text{ olur.}$$

$A = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} A_\alpha$ olmak üzere, amaç $X = A$ olduğunu göstermektir. Eğer $X - A \neq \emptyset$ olsaydı, en az bir $x_0 \in X - A$ noktası var olurdu. $\psi(X) \leq \kappa$ olduğundan, kolayca görülebilir ki $X - \{x_0\} = \bigcup_{\gamma < \kappa} H_\gamma$ gerçekleşecek biçimde, X uzayında, kapalı H_γ ($\forall \gamma < \kappa$) kümeleri vardır. $K_\gamma = A \cap H_\gamma$ ($\forall \gamma < \kappa$) yazılırsa, her $x \in K_\gamma$ için $x \neq x_0$ olduğundan bir $G_x \in \mathcal{G}_x$ üyesi $x_0 \notin G_x$ olacak biçimde vardır. Açıktır ki $\{G_x : x \in K_\gamma\}$ ailesi, K_γ kümesinin bir açık örtülüşüdür. O halde Lemma II.9 nedeniyle, her $\gamma < \kappa$ için $B_\gamma, C_\gamma \subseteq K_\gamma$ alt kümeleri

$$K_\gamma \subseteq \overline{B_\gamma} \cup (\bigcup_{x \in C_\gamma} G_x), \quad |B_\gamma| \leq \kappa \text{ ve } |C_\gamma| \leq \kappa$$

koşulları gerçekleşecek biçimde vardır. $\mathcal{U} = \{G_x : x \in \bigcup_{\gamma < \kappa} C_\gamma\}$ alınırsa

$$A \subseteq \bigcup_{\gamma < \kappa} \mathcal{U} \cup \bigcup_{\gamma < \kappa} \overline{B_\gamma} \text{ ve } x_0 \notin \left(\bigcup_{\gamma < \kappa} \mathcal{U} \cup \bigcup_{\gamma < \kappa} \overline{B_\gamma} \right)$$

olur. Öte yandan bir μ_0 ordinali, $B_\gamma \cup C_\gamma \subseteq \bigcup_{\beta < \mu_0} A_\beta$ ($\forall \gamma < \kappa$) olacak biçimde vardır. Sonuç olarak $\mathcal{U} \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_{\mu_0})$ ve $B_\gamma \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\bigcup_{\beta < \mu_0} A_\beta)$ ($\forall \gamma < \kappa$) olup $X - \left(\bigcup_{\gamma < \kappa} \mathcal{U} \cup \bigcup_{\gamma < \kappa} \overline{B_\gamma} \right) \neq \emptyset$ gerçekleştiğinden, (3) koşulu nedeniyle, $A_{\mu_0} - \left(\bigcup_{\gamma < \kappa} \mathcal{U} \cup \bigcup_{\gamma < \kappa} \overline{B_\gamma} \right) \neq \emptyset$ olmalıdır; ancak bu durum $A_{\mu_0} \subseteq \bigcup_{\alpha < \kappa^+} A_\alpha = A \subseteq \left(\bigcup_{\gamma < \kappa} \mathcal{U} \cup \bigcup_{\gamma < \kappa} \overline{B_\gamma} \right)$ gerçeğiyle çelişir. Elde edilen bu çelişki nedeniyle, $X = A$ olur ve böylece $|X| = \left| \bigcup_{\alpha < \kappa^+} A_\alpha \right| \leq 2^\kappa$ bulunur. ■

Sonuç III.36 *Eğer X bir T_2 uzayı ise $|X| \leq 2^{hL(X)}$ geçerlidir. Özel olarak her kalıtımsal Lindelöf T_2 uzayının kardinalitesi en fazla $2^{\aleph_0}$ dır.*

Kanıt. $s(X) = hc(X) \leq hL(X)$ ve Teorem II.8(f)'de görüldüğü gibi $\psi(X) \leq hL(X)$ olduğundan, $|X| \leq 2^{s(X) \cdot \psi(X)} \leq 2^{hL(X)}$ gerçekleşir. ■

Sonuç III.37 *Herhangi bir X T_2 uzayı için $|X| \leq 2^{2^{s(X)}}$ geçerlidir.*

Kanıt. Sonuç II.2'den kolayca görülür. ■

Erdős-Rado Lemması'ndan yararlanarak Teorem III.44 ve Teorem III.45'in çok daha zarif ispatları verilebilir. Örneğin Hajnal-Juhász Teoremi (Teorem III.45 benzer biçimde kanıtlanır.) şu şekilde kanıtlanabilir: X bir T_2 uzayı olmak üzere, $c(X) \cdot \chi(X) = \kappa$ olsun. Bu durumda $|X| > 2^\kappa$ gerçekleştiği varsayalım. Her $x \in X$ noktasındaki yerel taban $\mathcal{B}_x = \{B_{x,\alpha}\}_{\alpha < \kappa}$ ile gösterilmek üzere, her $\alpha, \beta < \kappa$ ordinal sayı çiftine ($\alpha \neq \beta$ olmak zorunda değildir) karşılık

$$V(x, \{\alpha, \beta\}) = B_{x,\alpha} \cap B_{x,\beta} \text{ ve } P(\{\alpha, \beta\}) = \{\{x, y\} \in [X]^2 : V(x, \{\alpha, \beta\}) \cap V(y, \{\alpha, \beta\}) = \emptyset\}$$

kümeleri tanımlansın. X bir T_2 uzayı olduğundan, kolayca görülür ki $[X]^2 \subseteq \bigcup \{P(\{\alpha, \beta\}) : \alpha, \beta < \kappa\}$ gerçekleşir. O halde Erdős-Rado Lemması nedeniyle $|A| > \kappa$ gerçekleyen bir $A \subseteq X$ alt kümesi ile $\alpha_0, \beta_0 < \kappa$ ordinal sayı çifti, $[A]^2 \subseteq P(\{\alpha_0, \beta_0\})$ olacak

biçimde vardır. Sonuçta elde edilen $\mathcal{V} = \{V(x, \{\alpha_0, \beta_0\}) : x \in A\}$ ailesi X uzayında bir gözenekli aile olur üstelik $|\mathcal{V}| > \kappa$ gerçekleşir; ancak bu durumda $\kappa < |\mathcal{V}| \leq c(X) \leq \kappa$ çelişkisi bulunur. Ulaşılan bu çelişki nedeniyle $|X| \leq 2^\kappa$ olduğu anlaşılır.

Teorem III.46 *Herhangi bir T_1 uzayı X için $|X| \leq 2^{e(X) \cdot \Delta(X)}$ geçerlidir.*

Kanıt. $e(X) \cdot \Delta(X) = \kappa$ olsun. Bu durumda $|X| > 2^\kappa$ olduğu varsayılırsa aşağıdaki gibi bir çelişki bulunur: X uzayının açık örtülüşlerinin $\{x\} = \bigcap_{\alpha < \kappa} st(x, \mathcal{V}_\alpha)$ ($\forall x \in X$) koşulunu gerçekleyen bir $\{\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ ailesi göz önüne alınsın. Açıktır ki $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için en az bir $\alpha_0 < \kappa$ ordinali, $x \notin st(y, \mathcal{V}_{\alpha_0})$ (denk olarak $y \notin st(x, \mathcal{V}_{\alpha_0})$) olacak biçimde vardır. Böylece

$$P_\alpha = \{\{x, y\} \in [X]^2 : y \notin st(x, \mathcal{V}_\alpha)\} \quad (\forall \alpha < \kappa)$$

biçiminde tanımlanan kümeler için $[X]^2 \subseteq \bigcup_{\alpha < \kappa} P_\alpha$ gerçekleşir. Sonuç olarak Erdős-Rado Lemması nedeniyle $|D| > \kappa$ ve $[D]^2 \subseteq P_{\mu_0}$ koşulları gerçekleşecek biçimde bir $D \subseteq X$ alt kümesi ve bir $\mu_0 < \kappa$ ordinali var olur; ancak bu durumda D kümesi, X uzayında, kapalı ve kesikli olacağından $\kappa < |D| \leq e(X) \leq \kappa$ çelişkisi bulunur. Demek ki $|X| \leq 2^\kappa$ olur. ■

Aşağıdaki teoremde, X bir T_4 uzayı ise $|X|$ için $2^{c(X) \cdot \chi(X)}$ ve $2^{L(X) \cdot \chi(X)}$ sınırlarından daha iyi (daha keskin) bir sınır görülecektir.

Teorem III.47 (Bell-Ginsburg-Woods Teoremi): *Herhangi bir T_4 uzayı X için $|X| \leq 2^{wc(X) \cdot \chi(X)}$ gerçekleşir.*

Kanıt. $wc(X) \cdot \chi(X) = \kappa$ olsun. Her $x \in X$ noktasının $|\mathcal{B}_x| \leq \kappa$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}_x$ yerel tabanı göz önüne alınsın. X uzayında artan kapalı kümelerin $\{H_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ ailesi ile $\{\mathcal{V}_\alpha : 0 < \alpha < \kappa^+\}$ açık küme ailelerinin ailesi, tıpkı Teorem III.42'nin

kanıtında olduğu gibi aşağıdaki koşullar gerçekleştirilecek biçimde tanımlanabilir:

- (1) $|H_\alpha| \leq 2^\kappa$ ($0 \leq \alpha < \kappa^+$),
- (2) $\mathcal{V}_\alpha = \bigcup \{\mathcal{B}_x : x \in \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta\}$ ($0 < \alpha < \kappa^+$),
- (3) Bir $\mathcal{U} \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_\alpha)$ için $X \neq \bigcup \mathcal{U}$ ise $H_\alpha - \overline{\bigcup \mathcal{U}} \neq \emptyset$.

$H = \bigcup_{\alpha < \kappa^+} H_\alpha$ yazılırsa, kolayca görülebilir ki H kümesi kapalıdır. Gerçekten, herhangi bir $x \in \overline{H}$ noktası göz önüne alınsın. Bu noktanın $\mathcal{B}_x = \{B_{x,\gamma}\}_{\gamma < \kappa}$ yerel tabanı için $B_{x,\gamma} \cap H = B_{x,\gamma} \cap \bigcup_{\alpha < \kappa^+} H_\alpha \neq \emptyset$ ($\forall \gamma < \kappa$) olduğundan, her $\gamma < \kappa$ ordinali için $B_{x,\gamma} \cap H_{\alpha_\gamma} \neq \emptyset$ gerçekleştirilecek biçimde bir $\alpha_\gamma < \kappa^+$ ordinali vardır. $cf(\kappa^+) = \kappa^+$ olduğundan $\sup_{\gamma < \kappa} \alpha_\gamma < \mu_0 < \kappa^+$ gerçekleyen bir μ_0 ordinali vardır. Böylece kapalı H_α kümeleri artan ($\beta < \gamma$ ise $H_\beta \subseteq H_\gamma$) olduğundan $B_{x,\gamma} \cap H_{\mu_0} \neq \emptyset$ ($\forall \gamma < \kappa$) gerçekleşir, dolayısıyla $x \in \overline{H_{\mu_0}} = H_{\mu_0} \subseteq \bigcup_{\alpha < \kappa^+} H_\alpha$ gerçekleşir ve böylece $\overline{H} \subseteq \bigcup_{\alpha < \kappa^+} H_\alpha = H \subseteq \overline{H}$ bulunur. Eğer $X = H$ olduğu gösterilirse kanıt tamamlanmış olur. Eğer $X \neq H$ olsaydı, en az bir $x_0 \in X - H$ noktası var olur. Üstelik X bir düzenli uzay olduğundan bu uzayda bir V açık kümesi, $H \subseteq V$ ve $x_0 \notin \overline{V}$ koşulları gerçekleştirilecek biçimde vardır. $\mathcal{G} = \{B \in \mathcal{B}_x : x \in H, B \subseteq V\}$ biçiminde tanımlanan $\mathcal{G}$ ailesi için kolayca görülür ki $H \subseteq \bigcup \mathcal{G}$ ve $x_0 \notin \overline{\bigcup \mathcal{G}}$ olur. O halde X uzayı normal olduğundan, $H \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq \bigcup \mathcal{G}$ gerçekleştirilecek biçimde açık bir W kümesi vardır. Bu durumda $\mathcal{G} \cup \{X - \overline{W}\}$ ailesi X uzayının bir açık örtülüşüdür. $wc(X) \leq \kappa$ nedeniyle bir $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$ alt ailesi

$$X = (\overline{\bigcup \mathcal{U}}) \cup \overline{(X - \overline{W})} \text{ ve } |\mathcal{U}| \leq \kappa$$

koşulları sağlanacak biçimde vardır, üstelik $H \cap \overline{(X - \overline{W})} = \emptyset$ olduğundan $H \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{U}}$ gerçekleşir. Öte yandan bir $\mu_0 < \kappa^+$ ordinali için $\mathcal{U} \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{V}_{\mu_0})$ ve $X \neq \bigcup \mathcal{U}$ olduğundan, (3) koşulu nedeniyle $\emptyset \neq H_{\mu_0} - \overline{\bigcup \mathcal{U}} \subseteq H - \overline{\bigcup \mathcal{U}} = \emptyset$ çelişkisi bulunur. Ulaşılan bu çelişki nedeniyle $X = H$ olduğu anlaşılır. ■

IV SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bu tezde çağdaş Genel Topoloji'nin kardinal değişmezler gibi hızla gelişim gösteren bir alanına giriş yapılmıştır. Topolojide bilinen bazı ünlü sonuçlar kardinal değişmezler aracılığıyla genelleştirilebilir. Örneğin her ikinci sayılabilir uzayın bir Lindelöf uzayı olduğunu söyleyen ünlü sonuç, herhangi bir X uzayı için geçerli olan " $L(X) \leq w(X)$ " eşitsizliğinin kolay bir sonucudur. Genel bilgiler bölümünde en çok karşılaşılan kardinal değişmezler arasındaki temel bağıntı ve eşitsizlikler verilmiştir. Bir X topolojik uzayının kardinal değişmezlerinden yararlanarak $|X|$, $o(X)$ ve $|C(X)|$ kardinal sayıları için sınırlar bulunur. Elde edilen sınırlar uzayın topolojik özellikleri hakkında bilgi verir. Örneğin herhangi bir T_0 uzayı X için $|X| \leq o(X) \leq 2^{w(X)}$ olduğundan, $2^{\aleph_0}$ dan fazla sayıda noktası bulunan bir T_0 uzayının ikinci sayılabilir olmadığı ve bu uzayda $2^{\aleph_0}$ dan fazla sayıda açık küme bulunduğu anlaşılır. $(D(2))^{2^{\aleph_0}}$ çarpım uzayı, son söylenen özelliklere sahip bir uzaydır.

Kısım III.1 de görüldüğü gibi bir X tıkHz Hausdorff uzayı için

$$(1) \quad w(X) = nw(X) \leq |X|$$

geçerlidir. Bu sonuçtan yararlanarak, eğer bir Y tıkHz Hausdorff uzayı bir X uzayının sürekli ve örten bir fonksiyon altında görüntüsüyse $w(Y) \leq w(X)$ olduğu kolayca kanıtlanır. Gerçekten, $f : X \rightarrow Y$ sürekli ve örten bir fonksiyon olmak üzere, X uzayının $|\mathcal{B}| = w(X)$ gerçekleyen bir $\mathcal{B}$ tabanı aracılığıyla tanımlanan $\{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ ailesi, Y uzayı için bir ağ tanımlar, böylece $w(Y) = nw(Y) \leq |\{f(B) : B \in \mathcal{B}\}| \leq w(X)$ bulunur. Bu iddia tıkHz *olmayan* Y uzayları için doğru olmak zorunda değildir. Gerçekten,

$$Y = \{y_0, y_1, y_2, \dots\} = \{y_0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \quad (|Y_n| = \aleph_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}), Y_n \cap Y_m = \emptyset \quad (n \neq m))$$

kümesi üzerinde, y_0 noktasındaki yerel tabanı

$$\mathcal{B}_{y_0} = \{\{y_0\} \cup \bigcup_{n=N}^{\infty} (Y_n - S_n) : N \in \mathbb{N}, S_n \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(Y_n) (\forall n \geq N)\}$$

ve her bir $y \in Y \setminus \{y_0\}$ noktasındaki yerel tabanı $\mathcal{B}_y = \{\{y\}\}$ biçiminde tanımlanan **Arens-Fort uzayı** göz önüne alınsın. Y uzayının birinci sayılabilir *olmayan* (dolayısıyla ikinci sayılabilir olmayan) bir T_5 uzayı olduğu bilinmektedir. (bkz. [3]) O halde $|Y| = \aleph_0 < w(Y)$ olduğundan, (1) bağıntısından yararlanarak Y uzayının tıkız olmadığı anlaşılır. (Y uzayının tıkız olmadığı yerel taban kümelerinin tanımından da kolayca görülür.) Bu durumda $X = D(\aleph_0)$ alınırsa, $g(n) = y_n$ ($\forall n < \aleph_0$) biçiminde tanımlanan $g : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu sürekli ve örtendir; fakat $w(X) = \aleph_0 < w(Y)$ gerçekleşir. Y uzayı olarak Örnek III.8 deki uzay alınarakta benzer bir örnek yapılabilir.

Metriklenebilir bir uzay üzerinde tanımlanan kardinal değişmezlerin temel özellikleri Teorem III.10 da görülmüştü. Bu teoremin (c) şıkında sonsuz metriklenebilir herhangi bir X uzayı için $w(X) = L(X)$ olduğu kanıtlanmıştır. Böylece her ikinci sayılabilir T_3 uzayının metriklenebilir olduğunu söyleyen Urysohn Metriklenebilme Teoremi'nden yararlanarak şu ünlü sonuç kolayca gözlenir: Bir tıkız T_2 uzayının metriklenebilmesi için gerek ve yeter koşul ikinci sayılabilir olmasıdır. Herhangi bir X uzayı için $C(X)$ ve $C^*(X)$ uzaylarının metriklenebilir olduğu bilinmektedir. Ayrıca W.W. Comfort ve A.Hager [13] makalesinde herhangi bir X uzayı için $d(C(X)) = d(C^*(X))$ olduğunu kanıtladılar. O halde Teorem III.10 nedeniyle herhangi bir X uzayı için $C(X)$ ve $C^*(X)$ uzaylarının şu ana kadar tanımladığımız kardinal değişmezlerini belirlemek için $d(C^*(X))$ sayısını bulmak yeterli olur. Bazı X uzayları için $d(C^*(X))$ sayısını bulmak kolaydır, örneğin κ bir sonsuz kardinal sayı olmak üzere, $X = D(\kappa)$ kesikli uzayı için $d(C^*(X)) = 2^\kappa$ olduğu kolayca görülür. Gerçekten, $C^*(X)$ uzayının $d(C^*(X)) = |\mathcal{S}|$ gerçekleyen yoğun bir $\mathcal{S}$ kümesi göz önüne alınsın. Herhangi bir $A \subseteq X$ alt kümesi için $\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$ karakteristik fonksiyonu sürekli ve $B_{\chi_A}(\frac{1}{2}) \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$ olduğundan, Seçme Aksiyomu yardımıyla uygun bir $f_A \in B_{\chi_A}(\frac{1}{2}) \cap \mathcal{S}$ noktası seçilirse,

$\varphi(A) = f_A$ biçiminde tanımlanan $\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{S}$ fonksiyonu bire-bir olur; çünkü $A \neq B$ gerçekleyen $A, B \subseteq X$ alt kümeleri için $\varphi(A) = \varphi(B)$ olsaydı

$$1 = \rho^*(\chi_A, \chi_B) \leq \rho^*(\chi_A, f_A) + \rho^*(f_A, f_B) + \rho^*(f_B, \chi_B) < \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$$

çelişkisi bulunurdu. Ulaşılan bu çelişki nedeniyle φ fonksiyonunun bire-bir olduğu anlaşılır ve böylece

$$2^\kappa = |\mathcal{P}(X)| \leq |\mathcal{S}| = d(C^*(X)) \leq |C^*(X)| \leq 2^{d(X)} = 2^\kappa$$

bulunur.

Her X uzayı için $d(C^*(X))$ sayısını hesaplamak bu kadar kolay olmaz. Eğer X bir Tikhonov uzayı ise $d(C^*(X))$ sayısı Smirnov Teoremi'nden yararlanarak ta bulunabilir. Bu olağanüstü teoreme göre $d(C^*(X)) = w(\beta X)$ eşitliği geçerlidir. Böylece sonsuz $D(\kappa)$ kesikli uzayı için Teorem III.33'den yararlanarak $d(C^*(D(\kappa))) = w(\beta D(\kappa)) = 2^\kappa$ bulunur. Smirnov Teoremi $d(C^*(X))$ sayısının bulunmasının zor olduğu X Tikhonov uzaylarında oldukça yararlıdır. Bilindiği gibi alışlagelen sıralama topolojisiyle donatılan $[0, \omega_1]$ ve $[0, \omega_0]$ sıralama uzaylarının $T = [0, \omega_1] \times [0, \omega_0]$ çarpım uzayına **Tikhonov kalası** ve $X = [0, \omega_1] \times [0, \omega_0] \setminus \{(\omega_1, \omega_0)\} \subseteq T$ alt uzayına da **çentikli Tikhonov kalası** denilir. Ünlü Tikhonov Genişleme Teoremi nedeniyle (bkz.[3]) çentikli Tikhonov kalasında tanımlı ve sürekli her gerçel değerli fonksiyonun *tıkız* Tikhonov kalasına sürekli genişlemesi vardır dolayısıyla $\beta X = T$ olur. Burada $d(C^*(X))$ sayısının doğrudan hesaplanması zordur; ancak Smirnov Teoremi'nden yararlanarak kolayca

$$d(C^*(X)) = w(\beta X) = w(T) = w([0, \omega_1] \times [0, \omega_0]) = \aleph_1 \vee \aleph_0 = \aleph_1$$

bulunur.

Erdős-Tarski Teoremi'nde "Herhangi bir X uzayında $c(X)$ kardinaliteli bir gözenekli aile var mıdır?" sorusuna cevap verilmiştir. Bu ünlü teoreme göre $c(X)$ güçsüz erişilmez kardinal sayı değilse veya X uzayı metriklenebilirse, X uzayında $c(X)$

kardinaliteli gözenekli aile vardır. Benzer şekilde Teorem III.19 da saçılım sayısı bir tekil güçlü kardinal sayı olan bir X Hausdorff uzayında $s(X)$ kardinaliteli kesikli alt kümenin bulunduğu kanıtlandı. Bir X uzayının sözde tıkalılık sayısı $p(X)$ de X uzayının yerel sonlu açık kümeler ailelerinin kardinal sayılarının supremumu olarak tanımlandığından akla şu soru gelir: Herhangi bir X uzayında $p(X)$ kardinaliteli yerel sonlu açık kümeler ailesi var mıdır? X uzayı metriklenebilirse cevabın "olumlu" olması beklenir; ancak her metriklenebilir X uzayının $p(X)$ kardinaliteli yerel sonlu açık kümeler ailesi bulunmak zorunda *değildir*. Gerçekten, Örnek III.3 de tanımlanan (E, ρ) metrik uzayında, Teorem III.10 nedeniyle $p(E) = w(E) = \mu$ olmasına karşın bu uzayda her yerel sonlu $\mathcal{U}$ açık kümeler ailesi için $2^{|\mathcal{U}|} < 2^{w(E)}$ yani $|\mathcal{U}| < w(E) = p(E)$ gerçekleşir. Yine sözde tıkalılık sayısı güçsüz erişilmez kardinal sayı olan (varsa) her X uzayında $p(X)$ kardinaliteli yerel sonlu açık kümeler ailesi bulunmak zorunda *değildir*. Örneğin κ bir güçsüz erişilmez kardinal sayı ise kesikli $D(\kappa)$ uzayında κ kardinaliteli yerel sonlu açık kümeler ailesi vardır; fakat Örnek III.4 de tanımlanan X uzayı için $p(X) = \kappa$ olmasına karşın bu uzayda κ kardinaliteli yerel sonlu açık kümeler ailesi yoktur; çünkü böyle bir aile olsaydı, Lemma III.3 nedeniyle X uzayında κ kardinaliteli gözenekli aile bulunurdu; ancak Örnek III.4 de görüldüğü gibi bu uzayda tüm gözenekli ailelerin kardinalitesi $< \kappa$ dır.

Sözde tıkalılık sayısı $p(X)$, tekil güçlü kardinal sayı olan veya $cf(p(X)) = \aleph_0 < p(X)$ koşulunu sağlayan her X uzayının $p(X)$ kardinaliteli yerel sonlu açık kümeler ailesinin bulunmasının *gerekmediği* Örnek III.3 den kolayca görülür.

Kısım III.4 de kanıtlanan ve çarpım uzaylarının yoğunluk sayısı hakkında bilgi veren Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi, topolojide birçok aykırı örneğin tanımlanması açısından oldukça önemlidir. Örneğin bu teoremden yararlanarak sayılabilir noktalı olan ancak hiçbir noktasının sayılabilir yerel tabanı bulunmayan bir uzay Örnek III.8 de tanımlanmıştır. Yine bu teoremden yararlanarak ayrılabilir olan ancak Lindelöf

olmayan ve Lindelöf olan ancak ayrılabilir olmayan uzaylar tanımlanabilir. Örneğin $X = (D(\aleph_0))^{\aleph_1}$ çarpım uzayı bir ayrılabilir uzaydır; ancak bu T_3 uzayı normal *olmadığından* bir Lindelöf uzayı değildir. $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ olduğundan, Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi nedeniyle X uzayının ayrılabilir olduğu apaçıktır. X uzayının normal olmadığını kanıtlamak amacıyla

$$A_i = \{\{j_\alpha\}_{\alpha < \aleph_1} \in X : j \neq i \text{ ise en fazla bir } \alpha < \aleph_1 \text{ sayısı için } j_\alpha = j\} \quad (i = 1, 2)$$

kümeleri tanımlansın. A_i ($i = 1, 2$) kümesinin tanımı gereği her $\{j_\alpha\}_{\alpha < \aleph_1} \in A_i$ noktasının sayılabilir tanesi dışında tüm terimleri i sayısıdır. A_1 ve A_2 kümeleri X uzayında ayrık kapalı kümelerdir; fakat X uzayında bu kümeleri kapsayan ayrık açık kümeler *yoktur*. Gerçekten, $x_1 \in X$ tüm terimleri "1" olan nokta ise $x_1 \in A_1$ olur. A_1 kümesini kapsayan herhangi bir açık U kümesi göz önüne alınsın. Herhangi bir $S \subseteq W(\aleph_1)$ alt kümesi için $\pi_S : X \longrightarrow \prod_{\alpha \in S} (D(\aleph_0))_\alpha$ fonksiyonu $\pi_S(\{j_\alpha\}_{\alpha < \aleph_1}) = \{j_\alpha\}_{\alpha \in S}$ gerçekleşecek biçimde tanımlansın. Bu durumda $x_1 \in U$ olduğundan

$$\pi_{S_1}^{-1}(\pi_{S_1}(x_1)) = \{1\}_{\alpha_1} \times \dots \times \{1\}_{\alpha_{n_1}} \times \prod_{\alpha \in W(\aleph_1) \setminus S_1} (D(\aleph_0))_\alpha \subseteq U$$

gerçeklenecek biçimde sonlu bir $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}\} \subseteq W(\aleph_1)$ alt kümesi vardır.

Böylece $x_2 = \{x_{2,\alpha}\}_{\alpha < \aleph_1}$ noktası,

$$\pi_{\alpha_n}(x_2) = x_{2,\alpha_n} = n \quad (n = 1, 2, \dots, n_1) \text{ ve } \pi_\alpha(x_2) = x_{2,\alpha} = 1 \quad (\forall \alpha \in W(\aleph_1) \setminus S_1)$$

biçiminde tanımlanırsa, açıktır ki $x_2 \in A_1 \subseteq U$ olur. U kümesi açık olduğundan, bu kez

$S_1 \subseteq S_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}, \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{n_2}\}$ gerçekleyen sonlu bir $S_2 \subseteq W(\aleph_1)$ alt kümesi,

$$\pi_{S_2}^{-1}(\pi_{S_2}(x_2)) = \{1\}_{\alpha_1} \times \{2\}_{\alpha_2} \times \dots \times \{n_1\}_{\alpha_{n_1}} \times \{1\}_{\alpha_{n_1+1}} \times \dots \times \{1\}_{\alpha_{n_2}} \times \prod_{\alpha \in W(\aleph_1) \setminus S_2} (D(\aleph_0))_\alpha \subseteq U$$

gerçeklenecek biçimde vardır. Tümevarımla x_n ($\forall n \in \mathbb{N}$) noktalarının ve $S_n \subseteq S_{n+1}$

($\forall n \in \mathbb{N}$) gerçekleyen S_n kümelerinin tanımlanması süreci tamamlanır. Sonuç olarak

her $i \in \mathbb{N}$ için

$$\pi_\alpha(y_i) = \pi_\alpha(x_i) \quad (\forall \alpha \in S_i) \text{ ve } \pi_\alpha(y_i) = 2 \quad (\forall \alpha \in W(\aleph_1) \setminus S_i)$$

biçiminde tanımlanan y_i noktaları için $Y = \{y_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq U$ olur, üstelik Y kümesinin A_2 kümesine ait bir limit noktası vardır dolayısıyla $\overline{U} \cap A_2 \neq \emptyset$ gerçekleşir. Buradan X uzayında A_1 ve A_2 ayrık kapalı kümelerini kapsayan ayrık açık kümelerin bulunmadığı, kısacası X uzayının normal *olmadığı* anlaşılır. Sonuçta her düzenli Lindelöf uzayı normal olduğundan X in bir Lindelöf uzayı olmadığı anlaşılır. Öte yandan $(D(2))^{2^{\aleph_0}}$ çarpım uzayı, ayrılabilir *olmayan* bir Lindelöf uzayıdır. Yine Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi'nden yararlanarak ayrılabilir ve Lindelöf olan ancak ikinci sayılabilir olmayan bir uzay tanımlanabilir. Örneğin $(D(2))^{2^{\aleph_0}}$ tıkHz uzayı bu özelliklere sahiptir. Bu şekilde bazı özelliklere sahip olan fakat bazı özelliklere sahip olmayan uzay örnekleri artırılabilir.

Bilindiği gibi iki Lindelöf uzayının çarpım uzayı, üstelik çarpıma katılan uzaylar ayrılabilir olsa dahi Lindelöf olmayabilir; (bkz. Örnek III.5) ancak herhangi sayıda ayrılabilir uzayın çarpım uzayının bir zayıf Lindelöf uzayı olduğu Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi'nin kolay bir sonucudur. (Herhangi bir X uzayı için $wc(X) \leq c(X)$ olduğundan Sonuç III.14 e bakmak yeterlidir.) Buradan $(D(\aleph_0))^{\aleph_1}$ çarpım uzayının bir zayıf Lindelöf uzayı olduğu ancak Lindelöf uzayı *olmadığı* anlaşılır.

Kısım III.6 da ayırma aksiyomları ile kardinal değişmezlerden yararlanarak uzayların kardinaliteleri için bazı sınırlar verilmiştir. Örneğin herhangi bir T_2 uzayı X için

$$(2) \quad |X| \leq \min\{2^{L(X) \cdot \chi(X)}, 2^{c(X) \cdot \chi(X)}, 2^{s(X) \cdot \psi(X)}, 2^{e(X) \cdot \Delta(X)}\}$$

geçerlidir. Bir uzayın kardinalitesi için bulunan sınırlar, o uzayın topolojik özellikleri hakkında bilgi verir. Örneğin herhangi bir T_2 uzayı X için $|X| \leq 2^{c(X) \cdot \chi(X)}$ olduğundan, $2^{\aleph_0}$ dan fazla noktası bulunan birinci sayılabilir bir T_2 uzayının sayılabilir zincir koşulunu *gerçeklemediği* anlaşılır. Ayrıca Arhangel'skii Teoremi'nden $2^{\aleph_0}$ dan fazla noktası bulunan metriklenebilir uzayların Lindelöf uzayı *olmadığı* sonucuna ulaşılır. Bu biçimdeki sonuçları artırmak mümkündür. (2) deki sınırların herhangi birisinden

yararlanarak şu sonuca ulaşılır: Kontinyum hipotezi ($\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$) geçerlidir ancak ve yalnız $2^{\aleph_0}$ dan az noktalı tüm metriklenebilir uzaylar ikinci sayılabilirdir. Eğer $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ ise $\aleph_1$ den az noktalı tüm metriklenebilir uzayların ikinci sayılabilir olacağı apaçıktır. Tersine $2^{\aleph_0}$ dan az noktalı tüm metriklenebilir uzayların ikinci sayılabilir olması varsayımı altında eğer $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ olsaydı, $D(\aleph_1)$ kesikli uzayı metriklenebilir olduğundan $\aleph_1 = w(D(\aleph_1)) \leq \aleph_0$ çelişkisi bulunurdu. O halde bu varsayım altında $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ gerçekleşmelidir.

Kolayca görülebilir ki bir X uzayının tıkHz alt kümelerinin kümesi $K(X)$ ile gösterilirse, $|X| \leq |K(X)|$ olur dolayısıyla $|K(X)|$ için bulunan üst sınırlar $|X|$ için de üst sınırdır. Ters iddia doğru olmak zorunda *değildir* şöyle ki

$$\max\{2^{L(X) \cdot \chi(X)}, 2^{c(X) \cdot \chi(X)}, (d(X))^{\chi(X)}, (nw(X))^{\psi(X)}\} < |K(X)|$$

gerçeklenecek biçimde X uzayları tanımlanabilir. Örneğin $X_0 = (0, 1] \times \{0\}$ ve $X_1 = [0, 1) \times \{1\}$ olmak üzere, $X = X_0 \cup X_1$ kümesi üzerinde, her $x \in (0, 1)$ gerçel sayısı ve var olup $0 < x - \frac{1}{k_x} < x + \frac{1}{k_x} < 1$ gerçekleyen $k_x \in \mathbb{N}$ sayısı aracılığıyla $(x, 0) \in X$ noktasındaki yerel tabanı

$$\mathcal{B}_{(x,0)} = \{((x - \frac{1}{k}, x] \times \{0\}) \cup ((x - \frac{1}{k}, x) \times \{1\}) : k = k_x, k_x + 1, \dots\}$$

ve $(x, 1) \in X$ noktasındaki yerel tabanı

$$\mathcal{B}_{(x,1)} = \{((x, x + \frac{1}{k}) \times \{0\}) \cup ([x, x + \frac{1}{k}) \times \{1\}) : k = k_x, k_x + 1, \dots\}$$

biçiminde tanımlanan **Alexandroff çift ok uzayı** göz önüne alınsın. X uzayının X_0 ve X_1 alt uzaylarının $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ alt limit uzayı ile eşyapılı olduğu ve X in bir tıkHz T_2 uzayı olduğu bilinmektedir.(bkz. [3] veya [4]) Üstelik Alexandroff çift ok uzayını tanımlayan topoloji, X üzerinde sözlük sıralamasının belirlediği sıralama topolojisinden başka birşey *değildir*. Ayrıca X uzayı için $hL(X) = hd(X) = \chi(X) = \aleph_0$ ve $w(X) = nw(X) = 2^{\aleph_0}$ gerçekleştiği biliniyor. Bu durumda $Y = X \times X$ çarpım uzayı göz önüne

alınırsa, $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_a) \times (\mathbb{R}, \mathbb{R}_a)$ çarpım uzayı, Y uzayının bir alt uzayı ile eşyapılı olduğundan, Y uzayının $2^{\aleph_0}$ kardinaliteli *kesikli* alt kümesi dolayısıyla en az $2^{2^{\aleph_0}}$ sayıda açık kümesi (böylece en az $2^{2^{\aleph_0}}$ sayıda kapalı alt kümesi) vardır. O halde tıkHz Y uzayında tüm kapalı kümeler tıkHz olacağından

$$2^{2^{\aleph_0}} \leq |K(Y)| \leq |\mathcal{F}| = o(Y) \leq 2^{w(Y)} = 2^{2^{\aleph_0}}$$

ve böylece

$$\max\{2^{L(Y) \cdot \chi(Y)}, 2^{c(Y) \cdot \chi(Y)}, (d(Y))^{\chi(Y)}, (nw(Y))^{\psi(Y)}\} = 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} = |K(Y)|$$

gerçeklendiği görülür.

Öte yandan X bir T_2 uzayı ise $|X|$ için daha önce bulduğumuz $2^{hL(X)}$, $2^{e(X) \cdot \Delta(X)}$, $2^{w(X)}$, $2^{2^{s(X)}}$ sınırları $|K(X)|$ için de üst sınırdır. Gerçekten, bir T_2 uzayında tüm tıkHz kümeler kapalı olduğundan $|X| \leq |K(X)| \leq |\mathcal{F}| = o(X) \leq \min\{2^{w(X)}, 2^{2^{s(X)}}\}$ gerçekleşir. $hL(X) = \kappa$ yazılırsa, Sonuç III.36 nedeniyle $|X| \leq 2^\kappa$ olur. $\psi(X) \leq hL(X) \leq \kappa$ olduğundan her $x \in X$ için

$$\bigcap \{\bar{V} : V \in \mathcal{V}_x\} = \{x\} \text{ ve } |\mathcal{V}_x| \leq \kappa$$

koşulları gerçekleşecek biçimde $\mathcal{V}_x$ ailesi vardır. $\mathcal{V} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{V}_x$ ailesi aracılığıyla

$$\mathcal{W} = \{\bigcap \mathcal{S} : \mathcal{S} \in \mathcal{P}_{<\aleph_0}(\mathcal{V})\} \text{ ve } \mathcal{G} = \{\bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \in \mathcal{P}_{\leq \kappa}(\mathcal{W})\}$$

aileleri tanımlanırsa $\{X - K : K \in K(X)\} \subseteq \mathcal{G}$ olur; çünkü keyfi bir $K \in K(X)$ üyesi göz önüne alınırsa, her $x \in X - K$ için bir $W_x \in \mathcal{W}$ elemanı $K \cap W_x = \emptyset$ olacak şekilde var olup bu elemanlarla tanımlanan $\{W_x\}_{x \in X \setminus K}$ ailesi, $X - K$ kümesinin bir açık örtülüğü olur. O halde $hL(X) = \kappa$ olduğundan $X - K = \bigcup_{x \in A} W_x$, $|A| \leq \kappa$ koşulları gerçekleşecek biçimde bir $A \subseteq (X - K)$ alt kümesi vardır. Sonuç olarak $X - K = \bigcup_{x \in A} W_x \in \mathcal{G}$ olur ve böylece

$$|\{X - K : K \in K(X)\}| = |K(X)| \leq |\mathcal{G}| \leq 2^\kappa$$

bulunur. Ayrıca $|X| \leq 2^{e(X) \cdot \Delta(X)}$ olup her $H \in K(X)$ için $w(H) = \Delta(H) \leq \Delta(X) \cdot e(X) = \kappa_0$ olduğundan $\overline{B} = H, |B| \leq \kappa_0$ gerçekleştirilecek biçimde bir $B \subseteq H$ alt kümesi vardır dolayısıyla

$$|K(X)| \leq |\mathcal{P}_{\leq \kappa_0}(X)| \leq 2^{\kappa_0}$$

gerçeklenir. Öte yandan herhangi bir T_1 uzayı X için $|K(X)| \leq 2^{e(X) \cdot \text{psw}(X)}$ gerçekleştirildiği bilinmektedir. (bkz. [2])

V SON DEĞERLENDİRMELER ve ÖNERİLER

Yapılan çalışmada bir topolojik uzayın kardinal değişmezleri arasındaki bağıntı ve eşitsizlikler elde edilerek o uzayın hangi topolojik özelliklere sahip olup olmadığı araştırılmıştır. Ayrıca topolojide bilinen bazı ünlü sonuçlar kardinal değişmezler aracılığıyla genelleştirilmiştir. Bilindiği gibi bir uzayın kardinal değişmezleri yalnızca o uzayın topolojik özellikleri hakkında *değil* o uzayın tıkızlaşmaları, o uzay üzerinde tanımlı sürekli ve gerçel değerli fonksiyonların uzayı gibi önemli uzayların topolojik özellikleri hakkında da bilgi verir.

Ünlü Hewitt-Pondiczery-Marczewski Teoremi, topolojide birçok aykırı örneğin tanımlanması açısından oldukça önemlidir. Bazı özelliklere sahip olan ancak bazı koşulları gerçekleştirmeyen uzay örnekleri aranırken bu teoreme sıklıkla başvurulur. Herhangi bir Tikhonov uzayı X için $d(C^*(X)) = w(\beta X)$ olduğunu söyleyen Smirnov Teoremi ise, $d(C^*(X))$ sayısının belirlenmesinin zor olduğu X uzayları için oldukça kullanışlıdır. Kardinal değişmezler arasındaki bağıntılardan yararlanarak topolojide bilinen bazı ünlü sonuçların daha basit ispatları verilebilir. Örneğin bir tıkız metriklenebilir uzayın ikinci sayılabilir olduğunu söyleyen sonuç, tıkız Hausdorff uzayların ağırlık sayısı ile köşegensel derecesinin eşit olması ve metriklenebilir uzayların köşegensel derecesinin $\aleph_0$ olması gerçeklerinin kolay bir sonucudur. Böylece kardinal değişmezler arasındaki bağıntı ve eşitsizliklerin ne kadar önemli olduğu tekrar gözlenmiş olur.

Topolojide kardinal değişmezlerle ilgili henüz çözülememiş çok sayıda problem vardır. "Herhangi bir T_2 uzayı X için $|X| \leq 2^{hd(X)}$ midir, $|Y| \leq 2^{s(Y) \cdot \psi(Y)} < |K(Y)|$ gerçekleşecek biçimde bir Y Hausdorff uzayı var mıdır, GKV veya YGKV nin geçerli *olmadığı* durumda $w(Z) < (w(Z))^{\aleph_0}$ gerçekleşecek biçimde sonsuz tıkız ve temel bağlantısız bir Z uzayı var mıdır?" gibi sorular buna örnek verilebilir. İlk sorunun cevabının birinci sayılabilir uzaylarda "olumlu" olduğu Kısım III.6 da $|X|$ için bulunan sınırlardan kolayca gözlenir.

Bundan sonra yapılacak olan, kardinal değişmezler arasındaki bağıntı ve eşitsizliklerden yararlanarak uzayların topolojik özelliklerini bulmak, bilinen ünlü sonuçlardan yararlanarak aykırı örnekler üretmek, topolojide bilinen bazı ünlü sonuçların daha basit ispatlarını yapmaya çalışmak ve henüz çözülememiş problemleri ele almak ve çözüm yollarını araştırmaktır.

KAYNAKLAR

- [1] *Comfort, W.W.: "A Survey of Cardinal Invariants", General Topology and its Applications, 1 (1971) 163-199*
- [2] *Hodel, R.: "Cardinal Functions I, Handbook of Set Theoretic Topology", Kunen, K. ve Vaughan, J.E. Editörler 1-61.*
- [3] *Ergun, N.: "Genel Topolojiye Giriş", baskıda.*
- [4] *Engelking, R.: "General Topology", Helderman Verlag Berlin, Sigma Series in Pure Mathematics Vol. 6 (1989).*
- [5] *Gillman, L.; Jerison, M.: "Rings of Continuous Functions", D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, (1960).*
- [6] *Comfort, W.W.; Hager, A.W.: "Estimates for The Number of Real-Valued Continuous Functions", Trans. Amer. Math. Soc., 150 (1970) 619-631.*
- [7] *Pierce, R.S.: "A Note on Complete Boolean Algebras", Proc. Amer. Math. Soc., 9 (1958) 892-896.*
- [8] *Hewitt, E.: "A Remark on Density Characters", Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946) 641-643.*
- [9] *Juhász, I.: "Cardinal Functions in Topology - Ten Years Later", Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1983).*
- [10] *Ergun, N.: "Kümeler Teorisine Giriş", Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, Türkiye, (2006).*
- [11] *Comfort, W.W; Gordon, H.: "Disjoint Open Subsets of $\beta X \setminus X$ ", Trans. Amer. Math. Soc, 111 (1964) 513-520.*

- [12] Comfort, W.W.: "Retraction and Other Continuous Maps from βX onto $\beta X \setminus X$ ", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114 (1965) 1-9.
- [13] Comfort, W.W.; Hager, A.W.: "Dense Subspaces of Some Spaces of Continuous Functions", *Math. Z.*, 114 (1970) 373-389.
- [14] Comfort, W.W.; Hager, A.W.: "The Relation $m^t = m$ in Stonian Spaces", *Notices Amer. Math. Soc.*, 17 (1970) 25 pages.
- [15] Efimov, B.: "Extremally Disconnected Bicomacta", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 172 (1967) 771-774. (Engl. transl. *Soviet. Math. Doklady*, 8 (1967) 168-171.)
- [16] Arhangel'skii, A.V.: "On The Cardinality of Bicomacta Satisfying The First Axiom of Countability", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 187 (1969) 967-968. (Engl. transl. *Math. Doklady* 10 (1969) 951-955.)
- [17] Mrowka, S.: "Some Consequences of Arhangel'skii's Theorem", *Bull. Acad. Sci. Ser. sci. math. astr. phys.*, 19 (1971) 373-376.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa KURUMEHMET, 20.04.1985 tarihinde Trabzon’da doğdu. 1998 yılında Cebeci Köyü İlköğretim Okulu’ndan, 2001 yılında Sağmalcılar Lisesi’nden, 2006 yılında Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden mezun oldu. 2006-2007 öğretim yılında Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde yüksek lisans yapmaya başladı.