

**T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

**Canan KARATAŞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ORTAÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI
Konya, 2009**

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Canan KARATAŞ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Ortaöğretim Anabilim Dalı

Matematik Öğretmenliği Programı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2009, 35 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Eşref HATIR

Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR

Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Bu çalışma, dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde, fark denklemlerinin çözümleri ve periyodikliği ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verildi.

Üçüncü bölümde $x_{n+1} = \frac{ax_{n-(2k+1)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+1} x_{n-i}}$ fark denkleminin çözümleri ve dördüncü bölümde

de $x_{n+1} = \frac{ax_{n-(k-1)}}{a + \prod_{i=0}^{k-1} x_{n-i}}$ fark denkleminin çözümleri incelendi.

Anahtar Kelimeler: Fark Denklemleri, Fark Denkleminin Çözümleri.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

A STUDY ON SOLUTIONS OF SOME DIFFERENCE EQUATIONS

Canan KARATAŞ

Selcuk University Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assist. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2009, 35 Pages

Jury: Prof. Dr. Eşref HATIR

Assoc. Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR

Assist. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

This study consists of four sections. In the first section, general definitions and theorems about difference equations are given.

In the second section, information about some difference equations' solutions and periodicity studied before is given.

In the third section, the solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{ax_{n-(2k+1)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+1} x_{n-i}}$ are investigated. In the fourth section, the solutions of the difference equation

$x_{n+1} = \frac{ax_{n-(k-1)}}{a + \prod_{i=0}^{k-1} x_{n-i}}$ are investigated.

Key Words : Difference Equation, Solutions of Difference Equation.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek lisans tez konusunu bana teklif eden, çalışmalarım boyunca karşılaştığım zor durumlarda yardımlarını esirgemeyen, katkılarıyla beni yönlendiren ve tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA' ya teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Canan KARATAŞ

Konya, 2009

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

1. BÖLÜM

FARK DENKLEMİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER.....1

2. BÖLÜM

GİRİŞ.....5

Rasyonel Fark Denklemlerinin Çözümleri ile İlgili Yapılmış Çalışmalar.....5

3. BÖLÜM

$x_{n+1} = \frac{ax_{n-(2k+1)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+1} x_{n-i}}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ.....11

4. BÖLÜM

$x_{n+1} = \frac{ax_{n-(k-1)}}{a + \prod_{i=0}^{k-1} x_{n-i}}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ.....21

SONUÇ VE ÖNERİLER.....32

KAYNAKLAR33

1. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin tanımlı olduğu aralıkta, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x), \dots$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x 'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x 'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemleri üzerinde duracağız.

Tanım 1.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin

$$E(y), E^2(y), E^3(y), \dots, E^n(y), \dots$$

gibi farklarını içeren bağıntılara fark denklemi denir.

Fark denklemlerinin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indisin farkına eşittir.

Birinci mertebeden bir fark denklemi;

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden bir fark denklemi;

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n)$$

şeklindedir.

Teorem 1.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere $f : I^{k+1} \rightarrow I$ sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

denklemini bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 1.2. (1.1) denkleminde

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$$

şartını sağlayan \bar{x} noktasına (1.1) denkleminin denge noktası denir.

Tanım 1.3. \bar{x} , (1.1) denkleminin denge noktası ve $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_0 \in I$ olmak üzere:

(i) Her $\varepsilon > 0$ için

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$$

iken her $n \geq 0$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa \bar{x} denge noktası kararlıdır denir.

(ii) \bar{x} denge noktası kararlı ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde,

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$$

şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa \bar{x} denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(iii) Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ ise \bar{x} denge noktasına çekim noktası denir.

(iv) Eğer \bar{x} denge noktası kararlı ve çekim noktası ise \bar{x} denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir.

(v) Eğer \bar{x} denge noktası kararlı değil ise kararsızdır denir.

(vi) Eğer

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \dots + |x_{-k} - \bar{x}| < r$$

ve bazı $N \geq 1$ sayıları için

$$|x_N - \bar{x}| \geq r$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa \bar{x} denge noktasına repeller denir.

Tanım 1.4. (1.1) denkleminde elde edilen

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^k \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\bar{x}, \dots, \bar{x}) y_{n-i} \quad (1.2)$$

denklemine, \bar{x} denge noktası civarında lineer denklem denir.

(1.2) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^k \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\bar{x}, \dots, \bar{x}) \lambda^{k-i} = 0 \quad (1.3)$$

şeklindedir.

Teorem 1.2. (Linear Kararlılık Teoremi)

(i) Eğer (1.3) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise \bar{x} denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer (1.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise \bar{x} denge noktası kararsızdır.

Tanım 1.5. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden \bar{x} denge noktasından ne büyük ne de küçük ise bu çözümlere \bar{x} denge noktası civarında salınımlıdır denir. Aksi halde bu çözümlere salınımlı değildir denir.

Tanım 1.6. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır denir.

Tanım 1.7. \bar{x} , (1.1) denkleminin denge noktası olsun. $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ dizisinin her elemanı \bar{x} denge noktasından büyük veya eşit, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-1} < \bar{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} < \bar{x}$ oluyorsa $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde, $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ dizisinin her elemanı \bar{x} denge noktasından küçük, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-1} \geq \bar{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} \geq \bar{x}$ oluyorsa $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir.

Tanım 1.8. Eğer bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde $n \geq -k$ olmak üzere her n tamsayısı için

$$x_{n+p} = x_n$$

olacak şekilde bir p pozitif tamsayısı var ise $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük p pozitif tam sayısına ise esas periyot denir.

Tanım 1.9. Eğer bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için

$$x_{n+p} = x_n$$

ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayıdır.

2. BÖLÜM

GİRİŞ

Bu çalışmada, tarafımızdan tanımlanan iki yeni rasyonel fark denkleminin çözümleri ele alınmıştır.

İlk olarak $x_{-(2k+1)}, x_{-(2k)}, \dots, x_0$ başlangıç şartları reel sayılar, $a \neq 0$, k pozitif bir tamsayı ve $x_{-(2k+1)}x_{-(2k)} \dots x_0 \neq a$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-(2k+1)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+1} x_{n-i}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

rasyonel fark denkleminin çözümleri elde edilmiş ve bu çözümlerin özellikleri incelenmiştir.

İkinci olarak $a > 0$, k pozitif bir tamsayı, $x_{-(k-1)}, x_{-(k-2)}, \dots, x_0$ başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-(k-1)}}{a + \prod_{i=0}^{k-1} x_{n-i}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

rasyonel fark denkleminin çözümleri elde edilmiştir.

Rasyonel Fark Denklemlerinin Çözümleri İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Bu kısımda rasyonel fark denklemlerinin çözümleri ve bu çözümlerin periyodikliği ile ilgili yapılmış çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Devault ve arkadaşları (1998) yaptıkları çalışmada; $A > 0$ ve x_{-2}, x_{-1}, x_0 başlangıç şartları için $x_{n+1} = \frac{A}{x_n} + \frac{1}{x_{n-2}}$ fark denkleminin çözümlerinin 2 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Valicenti (1999) yaptığı doktora tezinde; $x_{n+1} = \frac{a_n x_n + b_n}{x_{n-1}}$ Lyness fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini ve global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Camouzis ve Devault (2001) yaptıkları çalışmada; x_0, x_{-1} pozitif başlangıç şartları altında $p > 0$ için $x_{n+1} = p + \frac{x_{n-1}}{x_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ fark denkleminin global asimptotik kararlılığını ve periyodikliğini incelemiştir.

Patula ve Voulov (2002) yaptıkları çalışmada; $x_{n+1} = 1 + \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}}$ fark denkleminin çözümlerinin 2 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Stevic (2002) yaptığı çalışmada; $x_{n+1} = \frac{Bx_{n-1}}{B + x_n}$ fark denkleminin çözümlerini incelemiş ve

$$x_{2n} = x_0 \left(1 - x_1 \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{2j-1} \frac{1}{1 + x_i} \right), \quad x_{2n+1} = x_{-1} \left(1 - \frac{x_0}{1 + x_0} \sum_{j=0}^n \prod_{i=1}^{2j} \frac{1}{1 + x_i} \right)$$

çözümlerini elde etmiştir.

Mestel (2003) yaptığı çalışmada; pozitif başlangıç şartları altında

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{x_{n-1}} \text{ denkleminin periyodikliğini incelemiştir.}$$

Çinar (2004) yaptığı çalışmada; $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin

çözümlerini incelemiş ve

$$x_n = \begin{cases} x_{-1} \frac{\prod_{i=0}^{[(n+1)/2]-1} (2x_{-1}x_0^{i+1} + 1)}{\prod_{i=0}^{[(n+1)/2]-1} (2i+1)x_{-1}x_0 + 1}, & n \text{ tek ise} \\ x_0 \frac{\prod_{i=1}^{n/2} ((2i-1)x_{-1}x_0 + 1)}{\prod_{i=1}^{n/2} (2ix_{-1}x_0 + 1)}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

eşitliğini vermiştir.

Çinar (2004) yaptığı iki çalışmadan birincisinde; x_0, x_{-1} başlangıç şartları

altında $a, b > 0$ için $x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{1 + bx_{n-1}x_n}$ fark denkleminin, ikincisinde ise

$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + ax_{n-1}x_n}$ fark denkleminin çözümlerini elde etmiştir.

Stevic (2004) yaptığı çalışmada; $x_{n+1} = \frac{p + x_{n-(2s-1)}}{x_n + (2l + s) + 1}$ fark denkleminin

çözümlerinin, $p > 1, s, l \in \mathbb{N}$ için $2s$ periyotlu olduğunu göstermiştir.

Abu-Saris ve Al-Jubouri (2004) yaptıkları çalışmada; $x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodik olduğunu göstermişlerdir.

Taixiang (2005) yaptığı çalışmada; $x_{n+1} = p + \frac{x_{n-k}}{x_n}$ fark denkleminin çözümlerinin pozitif başlangıç şartları altında $p > 0$ için sınırlılığını incelemiştir.

Papaschinopoulos ve Schinas (2005) yaptıkları çalışmada; k çift bir sayı olmak üzere $x_{n+1} = p_n + \frac{x_{n-k}}{x_n}$ fark denkleminin çözümlerinin $k+1$ periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Berenhaut ve Stevic (2005) yaptıkları çalışmada; $x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 > 0$ için $x_{n+1} = \frac{1}{x_n x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-3} x_{n-4}}$ fark denkleminin çözümlerinin 3 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Abu Saris (2006) yaptığı çalışmada; $w_{-2}, w_{-1}, w_0 > 0$ başlangıç şartları altında $w_{n+1} = \frac{w_n + w_{n-2}}{w_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin çözümlerinin 4 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermiştir.

Aloqeili (2006) yaptığı çalışmada; $x_{-1}, x_0 \in R, a > 0$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{a - x_{n-1} x_n}$ rasyonel fark denkleminin çözümlerini incelemiş ve çözümleri için

$$x_n = \begin{cases} x_0 \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{a^{2i-1}(1-a) - (1-a^{2i-1})x_{-1}x_0}{a^{2i}(1-a) - (1-a^{2i})x_{-1}x_0}, & n \text{ çift ise} \\ x_{-1} \prod_{i=0}^{\frac{n+1}{2}} \frac{a^{2i-1}(1-a) - (1-a^{2i})x_{-1}x_0}{a^{2i+1}(1-a) - (1-a^{2i+1})x_{-1}x_0}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

eşitliğini vermiştir.

Aloqeili (2006) yaptığı çalışmada; $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_0 > 0$, $A > 0$ ve k herhangi pozitif bir tamsayı olmak üzere $x_{n+1} = \frac{x_{n-k}}{a + x_{n-k}x_n}$ fark denkleminin çözümlerini ve kararlılığını incelemiştir.

Knopf ve Huang (2007) yaptıkları çalışmada; α, A, β_i , ve B_i negatif olmayan sabitler olmak üzere $x_n = \frac{\alpha + \sum_{i=1}^k \beta_i x_{n-i}}{A + \sum_{i=1}^k B_i x_{n-i}}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını incelemiştir.

Hamza ve Klahat-Allah (2007) yaptıkları çalışmada; A, B, C negatif olmayan reel sayılar, l, k negatif olmayan tamsayılar ve $l \leq k$ için $x_{n+1} = \frac{Ax_{n-1}}{B + C \prod_{i=l}^k x_{n-2i}}$ fark denkleminin negatif olmayan denge noktasının asimptotik kararlılığını incelemiştir.

$$\text{Şimşek ve arkadaşları (2008) yaptıkları çalışmada; } x_{n+1} = \frac{x_{n-(5k+9)}}{1 + x_{n-4}x_{n-9}\dots x_{n-(5k+9)}}$$

fark denkleminin çözümlerini ve periyodikliğini incelemiştir.

Elsayed (2008) yaptığı çalışmada; x_{-1}, x_0 başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n-1}(x_n \pm 1)}$ fark denklemlerinin çözümlerini elde etmiştir.

Elsayed (2008) yaptığı çalışmada; x_{-1}, x_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar ve a, b, c, d pozitif sabitler olmak üzere $x_{n+1} = ax_n + \frac{bx_n x_{n-1}}{cx_n + dx_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerini incelemiştir.

Elabbasy ve Elsayed (2009) yaptıkları çalışmada; $x_{-r}, x_{-r+1}, \dots, x_0$ pozitif reel sayılar, $r = \max(l, k, p, q)$ negatif olmayan bir tamsayı ve a, b, c pozitif sabitler olmak üzere $x_{n+1} = \frac{ax_{n-l}x_{n-k}}{bx_{n-p} + cx_{n-q}}$ fark denkleminin çözümlerini incelemiştir.

3. BÖLÜM

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-(2k+1)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+1} x_{n-i}} \quad \text{FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ}$$

Bu bölümde $x_{-(2k+1)}, x_{-(2k)}, \dots, x_0$ başlangıç şartları reel sayılar, $a \neq 0$, k pozitif bir tamsayı ve $x_{-(2k+1)}x_{-(2k)} \dots x_0 \neq a$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-(2k+1)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+1} x_{n-i}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

fark denkleminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 3.1. $\{x_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$, (3.1) denkleminin bir çözümü olsun. O zaman $n = 0, 1, 2, \dots$ için (3.1) denkleminin bütün çözümleri

$$x_{2(k+1)n+1} = \frac{a^{n+1}x_{-(2k+1)}}{\left(-a + x_0x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}}, \quad (3.2)$$

$$x_{2(k+1)n+2} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} x_{-(2k)} \left(-a + x_0x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}, \quad (3.3)$$

$$x_{2(k+1)n+3} = \frac{a^{n+1}x_{-(2k-1)}}{\left(-a + x_0x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}}, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{ax_{-(2k-1)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+1} x_{2-i}} = \frac{ax_{-(2k-1)}}{-a + x_2 x_1 x_0 \dots x_{-(2k-1)}} \\
&= \frac{ax_{-(2k-1)}}{-a + \frac{1}{a} x_{-(2k)} \left(-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)} \right) \frac{ax_{-(2k+1)}}{-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}} x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k-1)}} \\
&= \frac{ax_{-(2k-1)}}{-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $n = 3$ için

$$\begin{aligned}
x_4 &= \frac{ax_{-(2k-2)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+1} x_{3-i}} = \frac{ax_{-(2k-2)}}{-a + x_3 x_2 x_1 x_0 \dots x_{-(2k-2)}} \\
&= \frac{ax_{-(2k-2)}}{-a + \frac{ax_{-(2k-1)}}{-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}} \frac{1}{a} x_{-(2k)} \left(-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)} \right) \frac{ax_{-(2k+1)}}{-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}} x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k-2)}} \\
&= \frac{ax_{-(2k-2)}}{-a + \frac{ax_{-(2k-1)} x_{-(2k)} x_{-(2k+1)} x_0 \dots x_{-(2k-2)}}{-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}}} \\
&= \frac{1}{a} x_{-(2k-2)} \left(-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Basit iterasyon yöntemiyle

$$x_5 = \frac{ax_{-(2k-3)}}{-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}},$$

$$x_6 = \frac{1}{a} x_{-(2k-4)} \left(-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)} \right),$$

. . .
. . .
. . .

$$x_{2k+1} = \frac{ax_{-1}}{-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}},$$

$$x_{2(k+1)} = \frac{1}{a} x_0 \left(-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)} \right)$$

olduğu görülür.

Yukarıda elde ettiğimiz bu eşitliklerden iddiamızın $n = 0$ için doğru olduğu açıktır. Şimdi iddiamızın $n - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim. O zaman (3.2), (3.3), ..., (3.2k+3) eşitliklerinden

$$x_{2(k+1)n-(2k+1)} = \frac{a^n x_{-(2k+1)}}{\left(-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)} \right)^n}, \quad (3.2k+4)$$

$$x_{2(k+1)n-(2k)} = \left(\frac{1}{a} \right)^n x_{-(2k)} \left(-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)} \right)^n, \quad (3.2k+5)$$

$$x_{2(k+1)n-(2k-1)} = \frac{a^n x_{-(2k-1)}}{\left(-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)} \right)^n}, \quad (3.2k+6)$$

$$x_{2(k+1)n-(2k-2)} = \left(\frac{1}{a} \right)^n x_{-(2k-2)} \left(-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)} \right)^n, \quad (3.2k+7)$$

. . .
. . .
. . .

$$x_{2(k+1)n-1} = \frac{a^n x_{-1}}{\left(-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}\right)^n}, \quad (3.4k+4)$$

$$x_{2(k+1)n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n x_0 \left(-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}\right)^n \quad (3.4k+5)$$

eşitliklerini yazabiliriz. (3.1) denklemi ve yukarıdaki eşitliklerden

$$x_{2(k+1)n+1} = \frac{ax_{2(k+1)n-(2k+1)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+1} x_{2(k+1)n-i}}$$

elde edilir. Ayrıca (3.2k+4), (3.2k+5), ..., (3.4k+5) eşitliklerinden

$$\prod_{i=0}^{2k+1} x_{2(k+1)n-i} = x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}$$

olduğu görülür. Buradan

$$x_{2(k+1)n+1} = \frac{a \frac{a^n x_{-(2k+1)}}{\left(-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}\right)^n}}{-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}} = \frac{a^{n+1} x_{-(2k+1)}}{\left(-a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$x_{2(k+1)n+2} = \frac{ax_{2(k+1)n-(2k)}}{-a + \prod_{i=-1}^{2k} x_{2(k+1)n-i}}$$

elde edilir. Ayrıca bulduğumuz son eşitlik ve (3.2k+5), (3.2k+6),..., (3.4k+5) eşitliklerinden

$$\prod_{i=-1}^{2k} x_{2(k+1)n-i} = \frac{ax_0x_{-1}\dots x_{-(2k+1)}}{-a + x_0x_{-1}\dots x_{-(2k+1)}}$$

olduğu görülür. Buradan

$$x_{2(k+1)n+2} = \frac{a\left(\frac{1}{a}\right)^n x_{-(2k)} \left(-a + x_0x_{-1}\dots x_{-(2k+1)}\right)^n}{-a + \frac{ax_0x_{-1}\dots x_{-(2k+1)}}{-a + x_0x_{-1}\dots x_{-(2k+1)}}}$$

$$x_{2(k+1)n+2} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} x_{-(2k)} \left(-a + x_0x_{-1}\dots x_{-(2k+1)}\right)^{n+1}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.4), (3.5),..., (3.2k+3) eşitliklerinin doğru olduğu gösterilebilir.

Aşağıdaki sonuçlar Teorem 3.1'den kolayca elde edilebileceği için ispatsız olarak verilmiştir.

Sonuç 3.1. $\{x_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$, (3.1) denkleminin bir çözümü olmak üzere $a > 0$ $x_{-(2k+1)}, x_{-(2k)}, \dots, x_0 > 0$ ve $x_{-(2k+1)}x_{-(2k)}\dots x_0 > a$ olduğunu kabul edelim. O zaman (3.1) denkleminin bütün çözümleri pozitiftir.

Sonuç 3.2. $\{x_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$, (3.1) denkleminin bir çözümü olsun. $a > 0$, $x_{-(2k+1)}, x_{-(2k)}, \dots, x_0 < 0$ ve $x_{-(2k+1)}x_{-(2k)}\dots x_0 > a$ olduğunu kabul edelim. O zaman (3.1) denkleminin bütün çözümleri negatiftir.

Sonuç 3.3. $\{x_n\}_{n=-(2k+1)}^{\infty}$, (3.1) denkleminin bir çözümü olmak üzere $a=1$, $x_{-(2k+1)}, x_{-(2k)}, \dots, x_0 > 0$ ve $x_{-(2k+1)} x_{-(2k)} \dots x_0 > 2$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2(k+1)n+i} = \begin{cases} 0, & i = 1, 3, \dots, 2k+1 \\ \infty, & i = 2, 4, \dots, 2k+2 \end{cases}$$

şeklindedir.

Örnek 3.1. (3.1) denkleminde $a=1$ ve $k=1$ olarak kabul edilirse $x_n x_{n-1} x_{n-2} x_{n-3} \neq -1$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-3}}{-1 + x_n x_{n-1} x_{n-2} x_{n-3}}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin bütün çözümleri

$$x_{4n+1} = \frac{x_{-3}}{(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^{n+1}},$$

$$x_{4n+2} = x_{-2} (-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^{n+1},$$

$$x_{4n+3} = \frac{x_{-1}}{(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^{n+1}},$$

$$x_{4n+4} = x_0 (-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^{n+1}$$

şeklindedir.

İspat. Denkleminde $n=0$ alınır

$$x_1 = \frac{x_{-3}}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}}$$

elde edilir. $n = 1$ için

$$x_2 = \frac{x_{-2}}{-1 + x_1 x_0 x_{-1} x_{-2}} = \frac{x_{-2}}{-1 + \frac{x_{-3}}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}} x_0 x_{-1} x_{-2}} = x_{-2} (-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})$$

elde edilir. Aynı zamanda $n = 2$ için

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_{-1}}{-1 + x_2 x_1 x_0 x_{-1}} = \frac{x_{-1}}{-1 + x_{-2} (-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}) \frac{x_{-3}}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}} x_0 x_{-1}} \\ &= \frac{x_{-1}}{(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})} \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $n = 3$ için

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{x_0}{-1 + x_3 x_2 x_1 x_0} \\ &= \frac{x_0}{-1 + \frac{x_{-1}}{(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})} x_{-2} (-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}) \frac{x_{-3}}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}} x_0} \\ &= \frac{x_0}{-1 + \frac{x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}}} = x_0 (-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}) \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıda elde edilen eşitliklerden iddiamızın $n=0$ için doğru olduğu görülür. Şimdi iddiamızın $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. O zaman

$$x_{4n-3} = \frac{x_{-3}}{(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^n},$$

$$x_{4n-2} = x_{-2} (-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^n,$$

$$x_{4n-1} = \frac{x_{-1}}{(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^n},$$

$$x_{4n} = x_0 (-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^n$$

şeklinde yazılabilir. Denklemimizden ve yukarıdaki eşitliklerden

$$\begin{aligned} x_{4n+1} &= \frac{x_{4n-3}}{-1 + x_{4n} x_{4n-1} x_{4n-2} x_{4n-3}} \\ &= \frac{\frac{x_{-3}}{(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^n}}{-1 + x_0 (-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^n \frac{x_{-1}}{(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^n} x_{-2} (-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^n \frac{x_{-3}}{(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^n}} \\ &= \frac{x_{-3}}{(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^{n+1}} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$x_{4n+1} = \frac{x_{-3}}{(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})^{n+1}}$$

elde edilir. Ayrıca

$$x_{4n+2} = \frac{x_{4n-2}}{-1 + x_{4n+1}x_{4n}x_{4n-1}x_{4n-2}}$$

olup

$$x_{4n+2} = \frac{x_{-2} \left(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}\right)^n}{-1 + \frac{x_{-3}}{\left(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}\right)^{n+1}} x_0 \left(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}\right)^n \frac{x_{-1}}{\left(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}\right)^n} x_{-2} \left(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}\right)^n}$$

$$= \frac{x_{-2} \left(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}\right)}{-1 + \frac{x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}}{-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}}}$$

$$= x_{-2} \left(-1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}\right)^{n+1}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer eşitliklerin de doğru olduğu gösterilebilir.

4. BÖLÜM

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-(k-1)}}{a + \prod_{i=0}^{k-1} x_{n-i}} \quad \text{FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ}$$

Bu bölümde $a > 0$, k pozitif bir tamsayı ve $x_{-(k-1)}, x_{-(k-2)}, \dots, x_0$ başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-(k-1)}}{a + \prod_{i=0}^{k-1} x_{n-i}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

fark denkleminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 4.1. $\{x_n\}_{n=-(k-1)}^{\infty}$, (4.1) denkleminin bir çözümü olsun. O zaman $n = 0, 1, 2, \dots$ için (4.1) denkleminin bütün çözümleri

$$x_{kn+1} = \frac{ax_{-(k-1)} \prod_{i=1}^n (a + kix_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{(a + x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}) \prod_{i=1}^n (a + (ki+1)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}, \quad (4.2)$$

$$x_{kn+2} = \frac{x_{-(k-2)} (a + x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}) \prod_{i=1}^n (a + (ki+1)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{(a + 2x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}) \prod_{i=1}^n (a + (ki+2)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}, \quad (4.3)$$

·
·
·

$$x_{kn+k-1} = \frac{x_{-1} (a + (k-2)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}) \prod_{i=1}^n (a + (ki+k-2)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{(a + (k-1)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}) \prod_{i=1}^n (a + (ki+k-1)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}, \quad (4.k)$$

$$x_{kn+k} = \frac{x_0 \left(a + (k-1)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^n \left(a + (ki+k-1)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)} \right)}{\left(a + kx_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^n \left(a + (ki+k)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)} \right)} \quad (4.k+1)$$

şeklindedir.

İspat. İspatımızı tümevarım metodu ile yapalım. (4.1) denkleminde $n = 0$ için

$$x_1 = \frac{ax_{-(k-1)}}{a + \prod_{i=0}^{k-1} x_{-i}} = \frac{ax_{-(k-1)}}{a + x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}}$$

elde edilir. $n = 1$ için

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{ax_{-(k-2)}}{a + \prod_{i=0}^{k-1} x_{1-i}} = \frac{ax_{-(k-2)}}{a + x_1x_0x_{-1}\dots x_{-(k-2)}} \\ &= \frac{ax_{-(k-2)}}{a + \frac{ax_{-(k-1)}}{a + x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}} x_0x_{-1}\dots x_{-(k-2)}} \\ &= \frac{x_{-(k-2)} \left(a + x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)} \right)}{a + 2x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}} \end{aligned}$$

elde edilir. $n = 2$ için

$$x_3 = \frac{ax_{-(k-3)}}{a + \prod_{i=0}^{k-1} x_{2-i}} = \frac{ax_{-(k-3)}}{a + x_2x_1x_0\dots x_{-(k-3)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ax_{-(k-3)}}{a + \frac{x_{-(k-2)}(a + x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{a + 2x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}} \frac{ax_{-(k-1)}}{a + x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}} x_0\dots x_{-(k-3)}} \\
&= \frac{x_{-(k-3)}(a + 2x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{a + 3x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}}
\end{aligned}$$

bulunur. Basit iterasyon yöntemiyle

$$x_4 = \frac{x_{-(k-4)}(a + 3x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{a + 4x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}},$$

$$x_5 = \frac{x_{-(k-5)}(a + 4x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{a + 5x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}},$$

.

.

.

$$x_k = \frac{x_0(a + (k-1)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{a + kx_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}}$$

olduğu görülür.

Yukarıda elde ettiğimiz eşitliklerden iddiamızın $n=0$ için doğru olduğu açıktır. Şimdi iddiamızın $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. O zaman (4.2), (4.3),..., (4.k+1) eşitliklerinden

$$x_{kn-(k-1)} = \frac{ax_{-(k-1)} \prod_{i=1}^{n-1} (a + kix_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{(a + x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}) \prod_{i=1}^{n-1} (a + (ki+1)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})},$$

$$\begin{aligned}
x_{kn-(k-2)} &= \frac{x_{-(k-2)} \left(a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}{\left(a + 2x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+2) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}, \\
&\quad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
&\quad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
&\quad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
x_{kn-1} &= \frac{x_{-1} \left(a + (k-2) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+k-2) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}{\left(a + (k-1) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+k-1) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}, \\
x_{kn} &= \frac{x_0 \left(a + (k-1) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+k-1) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}{\left(a + kx_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+k) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}
\end{aligned}$$

eşitliklerini yazabiliriz. (4.1) denklemi ve yukarıdaki eşitliklerden

$$x_{kn+1} = \frac{ax_{kn-(k-1)}}{a + \prod_{i=0}^{k-1} x_{kn-i}}$$

olup

$$\begin{aligned}
x_{kn+1} &= \frac{a \frac{ax_{-(k-1)} \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + kix_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}{\left(a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}}{a + \frac{ax_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + kix_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}{\left(a + kx_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+k) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{ax_{-(k-1)} \prod_{i=1}^{n-1} (a + kix_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{(a + x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}) \prod_{i=1}^{n-1} (a + (ki+1)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})} \\
= & \frac{ax_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)} \prod_{i=2}^{n-1} (a + kix_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{a + \prod_{i=2}^n (a + kix_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})} \\
& \frac{ax_{-(k-1)} \prod_{i=1}^{n-1} (a + kix_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{(a + x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}) \prod_{i=1}^{n-1} (a + (ki+1)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})} \\
= & \frac{ax_{-(k-1)} \prod_{i=1}^{n-1} (a + kix_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{a + knx_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)} + x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}} \\
& \frac{ax_{-(k-1)} \prod_{i=1}^{n-1} (a + kix_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{(a + x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}) \prod_{i=1}^{n-1} (a + (ki+1)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})} \cdot \frac{a + knx_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}}{a + (kn+1)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}} \\
= & \frac{ax_{-(k-1)} \prod_{i=1}^n (a + kix_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{(a + x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}) \prod_{i=1}^n (a + (ki+1)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$x_{kn+1} = \frac{ax_{-(k-1)} \prod_{i=1}^n (a + kix_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}{(a + x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)}) \prod_{i=1}^n (a + (ki+1)x_0x_{-1}\dots x_{-(k-1)})}$$

elde edilir. Yine (4.1) denkleminde

$$x_{kn+2} = \frac{ax_{kn-(k-2)}}{a + \prod_{i=1}^{k-2} x_{kn-i}}$$

yazabiliriz. Buradan son eşitliği de kullanarak

$$\begin{aligned}
 x_{kn+2} &= \frac{x_{-(k-2)} \left(a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}{\left(a + 2x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+2) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)} \\
 &= \frac{ax_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \prod_{i=1}^n \left(a + kix_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}{a + \frac{\left(a + (kn+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \left(a + kx_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+k) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}{a + \frac{x_{-(k-2)} \left(a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}{\left(a + 2x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+2) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}} \\
 &= \frac{ax_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)}}{a + \frac{ax_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)}}{a + (kn+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)}}} \\
 &= a \frac{x_{-(k-2)} \left(a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}{\left(a + 2x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^{n-1} \left(a + (ki+2) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)} \cdot \frac{a + (kn+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)}}{a \left(a + (kn+2) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)} \\
 &= \frac{x_{-(k-2)} \left(a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^n \left(a + (ki+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}{\left(a + 2x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^n \left(a + (ki+2) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}
 \end{aligned}$$

olup

$$x_{kn+2} = \frac{x_{-(k-2)} \left(a + x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^n \left(a + (ki+1) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}{\left(a + 2x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right) \prod_{i=1}^n \left(a + (ki+2) x_0 x_{-1} \dots x_{-(k-1)} \right)}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.4), (4.5),..., (4.k+1) eşitliklerinin doğru olduğu gösterilebilir.

Örnek 4.1. (4.1) denkleminde $a=1$ ve $k=4$ olarak kabul edilirse

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-3}}{1 + x_n x_{n-1} x_{n-2} x_{n-3}}$$

denklemini elde edilir. Elde edilen bu denklemin bütün çözümleri

$$x_{4n+1} = \frac{x_{-3} \prod_{i=1}^n [1 + (4i) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}]}{(1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}) \prod_{i=1}^n [1 + (4i+1) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}]},$$

$$x_{4n+2} = \frac{x_{-2} (1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}) \prod_{i=1}^n [1 + (4i+1) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}]}{(1 + 2x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}) \prod_{i=1}^n [1 + (4i+2) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}]},$$

$$x_{4n+3} = \frac{x_{-1} (1 + 2x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}) \prod_{i=1}^n [1 + (4i+2) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}]}{(1 + 3x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}) \prod_{i=1}^n [1 + (4i+3) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}]},$$

$$x_{4n+4} = \frac{x_0 (1 + 3x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}) \prod_{i=1}^n [1 + (4i+3) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}]}{(1 + 4x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}) \prod_{i=1}^n [1 + (4i+4) x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}]}$$

şeklindedir.

İspat. Denklemden $n = 0$ alınırsa

$$x_1 = \frac{x_3}{1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}}$$

elde edilir. $n = 1$ için

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{x_2}{1 + x_1 x_0 x_{-1} x_{-2}} = \frac{x_2}{1 + \frac{x_3}{1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}} x_0 x_{-1} x_{-2}} = \frac{x_2}{1 + \frac{x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}}{1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}}} \\ &= \frac{x_2 (1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})}{1 + 2x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}} \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda $n = 2$ için

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_1}{1 + x_2 x_1 x_0 x_{-1}} = \frac{x_1}{1 + \frac{x_2 (1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})}{1 + 2x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}} \frac{x_3}{1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}} x_0 x_{-1}} = \frac{x_1}{1 + \frac{x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}}{1 + 2x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}}} \\ &= \frac{x_1 (1 + 2x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})}{1 + 3x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}} \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $n = 3$ için

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{x_0}{1 + x_3 x_2 x_1 x_0} = \frac{x_0}{1 + \frac{x_1 (1 + 2x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})}{1 + 3x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}} \frac{x_2 (1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})}{1 + 2x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}} \frac{x_3}{1 + x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}} x_0} \\ &= \frac{x_0}{1 + \frac{x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}}{1 + 3x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}}} = \frac{x_0 (1 + 3x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3})}{1 + 4x_0 x_{-1} x_{-2} x_{-3}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıda elde edilen eşitliklerden iddiamızın $n=0$ için doğru olduğu görülür. Şimdi iddiamızın $n-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. O zaman

$$x_{4n-3} = \frac{x_{-3} \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{(1 + x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]},$$

$$x_{4n-2} = \frac{x_{-2} (1 + x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{(1 + 2x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i+2)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]},$$

$$x_{4n-1} = \frac{x_{-1} (1 + 2x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i+2)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{(1 + 3x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i+3)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]},$$

$$x_{4n} = \frac{x_0 (1 + 3x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i+3)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{(1 + 4x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i+4)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}$$

şeklinde yazılabilir. Denklemitimizden ve yukarıdaki eşitliklerden

$$x_{4n+1} = \frac{x_{4n-3}}{1 + x_{4n}x_{4n-1}x_{4n-2}x_{4n-3}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x_{-3} \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{(1 + x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]} \\ = & \frac{x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3} \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{(1 + 4x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i+4)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]} \\ & 1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{x_{-3} \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{(1+x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]} \\
= & \frac{x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3} \prod_{i=2}^{n-1} [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{1 + \frac{\prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i+4)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3} \prod_{i=2}^{n-1} [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}} \\
& \frac{x_{-3} \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{(1+x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]} \\
= & \frac{x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3} \prod_{i=2}^{n-1} [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{1 + \frac{\prod_{i=2}^n [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3} \prod_{i=2}^{n-1} [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}} \\
& \frac{x_{-3} \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{(1+x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]} \\
= & \frac{x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3} \prod_{i=2}^{n-1} [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{(1+4nx_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=2}^{n-1} [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]} \\
= & \frac{x_{-3} \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{(1+x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^{n-1} [1 + (4i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]} \frac{4nx_0x_{-1}x_{-2}x_{-3} + 1}{4nx_0x_{-1}x_{-2}x_{-3} + x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3} + 1} \\
= & \frac{x_{-3} \prod_{i=1}^n [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{(1+x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^n [1 + (4i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}
\end{aligned}$$

olup

$$x_{4n+1} = \frac{x_{-3} \prod_{i=1}^n [1 + (4i)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}{(1 + x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}) \prod_{i=1}^n [1 + (4i+1)x_0x_{-1}x_{-2}x_{-3}]}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer eşitliklerin de doğru olduğu gösterilebilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada,

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-(2k+1)}}{-a + \prod_{i=0}^{2k+1} x_{n-i}} \quad \text{ve} \quad x_{n+1} = \frac{ax_{n-(k-1)}}{a + \prod_{i=0}^{k-1} x_{n-i}}$$

fark denklemleri tanımlanmış, tanımlanan bu fark denklemlerinin çözümleri incelenmiş ve bu çözümlerle ilgili özellikler verilmiştir. Yeni yapılacak çalışmalarda yukarıdaki fark denklemlerinin ışığında katsayılar dizi veya fonksiyon şeklinde alınıp yeni fark denklemleri tanımlanabilir ve tanımlanan denklemlerin çözümleri üzerine çalışılabilir. Ayrıca yeni tanımlanacak fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı, kararlılığı ve global asimptotik kararlılığı da incelenebilir.

KAYNAKLAR

Abu-Saris, R. M. and Al-Jubouri, N. K., 2004, Characterization of rational periodic sequences II, *Journal of Difference Equations and Applications*, 10, 4, 409-418.

Abu-Saris, R. M., 2006, A note on the attractivity of period-four solutions of third-order rational difference equation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 12, 2, 233-235.

Aloqeili, M., 2006, Dynamics of a rational difference equation, *Applied Mathematics and Computation*, 176, 768-774.

Aloqeili, M., 2006, Dynamics of a *k*th order rational difference equation, *Applied Mathematics and Computation*, 181, 1328-1335.

Berenhaut, K. S. and Stevic, S., 2005, A note on the difference equation

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n x_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-3} x_{n-4}}, \text{ } *Journal of Difference Equations and Applications*, 11, 14,$$

1225-1228.

Camouzis, E. and Devault, R., 2001, Asymptotic behavior of solutions of

$$x_{n+1} = p + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \text{ } *Journal of Difference Equation Applications*, 7, 477-482.$$

Cinar, C., 2004, On the positive solutions of the difference equation

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1} x_n}, \text{ } *Applied Mathematics and Computation*, 150, 21-24.$$

Cinar, C., 2004, On the positive solutions of the difference equation

$$x_{n+1} = \frac{ax_{n-1}}{1 + bx_{n-1}x_n}, \textit{Applied Mathematics and Computation}, 156, 587-590.$$

Cinar, C., 2004, On the positive solutions of the difference equation

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + ax_{n-1}x_n}, \textit{Applied Mathematics and Computation}, 158, 809-812.$$

Devault, R., Ladas, G. and Schultz, W., 1998, On the recursive sequence

$$x_{n+1} = \frac{A}{x_n} + \frac{1}{x_{n-2}}, \textit{Proceedings of the American Mathematical Society}, 126, 11, 3257-3261.$$

Elabbasy, E. M. and Elsayed, E. M., 2009, Dynamics of a rational difference equation, *Chinese Annals of Mathematics- Series B.*, Vol. 30, No. 2, 187-198.

Elsayed, E. M., 2008, On the solution of recursive sequence of order two, *Fasciculi Mathematici*, No. 40, 6-13.

Elsayed, E. M., 2008, Qualitive behavior of a rational recursive sequence, *Indagationes Mathematicae.*, N.S. 19(2), 189-201.

Hamza, A. E. and Allah, R. K., 2007, Global behavior of a higher order difference equation, *Journal of Mathematics and Statistics*, 3(1), 17-20.

Knopf, P. M. and Huang, Y. S., 2008, On the boundedness character of some rational difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 14, No. 7, 769-777.

Mestel, B. D., 2003, On globally periodic solutions of the difference equation

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{x_{n-1}}, \textit{Journal of Difference Equations and Applications}, 9, 2, 201-209.$$

Papaschinopoulos, G. and Schinas, J., 2005, On a $(k+1)$ -th order difference equation with a coefficient of period $k+1$, *Journal of Difference Equation and Applications*, 11, 5, 215-225.

Patula, W. T. and Voulov, H. D., 2002, On the oscillation and periodic character of a third-order rational difference equation, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131, 3, 905-909.

Simsek, D., Cinar, C. and Yalcinkaya, I., 2008, On the recursive sequence

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-(5k+9)}}{1 + x_{n-4}x_{n-9}\dots x_{n-(5k+9)}}, \text{ Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 12, No. 5,}$$

1087-1099.

Stevic, S., 2002, On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{g(x_n)}$, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 6(3), 405-414.

Stevic, S., 2004, A note on periodic character of a difference equation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 10, 10, 929-932.

Taixiang, S., 2005, On non-oscillatory solutions of the recursive sequence

$$x_{n+1} = p + \frac{x_{n-k}}{x_n}, \text{ Journal of Difference Equations and Applications, 11, 6, 483-485.}$$

Valicenti, S., 1999, Periodicity and Global Attractivity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).